IFT.TD-05/92

2

ANÁLISE INDEPENDENTE DE GAUGE E REDUÇÃO HAMILTONIANA COMPLETA DA GRAVITAÇÃO INDUZIDA EM DUAS DIMENSÕES

Fernando P. Devecchi

Tese de doutoramento realizada sob
a orientação dos Profs. Maria C. B. Abdalla e
e Elcio Abdalla no Instituto de Física Teórica
da UNESP.

São Paulo

1992

ao meu avô doido, Battista Devecchi, e à Cristina Villanova.

AGRADECIMENTOS

Aos orientadores Elcio e Cristina Abdalla pelo profissionalismo, a tranquilidade nos momentos de dificuldade e pela correção paciente do texto. Aos amigos da sala 3 Clisthenis, Sam, Dimiter, e Koko pelo convivio pessoal e profissional.

RESUMO

Analisamos neste trabalho ambos os modelos de gravitação induzida, pura e acoplada à matéria, a partir de dois pontos de vista: uma análise clássica e quântica independente de gauge para o modelo puro e uma análise clássica via espaço de fase reduzido para ambos modelos, introduzindo vínculos fixadores de gauge que dependem explicitamente do tempo.

ABSTRACT

We analyze in this work two dimensional induced gravity both pure and coupled to matter fields along two approaches: quantum and classical gauge independent analysis for the pure model and a classical study via reduced phase space for both models, introducing gauge fixing constraints which depend explicitly on time.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Uma das questões mais importantes em física teórica é saber se a interação gravitacional pode ser tratada de uma maneira análoga às outras interações fundamentais o que implicaria, em caso afirmativo, que sua descrição deveria ser feita nos moldes das teorias quânticas de campos. De fato, a teoria geral da relatividade é uma teoria puramente clássica e representaria, na melhor das hipóteses, uma aproximação de uma formulação mais fundamental da gravitação assim como o eletromagnetismo de Maxwell é uma aproximação para a teoria da eletrodinâmica quântica. Este problema não está resolvido ainda[12] pois envolve diversas e sérias dificuldades tanto técnicas como de interpretação.

Dentre as diversas tentativas de uma versão quântica da gravitação a sua formulação via teorias de cordas[8] tem sido vista com promissora. A partir de vários trabalhos, já desde meados dos anos 70 quando Wess e Zumino[24] conceberam a idéia de supersimetria espaço-temporal, passou a ser vista como um candidato a uma teoria de unificação de todas as interações fundamentais. Porém, nos anos 80, a ligação entre a teoria da gravitação e teoria de cordas surgiu de uma nova maneira, a partir do trabalho de Polyakov[6] em teorias de cordas não críticas. Polyakov tratou o problema da corda bosônica[8] introduzindo uma métrica bidimensional que descreve a superfície que a corda induz ao "mover-se" no espaço-tempo (sua "folha de mundo"). Com a presença desta métrica além da invariância por reparametrizações surge uma nova simetria, a invariância de Weyl sobre a folha de mundo bidimensional. A presença destas duas simetrias faz com que as componentes da métrica possam ser eliminadas, e assim as equações de movimento para as coordenadas da corda são obtidas da mesma forma que na velha formulação de Nambu-Goto[8]. O ponto fundamental do trabalho de Polyakov foi a demonstração de que a nível quântico a simetria de Weyl é quebrada, o que implica que um dos graus de liberdade da métrica se torna dinâmico. De fato isto só ocorre fora da dimensão crítica D=26 (para o espaço-tempo de 26 dimensões não há anomalia de Weyl). Se a partir destes resultados interpretarmos a teoria da corda bosônica como uma teoria de campos bosônicos (as coordenadas da corda) imersos num campo gravitacional (a métrica bidimensional) estaremos perante uma teoria de gravitação quântica em duas dimensões, segundo Polyakov em outro importante trabalho[7]. De fato, apesar da gravitação de

Einstein ser trivial em duas dimensões a integração sobre os campos de matéria induz a uma ação efetiva não trivial para o campo gravitacional. Para se chegar a estes resultados diversos elementos delicados de teorias de campos, tanto a nível clássico como quântico devem ser estudados em detalhe.

A teoria da gravitação é um exemplo de teoria de gauge pois possui um grupo de simetrias locais que a caracteriza: as transformaçoes gerais de coordenadas. Se quisermos uma formulação Hamiltoniana desta teoria devemos proceder de acordo com o método de Dirac[3] que nos ensina a encontrar o espaço de fase físico da teoria. Uma discussão objetiva destas técnicas está presente no capítulo 1 desta tese.

Como dissemos anteriormente a teoria da gravitação bidimensional surge pela presença de uma anomalia, a anomalia de Weyl, e a ação que caracteriza a evolução do campo gravitacional é uma ação induzida (uma ação semiclássica). Os métodos de quantização deste tipo particular de teoria via método de Feynman e via quantização canônica estão apresentados no capítulo 2 deste trabalho.

Nos trabalhos pioneiros[7][19] sobre a quantização da gravitação induzida duas fixações de gauge eram utilizadas: uma delas era feita no chamado gauge de cone de luz e a outra no gauge conforme. Independentemente da escolha os resultados em ambos os casos apareceram em completa concordância, apesar das inúmeras dificuldades que esta análise apresentou. No capítulo 3 apresentamos uma revisão destas idéias fundamentais para estudo da teoria da gravitação induzida.

Motivados por estes resultados trabalhamos em ambas as formulações clássica e quântica independente de gauge, a fim de confirmarmos os resultados fundamentais para o modelo. Um outro assunto de importância é o estudo da fixação de gauge da gravitação induzida, que por ser uma teoria invariante por reparametrizações, é aparentemente imune ao método de redução Hamiltoniana proposto por Dirac[15] onde um espaço de fase reduzido (o espaço de fase físico) é procurado. Estes assuntos estão apresentados no capítulo 4 desta tese.

CAPÍTULO 1
TEORIAS DE GAUGE COMO TEORIAS CLÁSSICAS DE CAMPOS

Apresentamos de maneira sucinta, neste primeiro capítulo uma visão sobre as informações básicas necessárias para a construção de uma teoria clássica de campos que apresenta invariância de gauge, com a finalidade de se construir, num passo posterior, a versão quântica desta teoria. Nosso roteiro está baseado inicialmente no formalismo Lagrangeano a partir do qual construimos uma versão Hamiltoniana, apresentando as técnicas especiais que devem ser utilizadas no caso da teoria ser invariante por transformações locais nos seus campos.

• Versão Lagrangeana de uma teoria de campos

O ponto inicial para uma versão lagrangena de uma teoria de campos é a existência de uma ação para a qual possa ser aplicado o princípio variacional de Hamilton a fim de obtermos as equações de movimento para os campos presentes no modelo,

$$S = \int dv L(\varphi, \partial\varphi) \quad , \tag{1.1}$$

$$\delta S = \int [L]_A \delta\varphi dv = 0 \Rightarrow [L]_A = \frac{\partial L}{\partial \varphi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi^A)} \right) = 0 \quad , \tag{1.2}$$

$$dv \equiv dx^D \qquad ,$$

onde φ representa os campos da teoria, $\partial\varphi$ suas derivadas, e D é o número de dimensões espaço-temporais. A expressão final em (1.2) representa as equações de Euler-Lagrange (E-L).

Nosso objetivo é resolver as equações de E-L para os campos da teoria, obtendo sua evolução temporal. Portanto, a pergunta é: dadas as condições iniciais, que requisitos devem ser satisfeitos para obtermos soluções únicas (na medida em que dadas as condições iniciais, elas estejam bem determinadas) das equações de Euler-Lagrange. A resposta[1] é dada pela construção da chamada matriz Hessiana:

$$W_{AB} = \frac{\partial^2 L}{\partial(\partial_0 \varphi^A)\partial(\partial_0 \varphi^B)} \quad , \tag{1.3}$$

juntamente com a condição

$$det W_{AB} \neq 0 \quad . \tag{1.4}$$

É possível demonstrar[1] que esta condição é necessária e suficiente para garantirmos a unicidade das soluções das equações de Euler-Lagrange, dadas as condições iniciais. Na próxima seção apresentamos como podemos obter uma formulação Hamiltoniana de uma teoria de campos partindo da formulação Lagrangeana.

• O formalismo Hamiltoniano para uma teoria de campos

Levando-se em conta que estamos partindo de uma formulação Lagrangeana, a formulação Hamiltoniana começa a ser construida a partir da definição dos momentos canonicamente conjugados aos campos:

$$\Pi_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^k} \qquad k = 1....N \quad . \tag{1.5}$$

Com eles podemos construir a Hamiltoniana da teoria:

$$H = \int d\mathrm{x} \quad \mathcal{H}(\varphi, \Pi) \quad ,$$

$$\mathcal{H}(\varphi, \Pi) = [\Pi^a \dot{\varphi}_a - L(\varphi, \partial\varphi)] \quad , \tag{1.6}$$

onde $d\mathrm{x}$ representa a integração sobre os parâmetros espaciais. A passagem para o formalismo Hamiltoniano envolve o seguinte ponto: Para se passar do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano de maneira unívoca a seguinte condição deve se satisfeita[1]:

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial \partial_0 \varphi^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial(\partial_0 \varphi^A)\partial(\partial_0 \varphi^B)} = W_{ki} \quad , \quad det W_{ki} \neq 0 \quad . \tag{1.7}$$

De acordo com a seção anterior podemos afirmar, usando (1.7), que somente haverá uma passagem unívoca para o formalismo Hamiltoniano se houver soluções únicas para as equações de movimento. Como veremos nas próximas seções este ponto é fundamental para se estabelecer uma ligação com a presença de simetrias no modelo considerado, o que implica que este ponto deve ser estudado com cuidado dada a importância da presença de simetrias numa teoria de campos.

Quando a condição (1.7) é satisfeita o conjunto de variáveis (φ,Π), conhecido como espaço de fase, é ortogonal (os campos são componentes mutuamente independentes) e a evolução temporal das grandezas que tomam valores neste espaço pode ser expressa na forma

$$\frac{d}{dt}A(\varphi,\Pi)=\frac{\partial A}{\partial t}+\{A,H\} \quad , \tag{1.8}$$

onde $A(\varphi,\Pi)$ é uma função qualquer do espaço de fase. Os colchetes na expressão acima representam os parênteses de Poisson entre duas variáveis do espaço de fase, a tempos iguais:

$$\{F(t,\mathbf{x}),G(t,\mathbf{y})\}=\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial G}{\partial\Pi}-\frac{\partial F}{\partial\Pi}\frac{\partial G}{\partial\varphi} \quad . \tag{1.9}$$

A partir desta definição podemos obter os chamados parênteses fundamentais entre os campos, que são de importância básica para se construir uma teoria quântica de campos:

$$\{\varphi^a(\mathbf{x}),\varphi^b(\mathbf{y})\}=0=\{\Pi_c(\mathbf{x}),\Pi_d(\mathbf{y})\} \quad , \tag{1.10}$$

$$\{\varphi^a(\mathbf{x}),\Pi_b(\mathbf{y})\}=\delta^a_b\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad . \tag{1.11}$$

Estes são os pontos básicos de ambas as formulações. No caso de teorias de gauge veremos que a condição (1.7) não é satisfeita, o que faz com que certas técnicas particulares devam ser adotadas. É o que será apresentado na próxima seção.

• Análise clássica de uma teoria de gauge

Em 1951 Anderson e Bergmann[2] demonstraram que teorias de campo que são invariantes por transformações locais não satisfazem a condição (1.7), e portanto não possuem soluções bem determinadas para suas equações de movimento. Este fato pode ser visto de maneira qualitativa observando que uma indeterminação nas soluções das equações de movimento representa uma liberdade de escolha para trajetórias físicas no espaço de configurações, que estabelece uma relação de equivalência entre elas. Se existir um processo de transformação que ligue estas trajetórias estaremos na presença de uma transformação de simetria. O fato da condição (1.7) não ser satisfeita implica também que a formulação Hamiltoniana fica comprometida. O que veremos nesta seção é como adaptar as técnicas apresentadas nas seções anteriores no caso das teorias de gauge.

A condição (1.7) serve para classificar Lagrangeanas em duas categorias: Lagrangeanas **singulares** que são aquelas que possuem o determinante da matriz Hessiana nulo e as **regulares** cujo determinante não se anula. Podemos afirmar então que uma teoria de gauge possui necessariamente uma Lagrangeana singular. Analisemos este ponto com um pouco mais de cuidado.

Uma transformação de simetria pode ser expressa na forma geral

$$\tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} \quad , \tag{1.12}$$

$$\tilde{\varphi}^{A}(\tilde{x}) = \varphi^{A}(x) + \delta\varphi^{A}(x) \quad . \tag{1.13}$$

Se esta transformação preservar a forma das equações de movimento para os campos ela será, por definição, uma transformação de simetria. Uma maneira de se garantir esta preservação é impor que

$$JL(\tilde{\varphi}, \tilde{\partial}\tilde{\varphi}) - L(\varphi, \partial\varphi) = \partial^{\mu}\Lambda_{\mu} \quad , \tag{1.14}$$

$$J = \frac{\partial\tilde{x}}{\partial x} \quad . \tag{1.15}$$

Se o processo (1.12-13) respeitar (1.14-15) então ele representa uma transformação de simetria. Λ é uma função dos campos e dos parametros x^{μ}.

O raciocínio de Anderson e Bergmann está baseado no fato de que a expressão (1.14) implica em certas identidades, conhecidas como identidades de Bianchi generalizadas[4], substituindo nela as relações (1.12-13)

$$\Theta_{k}^{A}[L]_{A} - \partial_{\mu}(\Psi_{k}^{A\mu}[L]_{A}) \equiv 0 \quad , \tag{1.16}$$

onde Θ e Ψ são certas funções dos campos, suas derivadas e dos parâmetros. Se escrevermos as derivadas de Euler-Lagrange na forma

$$[L]_A = V_A(\varphi, \partial\varphi) - W^{\mu\nu}_{AB}(\varphi, \partial\varphi)\partial_\mu\partial_\nu\varphi^B \quad , \tag{1.17}$$

com

$$V_A = \frac{\partial L}{\partial\varphi^A} - \frac{\partial^2 L}{\partial(\partial_\mu\varphi^A)\partial\varphi^B}\partial_\mu\varphi^B \quad , \tag{1.18}$$

$$W^{\mu\nu}_{AB} = \frac{\partial^2 L}{\partial(\partial_\mu\varphi^A)\partial(\partial_\nu\varphi^B)} \quad , \tag{1.19}$$

e as usarmos na expressão (1.16) obteremos (isolando o termo de derivada tripla em φ)

$$\Psi^{A\mu}_k(\varphi, \partial\varphi)W^{\nu\rho}_{AB}(\varphi, \partial\varphi)\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\varphi^B + ... \equiv 0 \quad , \tag{1.20}$$

o que implica nas relações[4]

$$\Psi^{A[\mu}_k W^{\nu\rho]}_{AB}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\varphi^B \equiv 0 \quad , \tag{1.21}$$

onde índices iguais não representam contração de Einstein. O símbolo [ ] significa simetrização nos índices μ, ν, e ρ, pelo fato da tripla derivada em φ ser completamente simétrica nestes índices. Podemos, a partir de (1.21), concluir em particular que

$$\Psi^{A0}_k W^{00}_{AB} \equiv 0 \quad , \tag{1.22}$$

mostrando que a matriz possui autovetores nulos, ou seja seu determinante é nulo e portanto a Lagrangeana deve ser singular. **Uma teoria de gauge é então caracterizada por uma Lagrangeana singular.**

A definição de transformação de simetria da expressão (1.14) é exatamente a que nos permite construir o teorema de Noether, relacionando estas transformações com quantidades conservadas. Para descobrirmos quem são as quantidades conservadas basta estudarmos o comportamento da ação sob uma transformação de forma nos campos da teoria[1]:

$$\bar{\delta}\varphi_A = \delta\varphi_A - \delta x^\mu\partial_\mu\varphi_A \quad , \tag{1.23}$$

onde $\bar{\delta}$ representa variação de forma. A nova ação tem a forma

$$S' = S + \delta S \qquad , \tag{1.24}$$

$$\delta S[\varphi] = \int d\mathrm{x} \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi_A)}\delta\varphi_A + \delta x^\mu L\right) + [L]_A \delta\varphi_A\right] \qquad . \tag{1.25}$$

Lembrando da expressão (1.14) teremos que a transformação (1.23) será uma simetria se

$$[L]_A \delta\varphi_A = \partial_\mu J^\mu \qquad , \tag{1.26}$$

onde J^μ representa as componentes do chamado quadrivetor corrente de Noether que será uma quantidade conservada sobre as trajetórias físicas do espaço de configurações pois

$$[L]_A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \partial_\mu J^\mu = 0 \qquad . \tag{1.27}$$

Vimos nesta seção que se quisermos trabalhar com teorias de gauge no formalismo Lagrangeano devemos adotar certos cuidados adicionais pois a presença de simetrias estabelece o caráter singular da Lagrangeana. Na próxima seção veremos como construir uma versão Hamiltoniana a partir de Lagrangeanas singulares e como obter as informações clássicas relevantes de uma teoria de gauge neste formalismo.

• Formalismo Hamiltoniano no caso singular: O método de Dirac

Assim como no caso de Lagrangeanas regulares, a construção do formalismo Hamiltoniano para as singulares começa com a definição dos momentos (equação 1.5). Como a condição (1.7) não é satisfeita o posto R da matriz Hessiana é menor que N (que representa a dimensão da Hessiana). Isto implica que as relações (1.5) só podem ser resolvidas para R velocidades $\dot{\varphi}^a$:

$$\dot{\varphi}^a = f^a(\varphi, \Pi_b, \dot{\varphi}^e) \qquad a = 1.....R \qquad , \tag{1.28}$$

onde Π_b representa R momentos. $\dot{\varphi}^e$ é o conjunto das (N-R) velocidades restantes. As expressões (1.28) implicam[1] na existência de (N-R) relações entre variáveis do espaço de fase conhecidas como vínculos Hamiltonianos:

$$\Pi_d - g_d(\varphi, \Pi_b) = \phi_d(\varphi, \Pi) = 0 \qquad , \tag{1.29}$$

onde g_d são (N-R) funções bem determinadas dos campos e dos momentos Π_b. Estes vínculos são chamados de **primários**, e surgem diretamente da definição dos momentos. Estas relações nos mostram uma outra forma de vermos o caso especial que as teorias de gauge representam, pois as variáveis do espaço de fase não são mais independentes, comprometendo a versão Hamiltoniana usual da teoria. No caso singular a Hamiltoniana (chamada de Hamiltoniana canônica) passa a depender apenas dos campos e os momentos Π_b[1]:

$$H = \int d\mathbf{x}\mathcal{H}_c(\varphi, \Pi_b) \qquad ,$$

$$\mathcal{H}_c(\varphi, \Pi_b) = \Pi_k \dot{\varphi}^k - L(\varphi, \dot{\varphi}) \qquad ; k = 1, ..., N. \tag{1.30}$$

Nesta expressão está subentendido que quando este índice assume os valores d, Π_d deve ser substituido pelas funções g_d. No caso em que o índice k assume os valores a, as velocidades devem ser substituidas pelas funções f^a da expressão (1.28).

Com a Hamiltoniana (1.30) as equações de movimento assumem a forma (lembrando que $\dot{\Pi}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}$)[3]

$$\dot{\varphi}^a = \frac{\partial H_c}{\partial \Pi_a} + \dot{\varphi}^e \frac{\partial g_e}{\partial \Pi_a} \quad ,$$

$$\dot{\Pi}_k = -\frac{\partial H_c}{\partial \varphi^k} - \dot{\varphi}^e \frac{\partial g_e}{\partial \varphi^k} \qquad . \tag{1.31}$$

Vemos que estas equações tem como característica fundamental a presença de funções indeterminadas, as velocidades $\dot{\varphi}^e$, que mostram a não unicidade na dinâmica do sistema, ou seja, uma indeterminação na evolução temporal das variáveis do espaço de fase.

Nas teorias correspondentes a Lagrangeanas regulares, as equações de movimento podem ser expressas na forma (1.8), fazendo uso dos parênteses de Poisson. No caso singular isto é em princípio impossível, pois como vimos as variáveis do espaço de fase não são mais independentes. Porém Dirac recuperou[3] a possibilidade de se usar os parênteses de Poisson no caso de Lagrangeanas singulares, criando o conceito de igualdade fraca. Isto é, seja $F(\varphi, \Pi)$ uma função qualquer do espaço de fase. Esta função será fracamente nula ($F \approx 0$) se ela se anular sobre a superfície definida pelas relações de vínculo (1.29). Caso também seja zero fora da superfície F será fortemente nula ($F = 0$).

Com estas definições é possível escrever as equações de movimento (1.31) como segue[3]:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}^a &\approx \{\varphi^a, H_t\} \quad , \\
\dot{\Pi}^i &\approx \{\Pi^i, H_t\} \quad .
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

Estas expressões mostram que de uma maneira geral as equações de movimento para as variáveis do espaço de fase (A) podem ser escritas na forma

$$
H_t = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}_t(x) \quad , \tag{1.33a}
$$

$$
\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_c + \mu^e \phi_e \quad , \tag{1.33b}
$$

$$
\dot{A}(\varphi, \Pi) \approx \{A, H_t\} \quad , \tag{1.34}
$$

onde as variáveis μ são coeficientes proporcionais às velocidades indeterminadas, e H_t representa a chamada Hamiltoniana total. A equação (1.34) indica que devemos adotar a Hamiltoniana total como o verdadeiro gerador da dinâmica se quisermos preservar a estrutura dos parênteses de Poisson.

Aparentemente todas as informações necessárias para se conhecer a evolução temporal de um sistema Hamiltoniano correspondente a uma teoria de gauge estão contidas em (1.34) com a presença das funções indeterminadas μ^e. Porém outros cuidados devem ser tomados. Precisamos garantir que as relações de vínculo (1.29) se preservem no tempo, como condição de consistência da teoria. Devemos ter então que

$$
\dot{\phi}_d \approx \{\phi_r, H_c\} + \int dx \mu^s(x) \{\phi_d, \phi_s(x)\} \approx 0 \quad . \tag{1.35}
$$

Este processo pode gerar duas situações distintas:

a) O sistema de equações (1.35) é resolvido para os coeficientes μ, dando-lhes um valor definido.

b) O sistema de equações implica em novas relações entre variáveis do espaço de fase (no caso em que $det\{\phi_d, \phi_s\} = 0$), chamados de vínculos secundários para os quais devemos repetir o processo de consistência a partir de (1.35). Este processo deve se esgotar num número finito de passos pois caso contrário a teoria é completamente vinculada, tornando-se trivial.

A situação final[12] deve ser a seguinte:

Existe um sub-espaço de fase Λ_f definido pelas relações de vínculo,

$$\phi_r \approx 0 \qquad (r = (R+1), ..., N) \qquad \text{vínculos} \quad \text{primários} \quad , \tag{1.36}$$

$$\chi_\rho \approx 0 \qquad (\rho = 1....l) \qquad \text{vínculos} \quad \text{secundários} \quad . \tag{1.37}$$

O conjunto completo dos secundários não deverá gerar mais vínculos através do processo de consistência (1.35).

Uma vez obtido o conjunto completo de vínculos é importante fazer a seguinte classificação: um vínculo será de **primeira classe** se seu parênteses de Poisson com o conjunto completo de vínculos for nulo, caso contrário será chamado de vínculo de **segunda classe**. Vamos supor que do conjunto de $(N - R + l)$ vínculos, k sejam de primeira classe. Esta classificação está relacionada com o estudo de simetrias que a teoria de gauge possui, tal com veremos na próxima seção.

Uma outra questão importante é saber quantas funções μ são determináveis. Demonstra-se[1] que permanecem arbitrárias tantas funções μ quantos forem os vínculos primários de primeira classe. Este ponto também está relacionado com as propriedades de simetria da teoria de gauge. Estudaremos este ponto na próxima seção.

Estes fatos permitem[1] escrever as equações de movimento na forma

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + \int dxv_j(x)\{A, \phi^j(x)\} - \int dzdw\{A, \bar{\phi}^v(z)\}\Delta^{-1}_{vu}(z,w)\{\bar{\phi}^u(w), H_c\} \quad , \tag{1.38}$$

onde v_j representa os coeficientes indeterminados, ϕ^j os vínculos primários de primeira classe, $\bar{\phi}$ os vínculos de segunda classe e

$$\Delta^{\lambda u} = \{\bar{\phi}^\lambda, \bar{\phi}^u\} \tag{1.39}$$

é a matriz dos vínculos de segunda classe. Δ^{-1} representa a inversa desta matriz.

Estas expressões nos dão a evolução temporal de qualquer variável do espaço de fase para uma teoria de gauge que apresenta um número (k) de vínculos de primeira classe e um número $(N-R+l-k)$ de vínculos de segunda classe. Na próxima seção discutiremos o papel dos vínculos de segunda classe.

• Vínculos de segunda classe e parênteses de Dirac

Nesta seção vamos supor que nossa teoria de campos apresente somente vínculos de segunda classe. Neste caso as equações de movimento (1.37) adotam a forma

$$\dot{A}(\varphi,\Pi) \approx \{A, H_c\} - \int dzdw\{A,\phi^\nu(z)\}\Delta^{-1}_{\nu\mu}(z,w)\{\phi^\mu(w),H_c\} \quad . \tag{1.40}$$

Os vínculos de segunda classe representam graus de liberdade espúrios da teoria[1], pois eles não fazem parte do sub-espaço físico que os observáveis da teoria definem, de maneira que é desejável ter um algorítmo que os elimine identificando assim o espaço de fase físico da teoria.

Para eliminar estes vínculos Dirac[3] construiu um processo que envolve a substituição dos parênteses de Poisson por novos parênteses, hoje conhecidos com parênteses de Dirac

$$\{A_1,A_2\}_D = \{A_1,A_2\} - \int dzdw\{A_1,\phi^\lambda(z)\}\Delta^{-1}_{\lambda\mu}(z,w)\{\phi^\mu(w),A_2\} \quad , \tag{1.41}$$

onde as quantidades A_i são variáveis quaisquer do espaço de fase. Usando os parênteses de Poisson não é mais necessário fazer diferença entre igualdades fracas e fortes; de fato, sendo ϕ um vínculo

$$\begin{aligned}\{A,\phi^\lambda\}_D &= \{A,\phi^\lambda\} - \int dzdw\{A,\phi^\nu(z)\}\Delta^{-1}_{\mu\nu}(z,w)\{\phi^\mu(w),\xi^\lambda\}\\ &= \{A,\phi^\lambda\} - \delta^\lambda_\nu\{A,\phi^\nu\} \equiv 0 \quad ,\end{aligned} \tag{1.42}$$

ou seja, os vínculos podem ser impostos como sendo fortemente nulos a partir do momento em que estamos usando os parênteses de Dirac.

A questão fundamental é, porém, saber se é valido substituir os parênteses de Dirac pelos de Poisson quando se trata de obter as equações de movimento. Podemos observar que elas não se alteram

$$\{A, H_t\}_D = \{A, H_t\} - \int dz dw \{A, \phi^\alpha(z)\} \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(z, w) \{\phi^\beta(w), H_t\} \approx \{A, H_t\} = \dot{A} \quad (1.43)$$

Temos então que os parênteses de Dirac representam a estrutura essencial da descrição clássica Hamiltoniana para uma teoria de gauge no intuito de se construir, a partir dela, uma versão quântica. O processo de quantização nestes casos será discutido no próximo capítulo.

Na próxima seção analisamos a relação entre a presença de vínculos de primeira classe e simetrias das teorias de gauge.

• Simetrias e vínculos de primeira classe

Nesta seção veremos como os vínculos de primeira classe estão relacionados com as simetrias locais presentes numa teoria de gauge. Para isto vamos considerar inicialmente uma teoria que possui só vínculos de primeira classe, deixando para o final da seção um caso geral.

Numa teoria que possui só vínculos de primeira classe as equações de movimento são dadas pela expressão (usando 1.37)

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + \int dx v_j(x) \{A, \phi_j(x)\} \quad , \quad (1.44)$$

onde A é uma função qualquer do espaço fase, v_j são multiplicadores arbitrários e ϕ_j os vínculos primários de primeira classe. Já aqui podemos ver uma característica das teorias de gauge sob o ângulo do método de Dirac: a dinâmica não fica completamente determinada. Para fixá-la precisamos fazer uma escolha de multiplicadores, o que representa uma escolha de gauge.

Escolhendo dois gauges distintos estamos representando duas trajetórias diferentes. Mas do ponto de vista dinâmico elas devem representar a mesma situação física pois estamos partindo da mesma configuração inicial. Tomemos então duas trajetórias que diferem apenas por uma escolha de multiplicadores v_j (uma escolha de gauge). Em primeira ordem devemos ter, para as equações de movimento

$$A_v(t) = A_0 + \frac{dA}{dt}\delta t = A_0 + \delta t\left[\{A, H_c\} + \int dx v_i(x)\{A, \phi_i(x)\}\right] \quad ,$$

$$A_{v'}(t) = A_0 + \{A, H_c\} + \int dx v'_j(x)\{A, \phi_j(x)\} \quad . \tag{1.45}$$

Calculamos agora a diferença entre os valores de A para as duas trajetórias, no mesmo instante t

$$A_v - A_{v'} = \int dx \delta t [v_i(x) - v'_i(x)]\{A, \phi_i(x)\} \quad , \tag{1.46}$$

o que está nos mostrando que os vínculos primários de primeira classe são geradores das transformações de gauge. Este conceito de gerador para os vínculos primários de primeira classe pode na verdade ser estendido para todos os vínculos de primeira classe

$$A_{v'} - A_v = \{G_{v-v'}, A(t)\} \quad ,$$

$$G_{v-v'} = \int dx \epsilon_m^{[n-k]}(x)\phi_k^m(x) \qquad m = 1, ..., n \quad , \tag{1.47}$$

onde $\epsilon^{[i]}$ significa "derivada" i-esima no tempo do parâmetro da transformação, ϕ_k indica a geração do vínculo (primário, secundário, etc.) e n é o número total de gerações. Esta idéia foi desenvolvida inicialmente por Anderson e Bergmann[2]. O objetivo deste método é o seguinte: dadas as invariâncias locais da teoria de gauge considerada queremos descobrir quais são os geradores dessas simetrias no formalismo Hamiltoniano. Após uma análise das tranformações de gauge locais no formalismo Lagrangeano Anderson e Bergmann sugeriram que o gerador no formalismo Hamiltoniano se escrevesse na forma(1.47) sem supor "a priori" que as variáveis ϕ fossem vínculos. Sabemos que no formalismo Hamiltoniano as transformações que não mudam a forma das equações de movimento são as chamadas tranformações canônicas. No caso de teorias que possuem vínculos o gerador destas transformações satisfaz

$$\delta H = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t} = c^\mu \delta_\mu \phi \quad , \tag{1.48}$$

onde c^μ são certos multiplicadores (funções do espaço de fase) e ϕ os vínculos primários. Substituindo (1.47) em (1.48) obtemos

$$\begin{aligned} \{\phi_i^0, H\} &= c.l.p. \quad , \\ \phi_i^{k-1} + \{\phi_i^k, H\} &= c.l.p. \quad , \\ \phi_i^n &= c.l.p. \quad , \end{aligned} \tag{1.49}$$

onde $c.l.p.$ significa "combinação linear de vínculos primários". O algoritmo mostra então que de fato os geradores das transformações de gauge são os vínculos de primeira classe, pois as equações (1.49) não são mais do que as equações que geram as sucessivas gerações de vínculos (condições de consistência). Existe ainda a restrição de que os geradores ϕ_i satisfaçam a uma álgebra, pois assim estaremos garantindo a possibilidade de transformações de gauge finitas. Esta condição garante que os vínculos que vão surgindo no algoritmo (1.49) sejam todos de primeira classe.

Finalizamos esta seção considerando o caso em que a teoria de gauge apresenta tanto vínculos de primeira classe como de segunda classe. Nesta situação podemos proceder da seguinte maneira: eliminamos primeiro os graus de liberdade espúrios caracterizados pelos vínculos de segunda classe, substituindo os parênteses de Poisson pelos de Dirac, tal como descrevemos na seção anterior. Após este passo teremos pela frente uma teoria exclusivamente de primeira classe, com certas simetrias locais associadas, as quais podem ser fixadas (processo de fixação de gauge). Este processo de fixação é o que veremos a seguir neste capítulo.

- **A fixação de gauge**

A maneira usual de se fixar a liberdade de gauge de uma teoria no contexto do método de Dirac, é adicionar condições sobre as variáveis do espaço de fase na forma de vínculos externos (chamados de vínculos fixadores). O número de vínculos externos deve ser igual ao número de parâmetros das transformações de simetria presentes na teoria. Para exemplificar um caso bastante geral de escolha de gauge vamos considerar uma teoria com vínculos de primeira classe ϕ^α definindo uma superfície vincular de dimensão $2N - M$ onde $2N$ é a dimensão original do espaço de fase e M é o número de vínculos de primeira classe. Por outro lado os observáveis da teoria são quantidades que por definição tem parênteses de Poisson (Dirac) nulo com qualquer vínculo de primeira classe

$$\{F, \phi^\alpha\} = f^\alpha_\beta \phi^\beta \approx 0 \qquad , \tag{1.50}$$

onde f^α_β são certas funções do espaço de fase. F representa uma grandeza observável e ϕ^α os vínculos. Quando fazemos a fixação de gauge estas equações se transformam num conjunto de equações diferenciais acopladas a ser satisfeito por F na superfície vincular definida por todos os vínculos presentes (primeira classe+fixadores). Para ver estes fatos com um pouco mais de detalhe faremos uma mudança de variáveis passando das originais $x \equiv (\varphi, \Pi)$ para um novo conjunto $x' \equiv (\phi^\alpha, Y^I)$ onde o índice I vai de $(M+1)$ a $2N$. Podemos escrever então

$$\{F, \phi^\alpha\} \approx \{Y^I, \phi^\alpha\} \frac{\partial F}{\partial Y^I} \quad . \tag{1.51}$$

Como F é um observável podemos escrever:

$$g^{\alpha I} \frac{\partial F}{\partial Y^I} = 0 \quad , \quad g^{\alpha I} = \{\phi^\alpha, Y^I\} \qquad , \tag{1.52}$$

que determinam F dados M valores iniciais, e F está definida numa superfície $2N - M$ dimensional. Esta superfície é definida por:

$$w^\alpha(q,p) = 0 \qquad \phi_i = 0 \quad , \tag{1.53}$$

com

$$det|\{w^\alpha, \phi^\beta\}| \neq 0 \qquad , \tag{1.54}$$

onde w representa os vínculos externos.

Os vínculos externos devem necessariamente satisfazer (1.54), pois só assim está garantido o processo de fixação de gauge. Por outro lado eles devem ser compatíveis com as equações de movimento, de maneira que devemos testar sua consistência temporal (equação (1.34)). Se o sistema for de segunda classe estas condições de consistência fixarão os multiplicadores indeterminados.

- **O formalismo Hamiltoniano estendido**

Uma maneira alternativa de se tratar teorias com vínculos está baseada no conceito de **Hamiltoniana estendida**, definida por:

$$H_e = \int d\mathbf{x}\mathcal{H}_e(x)$$

onde

$$\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_c + \nu_n \phi^n \qquad n = 1, ..., k \quad , \tag{1.55}$$

e ϕ^n são vínculos de primeira classe.

No tratamento Hamiltoniano usando a Hamiltoniana estendida os geradores das simetrias locais da teoria se escrevem da forma[4]

$$G_\epsilon = \int d\mathbf{x}\epsilon_n(x)\phi^n(x) \qquad , \tag{1.56}$$

satisfazendo a relação

$$\{\phi^m, \phi^n\} = C_l^{mn}\phi^l \qquad . \tag{1.57}$$

Com esta forma do gerador podemos ver que existe um número maior ou igual de simetrias do que no caso da Hamiltoniana total pois há um gerador independente para cada parâmetro das transformações (ϵ). Este fato pode ser explicado da seguinte maneira: o formalismo Hamiltoniano estendido não é equivalente á teoria Lagrangeana original como sistema dinâmico, ambas formulações são somente equivalentes para o estudo da evolução temporal dos **observáveis**[1] da teoria.

Finalizamos aqui a análise clássica de uma teoria de gauge via método de Dirac. Resumindo, reafirmamos que devemos partir da Lagrangeana inicial da teoria, calcular os momentos canonicamente conjugados junto com os possíveis vínculos primários, seguindo com a construção da Hamiltoniana, a consistência temporal dos vínculos primários até acharmos o conjunto completo de vínculos. Finalmente procede-se à fixação de gauge introduzindo-se vínculos externos.

CAPÍTULO 2

QUANTIZAÇÕES CANÔNICA E FUNCIONAL DE TEORIAS DE GAUGE

Neste capítulo descreveremos de maneira sucinta diversos métodos de quantização de teorias de gauge. Apresentamos a formulação operatorial conhecida como quantização canônica, e métodos funcionais ligados essencialmente às integrais de trajetória de Feynman, ambos no caso particular em que há presença de vínculos Hamiltonianos.

• A quântização canônica

O processo de quantização canônica usual parte da hipótese que exista uma teoria clássica de campos consistente, caracterizada por uma Lagrangeana L regular da qual podemos obter momentos canonicamente conjugados (Π) aos campos (φ) presentes na teoria. A partir deste ponto os campos e seus momentos (que podemos chamar genericamente de campos clássicos) são substituidos por operadores que irão atuar sobre os estados quânticos

$$(\varphi, \Pi) \rightarrow (\hat{\varphi}, \hat{\Pi}) \qquad , \tag{2.1}$$

onde o símbolo "$\wedge$ " denota operador. Estes operadores devem satisfazer relações de "comutação" canônicas, idênticas às que existem no estágio clássico, só que agora não mais realizadas via parênteses de Poisson, mas via comutadores entre operadores a tempos iguais

$$[\hat{\varphi}(x,t), \hat{\Pi}(y,t)] = i\hbar\delta(x-y) \qquad . \tag{2.2}$$

A Hamiltoniana é construida a partir destes operadores, seguindo sua definição clássica

$$\hat{H} = \int dx[\hat{\Pi}\dot{\hat{\varphi}} - L(\hat{\varphi})] \qquad . \tag{2.3}$$

Pelo fato de estarmos trabalhando com operadores devemos ter uma prescrição de ordenamento[3], mas não entraremos aqui na discussão desta questão. Uma vez de posse de um operador Hamiltoniano, a evolução temporal de qualquer operador da teoria é dada por

$$\dot{\hat{F}} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{F}, \hat{H}] \qquad . \tag{2.4}$$

No caso de estarmos trabalhando com teorias de gauge (Lagrangeanas singulares) devemos adotar certos procedimentos adicionais para lidarmos com a presença de vínculos a nível quântico.

Consideremos, num primeiro caso, uma teoria que possui só vínculos de primeira classe e num segundo caso uma que só possui vínculos de segunda classe.

Como dissemos anteriormente, a nível quântico todas as funções do espaço de fase se transformam em operadores. Consequentemente, assim também o fazem os vínculos (ϕ). Desta forma quando atuam sobre os vetores de estado eles devem satisfazer

$$\hat{\phi}|\psi\rangle = 0 \quad , \tag{2.5}$$

ou seja, os vínculos impoem restrições sobre os estados. Este fato deve ser válido para todos os vínculos de maneira que tomando dois quaisquer devemos ter

$$\hat{\phi}_i|\psi\rangle = 0 \qquad \hat{\phi}_j|\psi\rangle = 0 \qquad . \tag{2.6}$$

Agindo na primeira expressão com o operador $\hat{\phi}_j$ e na segunda com $\hat{\phi}_i$ obtemos facilmente

$$[\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j]|\psi\rangle = 0 \qquad . \tag{2.7}$$

Observamos que este comutador deve ser no máximo uma combinação linear de operadores de vínculo pois não queremos restrições adicionais às já impostas por estes sobre os estados. Devemos ter assim que este comutador deve satisfazer

$$[\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j] = C_{ijk}\hat{\phi}_k \qquad , \tag{2.8}$$

onde C_{ijk} denota operadores construidos a partir dos operadores de campo da teoria. A expressão acima está nos mostrando que os operadores de vínculo devem formar uma álgebra fechada, ou melhor, devem continuar sendo quantidades de primeira classe. Em outras palavras queremos que as simetrias que existiam a nível clássico, sejam preservadas a nível quântico, como uma condição de consistência do processo de quantização. Frequentemente, porém, temos que nos enfrentar com o problema das anomalias[23]: as simetrias que caracterizam a teoria de gauge não são preservadas a nível quântico. Neste caso a álgebra (2.8) apresentaria uma extensão, a qual caracterizaria a anomalia.

No caso de uma teoria de gauge apresentar só vínculos de segunda classe, estes não podem ser impostos sobre os estados como no caso anterior pois a condição

$$[\hat{\chi}_m, \hat{\chi}_n]|\psi\rangle = 0 \tag{2.9}$$

não é válida, já que os vínculos de segunda classe não formam uma álgebra. Faz-se necessário que os vínculos de segunda classe sejam identidades entre operadores

$$\hat{\chi}(\hat{\varphi}, \hat{\Pi}) = 0 \quad . \tag{2.10}$$

Lembrando que numa teoria de segunda classe devemos trabalhar com os parênteses de Dirac no lugar dos de Poisson, a prescrição para a quantização é alterada para

$$\{F, G\}_D \rightarrow \frac{i}{\hbar}[\hat{F}, \hat{G}] \quad , \tag{2.11}$$

onde F e G são duas funções do espaço de fase e D denota parênteses de Dirac. É importante notar que uma teoria de gauge pode ser quantizada canonicamente de duas formas diferentes: primeiramente reduzindo-se o espaço de fase via uma fixação de gauge, teoria de segunda classe, ou tratando-a como uma teoria Hamiltoniana de primeira classe, onde a construção da sua quantização canônica parte das equações (2.5). A princípio estes dois procedimentos deveriam ser equivalentes. Porém[15] quando estamos tratando a quantização de teorias invariantes por reparametrizações gerais a quantização via espaço de fase reduzido parece não enxergar o setor físico da teoria, aniquilando completamente o espaço de fase. Retomaremos esta discussão no capítulo 4, analisando a quantização da teoria de gravitação induzida em duas dimensões.

Antes de finalizarmos esta seção faremos uma breve apresentação sobre o tratamento das simetrias dentro da prescrição da quantização canônica.

As simetrias, a nível quântico, são representadas por transformações unitárias, cujos geradores são operadores unitários que deixam o operador Hamiltoniano invariante

$$\hat{H}' = U\hat{H}U^\dagger - Ui\hbar\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger = \hat{H} \quad , \tag{2.12}$$

com

$$UU^\dagger = \mathbf{I} = U^\dagger U \quad . \tag{2.13}$$

Se os observáveis se transformam como

$$\hat{F}' = U\hat{F}U^\dagger = \hat{F} \quad , \tag{2.14}$$

eles satisfazem às mesmas equações de movimento anteriores à transformação (2.4).

Em geral, no caso de simetrias, costuma-se trabalhar com transformações unitárias infinitesimais:

$$U = I - \frac{i}{\hbar}\hat{Q} \quad , \tag{2.15}$$

onde $\hat{Q}$ é um operador hermitiano infinitesimal. Em primeira ordem de $\hbar$ as equações (2.12) se transformam em

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{Q} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{Q}, \hat{H}] = 0 \quad . \tag{2.16}$$

Sabemos que o gerador $\hat{Q}$ está relacionado com os chamados operadores de correntes $\hat{J}$

$$\hat{Q} = \int dx \hat{J}^0(t,x) \quad , \tag{2.17}$$

que satisfazem

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{J}^0 + \frac{1}{i\hbar}[\hat{J}^0, \hat{H}] = -\partial_i \hat{J}^i \quad . \tag{2.18}$$

A equação (2.18) implica que os valores esperados da divergência da corrente obedecem

$$\langle\alpha|\partial_\mu J^\mu|\beta\rangle = 0 \quad , \tag{2.19}$$

que representa uma versão quântica do teorema de Noether. Se este valor esperado for diferente de zero, estaremos na presença de uma anomalia. Em certos casos[23] o surgimento de uma anomalia como uma quebra na conservação das correntes está relacionado com a caracterização presente a partir da expressão (2.8), onde a anomalia surgia como uma extensão na álgebra dos vínculos a nível quântico

Na próxima seção examinaremos como trabalhar com uma teoria de gauge do ponto de vista de um outro método de quantização: O método de integrais de trajetória de Feynman. Veremos que as técnicas tradicionais de quantização funcional devem ser adaptadas à presença de simetrias, fornecendo novas idéias sobre como quantizar uma teoria de campos, em especial no cálculo de funções de Green locais.

- **Quantização via integrais funcionais**

No processo de quantização de teorias de gauge tem demonstrado ser muito poderosa a técnica funcional, baseada no método de integrais de trajetória de Feynman. Porém as ideias de Feynman tem de ser modificadas quando estamos trabalhando com teorias de gauge[5], principalmente se estas teorias apresentarem anomalias, ou seja, transformações de simetria que existiam a nível clássico não são mais válidas a nível quântico. Fazemos nesta seção uma descrição destas técnicas e de como utilizá-las no caso da teoria a ser quantizada possuir explicitamente anomalias.

O método de Feynman permite calcular as amplitudes de transição entre dois estados a partir do chamado funcional gerador, ou amplitude de transição vácuo-vácuo

$$W[j] = \langle 0|0\rangle = N\int D\varphi e^{\frac{i}{\hbar}S[\varphi,j]} \quad , \tag{2.20a}$$

$$D\varphi = \prod_{a=1}^{N} D\varphi_a \quad . \tag{2.20b}$$

N é um fator de normalização, S é a ação da teoria considerando correntes externas j. A partir do gerador podemos calcular as funções de Green de n pontos

$$\langle 0|T\hat{\varphi}_{a_1}(x_1)...\hat{\varphi}_{a_n}(x_n)|0\rangle =$$

$$= N\int D\varphi\varphi_{a_1}(x_1)...\varphi_{a_n}(x_n)e^{\frac{i}{\hbar}}S[\varphi] = (-i\hbar)^n\frac{\delta}{\delta j^{a_1}(x_1)}...\frac{\delta}{\delta j^{a_n}(x_n)}W[j]\,\Big|_{j=0} \quad . \tag{2.21}$$

O método de integrais de Feynman se mostra extremamente útil para a análise de simetrias a nível quântico. Começamos considerando a chamada função de partição do sistema

$$Z = N \int D\varphi e^{\frac{i}{\hbar}S[\varphi]} \quad . \tag{2.22}$$

Fazemos uma transformação infinitesimal nos campos presentes na teoria

$$\varphi'_a(x) = \varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x) \quad . \tag{2.23}$$

Lembrando que uma integral funcional é invariante por troca de variáveis obtemos

$$\delta Z = 0 = N \int D(\varphi + \delta\varphi) e^{\frac{i}{\hbar}S(\varphi+\delta\varphi)} - N \int D\varphi e^{\frac{i}{\hbar}S(\varphi)} =$$

$$= \int d^{d+1}yN \int D\varphi \left(\frac{i}{\hbar}[L]^a \delta\varphi_a(y) + \frac{\delta}{\delta\varphi_a}(\varphi_a(y)) \right) e^{\frac{i}{\hbar}S[\varphi(y)]} =$$

$$= \int d^{d+1}y \left\langle \frac{i}{\hbar}[L]^a \delta\varphi_a(y) + \frac{\delta}{\delta\varphi_a}(y)(\delta\varphi_a)(y) \right\rangle \quad , \tag{2.24}$$

onde d representa o número de dimensões espaciais do espaço-tempo. Estas expressões implicam na expressão

$$\langle [L]^a \delta\varphi_a \rangle = \left\langle i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}(\delta\varphi_a) \right\rangle \quad . \tag{2.25}$$

Vejamos o que acontece agora quando a transformação nos campos (2.23) é uma simetria da ação clássica, o que em outras palavras significa que existe um quadrivetor corrente J que satisfaz

$$[L]^a \delta\varphi_a = \partial_\mu J^\mu \Longrightarrow \langle [L]^a \bar{\partial}\varphi_a \rangle = \langle \partial_\mu J^\mu \rangle \quad ; \tag{2.26}$$

deste modo,

$$\langle \partial_\mu J^\mu \rangle = \left\langle i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi_a}(\bar{\delta}\varphi_a) \right\rangle = \langle A \rangle \tag{2.27}$$

ou seja com $\langle A \rangle \neq 0$ estamos na presença de uma anomalia.

Esta análise da presença de anomalias pode ser feita trabalhando com as funções de Green ao invés da função de partição

$$\delta Z = 0 = N \int D(\varphi+\delta\varphi) \prod_{j=1}^{n} (\varphi_{a_j}(x_j)+\delta\varphi_{a_j}(x_j)) e^{\frac{i}{\hbar}S[\varphi+\delta\varphi]} - N \int D(\varphi) \prod_{j=1}^{n} \varphi_{a_j}(x_j) e^{\frac{i}{\hbar}S[\varphi]} \tag{2.28}$$

Esta expressão implica, em termos de valores esperados

$$\left\langle \int d^{d+1}y L^a \delta\varphi_a \prod_{j=1}^{n} \varphi_{a_j}(x_j) \right\rangle - i\hbar \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_{a_1}(x_1)...\delta\varphi_{a_j}(x_j)...\varphi_{a_n}(x_n) \rangle =$$

$$= \left\langle \int d^{d+1}y A \prod_{j=1}^{n} \varphi_{a_j}(x_j) \right\rangle \quad . \tag{2.29}$$

Estas identidades, conhecidas como identidades de Ward, podem ser muito úteis para o cálculo de funções de Green. De fato, como veremos no caso da teoria de gravitação induzida em duas dimensões, estas identidades nos permitem calcular as funções de Green não perturbativamente o que é uma característica de alguns modelos de teorias de campos em duas dimensões espaço-temporais[13].

Em certos casos a presença de anomalias está ligada a correções quânticas que a teoria sofre. Estas correções não são invariantes pelas transformações que a teoria clássica (a expansão em ordem zero) satisfaz e então estamos na presença de uma anomalia. Este processo pode ser visto de maneira clara usando o conceito de ação efetiva de uma teoria de gauge.

Começamos considerando o chamado funcional gerador $Z[j]$ e fazemos uma transformação de Legendre que define novos funcionais β

$$\beta(x,j) = \frac{\delta}{\delta j^a(x)} Z[j] \quad . \tag{2.30}$$

Supondo que estas relações possam ser invertidas devemos ter

$$j^a(x) = \bar{j}^a(x,\beta) \quad . \tag{2.31}$$

Definimos agora um novo funcional gerador S_{ef}

$$S_{ef} = \left(\hbar Z[j] - \int d^{d+1}x j^a(x)\beta(x)\right)|_{j(x)=\bar{j}(x,\beta)} \quad . \tag{2.32}$$

Este funcional pode ser calculado perturbativamente e é possível mostrar que em ordem de diagramas de árvore[10] ele coincide com a ação clássica da teoria (S), sugerindo então que

$$S_{ef} = S + \text{correções} = S + \Lambda \quad ; \tag{2.33}$$

portanto, S_{ef} generaliza o conceito de ação clássica a nível quântico, calculando-se as correções nas diferentes ordens em $\hbar$. S_{ef} é a chamada **ação efetiva** da teoria.

A partir da ação efetiva podemos obter equações "clássicas" de movimento como generalizações das equações de Euler-Lagrange

$$[L]^a_{ef} = [L]^a + \frac{\delta\Lambda}{\delta\varphi_a} = 0 \quad , \tag{2.34}$$

ou

$$[L]^a = -\frac{\delta\Lambda}{\delta\varphi_a} \quad , \tag{2.35}$$

onde $[L]_{ef}$ denota equações de Euler-Lagrange efetivas. Lembrando da expressão (2.27) esta equação mostra que com o conceito de ação efetiva podemos fazer uma caracterização alternativa da presença de anomalias numa teoria de gauge. De fato podemos ver como, usando este conceito pode-se "verificar" a presença de uma anomalia notando que a ação efetiva não é mais invariante pelas tranformações de gauge .

Suponhamos que a ação clássica da teoria de gauge considerada possa ser escrita como uma parcela para os campos de gauge e uma parcela de interação entre estes e os campos de matéria

$$L(\varphi, G) = L_1(G) + L_2(\varphi, G) \quad . \tag{2.36}$$

Os campos de gauge e os de matéria sofrem as seguintes mudanças quando operamos com uma transformação de simetria (correspondente ao grupo de gauge do campo G)

$$G_\mu \to G_\mu - D_\mu\epsilon \quad , \tag{2.37}$$

$$\varphi_a \rightarrow \varphi_a + \epsilon\delta\varphi_a \quad , \tag{2.38}$$

onde D_μ representa a derivada covariante e ϵ o parâmetro da transformação.

Consideramos a função de partição da teoria

$$Z = \int DGe^{\frac{i}{\hbar}\int d^{d+1}xL_1(G)} \int D\varphi e^{\frac{i}{\hbar}\int d^{d+1}xL_2(G,\varphi)} \quad . \tag{2.39}$$

Podemos agora continuar com o processo de quantização dividindo-o em duas partes: primeiro integramos sobre os campos de matéria, obtendo uma ação efetiva, e então obtemos uma teoria quântica final integrando sobre os campos de gauge

$$e^{S_{ef}} = \int D\psi e^{\frac{i}{\hbar}\int d^{d+1}x(L_1+L_2)} \quad . \tag{2.40}$$

Supondo que exista uma anomalia A devemos ter

$$D_\mu \frac{\delta}{\delta G_\mu} S_{ef} = [A] \neq 0 \quad . \tag{2.41}$$

Integrando agora sobre os campos de gauge

$$Z = \int DGe^{\frac{i}{\hbar}\int d^{d+1}xL_1(G)+S_{ef}[G]} \tag{2.42}$$

e assumindo que não haverá nenhuma anomalia oriunda da integração sobre estes campos[23] devemos ter como ação efetiva final

$$\bar{S}_{ef} = \int d^{d+1}xL_1(G) - i\hbar S_{ef}[G] \quad . \tag{2.43}$$

Calculando as equações de movimento para os campos de gauge,

$$\frac{\partial}{\partial G_\mu}\bar{S}_{ef} = 0 \quad , \tag{2.44a}$$

usando (2.43), obtemos a expressão

$$D_\mu \frac{\delta}{\delta G_\mu} \int dx L_1(G) = i\hbar D_\mu \frac{\delta}{\delta G_\mu} S_{ef}(G) \quad . \tag{2.44b}$$

Devemos ter a nível quântico

$$\left\langle D_\mu \frac{\partial}{\partial G_\mu} \int d^{d+1} L_1(G) \right\rangle = i\hbar \left\langle D_\mu \frac{\delta}{\delta G_\mu} S_{ef}(G) \right\rangle \quad . \tag{2.45}$$

Como a parcela da ação correspondente aos campos G_μ é invariante de gauge temos, lembrando a equação (2.41), que

$$\langle A \rangle = 0 \quad , \tag{2.46}$$

que representa uma maneira alternativa de se escrever as equações "quânticas" de movimento (2.34). Isto não implica que não exista anomalia, de fato estamos trabalhando com uma ação (ação efetiva) que não é invariante de gauge.

• O método de quantização BRST

Nos últimos anos tem se confirmado[14] que o método BRST é um método poderoso para a quantização de teorias de campos que possuem invariância de gauge local. O método apresenta-se útil não só na quantização operatorial como também no formalismo funcional.

O método BRST representa um processo de fixação de gauge que permite uma escolha correta do espaço de Hilbert da versão quântica da teoria estudada. Ele envolve uma substituição da invariância de gauge da teoria por uma simetria global, a simetria BRST. Este processo é realizado pela extensão do espaço de fase original da teoria, adicionando-se novos campos (campos chamados de fantasmas).

Introduzem-se os fantasmas na forma de N pares, onde N representa o número de vínculos (ϕ) de primeira classe da teoria

$$\{\phi_n, \phi_m\} = F^k_{nm} \phi^k \quad , \tag{2.47}$$

e

$$\eta_m, \theta_m \quad ; \quad m = 1, ...N \quad ,$$

representam os fantasmas. Estes são canonicamente conjugados

$$\{\eta_m(x), \theta^n(y)\} = \delta^n_m \delta(x-y) \quad . \tag{2.48}$$

Os campos fantasmas devem ter estatística oposta aos vínculos de maneira que se os vínculos forem bosônicos os fantasmas serão fermiônicos e as relações (2.48) serão realizadas via parênteses de Poisson fermiônicos.

Uma vez introduzidos os fantasmas, satisfazendo as condições acima a teoria passa a ser invariante por uma nova simetria global, a simetria BRST que possui como gerador Hamiltoniano a carga BRST

$$Q = \int dx(\eta_m \phi^m + \frac{1}{2}\eta_m \eta_n F_l^{mn} \theta^l) \quad , \tag{2.49}$$

que é uma quantidade anticomutante (sempre fermiônica) e possui a importante propriedade de nilpotência

$$\{Q, Q\}_+ = 0 \quad , \tag{2.50}$$

onde o simbolo + representa parênteses de Poisson fermiônicos. Uma vez que a teoria possui novos campos e o seu espaço de fase foi ampliado, uma nova Hamiltoniana para a teoria deve ser definida

$$H_{BRST} = H_c + \int dx(\eta V_n^m \theta^n - \{\psi, Q\}) \quad , \tag{2.51}$$

com

$$\{H_c, \phi^m\} = V_n^M \phi^n \quad , \tag{2.52}$$

onde ψ é uma quantidade fermiônica arbitrária que representa a liberdade de escolha de gauge: cada ψ corresponde a uma diferente escolha de gauge. A carga BRST é uma quantidade conservada

$$\{Q, H_{BRST}\} = 0 \quad , \tag{2.53}$$

o que é uma consequência da propriedade de nilpotência da carga BRST. A nível quântico, quando a fixação de gauge é imposta nos estados, os graus de liberdade físicos da teoria original podem ser obtidos. O espaço de Hilbert procurado fica restrito pela condição :

$$\hat{Q}|fis\rangle = 0 \quad . \tag{2.54}$$

Pode se mostrar que esta condição é equivalente à condição da teoria de gauge original $\hat{\phi}|fis\rangle = 0$. Sua consistência implica que a propriedade de nilpotência da carga BRST deve se preservar a nível quântico

$$[\hat{Q}, \hat{Q}]_+ = 0 \quad . \tag{2.55}$$

Esta condição pode revelar propriedades importantes da estrutura de gauge da teoria assim como também detectar a presença de anomalias, isto quando as condições (2.50) e (2.55) não são verificadas simultaneamente.

Nos últimos anos têm surgido vários modelos onde o método BRST se mostra como único processo de quantização consistente. Estes modelos se caracterizam pelo fato de que a álgebra dos geradores das transformações de gauge só se fecha "on-shell"[15]. Alguns exemplos são as teorias de supergravidade, a supercorda de Green-Schwarz e a superpartícula, entre outros.

As técnicas de quantização descritas aqui são a base dos métodos funcionais utilizados quando estamos lidando com teorias de gauge. A partir do próximo capítulo colocaremos em foco a teoria de gravitação quântica em duas dimensões que é uma teoria de campos de gauge que possui a característica de surgir a partir de uma anomalia via uma ação efetiva, tal como descrevemos nesta seção.

CAPÍTULO 3
TEORIA DA GRAVITAÇÃO EM DUAS DIMENSÕES

• A ação induzida

Em 1981 A. Polyakov[6] mostrou que a simetria de Weyl presente na teoria da corda bosônica era quebrada a nível quântico, quando esta era considerada imersa num espaço-tempo de dimensão não crítica ($D \neq 26$). Este fato implica que as componentes da métrica bidimensional que descreve a geometria da superfície gerada pela corda, não desacoplam das coordenadas da corda. Assim uma das componentes da métrica se torna mais uma variável dinâmica da teoria, e não mais um grau de liberdade de gauge puro. Uma consequência fundamental disto é que podemos obter uma teoria da gravitação não trivial em duas dimensões. Para ver estes fatos com mais cuidado consideramos a chamada ação de Polyakov para a corda bosônica

$$S = \int d^2x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu X^\alpha \partial_\nu X_\alpha \quad , \tag{3.1}$$

e interpretamos as coordenadas da corda (X) como D campos bosônicos (D é a dimensão do espaço-tempo) acoplados a um campo gravitacional bidimensional (com métrica $g^{\mu\nu}$). Integrando sobre os campos bosônicos obtemos uma ação efetiva não trivial (a ação de Einstein é trivial em duas dimensões, como veremos a seguir) cuja presença se deve à anomalia conforme. Vejamos este ponto com um pouco mais de detalhe.

Valendo-nos do conceito de ação efetiva descrito no capítulo 2, tomamos como decomposição para o campo gravitacional (aproximação de campo fraco)[5]

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta} \quad , \tag{3.2}$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ representa a métrica de Minkowski bidimensional. Ao decompormos a ação em ação clássica mais ação efetiva teremos

$$S = S_0 + \delta S \quad , \tag{3.3}$$

$$S_{ef} \equiv \delta S = \int d^2x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}\partial^\alpha X\partial^\beta X) + \partial_\mu X\partial_\nu X\right] \tag{3.4}$$

onde g denota o determinante das componentes da métrica. A ação efetiva pode ser calculada a partir da integral funcional[13]

$$Z = \Sigma\int DXe^{i\int d^2\xi\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\gamma\partial_\beta X_\gamma} \quad . \tag{3.5}$$

Na ordem de um loop o resultado é[13]

$$i\delta S = -\frac{D}{8}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\times$$

$$\frac{[k_\alpha(p+k)_\beta + k_\beta(p+k)_\alpha - \eta_{\alpha\beta}k.(p+k)][(\alpha\beta)\leftrightarrow(\gamma\delta)]}{k^2(p+k)^2}\delta g_{\alpha\beta}(p)\delta g_{\gamma\delta}(-p) \quad . \tag{3.6}$$

Após sua regularização, e usando variáveis de cone de luz, pode-se obter para a parte independente de gauge[13]

$$\delta S = -\frac{D}{48\pi}\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}R(p)\frac{1}{p^2}R(p) \quad . \tag{3.7}$$

Adicionando-se a contribuição dos fantasmas, obtém-se finalmente

$$S_{ef} = \frac{(D-26)}{48\pi}\int d^2xR\Box^{-1}R \quad , \tag{3.8}$$

onde R representa a curvatura escalar, e $\Box$ é o D'alambertiano. Note-se que no caso da teoria original estar definida num espaço-tempo de dimensão D=26 a ação efetiva se torna nula o que confirma o que dissemos anteriormente: a anomalia de Weyl é cancelada e todas as componentes da métrica se tornam graus de liberdade de gauge puros. A ação (3.8) é a correspondente à chamada "teoria da gravitação induzida em duas dimensões"[7].

Lembrando que a teoria de gravitação em duas dimensões se origina numa teoria conforme, como é o caso da teoria da corda bosônica, podemos nos servir de algumas técnicas que envolvem estas teorias.

O tensor de energia-momento tem a forma[9]

$$T_{mn} = -\frac{4}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{ef}}{\delta g^{mn}} \quad . \tag{3.9}$$

Devido à invariância por difeomorfismos o tensor T deve se conservar covariantemente

$$\nabla^m T_{mn} = 0 \quad . \tag{3.10}$$

Mas como sabemos[7] esta teoria não engloba as invariâncias por difeomorfismos e Weyl ao mesmo tempo, pelo fato do traço de T possuir a forma

$$T_m^m = -\frac{c}{6}R + 4\pi\mu^2 \quad , \tag{3.11}$$

onde c é a carga central e μ a constante cosmológica. Podemos adicionar um contratermo em T de maneira que recuperamos a propriedade de traço nulo, pagando o preço da lei de conservação (3.10) não ser mais satisfeita

$$T'_{mn} = T_{mn} + \frac{c}{12}g_{mn}R - 2\pi\mu^2 g_{mn} \quad , \tag{3.12}$$

$$\nabla^m T'_{mn} = \frac{c}{12}\nabla_n R \quad . \tag{3.13}$$

A partir deste ponto faremos uma descrição desta teoria em diferentes gauges (gauge conforme e de cone de luz).

Para finalizar a seção convém observar que a ação de Einstein é trivial em duas dimensões. As equações de movimento da gravitação Einsteniana se escrevem

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \quad , \tag{3.14}$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia momento da matéria e κ a constante de Newton. Em duas dimensões, porém, estas equações não nos dão nenhuma informação dinâmica pois é válida a identidade

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad . \tag{3.15}$$

Esta identidade é uma consequência do teorema de Gauss-Bonnet[13] que torna que a Lagrangeana de Einstein uma derivada total. Com isto a equação de movimento para o campo gravitacional se torna uma equação de vínculo e não uma informação dinâmica

$$g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{3.16}$$

Assim, em duas dimensões, a teoria de Einstein não possui conteúdo dinâmico, sendo uma teoria topológica.

• A teoria no gauge de cone de luz

Foi trabalhando no gauge de cone de luz que A. Polyakov[7] conseguiu resolver exatamente a teoria da gravitação induzida obtendo todas as funções de correlação da teoria quântica. A presença da invariância por reparametrizações[7] permite a fixação neste gauge e Polyakov trabalhou nele depois de se defrontar com certas dificuldades na tentativa de quantização no gauge conforme[6] (voltaremos a este assunto na próxima seção). Nesta seção veremos alguns pontos fundamentais da quantização da teoria da gravitação bidimensional no gauge de cone de luz tanto a nível clássico como quântico.

Começamos considerando a ação de Polyakov (3.8) adicionando um termo cosmológico

$$S_{ef} = \kappa \int d^2x \sqrt{-g}[R\Box^{-1}R + \mu] \quad , \tag{3.17}$$

onde $\frac{(-D+26)}{48\pi} = \kappa$ e μ representa a constante cosmológica. Temos porém que esta expressão define uma ação não local para a gravitação induzida. Para torná-la local introduzimos um campo auxiliar escalar φ

$$L = \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}\varphi\Box\varphi - \frac{\alpha}{2}R\varphi + \frac{\alpha^2}{2}\beta\right) \quad , \tag{3.18}$$

onde $\beta = \frac{\mu}{4}$. Para termos equivalência entre a formulação local e a não local devemos impor um vínculo externo à teoria

$$\omega = \varphi + \frac{\alpha}{2}\Box^{-1}R \approx 0 \quad . \tag{3.19}$$

Ao fixarmos a teoria no gauge de cone de luz as componentes da métrica assumem os valores

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{++} & g_{+-} \\ g_{-+} & g_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h_{++} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

$$\sqrt{-g} = 1, \qquad R = -2\partial_-^2 h_{++} \qquad . \tag{3.21}$$

A ação da teoria se torna

$$S = \int dx^- dx^+ L(\varphi, h_{++}) \qquad , \tag{3.22}$$

com a Lagrangeana dada pela expressão

$$L = \partial_+\varphi\partial_-\varphi + h_{++}(\partial_-\varphi)^2 - \alpha\partial_- h_{++}\partial_-\varphi + \frac{1}{2}\alpha^2\beta \qquad , \tag{3.23}$$

a partir da qual podemos começar uma análise clássica. Calculamos primeiramente as equações de movimento

$$[L]_\varphi = \partial_-(\partial_+\varphi + h_{++}\partial_-\varphi - \frac{\alpha}{2}\partial_- h_{++}) = 0 \qquad , \tag{3.24}$$

$$[L]_{h_{++}} = (\partial_-\varphi)^2 + \alpha\partial_-^2\varphi = 0 \qquad , \tag{3.25}$$

onde o símbolo $[L]$ denota equações de Euler-Lagrange. Com estas equações podemos obter

$$\nabla_+ T_{--} = (\partial_+ + h_{++}\partial_- + 2\partial_- h_{++})T_{--} = \frac{\alpha^2}{4}\partial_-^3 h_{++} = -\kappa\partial_- R, \tag{3.26}$$

e

$$\partial_-^3 h_{++} = 0 \qquad , \tag{3.27}$$

com o que recuperamos a lei de conservação[7]

$$\nabla_+ T_{--} = 0 \qquad . \tag{3.28}$$

Tínhamos visto (equação (3.13)) que esta lei de conservação de fato não existia pela presença da anomalia de Weyl. O que a expressão acima (3.28) está nos mostrando é que recuperamos a lei de conservação a nível quântico pois (3.28) representa as equações de movimento usando a ação efetiva da teoria (vide expressão (2.34)).

Apesar de estarmos fazendo a fixação de gauge no cone de luz resta ainda um conjunto de simetrias residuais, cujos parâmetros (ϵ) estão sujeitos a certas restrições. É possível[10] encontrar dois conjuntos independentes destas simetrias

$$\delta\varphi = \epsilon^- \partial_- \varphi - \frac{\alpha}{2}\partial_- \epsilon^-$$
$$\delta h_{++} = -\partial_+ \epsilon^- + \epsilon^- \partial_- h_{++} - h_{++}\partial_- \epsilon^- \quad , \tag{3.29a}$$

com a restrição para

$$\partial_-^3 \epsilon^- = 0 \quad . \tag{3.29b}$$

Esta restrição surge quando substituimos as transformações (3.29a) na ação (3.22) e impomos nela a condição de quase-invariância, como condição de simetria

O outro conjunto de transformações é

$$\delta\varphi = \epsilon^+ \partial_+ \varphi + \frac{\alpha}{2}\partial_+ \epsilon^+ \quad ,$$
$$\delta h_{++} = \epsilon^+ \partial_+ h_{++} + h_{++}\partial_+ \epsilon^+ \quad , \tag{3.30a}$$

onde o parâmetro ϵ^+ deve obedecer

$$\partial_- \epsilon^+ = 0 \quad . \tag{3.30b}$$

que garante que as transformações (3.30a) sejam simetrias da ação (3.22).

Vejamos agora quem são os geradores destas simetrias; via teorema de Noether impomos que a variação da ação seja igual a uma divergência de correntes de simetria

$$[L]_\varphi \delta\phi + [L]_{h_{++}} \delta h_{++} \approx \partial_\mu \hat{J}^\mu = \partial_- \hat{J}^- + \partial_+ \hat{J}^+ \quad . \tag{3.31}$$

O gerador das transformações (3.29) terá então a forma

$$G = \int dx\, \hat{J}^0(x) \qquad \hat{J}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{J}^+ + \hat{J}^-) \quad . \tag{3.32}$$

Usamos agora a restrição sobre o parâmetro ϵ^- nas transformações (3.29), que permite expandi-lo como um polinômio de segundo grau na variável x^-

$$\epsilon^- = -\frac{1}{2}[\psi_+(x^+) + x^- \psi_0(x^+) + (x^-)^2 \psi_-(x^+)] \quad . \tag{3.33a}$$

Esta decomposição nos permite escrever, para o gerador $\hat{J}^0$

$$\hat{J}^0 = \psi_+(x^+)J^+ + \psi_0(x^+)J^0 + \psi_-(x^+)J^- = \psi_a J^a \quad , \tag{3.33b}$$

onde

$$\begin{aligned} J^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(1+h_{++})T_{--} - \frac{\alpha^2}{4}\partial_-^2 h_{++}] \quad , \\ J^0 &= \frac{\alpha^2}{4\sqrt{2}}\partial_- h_{++} + x^- J^+ \quad , \\ J^- &= -\frac{\alpha^2}{2\sqrt{2}}h_{++} + 2\alpha_- J^0 - (x^-)^2 J^+ \quad . \end{aligned} \tag{3.34}$$

Para o outro conjunto de simetrias residuais (3.30) obtemos os seguintes geradores, de forma análoga a (3.29)

$$G = \int dx j^0 \quad , \tag{3.35}$$

$$j^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(j^+ + j^-) \quad , \tag{3.36}$$

$$j^+ = 2\epsilon^+ h_{++} T_{--} \quad , \tag{3.37}$$

$$j^- = \epsilon^+ \left[2(h_{++})^2 T_{--} - \frac{\alpha^2}{2}h_{++}\partial_-^2 h_{++} + \frac{\alpha^2}{4}(\partial_- h_{++})^2\right] \quad . \tag{3.38}$$

Dando agora especial atenção ao conjunto de transformações (3.29) escrevemos seus geradores (3.34) em termos de variáveis de espaço de fase

$$\begin{aligned} J^+ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\pi' - \frac{1}{\alpha^2}(1+h_{++})\pi^2 - \frac{1}{\alpha}(\Pi - \varphi')\pi\right] \quad , \\ J^0 &= -\frac{1}{2}[(1+h_{++})\pi + \frac{\alpha}{2}(\Pi - \varphi')] + x^- J^+ \quad , \\ J^- &= -\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}h_{++} + 2x^- J^0 - (x^-)^2 J^+ \quad . \end{aligned} \tag{3.39}$$

Usando estas expressões para os geradores podemos calcular suas relações de "comutação"

$$\{J^a(x), J^b(y)\} = \kappa\eta^{ab}\delta'(x-y) + \epsilon^{abc}\eta_{cd}J^d(x)\delta(x-y) \quad , \tag{3.40}$$

onde η^{ab} é o tensor métrico de Killing

$$\eta^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad . \tag{3.41}$$

Esta álgebra, realizada via parênteses de Poisson, é a chamada álgebra SL(2,R) e é consequência da existência das simetrias residuais (3.29) na teoria de gravitação induzida, quando fixada no gauge de cone de luz. É interessante notar que no trabalho pioneiro de Polyakov[7] esta álgebra tinha sido detectada a nível quântico enquanto que as expressões acima mostram que é um resultado que pode ser verificado[10] já a nível clássico.

A partir deste ponto podemos quantizar a componente h_{++} da métrica bidimensional que é o grau de liberdade relevante da teoria. Com isto veremos que podemos obter as funções de correlação da teoria usando as identidades de Ward, tal com descrevemos no capítulo 2.

Começamos considerando a simetria residual para o campo h_{++} (equação 3.29a)

$$\delta h_{++} = -\partial_+ \epsilon^- + \epsilon^- \partial_- h_{++} - h_{++} \partial_- \epsilon^- \approx \nabla_+ \epsilon^- \qquad . \tag{3.42}$$

Calculamos agora a variação da ação induzida (3.22) por esta transformação

$$\delta S = \int d^2 x \epsilon^- \nabla_+ T_{--} = \int d^2 x \frac{\alpha^2}{2} \epsilon^- \partial_-^3 h_{++} \qquad , \tag{3.43}$$

mostrando que de fato, δh_{++} não é uma simetria local, pois depende da condição (3.25) para deixar quase-invariante a ação. Desta maneira as identidades de Ward (equação (2.29)) ficam neste caso (fazendo-se $\epsilon^- = \epsilon\delta(z-y)$)[7]

$$-\frac{i\alpha^2}{2} \frac{\partial^3}{\partial z^{-3}} \langle h_{++}(z) \hat{X} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z^+} \delta(z - x_i) \langle \hat{X}_{\hat{x}_i} \rangle$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z^-} \delta(z - x_i) + \delta(z - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i^-} \right) \langle \hat{X} \rangle \qquad , \tag{3.44}$$

$$\hat{X} = h_{++}(x_1)...h_{++}(x_i)...h_{++}(x_n) \quad , \tag{3.45}$$

$$\hat{X}_{\hat{x}_i} = h_{++}(x_1)...h_{++}(x_i)...h_{++}(x_n) \quad . \tag{3.46}$$

Usando agora a representação da função delta de Dirac em duas dimensões

$$\delta^2(z) = -\frac{i}{4\pi}\frac{\partial^3}{\partial^3_{z^-}}\left(\frac{(z^-)^2}{z^+}\right) \quad , \tag{3.47}$$

Pode-se integrar as relações (3.44), obtendo[7]

$$-16\pi\kappa\langle h_{++}(z)h_{++}(x_1)...h_{++}(x_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\frac{(z^- - x_i^-)^2}{(z^+ - x_i^-)^2}\langle h_{++}(x_1).....h_{++}(x_i)....h_{++}(x_n)\rangle$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(2\frac{(z^- - x_i^-)}{(z^+ - x_i^+)} + \frac{(z^- - x_i^-)^2}{(z^+ - x_i^+)}\frac{\partial}{\partial x_i^-}\right)\langle h_{++}(x_1)...h_{++}(x_n)\rangle \quad , \tag{3.48}$$

que nos fornece recursivamente as funções de Green para qualquer número de pontos. Estudando o caso em que $n = 1$ (que fornece a função de Green de 2 pontos) podemos obter o produto de curtas distâncias[7] para os operadores h_{++}

$$-16\pi h_{++}(x)h_{++}(y) = \left(\frac{x^- - y^-}{x^+ - y^+}\right)^2 - \left(2\frac{(x^- - y^-)}{(x^+ - y^+)} + \frac{(x^- - y^-)}{(x^+ - y^+)}\frac{\partial}{\partial y^-}\right)\hat{h}_{++}(y) \quad . \tag{3.49}$$

Pode-se decompor os campos na forma (3.33) obtendo para o produto de curtas distâncias das correntes J a expressão

$$J^a(x)J^b(y) = -8\pi\kappa\frac{\eta^{ab}}{(x^+ - y^+)^2} + \frac{\epsilon^{abc}\eta_{cd}}{(x^+ - y^+)}J^d(y) \quad , \tag{3.50}$$

que é a manifestação quântica da álgebra SL(2,R) (3.40), já que a expressão acima é uma extensão com termo central de uma álgebra de loops SL(2,R).

Num trabalho considerado fundamental, Knizhnik, Polyakov e Zamolodchikov (KPZ) [18] calcularam as renormalizações dos parâmentros físicos da teoria da gravitação induzida. Com este fim eles estudaram quais eram as transformações nas componentes da métrica que preservavam a forma do cone de luz. As simetrias residuais correspondentes a componente h_{++} são, reescrevendo (3.42)

$$\delta h_{++} = -\partial_+ \epsilon^- + \epsilon^- \partial_- h_{++} - h_{++} \partial_- \epsilon^- \approx \nabla_+ \epsilon^- \qquad . \tag{3.51}$$

A equação de movimento de h_{++} nos fornece a componente relevante do tensor de energia-momento[10]

$$T_{++} = \frac{1}{2\alpha^2} \eta_{ab} J^a J^b - \frac{1}{\sqrt{2}} J^{0\prime} \qquad . \tag{3.52}$$

Usando a expressão (3.50) calcula-se a expansão a curtas distâncias para T_{++}

$$T_{++}(x) T_{++}(y) = \frac{1}{2} \frac{(6k - \frac{3k}{k+2})}{(x-y)^4} + ... \qquad , \tag{3.53}$$

determinando a carga central para o setor gravitacional. Para se obter o valor de k devemos impor que as invariâncias residuais (3.51) sejam respeitadas a nível quântico, o que implica garantir[18] que a soma das contribuições das cargas centrais da teoria seja nula

$$c_m - 28 + c_{grav} = 0 \qquad , \tag{3.54a}$$

com

$$c_m = d \qquad , \tag{3.54b}$$

$$c_{grav} = 6k - \frac{3k}{k+2} \qquad ; \tag{3.54c}$$

resolvendo para k obtemos

$$k + 2 = \frac{1}{12}(d - 13) \pm \sqrt{(d-1)(d-25)} \qquad , \tag{3.55}$$

que define uma relação entre a carga central do setor gravitacional com a carga central da matéria.

Outros parâmetros importantes calculados pelos autores em[18] foram o peso conforme, λ, (um parâmetro relacionado com o caráter dos campos da teoria sob transformações conformes) e a suceptibilidade γ, que está relacionada com o comportamento da função de partição em relação à área (A) varrida pela corda bosônica associada[7]

$$\lambda - \lambda_0 = -\frac{\lambda(\lambda-1)}{k+2} \quad , \tag{3.56}$$

$$Z(A) \propto A^{\gamma-3} dA \quad , \tag{3.57a}$$

$$\gamma = -k - 1 \quad , \tag{3.57b}$$

onde λ_0 é o peso conforme dos campos de matéria sem a presença da gravitação , e Z a função de partição da teoria.

Estes resultados são fundamentais no modelo de gravitação de Polyakov (eles são idênticos aos obtidos pelos modelos de matrizes para gravitação em duas dimensões[16]) pois não devem depender do gauge no qual eles estejam sendo obtidos. Na próxima seção estudaremos o modelo de Polyakov com a fixação no gauge conforme, o qual foi escolhido inicialmente por ele mas que apresentava alguma dificuldades fundamentais, as quais foram resolvidas por Distler, Kawai, e independentemente por David[19], como veremos a seguir.

- **A teoria no gauge conforme**

Quando a teoria da gravitação de Polyakov é fixada no gauge conforme, as componentes da métrica bidimensional tomam a forma

$$g_{ab} = e^{\phi} \hat{g}_{ab} \quad , \tag{3.58}$$

de maneira que as componentes $\hat{g}_{ab}$ e o campo ϕ conhecido como grau de liberdade de Weyl passam a ser as quantidades físicas relevantes. Neste gauge a expressão (3.5) que determina a ação efetiva tem a forma

$$e^{-S_{ef}} = \int DbDcDXe^{-S(\hat{g},X)-S_{gh}(b,c)} \quad , \tag{3.59}$$

onde $S(\hat{g}, X)$ representa a ação da gravitação acoplada à matéria, S_{gh} é a ação dos campos de ghost (fantasmas,b e c) que devem ser introduzidos para se ter uma fixação de gauge consistente (vide capítulo 2). Tal como afirmamos no começo deste capítulo Polyakov mostrou[7] que esta ação efetiva é não trivial, devido à presença da anomalia conforme, expressa no gauge conforme pelo fato de que as medidas na expressão (3.59) não são invariantes conformes. Neste gauge obtém-se para ação efetiva

$$S_{ef} = \frac{(D-26)}{48\pi}\int d^2z\sqrt{\hat{g}}[\frac{1}{2}\phi\hat{\Box}\phi - \hat{R}\phi + \mu e^{\phi}] \quad . \tag{3.60}$$

Esta é a chamada ação de Liouville e ϕ que será chamado a partir daqui de campo de Liouville. Como dizemos anteriormente aqui os campos fundamentais são a métrica $\hat{g}$ e o campo de Liouville ϕ. Com dissemos anteriormente Polyakov encontrou problemas na quantização da gravitação no gauge conforme. O ponto é que a medida correspondente ao campo de Liouville na função de partição não é invariante pelas translações

$$\phi \to \phi - \sigma \quad , \tag{3.61}$$

que é como se comporta o campo de Liouville sob transformações conformes na métrica g_{ab} (de acordo com (3.58).

Este problema foi resolvido por David, e independentemente por Distler e Kawai (DDK)[19] assumindo que a medida dos campos no gauge conforme deve mudar via um jacobiano J

$$[D\phi][DX][DbDc] = [D\phi]_{\hat{g}}[DX]_{\hat{g}}[DbDc]_{\hat{g}}J \quad , \tag{3.62}$$

onde o sub-indice $\hat{g}$ indica fixação no gauge conforme. No ansatz de DDK o jacobiano tem a forma

$$J = e^{-S_L} \quad ,$$

$$S_L = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\sqrt{\hat{g}}\left[\hat{g}^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi - Q\hat{R}\phi + 4\mu e^{\alpha\phi}\right] \quad . \tag{3.63}$$

A função de partição da teoria fica então

$$Z = \int D\phi DXDbDce^{-(S_L + S_M(\hat{g},X) + S_{gh}(b,c))} \quad . \tag{3.64}$$

Com a função de partição acima pode-se calcular os expoentes críticos para assim se comparar com os resultados do gauge de cone de luz. DDK obtiveram[19] para a suceptibilidade (3.57b)

$$\gamma = 2 + \frac{Q}{\alpha} = \frac{1}{12}[c_m - 25 - \sqrt{(25 - c_m)(1 - c_m)}] + 2 \quad , \tag{3.65}$$

que concorda com os resultados do gauge de cone de luz com a equivalência

$$\frac{1}{k+2} = -\frac{\alpha^2}{2} \quad . \tag{3.66}$$

Desta forma DDK não somente reobtiveram, no gauge conforme, todos os resultados de KPZ como também generalizaram o resultado para uma topologia arbitrária (gênero arbitrário da superfície de Riemann), uma vez que os resultados de Polyakov são validos para uma superfície esférica.

Finalizamos aqui este capítulo, onde vimos a análise da gravitação induzida no gauge cone de luz e no gauge conforme, de acordo com os trabalhos pioneiros para este modelo. No próximo capítulo fazemos três análises independentes da gravitaçao induzida em duas dimensões.

CAPÍTULO 4

GRAVITAÇÃO INDUZIDA: ANÁLISE INDEPENDENTE DE GAUGE E REDUÇÃO HAMILTONIANA COMPLETA

Estudamos neste capítulo o modelo de gravitação induzida de Polyakov sob 3 pontos de vista diferentes:

1) Análise independente de gauge, onde a gravitação se comporta como uma teoria Hamiltoniana de primeira classe.

2) Redução Hamiltoniana completa do modelo, uma teoria de segunda classe.

3) Acoplamento da gravitação a campos de matéria bosônicos com redução Hamiltoniana completa, teoria de segunda classe.

• Análise independente de gauge da gravitação induzida

Tal como descrevemos no capítulo anterior, o modelo de gravitação induzida bidimensional pode ser caracterizado pela ação (equação (3.18))

$$L = \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}\varphi\Box\varphi - \frac{\alpha}{2}R\varphi + \frac{\alpha^2}{2}\beta\right) \quad . \tag{4.1}$$

Para atingirmos nossos propósitos é mais conveniente trabalhar com as variáveis de cone de luz, que são obtidas de acordo com as leis de transformação para a métrica e o campo escalar por reparametrizações gerais

$$\begin{aligned}
x^{\pm} &= x^0 \pm x^1 \quad , \\
g_{++} &= \frac{1}{4}g_{00} + \frac{1}{2}g_{01} + \frac{1}{4}g_{11} \quad , \\
g_{--} &= \frac{1}{4}g_{00} - \frac{1}{2}g_{01} + \frac{1}{4}g_{11} \quad , \\
g_{-+} &= \frac{1}{4}g_{00} - \frac{1}{4}g_{11} \quad , \\
\partial_+\varphi &= \frac{1}{2}(\dot\varphi + \varphi') \equiv \frac{1}{2}(\partial_0\varphi + \partial_1\varphi) \quad , \\
\partial_-\varphi &= \frac{1}{2}(\dot\varphi - \varphi') \equiv \frac{1}{2}(\partial_0\varphi - \partial_1\varphi) \quad .
\end{aligned} \tag{4.2}$$

A densidade de Lagrangeana (4.1) pode ser escrita na seguinte forma:

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \frac{\alpha}{2\sqrt{-g}}(\epsilon^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi)(\epsilon^{\nu\beta}\partial_\beta g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\alpha^2\beta\sqrt{-g}$$

$$-\frac{\alpha}{8}\frac{\varphi}{\sqrt{-g}}g^{\alpha\beta}\epsilon^{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu}(\partial_\mu g_{\alpha\rho})(\partial_\nu g_{\beta\sigma}) \quad . \tag{4.3}$$

Isto acontece pelo fato de que em duas dimensões vale, para a curvatura escalar em termos da métrica, a expressão[10]

$$\sqrt{-g}R = \partial_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(gg^{\mu\nu})\right) + \frac{1}{4\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}\partial_\mu(\epsilon_{\gamma\rho}gg^{\rho\sigma})\partial_\nu(\epsilon_{\sigma\delta}gg^{\delta\alpha}) \quad , \tag{4.4}$$

onde $\epsilon^{\alpha\beta}$ é o pseudo-tensor anti-simétrico unitário com $\epsilon^{01} = 1$. Após algumas integrações por partes a densidade de Lagrangeana toma a forma explícita

$$\begin{aligned} L = \frac{4}{\sqrt{-g}}\Big[& -\frac{g_{++}(\partial_-\varphi)^2}{2} + g_{-+}\partial_-\varphi\partial_+\varphi - \frac{g_{--}(\partial_+\varphi)^2}{2} + \frac{\alpha}{2}[\partial_+\varphi(\partial_+ g_{--} - \partial_- g_{-+})] \\ & - \frac{\alpha}{4}\frac{\varphi}{g}[\partial_- g_{--}(g_{++}\partial_+ g_{-+} - g_{-+}\partial_+ g_{++}) + \partial_- g_{-+}(g_{--}\partial_+ g_{++} - g_{++}\partial_+ g_{--}) \\ & + \partial_- g_{++}(g_{-+}\partial_+ g_{--} - g_{--}\partial_+ g_{-+})] - \frac{1}{2}\alpha^2\beta g\Big] \quad . \end{aligned} \tag{4.5}$$

A partir deste ponto começamos a análise Hamiltoniana do modelo. A evolução do sistema será estudada sobre a superfície definida pelo cone de luz, usando como parâmetro "temporal" a variável x^- (equação (4.2)). Começamos calculando os momentos canônicamente conjugados aos campos

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial(\partial_-\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{-g}}[-4g_{++}\partial_-\varphi + 4g_{-+}\partial_+\varphi + 2\alpha(\partial_- g_{++} - \partial_+ g_{-+})] \quad , \tag{4.6}$$

$$\pi^{++} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_- g_{++})} = \frac{2\alpha\partial_-\varphi}{\sqrt{-g}} + \frac{4\alpha\varphi}{g\sqrt{-g}}[g_{--}\partial_+ g_{-+} - g_{-+}\partial_+ g_{--}] \quad , \tag{4.7}$$

$$\pi^{-+} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_- g_{-+})} = -\frac{2\alpha\partial_+\varphi}{\sqrt{-g}} + \frac{4\alpha\varphi}{g\sqrt{-g}}[g_{--}\partial_+ g_{++} - g_{++}\partial_+ g_{--}] \quad , \tag{4.8}$$

$$\pi^{--} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_- g_{--})} = \frac{4\alpha\varphi}{g\sqrt{-g}}[g_{-+}\partial_+ g_{++} - g_{++}\partial_+ g_{-+}] \quad . \tag{4.9}$$

A análise Hamiltoniana é muito complicada se partirmos das expressões para os momentos acima. Este problema pode ser contornado se adicionarmos convenientemente à densidade de Lagrangeana uma divergência total, a qual não altera a dinâmica da teoria, obtendo-se desta forma expressões mais simples para os momentos. Consideramos então como nova densidade de lagrangena

$$\bar{L} = L + \partial_\mu \Gamma^\mu \qquad , \tag{4.10}$$

onde

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \Gamma^\mu = \partial_- \Gamma^- + \partial_+ \Gamma^+ = & \\
& - \frac{\alpha}{2\sqrt{-g}} \left[\frac{\varphi}{2g} [\partial_- g_{--} 16(g_{-+}\partial_+ g_{++} - g_{++}\partial_+ g_{-+}) \right. \\
& - \partial_- g_{-+} 16(g_{--}\partial_+ g_{++} - g_{++}\partial_+ g_{--})] - 4\partial_+ \varphi \partial_- g_{-+} \\
& + \frac{\varphi}{2g} [\partial_- g_{++} 16(g_{--}\partial_+ g_{-+} - g_{-+}\partial_+ g_{--})] \\
& \left. - \frac{4g_{-+}}{g_{++}} [\partial_+ g_{++} \partial_- \varphi - \partial_- g_{++} \partial_+ \varphi] + 4\partial_- \varphi \partial_+ g_{-+} \right] ,
\end{aligned} \tag{4.11a}$$

com

$$\begin{aligned}
\Gamma^- &= \frac{\varphi}{4\sqrt{-g}} \left(\partial_+ g_{-+} - \frac{g_{-+}\partial_+ g_{++}}{g_{++}} \right) \quad , \\
\Gamma^+ &= - \frac{\varphi}{4\sqrt{-g}} \left(\partial_- g_{-+} - \frac{g_{-+}\partial_- g_{++}}{g_{++}} \right) \quad .
\end{aligned} \tag{4.11b}$$

Com a adição deste termo, a Lagrangeana pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\bar{L} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} & \left[-4g_{++}(\partial_- \varphi)^2 + 8g_{-+}\partial_+ \varphi \partial_- \varphi - 4(\partial_+ \varphi)^2 g_{--} \right. \\
& + 4\alpha \left(\partial_- g_{++} \partial_- \varphi - 2\partial_- \varphi \partial_+ g_{-+} + \partial_+ g_{--} \partial_+ \varphi \right) \\
& \left. + \frac{4\alpha g_{-+}}{g_{++}} (\partial_+ g_{++} \partial_- \varphi - \partial_- g_{++} \partial_+ \varphi) - \alpha^2 \beta g \right]
\end{aligned} \tag{4.12}$$

a partir da qual calculamos os novos momentos, que de fato possuem expressões mais simples

$$\pi^{--} = 0 = \Lambda_1 \quad , \tag{4.13}$$

$$\pi^{-+} = 0 = \Lambda_2 \quad , \tag{4.14}$$

$$\pi^{++} = \frac{2\alpha}{\sqrt{-g}} \left(\partial_- \varphi - \frac{g_{-+}}{g_{++}} \partial_+ \varphi \right) \quad , \tag{4.15}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{-g}} \left(g_{-+}\partial_+ \varphi - g_{++}\partial_- \varphi \right) + \frac{2\alpha}{\sqrt{-g}} \left(\partial_- g_{++} - 2\partial_+ g_{-+} + \frac{g_{-+}}{g_{++}} \partial_+ g_{++} \right) \tag{4.16}$$

Λ_1 e Λ_2 representam dois vínculos Hamiltonianos primários, de acordo com a definição que apresentamos no capítulo 1. Os parênteses entre as variáveis canonicamente conjugadas são

$$\{\varphi(x), \pi(y)\} = \delta(x-y) \quad , \tag{4.17a}$$

$$\{g_{ab}(x), \pi^{cd}(y)\} = \delta(x-y)\delta_a^c\delta_b^d \quad . \tag{4.17b}$$

As expressões para os momentos podem ser invertidas, obtendo-se as velocidades $\partial_-\varphi$ e $\partial_- g_{++}$ em termos de variáveis de espaço de fase

$$\partial_-\varphi = \frac{\sqrt{-g}\pi^{++}}{2\alpha} + \frac{g_{-+}\partial_+\varphi}{g_{++}} \quad , \tag{4.18a}$$

$$\partial_- g_{++} = \frac{1}{2\alpha}\left(\pi\sqrt{-g} + \frac{2g_{++}\pi^{++}\sqrt{-g}}{\alpha} + 4\alpha\partial_+ g_{-+} - \frac{2\alpha g_{-+}\partial_+ g_{++}}{g_{++}}\right) \quad . \tag{4.18b}$$

Com estas expressões podemos construir a Hamiltoniana canônica da teoria

$$H_c = \pi\partial_-\varphi + \pi^{++}\partial_- g_{++} - \bar{L} \quad . \tag{4.19a}$$

Substituindo $\bar{L}$ (4.12) e as velocidades (4.18) na expressão acima obtemos para a Hamiltoniana canônica

$$\begin{aligned} H_c =& \pi\left[\frac{\sqrt{-g}\pi^{++}}{2\alpha} + \frac{g_{-+}\partial_+\varphi}{g_{++}}\right] \\ &+ \frac{\pi^{++}}{2\alpha}\left(\pi\sqrt{-g} + \frac{2g_{++}\pi^{++}\sqrt{-g}}{\alpha} + 4\alpha\partial_+ g_{-+} - \frac{2\alpha g_{-+}\partial_+ g_{++}}{g_{++}}\right) \\ &- \frac{1}{2\sqrt{-g}}\Bigg[-4g_{++}(\partial_-\varphi)^2 + 8g_{-+}\partial_+\varphi\partial_-\varphi - 4(\partial_+\varphi)^2 g_{--} \\ &+ 4\alpha(\partial_- g_{++}\partial_-\varphi - 2\partial_-\varphi\partial_+ g_{-+} + \partial_+ g_{--}\partial_+\varphi) \\ &+ \frac{4\alpha g_{-+}}{g_{++}}(\partial_+ g_{++}\partial_-\varphi - \partial_- g_{++}\partial_+\varphi) - \alpha^2\beta g\Bigg] \quad . \end{aligned} \tag{4.19b}$$

Podemos substituir agora as velocidades em termos das variáveis do espaço de fase. Fazendo algumas integrações por partes obtemos

$$\begin{aligned} H_c =& \frac{-2\sqrt{-g}}{g_{++}}\left[(\partial_+\varphi)^2 - \frac{4}{\alpha^2}(g_{++}\pi^{++})^2 - \frac{4}{\alpha}(g_{++})\pi - \frac{\alpha\partial_+ g_{++}\partial_+\varphi}{g_{++}} + 2\alpha{\partial_+}^2\varphi + \alpha^2\beta g_{++}\right] \\ &+ \frac{4g_{-+}}{g_{++}}\left[\pi\partial_+\varphi - 2g_{++}\pi^{++} - \pi^{++}\partial_+ g_{++}\right] \quad . \end{aligned} \tag{4.20}$$

Esta expressão nos permite escrever

$$H_c = 4\left[-\frac{\sqrt{-g}}{g_{++}}\phi_1 + \frac{g_{-+}}{g_{++}}\phi_2\right] \quad , \tag{4.21}$$

com

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\left[(\partial_+\varphi)^2 - \frac{4}{\alpha^2}(g_{++}\pi^{++})^2 - \frac{4}{\alpha}(g_{++}\pi^{++})\pi - \frac{\alpha\partial_+ g_{++}\partial_+\varphi}{g_{++}} + 2\alpha\partial_+^2\varphi + \alpha^2\beta g_{++}\right]$$
$$\phi_2 = \pi\partial_+\varphi - 2g_{++}\pi^{++} - \pi^{++}\partial_+ g_{++} \quad , \tag{4.22}$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são vínculos secundários da teoria pois surgem da imposição de consistência temporal dos vínculos primários (Λ_1 e Λ_2, equações (4.13-14))

$$\partial_-\Lambda_i(x) \approx \left\{\Lambda_i(x), \int dy H_c(y)\right\} \approx c_j\phi_j(x) \quad i,j = 1,2 \tag{4.23a}$$

$$c_1 = \frac{2}{\sqrt{-g}} \qquad e \qquad c_2 = -\frac{1}{g_{++}} \quad . \tag{4.23b}$$

A consistência temporal dos vínculos secundários não nos fornece novas restrições para o espaço de fase pois o conjunto (Λ_1, Λ_2, ϕ_1, ϕ_2) é de primeira classe (capítulo 1); sua álgebra pode ser calculada via parênteses de Poisson, obtendo-se:

$$\{\phi_1(x), \phi_1(y)\} = [\phi_2(x) + \phi_2(y)]\partial_+\delta(x-y) \quad ,$$
$$\{\phi_1(x), \phi_2(y)\} = [\phi_1(x) + \phi_1(y)]\partial_+\delta(x-y) \quad ,$$
$$\{\phi_2(x), \phi_2(y)\} = [\phi_2(x) + \phi_2(y)]\partial_+\delta(x-y) \quad , \tag{4.24}$$

que constitue uma álgebra de difeomorfismos[11]. Além disto

$$\{\pi^{-+}(x), \Omega(y)\} = \{\pi^{--}(x), \Omega(y)\} = 0 \quad , \tag{4.25}$$

onde $\Omega(y)$ representa qualquer um dos vínculos da teoria. A álgebra de difeomorfismos confirma o fato da teoria de Polyakov ser uma teoria de gravitação (a invariância de gauge é representada pelos difeomorfismos).

Os resultados obtidos no gauge de cone de luz podem ser reproduzidos nesta análise independente de gauge, usando um novo conjunto de variáveis

$$
\begin{aligned}
J^{+} &= \frac{1}{g_{++}}(\phi_2 - \phi_1) + \frac{\alpha^2\beta}{2} \quad , \\
J^{0} &= j^{0} - x^{-}J^{+} \quad , \\
j^{0} &= \left[g_{++}\left(\pi^{++} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial_{+}\varphi}{g_{++}}\right) + \frac{\alpha}{2}\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial_{+}g_{++}}{g_{++}} - \partial_{+}\varphi\right) \right] \quad , \\
J^{-} &= j^{-} - 2x^{-}J^{0} - (x^{-})^2 J^{+} \quad , \\
j^{-} &= \alpha^2(g_{++} + 1) \quad , \qquad (4.26a) \\
b &= \pi - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial_{+}g_{++}}{g_{++}} + \partial_{+}\varphi \quad . \qquad (4.26b)
\end{aligned}
$$

Calculamos agora os parênteses de Poisson entre estas novas variáveis, usando as relações de "comutação" entre as variáveis fundamentais (4.17)

$$
\{J^a(x), J^b(y)\} = -2\epsilon^{abc}\eta_{cd}J^d(x)\delta(x-y) + \alpha^2\eta^{ab}\partial_{+}\delta(x-y) \quad , \qquad (4.27)
$$

onde η_{ab}, na expressão acima, é o tensor métrico de Killing:

$$
\eta^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \epsilon^{-0+} = 1 \quad . \qquad (4.28)
$$

A expressão (4.27) nos confirma que as variáveis J^a satisfazem a uma álgebra de correntes SL(2,R) via parênteses de Poisson, independentemente do gauge escolhido[10]. Esta álgebra de correntes tinha sido originalmente detectada por Polyakov[7] trabalhando no gauge de cone de luz. As relações de "comutação" restantes são

$$
\{b(x), b(y)\} = 2\partial_{+}\delta(x-y) \quad ,
$$

$$
\{b(x), J^a(y)\} = 0 \quad . \qquad (4.29)
$$

A evolução temporal das correntes J^a pode ser calculada usando o fato que a Hamiltoniana representa o gerador temporal das variáveis do espaço de fase. Usando também as expressões (4.26) obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{dJ^+}{dx^-} &= v_1 \partial_+ J^+ \quad , \\
\frac{dJ^0}{dx^-} &= v_1 \partial_+ J^0 + \partial_+ v_1 J^0 - \alpha^2 \partial_+^2 v_1 + 2(v_2 - 1) J^+ \quad , \\
\frac{dJ^-}{dx^-} &= v_1 \partial_+ J^- + 2\partial_+ v_1 J^- + 2\alpha^2 \partial_+^2 v_2 + 2(v_2 - 1) J^0 \quad , \\
\frac{db}{dx^-} &= \partial_+ v_1 b + v_1 \partial_+ b - \alpha \partial_+^2 v_1 \quad .
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

No gauge de cone de luz, definido pelas relações

$$
g_{-+} = 1 \qquad g_{--} = 0 \quad ,
$$

que determinam os seguintes valores para os coeficientes v_1 e v_2

$$
v_1 = \frac{g_{-+} - \sqrt{-g}}{g_{++}} = 0
$$

$$
v_2 = \sqrt{-g} - \frac{1}{2} v_1 + x^- v_1' = 1 \quad , \tag{4.31}
$$

podemos calcular o lado direito de (4.30). Confirmamos que as correntes J são quantidades conservadas[17], neste gauge

$$
\frac{dJ^a}{dx^-} = 0 \quad . \tag{4.32}
$$

Concluimos que no gauge de cone de luz a álgebra SL(2,R) corresponde, de fato, a uma simetria da teoria.

É importante ressaltar neste ponto que a possibilidade de fixação da teoria no gauge de cone de luz está relacionada com o fato da gravitação induzida ser invariante por difeomorfismos, como mostra a presença da álgebra (4.24). Este ponto finaliza nossa análise clássica da gravitação induzida. Vejamos agora alguns resultados quânticos.

- **Análise quântica independente de gauge**

Como vimos na seção anterior, as correntes SL(2,R) se conservam quando fixamos a teoria de Polyakov no gauge de cone de luz. Os vínculos secundários, que permanecem intactos após esta fixação (eles não dependem de g_{-+} ou g_{--}), podem ser escritos em termos destas correntes

$$\mathcal{J} = J^+ - \frac{\alpha^2 \beta}{2} \approx 0 \quad , \tag{4.33}$$

$$\tau = T_m + T_S \approx 0 \quad , \tag{4.34}$$

$$T_m = \frac{1}{4} b^2 + \frac{\alpha}{2} \partial_+ b \quad , \tag{4.35}$$

$$T_S = \frac{1}{2\alpha^2} \eta_{ab} J^a J^b - \partial_+ J^0 \quad . \tag{4.36}$$

Onde T_s e T_m podem ser interpretados como tensores de momento energia do setor gravitacional e da matéria (o campo auxiliar φ), respectivamente, considerando a corrente J^a e a variável b como novos campos fundamentais.

Seguindo o processo de quantização verifica-se que as correntes J^a satisfazem a uma álgebra SL(2,R) via comutadores [11]

$$[J^a(x), J^b(y)] = -2i\epsilon^{abc}\eta_{cd} J^d(x)\delta(x-y) + i\bar{\alpha}^2 \eta^{ab} \partial_+ \delta(x-y) \quad , \tag{4.37}$$

onde a constante α sofre uma renormalização [11]

$$\alpha^2 = 8\kappa = \frac{c-1}{12\pi} \rightarrow \bar{\alpha}^2 = 8\bar{\kappa} = \frac{k}{96\pi} \quad . \tag{4.38}$$

Substituindo as expressões de T_m e T_S em (4.34) e usando as relações de comutação fundamentais (4.27-29) obtemos que τ satisfaz a uma álgebra de difeomorfismos

$$\{\tau(x), \tau(y)\} = (\tau(x) + \tau(y))\partial_+ \delta(x-y) \quad . \tag{4.39}$$

No caso quântico, teremos uma álgebra de Virasoro. Podemos definir então as componentes de Fourier

$$L_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{inx} \tau(x) \quad , \tag{4.40}$$

para as quais vale a álgebra de Virasoro mencionada, realizada via comutadores

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + A_n \delta_{n+m,0} \quad , \tag{4.41}$$

onde A_n representa uma extensão central, que não está contida na álgebra clássica via parênteses de Poisson, e L_n é o vínculo de Virasoro. Explicitamente, temos

$$\tau = \frac{1}{2\pi}\sum_m L_n e^{in\sigma} \quad , \tag{4.42}$$

$$L_n = L_n^g + L_n^M \quad , \tag{4.43}$$

$$L_n^g = \frac{1}{k+2}\sum_m \eta_{ab} J^a_{n-m} J^b_m - inJ^0_n \quad , \tag{4.44a}$$

$$L_n^M = -\frac{1}{2}\sum_m \alpha^M_{n-m}\alpha^M_m - inQ_M\alpha^M_n \quad , \tag{4.44b}$$

onde L_n^g representa o setor gravitacional dos operadores de Virasoro e L_n^M o de matéria (estamos chamando de matéria o campo auxiliar φ mas lembramos que até o momento o modelo é de gravitação pura). α_n^M e J_n^b são as variáveis de osciladores da matéria e da gravitação ,respectivamente. A partir destas expressões podemos construir a carga BRST quântica (vide capítulo 2)

$$\hat{Q} = c_0(L_0 - a) + \sum_{n\neq 0} : c_n L_{-n} : + \ldots \quad , \tag{4.45}$$

onde c_n, b_n^A representam os campos de "ghosts". A constante a é introduzida para dar conta dos problemas de ambiguidade no modo zero do operador de Virasoro L_0. Usando a condição de nilpotência para a carga BRST ($\hat{Q}^2 = 0$) podemos obter para as cargas centrais[17]

$$c_{mat} + \frac{3k}{k+2} - 6k - 28 = 0 \quad , \tag{4.46}$$

c_{mat} é a contribuição da matéria, -28 a dos ghosts e $\frac{3k}{k+2} - 6k$ a gravitacional. Esta última pode ser obtida a partir da expansão a curtas distâncias dos produtos de operadores

$$T_s(z)T_s(w) = \frac{c_{grav}/2}{(z-w)^4} + \ldots \quad , \tag{4.47}$$

$$\langle J(z)J(w)\rangle = \frac{k}{(z-w)^2} \quad . \tag{4.48}$$

Determinamos o valor de k usando a expressão (4.46)

$$k+2 = \frac{c_{mat} - 13 + \sqrt{(c_{mat}-1)(c_{mat}-25)}}{12} \quad . \tag{4.49}$$

Este resultado é idêntico ao obtido por Polyakov[7] no gauge de cone de luz e ao de DDK no gauge conforme, verificando a indepêndencia de gauge dos cálculos.

Uma outra análise quântica da gravitação induzida pode-se fazer a partir das correntes SL(2,R) com as quais podemos construir um novo conjunto de variáveis (θ, γ, P_L) através das seguintes transformações [20]

$$\begin{aligned}
J^+(x) &= \theta(x) \quad , \\
J^0(x) &= \theta(x)\gamma(x) + k_1 P_L(x) \quad , \\
J^-(x) &= \theta(x)\gamma^2(x) + 2k_1\gamma(x)P_L(x) + k_2\partial_+\gamma(x) \quad .
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Impomos agora as relações

$$\{\theta(x), \gamma(y)\} = \delta(x-y) \qquad \{P_L(x), P_L(y)\} = -\partial_+\delta(x-y) \quad , \tag{4.51a}$$

com os outros parênteses de Poisson sendo nulos. Usando a álgebra SL(2,R) nas expressões (4.50), além das relações de comutação (4.51a), encontramos para as constantes k_i

$$k_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \qquad k_2 = \alpha^2 \quad . \tag{4.51b}$$

Em termos das variáveis θ, P_L e b os vínculos (4.33-36) podem ser escritos da seguinte forma

$$J^+ = \theta = 0 \quad , \tag{4.52}$$

$$\tau = \partial_+\theta - \frac{1}{2}P_L^2 - \frac{Q_L}{\sqrt{2\pi}}\partial_+ P_L + \frac{1}{2}b^2 + \frac{Q_M}{\sqrt{2\pi}}\partial_+ b = 0 \quad , \tag{4.53}$$

o que é equivalente a impor

$$J^+ = \theta = 0 \tag{4.54a}$$

$$T_e = -\frac{1}{2}P_L^2 - \frac{Q_L}{\sqrt{2\pi}}\partial_+ P_L + \frac{1}{2}b^2 + \frac{Q_M}{\sqrt{2\pi}}\partial_+ b = 0 \quad , \tag{4.54b}$$

com

$$Q_M = \sqrt{\pi}\alpha \qquad Q_L = -\frac{2}{\alpha} - \alpha \quad . \tag{4.55}$$

Verificamos que o vínculo (4.54b) (que representa o novo tensor de energia-momento) satisfaz, a exemplo de τ (equação (4.34)) a uma álgebra de difeomorfismos

$$\{T_e(x), T_e(y)\} = (T_e(x) + T_e(y))\partial_+\delta(x-y) \quad . \tag{4.56}$$

Estes resultados são semelhantes aos encontrados na análise da teoria da corda bosônica[8], assim, construimos os operadores de Virasoro para a teoria da gravitação induzida a partir dos resultados daquele modelo. Começamos com as componentes de Fourier do tensor de energia-momento T_e

$$\bar{L}_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{inx} T_e(x) \quad . \tag{4.57}$$

A partir da expressão acima obtemos as relações de comutação para os operadores de Virasoro

$$\{\bar{L}_n, \bar{L}_m\} = i(n-m)\bar{L}_{m+n} \quad . \tag{4.58}$$

Definimos então as variáveis de osciladores usuais

$$\bar{\alpha}_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{inx} P_L(x) \quad , \tag{4.59a}$$

onde P_L representa o setor gravitacional do tensor de energia-momento e

$$\bar{\beta}_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{inx} b(x) \tag{4.59b}$$

o setor da matéria. Usando as expressões (4.59) o operador de Virasoro assume a forma

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_m \bar{\alpha}_{n-m}\bar{\alpha}_m - \frac{1}{2}\sum_m \bar{\beta}_{n-m}\bar{\beta}_m - in(\bar{\alpha}_n - \bar{\beta}_n) \quad . \tag{4.60}$$

A nível quântico devemos dar uma prescrição de ordenamento normal para os operadores

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_m :\bar{\alpha}_{n-m}\bar{\alpha}_m: -\frac{1}{2}\sum_m :\bar{\beta}_{n-m}\bar{\beta}_m: -in(\bar{\alpha}_n - \bar{\beta}_n) \quad . \tag{4.61a}$$

com as relações de comutação fundamentais

$$[\bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_m] = 2n\delta_{n,-m} \qquad [\bar{\beta}_n, \bar{\beta}_m] = 2n\delta_{n,-m} \quad . \tag{4.61b}$$

Para construir o espaço de Hilbert da teoria devemos impor as condições do operador de Virasoro atuando sobre o vácuo da teoria

$$L_n|0\rangle = 0 \quad ,$$

$$L_0|0\rangle = a|0\rangle \quad . \tag{4.62a}$$

Supondo que os estados físicos possuam a forma

$$\left(A\bar{\alpha}_n + B\bar{\beta}_n\right)|0\rangle = |phys\rangle \quad , \tag{4.62b}$$

determinamos A e B aplicando os operadores de Virasoro nestes estados, da seguinte forma

$$L_n\left[A\bar{\alpha}_n + B\bar{\beta}_n\right]|0\rangle = AL_n\bar{\alpha}_n|0\rangle + BL_n\bar{\beta}_n|0\rangle = A\left[2n\bar{\alpha}_0|0\rangle - i2n^2|0\rangle\right]$$
$$+B\left[2n\bar{\beta}_0|0\rangle + 2n^2|0\rangle\right] = \left(2An(\bar{\alpha}_0 - in) + 2nB(\bar{\beta}_0 + n)\right)|0\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{B}{A} = \frac{in - \bar{\alpha}_0}{\bar{\beta}_0 + n} \quad . \tag{4.63}$$

Aplicando agora o operador $L_0 - a$ sobre os estados $\bar{\alpha}_n|0\rangle$ e $\bar{\beta}_n|0\rangle$ obtemos

$$(L_0 - a)\bar{\alpha}_n|0\rangle = \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\bar{\beta}^2 - a_0 + 2n|0\rangle \quad ,$$

$$(L_0 - a)\bar{\beta}_n|0\rangle = \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\bar{\beta}^2 - a_0 + 2n|0\rangle \quad ,$$

e impondo a condição de estado físico

$$L_n|0\rangle = 0 \quad , \tag{4.64b}$$

achamos a relação

$$\frac{1}{2}\bar{\alpha}_0^2 + \bar{\beta}_0^2 + 2n - a = 0 \qquad , \tag{4.65a}$$

que determina $\bar{\alpha}_0^2 + \bar{\beta}_0^2$ para o estado em (4.62b). A constante a pode ser determinada usando-se um método covariante desenvolvido em teoria de cordas [8]. Neste caso temos duas contribuições idênticas (correspondentes aos operadores $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$) às que aparecem na teoria da corda bosônica de maneira que a assume o valor [8]

$$a = \frac{1}{6} \qquad . \tag{4.65b}$$

Finalizamos aqui a análise quântica da gravitação induzida sem fixação de gauge. A partir da próxima seção analisaremos a gravitação induzida como uma teoria de segunda classe, procurando um espaço de fase reduzido tendo como objetivo final uma quantização canônica do modelo.

- **Fixação de gauge completa da gravitação induzida**

Nesta seção apresentamos diversas tentativas de fixação de gauge completa da teoria de gravitação induzida pura.

Quando na seção anterior fixávamos o modelo de Polyakov no gauge de cone de luz não estávamos eliminando completamente a liberdade de gauge da teoria pois neste gauge os dois vínculos secundários ϕ_1 e ϕ_2 continuavam sendo de primeira classe. Para fixar completamente a liberdade de gauge deveríamos introduzir mais dois vínculos externos, tornando os sistema de segunda classe, tal como descrevêramos no capítulo 2. Este procedimento não é trivial no caso da gravitação induzida pois a Hamiltoniana é uma combinação linear de vínculos. Este fato é, como disséramos anteriormente, consequência da invariância por reparametrizações que o modelo possui. Sabemos [15] que quando construimos o espaço de fase reduzido (vide capítulo 1) de teorias invariantes por reparametrizações gerais o método de Dirac parece não enxergar o setor físico da teoria.

Na tentativa de se resolver este problema introduzimos vínculos fixadores que dependem explicitamente do tempo (na versão cone de luz, x^-), semelhante ao trabalho de Gitman et al. [22]: Consideramos como primeiro vínculo fixador a relação

$$\phi_3 = g_{++} - F(x^-) \quad , \quad F(x^-) = \mu {x^-}^2 + Bx^- + C \quad , \tag{4.66a}$$

onde $F(x^-)$ é uma função arbitrária do tempo, B e C são constantes arbitrárias. A consistência temporal do vínculo ϕ_3 nos fornece um segundo vínculo fixador que chamaremos de ϕ_4

$$\partial_- \phi_3 \approx \{\phi_3, H_c\} + \partial_- \phi_3 = (\pi + \frac{2g_{++}\pi^{++}}{\alpha})\frac{2}{\alpha} - 2\mu x^- - B = \phi_4 \quad . \tag{4.66b}$$

Por sua vez a consistência temporal de ϕ_4 nos fornece

$$\partial_- \phi_4 \approx \{\phi_4, H_c\} + \partial_- \phi_4 = \partial_-^2 g_{++} - 2\mu = 0 \quad . \tag{4.67}$$

A última igualdade se deve ao fato de que esta expressão representa uma equação de movimento para g_{++}, obtida a partir da relação (3.27), trabalhando com as variáveis de cone de luz. Este fato nos mostra que não há mais geração de vínculos e nosso conjunto total passa a ser (ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3,ϕ_4). De fato os vínculos primários (4.13-14) já foram eliminados[17] pois estamos trabalhando no gauge de cone luz. O próximo passo é confirmar se este conjunto de vínculos é de segunda classe. No sentido de facilitar os cálculos fazemos recombinações lineares entre eles de maneira a obter uma forma final conveniente

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\left[A^2 - \frac{4}{\alpha^2}(F(x^-)\pi^{++})^2 - \frac{4}{\alpha}F(x^-)\pi^{++}A + 4\alpha F(x^-)\partial_+ A + \alpha^2 \beta F(x^-)\right] \tag{4.68}$$

$$\phi_2 = \pi\partial_+\phi - 2F(x^-)\partial_+\pi^{++} \quad , \tag{4.69}$$

$$\phi_3 = g_{++} - F(x^-) \quad , \tag{4.70}$$

$$\phi_4 = \left(\pi + \frac{2F(x^-)\pi^{++}}{\alpha}\right)\frac{2}{\alpha} - 2\mu x^- - B \quad , \tag{4.71}$$

com

$$A = \frac{2F(x^-)\partial_+\pi^{++}}{\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2F(x^-)\pi^{++}}{\alpha}\right)} \quad .$$

Os seguintes parênteses de Poisson são os únicos não nulos

$$a(x,y) = \{\phi_2(x), \phi_3(y)\} = 2F(x^-)\partial_x\delta(x-y) \quad , \tag{4.72}$$

$$b(x,y) = \{\phi_2(x), \phi_4(y)\} = \pi(x)\partial_x\delta(x-y)\frac{2}{\alpha} \quad , \tag{4.73}$$

$$c(x,y) = \{\phi_3(x), \phi_4(y)\} = \frac{4}{\alpha^2}F(x^-)\delta(x-y) \quad , \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned} d(x,y) = \{\phi_1(x), \phi_3(y)\} &= L(x)\delta(x-y) \\ &+ M(x)\partial_x\delta(x-y) + N(x)\partial_x^2\delta(x-y) \end{aligned} \tag{4.75}$$

onde L, M e N são definidos pelas expressões

$$\begin{aligned} L(x) =& \frac{4F^2(x^-)\partial_x\pi^{11}}{\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2F(x^-)-\pi^{++}}{\alpha}\right)} - \frac{8}{\alpha^2}F(x^-)^2\pi^{++} - \frac{4}{\alpha}F(x^-)A \\ & - \frac{16F^3(x^-)\pi^{++}\partial_+\pi^{++}}{\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2F(x^-)\pi^{++}}{\alpha}\right)^2} + \partial_x\left(\frac{4F^2(x^-)\partial_x\pi^{++}}{(\frac{\alpha}{2} - \frac{2F(x^-)\pi^{++}}{\alpha})}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x) =& \frac{4A(x)F(x^-)}{\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2F(x^-)\pi^{++}}{\alpha}\right)} - \frac{8}{\alpha^2}\pi^{++}\frac{F^2(x^-)}{\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2F(x^-)\pi^{++}}{\alpha}\right)} \\ & + \frac{4F^2(x^-)\partial_x\pi^{++}}{(\frac{\alpha}{2} - \frac{2F(x^-)\pi^{++}}{\alpha})^2} + \partial_x\left(\frac{2F(x^-)}{\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{(2F(x)\pi^{++})}{\alpha}\right)}\right) \end{aligned}$$

$$N(x) = \frac{8F^2(x^-)\alpha}{(\frac{\alpha}{2} - \frac{2F(x^-)\pi^{++}}{\alpha})} \quad .$$

As relações (4.72-75) confirmam que o conjunto de vínculos é de segunda classe. Com estes dados construimos a matriz de Dirac

$$\Delta_{ij}(x,y) = \{\phi_i(x), \phi_j(y)\} \quad ,$$

$$\Delta^{ij}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & a(x,y) & b(x,y) \\ -d(y,x) & -a(y,x) & 0 & c(x,y) \\ 0 & -b(y,x) & -c(y,x) & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{4.76}$$

onde $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$ estão definidos pelas expressões (4.72-75).

Para continuarmos com o processo de fixação de gauge via método de Dirac devemos calcular a matriz inversa de Δ e a seguir os parênteses de Poisson. Obtemos Δ^{-1} seguindo a definição de inversa

$$\int dz \Delta^{-1}_{im}(x,y)\Delta_{mj}(z,y) = \delta(x-y)\delta_{ij} \quad . \tag{4.77}$$

O cálculo dos elementos da matriz inversa a partir da definição deve ser feito com cuidado pois os elementos da matriz de Dirac são distribuições, como mostram as expressões (4.72-75). Obtemos neste caso

$$\Delta^{-1}_{42}(x,y) = \epsilon(x,y)\pi^{-1}(y)\frac{\alpha}{4} \quad , \tag{4.78}$$

$$\Delta^{-1}_{31}(x,y) = d^{-1}(x,y) \quad , \tag{4.79}$$

$$\partial_y(\Delta^{-1}_{12}(x,y)\pi(y)) = \Delta^{-1}_{13}(x,y)\frac{2}{\alpha}F(x^-) \quad , \tag{4.80a}$$

$$\Delta^{-1}_{13}(x,y)F(x^-) = -\frac{1}{\alpha}\pi(y)\Delta^{-1}_{14}(x,y) \quad , \tag{4.80b}$$

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta^{-1}_{12}(x,y) & \Delta^{-1}_{13}(x,y) & \Delta^{-1}_{14}(x,y) \\ -\Delta^{-1}_{12}(y,x) & 0 & 0 & \Delta^{-1}_{24}(x,y) \\ -\Delta^{-1}_{13}(y,x) & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta^{-1}_{14}(y,x) & -\Delta^{-1}_{24}(y,x) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{4.81}$$

Procedemos então ao cálculo dos parênteses de Dirac, usando a definição (1.41). Obtemos para a teoria da gravitação induzida

$$\{\varphi(x), T(y)\}_D = \{\pi(x), T(y)\}_D = \{\pi^{11}(x), T(y)\}_D = \{g_{11}(x), T(y)\}_D = 0 \quad , \tag{4.82}$$

onde $T(y)$ denota qualquer varíavel do espaço de fase. Este resultado mostra que a imposição dos vínculos externos ϕ_3 e ϕ_4 fixaram completamente a teoria, fornecendo uma dinâmica trivial. Por outro lado não poderíamos ter tentado uma fixação com um número menor de vínculos externos pois nesse caso não teríamos tornado os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 de segunda classe.

• Fixação via Hamiltoniana estendida

Existe a possiblidade de se fixar o gauge de uma teoria como a gravitação utilizando-se o conceito de Hamiltoniana estendida, tal como descrevemos no capítulo 1. A Hamiltoniana estendida é para este modelo

$$H_c = 4\left[(v_1 - \frac{\sqrt{-g}}{g_{++}})\phi_1 + (v_2 + \frac{g_{-+}}{g_{++}})\phi_2\right] \quad , \tag{4.83}$$

com isto, para se fazer uma fixação de gauge correta, precisamos de dois vínculos externos independentes. Adotamos aqui

$$\phi_3 = g_{++} - F(x^-) \quad , \tag{4.84}$$

$$\phi_4 = \pi - \partial_+\varphi \quad . \tag{4.85}$$

Este último é um vínculo semelhante ao encontrado na análise Hamiltoniana do modelo de bósons quirais em duas dimensões[15]. Os parênteses de Poisson tomam a forma

$$\bar{a}(x,y) = \{\phi_2(x), \phi_3(y)\} = 2F(x^-)\partial_x\delta(x-y) \quad , \tag{4.86}$$

$$\bar{b}(x,y) = \{\phi_2(x), \phi_4(y)\} = 2\pi(x)\partial_y\delta(x-y) \quad , \tag{4.87}$$

$$\bar{c}(x,y) = \{\phi_4(x), \phi_4(y)\} = 2\partial_y\delta(x-y) \quad . \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned}\bar{d}(x,y) = \{\phi_1(x), \phi_3(y)\} = \frac{1}{2}\Big[&[2\pi^{++}(x) - \frac{4}{\alpha^2}F^2(x^-)\pi^{++}(x)]\delta(x-y) \\ &- [\frac{8}{\alpha} + 2\alpha]\partial_x\delta(x-y)\Big] \quad ,\end{aligned} \tag{4.89}$$

Com isto construimos a matriz de Dirac

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{d}(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}(x,y) & \bar{b}(x,y) \\ -\bar{d}(y,x) & -\bar{a}(y,x) & 0 & \bar{c}(x,y) \\ 0 & -\bar{b}(y,x) & -\bar{c}(y,x) & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{4.90}$$

e procedemos ao cálculo da matriz inversa. Os elementos importantes são obtidos da definição (1.38)

$$\int dz \Delta_{42}^{-1}(x,z)\bar{b}(z,y) = \delta(x-y) \quad , \tag{4.91}$$

substituindo a expressão (4.88) em (4.91) obtemos

$$\int dz \Delta_{42}^{-1} 2\pi(z)\partial_y \delta(z-y) = 2\partial_y[\Delta_{42}^{-1}(x,y)\pi(y)] = \delta(x,y) \quad . \tag{4.92}$$

Integrando (4.92) obtemos finalmente

$$\Delta_{42}^{-1}(x,y) = -\frac{\pi^{-1}(y)\epsilon(x-y)}{4} \quad . \tag{4.93}$$

Para o elemento Δ_{22}^{-1} temos de modo análogo, da definição (1.38)

$$\int dz \Delta_{22}^{-1}(x,z)\bar{b}(z,y) + \int dz \Delta_{24}^{-1}(x,z)\bar{c}(z,y) = 0 \quad . \tag{4.94}$$

Substituindo (4.88), (4.89) e (4.93) em (4.94), temos

$$\int dz \Delta_{22}^{-1}(x,z) 2\pi(z)\partial_y \delta(z-y) - \int dz \frac{\pi^{-1}(x)}{2}\epsilon(x-y)\partial_y \delta(z-y) = 0 \quad , \tag{4.95}$$

e integrando

$$2\partial_y[\Delta_{22}^{-1}(x,y)\pi(y)] = \frac{\pi^{-1}(x)}{2}\partial_y \epsilon(x-y)$$

$$\Delta_{22}^{-1}(x,y) = \frac{\epsilon(x-y)}{4\pi(x)\pi(y)} \quad . \tag{4.96}$$

Estes dois elementos da matriz inversa são suficientes para obtermos como parênteses de Dirac

$$\{\varphi(x)\pi(y)\}_D = \{\pi(x),\pi(y)\}_D = \{\pi^{++}(x),\pi^{++}(y)\}_D = 0 \quad , \tag{4.97}$$

$$\{g_{++}(x),T(y)\}_D = \{\pi(x),\pi^{++}(y)\}_D = 0 \quad , \tag{4.98}$$

onde T é uma variável qualquer do espaço de fase.

Resta apenas como cálculo não trivial

$$\{\varphi(x),\varphi(y)\}_D = -\int dz dw \left[\{\varphi(x),\phi_2(z)\}\Delta_{24}^{-1}(z,w)\{\phi_4(w),\varphi(y)\}\right.$$

$$+ \{\varphi(x), \phi_4(z)\}\Delta_{42}^{-1}(z,w)\{\phi_2(w), \varphi(y)\} + \{\varphi(x), \phi_2(z)\}\Delta_{22}^{-1}(z,w)\{\phi_2(w), \varphi(y)\}]$$

$$= -\int dzdw \left[\pi(z)\delta(x-y)\frac{\pi^{-1}(z)}{2}\epsilon(z-w)\delta(w-y)\right.$$
$$\left. + \delta(x-z)\pi^{-1}(w)\epsilon(z-w)2\pi(w)\delta(w-y) - \pi(z)\delta(x-z)\frac{\epsilon(z-w)}{\pi(z)\pi(w)}\pi(w)\delta(w-y)\right]$$
$$= \frac{\epsilon(x-y)}{2} + \frac{\epsilon(x-y)}{2} - \epsilon(x-y) = 0 \quad . \tag{4.99}$$

Novamente obtemos no caso estendido uma redução Hamiltoniana trivial onde o espaço de fase é aniquilado. Estes resultados mostram que a imposição dos vínculos fixadores dependentes do tempo não permite que a redução Hamiltoniana enxergue os graus de liberdade físicos da teoria.

- **Acoplamento da gravitação induzida com campos de Máteria**

O modelo de gravitação pura analisado nas seções anteriores pode ser estendido para um modelo de gravitação acoplado a matéria. A ação do modelo é dada pela expressão

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{-g}[-\varphi\Box\varphi - X\Box X - \alpha R\varphi - \gamma RX + (\gamma^2+\alpha^2)\beta] \quad , \tag{4.100}$$

onde X representa o campo de matéria. O fator γ está associado à carga central destes campos.

A partir da expressão (4.100) podemos calcular os momentos canonicamente conjugados, neste modelo adotamos como tempo a variável x^0; x^1 é a variável espacial

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[-g_{11}\dot{\varphi} + g_{01}\varphi' + 2\alpha(\dot{g}_{11} - g'_{11})\right] \quad , \tag{4.101}$$

$$\bar{\pi} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 X)} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[-g_{11}\dot{X} + g_{01}X' + 2\gamma(\dot{g}_{11} - g'_{11})\right] \quad , \tag{4.102}$$

$$\pi^{11} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 g_{11})} = \frac{\alpha\dot{\varphi}}{2\sqrt{-g}} + \frac{\gamma\dot{X}}{2\sqrt{-g}} + \frac{\alpha\varphi}{g\sqrt{-g}}[g_{00}g'_{01} - g_{01}g'_{00}]$$
$$+ \frac{\gamma X}{g\sqrt{-g}}[g_{00}g'_{01} - g_{01}g'_{00}] \quad , \tag{4.103}$$

$$\pi^{01} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 g_{01})} = -\frac{\alpha\dot{\varphi}}{2\sqrt{-g}} + \frac{\alpha\varphi}{g\sqrt{-g}}\left[g_{00}g'_{01} - g_{11}g'_{00}\right] - \frac{\gamma\dot{X}}{2\sqrt{-g}}$$
$$+ \frac{\gamma X}{g\sqrt{-g}}\left[g_{00}g'_{11} - g_{11}g'_{00}\right] \quad , \tag{4.104}$$
$$\pi^{00} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 g_{00})} = \frac{\alpha\varphi}{g\sqrt{-g}}\left[g_{01}g'_{11} - g_{11}g'_{01}\right] + \frac{\gamma X}{g\sqrt{-g}}\left[g_{01}g'_{11} - g_{11}g'_{01}\right] \quad , \tag{4.105}$$

onde $\bar{\pi}$ representa o momento correspondente à matéria.

Analogamente ao caso da gravitação pura podemos adicionar à Lagrangeana (4.100) uma derivada total, obtendo a partir da nova Lagrangeana expressões mais simples para os momentos

$$\bar{L} = L + \partial_\mu \Gamma^\mu \quad , \tag{4.106}$$

com

$$\partial_\mu\Gamma^\mu = \frac{\alpha}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\varphi}{g}[\dot{g}_{00}(g_{01}g'_{11} - g_{11}g'_{01}) - \dot{g}_{01}(g_{00}g'_{11} - g_{11}g'_{00})] - \varphi'\dot{g}_{01}\right.$$
$$\left. + \frac{\varphi}{g}[\dot{g}_{11}(g_{00}g'_{01} - g_{01}g'_{00})] - \frac{g_{01}}{g_{11}}[g'_{11}\dot{\varphi} - \dot{g}_{11}\varphi'] + \dot{\varphi}g'_{01}\right\}$$
$$+ \frac{\gamma}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{X}{g}[\dot{g}_{00}(g_{01}g'_{11} - g_{11}g'_{01})] - \dot{g}_{01}(g_{00}g'_{11} - g_{11}g'_{00})] - X'\dot{g}_{01}\right.$$
$$\left. + \frac{X}{g}[\dot{g}_{11}(g_{00}g'_{01} - g_{01}g'_{00})] - \frac{g_{01}}{g_{11}}[g'_{11}\dot{X} - \dot{g}_{11}X'] + \dot{X}g'_{01}\right\} \quad , \tag{4.107}$$

com

$$\Gamma^0 = \frac{(\varphi\alpha + X\gamma)}{4\sqrt{-g}}\left(g'_{01} - \frac{g_{01}g'_{11}}{g_{11}}\right) \quad ,$$
$$\Gamma^1 = -\frac{(\varphi\alpha + X\gamma)}{4\sqrt{-g}}\left(\dot{g}_{01} - \frac{g_{01}\dot{g}_{11}}{g_{11}}\right) \quad . \tag{4.108}$$

Com este termo adicional a nova lagrangena fica

$$L = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\left[(-g_{11}\dot{\varphi}^2 + 2g_{01}\dot{\varphi}\varphi' - g_{00}\varphi'^2) + \alpha(\dot{g}_{11}\dot{\varphi} - 2g'_{01}\dot{\varphi} + g'_{00}\varphi')\right.$$
$$\left. + \alpha\frac{g_{01}}{g_{11}}(g'_{11}\dot{\varphi} - \dot{g}_{11}\varphi') - \alpha^2\beta g\right]$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{-g}}\left[(-g_{11}\dot{X}^2 + 2g_{01}\dot{X}X' - g_{00}X'^2) + \gamma(\dot{g}_{11}\dot{X} - 2g'_{01}\dot{X} + g'_{00}X')\right.$$

$$+\gamma\frac{g_{01}}{g_{11}}(g'_{11}\dot{X}-\dot{g}_{11}X')-\gamma^2\beta g\Big] \quad . \tag{4.109}$$

As expressões para os novos momentos ficam de fato mais simples

$$\pi_\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}(g_{01}\varphi' - g_{11}\dot{\varphi}) + \frac{\alpha}{2\sqrt{-g}}\left(\dot{g}_{11} - 2g'_{01} + \frac{g_{01}}{g_{11}}g'_{11}\right) \quad , \tag{4.110}$$

$$\pi^{11} = \frac{\alpha}{2\sqrt{-g}}\left(\dot{\varphi} - \frac{g_{01}}{g_{11}}\varphi'\right) + \frac{\gamma}{2\sqrt{-g}}\left(\dot{X} - \frac{g_{01}}{g_{11}}X'\right) \quad , \tag{4.111}$$

$$\bar{\pi} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(g_{01}X' - g_{11}\dot{X}) + \frac{\gamma}{2\sqrt{-g}}\left(\dot{g}_{11} - 2g'_{01} + \frac{g_{01}}{g_{11}}g'_{11}\right) \quad , \tag{4.112}$$

$$\Gamma_1 = \pi^{00} \approx 0 \quad , \tag{4.113a}$$

$$\Gamma_2 = \pi^{01} \approx 0 \quad . \tag{4.113b}$$

Estas duas últimas expressões representam dois vínculos primários. Os parênteses de Poisson entre as variáveis canonicamente conjugadas são dados por

$$\{(x), \pi(y)\} = \{X(x), \bar{\pi}(y)\} = \delta(x-y) \quad , \tag{4.114a}$$

$$\{g_{ab}(x), \pi^{cd}(y)\} = \delta_a^c\delta_b^d\delta(x-y) \quad . \tag{4114b}$$

As relações (4.110-114) podem ser invertidas para se calcular as velocidades em termos das variáveis do espaço de fase. Tais velocidades são dadas por

$$\dot{\varphi} = -\left[\pi - \frac{\alpha}{\alpha^2+\gamma^2}(\alpha\pi + \gamma\bar{\pi} + 2g_{11}\pi^{11})\right]\frac{\sqrt{-g}}{g_{11}} + \frac{g_{01}\varphi'}{g_{11}} \quad , \tag{4.115}$$

$$\dot{X} = -\left[\bar{\pi} - \frac{\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}(\alpha\pi + \gamma\bar{\pi} + 2g_{11}\pi^{11})\right]\frac{\sqrt{-g}}{g_{11}} + \frac{g_{01}X'}{g_{11}} \quad , \tag{4.116}$$

$$\dot{g}_{11} = 2g'_{01} - \frac{g'_{11}g_{01}}{g_{11}} + (\alpha\pi + \gamma\bar{\pi} + 2g_{11}\pi^{11})\frac{2\sqrt{-g}}{\alpha^2+\gamma^2} \quad . \tag{4.117}$$

Com estes resultados podemos construir a Hamiltoniana canônica da teoria

$$\begin{aligned}
H_c =& \pi\dot{\varphi} + \bar{\pi}\dot{X} + \pi^{11}\dot{g}_{11} - L \\
=& \frac{1}{2\sqrt{-g}}\Bigg\{[2\pi\sqrt{-g} - (-g_{11}\dot{\varphi} + 2g_{01}\varphi' + \alpha\dot{g}_{11} - 2\alpha g'_{01} + \frac{\alpha g_{01}g'_{11}}{g_{11}}]\dot{\varphi} \\
&+ [2\bar{\pi}\sqrt{-g} - (-g_{11}\dot{X} + 2g_{01}X' + \gamma\dot{g}_{11} - 2\gamma g'_{01} + \frac{\gamma g_{01}g'_{11}}{g_{11}}]\dot{X} \\
&+ [2\pi^{11}\sqrt{-g} + \frac{\alpha g_{01}}{g_{11}}\varphi' + \frac{\gamma g_{01}}{g_{11}}X']\dot{g}_{11} + g_{00}(\varphi'^2 + X'^2) \\
&+ g'_{00}(\alpha\varphi' + \gamma X') + (\alpha^2+\gamma^2)\beta g\Bigg\} \quad .
\end{aligned} \tag{4.118a}$$

Substituindo agora as expressões das velocidades em termos das variáveis do espaço de fase obtemos o resultado final

$$H_c = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{11}}\left[-\frac{\pi^2}{2} + \frac{(\alpha\pi + \gamma\bar{\pi} + 2g_{11}\pi^{11})^2}{2(\alpha^2+\gamma^2)} - \frac{\bar{\pi}^2}{2} - \frac{(\alpha^2+\gamma^2)\beta g_{11}}{2} - \frac{1}{2}({\varphi'}^2 + {X'}^2)\right.$$
$$\left. + \frac{g'_{11}}{2g_{11}}(\alpha\varphi' + \gamma X') - \alpha\varphi'' - \gamma X''\right] + \frac{g_{01}}{g_{11}}\left[\varphi'\pi + X'\bar{\pi} - 2g_{11}{\pi^{11}}' - g'_{11}\pi^{11}\right] \tag{4.118b}$$

Podemos escrever H_c na forma

$$H_c = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{11}}\phi_1 + \frac{g_{01}}{g_{11}}\phi_2 \quad , \tag{4.119}$$

com

$$\phi_1 = -\frac{1}{2}\left(\pi^2 + \bar{\pi}^2\right) + \frac{(\alpha\pi + \gamma\bar{\pi} + 2\pi^{11}g_{11})^2}{2(\alpha^2+\gamma^2)} - \frac{(\alpha^2+\gamma^2)\beta g_{11}}{2}$$
$$-\frac{1}{2}({\varphi'}^2 + {X'}^2) + \frac{g'_{11}}{2g_{11}}(\alpha\varphi' + \gamma X') - \alpha\varphi'' - \gamma X'' \quad , \tag{4.120}$$

$$\phi_2 = \varphi'\pi + X'\bar{\pi} - 2g_{11}{\pi^{11}}' - {g_{11}}'\pi^{11} \quad . \tag{4.121}$$

Ao verificarmos a consistência temporal dos vínculos primários (Γ_1, Γ_2) vemos que ϕ_1 e ϕ_2 surgem como vínculos secundários da teoria

$$\dot{\Gamma}_1(x) \approx \left\{\Gamma_1(x), \int dy H_c(y)\right\} \approx \phi_1 \quad ,$$

$$\dot{\Gamma}_2(x) \approx \{\Gamma_2(x), \int dy H_c(y)\} \approx \phi_2 \quad . \tag{4.122}$$

Estes por sua vez não geram mais vínculos pois o conjunto completo é de primeira classe

$$\{\Gamma_1(x), \Gamma_i(y)\} = 0 \quad ,$$

$$\{\Gamma_2(x), \Gamma_i(y)\} = 0 \quad ,$$

$$\{\Gamma_i(x), \phi_j(y)\} = 0 \quad , \tag{4.123a}$$

$$\{\phi_1(x), \phi_1(y)\} = [\phi_2(x) + \phi_2(y)]\partial_x\delta(x-y) \quad ,$$

$$\{\phi_1(x), \phi_2(y)\} = [\phi_1(x) + \phi_1(y)]\partial_x\delta(x-y) \quad ,$$

$$\{\phi_2(x), \phi_2(y)\} = [\phi_2(x) + \phi_2(y)]\partial_x \delta(x-y) \quad . \tag{4.123b}$$

Esta álgebra de vínculos realizada via parênteses de Poisson nos fornece um resultado já esperado e semelhante ao da teoria livre: a teoria da gravitação acoplada à matéria é invariante por difeomorfismos e então devemos ter um conjunto de 4 vínculos de primeira classe como geradores Hamiltonianos (para os dois parâmetros dos difeomorfismos e suas derivadas tal como nos ensina o método de Anderson e Bergmann [2]). A presença da invariância mencionada acima nos permite introduzir um processo de fixação de gauge. Adotamos como vínculos fixadores

$$\phi_3 = g_{11} - F(t,x) \quad , \tag{4.124}$$

$$\phi_4 = \frac{2}{\alpha^2 + \gamma^2}(\alpha\pi + \gamma\bar{\pi}) \quad . \tag{4.125}$$

Para que este processo de fixação seja consistente é necessário que trabalhemos com a Hamiltoniana estendida da teoria, pois ϕ_3 e ϕ_4 são vínculos independentes

$$H_e = -\left(v_1 - \frac{\sqrt{-g}}{g_{11}}\right)\phi_1 + \left(v_2 + \frac{g_{01}}{g_{11}}\right)\phi_2 \quad , \tag{4.126}$$

onde v_1 e v_2 são multiplicadores arbitrários determinados pela imposição de consistência temporal de ϕ_3 e ϕ_4

$$\dot{\phi}_3(x) = \left\{\phi_3(x), \int dy H_c(y)\right\} + \int dy v_i(y)\{\phi_3(x), \phi_i(y)\} \quad , \tag{4.127}$$

$$\dot{\phi}_4(x) = \left\{\phi_4(x), \int dy H_c(y)\right\} + \int dy v_i(y)\{\phi_4(x), \phi_i(y)\} \quad . \tag{4.128}$$

Continuamos com o processo de fixação de gauge construindo a matriz de Dirac, definida como de praxe, por

$$\Delta_{ij}(x,y) = \{\phi_i(x), \phi_j(y)\} \quad . \tag{4.129}$$

Os elementos são calculados a partir dos parênteses fundamentais (4.114)

$$\{\phi_1(x), \phi_3(y)\} = -\frac{2g_{11}^2 \pi^{11}(x)}{\rho^2}\delta(x-y) \quad , \tag{4.130a}$$

$$\{\phi_1(x), \phi_4(y)\} = \left(\frac{g'_{11}}{g_{11}} - \left[\frac{2}{\rho^2}\alpha\varphi' + \gamma X'\right]\right)(x)\partial_x\delta(x-y) - 2\partial_x^2\delta(x-y), \tag{4.130b}$$

$$\{\phi_2(x), \phi_3(y)\} = 2g_{11}(x)\partial_x\delta(x-y) + g'_{11}(x)\delta(x-y) \quad , \tag{4.130c}$$

onde $\rho^2 = \alpha^2 + \gamma^2$. Os demais parênteses de Poisson são nulos. Os parênteses (4.130) determinam a matriz de Dirac

$$\Delta(x,y) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2g_{11}\pi^{11}(x)\delta & (\frac{g'_{11}}{g_{11}} - [\quad])(x)\partial_x\delta - 2\partial_x^2\delta \\ 0 & 0 & 2g_{11}(x)\partial_x\delta + g'_{11}(x)\delta & 0 \\ 2g_{11}\pi^{11}(x)\delta & -2g_{11}(y)\partial_y\delta - g'_{11}(y)\delta & 0 & 0 \\ 2\partial_y^2\delta - (\frac{g'_{11}}{g_{11}} - [\quad])(y)\partial_y\delta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.131}$$

Devemos calcular agora a inversa desta matriz. O processo é não trivial pois os elementos de (4.131) são somas de distribuições independentes podendo nos deparar, por exemplo, com elementos da matriz inversa que sejam séries infinitas na função delta e suas derivadas. Partimos então da definição de matriz de Dirac inversa

$$\int dz \Delta_{im}^{-1}(x,z)\Delta_{mj}(z,y) = \delta(x-y)\delta_{ij} \quad . \tag{4.132}$$

Os elementos não nulos ficam determinados pelo conjunto de equações

$$\int dz \Delta_{32}^{-1}(x,z)(2g_{11}(z)\partial_z\delta(z-y) + g'_{11}\delta(z-y)) = \delta(x-y) \quad , \tag{4.133}$$

$$\int dz \Delta_{41}^{-1}(x,z)\left[\left(\frac{g'_{11}}{g_{11}} - \frac{2}{\rho^2}(\alpha\varphi'(z) + \gamma X'(z))\right)\partial_z\delta(z-y) - 2\partial_z^2\delta(z-y)\right] = \delta(x-y), \tag{4.134}$$

$$-\int dz \Delta_{41}^{-1}(x,z)\frac{2g_{11}^2\pi^{11}(z)}{\rho^2}\delta(z-y) + \int dz \Delta_{42}^{-1}(x,z)\,(2g_{11}(z)\partial_z\delta(z-y) + g'_{11}\delta(z-y)) = 0. \tag{4.135}$$

De (4.133) obtemos, fazendo uma integração por partes, a expressão

$$-\int dz\,\left[2\partial_z\Delta_{32}^{-1}(x,z)g_{11}(z) - \Delta_{32}^{-1}(x,z)g'_{11}(z)\right]\delta(z-y) = \delta(z-y)$$

integrando em z definimos a forma de Δ_{32}^{-1} e Δ_{23}^{-1}

$$\Delta_{32}^{-1}(x,y) = \frac{\epsilon(x-y)}{4\sqrt{g_{11}(x)g_{11}(y)}} \quad ,$$

$$\Delta_{23}^{-1}(x,y) = \frac{\epsilon(x-y)}{4\sqrt{g_{11}(x)g_{11}(y)}} \quad . \tag{4.136}$$

Integrando em (4.134)) obtemos

$$-\partial_y\left[\left(\frac{g'_{11}(y)}{g_{11}(y)}-\frac{2}{\rho^2}(\alpha\varphi'(y)+\gamma X'(y))\right)\Delta^{-1}_{41}(x,y)\right]-2\partial_y^2\Delta^{-1}_{41}(x,y)=\delta(x-y)\Rightarrow$$

$$\partial_y\left\{\ln g_{11}(y)-\frac{2}{\rho^2}(\alpha\varphi(y)+\gamma X(y))\right\}\Delta^{-1}_{41}(x,y)+2\partial_y\Delta^{-1}_{41}(x,y)=\frac{\epsilon(x-y)}{2}\quad,$$

integrando na variável y obtemos mais dois elementos da inversa

$$\Delta^{-1}_{41}(x,y)=\left\{\int_{-\infty}^{y}dz\frac{\epsilon(x-z)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}e^{-\frac{1}{\rho^2}(\alpha\varphi(z)+\gamma X(z))}\right\}\frac{e^{\frac{1}{\rho^2}(\alpha\varphi(y)+\gamma X(y))}}{\sqrt{g_{11}(y)}}$$

$$\Delta^{-1}_{14}(y,x)=-\left\{\int_{-\infty}^{x}dz\frac{\epsilon(z-y)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}e^{-\frac{1}{\rho^2}(\alpha\varphi(z)+\gamma X(z))}\right\}\frac{e^{\frac{1}{\rho^2}(\alpha\varphi(x)+\gamma X(x))}}{\sqrt{g_{11}(x)}}.\quad(4.137)$$

Finalmente, integrando por partes em (4.135)

$$-\frac{2g_{11}^2\pi^{11}(y)}{\rho^2}\Delta^{-1}_{41}(x,y)-2\partial_y[\Delta^{-1}_{42}(x,y)g_{11}(y)]+\Delta^{-1}_{42}(x,y)g'_{11}(y)=0\quad.$$

Esta expressão tem por solução

$$\Delta^{-1}_{42}(x,y)=-\frac{1}{\rho^2}\left[\int_{-\infty}^{y}dz g_{11}\pi^{11}(x)\Delta^{-1}_{41}(x,z)\sqrt{g_{11}(z)}\frac{1}{\sqrt{g_{11}(y)}}\right]\quad,\qquad(4.138)$$

$$\Delta^{-1}_{24}(y,x)=\frac{1}{\rho^2}\left[\int_{-\infty}^{x}dz g_{11}\pi^{11}(y)\Delta^{-1}_{41}(y,z)\sqrt{g_{11}(z)}\frac{1}{\sqrt{g_{11}(x)}}\right]\quad.\qquad(4.139)$$

A partir desta fixação de gauge podemos obter os resultados de uma outra versão onde o vínculo (4.124) depende explicitamente apenas do tempo

$$\phi_4=g_{11}-F(t)\quad,\qquad(4.140a)$$

então vale

$$g'_{11}(x)=0\quad.\qquad(4.140b)$$

Assim, os elementos da matriz inversa de Dirac se reduzem para

$$\Delta_{32}^{-1}(x,y) = \frac{\epsilon(x-y)}{4} g_{11}^{-1}(y) \quad , \tag{4.141}$$

$$\Delta_{41}^{-1}(x,y) = \left[\int_{-\infty}^{y} dz \frac{\epsilon(x-y)}{4} e^{-\frac{1}{\rho^2}(\alpha\varphi(z)+\gamma X(z))}\right] e^{+\frac{1}{\rho^2}(\alpha\varphi(y)+\gamma X(y))} \quad , \tag{4.142}$$

$$\Delta_{42}^{-1}(x,y) = -\left[\int_{-\infty}^{y} dz \frac{g_{11}\pi^{11}(z)\Delta_{41}^{-1}(x,z)}{\rho^2}\right] \quad . \tag{4.143}$$

Aqui as expressões dos elementos da inversa são visivelmente mais simples, mas a fixação (4.124-25) é mais geral pois não define um campo gravitacional homogêneo como (4.140).

Para finalizar o processo de fixação de gauge calculamos os parênteses de Dirac para os campos da teoria (equação (1.42)), passo fundamental rumo à quantização canônica, determinando a estrutura do seu espaço de fase reduzido . Os parênteses não nulos são

$$\begin{aligned}
\{\varphi(x),\varphi(y)\}_D = &-\frac{2\alpha}{\rho^2}\left(2g_{11}\pi^{11}(x)\frac{\alpha}{\rho^2} - \pi(x)\right)\int_{-\infty}^{x} dz \frac{\epsilon(z-y)}{4} C^-(z)C^+(x)\frac{\sqrt{g_{11}(z)}}{\sqrt{g_{11}(x)}} \\
&+\frac{2\alpha}{\rho^2}\left(g_{11}\pi^{11}(y)\frac{\alpha}{\rho^2} - \pi(y)\right)\int_{-\infty}^{y} dz \frac{\epsilon(x-z)}{4} C^-(z)C^+(y)\frac{\sqrt{g_{11}(z)}}{\sqrt{g_{11}(y)}} \\
&-\frac{2\alpha}{\rho^2}\left\{\varphi'(y)\left[\int_{-\infty}^{y} dz \frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{x} dw \frac{\epsilon(w-z)}{4} C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(y)}}\right]\right. \\
&\left.-\varphi'(x)\left[\int_{-\infty}^{x} dz \frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{y} dw \frac{\epsilon(w-z)}{4} C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4.144}$$

onde

$$C^{\pm}(z) = e^{\pm\frac{1}{\rho^2}(\alpha\varphi(z)+\gamma X(z))} \quad . \tag{4.145}$$

A expressão (4.144) determina a relação de comutação do campo auxiliar $\varphi(x)$. De maneira análoga encontramos os parênteses de Dirac para o campo de matéria

$$
\begin{aligned}
\{X(x),X(y)\}_D =& -\frac{2\gamma}{\rho^2}\left(2g_{11}\pi^{11}(x)\frac{\gamma}{\rho^2}-\bar{\pi}(x)\right)\int_{-\infty}^{x}dz\frac{\epsilon(z-y)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(x)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(x)}}\\
&+\frac{2\gamma}{\rho^2}\left(2g_{11}\pi^{11}(y)\frac{\gamma}{\rho^2}-\bar{\pi}(y)\right)\int_{-\infty}^{y}dz\frac{\epsilon(x-z)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(y)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(y)}}\\
&-\frac{2\gamma}{\rho^2}\left\{X'(y)\left[\int_{-\infty}^{y}dz\frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{x}dw\frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(y)}}\right]\right.\\
&\left.-X'(x)\left[\int_{-\infty}^{x}dz\frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{y}dw\frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}\right]\right\} \quad (4.146)
\end{aligned}
$$

além do parênteses fundamental misto

$$
\begin{aligned}
\{\varphi(x),X(y)\}_D =& -\frac{2\gamma}{\rho^2}\left(2g_{11}\pi^{11}(x)\frac{\alpha}{\rho^2}-\pi(x)\right)\int_{-\infty}^{x}dz\frac{\epsilon(z-y)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(x)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(x)}}\\
&+\frac{2\gamma}{\rho^2}\left(g_{11}\pi^{11}(y)\frac{\alpha}{\rho^2}-\pi(y)\right)\int_{-\infty}^{y}dz\frac{\epsilon(x-z)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(y)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(y)}}\\
&-\frac{2\gamma}{\rho^2}\left\{\varphi'(y)\left[\int_{-\infty}^{y}dz\frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{x}dw\frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(y)}}\right]\right.\\
&\left.-\varphi'(x)\left[\int_{-\infty}^{x}dz\frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{y}dw\frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}\right]\right\} \quad (4.147)
\end{aligned}
$$

Calculamos agora os parênteses de Dirac entre os campos φ e X e seus momentos

$$
\begin{aligned}
\{\pi(x),\varphi(y)\}_D =& -\delta(x-y)+\frac{2\alpha}{\rho^2}\Bigg[\partial_y\Big[\left(\int_{-\infty}^{x}dz\frac{\epsilon(z-y)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(x)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(x)}}\right)\times\\
&\left(\frac{\alpha g'_{11}(z)}{2g_{11}(z)}-\varphi'(z)\right)\Big]\Bigg]+\frac{2\alpha^2}{\rho^2}\partial_y^2\Big[\int_{-\infty}^{x}dz\frac{\epsilon(z-y)}{4}\frac{\sqrt{g_{11}(z)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}C^-(z)C^+(x)\Big]\\
&+\frac{2\alpha}{\rho^2}\partial_y\left[\pi(y)\Big[\int_{-\infty}^{x}dz\frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{y}dw\frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}\Big]\right], \quad (4.148)
\end{aligned}
$$

$$\{\bar{\pi}(x), X(y)\}_D = -\delta(x-y) + \frac{2\gamma}{\rho^2}\Bigg[\partial_y\Bigg[\Bigg(\int_{-\infty}^{x} dz \frac{\epsilon(z-y)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(x)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(x)}}\Bigg) \times$$

$$\left(\frac{\gamma g_{11}'(z)}{2g_{11}(z)} - X'(z)\right)\Bigg]\Bigg] + \frac{2\gamma^2}{\rho^2}\partial_y^2\Bigg[\int_{-\infty}^{x} dz \frac{\epsilon(z-y)}{4}\frac{\sqrt{g_{11}(z)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}C^-(z)C^+(x)\Bigg]$$

$$+ \frac{2\gamma}{\rho^2}\partial_y\left[\bar{\pi}(y)\Bigg[\int_{-\infty}^{x} dz \frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{y} dw \frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}\Bigg]\right], \quad (4.149)$$

junto com as relações conjugadas mistas

$$\{\pi(x), X(y)\}_D = \frac{2\gamma}{\rho^2}\Bigg[\partial_y\Bigg[\Bigg(\int_{-\infty}^{x} dz \frac{\epsilon(z-y)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(x)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(x)}}\Bigg) \times$$

$$\left(\frac{\alpha g_{11}'(z)}{2g_{11}(z)} - \varphi'(z)\right)\Bigg]\Bigg] + \frac{2\gamma}{\rho^2}\alpha\partial_y^2\Bigg[\int_{-\infty}^{x} dz \frac{\epsilon(z-y)}{4}\frac{\sqrt{g_{11}(z)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}C^-(z)C^+(x)\Bigg]$$

$$+ \frac{2\gamma}{\rho^2}\partial_y\left[\pi(y)\Bigg[\int_{-\infty}^{x} dz \frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{y} dw \frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}\Bigg]\right], \quad (4.150)$$

$$\{\bar{\pi}(x), \varphi(y)\}_D = \frac{2\alpha}{\rho^2}\Bigg[\partial_y\Bigg[\Bigg(\int_{-\infty}^{x} dz \frac{\epsilon(z-y)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(x)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(x)}}\Bigg) \times$$

$$\left(\frac{\gamma g_{11}'(z)}{2g_{11}(z)} - X'(z)\right)\Bigg]\Bigg] + \frac{2\alpha}{\rho^2}\gamma\partial_y^2\Bigg[\int_{-\infty}^{x} dz \frac{\epsilon(z-y)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(x)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(x)}}\Bigg]$$

$$+ \frac{2\alpha}{\rho^2}\partial_y\left[\bar{\pi}(y)\Bigg[\int_{-\infty}^{x} dz \frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{y} dw \frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}\Bigg]\right]. \quad (4.151)$$

Finalmente, obtemos para os parênteses do momento gravitacional π^{11}

$$\{\varphi(x), \pi^{11}(y)\}_D = -\frac{\varphi(x)\epsilon(x-y)}{4\sqrt{g_{11}(x)g_{11}(y)}}$$

$$-\frac{2\alpha}{\rho^2}\Bigg(\int_{-\infty}^{y} dz \frac{\epsilon(x-z)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(y)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(y)}}\Bigg(\frac{2g_{11}{\pi^{11}}^2(y)}{\rho^2}$$

$$
-\frac{\rho^2\beta}{2}-\frac{(\alpha\varphi'+\gamma X')}{2}\frac{g'_{11}(y)}{g^2_{11}(y)}))
$$
$$
-\frac{2\alpha}{\rho^2}\partial_y\left[\int_{-\infty}^{y}dz\frac{\epsilon(x-z)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(y)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(y)}}\frac{(\alpha\varphi'+\gamma X')(y)}{g_{11}(y)}\right]
$$
$$
+\frac{4\alpha}{\rho^2}\pi^{11\prime}(y)\left[\int_{-\infty}^{x}dz\frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{y}dw\frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}\right]
$$
$$
-\frac{2\alpha}{\rho^2}\partial_y\left[\pi^{11}(y)[\int_{-\infty}^{x}dz\frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{y}dw\frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}]\right] \tag{4.152}
$$

$$
\{X(x),\pi^{11}(y)\}_D=-\frac{X(x)\epsilon(x-y)}{4\sqrt{g_{11}(x)g_{11}(y)}}
$$
$$
-\frac{2\gamma}{\rho^2}\left(\int_{-\infty}^{y}dz\frac{\epsilon(x-z)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(y)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(y)}}(\frac{2g_{11}{\pi^{11}}^2(y)}{\rho^2}\right.
$$
$$
\left.-\frac{\rho^2\beta}{2}-\frac{(\alpha\varphi'+\gamma X')}{2}\frac{g'_{11}(y)}{g^2_{11}(y)})\right)
$$
$$
-\frac{2\gamma}{\rho^2}\partial_y\left[\int_{-\infty}^{y}dz\frac{\epsilon(x-z)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(y)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(y)}}\frac{(\alpha\varphi'+\gamma X')(y)}{g_{11}(y)}\right]
$$
$$
+\frac{4\gamma}{\rho^2}\pi^{11\prime}(y)\left[\int_{-\infty}^{x}dz\frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{y}dw\frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}\right]
$$
$$
-\frac{2\gamma}{\rho^2}\partial_y\left[\pi^{11}(y)[\int_{-\infty}^{x}dz\frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{y}dw\frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}]\right] \tag{4.153}
$$

Estes parênteses de Dirac definem o espaço de fase reduzido da teoria e, usando a prescrição da quantização canônica, determinam as relações de comutação entre os operadores de campo do modelo. A nível quântico os vínculos (4.120-21) e (4.124-25) são impostos como identidades entre operadores pois são de segunda classe (eqs. 4.130)

$$
\hat{\phi}_i=0 \qquad i=1,..,4 \quad . \tag{4.154}
$$

Os resultados acima nos mostram que apesar da invariância por reparametrizações que a teoria possui o método de redução Hamiltoniana consegue distinguir o espaço de fase físico, ao contrário do que acontece na teoria de gravitação pura. A evolução temporal dos campos é dada pelo conjunto de equações (4.115-116) e (4.124), esta última determina a evolução temporal do campo gravitacional g_{11}.

• CONCLUSÕES

A teoria da gravitação induzida em duas dimensões se apresenta como um modelo de notável importância e riqueza, suas ligações via teorias conformes com mecânica estatística, teorias de cordas e modelos de matrizes justificam a atenção dada ao assunto nos últimos anos. Sua ligação com uma teoria de gravitação realista é ainda distante más apesar de estarmos trabalhando em duas dimensões a possibilidade de se tratar a métrica, que determina a estrutura do espaço-tempo, como um verdadeiro campo de gauge a nível quântico faz com que seu estudo seja da maior relevância, tomando o modelo como base para futuros estudos em dimensões realistas. O nosso estudo da quantização independente de gauge mostra quão fundamentais são os resultados obtidos no gauge de cone de luz e no gauge conforme por Polyakov[7] e Distler et al.[19]. De fato estes resultados foram espetacularmente confirmados pelos modelos de matrizes[16]. Neste trabalho tivemos a oportunidade de estudar a estrutura clássica do modelo explorando a invariância por reparametrizações gerais, confirmando a presença da álgebra SL(2,R), independentemente do gauge escolhido, a nível clássico quando estudamos a evolução do modelo desde a superfície definida pelo cone de luz. Quanticamente confirmamos os resultados de [7] e [19] para o valor da carga central gravitacional utilizando como variáveis fundamentais uma generalização das correntes da simetria SL(2,R), sendo que nossos resultados não dependem do gauge escolhido. Usando as variáveis definidas pelas equações (4.50) pudemos também fazer uma análise quântica do modelo de maneira semelhante à quantização da teoria da corda bosônica crítica[8]. Em relação ao estudo da fixação de gauge completa da gravitação induzida podemos dizer que o método de quantização canônica via espaço de fase reduzido não é eficiente para o modelo puro; mas para o modelo acoplado à matéria a fixação via vínculos dependentes do tempo permite encontrar um espaço de fase físico, trabalhando com uma Hamiltoniana estendida que faz com que a fixação de gauge seja consistente e não haja uma geração infinita de vínculos. A evolução temporal dos campos é determinada pelas expressões (4.115-16) e (4.124) e as relações de comutação entre estes nos fornece a estrutura final do novo espaço de fase.

Apêndice A-Convenções

•Métrica de Minkowski

$$g_{\mu\nu} \rightarrow diag(1,-1) \tag{A1}$$

•Coordenadas do cone de luz-Capítulo 3

$$x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 \pm x^1\right) \tag{A2}$$

$$\partial_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_0 \pm \partial_1\right) \tag{A3}$$

•Coordenadas do cone de luz-Capítulo 4

$$x^{\pm} = x^0 \pm x^1 \tag{A4}$$

$$\partial_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\partial_0 \pm \partial_1\right) \tag{A5}$$

•Elementos da métrica nas coordenadas de cone de luz

$$\begin{aligned} g_{++} &= \frac{1}{4}g_{00} + \frac{1}{2}g_{01} + \frac{1}{4}g_{11} \\ g_{--} &= \frac{1}{4}g_{00} - \frac{1}{2}g_{01} + \frac{1}{4}g_{11} \\ g_{-+} &= \frac{1}{4}g_{00} - \frac{1}{4}g_{11} \end{aligned} \tag{A6}$$

•Gravitação em duas dimensões

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{A7}$$

$$g = det(g_{\mu\nu}) \tag{A8}$$

$$\nabla_{\mu} \rightarrow \text{derivada covariante}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}g\epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{\rho\sigma}R$$

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} \tag{A9}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} \rightarrow \text{ símbolo de Cristoffel}$$

$$\sqrt{-g}R \equiv \partial_{\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}(gg^{\mu\nu})\right) + \frac{1}{4\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}\partial_{\mu}(\epsilon_{\gamma\rho}gg^{\rho\sigma})\partial_{\nu}(\epsilon_{\sigma\delta}gg^{\delta\alpha}) \tag{A10}$$

$$\epsilon^{\mu\nu} \rightarrow \text{tensor anti-simétrico} \qquad \epsilon^{01} = 1$$

Apêndice B-Cálculo explícito dos Parênteses de Dirac na gravitação acoplada a matéria

Tomamos como exemplo o parênteses de Dirac entre os campos de matéria. A partir da definição (1.41) de parênteses de Dirac podemos escrever

$$\{X(x), X(y)\}_D = -\int dzdw \left[\{X(x), \phi_i(z)\}\Delta_{ij}^{-1}\{\phi_j(w), X(y)\}\right] \quad , \qquad (b1)$$

Os elementos da matriz inversa Δ_{23}^{-1} e Δ_{32}^{-1} não comparecem na expressão (b1) pois X comuta com o vínculo ϕ_3. Este fato nos permite escrever

$$\begin{aligned}\{X(x), X(y)\}_D = -\int dzdw \, &\left[\{X(x), \phi_1(z)\}\Delta_{14}^{-1}(z,w)\{\phi_4(w), X(y)\}\right.\\ &+ \{X(x), \phi_2(z)\}\Delta_{24}^{-1}(z,w)\{\phi_4(w), X(y)\}\\ &+ \{X(x), \phi_4(z)\}\Delta_{41}^{-1}\{\phi_1(w), X(y)\}\\ &\left.+ \{X(x), \phi_4(z)\}\Delta_{42}^{-1}(z,w)\{\phi_2(w), X(y)\}\right] \quad , \qquad (b2)\end{aligned}$$

As relações de comutação fundamentais entre os campos (4.114) nos permitem calcular facilmente os parênteses de Poisson presentes em (b2)

$$\begin{aligned}\{X(x), \phi_1(z)\} &= \left[-\bar{\pi}(z) + 2g_{11}\pi^{11}(x)\frac{\gamma}{\rho^2}\right]\delta(x-z) \quad ,\\ \{X(x), \phi_2(z)\} &= X'(z)\delta(x-z) \quad ,\\ \{X(x), \phi_4(z)\} &= \frac{2}{\rho^2}\gamma\delta(x-z) \quad . \qquad (b3)\end{aligned}$$

Os elementos da matriz de Dirac foram calculados segundo a prescrição apresentada a partir da expressão (4.132)

$$\begin{aligned}\Delta_{41}^{-1}(x,y) &= \left\{\int_{-\infty}^{y} dz\frac{\epsilon(x-z)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}e^{-\frac{1}{\rho^2}(\alpha\varphi(z)+\gamma X(z))}\right\}\frac{e^{\frac{1}{\rho^2}(\alpha\varphi(y)+\gamma X(y))}}{\sqrt{g_{11}(y)}}\\ \Delta_{14}^{-1}(y,x) &= -\left\{\int_{-\infty}^{x} dz\frac{\epsilon(z-y)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}e^{-\frac{1}{\rho^2}(\alpha\varphi(z)+\gamma X(z))}\right\}\frac{e^{\frac{1}{\rho^2}(\alpha\varphi(x)+\gamma X(x))}}{\sqrt{g_{11}(x)}}\\ \Delta_{42}^{-1}(x,y) &= -\frac{1}{\rho^2}\left[\int_{-\infty}^{y} dz g_{11}\pi^{11}(x)\Delta_{41}^{-1}(x,z)\sqrt{g_{11}(z)}\frac{1}{\sqrt{g_{11}(y)}}\right]\\ \Delta_{24}^{-1}(y,x) &= \frac{1}{\rho^2}\left[\int_{-\infty}^{x} dz g_{11}\pi^{11}(y)\Delta_{41}^{-1}(y,z)\sqrt{g_{11}(z)}\frac{1}{\sqrt{g_{11}(x)}}\right] \quad . \qquad (b4)\end{aligned}$$

substituindo as expressões (b3-b4) em (b2) encontramos finalmente

$$
\begin{aligned}
\{X(x),X(y)\}_D = & -\frac{2\gamma}{\rho^2}\left(2g_{11}\bar{\pi}^{11}(x)\frac{\gamma}{\rho^2}-\bar{\pi}(x)\right)\int_{-\infty}^{x} dz\frac{\epsilon(z-y)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(x)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(x)}} \\
& +\frac{2\gamma}{\rho^2}\left(2g_{11}\bar{\pi}^{11}(y)\frac{\gamma}{\rho^2}-\bar{\pi}(y)\right)\int_{-\infty}^{y} dz\frac{\epsilon(x-z)}{4}\sqrt{g_{11}(z)}C^-(z)C^+(y)\frac{1}{\sqrt{g_{11}(y)}} \\
& -\frac{2\gamma}{\rho^2}\left\{X'(y)\left[\int_{-\infty}^{y} dz\frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{x} dw\frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(y)}}\right]\right. \\
& \left. -X'(x)\left[\int_{-\infty}^{x} dz\frac{g_{11}\pi^{11}(z)}{\rho^2}\int_{-\infty}^{y} dw\frac{\epsilon(w-z)}{4}C^-(w)C^+(z)\frac{\sqrt{g_{11}(w)}}{\sqrt{g_{11}(x)}}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{b5}
$$

com

$$
C(z)^{\pm} = e^{\pm\frac{1}{\rho^2}(\alpha\varphi(z)+\gamma X(z))} \quad . \tag{b6}
$$

• **Referências**

[1] K. Sundermeyer, "Constrained Dynamics", Springer Verlag, N.Y.C.,1981.

[2] J. Anderson, P. Bergmann, Phys. Rew. 83 (1951) 1018.

[3] P. Dirac, "Lectures in Quantum Dynamics", Yeshiva Univ., N.Y.C.,1964.

[4] M. Costa, Tese de doutorado, UFRGS, 1988.

[5] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, F. Devecchi, A. Zadra, Phys. Rev. D39 (1989) 1784.

[6] A. Polyakov, Phys. Lett. B101 (1981) 207.

[7] A. Polyakov, Mod. Phys. Lett. A2 (1987) 893.

[8] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, "Superstring Theory",Cambridge Univ. Press,1987.

[9] E. D'oker-Seminário apresentado na XI Escola Andre Swieca,1991.

[10] A. Zadra, Tese de doutorado, IFT-UNESP 1990.

[11] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla,J. Gamboa, A. Zadra- Phys. lett. B273 (1991) 222.

[12] E. Alvarez-CERN-TH preprint 6257/91, e A. Strominger-UCSB-TH preprint 91-41.

[13] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, K. Rothe,"Nonperturbative methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory", World Scientific, Singapore, 1991.

[14] M. Henneaux, Nuc. Phys. B 18A (1990) 47-106.

[15] M. Henneaux, Phys. Rep. 126 (1985) 1.

[16] I. Klebanov, Proceedings da ICTP Spring School on String Theory , World Scientific, 1992.

[17] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, F. Devecchi, em preparação .

[18] V. Knizhnik, A. Polyakov, A. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. A3 (1988) 819.

[19] J. Distler, H. Kawai, Nuc. Phys. B321 (1988) 509 e F. David-Mod. Phys. Lett. A3 (1988) 1651.

[20] A. Mikovic, Queen Mary College preprint-91/22.

[21] E. Egorian, R. Manvelian, Mod. Phys. Lett. A5 (1990)2371.

[22] D. Gitman, I. Tyutin, Class. Quant. Grav. 7 (1990) 2131-2144.

[23] R. Jackiw ,"Current Algebra and Anomalies", World Scientific, Sigapore 1985.

[24] J. Wess, B. Zumino, Nuc. Phys. B70 (1974) 39.