

Silvia Dória Felix Agreli

**Existência de soluções para equações  
integrodiferenciais em espaços de Banach**

São José do Rio Preto

2014

Silvia Dória Felix Agreli

## **Existência de soluções para equações integrodiferenciais em espaços de Banach**

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Orientador: Andréa Cristina Prokopczyk Arita

São José do Rio Preto

2014

Agreli, Silvia Dória Felix.

Existência de soluções para equações integrodiferenciais em espaços de Banach / Silvia Dória Felix Agreli. -- São José do Rio Preto, 2014  
96 f.

Orientador: Andréa Cristina Prokopczyk Arita

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Operadores lineares.  
4. Semigrupos. 5. Equações integrodiferenciais - Soluções numéricas.  
6. Banach, Espaços de. I. Arita, Andréa Cristina Prokopczyk.  
II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.91

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Silvia Dória Felix Agreli

## **Existência de soluções para equações integrodiferenciais em espaços de Banach**

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

---

**Andréa Cristina Prokopczyk Arita**  
Orientador

---

**José Paulo Carvalho dos Santos**  
Convidado 1

---

**Juliana Conceição Precioso Pereira**  
Convidado 2

São José do Rio Preto

2014

*Dedico aos meus pais, marido e filho.*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus, por me permitir trilhar o caminho do saber.

Em especial, agradeço aos meus pais, pelos conselhos, pelo amor e por toda a dedicação na minha educação.

À minha família, principalmente meu filho Davi, pela paciência e compreensão com as atividades que precisei realizar.

À minha orientadora, Andréa Cristina Prokopczyk Arita, por compartilhar seu conhecimento, pela compreensão com minhas dificuldades e pelo apoio essencial no desenvolvimento deste trabalho.

Aos docentes, Juliana e José Paulo, que aceitaram participar da minha banca examinadora.

À todos os funcionários e docentes do Ibilce, que participaram, de alguma forma, do meu processo para a obtenção do título.

Aos amigos que fiz neste período, em especial a Marta, pelos momentos especiais que compartilhamos.

À Capes, pelo apoio financeiro.

*"Evidentemente, a universidade é, por excelência, o lugar onde mentes privilegiadas se ocupam da nobre tarefa de cultivar o saber, ampliar os conhecimentos humanos, avançar as fronteiras das ciências, renovar e estimular os dotes artísticos."*

*(Elon Lages Lima)*

# Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a existência de soluções para equações integrodiferenciais em espaço de Banach. Primeiramente, estudaremos a teoria de Semigrupos de operadores lineares limitados, analisando suas principais propriedades e finalizando com o Teorema de Hille-Yosida, que apresenta condições para que um operador linear seja o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo. Esta teoria auxiliará no estudo das equações diferenciais abstratas e servirá de motivação para o desenvolvimento de técnicas de resolução para as equações integrodiferenciais, mediante o estudo de uma família de operadores lineares chamados operadores resolventes. Apresentaremos também uma versão do Teorema de Hille-Yosida para os operadores resolventes.

**Palavras-chaves:** Semigrupo, equação diferencial abstrata, operador resolvente, equação integrodiferencial.



# Abstract

The objective of this work is to study the existence of solutions to integrodifferential equations in Banach spaces. First, we will study the theory of Semigroups of bounded linear operators, analyzing their main properties and ending with the Hille-Yosida Theorem, which presents conditions for a linear operator be the infinitesimal generator of a strongly continuous semigroup. This theory will assist in the study of abstract differential equations and will serve as a motivation for the development of techniques for resolution to the integrodifferential equations, through the study of a family of linear operators called resolvent operators. We also have a version of the Hille-Yosida Theorem to resolvent operators.

**Key-words:** Semigroup, abstract differential equation, resolvent operators, integrodifferential equations.

# Lista de símbolos

$X = (X, |\cdot|)$  Espaço de Banach  $X$  com a norma  $|\cdot|$ .

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  .

$\mathbb{R}_+$  Conjunto dos números reais não negativos.

$L^1(\mathbb{R}_+)$  Conjunto das funções integráveis em  $\mathbb{R}_+$ .

$L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$  Conjunto das funções localmente integráveis em  $\mathbb{R}_+$ .

$C(J, X)$  Conjunto das funções  $f : J = [0, a] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  contínuas.

$L^1(J, X)$  Conjunto das funções  $f : J = [0, a] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  integráveis.

$C^1(J, X)$  Conjunto das funções  $f : J = [0, a] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  continuamente diferenciáveis.

$C^\infty(\mathbb{R}_+)$  Conjunto das funções  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  que são infinitamente diferenciáveis.

$AC(J, X)$  Conjunto das funções  $f : J = [0, a] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  absolutamente contínuas.

$AC_{loc}(J, X)$  Conjunto das funções  $f : J = [0, a] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  absolutamente contínuas em intervalos limitados.

$W^{1,1}(J, X)$  Conjunto das funções  $f : J = [0, a] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  absolutamente contínuas tais que  $f$  é diferenciável quase sempre em  $J$ ,  $f' \in L^1(J, X)$  e  $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds$ , para todo  $t \in J$ .

# Sumário

1	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	11
2	<b>SEMIGRUPO DE OPERADORES LINEARES LIMITADOS</b> . . . . .	13
2.1	Semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados	13
2.2	Semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados . .	22
2.3	O Teorema de Hille-Yosida . . . . .	27
3	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ABSTRATAS</b> . . . . .	40
3.1	O problema de Cauchy . . . . .	40
3.2	Equações de evolução . . . . .	45
4	<b>A EQUAÇÃO INTEGRODIFERENCIAL NÃO-HOMOGÊNEA</b> . . . . .	50
4.1	Operadores resolventes . . . . .	50
4.2	Transformada de Laplace de operadores resolventes . . . . .	69
4.3	O Teorema de Hille-Yosida para equações integrodiferenciais . . . . .	83
	<b>APÊNDICE A – RESULTADOS COMPLEMENTARES</b> . . . . .	92
	Referências . . . . .	95

# 1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação, estudaremos a existência de soluções para o problema de valor inicial

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (1.2)$$

onde  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  é um operador linear fechado e densamente definido em um espaço de Banach  $(X, |\cdot|)$ ,  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  é uma família de operadores lineares fechados em  $X$  com domínio  $D(B(t))$  tal que  $D(B(t)) \supset D(A)$  para todo  $t \geq 0$ ,  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  é uma função contínua e  $u_0 \in X$ .

O problema de existência de solução, bem como o problema para determinar se (1.1) – (1.2) é bem posto, tem sido estudados por vários autores e sob diversas hipóteses referentes aos operadores  $A$  e  $B(t)$ . Podemos citar, por exemplo, os trabalhos de Chen e Grimmer (CHEN G.;GRIMMER, 1980), Grimmer e Kappel (GRIMMER R.;KAPPEL, 1984), Grimmer e Shappacher (GRIMMER R.;SCHAPPACHER, 1984), Miller (MILLER, 1975), Miller e Wheeler (MILLER, 1978), Da Prato e Ianneli (PRATO G.;IANELLI, 1980) para o caso autônomo e Chen e Grimmer (CHEN G.;GRIMMER, 1982), Friedman e Shinbrot (FRIEDMAN A.;SHINBROT, 1967), Pruss (PRUSS, 1983) para equações não autônomas.

Em particular, optamos por estudar o trabalho de Grimmer e Pruss (GRIMMER R.;PRUSS, 1985) que utiliza como ferramenta para o estudo de (1.1) – (1.2) operadores resolventes. Essa técnica é semelhante a utilizada no estudo do problema de Cauchy e de equações de evolução, que se baseia na teoria de semigrupos de operadores lineares limitados.

Além disso, este artigo nos chamou a atenção porque apresenta uma versão do Teorema de Hille-Yosida, que é o resultado central na teoria de semigrupos, para o caso em que estamos com operadores resolventes.

Dessa forma, devido a semelhança entre as técnicas usadas em (GRIMMER R.;PRUSS, 1985) e a teoria de semigrupos, dedicamos o capítulo 2 ao estudo das principais propriedades referentes a essa teoria, que também servirá como base para o desenvolvimento das técnicas de resolução para equações diferenciais abstratas, apresentadas no capítulo 3. Como referência para esse estudo inicial utilizamos o livro (PAZY, 1983).

Concluimos este trabalho com o capítulo 4 e o estudo dos resultados encontrados

em (GRIMMER R.;PRUSS, 1985).

Observamos que devido às técnicas necessárias para o desenvolvimento de uma versão do Teorema de Hille-Yosida para o problema (1.1) – (1.2) e ao pouco tempo que se tem em um curso de mestrado, não apresentamos exemplos nem aplicações dos resultados estudados, sendo esta dissertação um tanto quanto teórica. Contudo, citamos (GRIMMER R.;PRUSS, 1985) como referência para exemplos.

A seguir, observamos o conteúdo de cada capítulo.

O capítulo 2 está dividido em duas seções. Na seção 2.1, apresentaremos os resultados referentes aos semigrupos uniformemente contínuos. Já na seção 2.2, estudamos os semigrupos fortemente contínuos e o importante Teorema de Hille-Yosida, que apresenta condições suficientes e necessárias para que um operador linear seja gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo.

Já no capítulo 3 aplicaremos a teoria desenvolvida no estudo de dois tipos de equações diferenciais abstratas. Na seção 3.1, estudaremos o problema de Cauchy não homogêneo e na seção 3.2, apresentaremos o problema de evolução.

Por último, no capítulo 4, estudaremos o problema de existência de soluções para (1.1)-(1.2), utilizando uma família de operadores lineares  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  associados à equação (1.1), a qual será chamada de operador resolvente. Na seção 4.1, mostraremos, impondo algumas condições para a família  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  que, se a equação (1.1) admite operador resolvente, este é único e então, qualquer solução  $u(\cdot)$  de (1.1)-(1.2) é representada pela fórmula da variação de parâmetros

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

Além disso, exibiremos resultados que ilustram algumas propriedades da equação (1.1), elementares para o desenvolvimento do nosso trabalho. Nas seções 4.2 e 4.3 faremos uso da teoria sobre a transformada de Laplace para a demonstração de um importante resultado, que é uma versão do Teorema de Hille-Yosida para operadores resolventes. Este resultado fornece condições necessárias e suficientes para a existência de um operador resolvente em termos da transformada de Laplace de certos operadores.

Apresentamos também um Apêndice com resultados auxiliares, como o Teorema da convergência dominada e o Princípio da limitação uniforme, que utilizaremos no decorrer deste trabalho.

## 2 Semigrupo de operadores lineares limitados

Neste capítulo iremos estudar alguns conceitos básicos e as principais propriedades da Teoria de Semigrupos de operadores lineares limitados. Essa teoria será usada como ferramenta no capítulo 2, no estudo das equações diferenciais, e servirá como motivação para o desenvolvimento das técnicas de resolução das equações integrodiferenciais, que serão estudadas no capítulo 3.

Iniciaremos com o estudo dos semigrupos uniformemente contínuos e depois, na seção 1.2, passamos a estudar os semigrupos fortemente contínuos. Finalizaremos o capítulo com o Teorema de Hille-Yosida, que apresenta condições para que um operador linear seja o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo.

Ao longo de todo este capítulo,  $(X, |\cdot|)$  representará o espaço de Banach  $X$ , munido da norma  $|\cdot|$ , e  $\mathcal{L}(X)$  representará o conjunto de todas as transformações lineares limitadas de  $X$  em  $X$ . Vejamos então o principal conceito deste capítulo.

**Definição 2.1.** *Uma família a um parâmetro  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  de operadores lineares limitados de  $X$  em  $X$  é um semigrupo de operadores lineares limitados em  $X$  se:*

- (i)  $T(0) = I$ , onde  $I$  é o operador identidade em  $X$ ;
- (ii)  $T(t + s) = T(t)T(s)$ , para todo  $t, s \in [0, \infty)$ .

**Definição 2.2.** *O operador linear  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \quad (2.1)$$

e

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \forall x \in D(A), \quad (2.2)$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ .

### 2.1 Semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados

Nesta seção vamos estudar um tipo especial de semigrupo, o semigrupo uniformemente contínuo.

**Definição 2.3.** Um semigrupo de operadores lineares limitados,  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , é uniformemente contínuo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} |T(t) - I|_{\mathcal{L}(X)} = 0, \quad (2.3)$$

isto é, a função  $t \mapsto T(t)$ , de  $[0, \infty)$  em  $\mathcal{L}(X)$ , é contínua em  $t = 0$ .

Vejamos a seguir as principais propriedades deste tipo de semigrupo.

**Lema 2.4.** Se  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados então

$$\lim_{s \rightarrow t} |T(s) - T(t)|_{\mathcal{L}(X)} = 0,$$

ou seja, a função  $t \mapsto T(t)$ , de  $[0, \infty)$  em  $\mathcal{L}(X)$ , é contínua.

*Demonstração.* Para mostrarmos que  $t \mapsto T(t)$  é contínua em  $[0, \infty)$ , mostraremos que esta função é contínua tanto à direita quanto à esquerda, para todo  $t \in (0, \infty)$ . Note que, para  $t = 0$ , teremos apenas a continuidade à direita, o que já está assegurado pelo fato de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  ser um semigrupo uniformemente contínuo.

Seja  $t \in (0, \infty)$ . Primeiramente, consideremos o parâmetro  $s$ , tal que  $0 < t < s$ . Assim,  $s = t + h$  para algum  $h > 0$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t^+} |T(s) - T(t)|_{\mathcal{L}(X)} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} |T(t+h) - T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} |T(t)T(h) - T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} |T(t)|_{\mathcal{L}(X)} |T(h) - I|_{\mathcal{L}(X)} = 0, \end{aligned}$$

pois  $T(t)$  é limitada e  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um semigrupo uniformemente contínuo.

Portanto, temos a continuidade à direita de  $t$ .

Para mostrarmos a continuidade à esquerda, provaremos inicialmente que  $|T(s)|_{\mathcal{L}(X)}$  é limitada para  $s \in [0, t+1]$ .

Dessa forma, usando que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é uniformemente contínuo, obtemos  $\delta > 0$  tal que  $|T(s) - I|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ , para todo  $s \in [0, \delta]$ . Assim,

$$|T(s)|_{\mathcal{L}(X)} \leq |T(s) - I|_{\mathcal{L}(X)} + |I|_{\mathcal{L}(X)} < 1 + 1 = 2, \quad \forall s \in [0, \delta].$$

Seja  $n$  o primeiro natural tal que  $n\delta > t + 1$ . Então, se  $s \in [0, t+1]$ , existem  $k \in [0, n]$  e  $\xi \in [0, \delta]$  tais que  $s = k\delta + \xi$ . Consequentemente,

$$|T(s)|_{\mathcal{L}(X)} = |T(k\delta + \xi)|_{\mathcal{L}(X)} = |T(k\delta)T(\xi)|_{\mathcal{L}(X)} \leq |T(\delta)|_{\mathcal{L}(X)}^k |T(\xi)|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2^k \cdot 2 \leq 2^{n+1},$$

ou seja,

$$|T(s)|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2^{n+1}, \quad \forall s \in [0, t+1].$$

Agora, consideremos o parâmetro  $s$  tal que  $0 < s < t$ . Desse modo,  $s = t - h$ , para algum  $h > 0$ , e então

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t^-} |T(s) - T(t)|_{\mathcal{L}(X)} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} |T(t-h) - T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} |T(t-h) - T(t-h)T(h)|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} |T(t-h)|_{\mathcal{L}(X)} |I - T(h)|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq 2^{n+1} \lim_{h \rightarrow 0^+} |I - T(h)|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

visto que  $0 < t-h < t < t+1$  e  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um semigrupo uniformemente contínuo.

Portanto, temos também a continuidade à esquerda de  $t$ , o que nos permite concluir a continuidade da função  $t \mapsto T(t)$  em  $[0, \infty)$ .  $\square$

**Lema 2.5.** *Se  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um semigrupo uniformemente contínuo então, para todo  $t \geq 0$ ,*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) ds = T(t). \quad (2.4)$$

*Demonstração.* Como  $t \mapsto T(t)$  é contínua à direita para todo  $t \geq 0$ , dado  $\varepsilon > 0$  qualquer, existe  $\delta > 0$  tal que  $|T(s) - T(t)|_{\mathcal{L}(X)} < \varepsilon$  para todo  $s \geq 0$  com  $t \leq s$  e  $|t - s| < \delta$ .

Assim, se  $h > 0$  é tal que  $h < \delta$ , então

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) ds - T(t) \right|_{\mathcal{L}(X)} &= \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t) ds \right|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |T(s) - T(t)|_{\mathcal{L}(X)} ds \\ &< \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon ds = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) ds = T(t).$$

$\square$

O próximo resultado, relaciona o semigrupo com um gerador infinitesimal.

**Teorema 2.6.** *Um operador linear  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se,  $A$  é um operador linear limitado.*



*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Suponha, primeiramente, que  $A$  é um operador linear limitado em  $X$  e defina a família de operadores

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \quad \text{para } t \geq 0. \quad (2.5)$$

Para cada  $t \geq 0$  fixo, observe que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$  converge absolutamente já que, pelo Teste da razão, temos

$$\frac{|(tA)|_{\mathcal{L}(X)}^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|(tA)|_{\mathcal{L}(X)}^n} = \frac{|tA|_{\mathcal{L}(X)}}{n+1} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Assim, dado  $\varepsilon > 0$  qualquer, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|tA|_{\mathcal{L}(X)}^n}{n!} < \varepsilon$ . Considere, agora, as somas parciais  $S_n(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , definidas por

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(tA)^k}{k!}, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Note que, se  $n, m \in \mathbb{N}$  e  $n > m$ , então

$$|S_n(t) - S_m(t)|_{\mathcal{L}(X)} = \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{(tA)^k}{k!} \right|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|tA|_{\mathcal{L}(X)}^k}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|tA|_{\mathcal{L}(X)}^k}{k!}.$$

Logo, se  $n_0 \leq m \leq n$ ,  $|S_n(t) - S_m(t)|_{\mathcal{L}(X)} < \varepsilon$ , ou seja,  $(S_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}(X)$ .

Consequentemente, visto que  $\mathcal{L}(X)$  é um espaço de Banach,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t)$  existe e pertence a  $\mathcal{L}(X)$ . Mais ainda, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = T(t),$$

segue que  $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ , para todo  $t \geq 0$ .

Para mostrarmos que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um semigrupo de operadores lineares limitados basta verificarmos a validade das condições (i) e (ii) da Definição 2.1. A condição (i) é imediata pois,

$$T(0) = I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0A)^n}{n!} = I.$$

Já para a condição (ii), observe que

$$\begin{aligned}
T(t)T(s) &= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sA)^k}{k!} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(tA)^k (sA)^{n-k}}{k! (n-k)!} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{t^k s^{n-k}}{k! (n-k)!} \right] A^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n t^k s^{n-k} \frac{n!}{k! (n-k)!} \right] \frac{A^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} = T(t+s), \quad \forall t, s \geq 0.
\end{aligned}$$

Além disso, o semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é também uniformemente contínuo. De fato,

$$\begin{aligned}
|T(t) - I|_{\mathcal{L}(X)} &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n |A|_{\mathcal{L}(X)}^n}{n!} \\
&= t |A|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} |A|_{\mathcal{L}(X)}^{n-1}}{n!} \\
&\leq t |A|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} |A|_{\mathcal{L}(X)}^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= t |A|_{\mathcal{L}(X)} e^{t|A|_{\mathcal{L}(X)}},
\end{aligned}$$

com  $A \in \mathcal{L}(X)$  e  $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{t|A|_{\mathcal{L}(X)}} = 1$ . Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} |T(t) - I|_{\mathcal{L}(X)} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} t |A|_{\mathcal{L}(X)} e^{t|A|_{\mathcal{L}(X)}} = 0.$$

Falta mostrarmos que  $A$  é o gerador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ . Para isso, note que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{T(t) - I}{t} - A \right|_{\mathcal{L}(X)} &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{k!} - A \right|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq |A|_{\mathcal{L}(X)} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^{k-1}}{k!} - I \right|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq |A|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1} |A|_{\mathcal{L}(X)}^{k-1}}{k!} \\
&\leq t |A|_{\mathcal{L}(X)}^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-2} |A|_{\mathcal{L}(X)}^{k-2}}{(k-2)!} \\
&= t |A|_{\mathcal{L}(X)}^2 e^{t|A|_{\mathcal{L}(X)}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, como  $A$  é um operador linear limitado e  $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{t|A|_{\mathcal{L}(X)}} = 1$ , segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A,$$

isto é,  $A$  é o gerador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ .

Portanto, se  $A$  é um operador linear limitado, então  $A$  gera um semigrupo uniformemente contínuo.

( $\Rightarrow$ ) Suponha agora que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores em  $\mathcal{L}(X)$ . Pelo Lema 2.5, dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\rho < \delta$  implica em

$$\left| I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds \right|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

Logo, pelo Lema A.4 obtém-se que  $I - (I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds) = \rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds$  é um operador invertível e, portanto,  $\int_0^\rho T(s) ds$  é invertível. Assim, dado  $h \in (0, \rho)$ , temos

$$\begin{aligned} h^{-1}(T(h) - I) \int_0^\rho T(s) ds &= h^{-1} \left[ \int_0^\rho T(s+h) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right] \\ &= h^{-1} \left[ \int_h^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right] \\ &= h^{-1} \left[ \int_h^\rho T(s) ds + \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds - \int_h^\rho T(s) ds \right] \\ &= h^{-1} \left[ \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Disto segue que

$$h^{-1}(T(h) - I) = h^{-1} \left[ \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right] \left( \int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}.$$

Além disso, tomando o limite quando  $h \rightarrow 0^+$  na igualdade anterior, usando (2.2) e o Lema 2.5 obtemos

$$\begin{aligned} A &= \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} \left[ \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right] \left( \int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1} \\ &= (T(\rho) - I) \left( \int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto,  $A$  é igual ao operador linear limitado  $(T(\rho) - I) \left( \int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}$ , isto é,  $A \in \mathcal{L}(X)$ .  $\square$

Observe, da Definição 2.2, que um semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  possui um único gerador infinitesimal, pois o gerador é dado por um limite, que é único. Além disso, do resultado anterior, conclui-se que, se  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um semigrupo uniformemente contínuo, então o seu gerador infinitesimal é um operador linear limitado. Por outro lado, todo operador linear limitado  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . O próximo resultado mostrará que este semigrupo uniformemente contínuo é único.

**Teorema 2.7.** *Sejam  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  e  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  semigrupos de operadores lineares limitados uniformemente contínuos. Se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t}, \quad (2.6)$$

então  $T(t) = S(t)$ , para todo  $t \geq 0$ .

*Demonstração.* Para mostrarmos o resultado, provaremos que: dado  $k > 0$  qualquer,  $S(t) = T(t)$  para todo  $t \in [0, k]$ . Assim, seja  $k > 0$  fixado e considere as funções  $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  definidas por  $f(t) = |T(t)|_{\mathcal{L}(X)}$  e  $g(t) = |S(t)|_{\mathcal{L}(X)}$ .

Como  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  e  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  são semigrupos uniformemente contínuos, as funções  $t \mapsto T(t)$  e  $t \mapsto S(t)$  são contínuas em  $[0, \infty)$ . Desse modo, visto que a composta de funções contínuas ainda é uma função contínua, concluímos que  $f$  e  $g$  são contínuas. Então,  $f$  e  $g$  são limitadas em  $[0, k]$ , o que nos permite dizer que existe  $C = C(k) > 0$  tal que

$$|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} |S(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq C, \quad \text{para todo } t \in [0, k].$$

Por outro lado, como  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  e  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  possuem o mesmo gerador infinitesimal, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $0 < h < \delta$ , então

$$\left| \frac{T(h) - I}{h} - A \right|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\varepsilon}{2kC} \quad \text{e} \quad \left| \frac{S(h) - I}{h} - A \right|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\varepsilon}{2kC}.$$

Logo, para  $0 < h < \delta$ ,

$$\begin{aligned} h^{-1}|T(h) - S(h)|_{\mathcal{L}(X)} &= \left| \left( \frac{T(h) - I}{h} \right) - A - \left( \frac{S(h) - I}{h} \right) + A \right|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \left| \frac{T(h) - I}{h} - A \right|_{\mathcal{L}(X)} + \left| \frac{S(h) - I}{h} - A \right|_{\mathcal{L}(X)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2kC} + \frac{\varepsilon}{2kC} = \frac{\varepsilon}{kC}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h^{-1}|T(h) - S(h)|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{\varepsilon}{kC}, \quad \text{para todo } h \in (0, \delta). \quad (2.7)$$

Agora, dado  $t \in [0, k]$ , escolha  $n \geq 1$  tal que  $\frac{t}{n} < \delta$ . Assim,

$$\begin{aligned} T(t) - S(t) &= T\left(n\frac{t}{n}\right) - S\left(n\frac{t}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ T\left(\frac{n-k}{n}t\right) S\left(\frac{k}{n}t\right) - T\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) S\left(\frac{k+1}{n}t\right) \right]. \end{aligned}$$

e então, das propriedades de semigrupo e de (2.7), segue que

$$\begin{aligned} |T(t) - S(t)|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| T\left(\frac{n-k}{n}t\right) S\left(\frac{k}{n}t\right) - T\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) S\left(\frac{k+1}{n}t\right) \right|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| T\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) \left[ T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{k}{n}t\right) - S\left(\frac{k}{n}t\right) S\left(\frac{t}{n}\right) \right] \right|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| T\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) S\left(\frac{k}{n}t\right) \left[ T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right] \right|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq nC \frac{\varepsilon}{kC} \frac{t}{n} \leq \frac{\varepsilon}{k} k = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, podemos concluir que  $T(t) = S(t)$ , para todo  $t \in [0, k]$ . Mais ainda, como  $k$  também é arbitrário, temos  $T(t) = S(t)$ , para todo  $t \geq 0$ .  $\square$

**Corolário 2.8.** *Seja  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados. Então:*

- (1) *Existe um único operador linear limitado  $A$  tal que  $T(t) = e^{tA}$ , para todo  $t \geq 0$ .*
- (2) *Existe uma constante  $\omega \geq 0$  tal que  $|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{t\omega}$ , para todo  $t \geq 0$ .*
- (3) *O operador  $A$  no item (1) é o gerador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ .*
- (4) *A função  $t \mapsto T(t)$  é diferenciável e*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A. \quad (2.8)$$

*Demonstração.* (1) Pelo Teorema 2.6, o gerador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um operador linear limitado  $A$ . Por outro lado,  $A$  é também gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo  $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ , definido na equação (2.5). Portanto, pelo Teorema 2.7, temos  $T(t) = e^{tA}$ , para todo  $t \geq 0$ .

- (2) Observe que, da equação (2.5) tem-se

$$|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} = |e^{tA}|_{\mathcal{L}(X)} = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t|A|_{\mathcal{L}(X)})^n}{n!} = e^{t|A|_{\mathcal{L}(X)}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim, tomando  $\omega = |A|_{\mathcal{L}(X)}$ , segue o resultado.

(3) Este resultado é consequência imediata do Teorema 2.6.

(4) Aplicando a Definição 2.2 em  $T(t)$ , temos

$$AT(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)T(t) - T(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \frac{d^+T(t)}{dt}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} T(t)A &= T(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t)T(h) - T(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \frac{d^+T(t)}{dt}, \end{aligned}$$

ou seja, a função  $t \mapsto T(t)$  possui derivada à direita, com

$$\frac{d^+T(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Falta mostrarmos que  $\frac{d^-T(t)}{dt} = T(t)A$  para concluirmos o resultado. Para isso, observe que, para  $h \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < h < t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{T(t) - T(t-h)}{h} - T(t)A &= \frac{T(t-h)T(h) - T(t-h)}{h} - T(t)A \\ &= \left[ T(t-h) \left( \frac{T(h) - I}{h} \right) - T(t-h)A \right] + [T(t-h)A - T(t)A]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \frac{T(t) - T(t-h)}{h} - T(t)A \right|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \left| T(t-h) \left[ \frac{T(h) - I}{h} - A \right] \right|_{\mathcal{L}(X)} \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0^+} |[T(t-h) - T(t)]A|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{\omega(t-h)} \left| \frac{T(h) - I}{h} - A \right|_{\mathcal{L}(X)} + \lim_{h \rightarrow 0^+} |[T(t-h) - T(t)]|_{\mathcal{L}(X)} |A|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= e^{\omega(t)} 0 + 0 |A|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois  $A$  é o gerador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  e  $t \mapsto T(t)$  é uma função contínua.

Portanto,

$$\frac{d^-T(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - T(t-h)}{h} = T(t)A,$$

o que conclui a demonstração do resultado.  $\square$

## 2.2 Semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados

Nesta seção estudaremos as principais propriedades de um semigrupo fortemente contínuo. Apesar de ter o termo "fortemente" em sua definição, este é um conceito mais fraco que o conceito de semigrupo uniformemente contínuo, pois vamos requerer continuidade em  $X$  e não mais em  $\mathcal{L}(X)$ .

**Definição 2.9.** *Um semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  de operadores lineares limitados em  $X$  é um semigrupo fortemente contínuo se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \quad \text{para todo } x \in X. \quad (2.9)$$

**Observação 2.10.** *Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em  $X$  será chamado semigrupo de classe  $C_0$ , ou simplesmente  $C_0$ -semigrupo.*

Vejamos a seguir os principais resultados referentes a um  $C_0$ -semigrupo.

**Teorema 2.11.** *Seja  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  um  $C_0$ -semigrupo. Existem constantes  $\omega \geq 0$  e  $M \geq 1$  tais que*

$$|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \in [0, \infty). \quad (2.10)$$

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar que existe um  $\eta > 0$  tal que  $|T(t)|_{\mathcal{L}(X)}$  é limitada para  $0 \leq t \leq \eta$ . Suponha, por absurdo, que isso não ocorra. Então, existe uma sequência  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfazendo  $t_n \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$  e  $|T(t_n)|_{\mathcal{L}(X)} \geq n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, a família  $\{T(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é ilimitada.

Em contra partida, por hipótese,  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é  $C_0$ -semigrupo e então, para cada  $x \in X$ , tem-se que a família  $\{T(t_n)x\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada. Logo, pelo Princípio da limitação uniforme, obtemos que  $\{T(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada, o que é uma contradição.

Portanto, existem constantes  $M \geq 0$  e  $\eta > 0$  tais que  $|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$  para todo  $t \in [0, \eta]$ . Além disso, como  $|T(0)|_{\mathcal{L}(X)} = 1$ , podemos considerar  $M \geq 1$ .

Agora, seja  $\omega = \eta^{-1} \log M \geq 0$ . Note que  $\omega \geq 0$  e, para todo  $t \geq 0$ , temos  $t = n\eta + \delta$ , para algum  $0 \leq \delta < \eta$  e algum  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, das propriedades de semigrupo e do fato de  $n = \frac{t - \delta}{\eta} < \frac{t}{\eta}$ , obtemos

$$|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} = |T(n\eta + \delta)|_{\mathcal{L}(X)} \leq |T(\eta)|_{\mathcal{L}(X)}^n |T(\delta)|_{\mathcal{L}(X)} \leq MM^{\frac{t}{\eta}} = Me^{\log(M) \frac{t}{\eta}} = Me^{\omega t}.$$

Portanto, existem  $M \geq 1$  e  $\omega > 0$  tais que  $|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$ , para todo  $t \geq 0$ .  $\square$

**Corolário 2.12.** *Se  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo então, para cada  $x \in X$ , a função  $t \mapsto T(t)x$ , de  $[0, \infty)$  em  $X$ , é contínua.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.11, existem constantes  $\omega \geq 0$  e  $M \geq 1$  tais que

$$|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \in [0, \infty).$$

Além disso, da Definição 2.9, dados  $x \in X$ ,  $t \geq 0$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que:  $0 < h < \delta$  implica em

$$|T(h)x - x| < \frac{\varepsilon}{Me^{\omega t}}.$$

Desta forma, para  $0 < h < \delta$ , temos

$$|T(t+h)x - T(t)x| \leq |T(t)|_{\mathcal{L}(X)}|T(h)x - x| \leq Me^{\omega t}|T(h)x - x| < \varepsilon,$$

o que nos garante que a função  $s \mapsto T(s)x$  é contínua à direita de  $t$ , para todo  $t > 0$ .

Agora, se considerarmos  $0 < h < \delta$  tal que  $h < t$ , então

$$|T(t-h)x - T(t)x| \leq |T(t-h)|_{\mathcal{L}(X)}|x - T(h)x| \leq Me^{\omega(t-h)}|x - T(h)x| < e^{-\omega h}\varepsilon < \varepsilon,$$

o que nos mostra que a função  $s \mapsto T(s)x$  é contínua à esquerda de  $t$ , para todo  $t \geq 0$ .

Portanto, a função  $s \mapsto T(s)x$  é contínua em  $[0, \infty)$ , para todo  $x \in X$ .  $\square$

**Teorema 2.13.** *Sejam  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  um  $C_0$ -semigrupo e  $A$  seu gerador infinitesimal. Então*

(1) *Para todo  $x \in X$  e todo  $t \geq 0$ ,*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x. \quad (2.11)$$

(2) *Para todo  $x \in X$  e todo  $t \geq 0$ ,  $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$  e*

$$A \left( \int_0^t T(s) ds \right) = T(t)x - x. \quad (2.12)$$

(3) *Para todo  $x \in D(A)$  e todo  $t \geq 0$ ,  $T(t)x \in D(A)$  e*

$$\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax. \quad (2.13)$$

(4) *Para todo  $x \in D(A)$  e  $t, s \geq 0$ ,*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau. \quad (2.14)$$



*Demonstração.* (1) Sejam  $x \in X$ ,  $t \geq 0$  e  $\varepsilon > 0$ . Como  $t \mapsto T(t)x$  é contínua, existe  $\delta > 0$  tal que  $|T(t)x - T(s)x| < \varepsilon$ , para todo  $s \geq 0$  com  $|t - s| < \delta$ . Desta forma, tomando  $h \in \mathbb{R}$  de modo que  $0 < h < \delta$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - T(t)x \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t)x ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [T(s)x - T(t)x] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |T(s)x - T(t)x| ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon ds \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

pois,  $0 \leq s - t \leq h < \delta$ .

Logo, obtemos que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$ , para todo  $x \in X$  e todo  $t \geq 0$ .

(2) Sejam  $x \in X$ ,  $t \geq 0$  e  $h > 0$ . Então, pelo item anterior, temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} \left( \int_0^t T(s)x ds \right) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} \int_0^t [T(s+h)x - T(s)x] ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} \left[ \int_h^{t+h} T(s)x ds - \int_0^t T(s)x ds \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} \left[ \int_h^t T(s)x ds + \int_t^{t+h} T(s)x ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^h T(s)x ds - \int_h^t T(s)x ds \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} \left[ \int_t^{t+h} T(s)x ds - \int_0^h T(s)x ds \right] \\ &= T(t)x - T(0)x \\ &= T(t)x - x, \end{aligned}$$

ou seja,  $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$  e  $A(\int_0^t T(s)x ds) = T(t)x - x$ , para todo  $x \in X$  e todo  $t \geq 0$ .

(3) Sejam  $x \in D(A)$ ,  $t \geq 0$  e  $h > 0$ , então

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{T(h) - I}{h} \right) T(t)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t) \left( \frac{T(h)x - x}{h} \right) \\ &= T(t) \left( \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \right) = T(t)Ax, \end{aligned}$$

pois,  $T(t) \in \mathcal{L}(X)$  e  $x \in D(A)$ .

Assim, obtemos que  $T(t)x \in D(A)$  e  $AT(t)x = T(t)Ax$ , para todo  $x \in D(A)$  e todo  $t \geq 0$ .

Além disso,

$$\frac{d^+T(t)x}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax = AT(t)x.$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right] &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{T(t-h)T(h)x - T(t-h)x}{h} - T(t)A \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ T(t-h) \left( \frac{T(h)x - x}{h} \right) - T(t-h)Ax \right] + \lim_{h \rightarrow 0^+} [T(t-h)Ax - T(t)Ax] = 0, \end{aligned}$$

sendo que o primeiro limite acima se anula pelo fato de  $|T(t-h)|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega(t-h)} \leq Me^{\omega t}$ ,  $x \in D(A)$  e  $A$  ser o gerador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , e o segundo, pelo fato de  $t \mapsto T(t)y$ , com  $y = Ax \in X$ , ser contínua.

Portanto, obtemos

$$\frac{d^-T(t)x}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} = T(t)Ax = \frac{d^+T(t)x}{dt},$$

e então, concluímos que

$$\frac{dT(t)x}{dt} = T(t)Ax = AT(t)x,$$

para todo  $x \in D(A)$  e  $t \geq 0$ .

- (4) Para mostrarmos este item, basta integrarmos a equação (2.13) de  $s$  até  $t$  e usarmos o Teorema fundamental do cálculo. De fato,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \frac{dT(\tau)x}{d\tau} d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau.$$

□

**Corolário 2.14.** *Se  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  então,  $D(A)$  é denso em  $X$  e  $A$  é um operador linear fechado.*

*Demonstração.* Mostraremos primeiramente que o domínio de  $A$  é denso em  $X$ . Para isso, dado  $x \in X$  e  $t > 0$ , considere  $x_t = t^{-1} \int_0^t T(s)x ds$ . Pelo item (2) do teorema anterior, obtemos que  $x_t \in D(A)$ . Mais ainda, pelo item (1), fazendo  $t \rightarrow 0^+$ , obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x_t = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1} \int_0^t T(s)x ds = T(0)x = x,$$

ou seja,  $x$  é o limite de elementos de  $D(A)$  e então,  $x \in \overline{D(A)}$ . Isso permite concluir que  $\overline{D(A)} = X$ .

Falta mostrarmos que  $A$  é um operador linear fechado. Para isso, seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $D(A)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , para algum  $x \in X$ , e  $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$ , para algum  $y \in X$ . Pelo item (4) do teorema anterior, temos

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Note que o integrando da igualdade acima converge para  $T(s)y$  quando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente para  $s \in [0, t]$ . Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [T(t)x_n - x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t T(s)Ax_n ds = \int_0^t T(s)y ds.$$

Logo, como  $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ ,

$$t^{-1}[T(t)x - x] = t^{-1} \int_0^t T(s)y ds, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Agora, fazendo  $t \rightarrow 0^+$ , pelo item (1) do teorema anterior, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1}[T(t)x - x] = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1} \int_0^t T(s)y ds = y.$$

Portanto,  $x \in D(A)$  e  $Ax = y$ , o que nos permite concluir que  $A$  é um operador linear fechado.  $\square$

**Teorema 2.15.** *Sejam  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  e  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  dois  $C_0$ -semigrupos de operadores lineares limitados com geradores infinitesimais  $A$  e  $B$ , respectivamente. Se  $A = B$ , então  $T(t) = S(t)$  para todo  $t \geq 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $x \in D(A)$ . Como  $A = B$ , por hipótese, segue que  $D(A) = D(B)$  e então,  $x \in D(B)$ . Pelo item (3) do Teorema 2.13, temos que a função  $s \mapsto T(t-s)S(s)x$  é diferenciável e

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $s \mapsto T(t-s)S(s)x$  é uma função constante e, em particular, para  $s = 0$  e  $s = t$  obtemos a seguinte igualdade  $T(t)x = S(t)x$ . Logo,  $T(t)x = S(t)x$  para todo  $t \geq 0$  e  $x \in D(A)$ .

Agora, dado  $x \in X$ , como  $\overline{D(A)} = X$  existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $D(A)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Assim, como  $T(t)$  e  $S(t)$  são transformações lineares limitadas para todo  $t \geq 0$ , temos

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t)x_n = S(t)x, \quad \text{para todo } t \geq 0, x \in X.$$

Portanto,  $T(t) = S(t)$  para todo  $t \geq 0$ .  $\square$

## 2.3 O Teorema de Hille-Yosida

Nesta subseção estudaremos o Teorema de Hille-Yosida. Este resultado é de grande importância na teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, pois apresenta condições para que um operador linear seja o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo.

Porém, antes de apresentarmos este resultado, precisamos definir alguns conceitos.

Ao longo desta subseção,  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  denotará um  $C_0$ -semigrupo. Assim, segue do Teorema 2.11 que existem constantes  $\omega \geq 0$  e  $M \geq 1$  tais que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \in [0, \infty). \quad (2.15)$$

**Definição 2.16.** Quando  $\omega = 0$  na limitação acima, dizemos que o semigrupo é uniformemente limitado. Se, além disso,  $M = 1$ , ele é chamado de  $C_0$ -semigrupo de contrações.

**Definição 2.17.** Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador linear, não necessariamente limitado. O conjunto resolvente de  $A$ , denotado por  $\rho(A)$  é dado por

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ é inversível e } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

O operador  $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$ , com  $\lambda \in \rho(A)$ , é chamado de resolvente de  $A$ .

**Definição 2.18.** Seja  $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$  um operador linear satisfazendo as seguintes condições:

- (i)  $A$  é fechado e  $\overline{D(A)} = X$ ;
- (ii)  $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$  e, para cada  $\lambda > 0$ ,  $\|R(\lambda : A)\| \leq \lambda^{-1}$ .

O operador  $A_\lambda : X \rightarrow X$ , definido por  $A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A)$ , é chamado de aproximação de Yosida de  $A$ .

Observe ainda que  $A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$ .

A seguir demonstraremos três lemas que auxiliarão na demonstração do Teorema de Hille-Yosida.

**Lema 2.19.** *Seja  $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$  um operador linear satisfazendo as condições da Definição 2.18. Então, para cada  $x \in X$ ,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda : A)x = x.$$

*Demonstração.* Sejam  $x \in D(A)$  e  $\lambda > 0$ . Pelo item (ii) da Definição 2.18, temos

$$|\lambda R(\lambda : A)x - x| = |(\lambda R(\lambda : A) - I)x| = |R(\lambda : A)Ax| \leq \lambda^{-1}|Ax|.$$

Dessa forma,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |\lambda R(\lambda : A)x - x| \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1}|Ax| = 0,$$

isto é,  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda : A)x = x$ , para todo  $x \in D(A)$ .

Agora, dado  $x \in X$ , como  $A$  satisfaz as condições da Definição 2.18,  $\overline{D(A)} = X$  e assim, existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $D(A)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Logo, visto que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda : A)x_n = x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e

$$\begin{aligned} |\lambda R(\lambda : A)x - x| &\leq |\lambda R(\lambda : A)x - \lambda R(\lambda : A)x_n| + |\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n| + |x_n - x| \\ &\leq |\lambda R(\lambda : A)||x - x_n| + |\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n| + |x_n - x| \\ &\leq \lambda \lambda^{-1}|x - x_n| + |\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n| + |x_n - x| \\ &= 2|x - x_n| + |\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n|, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , podemos concluir que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |\lambda R(\lambda : A)x - x| = 0,$$

ou seja,  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda : A)x = x$ , para todo  $x \in X$ . □

**Lema 2.20.** *Seja  $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$  um operador linear satisfazendo as condições da definição 2.18. Se  $A_\lambda$  é a aproximação de Yosida de  $A$ , então, para cada  $x \in D(A)$ ,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax.$$

*Demonstração.* Seja  $x \in D(A)$ . Pelo lema anterior e a definição de  $A_\lambda$ , temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda A R(\lambda : A)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax.$$

□

**Lema 2.21.** *Seja  $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$  um operador linear satisfazendo as condições da Definição 2.18. Se  $A_\lambda$  é a aproximação de Yosida de  $A$ , então  $A_\lambda$  é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo de contrações  $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$ . Mais ainda, para todo  $x \in X$  e  $\lambda, \mu \in (0, \infty)$ , temos*

$$|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x| \leq t|A_\lambda x - A_\mu x|.$$

*Demonstração.* Por uma observação feita na Definição 2.18, sabemos que  $A_\lambda$  é um operador linear limitado e portanto, segue do Teorema 2.6 que  $A_\lambda$  é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo  $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$ . Mais ainda,  $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$  é um semigrupo de contrações pois,

$$\begin{aligned} |e^{tA_\lambda}|_{\mathcal{L}(X)} &= |e^{t\lambda^2 R(\lambda:A) - t\lambda I}|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq |e^{-t\lambda I}|_{\mathcal{L}(X)} |e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)}|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq e^{t\lambda^2 |R(\lambda:A)|_{\mathcal{L}(X)}} e^{-t\lambda |I|_{\mathcal{L}(X)}} \\ &\leq e^{t\lambda^2 \lambda^{-1}} e^{-t\lambda} \\ &= 1, \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ .

Agora, para cada  $x \in X$  e  $\lambda, \mu > 0$ , temos

$$\begin{aligned} |e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{stA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x) ds \right| \\ &= \left| \int_0^1 [tA_\lambda e^{stA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} - tA_\mu e^{stA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}] x ds \right| \\ &= \left| \int_0^1 (tA_\lambda - tA_\mu) [e^{stA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}] x ds \right| \\ &= \left| \int_0^1 [e^{stA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}] (tA_\lambda - tA_\mu) x ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |e^{stA_\lambda}|_{\mathcal{L}(X)} |e^{t(1-s)A_\mu}|_{\mathcal{L}(X)} t |A_\lambda x - A_\mu x| ds \\ &\leq t |A_\lambda x - A_\mu x|. \end{aligned}$$

□

Agora, estamos prontos para enunciar e demonstrar o Teorema de Hille-Yosida.

**Teorema 2.22.** *Um operador linear  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  se, e somente se,*

(i)  $A$  é fechado e  $\overline{D(A)} = X$ ;

- (ii) O conjunto resolvente de  $A$  contém o intervalo  $(0, +\infty)$  e, para cada  $\lambda > 0$ , tem-se  $|R(\lambda : A)|_{\mathcal{L}(X)} \leq \lambda^{-1}$ .

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ . Então, pelo Corolário 2.14,  $A$  é fechado e  $\overline{D(A)} = X$ .

Agora, dado  $\lambda > 0$  e  $x \in X$ , defina

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

Note que, pelo Corolário 2.12, a função  $t \mapsto T(t)x$  é contínua. Assim, visto que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  também é uniformemente limitado, pois  $|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$  para todo  $t \geq 0$ , a integral acima existe como uma integral imprópria de Riemann. Além disso,  $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ , com

$$|R(\lambda)x| \leq \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| |T(t)x| dt \leq |x| \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \lambda^{-1}|x|, \quad \forall x \in X.$$

Mais ainda, dado  $h > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{T(h) - I}{h} \right) R(\lambda)x &= h^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - h^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= e^{\lambda h} h^{-1} \int_h^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - h^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= e^{\lambda h} h^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - e^{\lambda h} h^{-1} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &\quad - h^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \left( \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - e^{\lambda h} h^{-1} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt. \end{aligned}$$

Observe também que, fazendo  $h \rightarrow 0$ , obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt = \lambda R(\lambda)x$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^{\lambda h} h^{-1} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt = \left( \lim_{h \rightarrow 0} e^{\lambda h} \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) = e^{\lambda 0} x = x,$$

sendo que o último limite ocorre pois,

$$\begin{aligned} \left| h^{-1} \int_0^h (e^{-\lambda t}) T(t)x dt - x \right| &= \left| h^{-1} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt - h^{-1} \int_0^h x dt \right| \\ &\leq h^{-1} \int_0^h |e^{-\lambda t} T(t)x - e^{-\lambda t} x| + |e^{-\lambda t} x - x| dt \\ &\leq h^{-1} \int_0^h e^{-\lambda t} |T(t)x - x| + |e^{-\lambda t} - 1| |x| dt \\ &\leq h^{-1} \int_0^h |T(t)x - x| + |e^{-\lambda t} - 1| |x| dt, \end{aligned}$$

com  $t \mapsto T(t)x$  e  $t \mapsto e^{-\lambda t}$  funções uniformemente contínuas em  $[0, h]$ . Assim, para  $h$  suficientemente pequeno, a primeira expressão na desigualdade acima é pequena, garantindo o limite desejado.

Logo, para todo  $x \in X$  e  $\lambda > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{T(h) - I}{h} \right) R(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x,$$

isto é,  $R(\lambda) \in D(A)$  e  $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$ .

Consequentemente, temos

$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = x, \quad \text{para todo } x \in X,$$

ou seja,  $R(\lambda)$  é a inversa à direita de  $(\lambda I - A)$ . Agora, vamos mostrar que  $R(\lambda)$  também é inversa à esquerda de  $(\lambda I - A)$ . Para isso, seja  $x \in D(A)$ . Assim, pelo item (3) do Teorema 2.13 e pelo fato de  $A$  ser um operador linear fechado, segue que

$$R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} AT(t)x dt = A \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt = AR(\lambda)x.$$

Portanto,

$$R(\lambda)(\lambda I - A) = \lambda R(\lambda) - R(\lambda)A = \lambda R(\lambda) - AR(\lambda) = (\lambda I - A)R(\lambda) = I,$$

isto é,  $R(\lambda)$  também é a inversa de  $(\lambda I - A)$  à esquerda.

Consequentemente, para todo  $\lambda > 0$ ,  $R(\lambda)$  é um operador linear limitado e  $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ . Dessa forma, segue que  $\lambda \in \rho(A)$  e, pelo que fizemos previamente,

$$|R(\lambda : A)x| = |R(\lambda)x| \leq \lambda^{-1}|x|, \quad \text{para todo } x \in X,$$

o que nos permite concluir que  $|R(\lambda : A)|_{\mathcal{L}(X)} \leq \lambda^{-1}$ , completando assim a demonstração dos itens (i) e (ii).

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, seja  $A$  um operador linear que satisfaz as condições (i) e (ii). Seja  $x \in D(A)$ . Pelo Lema 2.21 segue que, para todo  $\mu > 0$  e  $\lambda > 0$ ,

$$|e^{tA\lambda}x - e^{tA\mu}x| \leq t|A_\lambda x - A_\mu x| \leq t|A_\lambda x - Ax| + t|Ax - A_\mu x|.$$

Além disso, pelo Lema (2.21), obtemos que  $(e^{tA\lambda}x)_{\lambda > 0}$  pode ser vista como uma seqüência de Cauchy e portanto, em  $X$ , é uma seqüência convergente. Observe ainda que essa convergência é uniforme para  $t$  em intervalos limitados.

Agora, como  $D(A)$  é denso em  $X$ , dado  $x \in X$ , existe uma seqüência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $D(A)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Além disso, como  $|e^{tA\lambda}|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$  para todo  $\lambda > 0$ , tomando



$n \in \mathbb{N}$  e  $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$  suficientemente grandes, temos

$$\begin{aligned} |e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x| &\leq |e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\lambda}x_n| + |e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n| + |e^{tA_\mu}x_n - e^{tA_\mu}x| \\ &\leq |e^{tA_\lambda}|_{\mathcal{L}(X)}|x - x_n| + |e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n| + |e^{tA_\mu}|_{\mathcal{L}(X)}|x - x_n| \\ &\leq 2|x - x_n| + |e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n| \end{aligned}$$

suficientemente pequeno.

Dessa forma, como  $(e^{tA_\lambda}x)_{\lambda>0}$  é convergente para todo  $x \in X$ , dado  $x \in X$ , defina

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x. \quad (2.16)$$

Na sequência, vamos mostrar que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo de contrações. Note, primeiramente, que  $T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{0A_\lambda}x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} x = x$  e

$$T(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x = T(t)T(s)x,$$

para todo  $x \in X$  e todo  $t, s \in [0, \infty)$ , uma vez que  $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$  é um semigrupo uniformemente limitado.

Além disso, para todo  $x \in X$  fixo, a função  $t \mapsto T(t)x$  é contínua para  $t \geq 0$  pois é o limite, quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , das funções contínuas  $t \mapsto e^{tA_\lambda}x$ .

Logo, segue que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo. Mais ainda, para todo  $x \in X$  e  $t \geq 0$ ,

$$|T(t)x| = \left| \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x \right| = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} |e^{tA_\lambda}x| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} |e^{tA_\lambda}|_{\mathcal{L}(X)}|x| \leq |x|,$$

e assim,  $|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ , para todo  $t \geq 0$ .

Portanto,  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo de contrações.

Falta mostrarmos que  $A$  é o gerador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ . Para isso, seja  $x \in D(A)$ . Dessa forma, usando a definição de  $T(t)$  e o item (4) do Teorema 2.13, obtemos

$$T(t)x - T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [e^{tA_\lambda}x - x] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds = \int_0^t T(s)Ax ds,$$

onde a última igualdade ocorre pela convergência de  $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$  para  $T(t)Ax$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , ser uniforme em intervalos limitados.

Agora, sejam  $x \in D(A)$  e  $B$  o gerador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ . Pelo que fizemos anteriormente, para todo  $t > 0$ , temos

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax ds$$

e então, fazendo  $t \rightarrow 0$ , pelo item (1) do Teorema 2.13, obtemos que  $x \in D(B)$  e  $Bx = T(0)Ax = Ax$ . Logo,  $D(A) \subseteq D(B)$  e  $Ax = Bx$  para todo  $x \in D(A)$ .

Por outro lado, como  $B$  é o gerador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  segue, da implicação já demonstrada deste teorema, que  $1 \in \rho(B)$ . Além disso, pela condição (ii), assumida por hipótese,  $1 \in \rho(A)$ . Assim,  $(I - A)^{-1}$  e  $(I - B)^{-1}$  existem e são operadores lineares limitados, com  $(I - A)D(A) = X$  e  $(I - B)D(B) = X$ .

Desse modo, visto que  $D(A) \subset D(B)$  e  $A = B$  em  $D(A)$ , temos  $(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X$  e

$$D(A) = (I - B)^{-1}(I - B)D(A) = (I - B)^{-1}X = D(B).$$

Consequentemente,  $D(A) = D(B)$  e  $A = B$ , isto é  $A$  é o gerador infinitesimal do  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  definido em (2.16).

Com isso, concluímos a demonstração do teorema.  $\square$

Veremos a seguir três consequências do Teorema de Hille-Yosida.

**Corolário 2.23.** *Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ . Se  $A_\lambda$  é a aproximação de Yosida de  $A$ , então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x, \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } t \geq 0.$$

*Demonstração.* Na demonstração do Teorema de Hille-Yosida provamos que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , onde  $S(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x$ ,  $\forall x \in X$ , é um  $C_0$ -semigrupo de contrações em  $X$ , com gerador infinitesimal  $A$ . Assim, visto que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  também é um  $C_0$ -semigrupo de contrações em  $X$ , com gerador infinitesimal  $A$ , o Teorema 2.15 nos garante que  $T(t) = S(t)$ , para todo  $t \geq 0$ .

Portanto, segue o resultado.  $\square$

**Corolário 2.24.** *Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ . O conjunto resolvente de  $A$  contém o semiplano aberto à direita, ou seja,  $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \subset \rho(A)$  e, para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$ , com  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ ,*

$$|R(\lambda : A)|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)}.$$

*Demonstração.* Procedendo como na demonstração do Teorema de Hille-Yosida, dado  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , para  $x \in X$ , defina

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x dt.$$

Assim, é possível mostrarmos que  $R(\lambda)$  está bem definido, isto é, a integral imprópria acima existe, e  $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ , com

$$|R(\lambda)x| \leq \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| |T(t)|_{\mathcal{L}(X)} |x| dt \leq |x| \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t} dt = \frac{|x|}{\operatorname{Re}(\lambda)}.$$

Mais ainda, utilizando o mesmo processo da demonstração do Teorema de Hille-Yosida, podemos concluir que  $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , finalizando esta demonstração.  $\square$

Para a demonstração do último corolário do Teorema de Hille-Yosida precisamos da proposição a seguir.

**Proposição 2.25.** *Se  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo tal que,  $|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}$ , para todo  $t \geq 0$  e algum  $\omega > 0$ , então  $\{S(t) = e^{-\omega t} T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo de contrações e o gerador infinitesimal de  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é dado por  $B = A - \omega I$ , onde  $A$  é o gerador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ .*

*Demonstração.* Observe inicialmente que  $S(t)$ , como foi definido acima, é um operador linear limitado. Mais ainda, temos

$$|S(t)|_{\mathcal{L}(X)} = |e^{-\omega t}| |T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\omega t} e^{\omega t} = 1, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Observe também que:

- $S(0) = e^{-\omega \cdot 0} T(0) = I$ ;
- $S(t+s) = e^{-\omega(t+s)} T(t+s) = e^{-\omega t} e^{-\omega s} T(t) T(s) = e^{-\omega t} T(t) e^{-\omega s} T(s) = S(t) S(s)$ , para todo  $t, s \geq 0$ ;
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\omega t} T(t)x = e^{-\omega \cdot 0} x = x$ .

Portanto,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo de contrações. Mais ainda, para  $x \in D(B) = D(A)$ ,

$$\begin{aligned} Bx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\omega t} T(t)x - x}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\omega t} \left( \frac{T(t)x - x}{t} \right) + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\omega t} x - e^{-\omega \cdot 0} x}{t} \\ &= e^{-\omega \cdot 0} Ax + \left. \frac{d}{dt} e^{-\omega t} x \right|_{t=0} = Ax - \omega x. \end{aligned}$$

Logo, o gerador infinitesimal de  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é dado por  $B = A - \omega I$ , onde  $A$  é o gerador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ .  $\square$

**Corolário 2.26.** *Um operador linear  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , satisfazendo  $|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}$ , para todo  $t \geq 0$  e algum  $\omega > 0$ , se, e somente se,*

(i)  $A$  é fechado e  $\overline{D(A)} = X$ ;

(ii) O conjunto resolvente de  $A$  contém o conjunto  $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}(\lambda) = 0, \lambda > \omega\}$  e

$$|R(\lambda : A)|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}, \text{ com } \text{Im}(\lambda) = 0 \text{ e } \lambda > \omega.$$

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Suponha que  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , com  $|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}$ , para todo  $t \geq 0$ . Então, do Corolário 2.14, segue que  $\overline{D(A)} = X$  e  $A$  é um operador linear fechado. Definindo  $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$ , para todo  $t \geq 0$ , pela proposição anterior obtemos que,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo de contrações e  $B = A - \omega I$  é o seu gerador infinitesimal.

Além disso, para  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Im}(\lambda) = 0$  e  $\lambda > \omega$ , temos  $\lambda - \omega > 0$  e assim, pelo Teorema de Hille-Yosida,  $\lambda - \omega \in \rho(B)$ . Logo, como

$$(\lambda - \omega)I - B = \lambda I - (B + \omega I) = \lambda I - A,$$

segue que  $\lambda \in \rho(A)$  e  $R(\lambda : A) = R(\lambda - \omega : B)$ . Mais ainda, novamente pelo Teorema de Hille-Yosida, temos

$$|R(\lambda : A)|_{\mathcal{L}(X)} = |R(\lambda - \omega : B)|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

Portanto,  $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}(\lambda) = 0, \lambda > \omega\} \subset \rho(A)$  e  $|R(\lambda : A)|_{\mathcal{L}(X)} \leq (\lambda - \omega)^{-1}$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Im}(\lambda) = 0$  e  $\lambda > \omega$ .

( $\impliedby$ ) Suponha, agora, que  $A$  é um operador linear que satisfaz as condições (i) e (ii).

Consideremos o operador  $B : D(A) \subset X \rightarrow X$  dado por  $B = A - \omega I$ , onde  $\omega > 0$  é o mesmo da condição (ii), e mostremos que  $B$  satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema de Hille-Yosida.

Por hipótese,  $\overline{D(A)} = X$  e assim, como  $D(B) = D(A)$ ,  $\overline{D(B)} = X$ . Além disso, visto que  $A$  é um operador fechado, podemos mostrar que  $B$  também é um operador fechado. De fato, seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $D(A)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = y$ , para algum  $x \in X$  e algum  $y \in X$ . Dessa forma, como  $I$  é o operador identidade em  $X$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\omega I)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega x_n = \omega x$  e mais,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (B + \omega I)x_n = y + \omega x$ .

Logo, pelo fato de  $A$  ser fechado, concluímos que  $x \in D(A) = D(B)$  e  $Ax = y + \omega x$ , o que implica que  $y = Ax - \omega x = Bx$  e, conseqüentemente,  $B$  é fechado.

Agora, seja  $\lambda \in (0, +\infty)$ . Então,  $\lambda + \omega \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}(\lambda + \omega) = 0$  e  $\lambda + \omega > 0$ . Assim, por hipótese, o operador  $R(\lambda + \omega : A)$  existe e  $|R(\lambda + \omega : A)|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{(\lambda + \omega) - \omega} = \frac{1}{\lambda}$ .

Mais ainda, como  $(\lambda I - B) = (\lambda I - (A - \omega I)) = ((\lambda + \omega)I - A)$ , concluímos que  $\lambda \in \rho(B)$  e  $R(\lambda : B) = R(\lambda + \omega : A)$ . Dessa forma, temos  $(0, +\infty) \subset \rho(B)$  e  $|R(\lambda : B)|_{\mathcal{L}(X)} \leq \lambda^{-1}$ , para todo  $\lambda > 0$ .

Portanto,  $B$  satisfaz as condições do Teorema de Hille-Yosida e então,  $B$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . Definindo a família  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  por  $T(t) = e^{\omega t} S(t)$ ,  $t \geq 0$ , e procedendo de modo análogo à demonstração da Proposição 2.25, obtemos que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo com  $|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t} |S(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}$ , para todo  $t \geq 0$ . Além disso, o gerador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é dado por  $B + \omega I = (A - \omega I) + \omega I = A$ , o que conclui a demonstração do corolário.  $\square$

Finalizamos esta subseção com um exemplo de  $C_0$ -semigrupo.

**Exemplo 2.27.** *Seja  $X = BU([0, +\infty))$  o espaço das funções limitadas e uniformemente contínuas de  $[0, +\infty)$  em  $\mathbb{C}$ , isto é,*

$$X = \{f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é uniformemente contínua e limitada}\}.$$

Assumiremos a seguinte norma no espaço  $X$

$$|f|_{\infty} = \sup_{x \in [0, +\infty)} |f(x)|.$$

Defina, para todo  $t \in [0, +\infty)$ ,  $T(t) : X \rightarrow X$  por

$$[T(t)f](x) = f(t + x), \quad \text{para } x \in [0, \infty).$$

Assim, podemos mostrar que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo de contrações.

Para isso, vejamos, separadamente, cada uma das propriedades de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ .

- Para cada  $t \geq 0$ ,  $T(t)$  está bem definido, isto é,  $T(t)f \in X$ , para todo  $f \in X$ .

De fato, sejam  $x, y \in [0, +\infty)$ . Como  $t \in [0, +\infty)$ , tem-se  $(x + t), (y + t) \in [0, +\infty)$ . Além disso, sendo  $f$  uniformemente contínua, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|x - y| < \delta$  implica em  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Dessa forma, como  $|x + t - (y + t)| = |x - y| < \delta$ , temos

$$|[T(t)f](x) - [T(t)f](y)| = |f(x + t) - f(y + t)| < \varepsilon,$$

o que garante que  $T(t)f$  é uniformemente contínua.

Mais ainda,  $f$  é limitada e assim, existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$ , para todo  $x \in [0, +\infty)$ . Logo,

$$|[T(t)f](x)| = |f(t+x)| \leq M, \quad \text{para todo } x \in X,$$

o que implica que  $T(t)f$  é limitada e portanto,  $T(t)f \in X$ .

- $T(t)$  é linear.

Para todo  $f, g \in X$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , temos

$$\begin{aligned} [T(t)(\alpha f + \beta g)](x) &= (\alpha f + \beta g)(t+x) = \alpha f(t+x) + \beta g(t+x) \\ &= \alpha [T(t)f](x) + \beta [T(t)g](x) = [\alpha T(t)f + \beta T(t)g](x), \end{aligned}$$

para todo  $x \in [0, +\infty)$ , e então,  $T(t)(\alpha f + \beta g) = \alpha T(t)f + \beta T(t)g$ , garantindo que  $T(t)$  é linear.

- $T(t)$  é limitado.

Para todo  $f \in X$ ,

$$|T(t)f|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty)} |T(t)f(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty)} |f(x+t)| \leq \sup_{y \in [0, +\infty)} |f(y)| = |f|_\infty.$$

Portanto,  $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ .

- $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é  $C_0$ -semigrupo.

(i) Para  $t = 0$  e  $f \in X$ ,  $[T(0)f](x) = f(x+0) = f(x)$ , para todo  $x \geq 0$ , e então,  $T(0)f = f$ , para todo  $f \in X$ . Logo,  $T(0) = I$ .

(ii) Para todo  $t, s \in [0, +\infty)$  e  $f \in X$ ,

$$[T(t+s)f](x) = f(t+s+x) = [T(t)f](s+x) = [T(t)T(s)f](x), \forall x \geq 0.$$

Assim,  $T(t+s)f = T(t)T(s)f$  e, como isso é válido para toda  $f \in X$ , temos  $T(t+s) = T(t)T(s)$ .

(iii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)f = f$ , para toda  $f \in X$ .

Dados  $f \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , como  $f$  é uniformemente contínua, existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ , para todo  $x, y \in [0, +\infty)$  com  $|x - y| < \delta$ . Em particular, se  $t \in (0, +\infty)$  e  $0 < t < \delta$ , então  $|x+t - x| < \delta$  e assim,  $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ , para qualquer que seja  $x \in [0, +\infty)$ .

Consequentemente, para  $0 < t < \delta$ , obtemos que

$$|T(t)f - f| = \sup_{x \in [0, +\infty)} |[T(t)f](x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty)} |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon,$$

ou seja,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)f = f$ .

Portanto, segue que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo.

- $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo de contrações.

Já mostramos que  $|T(t)f|_\infty \leq |f|_\infty$ . Assim, como  $T(t) \in \mathcal{L}(X)$  para todo  $t \geq 0$ , temos

$$|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{f \in X; |f|_\infty \leq 1} |T(t)f|_\infty \leq \sup_{f \in X; |f|_\infty \leq 1} |f|_\infty = 1,$$

isto é,  $|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ , para todo  $t \geq 0$ .

Logo,  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo de contrações.

- Mostremos também que  $D(A) = \{f \in X : f' \text{ existe e } f' \in X\}$  e  $Af = f'$ , para toda  $f \in D(A)$ .

Para isso, tomemos, primeiramente,  $g \in D(A)$ . Então,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)g - g}{t}$  existe e é igual a  $Ag$ . Assim, como  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ ,  $Ag = \tilde{g}$  para alguma função  $\tilde{g} \in X$ .

Além disso, o limite acima existe na norma da convergência uniforme  $|\cdot|_\infty$  e então, vale, em particular, pontualmente, isto é, para todo  $x \in [0, +\infty)$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{[T(t)g](x) - g(x)}{t}$  existe. Mas,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{[T(t)g](x) - g(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t+x) - g(x)}{t} = g'(x)$$

e então, pela unicidade do limite,  $\tilde{g}(x) = g'(x)$  para todo  $x \in [0, +\infty)$ .

Logo, dada  $g \in D(A)$ , obtemos que  $g'$  existe e  $g' \in X$  (pois  $g' = \tilde{g}$  e  $\tilde{g} \in X$ ). Assim, temos  $D(A) \subset \{f \in X : f' \text{ existe e } f' \in X\}$ .

Agora, tomemos  $g \in \{f \in X : f' \text{ existe e } f' \in X\}$  e mostremos que  $g \in D(A)$ . Como  $g$  está no conjunto acima, para todo  $x \in [0, +\infty)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{[T(t)g](x) - g(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t+x) - g(x)}{t} = g'(x).$$

Mais ainda, usando o Teorema do Valor Médio, existe  $\theta \in (x, x+t)$  tal que  $g'(\theta) = \frac{g(t+x) - g(x)}{t}$  e, usando o fato de  $g'$  ser uniformemente contínua, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|g'(y) - g'(z)| < \varepsilon$ , para todo  $y, z \in [0, +\infty)$  com  $|y - z| < \delta$ .

Desse modo, para  $0 < t < \delta$ , temos

$$\left| \frac{[T(t)g](x) - g(x)}{t} - g'(x) \right| = \left| \frac{g(t+x) - g(x)}{t} - g'(x) \right| = |g'(\theta) - g'(x)| < \varepsilon,$$

para todo  $x \in [0, +\infty)$ , pois  $|\theta - x| < t < \delta$ .

Isso nos permite concluir que

$$\left| \frac{T(t)g - g}{t} - g'(x) \right|_{\infty} = \sup_{x \in [0, +\infty)} \left| \frac{[T(t)g](x) - g(x)}{t} - g'(x) \right| < \varepsilon,$$

ou seja,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)g - g}{t} = g'$ , implicando que  $g \in D(A)$  e  $Ag = g'$ .

Portanto, segue que  $\{f \in X : f' \text{ existe e } f' \in X\} \subset D(A)$ .

Consequentemente, obtemos que  $D(A) = \{f \in X : f' \text{ existe e } f' \in X\}$  e  $Af = f'$ , para toda  $f \in D(A)$ .



## 3 Equações diferenciais abstratas

Este capítulo é dedicado ao estudo de equações diferenciais abstratas e está dividido em duas seções. Na primeira, estudaremos o problema de Cauchy, o caso não homogêneo, e na segunda, equações de evolução. Em ambas situações, utilizaremos a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, desenvolvida no primeiro capítulo, como ferramenta principal.

### 3.1 O problema de Cauchy

Nesta seção consideraremos o seguinte problema de valor inicial não-homogêneo

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad 0 < t < a, \quad (3.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (3.2)$$

onde  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  em um espaço de Banach  $X$ ,  $u_0 \in X$  e  $f : J \rightarrow X$ , com  $J = [0, a)$  e  $a > 0$ , é uma função apropriada, cujas propriedades veremos ao longo desta seção.

**Definição 3.1.** *Uma função  $u : J \rightarrow X$  é uma solução clássica de (3.1) – (3.2) em  $J$  se:*

- (i) a função  $u(\cdot)$  é contínua em  $J$ ;
- (ii) a função  $u(\cdot)$  é continuamente diferenciável em  $(0, a)$ ;
- (iii)  $u(t) \in D(A)$  para todo  $0 < t < a$ , a equação (3.1) é satisfeita em  $(0, a)$  e  $u(0) = u_0$ .

**Teorema 3.2.** *Se  $f \in L^1(J, X)$  então, para cada  $u_0 \in X$ , o problema de valor inicial (3.1) – (3.2) tem no máximo uma solução e, se esta solução existe, então ela é dada por*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \text{para todo } t \in J. \quad (3.3)$$

*Demonstração.* Seja  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  o  $C_0$ -semigrupo gerado por  $A$  e seja  $u(\cdot)$  uma solução de (3.1) – (3.2) em  $J$ . Para cada  $t \in J$ ,  $t \neq 0$ , considere a função  $g : [0, t) \rightarrow X$ , dada por  $g(s) = T(t-s)u(s)$ , para  $0 \leq s < t$ . Então,  $g$  é diferenciável em  $(0, t)$  e

$$\begin{aligned} g'(s) &= \left[ \frac{dT}{ds}(t-s) \right] u(s) + T(t-s)u'(s) = -T(t-s)Au(s) + T(t-s)[Au(s) + f(s)] \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Como  $f \in L^1(J, X)$ , então a função  $s \rightarrow T(t-s)f(s)$  é integrável e, integrando-a de 0 à  $t$ , obtemos

$$g(t) - g(0) = \int_0^t g'(s)ds = \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

ou seja, pela definição da  $g$ , temos

$$T(0)u(t) - T(t)u(0) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Logo, segue que

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in J.$$

Portanto, se o problema de valor inicial (3.1) – (3.2) tem uma solução, ela deve satisfazer a expressão acima, que é unicamente determinada. Assim, (3.1) – (3.2) tem no máximo uma solução.  $\square$

Observe que para cada  $f \in L^1(J, X)$  o lado direito de (3.3) é uma função contínua em  $[0, a]$  já que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo.

Veremos a seguir a definição de solução fraca para (3.1) – (3.2). Tais soluções são consideradas soluções mais gerais, pois não necessariamente precisam ser diferenciáveis, nem precisam satisfazer a equação (3.1) no sentido da Definição 3.1.

**Definição 3.3.** Considere  $u_0 \in X$  e  $f \in L^1(J, X)$ . A função  $u \in C([0, a], X)$  dada por

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0, a],$$

é uma solução fraca do problema de valor inicial (3.1) – (3.2).

Note que, pela Definição 3.3, para cada  $f \in L^1(J, X)$ , o problema de valor inicial (3.1) – (3.2) tem uma única solução fraca. Nosso próximo passo é impor condições à função  $f$  para que a solução fraca torne-se uma solução clássica para todo  $u_0 \in D(A)$ . Mais ainda, sob essas condições, provaremos a existência de soluções para (3.1) – (3.2) quando  $u_0 \in D(A)$ .

Primeiramente, vamos mostrar que a continuidade da função  $f$ , em geral, não é suficiente para assegurar a existência de solução para (3.1) – (3.2), quando  $u_0 \in D(A)$ . De fato, seja  $x \in X$  tal que  $T(\tau)x \notin D(A)$  para algum  $\tau > 0$ . Defina  $f : [0, +\infty) \rightarrow X$  por  $f(s) = T(s)x$ . Logo  $f(\cdot)$  é contínua em  $[0, +\infty)$ . Assumindo  $u_0 = 0$  em (3.2) tem-se

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)xds = \int_0^t T(t)xds = tT(t)x.$$

Portanto,  $u(t) = tT(t)x$  é solução fraca de (3.1)–(3.2) com  $u(0) = 0$  e  $f(t) = T(t)x$ . Porém,  $u(\cdot)$  não é diferenciável para todo  $t > 0$ , já que  $T(\tau)u_0 \notin D(A)$  para algum  $\tau > 0$ . Assim, concluímos que  $u(\cdot)$  não pode ser solução clássica de (3.1) – (3.2).

Dessa forma, para provarmos a existência de solução clássica para (3.1) – (3.2) precisamos requerer mais do que a continuidade de  $f$ . O teorema a seguir apresenta um critério geral de existência de solução para o problema de valor inicial (3.1) – (3.2).

**Teorema 3.4.** *Sejam  $f \in L^1(J, X) \cap C(J, X)$  e*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \text{para todo } t \in [0, a). \quad (3.4)$$

*O problema de valor inicial (3.1) – (3.2) tem uma solução  $u(\cdot)$  em  $J$ , para cada  $u_0 \in D(A)$ , se uma das seguintes condições for satisfeita:*

- (i)  $v(\cdot)$  é continuamente diferenciável em  $(0, a)$ ;
- (ii)  $v(t) \in D(A)$  para todo  $0 < t < a$  e  $Av(\cdot)$  é contínua em  $(0, a)$ .

*Reciprocamente, se (3.1) – (3.2) tem uma solução  $u$  em  $J$  para algum  $u_0 \in D(A)$ , então  $v(\cdot)$  satisfaz as condições (i) e (ii) acima.*

*Demonstração.* Vamos dividir esta demonstração em três partes:

- (1) Suponha que a condição (i) acima seja válida, isto é,  $v(\cdot)$  é continuamente diferenciável em  $(0, a)$ . Mostremos que (3.1) – (3.2) possui uma solução para todo  $u_0 \in D(A)$ . Para isso, dado  $h > 0$ , observe que

$$\begin{aligned} h^{-1}[T(h) - I]v(t) &= h^{-1}[T(h) - I] \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= h^{-1} \left[ \int_0^t T(h+t-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right] \\ &= h^{-1} \left[ \int_0^{t+h} T(h+t-s)f(s)ds - \int_t^{t+h} T(h+t-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right] \\ &= h^{-1}[v(t+h) - v(t)] - h^{-1} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Assim, fazendo  $h \rightarrow 0^+$  na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{T(h) - I}{h} \right) v(t) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \\ &= v'_+(t) - f(t), \end{aligned}$$

onde  $v'_+(t)$  é a derivada à direita de  $v$  no ponto  $t$ . Além disso, por hipótese,  $v(\cdot)$  é continuamente diferenciável em  $(0, a)$ , logo  $v'(\cdot)$  existe e é contínua. Então  $v'(t) = v'_+(t)$ ,  $v(t) \in D(A)$  e  $Av(t) = v'(t) - f(t)$ , para todo  $t \in (0, a)$ .

Assim, se  $u_0 \in D(A)$ , a função  $u : J \rightarrow X$  definida por  $u(t) = T(t)u_0 + v(t)$ ,  $t \in J$ , é contínua em  $J$ , pois  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo e  $v(\cdot)$  é contínua em  $[0, t]$ ,  $u(t) \in D(A)$  para  $t \in (0, a)$ , pois, como provamos anteriormente,  $v(t) \in D(A)$  e, já que  $u_0 \in D(A)$ , o Teorema 2.13 nos garante que  $T(t)u_0 \in D(A)$ , para todo  $t \in (0, a)$ ,  $u(\cdot)$  é continuamente diferenciável em  $(0, a)$ , pois  $u'(t) = T(t)Au_0 + v'(t)$  é contínua em  $(0, a)$ ,  $u(0) = T(0)u_0 + v(0) = u_0 + 0 = u_0$  e

$$u'(t) = T(t)Ax + v'(t) = A[T(t)x + v(t)] + f(t) = Au(t) + f(t), \quad \forall t \in (0, a).$$

Portanto,  $u(\cdot)$  é solução clássica de (3.1) – (3.2), em  $J$ , para todo  $u_0 \in D(A)$ .

- (2) Suponha agora que a condição (ii) do enunciado está satisfeita. Mostremos que (3.1) – (3.2) tem solução para todo  $u_0 \in D(A)$ .

Pelos cálculos que fizemos na demonstração do item anterior, temos

$$h^{-1}[v(t+h) - v(t)] = h^{-1}[T(h) - I]v(t) + h^{-1} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds.$$

Assim, como  $v(t) \in D(A)$  para  $t \in (0, a)$ , por hipótese, então, fazendo  $h \rightarrow 0^+$  na igualdade anterior, obtemos  $v'_+(t) = Av(t) - f(t)$ . Logo,  $v'_+(t)$  existe e é contínua em  $(0, a)$ , pois  $Av(\cdot)$  é contínua em  $(0, a)$  e  $f$  é contínua em  $(0, a]$ . Assim, como  $v(\cdot)$  e  $v'_+(\cdot)$  são contínuas, o Lema de Dini nos garante que  $v'(\cdot)$  existe e mais,

$$v'(t) = v'_+(t) = Av(t) + f(t), \quad \text{para todo } t \in (0, a).$$

Conseqüentemente, segue que  $v$  é continuamente diferenciável em  $(0, a)$ .

Agora, a condição (i) está válida e assim, como já provamos inicialmente,  $u(t) = T(t)u_0 + v(t)$  é solução clássica de (3.1) – (3.2) em  $J$ .

- (3) Por último, suponhamos que (3.1) – (3.2) tem uma solução  $u(\cdot)$  em  $J$  para algum  $u_0 \in D(A)$  e mostremos que  $v(\cdot)$ , definida em (3.4), satisfaz as condições (i) e (ii).

Pelo Teorema 3.2,  $u(t) = T(t)u_0 + v(t)$  para todo  $t \in [0, a)$ . Logo,  $v(t) = u(t) - T(t)u_0$  é diferenciável para  $t \in (0, a)$ , pois  $u(\cdot)$  e  $T(\cdot)u_0$  são funções diferenciáveis em  $(0, a)$ .

Além disso,

$$v'(t) = u'(t) + AT(t)u(0) = u'(t) + T(t)Au_0$$

e então, visto que  $u(\cdot)$  é continuamente diferenciável em  $(0, a)$  e  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo,  $v'(\cdot)$  é contínua em  $(0, a)$ . Conseqüentemente,  $v(\cdot)$  é continuamente diferenciável em  $(0, a)$  e então, o item (i) é satisfeito.

Agora, como  $u_0 \in D(A)$ ,  $T(t)u_0 \in D(A)$  para todo  $t \in J$ . Mais ainda, por hipótese,  $u(t) \in D(A)$  para  $t \in (0, a)$ . Logo,  $v(t) = u(t) - T(t)u_0 \in D(A)$  para  $t \in (0, a)$ . Observe também que

$$Av(t) = Au(t) - AT(t)u_0 = u'(t) - f(t) - T(t)Au_0.$$

Assim, como  $u'(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$  e  $T(\cdot)Au_0$  são contínuas em  $(0, a)$ , segue que  $Av(\cdot)$  é contínua em  $(0, a)$ . Portanto, o item (ii) é também satisfeito.

Concluimos, então, esta demonstração. □

Do Teorema 3.4 obtemos dois importantes resultados, enunciados nos corolários a seguir.

**Corolário 3.5.** *Se a função  $f$  é continuamente diferenciável em  $[0, a]$ , então o problema de valor inicial (3.1) – (3.2) tem uma solução clássica  $u(\cdot)$  em  $J$  para cada  $u_0 \in D(A)$ .*

*Demonstração.* Usando a notação do Teorema 3.4, observe, primeiramente, que

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds, \quad \forall t \in [0, a].$$

Então, para  $h > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)f(t-s)ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t T(s)f(t+h-s)ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)f(t-s)ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t T(s)[f(t+h-s) - f(t-s)]ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds. \end{aligned}$$

Agora, como  $f$  é continuamente diferenciável em  $[0, a]$ , pelo Teorema da convergência dominada A.10, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{h} \int_0^t T(s)[f(t+h-s) - f(t-s)]ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds \right] \\ &= \int_0^t T(s)f'(t-s)ds + T(t)f(0). \end{aligned}$$

Logo,  $\frac{d^+v(t)}{dt}$  existe e

$$\frac{d^+v(t)}{dt} = \int_0^t T(s)f'(t-s)ds + T(t)f(0),$$

o que implica que  $\frac{d^+v(t)}{dt}$  é contínua. Desse modo, visto que  $v(\cdot)$  também é contínua, o Lema de Dini nos garante que  $v'(\cdot)$  existe e é contínua. Consequentemente,  $v(\cdot)$  é continuamente diferenciável e, pelo Teorema 3.4, (3.1) – (3.2) tem uma solução clássica.  $\square$

**Corolário 3.6.** *Seja  $f \in L^1(J, X) \cap C(J, X)$ . Se  $f(t) \in D(A)$  para todo  $0 < t < a$  e  $Af(\cdot) \in L^1(J, X)$  então, para cada  $u_0 \in D(A)$  o problema de valor inicial (3.1) – (3.2) tem uma solução clássica em  $J$ .*

*Demonstração.* Consideremos que  $v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$  para todo  $t \in [0, a)$ , como no Teorema 3.4.

Por outro lado, como  $f(t) \in D(A)$  para todo  $0 < t < a$ , dado  $t \in (0, a)$  e  $0 < s < t$ , pelo item (3) do Teorema 2.13, obtemos que  $T(t-s)f(s) \in D(A)$  e

$$\frac{d}{dt}T(t-s)f(s) = AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s), \quad \text{para todo } 0 < s < t < a.$$

Dessa forma, visto que  $Af(\cdot) \in L^1(J, X)$  e  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo, a função  $s \mapsto AT(t-s)f(s)$  é integrável em  $J$ . Mais ainda, como  $v(t)$  pode ser visto como um limite de elementos de  $D(A)$  e  $A$  é um operador linear fechado, com  $\int_0^t AT(t-s)f(s)ds$  também podendo ser visto como um limite, podemos concluir que  $v(t) \in D(A)$  e

$$Av(t) = A \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t AT(t-s)f(s)ds, \quad \text{para todo } 0 < t < a.$$

Logo, como  $A(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$  para todo  $0 < s < t < a$  e  $Af(\cdot) \in L^1(J, X)$ , segue que  $Av(\cdot)$  é contínua em  $(0, a)$  e então, a condição (ii) do Teorema (3.4) está satisfeita.

Consequentemente, o problema (3.1) – (3.2) possui uma solução clássica em  $J$ .  $\square$

## 3.2 Equações de evolução

Nesta seção estudaremos o seguinte problema de valor inicial

$$u'(t) + Au(t) = f(t, u(t)), \quad t_0 < t < a, \quad (3.5)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (3.6)$$

onde o operador  $-A : D(A) \subset X \rightarrow X$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , em um espaço de Banach  $X$ ,  $u_0 \in X$  e  $f : [t_0, a] \times X \rightarrow X$  é contínua na primeira variável, lipschitziana na segunda e  $a > 0$ .

**Definição 3.7.** *Uma função  $u : [t_0, a) \rightarrow X$  é uma solução clássica de (3.5) – (3.6) em  $J = [t_0, a)$  se:*

- (i) a função  $u(\cdot)$  é contínua em  $J$ ;
- (ii) a função  $u(\cdot)$  é continuamente diferenciável em  $(t_0, a)$ ;
- (iii)  $u(t) \in D(A)$  para todo  $t_0 < t < a$ , a equação (3.5) é satisfeita em  $(t_0, a)$  e  $u(t_0) = u_0$ .

**Teorema 3.8.** *Se o problema de valor inicial (3.5) – (3.6) tem uma solução  $u(\cdot)$  em  $J$ , então esta solução é dada por*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s, u(s))ds, \quad \text{para todo } t_0 \leq t < a. \quad (3.7)$$

*Demonstração.* Seja  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  um  $C_0$ -semigrupo gerado por  $-A$  e seja  $u(\cdot)$  uma solução de (3.5) – (3.6) em  $J$ . Dado  $t \in [t_0, a)$ , considere a função  $g : [t_0, t) \rightarrow X$  definida por  $g(s) = T(t-s)u(s)$ . Então,  $g$  é diferenciável em  $(t_0, t)$ , com

$$\begin{aligned} g'(s) &= \left[ \frac{d}{ds} T(t-s) \right] u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -[-AT(t-s)]u(s) + T(t-s)[-Au(s) + f(s, u(s))] \\ &= T(t-s)f(s, u(s)). \end{aligned}$$

Como  $f$  é contínua na primeira variável e lipschitziana na segunda, a função  $s \mapsto T(t-s)f(s, u(s))$  é integrável. Assim, integrando-a de  $t_0$  à  $t$ , obtemos

$$g(t) - g(t_0) = \int_{t_0}^t g'(s)ds = \int_{t_0}^t T(t-s)f(s, u(s))ds,$$

ou seja, pela definição de  $g$ , temos

$$T(0)u(t) - T(t-t_0)u(t_0) = \int_{t_0}^t T(t-s)f(s, u(s))ds.$$

Portanto,

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s, u(s))ds, \quad \text{para todo } t_0 \leq t < a.$$

□

Este teorema motiva a definição a seguir, que estabelece um conceito mais fraco de solução para (3.5) – (3.6).

**Definição 3.9.** *Uma função contínua  $u : [t_0, a) \rightarrow X$  que satisfaz a equação integral (3.7) é chamada de solução fraca de (3.5) – (3.6) em  $J = [t_0, a)$ .*

O resultado a seguir nos assegura a existência e a unicidade de soluções fracas para (3.5) – (3.6) quando  $f$  é contínua na primeira variável e lipschitziana na segunda.

**Teorema 3.10.** *Seja  $f : [t_0, a] \times X \rightarrow X$  contínua em  $[t_0, a]$  e uniformemente lipschitziana (com constante de Lipschitz  $L$ ) em  $X$ . Se  $-A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  em  $X$  então, para cada  $u_0 \in X$ , o problema de valor inicial (3.5) – (3.6) tem uma única solução  $u \in C([t_0, a], X)$ . Mais ainda, a aplicação  $u_0 \mapsto u(\cdot)$ , onde  $u(\cdot)$  é a solução fraca de (3.5) – (3.6), é lipschitziana de  $X$  em  $C([t_0, a], X)$ .*

*Demonstração.* Por hipótese, existe uma constante  $L > 0$  tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in X, \quad t \in [t_0, a].$$

Dado  $u_0 \in X$ , defina a aplicação  $F : C([t_0, a], X) \rightarrow C([t_0, a], X)$  por

$$Fu(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t - s)f(s, u(s))ds, \quad \text{para } t \in [t_0, a].$$

Observe que, como  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo e a função  $s \mapsto T(t - s)f(s, u(s))$  é integrável em  $[t_0, t]$ ,  $(Fu)(\cdot)$  é uma função contínua, isto é,  $Fu \in C([t_0, a], X)$ , garantindo assim que  $F$  está bem definida.

Denotemos por  $|u|_\infty = \sup_{t_0 \leq t \leq a} |u(t)|$  a norma de  $u$  como elemento de  $C([t_0, a], X)$  e seja  $M > 0$  tal que  $|T(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$  para todo  $t \in [t_0, a]$  (isso é possível por causa do Teorema 2.11).

Então, para  $u, v \in C([t_0, a], X)$  e  $t \in [t_0, a]$ , temos

$$\begin{aligned} |Fu(t) - Fv(t)| &\leq \int_{t_0}^t |T(t - s)|_{\mathcal{L}(X)} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t ML |u(s) - v(s)| ds \\ &\leq ML \int_{t_0}^t |u - v|_\infty ds \\ &= ML(t - t_0) |u - v|_\infty. \end{aligned}$$

Agora, mostremos por indução que, para  $t \in [t_0, a]$ ,

$$|F^n u(t) - F^n v(t)| \leq \frac{[ML(t - t_0)]^n}{n!} |u - v|_\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para  $n = 1$  já está provado acima. Suponha que a desigualdade seja válida para



$(n - 1)$ . Então,

$$\begin{aligned}
|F^n u(t) - F^n v(t)| &= |FF^{n-1}u(t) - FF^{n-1}v(t)| \\
&\leq \int_{t_0}^t |T(t-s)|_{\mathcal{L}(X)} |f(s, F^{n-1}u(s)) - f(s, F^{n-1}v(s))| ds \\
&\leq ML \int_{t_0}^t |F^{n-1}u(s) - F^{n-1}v(s)| ds \\
&\leq ML \int_{t_0}^t \frac{[ML(s-t_0)]^{n-1}}{(n-1)!} |u-v|_\infty ds \\
&= \frac{(ML)^n}{(n-1)!} |u-v|_\infty \int_{t_0}^t (s-t_0)^{n-1} ds \\
&= \frac{[ML(t-t_0)]^n}{n!} |u-v|_\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, tomando o supremo para  $t \in [t_0, a]$  na desigualdade acima, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , obtemos

$$|F^n u - F^n v|_{C([t_0, a]: X)} \leq \frac{[MLa]^n}{n!} |u-v|_\infty.$$

Note que, para  $n_0$  suficientemente grande, temos

$$\frac{[MLa]^{n_0}}{(n_0)!} < 1.$$

Logo, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, segue que  $F^{n_0}$  possui um único ponto fixo. Então, podemos concluir também que  $F$  possui um único ponto fixo, ou seja, existe  $u_1 \in C([t_0, a], X)$  tal que  $Fu_1(t) = u_1(t)$ , para todo  $t \in [t_0, a]$ . Assim,

$$u_1(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s, u_1(s))ds, \quad \text{para todo } t \in [t_0, a],$$

e dessa forma,  $u_1$  é a única solução fraca de (3.5) – (3.6) em  $[t_0, a]$ .

Falta mostrarmos que a aplicação  $u_0 \mapsto u(\cdot)$  é lipschitziana, onde  $u(\cdot)$  é a solução fraca de (3.5) com condição inicial  $u_0$ , isto é,  $u(t_0) = u_0$ .

Para provarmos isto, sejam  $u(\cdot)$  e  $v(\cdot)$  soluções fracas de (3.5) com valores iniciais  $u_0$  e  $v_0$ , respectivamente. Então, para todo  $t \in [t_0, a]$ , temos

$$\begin{aligned}
|u(t) - v(t)| &\leq |T(t-t_0)|_{\mathcal{L}(X)} |u_0 - v_0| \\
&\quad + \int_{t_0}^t |T(t-s)|_{\mathcal{L}(X)} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\
&\leq M|u_0 - v_0| + ML \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds.
\end{aligned}$$

Assim, pela Desigualdade de Gronwall, segue que

$$|u(t) - v(t)| \leq Me^{ML(t-t_0)} |u_0 - v_0| \leq Me^{ML(a-t_0)} |u_0 - v_0|, \quad \text{para todo } t \in [t_0, a].$$

Portanto, a aplicação  $u_0 \mapsto u(\cdot)$  é lipschitziana.  $\square$

**Corolário 3.11.** *Se  $A$  e  $f : [t_0, a] \times X \rightarrow X$  satisfazem as condições do Teorema 3.10 então, para cada  $g \in C([t_0, a], X)$  a equação integral*

$$w(t) = g(t) + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s, w(s))ds, \quad t_0 \leq t \leq a,$$

*tem uma única solução  $w \in C([t_0, a], X)$ .*

*Demonstração.* Basta modificar a definição da aplicação  $F$  do Teorema 3.10 para

$$(Fu)(t) = g(t) + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s, u(s))ds, \quad \text{para } t \in [t_0, a],$$

e seguir os mesmos passos da demonstração anterior para se obter o resultado desejado.  $\square$

## 4 A equação integrodiferencial não-homogênea

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução para o problema de valor inicial

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t > 0, \quad (4.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (4.2)$$

onde  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  é um operador linear fechado e densamente definido em um espaço de Banach  $(X, |\cdot|)$ ,  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  é uma família de operadores lineares fechados em  $X$  com domínio  $D(B(t))$  tal que  $D(B(t)) \supset D(A)$  para todo  $t \geq 0$ ,  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  é uma função contínua e  $u_0 \in X$ .

Com relação ao conceito de solução para o sistema (4.1)-(4.2), vamos considerar a definição a seguir.

**Definição 4.1.** *Uma função  $u : [0, a] \rightarrow X$  é dita solução de (4.1)-(4.2) em  $J = [0, a]$  se:*

- (i) a função  $u(\cdot)$  é continuamente diferenciável em  $J$ ;
- (ii)  $u(t) \in D(A)$  para todo  $t \in J$ ;
- (iii) a função  $Au(\cdot)$  é contínua em  $J$ ;
- (iv) as equações (4.1)-(4.2) são satisfeitas em  $J$ .

Além disso, assumiremos que a família  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  satisfaz a seguinte condição:

**(H<sub>0</sub>)**  $D(B(t)) \supset D(A)$  para todo  $t \geq 0$ , as funções  $t \mapsto B(t)x$  são fortemente mensuráveis para  $x \in D(A)$  e existe  $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$  tal que  $|B(t)x| \leq b(t)(|x| + |Ax|)$  para todo  $x \in D(A)$ , e quase sempre para  $t \geq 0$ .

Vamos considerar também o espaço  $(Y, |\cdot|_Y) = D(A)$  munido da norma do gráfico, isto é,  $|x|_Y = |x| + |Ax|$  para  $x \in D(A)$ . Assim,  $Y$  é um espaço de Banach.

### 4.1 Operadores resolventes

Neste capítulo, nosso objetivo é estudar o problema de existência de solução para (4.1)-(4.2) no sentido de soluções fracas. Para isso, faremos uso de uma família de

operadores lineares, associados à equação (4.1), a qual chamamos de operador resolvente e definimos a seguir.

**Definição 4.2.** *Uma família de operadores lineares  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é chamada operador resolvente para (4.1) se:*

(S1) *Para todo  $x \in X$ ,  $t \mapsto S(t)x$  é contínua em  $\mathbb{R}_+$  e  $S(0) = I$ , onde  $I$  é o operador identidade em  $X$ ;*

(S2)  *$S(t)D(A) \subset D(A)$  para todo  $t \geq 0$ ,  $t \mapsto AS(t)x$  é contínua e  $t \mapsto S(t)x$  é continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}_+$ , para todo  $x \in D(A)$ ;*

(S3) *Para todo  $x \in D(A)$  e  $t \geq 0$  as equações resolventes são satisfeitas, isto é,*

$$S'(t)x = AS(t)x + \int_0^t B(t-s)S(s)x ds, \quad (4.3)$$

$$S'(t)x = S(t)Ax + \int_0^t S(t-s)B(s)x ds. \quad (4.4)$$

Primeiramente, mostraremos que existe apenas um operador resolvente para (4.1).

**Teorema 4.3.** *Existe apenas um operador resolvente para (4.1).*

*Demonstração.* Suponha que  $\{S_1(t)\}_{t \geq 0}$  e  $\{S_2(t)\}_{t \geq 0}$  são operadores resolventes de (4.1) e seja  $x \in D(A)$ . Então, das equações resolventes (4.3) e (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} [S_1(t) - S_2(t)]x &= \int_0^t \frac{d}{ds} [S_2(t-s)S_1(s)]x ds \\ &= \int_0^t [S_2(t-s)S_1'(s)x - S_2'(t-s)S_1(s)x] ds \\ &= \int_0^t S_2(t-s)AS_1(s)x ds + \int_0^t \int_0^s S_2(t-s)B(s-r)S_1(r)x dr ds \\ &\quad - \int_0^t S_2(t-s)AS_1(s)x ds - \int_0^t \int_0^{t-s} S_2(t-s-r)B(r)S_1(s)x dr ds \\ &= \int_0^t \int_0^s S_2(t-s)B(s-r)S_1(r)x dr ds \\ &\quad - \int_0^t \int_0^{t-s} S_2(t-s-r)B(r)S_1(s)x dr ds. \end{aligned}$$

Agora, visto que  $t \mapsto S_1(t)y$  e  $t \mapsto S_2(t)y$  são contínuas em  $\mathbb{R}_+$  para todo  $y \in X$  e, por  $(\mathbf{H}_0)$ ,  $t \mapsto B(t)y$  é mensurável para todo  $y \in D(A)$ , concluímos que a função  $S_2(t-s)B(s-r)S_1(r)x$  é integrável e assim, podemos aplicar o Teorema de Fubini para inverter a ordem de integração em uma das integrais acima. Além disso, fazendo a mudança

de variáveis  $\tau = s + r$ , temos

$$\begin{aligned} [S_1(t) - S_2(t)]x &= \int_0^t \int_r^t S_2(t-s)B(s-r)S_1(r)x ds dr \\ &\quad - \int_0^t \int_s^t S_2(t-\tau)B(\tau-s)S_1(s)x d\tau ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $S_1(t)x = S_2(t)x$ , para todo  $t \geq 0$  e  $x \in D(A)$ . Mas, como  $D(A)$  é denso em  $X$  e  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$  são operadores lineares limitados para todo  $t \geq 0$  fixo, podemos concluir que  $S_1(t)x = S_2(t)x$ , para todo  $x \in X$  e todo  $t \geq 0$ .

Portanto, existe apenas um operador resolvente para (4.1).  $\square$

Outra consequência imediata da existência de um operador resolvente é a fórmula da variação dos parâmetros dada pelo teorema a seguir.

**Teorema 4.4.** *Suponha que a equação integrodiferencial (4.1) admita um operador resolvente  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . Sejam  $u_0 \in X$  e  $f \in C(J, X)$ , onde  $J = [0, a]$ . Então, se  $u(\cdot)$  é uma solução de (4.1)-(4.2) em  $J$ , temos*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in J. \quad (4.5)$$

*Demonstração.* Sejam  $u(\cdot)$  uma solução de (4.1)-(4.2) e  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  o operador resolvente de (4.1). Dessa forma, da Definição 4.1 e da equação resolvente (4.4), aplicando o Teorema de Fubini e fazendo uma mudança de variável, obtemos

$$\begin{aligned} u(t) - S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)f(s)ds &= \int_0^t \left( \frac{d}{ds}[S(t-s)u(s)] - S(t-s)f(s) \right) ds \\ &= \int_0^t [S(t-s)u'(s) - S'(t-s)u(s) - S(t-s)f(s)] ds \\ &= \int_0^t S(t-s) \left[ Au(s) + \int_0^s B(s-r)u(r)dr + f(s) \right] ds - \int_0^t S(t-s)f(s)ds \\ &\quad - \int_0^t S(t-s)Au(s)ds + \int_0^t \int_0^{t-s} S(t-s-r)B(r)u(s)dr ds \\ &= \int_0^t \int_0^s S(t-s)B(s-r)u(r)dr ds - \int_0^t \int_0^{t-s} S(t-s-r)B(r)u(s)dr ds \\ &= \int_0^t \int_r^t S(t-s)B(s-r)u(r)ds dr - \int_0^t \int_s^t S(t-\tau)B(\tau-s)u(s)d\tau ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in J.$$

$\square$

Observe que, nas condições do Teorema 4.4, concluímos que as soluções de (4.1)-(4.2) são únicas. Mais ainda, se  $(u_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são seqüências em  $X$  e  $L^1(J, X)$ , respectivamente, com  $u_0^n \rightarrow u_0$  em  $X$  e  $f_n \rightarrow f$  em  $L^1(J, X)$ , então, supondo que as soluções  $u_n(\cdot)$  de (4.1)-(4.2) com  $u_0^n$  no lugar de  $u_0$  e  $f_n$  no lugar de  $f$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , existam, podemos mostrar que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente para a solução  $u(\cdot)$  de (4.1)-(4.2). De fato, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , pelo Teorema 4.4, temos

$$u_n(t) = S(t)u_0^n + \int_0^t S(t-s)f_n(s)ds, \quad \forall t \in J.$$

Assim, para todo  $t \in J$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} |u(t) - u_n(t)| &= \left| S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds - S(t)u_0^n - \int_0^t S(t-s)f_n(s)ds \right| \\ &\leq |S(t)(u_0 - u_0^n)| + \left| \int_0^t S(t-s)(f(s) - f_n(s))ds \right| \\ &\leq |S(t)|_{\mathcal{L}(X)}|u_0 - u_0^n| + \int_0^t |S(t-s)|_{\mathcal{L}(X)}|f(s) - f_n(s)|ds \\ &\leq C|u_0 - u_0^n| + C|f - f_n|_{L^1(J,X)}, \end{aligned}$$

onde  $C = \sup_{\tau \in J} |S(\tau)|$  (sendo este supremo finito pois, como  $t \mapsto S(t)x$  é contínua para todo  $x \in X$ , temos  $\sup_{t \in J} |S(t)x| < \infty$ , para todo  $x \in X$ , e então, pelo Princípio da limitação uniforme,  $\sup_{\tau \in J} |S(\tau)| < \infty$ ).

Logo, visto que

$$|u(t) - u_n(t)| \leq C(|u_0 - u_0^n| + |f - f_n|_{L^1(J,X)})$$

para todo  $t \in J$ ,  $u_0^n \rightarrow u_0$  em  $X$  e  $f_n \rightarrow f$  em  $L^1(J, X)$ , obtemos que  $|u(t) - u_n(t)| \rightarrow 0$  uniformemente para  $t \in J$ .

Contudo, a função  $u(\cdot)$  definida em (4.5) não será, em geral, uma solução de (4.1)-(4.2). Este fato motiva a seguinte definição.

**Definição 4.5.** *Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  o operador resolvente para (4.1). Uma função  $u : J \rightarrow X$  é dita solução fraca de (4.1)-(4.2) em  $J$  se  $u(\cdot)$  é contínua em  $J$  e*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in J.$$

Desta maneira, pelo que observamos anteriormente, obtemos o corolário a seguir.

**Corolário 4.6.** *Suponha que (4.1) admita um operador resolvente. Então a equação (4.1)-(4.2) possui solução fraca.*

O próximo teorema tem como objetivo encontrar condições para que uma solução fraca seja uma solução de (4.1)-(4.2). Para isso, faremos uso do seguinte lema.

**Lema 4.7.** *Sejam  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  o operador resolvente para (4.1) e  $U(t) = \int_0^t S(s)ds$  para  $t \geq 0$ . Então  $U(t)X \subset D(A)$ ;  $AU(t) \in \mathcal{L}(X)$  para todo  $t \geq 0$  e  $t \mapsto AU(t)x$  é contínua em  $[0, +\infty)$ , para todo  $x \in X$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, mostraremos que  $U(t)D(A) \subset D(A)$ . Para isso, sejam  $x \in D(A)$  e  $y = \int_0^t AS(s)xds$ . Como

$$U(t)x = \int_0^t S(s)xds = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\tau_i)x(t_i - t_{i-1}),$$

onde  $\tau_i \in (t_i, t_{i-1})$  e  $P = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = t\}$  é uma partição de  $[0, t]$ , podemos tomar uma sequência  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $S_n = \sum_{i=1}^n S(\tau_i)x(t_i - t_{i-1})$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_0^t S(s)xds$ . Além disso, pelo fato de  $S(t)x \in D(A)$ , para todo  $t \geq 0$ , segue também que  $s_n \in D(A)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e  $\lim_{n \rightarrow \infty} As_n = \int_0^t AS(s)xds = y$ , visto que  $t \mapsto AS(t)x$  é contínua por **(S2)**.

Logo, como  $A$  é um operador linear fechado, concluímos que  $U(t)x = \int_0^t S(s)xds \in D(A)$  e  $AU(t)x = y = \int_0^t AS(s)xds$ . Dessa forma, obtemos que  $U(t)x \in D(A)$  para todo  $t \geq 0$  e todo  $x \in D(A)$ .

Agora, vamos mostrar que  $AU(t)$  é um operador linear limitado para todo  $t \geq 0$ . Dados  $x \in D(A)$  e  $t \geq 0$ , integrando a equação resolvente (4.3), obtemos

$$\int_0^t S'(s)xds = \int_0^t AS(s)xds + \int_0^t \int_0^s B(s-r)S(r)xdrds,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} S(t)x - x &= S(t)x - S(0)x \\ &= AU(t)x + \int_0^t \int_{t-s}^t B(t-\tau)S(s-t+\tau)x d\tau ds \\ &= AU(t)x + \int_0^t \int_{t-\tau}^t B(t-\tau)S(s-t+\tau)x ds d\tau \\ &= AU(t)x + \int_0^t B(t-\tau) \int_{t-\tau}^t S(s-t+\tau)x ds d\tau \\ &= AU(t)x + \int_0^t B(t-\tau) \int_0^\tau S(r)x dr d\tau. \end{aligned}$$

Logo,

$$AU(t)x = S(t)x - x - \int_0^t B(t-\tau)U(\tau)x d\tau.$$

Considere  $\phi(t) = |U(t)x|_Y = |U(t)x| + |AU(t)x|$  e seja  $a > 0$  tal que  $0 \leq t \leq a$ . Assim, por  $(\mathbf{H}_0)$ , temos

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \left| \int_0^t S(s)x ds \right| + \left| S(t)x - x - \int_0^t B(t-s)U(s)x ds \right| \\ &\leq \int_0^t |S(s)|_{\mathcal{L}(X)}|x| ds + |S(t)x - x| + \int_0^t |B(t-s)U(s)x| ds \\ &\leq \int_0^a \left[ \sup_{0 \leq s \leq a} |S(s)| \right] |x| ds + \left[ \sup_{0 \leq s \leq a} |S(s)| \right] |x| + |x| + \int_0^t b(t-s)\phi(s) ds \\ &\leq (1+a) \left[ \sup_{0 \leq s \leq a} |S(s)| \right] |x| + |x| + \int_0^t b(t-s)\phi(s) ds. \end{aligned}$$

Então, podemos concluir que para todo  $0 \leq t \leq a$ ,

$$\phi(t) \leq C(a) + \int_0^t b(t-s)\phi(s) ds,$$

onde  $C(a) = (1 + (1+a) \left[ \sup_{0 \leq s \leq a} |S(s)| \right]) |x|$ .

Mais ainda, de um caso particular da Desigualdade de Gronwall generalizada (ver apêndice A.2), obtemos

$$\phi(t) \leq C(a)k(t), \quad \forall 0 \leq t \leq a,$$

onde  $k(t) = e^{\int_0^t b(t-s) ds}$ .

Como  $b$  é integrável, existe  $N > 0$  tal que  $k(t) \leq N$ , para todo  $0 \leq t \leq a$ , e então,

$$|AU(t)x| \leq \phi(t) \leq C(a)N = N(1 + (1+a) \left[ \sup_{0 \leq s \leq a} |S(s)| \right]) |x|, \quad \forall x \in D(A),$$

ou seja,  $AU(t)$  é um operador linear limitado em  $D(A)$ .

Consequentemente, visto que  $\overline{D(A)} = X$ ,  $AU(t)$  possui uma extensão limitada para o espaço  $X$  e então, podemos dizer que  $AU(t) \in \mathcal{L}(X)$ , para todo  $t \geq 0$ .

Ainda pela densidade de  $D(A)$ , dado  $x \in X$ , existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $D(A)$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Da definição de  $U(t)$  segue que  $U(t)x_n \rightarrow U(t)x$  quando  $n \rightarrow \infty$  e assim, como  $AU(t) \in \mathcal{L}(X)$ ,  $AU(t)x_n \rightarrow AU(t)x$ . Logo, pelo fato de  $U(t)x_n \in D(A)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e  $A$  ser fechado, concluímos que  $U(t)x \in D(A)$ .

Portanto, segue que  $U(t)x \subset D(A)$  e  $AU(t) \in \mathcal{L}(X)$ , para todo  $t \geq 0$  e  $x \in X$ .

Mostremos ainda que a função  $t \mapsto AU(t)x$  é contínua em  $[0, \infty)$  para todo  $x \in X$  fixo. Para isso, observe que a função  $t \mapsto U(t)x$  é contínua para todo  $x \in X$ . De fato, para



$x \in X$ ,  $t, s \in [0, \infty)$  tais que  $t, s \in [0, a)$  para algum  $a > 0$ , temos

$$\begin{aligned} |U(t)x - U(s)x| &= \left| \int_0^t S(\tau)x d\tau - \int_0^s S(\tau)x d\tau \right| \\ &\leq \int_s^t |S(\tau)x| d\tau \\ &\leq \int_s^t \left( \sup_{0 \leq \tau \leq a} |S(\tau)| \right) |x| d\tau \\ &\leq \left( \sup_{0 \leq \tau \leq a} |S(\tau)| \right) |x| |t - s| \end{aligned}$$

e assim, se  $s \rightarrow t$ , então  $U(s)x \rightarrow U(t)x$ .

Agora, para  $x \in D(A)$ ,  $AU(t)x = \int_0^t AS(t)x ds$ , visto que  $A$  é fechado. Dessa forma, segue que  $t \mapsto AU(t)x$  é contínua para todo  $x \in D(A)$ . Por fim, usando novamente a densidade de  $D(A)$  em  $X$ , podemos concluir que  $t \mapsto AU(t)x$  é contínua para todo  $x \in X$ .  $\square$

O próximo passo é mostrar que a solução fraca, dada no Teorema 4.4, é solução de (4.1) – (4.2) mediante algumas hipóteses sobre a função  $f$ . Consideraremos dois casos:  $f \in C(J, X) \cap L^1(J, Y)$  e  $f \in W^{1,1}(J, X)$ , em que  $W^{1,1}(J, X)$  representa o espaço vetorial das funções absolutamente contínuas e diferenciáveis quase sempre em  $J$ , com  $f' \in L^1(J, X)$  e  $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s) ds$ , conceitos que serão definidos a seguir.

**Definição 4.8.** *Uma função  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow Z$ , onde  $Z$  é um espaço vetorial, é dita absolutamente contínua se, para cada  $\epsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que, para cada coleção finita  $([a_i, b_i])_{i=0}^k$  de subintervalos disjuntos de  $[a, b]$ , com  $\sum_{i=0}^k (b_i - a_i) < \delta$ , temos*

$$\sum_{i=0}^k |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Denotaremos o espaço das funções absolutamente contínuas de  $[a, b]$  em  $Z$  por  $AC([a, b], Z)$ .

Consideremos também o subespaço  $W^{1,1}([a, b], Z)$  de  $AC([a, b], Z)$  formado pelas funções  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow Z$  absolutamente contínuas tais que  $f$  é diferenciável quase sempre em  $[a, b]$ ,  $f' \in L^1([a, b], Z)$  e  $f(t) = f(0) + \int_a^t f'(s) ds$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Além disso, utilizamos em  $W^{1,1}([a, b], Z)$  a seguinte norma

$$|f|_{W^{1,1}([a,b],Z)} = |f(a)| + \int_a^b |f'(s)| ds = |f(a)| + |f'|_{L^1([a,b],Z)}.$$

**Teorema 4.9.** *Suponha que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é o operador resolvente para (4.1). Sejam  $u_0 \in D(A)$  e  $f \in C(J, X) \cap L^1(J, Y)$  ou  $f \in W^{1,1}(J, X)$ . Então a função  $u(\cdot)$  definida no Teorema 4.4 é solução de (4.1) – (4.2).*

*Demonstração.* Observe inicialmente que a função  $t \mapsto S(t)u_0$  é solução da versão homogênea de (4.1) – (4.2) já que  $u_0 \in D(A)$  e vale a equação resolvente (4.3). Assim, podemos assumir  $u_0 = 0$  nesta demonstração.

Além disso, temos que analisar duas situações distintas para a função  $f$ , isto é,  $f \in W^{1,1}(J, X)$  ou  $f \in C(J, X) \cap L^1(J, Y)$ . Porém, antes disso, vamos considerar o caso em que  $f \in C^1(J, Y)$ . Mostremos que  $u(\cdot)$  é solução de (4.1) – (4.2), quando  $u_0 = 0$ . Como  $f \in C^1(J, Y)$  a função  $t \mapsto \int_0^t AS(t-s)f(s)ds$  está bem definida, pois pela propriedade **(S2)** temos  $S(t-s)f(s) \in D(A)$  e  $s \mapsto AS(t-s)f(s)$  contínua para  $s \in [0, t]$ ,  $t \geq 0$ . Mais ainda, a função  $t \mapsto \int_0^t AS(t-s)f(s)ds$  é contínua. Assim, como  $u(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$ ,  $u(t)$  pode ser visto como limite de uma sequência em  $D(A)$ , isto é,  $u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t)$ , com  $s_n(t) \in D(A)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então

$$\int_0^t AS(t-s)f(s)ds = \lim_{n \rightarrow \infty} As_n(t)$$

e, pelo fato de  $A$  ser fechado, concluímos que  $u(t) \in D(A)$  e

$$Au(t) = \int_0^t AS(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in J,$$

garantindo também que  $Au(\cdot)$  é contínua.

Agora, derivando  $u(\cdot)$ , temos

$$u'(t) = \int_0^t S'(t-s)f(s)ds + f(t), \quad t \in J.$$

Desse modo, como  $f \in C^1(J, Y)$  e, por **(S2)**,  $t \mapsto S'(t)x$  é contínua para todo  $x \in D(A)$ , segue que  $u'(\cdot)$  é contínua e então,  $u \in C^1(J, X)$ . Podemos então concluir que  $u \in C^1(J, Y)$ .

Por outro lado, da equação resolvente (4.3), obtemos

$$\begin{aligned} u'(t) &= \int_0^t S'(t-s)f(s)ds + f(t) \\ &= \int_0^t AS(t-s)f(s)ds + \int_0^t \int_0^{t-s} B(t-s-r)S(r)f(s)drds + f(t) \\ &= A \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t \int_s^t B(t-\tau)S(\tau-s)f(s)d\tau ds + f(t) \\ &= Au(t) + \int_0^t B(t-\tau) \int_0^\tau S(\tau-s)f(s)dsd\tau + f(t) \\ &= Au(t) + \int_0^t B(t-\tau)u(\tau)d\tau + f(t), \quad \forall t \in J. \end{aligned}$$

Portanto, se  $f \in C^1(J, Y)$ ,  $u(\cdot)$  é solução de (4.1) – (4.2), quando  $u_0 = 0$ .

Agora, ainda considerando  $f \in C^1(J, Y)$ , mostremos que as seguintes estimativas para  $u(\cdot)$  são válidas:

$$|u|_{C(J,Y)} + |u'|_{C(J,X)} \leq C(|f|_{L^1(J,Y)} + |f|_{C(J,X)}), \quad (4.6)$$

$$|u|_{C(J,Y)} + |u'|_{C(J,X)} \leq \tilde{C}(|f'|_{L^1(J,X)} + |f|_{C(J,X)}), \quad (4.7)$$

onde  $C$  e  $\tilde{C}$  são constantes positivas.

Para isso, faremos uso de uma identidade e quatro estimativas, que calcularemos separadamente.

(1) Usando a notação do lema anterior, obtemos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t S(t-s)f(s)ds = \int_0^t S(\tau)f(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t S(\tau)f(t-\tau)d\tau - \int_0^t S(\tau)f(0)d\tau + \int_0^t S(\tau)f(0)d\tau \\ &= \int_0^t S(\tau) \int_0^{t-\tau} f'(s)dsd\tau + U(t)f(0) \\ &= \int_0^t \int_0^{t-\tau} S(\tau)f'(s)dsd\tau + U(t)f(0) \\ &= \int_0^t \int_0^{t-s} S(\tau)f'(s)d\tau ds + U(t)f(0) \\ &= \int_0^t U(t-s)f'(s)ds + U(t)f(0), \end{aligned}$$

isto é,  $u(t) = U(t)f(0) + \int_0^t U(t-s)f'(s)ds$ .

(2) Como  $S(t)$  é operador linear limitado para todo  $t \geq 0$  e  $f \in C^1(J, Y)$ , então

$$|u(t)|_Y = \left| \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right|_Y \leq \int_0^t |S(t-s)|_{\mathcal{L}(Y)} |f(s)|_Y ds \leq C_1 |f|_{L^1(J,Y)},$$

onde  $C_1 = \sup_{\tau \in J} |S(\tau)|_{\mathcal{L}(Y)}$  (sendo este supremo finito por causa da continuidade da função  $t \mapsto S(t)x$ , para todo  $x \in X$ , e do Princípio da limitação uniforme).

(3) Pelo lema anterior e pela identidade (1) temos

$$\begin{aligned} |u(t)|_Y &= |u(t)| + |Au(t)| \\ &\leq |u|_{C(J,X)} + |AU(t)f(0)| + \left| \int_0^t AU(t-s)f'(s)ds \right| \\ &\leq |u|_{C(J,X)} + C_2 |f(0)| + \int_0^t |AU(t-s)f'(s)| ds \\ &\leq |u|_{C(J,X)} + C_2 |f|_{C(J,X)} + \int_0^t C_2 |f'(s)| ds \\ &\leq |u|_{C(J,X)} + C_2 |f|_{C(J,X)} + C_2 |f'|_{L^1(J,X)}, \end{aligned}$$

onde  $C_2 = \sup_{\tau \in J} |AU(\tau)|$  (sendo este supremo finito por causa da continuidade da função  $t \mapsto AU(t)x$ , para todo  $x \in X$ , e do Princípio da limitação uniforme).

(4) Pela hipótese  $(\mathbf{H}_0)$ ,  $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  e assim, obtemos

$$\begin{aligned}
 |u'(t)| &= \left| Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + f(t) \right| \\
 &\leq |Au(t)| + \int_0^t |B(t-s)u(s)|ds + |f(t)| \\
 &\leq |u(t)|_Y + \int_0^t b(t-s)|u(s)|_Y ds + |f|_{C(J,X)} \\
 &\leq |u|_{C(J,Y)} + |u|_{C(J,Y)} \int_0^t b(t-s)ds + |f|_{C(J,X)} \\
 &\leq C_3|u|_{C(J,Y)} + |f|_{C(J,X)},
 \end{aligned}$$

onde  $C_3 = 1 + \int_0^a b(\tau)d\tau$ .

(5) Por  $(\mathbf{S1})$ ,  $t \mapsto S(t)x$  é contínua para todo  $x \in X$  e então,

$$|u(t)| = \left| \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right| \leq \int_0^t |S(t-s)|_{\mathcal{L}(X)}|f(s)|ds \leq C_4|f|_{C(J,X)},$$

onde  $C_4 = a \sup_{\tau \in J} |S(\tau)|_{\mathcal{L}(X)}$ .

Agora, para demonstrarmos a desigualdade (4.6), utilizamos as estimativas (4) e (2) do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 |u|_{C(J,Y)} + |u'|_{C(J,X)} &\leq |u|_{C(J,Y)} + C_3|u|_{C(J,Y)} + |f|_{C(J,X)} \\
 &\leq C_5|u|_{C(J,Y)} + |f|_{C(J,X)} \\
 &\leq C_5(C_1|f|_{L^1(J,Y)}) + |f|_{C(J,X)} \\
 &\leq C(|f|_{L^1(J,Y)} + |f|_{C(J,X)}),
 \end{aligned}$$

com  $C_5 = 1 + C_3$ .

Já a desigualdade (4.7) segue de (4), (3) e (5), isto é,

$$\begin{aligned}
 |u|_{C(J,Y)} + |u'|_{C(J,X)} &\leq |u|_{C(J,Y)} + C_3|u|_{C(J,Y)} + |f|_{C(J,X)} \\
 &\leq C_5|u|_{C(J,Y)} + |f|_{C(J,X)} \\
 &\leq C_5(|u|_{C(J,X)} + C_2|f|_{C(J,X)} + C_2|f'|_{L^1(J,X)}) + |f|_{C(J,X)} \\
 &\leq C_5(C_4|f|_{C(J,X)} + C_2|f|_{C(J,X)} + C_2|f'|_{L^1(J,X)}) + |f|_{C(J,X)} \\
 &\leq \tilde{C}(|f'|_{L^1(J,X)} + |f|_{C(J,X)}).
 \end{aligned}$$

Finalmente podemos considerar o caso geral. Considere  $f \in C(J, X) \cap L^1(J, Y)$  ou  $f \in W^{1,1}(J, X)$ . Então, existe uma sequência  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $C^1(J, Y)$  tal que  $f_n \rightarrow f$  em  $C(J, X)$  e em  $L^1(J, Y)$  para o primeiro caso, e  $f_n \rightarrow f$  em  $W^{1,1}(J, X)$  para o segundo caso. Observe que, nesta última situação temos  $f'_n \rightarrow f'$  em  $L^1(J, X)$ .

Logo, pelo que fizemos inicialmente, as funções

$$u_n(t) = \int_0^t S(t-s)f_n(s)ds, t \in J, n \in \mathbb{N},$$

são soluções de (4.1)–(4.2), quando  $u_0 = 0$ , e então, das estimativas (4.6) e (4.7) concluimos que:

(i)  $u_n \rightarrow u$  em  $C(J, X)$ .

De fato, suponha primeiramente que  $f \in C(J, X) \cap L^1(J, Y)$ . Para  $t \in J$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} |u(t) - u_n(t)| &\leq \int_0^t |S(t-s)|_{\mathcal{L}(X)} |f(s) - f_n(s)| ds \\ &\leq \int_0^t C |f_n(s) - f(s)|_Y \\ &\leq C |f_n - f|_{L^1(J, Y)}, \end{aligned}$$

onde  $C = \sup_{\tau \in J} |S(\tau)|_{\mathcal{L}(X)}$ .

Assim,  $|u - u_n|_{C(J, X)} \leq C |f_n - f|_{L^1(J, X)}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e, quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos  $u_n \rightarrow u$  em  $C(J, X)$ .

Para o caso em que  $f \in W^{1,1}$ , se  $t \in J$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} |u(t) - u_n(t)| &\leq \int_0^t |S(t-s)|_{\mathcal{L}(X)} |f(s) - f_n(s)| ds \\ &= \int_0^t |S(t-s)|_{\mathcal{L}(X)} \left| f(0) - \int_0^s f'(\tau) d\tau - f_n(0) + \int_0^s f'_n(\tau) d\tau \right| ds \\ &\leq \int_0^t |S(t-s)|_{\mathcal{L}(X)} |f(0) - f_n(0)| ds \\ &\quad + \int_0^t |S(t-s)|_{\mathcal{L}(X)} \left( \int_0^s |f'(\tau) - f'_n(\tau)| d\tau \right) ds \\ &\leq C \int_0^t |f(0) - f_n(0)| ds + C \int_0^t \int_0^s |f'(\tau) - f'_n(\tau)| d\tau ds \\ &\leq Ca |f(0) - f_n(0)| + C \int_0^t |f' - f'_n|_{L^1(J, X)} ds \\ &\leq Ca (|f(0) - f_n(0)| + |f' - f'_n|_{L^1(J, X)}) \\ &= Ca |f - f_n|_{W^{1,1}(J, X)}, \end{aligned}$$

onde  $C = \sup_{\tau \in J} |S(\tau)|_{\mathcal{L}(X)}$ .

Assim,  $|u - u_n|_{C(J, X)} \leq Ca |f - f_n|_{W^{1,1}(J, X)}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o que implica que  $u_n \rightarrow u$  em  $C(J, X)$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

(ii)  $u'_n \rightarrow u'$  em  $C(J, X)$ .

Isso ocorre pois, se  $f \in C(J, X) \cap L^1(J, Y)$ , da desigualdade (4.6) tem-se

$$|u_n - u_m|_{C(J, Y)} + |u'_n - u'_m|_{C(J, X)} \leq C(|f_n - f_m|_{L^1(J, Y)} + |f_n - f_m|_{C(J, X)}),$$

para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Como  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge em  $C(J, X)$  e em  $L^1(J, Y)$ , segue que esta sequência é uma sequência de Cauchy em ambos os espaços e então,  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $C(J, X)$ .

Logo, visto que  $C(J, X)$  é um espaço de Banach, existe  $w \in C(J, X)$  tal que  $u'_n \rightarrow w$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , em  $C(J, X)$ . Por outro lado, como  $u_n \rightarrow u$  em  $C(J, X)$  e o operador derivada é fechado, obtemos que  $u \in C(J, X)$  e  $w = u'$ .

Portanto,  $u'_n \rightarrow u$  em  $C(J, X)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Consideremos agora  $f \in W^{1,1}(J, X)$ . Neste caso, da desigualdade (4.7), tem-se

$$|u_n - u_m|_{C(J, Y)} + |u'_n - u'_m|_{C(J, X)} \leq \tilde{C}(|f'_n - f'_m|_{L^1(J, X)} + |f_n - f_m|_{C(J, X)}).$$

Como  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge em  $W^{1,1}(J, X)$ , vimos que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, em particular, em  $L^1(J, Y)$ . Além disso, para  $t \in J$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} |f(t) - f_n(t)| &= \left| f(0) + \int_0^t f'(s) ds - f_n(0) + \int_0^t f'_n(s) ds \right| \\ &\leq |f(0) - f_n(0)| + \int_0^t |f'(s) - f'_n(s)| ds \\ &\leq |f(0) - f_n(0)| + |f'(s) - f'_n(s)|_{L^1(J, X)} \\ &= |f - f_n|_{W^{1,1}(J, X)}, \end{aligned}$$

implicando que  $|f - f_n|_{C(J, X)} \leq |f - f_n|_{W^{1,1}(J, X)}$ .

Consequentemente, segue que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente em  $C(J, X)$  e então, esta sequência é uma sequência de Cauchy em  $C(J, X)$  e  $L^1(J, X)$ . Desse modo, da desigualdade anterior, podemos dizer que  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $C(J, X)$ . Logo, procedendo como no caso anterior, obtemos que  $u'_n \rightarrow u'$  em  $C(J, X)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

(iii)  $Au_n \rightarrow Au$  em  $C(J, X)$ .

Para provarmos esta afirmação note, primeiramente, que, ao proceder como no caso (ii), obtemos a convergência de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $C(J, Y)$ . Assim, visto que

$$|Au_n - Au_m|_{C(J, X)} \leq |u_n - u_m|_{C(J, Y)}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

concluimos que  $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $C(J, X)$  e então, existe  $v \in C(J, X)$  tal que  $Au_n \rightarrow v$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Logo, como  $u_n \rightarrow u$  em  $C(J, X)$  e  $A$  é um operador linear fechado, obtemos que  $v = Au$  e então,  $Au_n \rightarrow Au$  em  $C(J, X)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Finalmente, como  $u_n(\cdot)$  é solução de (4.1) – (4.2), quando  $u_0 = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$u_n'(t) = Au_n(t) + \int_0^t B(t-s)u_n(s)ds + f_n(t), \quad \forall t \in J,$$

e então, das convergências em (i), (ii), (iii), segue que  $u(\cdot)$  satisfaz todas as condições da Definição 4.1 e portanto,  $u(\cdot)$  é solução de (4.1) – (4.2).  $\square$

**Corolário 4.10.** *Suponha que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é o operador resolvente para (4.1). Sejam  $f \in C(J, X)$  e  $u_0 = 0$ . Então, a função  $u(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$  é uma solução de (4.1) – (4.2) se, e somente se,  $u(\cdot)$  é continuamente diferenciável, ou, se, e somente se,  $u \in C(J, Y)$ .*

*Demonstração.* Considere as funções  $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ , para  $\varepsilon > 0$ , tais que:  $\rho_\varepsilon(t) \geq 0$  para  $t \geq 0$ ,  $\rho_\varepsilon(t) = 0$  para  $t \geq \varepsilon$  e  $\int_0^\infty \rho_\varepsilon(t)dt = 1$ . Defina as aproximações  $f_\varepsilon \in C^1(J, X)$  por

$$f_\varepsilon(t) = (\rho_\varepsilon * f)(t) = \int_0^t \rho_\varepsilon(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in J.$$

Então, para  $t \in J$ ,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) &= (S * \rho_\varepsilon * f)(t) = \int_0^t S(t-s) \int_0^s \rho_\varepsilon(s-r)f(r)drds \\ &= \int_0^t S(t-s) \int_0^s \rho_\varepsilon(\tau)f(s-\tau)d\tau ds = \int_0^t \int_0^s \rho_\varepsilon(\tau)S(t-s)f(s-\tau)d\tau ds \\ &= \int_0^t \int_\tau^t \rho_\varepsilon(\tau)S(t-s)f(s-\tau)dsd\tau = \int_0^t \rho_\varepsilon(\tau) \int_\tau^t S(t-s)f(s-\tau)dsd\tau \\ &= \int_0^t \rho_\varepsilon(\tau) \int_0^{t-\tau} S(t-\tau-\eta)f(\eta)d\eta d\tau = \int_0^t \rho_\varepsilon(\tau)(S * f)(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \rho_\varepsilon(t-s)(S * f)(s)ds = (\rho_\varepsilon * S * f)(t) = (\rho_\varepsilon * u)(t). \end{aligned}$$

Pela forma como foi definida,  $f_\varepsilon \in C^1(J, X)$  e então pelo teorema anterior, segue que  $u_\varepsilon$  é solução de (4.1) – (4.2) com condição inicial  $u_0 = 0$ . Logo,  $u_\varepsilon'(t) = Au_\varepsilon(t) + (B * u_\varepsilon)(t) + f_\varepsilon(t)$  para todo  $t \in J$ .

Agora, mostraremos que, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $f_\varepsilon \rightarrow f$  em  $C(J, X)$ . Para isso, dado  $\tilde{\varepsilon} > 0$  qualquer, pela continuidade uniforme de  $f$  em  $J$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(t-s) - f(t)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ , para todo  $t \in J$  e  $|s| < \delta$ .

Tomemos ainda  $\varepsilon_0 = \min \left\{ \delta, a, \frac{\tilde{\varepsilon}}{2C} \right\}$ , onde  $C = \left( \sup_{s \in J} \rho_\varepsilon(s) \right) \left( \sup_{\tau \in J} |f(\tau)| \right)$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  e  $t \in J$ . Se  $\varepsilon_0 \leq t \leq a$ , como  $\rho_\varepsilon(s) = 0$  para  $s \geq \varepsilon$ , então

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(t) - f(t)| &= \left| \int_0^t \rho_\varepsilon(t-s)f(s)ds - f(t) \int_0^\infty \rho_\varepsilon(s)ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t \rho_\varepsilon(s)f(t-s)ds - \int_0^\infty \rho_\varepsilon(s)f(t)ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\varepsilon_0} \rho_\varepsilon(s)f(t-s)ds + \int_{\varepsilon_0}^t \rho_\varepsilon(s)f(t-s)ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\varepsilon_0} \rho_\varepsilon(s)f(t)ds - \int_{\varepsilon_0}^\infty \rho_\varepsilon(s)f(t)ds \right| \\ &\leq \int_0^{\varepsilon_0} \rho_\varepsilon(s)|f(t-s) - f(t)|ds \\ &\leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \int_0^\infty \rho_\varepsilon(s)ds \\ &= \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} < \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

No caso em que  $0 \leq t < \varepsilon_0$ , temos

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(t) - f(t)| &= \left| \int_0^{\varepsilon_0} \rho_\varepsilon(s)f(t-s)ds - \int_t^{\varepsilon_0} \rho_\varepsilon(s)f(t-s)ds - \int_0^{\varepsilon_0} \rho_\varepsilon(s)f(t)ds \right| \\ &\leq \int_0^{\varepsilon_0} \rho_\varepsilon(s)|f(t-s) - f(t)|ds + \int_t^{\varepsilon_0} \rho_\varepsilon(s)|f(t-s)|ds \\ &\leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \int_0^\infty \rho_\varepsilon(s)ds + C(\varepsilon_0 - t) \\ &< \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + C\varepsilon_0 \\ &\leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + C \frac{\tilde{\varepsilon}}{2C} = \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dessa forma, se  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , então  $|f_\varepsilon(t) - f(t)| < \tilde{\varepsilon}$  qualquer que seja  $t \in J$ . Portanto,  $|f_\varepsilon - f|_{C(J,X)} < \tilde{\varepsilon}$ , se  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , ou seja,  $f_\varepsilon \rightarrow f$  em  $C(J, X)$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

A seguir, vamos dividir esta demonstração em dois casos:

(1) Suponha que  $u \in C^1(J, X)$ . Então, como  $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$ ,  $u'_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u'$ , pois

$$u'_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}(\rho_\varepsilon * u)(t) = \left( \rho_\varepsilon * \frac{du}{dt} \right)(t), \quad \forall t \in J,$$

e  $u, u' \in C(J, X)$ , se procedemos de modo análogo a demonstração da convergência de  $f_\varepsilon$  para  $f$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos que  $u_\varepsilon \rightarrow u$  e  $u'_\varepsilon \rightarrow u'$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , em  $C(J, X)$ .



Mostremos ainda que  $Au_\varepsilon \rightarrow Au$  em  $C(J, X)$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Assim, seja  $\phi(t) = |u_\varepsilon(t) - u_\eta(t)|_Y$ , para  $t \in J$  e  $\varepsilon, \eta$  positivos.

Então, para todo  $t \in J$ ,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= |u_\varepsilon(t) - u_\eta(t)| + |Au_\varepsilon(t) - Au_\eta(t)| = \\ &= |u_\varepsilon(t) - u_\eta(t)| + |u'_\varepsilon(t) - (B * u_\varepsilon)(t) - f_\varepsilon(t) - u'_\eta(t) + (B * u_\eta)(t) + f_\eta(t)| \\ &\leq |u_\varepsilon - u_\eta|_{C(J, X)} + |u'_\varepsilon - u'_\eta|_{C(J, X)} + |f_\eta - f_\varepsilon|_{C(J, X)} + |(B * u_\eta)(t) - (B * u_\varepsilon)(t)| \\ &\leq C(\varepsilon, \eta) + \int_0^t |B(t-s)(u_\varepsilon(s) - u_\eta(s))| ds \\ &= C(\varepsilon, \eta) + \int_0^t b(t-s)\phi(s) ds, \end{aligned}$$

onde  $C(\varepsilon, \eta) = |u_\varepsilon - u_\eta|_{C(J, X)} + |u'_\varepsilon - u'_\eta|_{C(J, X)} + |f_\eta - f_\varepsilon|_{C(J, X)}$ .

Logo, pela Desigualdade generalizada de Gronwall, obtemos

$$\phi(t) \leq C(\varepsilon, \eta)k(t), \quad \text{para todo } t \in J,$$

onde  $k(t) = \exp(\int_0^t b(t-s)ds)$ . Mais ainda, como  $t \in J = [0, a]$ , temos  $\phi(t) \leq C(\varepsilon, \eta)k(a)$  para todo  $t \in J$ . Desse modo, como  $C(\varepsilon, \eta) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\eta \rightarrow 0$ , segue que  $(Au_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  é convergente em  $C(J, X)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ou seja, existe  $v \in C(J, X)$  tal que  $Au_\varepsilon \rightarrow v$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Por outro lado, como  $u_\varepsilon \rightarrow u$  e  $A$  é um operador linear fechado, temos  $u(t) \in D(A)$  e  $Au = v$ , isto é,  $Au_\varepsilon \rightarrow Au$  em  $C(J, X)$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Com isso, segue que  $u \in C^1(J, X)$ ,  $u(t) \in D(A)$  para todo  $t \in J$ ,  $Au \in C(J, X)$ ,  $u(0) = 0$  e, para todo  $t \in J$ ,

$$u'(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u'_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [Au_\varepsilon(t) + (B * u_\varepsilon)(t) + f_\varepsilon(t)] = Au(t) + (B * u)(t) + f(t),$$

para todo  $t \in J$ .

Portanto,  $u$  é solução de (4.1) – (4.2) com  $u_0 = 0$ .

Reciprocamente, se  $u(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$ ,  $t \in J$ , é solução de (4.1) – (4.2), então, da Definição 4.1, segue que  $u \in C(J, X)$ .

- (2) Suponha agora que  $u \in C(J, Y)$ . Assim,  $u(t) \in D(A)$  para todo  $t \in J$ . Além disso, visto que  $u_\varepsilon$  é solução de (4.1) – (4.2),  $u_\varepsilon \in C(J, Y)$  e então, procedendo como nos casos anteriores, podemos mostrar que  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $C(J, Y)$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Dessa forma,  $|u_\varepsilon - u_\eta|_{C(J,X)}$  e  $|Au_\varepsilon - Au_\eta|_{C(J,X)}$  convergem para zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\eta \rightarrow 0$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} |u'_\varepsilon(t) - u'_\eta(t)| &= |Au_\varepsilon(t) + (B * u_\varepsilon)(t) + f_\varepsilon(t) - Au_\eta(t) + (B * u_\eta)(t) + f_\eta(t)| \\ &\leq |Au_\varepsilon - Au_\eta|_{C(J,X)} + \int_0^t |B(t-s)[u_\varepsilon(s) - u_\eta(s)]| ds + |f_\varepsilon - f_\eta|_{C(J,X)} \\ &\leq |Au_\varepsilon - Au_\eta|_{C(J,X)} + \int_0^t b(t-s)|u_\varepsilon(s) - u_\eta(s)|_Y ds + |f_\varepsilon - f_\eta|_{C(J,X)} \\ &\leq |Au_\varepsilon - Au_\eta|_{C(J,X)} + |u_\varepsilon - u_\eta|_{C(J,Y)} \int_0^a b(\tau) d\tau + |f_\varepsilon - f_\eta|_{C(J,X)}, \end{aligned}$$

para todo  $t \in J$ ,  $\varepsilon, \eta$  positivos.

Assim,  $|u'_\varepsilon - u'_\eta|_{C(J,X)} \leq |Au_\varepsilon - Au_\eta|_{C(J,X)} + |u_\varepsilon - u_\eta|_{C(J,Y)} (\int_0^a b(\tau) d\tau) + |f_\varepsilon - f_\eta|_{C(J,X)}$ , com o lado direito desta desigualdade convergindo para zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\eta \rightarrow 0$ .

Isso implica que  $(u'_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  é convergente em  $C(J, X)$ , isto é, existe  $w \in C(J, X)$  tal que  $u'_\varepsilon \rightarrow w$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Logo, visto que o operador derivada é fechado e  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $C(J, X)$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , concluímos que  $w = u'$ , ou seja,  $u'_\varepsilon \rightarrow u'$  em  $C(J, X)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Portanto, assim como no caso anterior, a função  $u$  satisfaz as condições para ser solução de (4.1) – (4.2), com  $u_0 = 0$ .

Reciprocamente, se  $u$  é solução de (4.1) – (4.2) então, da Definição 4.1 obtemos que  $u \in C(J, Y)$ .

□

**Definição 4.11.** A equação

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds \tag{4.8}$$

é dita bem posta se, para cada  $x \in D(A)$ , existe uma única solução  $u(\cdot, x)$  de (4.8) em  $\mathbb{R}^+$ , com  $u(0, x) = x$ , e para toda sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $D(A)$  tal que  $x_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $u(t, x_n) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente em intervalos limitados.

**Teorema 4.12.** A equação de (4.1) admite um operador resolvente  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  se, e somente se, a equação (4.8) é bem posta.

*Demonstração.* Suponha que a equação de (4.1) admite um operador resolvente  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . Dado  $x \in D(A)$ , pelos teoremas 4.4 e 4.9, com  $f \equiv 0$  e  $u_0 = x$ , obtemos que  $u(t) = S(t)x$ ,  $t \geq 0$ , é a única solução de (4.8) com  $u_0 = S(0)x = x$ .

Além disso, se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $D(A)$  tal que  $x_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , então  $u_n(t) = S(t)x_n$  é solução de (4.8), com  $u_n(0) = x_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Mais ainda,

para  $t \in I$ , onde  $I$  é um intervalo limitado,

$$|u_n(t) - 0| = |S(t)x_n| \leq |S(t)|_{\mathcal{L}(X)}|x_n| \leq \left( \sup_{t \in I} |S(t)|_{\mathcal{L}(X)} \right) |x_n|,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e assim, como  $x_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos que  $u_n(t) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , sendo essa convergência uniforme em qualquer intervalo limitado  $I$ .

Portanto, a equação (4.8) é bem posta.

Reciprocamente, suponha que a equação (4.8) é bem posta. Dado  $x \in D(A)$ , seja  $u(\cdot, x)$  solução de (4.8) com valor inicial  $x$ , isto é,  $u(0, x) = x$ . Defina a família de operadores  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  por  $S(t)x = u(t, x)$  para todo  $x \in D(A)$  e  $t \geq 0$ .

Mostraremos a seguir que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é um operador resolvente para (4.1). Faremos isso por etapas.

(1)  $S(t)$  é linear em  $D(A)$ , para todo  $t \geq 0$ .

De fato, considere  $x$  e  $y$  em  $D(A)$  e  $\lambda$  um escalar. Assim,  $u(\cdot, \lambda x + y)$  é solução de (4.8) com  $u(0, \lambda x + y) = \lambda x + y$ . Mas,  $\lambda u(\cdot, x)$  e  $u(\cdot, y)$  são soluções de (4.8) com valores iniciais,  $\lambda u(0, x) = \lambda x$  e  $u(0, y) = y$ , respectivamente. Mais ainda, pelo fato de (4.8) ser uma equação homogênea,  $\lambda u(\cdot, x) + u(\cdot, y)$  também é solução de (4.8) e  $\lambda u(0, x) + u(0, y) = \lambda x + y$ , isto é, sua condição inicial é  $\lambda x + y$ . Logo, como (4.8) é bem posta, a solução de (4.8) com condição inicial  $\lambda x + y$  deve ser única. Portanto,

$$S(t)(\lambda x + y) = u(t, \lambda x + y) = \lambda u(t, x) + u(t, y) = \lambda S(t)x + S(t)y,$$

garantindo a linearidade de  $S(t)$  em  $D(A)$ .

(2)  $S(t) : D(A) \rightarrow X$  é uniformemente limitado em  $J = [0, a]$ .

Para provarmos este fato, suponha que  $S(t)$  não é limitado em  $J$ . Então, existem seqüências  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $D(A)$  e  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $J$  tais que,  $|y_n| = 1$  e  $|S(t_n)y_n| \geq n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Considere agora  $x_n = n^{-1}y_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Assim,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  e

$$|S(t_n)x_n| = |S(t_n)(n^{-1}y_n)| = n^{-1}|S(t_n)y_n| \geq n^{-1}n = 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, a função  $u_n(t) = S(t)x_n$  é solução da equação (4.8) com  $u_n(0) = x_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, pelo fato de (4.8) ser bem posta e  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , obtemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t)x_n = 0$ , uniformemente para  $t \in J$ , o que é um absurdo, pois  $t_n \in J$  e  $|S(t_n)x_n| \geq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Portanto, segue que  $|S(t)| \leq M$ , para todo  $t \in J$ , e algum  $M > 0$ .

Observe, em particular que, para todo  $x \in D(A)$ ,  $x \neq 0$ , temos

$$\left| S(t) \frac{x}{|x|} \right| \leq \sup_{y \in D(A); |y|=1} |S(t)y| = |S(t)| \leq M,$$

ou seja,  $|S(t)x| \leq M|x|$ , para todo  $x \in D(A)$ , garantindo que  $S(t)$  é um operador linear limitado em  $D(A)$  para todo  $t \geq 0$ .

- (3) Como consequência das propriedades provadas nos itens (1) e (2) e pelo fato de  $\overline{D(A)} = X$ , segue que o operador  $S(t)$  possui uma extensão limitada em  $X$  e assim, temos  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ , para todo  $t \geq 0$ .
- (4) Para todo  $x \in X$ , a função  $t \mapsto S(t)x$  é contínua em  $\mathbb{R}_+$ .

De fato, se  $x \in D(A)$ , então  $S(t)x = u(t, x)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ , com  $u(\cdot, x)$  contínua em  $\mathbb{R}_+$  já que é solução de (4.8).

Se  $x \in X$ , então existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $D(A)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Além disso, para  $t \geq 0$  e  $h \in \mathbb{R}$  tal que  $t, t+h \in [0, a]$ , para algum  $a > 0$ , temos

$$\begin{aligned} |S(t+h)x - S(t)x| &\leq |S(t+h)x - S(t+h)x_n| + |S(t+h)x_n - S(t)x_n| \\ &\quad + |S(t)x_n - S(t)x| \\ &\leq M|x - x_n| + |S(t+h)x_n - S(t)x_n| + M|x_n - x| \\ &\leq 2M|x - x_n| + |S(t+h)x_n - S(t)x_n|, \end{aligned}$$

onde  $M$  é a constante obtida no item (2) que limita  $|S(t)|$  uniformemente em  $[0, a]$ .

Desse modo, tomando  $n$  fixo suficientemente grande, obtemos, da continuidade da função  $t \mapsto S(t)x_n$ , a continuidade de  $t \mapsto S(t)x$ .

- (5)  $S(0) = I$ .

Para mostrarmos este fato, consideremos, primeiramente,  $x \in D(A)$ . Então,  $S(0)x = u(0, x) = x$ , pois  $u(\cdot, x)$  é solução de (4.8) com condição inicial igual a  $x$ . Agora, se  $x \in X$ , então existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $D(A)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Assim, como  $S(0) \in \mathcal{L}(X)$ ,

$$S(0)x = S(0) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(0)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Portanto, dos itens (4) e (5), segue que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  satisfaz a propriedade **(S1)** da definição de operador resolvente.

- (6)  $S(t)D(A) \subset D(A)$ .

Isso ocorre pois, para todo  $x \in D(A)$ ,  $S(t)x = u(t, x)$ , com  $u(\cdot, x)$  solução de (4.8) em  $\mathbb{R}_+$ . Assim,  $u(t, x) \in D(A)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

(7) A função  $t \mapsto AS(t)x$  é contínua em  $\mathbb{R}_+$ , para todo  $x \in D(A)$ .

De fato, dado  $x \in D(A)$ , como  $u(\cdot, x)$  é solução de (4.8), segue da Definição 4.1 que  $Au(\cdot, x)$  é contínua em  $\mathbb{R}_+$ , isto é,  $AS(\cdot)x = Au(\cdot, x)$  é contínua em  $\mathbb{R}_+$ .

(8) A função  $t \mapsto S(t)x$  é continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}_+$ , para todo  $x \in D(A)$ .

Este fato também segue do fato de  $u(\cdot, x)$  ser solução de (4.8) em  $\mathbb{R}_+$ , visto que assim,  $S(\cdot)x = u(\cdot, x)$  é continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}_+$ .

Logo, dos itens (6), (7) e (8), concluímos que a propriedade **(S2)** da definição de operador resolvente é válida. Para concluirmos esta demonstração, falta provarmos que as equações resolventes (4.3) e (4.4) são satisfeitas.

(9)  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  satisfaz (4.3).

De fato, sejam  $x \in D(A)$  e  $t \geq 0$ . Por hipótese,  $u(\cdot, x)$  é solução de (4.8) e assim, temos

$$u'(t, x) = Au(t, x) + \int_0^t B(t-s)u(s, x)ds,$$

ou seja,

$$S'(t)x = AS(t)x + \int_0^t B(t-s)S(s)xds.$$

(10)  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  satisfaz (4.4).

Para mostrarmos este fato, considere a função  $f(t) = -Ax - \int_0^t B(r)xdr$ , com  $x \in D(A)$  e  $t \geq 0$ .

Observe que  $f \in W^{1,1}(J, X)$ . De fato, pela forma como  $f$  foi definida, temos  $f(0) = -Ax$  e  $f'(t) = -B(t)x$ , com  $B(\cdot)x \in L^1(J, X)$ . Assim, usando uma generalização do Teorema A.1 para funções assumindo valores em espaços de Banach, obtemos também que  $f \in AC(J, X)$  e então, segue  $f \in W^{1,1}(J, X)$ .

Desta forma, segue do Teorema 4.9 que  $v(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$  é solução de (4.1) com  $v(0, x) = x$ . Observe ainda que, para todo  $t \in J$ ,

$$\begin{aligned} v(t) &= S(t)x - \int_0^t S(t-s)Axd s - \int_0^t S(t-s) \int_0^s B(r)dr ds \\ &= S(t)x - \int_0^t S(\tau)Axd\tau - \int_0^t S(\tau) \int_0^{t-\tau} B(r)dr d\tau. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por outro lado, a função  $w(t) = x$ , para todo  $t \in J$ , também é uma solução de (4.1) com  $w(0) = x$ . Assim, pela unicidade de solução e por (4.9), obtemos

$$w(t) = x = v(t) = S(t)x - \int_0^t S(\tau)Axd\tau - \int_0^t S(\tau) \int_0^{t-\tau} B(r)xdr d\tau,$$

para todo  $t \geq 0$  e  $x \in D(A)$ , ou ainda,

$$S(t)x - x = \int_0^t S(\tau)Ax d\tau + \int_0^t \int_0^{t-\tau} S(\tau)B(r)x dr d\tau.$$

Mais ainda, pelo fato de  $t \mapsto S(t)x$  ser diferenciável para todo  $x \in D(A)$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^t S'(s)x ds &= \int_0^t S(s)Ax ds + \int_0^t \int_0^{t-\tau} S(\tau)B(r)x dr d\tau \\ &= \int_0^t S(s)Ax ds + \int_0^t S(\tau) \int_0^{t-\tau} B(r)x dr d\tau \\ &= \int_0^t S(s)Ax ds + \int_0^t S(\tau) \int_\tau^t B(s-\tau)x ds d\tau \\ &= \int_0^t S(s)Ax ds + \int_0^t \int_\tau^t S(\tau)B(s-\tau)x ds d\tau \\ &= \int_0^t S(s)Ax ds + \int_0^t \int_0^s S(\tau)B(s-\tau)x d\tau ds \\ &= \int_0^t S(s)Ax ds + \int_0^t \int_0^s S(s-r)B(r)x dr ds, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^t S'(s)x ds = \int_0^t \left[ S(s)Ax + \int_0^s S(s-r)B(r)x dr \right] ds,$$

para todo  $t \geq 0$  e  $x \in D(A)$ .

Finalmente, derivando em  $t$  a igualdade acima, concluímos que

$$S'(t)x = S(t)Ax + \int_0^t S(t-r)B(r)x dr,$$

para todo  $t \geq 0$  e  $x \in D(A)$ , que é a equação resolvente (4.4).

Portanto,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é um operador resolvente para (4.1).  $\square$

## 4.2 Transformada de Laplace de operadores resolventes

Nesta seção, estudaremos o problema de valor inicial (4.1) – (4.2) aplicando a teoria da transformada de Laplace. Para isso, precisamos impor uma restrição para a função  $b$  definida em  $(\mathbf{H}_0)$ . Tal restrição é dada por:

**(H<sub>1</sub>)** Existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $e^{-\beta t}b(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$  para todo  $t \geq 0$ .

A transformada de Laplace da função  $b$  é definida por

$$\hat{b}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} b(t) dt,$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) \geq \beta$ . Devido à condição  $(\mathbf{H}_1)$ , podemos então dizer que  $b$  tem transformada de Laplace absolutamente convergente, de fato,

$$\begin{aligned} |\hat{b}(\lambda)| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} b(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{\beta t} e^{-\beta t} b(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-\beta)t} e^{-\beta t} b(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^{\infty} \left| e^{-(\lambda-\beta)t} e^{-\beta t} b(t) \right| dt \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-(Re(\lambda)-\beta)t} \left| e^{-\beta t} b(t) \right| dt \\ &\leq \int_0^{\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\{ e^{-(Re(\lambda)-\beta)t} \right\} \left| e^{-\beta t} b(t) \right| dt \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\{ e^{-(Re(\lambda)-\beta)t} \right\} \left( \int_0^{\infty} \left| e^{-\beta t} b(t) \right| dt \right) \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\{ e^{-(Re(\lambda)-\beta)t} \right\} M_b, \end{aligned}$$

onde  $M_b = \int_0^{\infty} \left| e^{-\beta t} b(t) \right| dt$ , pois  $t \mapsto e^{-\beta t} b(t)$  está em  $L^1(\mathbb{R}_+)$ , e  $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\{ e^{-(Re(\lambda)-\beta)t} \right\} < \infty$  quando  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $Re(\lambda) \geq \beta$ .

Além disso, por  $(\mathbf{H}_0)$ , temos  $|B(t)x| \leq b(t)|x|_Y$  para todo  $x \in D(A)$  e  $t \geq 0$  então, a função  $t \mapsto B(t)x$  também admite transformada de Laplace absolutamente convergente, definida por

$$\hat{B}(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} B(t)x dt,$$

para todo  $x \in D(A)$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) \geq \beta$ .

Para os operadores resolventes  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  admitirem transformada de Laplace precisamos que seja satisfeita a seguinte condição:

**(S4)** Existem constantes  $M \geq 1$  e  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  tais que  $|S(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega_0 t}$  para todo  $t \geq 0$ .

Observe que, se a condição **(S4)** é válida,  $t \mapsto S(t)x$  admite uma transformada de Laplace para todo  $x \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega_0$ . Desta forma, para todo  $x \in D(A)$ ,

temos ainda

$$\begin{aligned}
 \hat{S}'(\lambda)x &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-\lambda t} S'(t)x dt \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N [e^{-\lambda t} S'(t)x - \lambda e^{-\lambda t} S(t)x] dt + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \lambda e^{-\lambda t} S(t)x dt \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{d}{dt} (e^{-\lambda t} S(t)x) dt + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \lambda e^{-\lambda t} S(t)x dt \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} (e^{-\lambda N} S(N)x) - x + \lambda \hat{S}(\lambda)x \\
 &= -x + \lambda \hat{S}(\lambda)x.
 \end{aligned}$$

Portanto, para  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega_0$ ,

$$\hat{S}'(\lambda)x = -x + \lambda \hat{S}(\lambda)x, \quad \text{para todo } x \in D(A). \quad (4.10)$$

Ou seja,  $t \mapsto S'(t)x$  também admite uma transformada de Laplace para todo  $x \in D(A)$ .

Além disso, do Lema 4.7, para  $\phi(t) = |U(t)x|_Y$ , temos

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &\leq \left| \int_0^t S(s)x ds \right| + |S(t)x| + |x| + \left| \int_0^t B(t-s)U(s)x ds \right| \\
 &\leq \int_0^t M e^{\omega_0 s} |x| ds + M e^{\omega_0 t} |x| + |x| + \int_0^t b(t-s) |U(s)x|_Y ds \\
 &= \left( M \left[ \frac{e^{\omega_0 t} - 1}{\omega_0} \right] + M e^{\omega_0 t} + 1 \right) |x| + \int_0^t b(t-s) \phi(s) ds,
 \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ .

Assim, da Desigualdade generalizada de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &\leq \left( M \left[ \frac{e^{\omega_0 t} - 1}{\omega_0} \right] + M e^{\omega_0 t} + 1 \right) |x| \\
 &\quad + \int_0^t b(t-s) \left[ M \left[ \frac{e^{\omega_0 s} - 1}{\omega_0} \right] + M e^{\omega_0 s} + 1 \right] |x| e^{\left( \int_s^t b(t-\tau) d\tau \right)} ds,
 \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ .

Em particular, como  $b(t)$  é localmente integrável em  $\mathbb{R}_+$ , seja  $C = \int_0^t b(t-\tau) d\tau$ .

Então,

$$e^{\left( \int_s^t b(t-\tau) d\tau \right)} \leq e^C.$$



Desse modo, voltando à desigualdade acima, concluímos que

$$\begin{aligned}
 |AU(t)x| &\leq \phi(t) \leq \left( M \left[ \frac{e^{\omega_0 t} - 1}{\omega_0} \right] + Me^{\omega_0 t} + 1 \right) |x| \\
 &+ e^C \left[ \int_0^t \left( b(t-s) \left[ M \left[ \frac{e^{\omega_0 s} - 1}{\omega_0} \right] + Me^{\omega_0 s} + 1 \right] \right) ds \right] |x| \\
 &\leq \left( M \left[ \frac{e^{\omega_0 t} - 1}{\omega_0} \right] + Me^{\omega_0 t} + 1 \right) |x| \\
 &+ e^C \sup_{s \in [0, t]} \left\{ e^{\beta(t-s)} M \left[ \frac{e^{\omega_0 s} - 1}{\omega_0} \right] + Me^{\omega_0 s} + 1 \right\} \left( \int_0^t e^{-\beta(t-s)} b(t-s) ds \right) |x|,
 \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$  e  $x \in D(A)$ .

Agora, dependendo se  $\omega_0 \geq 0$  ou  $\omega_0 < 0$ , é possível encontrar  $\omega_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $|AU(t)x| \leq M_1 e^{\omega_1 t} |x|$ , para todo  $t \geq 0$  e  $x \in D(A)$ .

Logo, a função  $t \mapsto AU(t)x$ , assim como  $t \mapsto AS(t)x$ , para  $x \in D(A)$ , têm uma transformada de Laplace para  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega_1$  e mais,  $A\hat{S}(\lambda)x = \widehat{AS}(\lambda)x$ , pois  $A$  é fechado.

Portanto, das equações resolventes (4.3) e (4.4) e de 4.10 obtemos:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))\hat{S}(\lambda)x = \lambda\hat{S}(\lambda)x - A\hat{S}(\lambda)x - \hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)x \\
 &= \hat{S}'(\lambda)x + x - \widehat{AS}(\lambda)x - (\widehat{B * S})(\lambda)x \\
 &= x; \\
 (2) \quad &\hat{S}(\lambda)(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))x = \lambda\hat{S}(\lambda)x - \hat{S}(\lambda)Ax - \hat{S}(\lambda)\hat{B}(\lambda)x \\
 &= \hat{S}'(\lambda)x + x - \hat{S}(\lambda)Ax - (\widehat{S * B})(\lambda)x \\
 &= x.
 \end{aligned}$$

Portanto, para todo  $x \in D(A)$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega = \max\{\beta, \omega_0, \omega_1\}$ , temos

$$(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))\hat{S}(\lambda)x = \hat{S}(\lambda)(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))x = x. \quad (4.11)$$

Além disso, pelas propriedades da transformada de Laplace, segue que

$$A\hat{S}(\lambda) = A\hat{U}'(\lambda) = A(\lambda\hat{U}(\lambda) - U(0)) = A\lambda\hat{U}(\lambda) = \lambda A\hat{U}(\lambda),$$

o que nos permite concluir que  $\hat{S}(\lambda)X \subset D(A)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ . De fato, note primeiramente que os operadores lineares  $\hat{S}(\lambda)$  e  $\lambda A\hat{U}(\lambda)$  são limitados pois, para todo  $x \in X$ ,

$$|\hat{S}(\lambda)x| = \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-Re(\lambda)t} M e^{\omega_0 t} |x| dt = M \left( \int_0^\infty e^{(-Re(\lambda) + \omega_0)t} dt \right) |x|$$

e

$$\begin{aligned}
 |\lambda A \hat{U}(\lambda)x| &= |\lambda| \left| A \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)x dt \right| = |\lambda| \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} AU(t)x dt \right| \\
 &\leq |\lambda| \int_0^\infty e^{-Re(\lambda)t} |AU(t)x| dt \leq |\lambda| \int_0^\infty e^{-Re(\lambda)t} M_1 e^{\omega_1 t} |x| dt \\
 &= M_1 |\lambda| \left( \int_0^\infty e^{(-Re(\lambda)+\omega_1)t} dt \right) |x|,
 \end{aligned}$$

com ambas as integrais convergentes para  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ .

Dessa forma, dado  $x \in X$ , existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $D(A)$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , e então, visto que  $\hat{S}(\lambda)$  e  $A\hat{S}(\lambda) = \lambda A\hat{U}(\lambda)$  são operadores lineares limitados, temos  $\hat{S}(\lambda)x_n \rightarrow \hat{S}(\lambda)x$  e  $A\hat{S}(\lambda)x_n \rightarrow A\hat{S}(\lambda)x$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Por fim, como  $A$  é um operador linear fechado, obtemos que  $\hat{S}(\lambda)x \in D(A)$ .

Portanto,  $\hat{S}(\lambda)X \subset D(A)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ .

Observe ainda que, por (4.11),  $\hat{S}(\lambda) = (\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))^{-1}$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ . Assim, usando o Teorema A.9, obtemos que  $(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))$  é um operador linear fechado com domínio  $D(A)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ .

Finalmente, das propriedades da transformada de Laplace (ver (STRAUSS, 1992, Capítulo 12, seção 12.5)), as derivadas de  $\hat{S}(\lambda)$  são dadas pela fórmula

$$\hat{S}^{(n)}(\lambda)x = \int_0^\infty (-t)^n e^{-\lambda t} S(t)x dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Das observações vistas acima, obtemos a validade do próximo resultado.

**Teorema 4.13.** *Suponha que as condições  $(\mathbf{H}_0)$  e  $(\mathbf{H}_1)$  sejam satisfeitas e suponha que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é um operador resolvente para (4.1) satisfazendo  $(\mathbf{S4})$ . Então existem  $\omega \geq \beta$  e  $M \geq 1$  tais que  $(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))$  é fechado com relação ao domínio  $D(A)$ , invertível e satisfaz*

$$\left| \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))^{-1} \right|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^{(n+1)}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.12)$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ .

*Demonstração.* Em discussão anterior, provamos que o operador  $(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))$  é fechado com relação ao domínio  $D(A)$  e invertível para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ , onde  $\omega = \max\{\omega_0, \omega_1, \beta\}$  e  $M, \omega_0, \omega_1$  e  $\beta$  são como no início desta seção. Por indução,

mostraremos a desigualdade (4.12). Se  $n = 0$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ , temos

$$\begin{aligned} |(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))^{-1}|_{\mathcal{L}(X)} &= |\hat{S}(\lambda)|_{\mathcal{L}(X)} = \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt \right|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} M e^{\omega_0 t} dt = \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)}. \end{aligned}$$

Já para  $n = 1$ , segue que

$$\begin{aligned} \left| -\frac{d}{d\lambda}(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))^{-1} \right|_{\mathcal{L}(X)} &= \left| \int_0^\infty t e^{-\lambda t} S(t) dt \right|_{\mathcal{L}(X)} \leq \int_0^\infty t e^{(\omega_0 - Re(\lambda))t} M dt \\ &= M \left( t \frac{e^{(\omega_0 - Re(\lambda))t}}{(\omega_0 - Re(\lambda))} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{(\omega_0 - Re(\lambda))t}}{(\omega_0 - Re(\lambda))} dt \right) \\ &= -M \left[ \frac{e^{(\omega_0 - Re(\lambda))t}}{(\omega_0 - Re(\lambda))^2} \right]_0^\infty = \frac{M}{(\omega_0 - Re(\lambda))^2} \\ &= \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega_0)^2} \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^2}. \end{aligned}$$

Agora, suponha que

$$\int_0^\infty t^n e^{(\omega_0 - Re(\lambda))t} dt = \frac{n!}{(Re(\lambda) - \omega_0)^{n+1}},$$

para algum  $n \in \mathbb{N}_0$ . Logo,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{(n+1)!} (-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} (\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))^{-1} \right|_{\mathcal{L}(X)} = \left| \frac{1}{(n+1)!} (-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} \hat{S}(\lambda) \right|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \left| \frac{1}{(n+1)!} (-1)^{n+1} \int_0^\infty (-t)^{n+1} e^{-\lambda t} S(t) dt \right|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\infty t^{n+1} e^{(\omega_0 - Re(\lambda))t} M dt \\ &= \frac{M}{(n+1)!} \int_0^\infty t^{n+1} e^{(\omega_0 - Re(\lambda))t} dt \\ &= \frac{M}{(n+1)!} \left[ \frac{t^{n+1} e^{(\omega_0 - Re(\lambda))t}}{(\omega_0 - Re(\lambda))} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (n+1) \frac{t^n e^{(\omega_0 - Re(\lambda))t}}{(\omega_0 - Re(\lambda))} dt \right] \\ &= \frac{M}{(n+1)!} \frac{(n+1)}{(Re(\lambda) - \omega_0)} \int_0^\infty t^n e^{(\omega_0 - Re(\lambda))t} dt \\ &= \frac{M}{(n+1)!} \frac{(n+1)}{(Re(\lambda) - \omega_0)} \frac{n!}{(Re(\lambda) - \omega_0)^{n+1}} = \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega_0)^{n+2}} \\ &\leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^{n+2}}, \end{aligned}$$

onde  $\omega = \max\{\omega_0, \omega_1, \beta\}$ .

Portanto, a desigualdade (4.12) é válida para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . □

**Corolário 4.14.** *Suponha que as condições  $(\mathbf{H}_0)$  e  $(\mathbf{H}_1)$  sejam válidas e seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um operador resolvente para (4.1) satisfazendo  $(\mathbf{S4})$ . Então, para  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , temos*

- (1) *Existe  $\omega_2 > 0$  tal que  $\{A\hat{S}(\lambda)\}_{\lambda > \omega_2}$  é uma família de operadores lineares limitados e  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda) = 0$ .*
- (2) *Existe  $\omega_3 > 0$  tal que  $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda > \omega_3\}$  e  $|(\lambda I - A)^{-1}| \leq 2M(\lambda - \omega)^{-1}$  quando  $\lambda > \omega_3$ .*
- (3)  *$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n(\lambda - A)^{-n}x = x$ , para todo  $x \in X$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Em particular,  $D(A^n)$  é denso em  $X$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .*
- (4)  *$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda\hat{S}(\lambda)x = x$ , para todo  $x \in X$ .*

*Demonstração.* Vejamos cada um dos itens separadamente.

- (1) Primeiramente, observe que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{b}(\lambda) = 0$ . De fato, como  $t \mapsto e^{-\beta t}b(t)$  pertence a  $L^1(\mathbb{R}_+)$ , o Lema de Riemann-Lebesgue (ver Lema A.13) nos garante que

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{b}(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} b(t) dt \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \beta)t} e^{-\beta t} b(t) dt = 0. \end{aligned}$$

A seguir, mostraremos que existe  $\omega_2 > 0$  tal que  $\{A\hat{S}(\lambda)\}_{\lambda > \omega_2}$  é uma família de operadores limitados. Para isso, note que para todo  $y \in D(A)$  e  $\lambda > \beta$ , obtemos

$$|\hat{B}(\lambda)y| = \left| \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} B(t)y dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} b(t) [|y| + |Ay|] dt = \hat{b}(\lambda) [|y| + |Ay|].$$

Logo, considerando  $\omega_2 = \max\{0, \omega_0, \omega_1, M_b + \beta\}$ , da observação acima para  $y = \hat{S}(\lambda)x$ , de (4.11) e do Teorema 4.13, tem-se, para todo  $x \in X$  e  $\lambda > \omega_2$ ,

$$\begin{aligned} |A\hat{S}(\lambda)x| &= |\lambda\hat{S}(\lambda)x - \hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)x - x| \\ &\leq |\lambda|\hat{S}(\lambda)x| + |\hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)x| + |x| \\ &\leq \lambda \frac{M}{(\lambda - \omega)} |x| + \hat{b}(\lambda) (|\hat{S}(\lambda)x| + |A\hat{S}(\lambda)x|) + |x| \\ &\leq \left( \frac{\lambda M}{(\lambda - \omega)} + \frac{\hat{b}(\lambda)M}{(\lambda - \omega)} + 1 \right) |x| + \hat{b}(\lambda) |A\hat{S}(\lambda)x| \\ &= \left( \frac{\lambda M}{(\lambda - \omega)} - \frac{\omega M}{(\lambda - \omega)} + \frac{\omega M}{(\lambda - \omega)} + \frac{\hat{b}(\lambda)M}{(\lambda - \omega)} + 1 \right) |x| + \hat{b}(\lambda) |A\hat{S}(\lambda)x|. \\ &\leq \left( \frac{(\hat{b}(\lambda) + \omega)M}{(\lambda - \omega)} + 1 + M \right) |x| + \hat{b}(\lambda) |A\hat{S}(\lambda)x|. \end{aligned}$$

Assim, como  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{b}(\lambda) = 0$ ,  $1 - \hat{b}(\lambda) > 0$  para  $\lambda$  suficientemente grande, e então,

$$|A\hat{S}(\lambda)x| \leq (1 - \hat{b}(\lambda))^{-1} \left[ 1 + M + \frac{(\hat{b}(\lambda) + \omega)M}{(\lambda - \omega)} \right] |x|,$$

para todo  $x \in X$ , garantindo que  $A\hat{S}(\lambda)$  é limitada para todo  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tal que  $\lambda > \omega_2$ .

Agora, vamos mostrar que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda) = 0$ . Para isso, dado  $\lambda > \omega_2$ , os operadores  $\hat{S}(\lambda)$  e  $A\hat{S}(\lambda)$  são limitados e, então, para  $\lambda > \omega_2$ ,

$$\begin{aligned} |\hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)| &\leq \hat{b}(\lambda) (|\hat{S}(\lambda)| + |A\hat{S}(\lambda)|) \\ &\leq \hat{b}(\lambda) \left( \frac{M}{(\lambda - \omega)} + (1 - \hat{b}(\lambda))^{-1} \left[ 1 + M + \frac{(\hat{b}(\lambda) + \omega)M}{(\lambda - \omega)} \right] \right). \end{aligned}$$

Logo, como  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{b}(\lambda) = 0$ , segue que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda) = 0$ .

- (2) Mostremos que  $(\lambda I - A)$  é invertível para determinados valores de  $\lambda$ . Para isso, observe que, para  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  com  $\lambda > \omega$ ,

$$\begin{aligned} (\lambda I - A) &= \lambda I - A - \hat{B}(\lambda) + \hat{B}(\lambda) \\ &= \lambda I - A - \hat{B}(\lambda) + \hat{B}(\lambda)[\hat{S}(\lambda)(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))] \\ &= [I + \hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)][\lambda I - A - \hat{B}(\lambda)]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.13, o operador  $\lambda I - A - \hat{B}(\lambda)$  é invertível, para  $\lambda > \omega$ . Mais ainda, vimos em (1) que o operador  $(-\hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)) \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Assim, dado  $\varepsilon = 2^{-1}$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|-\hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)| \leq \varepsilon$ , para todo  $\lambda > \delta$ . Dessa forma, pelo Lema A.5, o operador  $I + \hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)$  tem inversa contínua em  $\mathcal{L}(X)$  e vale a desigualdade  $|(I - (-\hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)))^{-1}| \leq 2$ , quando  $\lambda > \max\{\omega, \delta\}$ .

Portanto, tomando  $\omega_3 = \max\{\delta, \omega\}$ ,  $\lambda I - A$  é invertível para todo  $\lambda > \omega_3$ . Concluimos assim que  $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda > \omega_3\}$  e mais, para  $\lambda > \omega_3$ , temos

$$\begin{aligned} |(\lambda I - A)^{-1}| &\leq |[\lambda I - A - \hat{B}(\lambda)]^{-1}[I + \hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)]^{-1}| \\ &= |\hat{S}(\lambda)||[I + \hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)]^{-1}| \\ &\leq \frac{2M}{(\lambda - \omega)}. \end{aligned}$$

- (3) Primeiro, dado  $x \in X$ , mostraremos que  $\lambda(\lambda I - A)^{-1}x \rightarrow x$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . De fato, observe que

$$I = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A) = \lambda(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - A)^{-1}A, \quad \text{para } \lambda > \omega_3.$$

Assim,  $\lambda(\lambda I - A)^{-1} - I = (\lambda I - A)^{-1}A$ . Logo, para todo  $x \in D(A)$  e  $\lambda > \omega_3$ , temos

$$|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x| = |(\lambda I - A)^{-1}Ax| \leq \frac{2M}{(\lambda - \omega)} |Ax|$$

e então, fazendo  $\lambda \rightarrow \infty$ , obtemos  $|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x| \rightarrow 0$ , isto é,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x$ , para todo  $x \in D(A)$ .

Para o caso geral, como  $D(A)$  é denso em  $X$ , dado  $x \in X$ , existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $D(A)$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Pelo que acabamos de fazer, temos  $|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x_n - x_n| \rightarrow 0$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, segue de (2) que,

$$|\lambda(\lambda I - A)^{-1}| \leq \frac{2M\lambda}{(\lambda - \omega)}, \quad \text{para todo } \lambda > \omega_3,$$

ou seja, o operador  $\lambda(\lambda I - A)^{-1}$  é limitado para todo  $\lambda > \omega_3$  fixo. Então,

$$\begin{aligned} |\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x| &\leq |\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - \lambda(\lambda I - A)^{-1}x_n| \\ &\quad + |\lambda(\lambda I - A)^{-1}x_n - x_n| + |x_n - x| \\ &\leq |\lambda(\lambda I - A)^{-1}||x - x_n| + |x_n - x| + |\lambda(\lambda I - A)^{-1}x_n - x_n| \\ &\leq \left( \frac{2M\lambda}{\lambda - \omega} + 1 \right) |x - x_n| + |\lambda(\lambda I - A)^{-1}x_n - x_n|, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lambda > \omega_3$ .

Logo, podemos concluir que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x$  para todo  $x \in X$ .

Agora, por indução, mostraremos a seguinte afirmação:  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n(\lambda I - A)^{-n}x = x$ , para todo  $x \in X$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Primeiramente, observe que

$$\lambda^{n+1}(\lambda I - A)^{-(n+1)} = \lambda^n(\lambda I - A)^{-n} + \lambda^n(\lambda I - A)^{-n}[\lambda(\lambda I - A)^{-1} - I], \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

O caso  $n = 1$ , já foi provado acima. Assim, suponha que a afirmação é válida para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Dessa forma, como  $\lambda(\lambda I - A)^{-1}$  é limitado, dado  $x \in X$ , temos

$$\begin{aligned} |\lambda^{n+1}(\lambda I - A)^{-(n+1)}x - x| &= |\lambda^n(\lambda I - A)^{-n}x \\ &\quad + \lambda^n(\lambda I - A)^{-n}[\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x] - x| \\ &\leq |\lambda^n(\lambda I - A)^{-n}x - x| + |\lambda^n(\lambda I - A)^{-n}[\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x]| \\ &\leq |\lambda^n(\lambda I - A)^{-n}x - x| + 2^n M^n \left( \frac{\lambda}{(\lambda - \omega)} \right)^n |\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x|. \end{aligned}$$

Desse modo, usando o caso  $n = 1$  e a hipótese de indução, concluímos que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n(\lambda I - A)^{-n}x = x$ , para todo  $x \in X$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Mais ainda, concluímos também que  $D(A^n)$  é denso em  $X$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De fato, fixado  $n \in \mathbb{N}$  e dado  $x \in X$  arbitrário, a sequência  $(K^n(KI - A)^{-n}x)_{K \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $D(A^n)$  e, como provamos anteriormente, converge para  $x$ .

- (4) Para mostrarmos este item, utilizaremos os resultados obtidos nos itens anteriores. Antes, porém, dados  $x \in X$  e  $\lambda > \omega$ , observe que a identidade (4.11) nos ajuda a obter a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \lambda \hat{S}(\lambda)x - x &= \lambda \hat{S}(\lambda)x - \lambda(\lambda I - A)^{-1}x + \lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x \\ &= [\lambda(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)\hat{S}(\lambda)x - \lambda(\lambda I - A)^{-1}x] + [\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x] \\ &= \lambda(\lambda I - A)^{-1}[(\lambda I - A)\hat{S}(\lambda)x - x] + [\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x] \\ &= \lambda(\lambda I - A)^{-1}\hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)x + \lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\lambda \hat{S}(\lambda)x - x| &\leq \lambda|(\lambda I - A)^{-1}||\hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)x| + |\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x| \\ &\leq \frac{2M\lambda}{(\lambda - \omega)}|\hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)x| + |\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x| \end{aligned}$$

e então, como  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\lambda - \omega} = 1$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda) = 0$  e  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x$ , concluímos que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \hat{S}(\lambda)x = x$ , para todo  $x \in X$ .

Portanto, as quatro propriedades deste colorário são válidas.  $\square$

As propriedades (2) e (3) do Corolário 4.14 mostram, no caso em que a equação (4.8) é bem posta, que o operador  $A$  satisfaz quase todas as condições para ser o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo. Na verdade, em (GRIMMER R.;PRUSS, 1985) é mostrado que tal  $A$  é de fato o gerador de um  $C_0$ -semigrupo se, adicionalmente, a função  $t \mapsto B(t)x$  for de variação limitada para cada  $x \in D(A)$ .

Contudo, ainda em (GRIMMER R.;PRUSS, 1985), é apresentado um exemplo de uma equação da forma (4.8) que é bem posta tal que  $A$  não é o gerador de um  $C_0$ -semigrupo.

**Teorema 4.15.** *Suponha que as condições  $(\mathbf{H}_0)$  e  $(\mathbf{H}_1)$  sejam válidas e seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um operador resolvente para (4.1) satisfazendo  $(\mathbf{S4})$ . Então  $D(A) = \{x \in X; \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(S(h)x - x) \text{ existe}\}$  e, para todo  $x \in D(A)$ ,  $Ax = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(S(h)x - x)$ .*

*Demonstração.* A equação resolvente (4.3) é dada por

$$S'(t)x = AS(t)x + \int_0^t B(t-s)S(s)x ds,$$

para todo  $x \in D(A)$ . Assim, fazendo  $t = 0$ , obtemos,

$$Ax = AS(0)x = S'(0)x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[S(h)x - S(0)x]}{h}, \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

Portanto,  $Ax = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(S(h)x - x)$ , para todo  $x \in D(A)$ .

Mais ainda,

$$D(A) \subset \{x \in X; \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(S(h)x - x) \text{ existe}\}.$$

Assim, falta mostrarmos que

$$D(C) = \{x \in X; Cx = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(S(h)x - x) \text{ existe}\} \subset D(A).$$

Seja  $x \in D(C)$  e considere a função  $f(\lambda) = \lambda^2 \hat{S}(\lambda)x - \lambda x - Cx$ , com  $\lambda > \max\{0, \beta\}$ .

Então,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt - \lambda x - Cx \\ &= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt - \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} x dt - \lambda^2 \int_0^\infty t e^{-\lambda t} Cx dt \\ &= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} [S(t)x - x - tCx] dt. \end{aligned}$$

Como  $x \in D(C)$ , dado  $\eta > 0$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|t^{-1}(S(t)x - x) - Cx| \leq \eta$  sempre que  $0 < t \leq \epsilon$ . Ou seja, para todo  $0 < t \leq \epsilon$ , tem-se  $|S(t)x - x - tCx| \leq t\eta$ . Logo,

$$\begin{aligned} |f(\lambda)| &\leq \lambda^2 \int_0^\epsilon e^{-\lambda t} |S(t)x - x - tCx| dt + \lambda^2 \int_\epsilon^\infty e^{-\lambda t} [|S(t)x| + |x| + t|Cx|] dt \\ &\leq \lambda^2 \eta \int_0^\epsilon t e^{-\lambda t} dt + \lambda^2 \int_\epsilon^\infty e^{(\omega_0 - \lambda)t} M|x| dt + \lambda^2 \int_\epsilon^\infty e^{-\lambda t} [|x| + t|Cx|] dt \\ &\leq \eta + \frac{\lambda^2 M|x| e^{-(\lambda - \omega_0)\epsilon}}{(\lambda - \omega_0)} + \lambda|x|e^{-\lambda\epsilon} + (\lambda\epsilon + 1)e^{-\lambda\epsilon}|Cx|. \end{aligned}$$

Desse modo, para  $\lambda$  suficientemente grande, podemos dizer que  $|f(\lambda)| \leq 2\eta$ , para qualquer que seja  $\eta > 0$  dado, o que equivale a dizer que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0$ .

Mais ainda, da definição de  $f(\lambda)$ , temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda \hat{S}(\lambda)x - x) = Cx.$$

Agora, seja  $x_\lambda = \lambda \hat{S}(\lambda)x$ , para  $\lambda > \max\{0, \omega_0\}$  e  $x \in X$ . Pelo item (4) do Corolário 4.14, sabemos que  $x_\lambda \rightarrow x$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Além disso, de (4.11), temos

$$\lambda(x_\lambda - x) = \lambda(\lambda \hat{S}(\lambda)x - x) = \lambda(A\hat{S}(\lambda)x + \hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)x) = Ax_\lambda + \hat{B}(\lambda)x_\lambda. \quad (4.13)$$

Observe também, da demonstração do item (1) do Corolário 4.14, que

$$|\hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)| \leq \hat{b}(\lambda) \left( \frac{M}{(\lambda - \omega)} + (1 - \hat{b}(\lambda))^{-1} \left[ 1 + M + \frac{(\hat{b}(\lambda) + \omega)M}{(\lambda - \omega)} \right] \right)$$



e então,

$$|\hat{B}(\lambda)x_\lambda| = |\lambda\hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)x| \leq \hat{b}(\lambda) \left( \lambda \frac{M}{(\lambda - \omega)} + \frac{\lambda}{1 - \hat{b}(\lambda)} \left[ 1 + M + \frac{(\hat{b}(\lambda) + \omega)M}{(\lambda - \omega)} \right] \right) |x|,$$

com  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{b}(\lambda) = 0$  e o termo entre parênteses limitado. Isso nos permite concluir que o lado direito da desigualdade anterior é limitado, isto é,  $\{\hat{B}(\lambda)x_\lambda\}_{\lambda > 0}$  é um conjunto limitado.

Assim, visto que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(x_\lambda - x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda\hat{S}(\lambda)x - x) = Cx$  e  $Ax_\lambda = \lambda(x_\lambda - x) - \hat{B}(\lambda)x_\lambda$ , o conjunto  $\{Ax_\lambda\}_{\lambda > 0}$  também é limitado.

Note ainda que  $Ax_\lambda - Cx = \lambda(x_\lambda - x) - \hat{B}(\lambda)x_\lambda - Cx = f(\lambda) - \hat{B}(\lambda)x_\lambda$  e então,

$$\begin{aligned} |Ax_\lambda - Cx| &\leq |f(\lambda)| + |\hat{B}(\lambda)x_\lambda| \\ &\leq |f(\lambda)| + \hat{b}(\lambda)[|x_\lambda| + |Ax_\lambda|]. \end{aligned}$$

Consequentemente, como  $f_\lambda \rightarrow 0$  e  $\hat{b}(\lambda) \rightarrow 0$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , e os conjuntos  $\{x_\lambda\}_{\lambda > 0}$  e  $\{Ax_\lambda\}_{\lambda > 0}$  são limitados, segue que  $|Ax_\lambda - Cx| \rightarrow 0$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , ou seja,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} Ax_\lambda = Cx$ .

Portanto, pelo fato de  $x_\lambda \rightarrow x$  e  $Ax_\lambda \rightarrow Cx$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , e  $A$  ser um operador linear fechado, obtemos que  $x \in D(A)$  e  $Ax = Cx$ , o que conclui a demonstração do teorema.  $\square$

Observe que o Teorema 4.15 usa as propriedades de  $\hat{S}(\lambda)$  para obtermos  $A$  a partir da família resolvente  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .

**Teorema 4.16.** *Suponha que as condições  $(\mathbf{H}_0)$  e  $(\mathbf{H}_1)$  sejam válidas e que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é um operador resolvente para (4.1) satisfazendo  $(\mathbf{S4})$ . Então,  $A$  comuta com  $S(t)$  para todo  $t \geq 0$  se, e somente se, para todo  $\mu \in \rho(A)$ ,  $(\mu I - A)^{-1}$  comuta com  $B(t)$  quase sempre para  $t \geq 0$ .*

*Demonstração.* Mostraremos este resultado com uma cadeia de equivalências.

- (1) Mostraremos, primeiramente, que  $AS(t)x = S(t)Ax$  para todo  $x \in D(A)$  e  $t \geq 0$  se, e somente se,  $(\mu I - A)^{-1}S(t)y = S(t)(\mu I - A)^{-1}y$  para todo  $y \in D(A)$  e  $t \geq 0$ . Para isso, dado  $x \in D(A)$  e  $\mu \in \rho(A)$ , note que

$$\begin{aligned} AS(t)x = S(t)Ax &\Leftrightarrow \mu S(t)x - AS(t)x = \mu S(t)x - S(t)Ax \\ &\Leftrightarrow (\mu I - A)S(t)x = S(t)(\mu I - A)x \\ &\Leftrightarrow S(t)x = (\mu I - A)^{-1}S(t)(\mu I - A)x. \end{aligned}$$

Assim, se  $AS(t)x = S(t)Ax$  para todo  $x \in D(A)$  e  $t \geq 0$ , dado  $y \in X$  qualquer, como  $(\mu I - A) : D(A) \rightarrow X$  é sobrejetora, existe  $z \in D(A)$  tal que  $y = (\mu I - A)z$  e então,

$$S(t)(\mu I - A)^{-1}y = S(t)z = (\mu I - A)^{-1}S(t)(\mu I - A)z = (\mu I - A)^{-1}S(t)y.$$

Inversamente, se  $S(t)(\mu I - A)^{-1}y = (\mu I - A)^{-1}S(t)y$  para todo  $y \in X$  e  $t \geq 0$ , dado  $x \in D(A)$  qualquer, existe  $w \in X$  tal que  $x = (\mu I - A)^{-1}w$ . Consequentemente,

$$S(t)x = S(t)(\mu I - A)^{-1}w = (\mu I - A)^{-1}S(t)w = (\mu I - A)^{-1}S(t)(\mu I - A)x,$$

ou seja,  $S(t)x = (\mu I - A)^{-1}S(t)(\mu I - A)x$ , o que é equivalente, pelas contas feitas anteriormente, a  $AS(t)x = S(t)Ax$ .

Portanto, segue a primeira equivalência.

- (2) Agora, dado  $\mu \in \rho(A)$ , mostraremos que  $(\mu I - A)^{-1}S(\lambda)y = S(\lambda)(\mu I - A)^{-1}y$ , para todo  $y \in X$  e  $t \geq 0$  se, e somente se,  $(\mu I - A)^{-1}\hat{S}(\lambda)y = \hat{S}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}y$ , para todo  $y \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ .

Se  $(\mu I - A)^{-1}S(\lambda)y = S(\lambda)(\mu I - A)^{-1}y$ , para todo  $y \in X$  e  $t \geq 0$ , então, como  $(\mu I - A)^{-1}$  é um operador linear limitado, temos

$$\begin{aligned} (\mu I - A)^{-1}\hat{S}(\lambda)y &= (\mu I - A)^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)y dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (\mu I - A)^{-1} S(t)y dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)(\mu I - A)^{-1}y dt = \hat{S}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}y, \end{aligned}$$

para todo  $y \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ .

Por outro lado, se  $(\mu I - A)^{-1}\hat{S}(\lambda)y = \hat{S}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}y$ , para todo  $y \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$  então,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} (\mu I - A)^{-1} S(t)y dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)(\mu I - A)^{-1}y dt,$$

isto é, as funções  $t \mapsto (\mu I - A)^{-1}S(t)y$  e  $t \mapsto S(t)(\mu I - A)^{-1}y$  possuem a mesma transformada de Laplace.

Logo, como essas funções também são contínuas em  $[0, \infty)$ , o Teorema de Lerch nos garante que elas são iguais, isto é,  $(\mu I - A)^{-1}S(\lambda)y = S(\lambda)(\mu I - A)^{-1}y$ , para todo  $y \in X$  e  $t \geq 0$ .

- (3) Mostraremos também que, dado  $\mu \in \rho(A)$ ,  $(\mu - A)^{-1}\hat{S}(\lambda)y = \hat{S}(\lambda)(\mu - A)^{-1}y$  para todo  $y \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$  se, e somente se,  $(\mu I - A)^{-1}\hat{B}(\lambda)x = \hat{B}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}x$  para todo  $x \in D(A)$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ .

Antes porém, usando que  $\hat{S}(\lambda) = (\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))^{-1}$ , note que

$$\begin{aligned}
 (\mu I - A)^{-1} \hat{B}(\lambda)x &= \hat{B}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}x \\
 \Leftrightarrow (\mu I - A)^{-1}(-\hat{B}(\lambda))x &= -\hat{B}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}x \\
 \Leftrightarrow (\mu I - A)^{-1}(-\hat{B}(\lambda) + \lambda I - A)x &+ (\mu I - A)^{-1}(-\lambda I + A)x \\
 &= (-\hat{B}(\lambda) + \lambda I - A)(\mu I - A)^{-1}x + (-\lambda I + A)(\mu I - A)^{-1}x \\
 \Leftrightarrow (\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))x &+ (A - \lambda I)(\mu I - A)^{-1}x \\
 &= (\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))(\mu I - A)^{-1}x + (A - \lambda I)(\mu I - A)^{-1}x \\
 \Leftrightarrow \hat{S}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))x &= (\mu I - A)^{-1}x,
 \end{aligned}$$

para todo  $x \in D(A)$ .

Agora, suponha que  $(\mu - A)^{-1}\hat{S}(\lambda)y = \hat{S}(\lambda)(\mu - A)^{-1}y$  para todo  $y \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ . Então, visto que  $\hat{S}(\lambda) : X \rightarrow D(A)$  é uma bijeção, dado  $x \in D(A)$ , existe  $z \in X$  tal que  $x = \hat{S}(\lambda)z$ . Assim,

$$\hat{S}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))x = \hat{S}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}z = (\mu I - A)^{-1}\hat{S}(\lambda)z = (\mu I - A)^{-1}x.$$

Conseqüentemente, da equivalência acima, obtemos que  $(\mu I - A)^{-1}\hat{B}(\lambda)x = \hat{B}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}x$  para todo  $x \in D(A)$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ .

Inversamente, supondo que  $(\mu I - A)^{-1}\hat{B}(\lambda)x = \hat{B}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}x$  para todo  $x \in D(A)$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ , dado  $y \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ , como  $(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda)) : D(A) \rightarrow X$  é uma bijeção, existe  $w \in D(A)$  tal que  $y = (\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))w$ .

Logo, da equivalência acima, temos

$$\begin{aligned}
 (\mu I - A)^{-1}\hat{B}(\lambda)w &= \hat{B}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}w \\
 \Leftrightarrow \hat{S}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))w &= (\mu I - A)^{-1}w
 \end{aligned}$$

e então, segue que  $(\mu I - A)^{-1}\hat{S}(\lambda)y = \hat{S}(\lambda)(\mu - A)^{-1}y$  para todo  $y \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ .

- (4) Por último, procedendo como no item (2), mostra-se que, dado  $\mu \in \rho(A)$ ,  $(\mu I - A)^{-1}\hat{B}(\lambda)x = \hat{B}(\lambda)(\mu I - A)^{-1}x$  para todo  $x \in D(A)$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) \geq \omega$  se, e somente se,  $(\mu I - A)^{-1}B(t)x = B(t)(\mu I - A)^{-1}x$  para todo  $x \in D(A)$  e quase todo  $t \geq 0$ .

Observamos que a condição  $(\mu I - A)^{-1}B(t)x = B(t)(\mu I - A)^{-1}x$  para todo  $x \in D(A)$  e quase todo  $t \geq 0$  se dá pelo Teorema de Lerch e pelo fato das funções  $t \mapsto (\mu I - A)^{-1}B(t)x$  e  $t \mapsto B(t)(\mu I - A)^{-1}x$  serem apenas mensuráveis neste caso (e não contínuas como as funções do item (2)).

□

### 4.3 O Teorema de Hille-Yosida para equações integrodiferenciais

Nesta seção apresentaremos uma versão do Teorema de Hille-Yosida para famílias de operadores resolventes relacionados a equações integrodiferenciais, utilizando a transformada de Laplace.

Note, inicialmente, que as condições de Hille-Yosida (4.12) no Teorema 4.13 são necessárias para garantir a existência de um operador resolvente para (4.1) satisfazendo a propriedade (S4).

Além disso, se  $B(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , temos, como no caso dos semigrupos, que esta condição também é suficiente.

**Teorema 4.17.** *Suponha que as condições (H<sub>0</sub>) e (H<sub>1</sub>) sejam válidas. Então, uma condição necessária e suficiente para a existência de um operador resolvente  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  para (4.1) satisfazendo (S4), é que existam constantes  $\omega > \beta$  e  $M \geq 1$  tais que  $(\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))$  é fechado com relação ao domínio  $D(A)$ , invertível e, para  $H(\lambda) = (\lambda I - A - \hat{B}(\lambda))^{-1}$ , satisfaz a desigualdade*

$$\left| \frac{1}{n!} H^{(n)}(\lambda) \right|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^{(n+1)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.14)$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ .

*Demonstração.* No Teorema 4.13 mostramos que as condições em (4.12) são necessárias para a existência de um operador resolvente  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  para (4.1) satisfazendo (S4).

Dessa forma, falta mostrarmos que esta condição também é suficiente. Para isso, considere as aproximações de Phillips

$$S_n(t) = e^{-nt} \left[ I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^2 t)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{(-1)^k}{k!} H^{(k)}(n) \right], \quad \text{para } n \in \mathbb{N}, \quad n > \omega \text{ e } t \geq 0.$$

Note que, para cada  $t \geq 0$ , os operadores  $S_n(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  com  $n > \omega$ , são operadores lineares limitados e além disso, temos

$$\begin{aligned} |S_n(t)|_{\mathcal{L}(X)} &\leq e^{-nt} \left[ 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^2 t)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{M}{(n-\omega)^{k+1}} \right] \\ &= e^{-nt} \left[ 1 + M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^2 t)^{k+1}}{(k+1)!(n-\omega)^{k+1}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{-nt} \left[ 1 + M + M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^2 t)^{k+1}}{(k+1)!(n-\omega)^{k+1}} \right] \\
&\leq e^{-nt} \left[ 1 + M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{n^2 t}{n-\omega} \right)^k \right] \\
&= e^{-nt} [1 + M e^{n^2 t (n-\omega)^{-1}}] \\
&= e^{-nt} + M e^{-nt + n^2 t (n-\omega)^{-1}} \\
&= e^{-nt} + M e^{\omega t \left( \frac{n}{n-\omega} \right)},
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que  $\{S_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}, n > \omega}$  é uniformemente limitada.

Mais ainda, a família  $\{S_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente limitada e exponencialmente limitada, logo podemos encontrar  $\hat{S}_n(\lambda)$ . Assim, usando a expansão de  $H\left(\frac{\lambda n}{\lambda + n}\right)$  em série de potências em torno do ponto  $n$ , obtemos que a transformada de Laplace de  $S_n(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é dada por

$$\begin{aligned}
\hat{S}_n(\lambda) &= \int_0^{\infty} \left[ e^{-(\lambda+n)t} + e^{-(\lambda+n)t} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^2 t)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{(-1)^k}{k!} H^{(k)}(n) \right) \right] dt \\
&= \frac{1}{\lambda + n} + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} t^{k+1} e^{-(\lambda+n)t} \frac{(n^2)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{(-1)^k}{k!} H^{(k)}(n) dt \right) \\
&= \frac{1}{\lambda + n} + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(n^2)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{\infty} t^{k+1} e^{-(\lambda+n)t} H^{(k)}(n) dt \right) \\
&= \frac{1}{\lambda + n} + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(n^2)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(k+1)!}{(\lambda+n)^{k+2}} H^{(k)}(n) \right) \\
&= \frac{1}{\lambda + n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^2)^{k+1}}{(\lambda+n)^{k+2}} \frac{(-1)^k}{k!} H^{(k)}(n) \\
&= \frac{1}{\lambda + n} + \frac{n^2}{(\lambda+n)^2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^2)^k}{(\lambda+n)^k} \frac{(-1)^k}{k!} H^{(k)}(n) \right) \\
&= \frac{1}{\lambda + n} + \frac{n^2}{(\lambda+n)^2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-n^2}{\lambda+n} \right)^k \frac{H^{(k)}(n)}{k!} \right) \\
&= \frac{1}{\lambda + n} + \frac{n^2}{(\lambda+n)^2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^{(k)}(n)}{k!} \left( n - \frac{n^2}{\lambda+n} - n \right)^k \right) \\
&= \frac{1}{\lambda + n} + \frac{n^2}{(\lambda+n)^2} H \left( n - \frac{n^2}{\lambda+n} \right) \\
&= \frac{1}{\lambda + n} + \frac{n^2}{(\lambda+n)^2} H \left( \frac{\lambda n}{\lambda + n} \right).
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} |\hat{S}_n(\lambda) - H(\lambda)| &= \left| \frac{1}{\lambda + n} + \frac{n^2}{(\lambda + n)^2} H\left(\frac{\lambda n}{\lambda + n}\right) - H(\lambda) \right| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda + n|} + \left(\frac{n}{|\lambda + n|}\right)^2 \left| H\left(\frac{\lambda n}{\lambda + n}\right) - H(\lambda) \right| + \left| \left(\frac{n}{|\lambda + n|}\right)^2 - 1 \right| |H(\lambda)| \end{aligned}$$

e então, como  $\lambda \mapsto H(\lambda)$  é contínua, o lado direito da desigualdade acima tende para zero quando  $n \rightarrow \infty$ , garantindo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}_n(\lambda) = H(\lambda)$ . Observe ainda que essa convergência é uniforme para  $\lambda$  em subconjuntos limitados.

Pela teoria desenvolvida ao longo deste trabalho, é de se esperar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = S(t)$ , para  $t \geq 0$ , com  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  sendo o operador resolvente que estamos procurando. Para provarmos que isso, de fato, ocorre, faremos alguns passos.

- (1) Considere a família de operadores  $U_n(t) = \int_0^t S_n(s) ds$ , para  $t \geq 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Da fórmula da transformada de Laplace inversa, para  $\gamma > \max\{0, \omega\}$ , obtemos

$$U_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} \hat{U}_n(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \lambda^{-1} e^{\lambda t} \hat{S}_n(\lambda) d\lambda,$$

pois

$$\begin{aligned} \hat{U}_n(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_n(t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t S_n(s) ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-\lambda t} S_n(s) ds dt = \int_0^\infty \int_s^\infty e^{-\lambda t} S_n(s) dt ds \\ &= \int_0^\infty \left( \int_s^\infty e^{-\lambda t} dt \right) S_n(s) ds = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda} S_n(s) ds \\ &= \lambda^{-1} \hat{S}_n(\lambda). \end{aligned}$$

Observe também que  $U_n(t) \in \mathcal{L}(X)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > \omega$  e  $t \geq 0$ . Isso ocorre pois, como vimos anteriormente, para cada  $t \geq 0$ , a família  $\{S_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}, n > \omega}$  é uniformemente limitada. Assim, para todo  $t \geq 0$ , existe  $C(t) > 0$  tal que  $|S_n(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq C(t)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > \omega$ , e então,

$$|U_n(t)|_{\mathcal{L}(X)} = \left| \int_0^t S_n(s) ds \right| \leq \int_0^t C(s) ds = tC(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > \omega.$$

Mais ainda, se  $x \in D(A)$ , temos

$$x = H(\mu)(\mu - A - \hat{B}(\mu))x = \mu H(\mu)x - H(\mu)Ax - H(\mu)\hat{B}(\mu)x$$

e assim,

$$H(\mu)x = (\mu)^{-1}x + (\mu)^{-1}H(\mu)A + (\mu)^{-1}H(\mu)\hat{B}(\mu), \quad (4.15)$$

para todo  $\mu \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\mu) > \omega$ .

Portanto, para  $x \in D(A)$ , de (4.15) obtemos

$$\begin{aligned}
 U_n(t)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda^{-1} e^{\lambda t} \left[ \frac{1}{\lambda+n} x + \frac{(n^2)}{(\lambda+n)^2} H\left(\frac{\lambda n}{\lambda+n}\right) x \right] d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda^{-1} e^{\lambda t} \left[ \frac{\lambda}{\lambda(n+\lambda)} x + \left( \frac{n^2}{(\lambda+n)^2} \right) \left( \frac{\lambda n}{\lambda+n} \right)^{-1} \left[ x + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + H\left(\frac{\lambda n}{\lambda+n}\right) Ax + H\left(\frac{\lambda n}{\lambda+n}\right) \hat{B}\left(\frac{\lambda n}{\lambda+n}\right) x \right] \right] d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda^{-2} e^{\lambda t} \left[ x + \frac{n}{\lambda+n} H\left(\frac{\lambda n}{\lambda+n}\right) \left( Ax + \hat{B}\left(\frac{\lambda n}{\lambda+n}\right) x \right) \right] d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda^{-2} e^{\lambda t} x d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{n \lambda^{-2} e^{\lambda t}}{\lambda+n} H\left(\frac{\lambda n}{\lambda+n}\right) \left( A + \hat{B}\left(\frac{\lambda n}{\lambda+n}\right) \right) x d\lambda.
 \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que a primeira integral acima satisfaz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda^{-2} e^{\lambda t} x d\lambda = tx$$

e na sequência mostraremos que a segunda integral é convergente, quando  $n \rightarrow \infty$ .

Do Teorema dos Resíduos A.11, sabemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^{-2} e^{\lambda t} x d\lambda = tx,$$

onde  $C$  é a curva fechada formada pelo semi-círculo  $C_R$  de centro em  $\gamma$  e raio  $R$ , contendo a origem, e pelo segmento  $\gamma + i\delta$ , com  $-R \leq \delta \leq R$ . Por outro lado, como  $\cos(\theta) \leq 0$  para  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ , temos

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C_R} \lambda^{-2} e^{\lambda t} x d\lambda \right| &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (Re^{i\theta+\gamma})^{-2} e^{(Re^{i\theta+\gamma})t} i e^{i\theta} x d\theta \right| \\
 &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{Re(tRe^{i\theta+\gamma})}}{|Re^{i\theta+\gamma}|^2} |x| d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{Rt \cos(\theta)} e^{\gamma t} |x|}{(R \cos(\theta) + \gamma)^2 + (R \sin(\theta))^2} d\theta \\
 &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{\gamma t} |x|}{(R \cos(\theta))^2 + (R \sin(\theta))^2} d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{\gamma t} |x|}{R^2} d\theta \\
 &= \frac{\pi e^{\gamma t} |x|}{R^2}
 \end{aligned}$$

e dessa forma, segue que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \lambda^{-2} e^{\lambda t} d\lambda = 0$ .

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \lambda^{-2} e^{\lambda t} x d\lambda &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \lambda^{-2} e^{\lambda t} x d\lambda \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^{-2} e^{\lambda t} x d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \lambda^{-2} e^{\lambda t} x d\lambda \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^{-2} e^{\lambda t} x d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \lambda^{-2} e^{\lambda t} x d\lambda \\
 &= tx.
 \end{aligned}$$

Para a segunda integral, observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2} \left( \frac{n}{\lambda+n} \right) H \left( \frac{\lambda n}{\lambda+n} \right) \left( Ax + \hat{B} \left( \frac{\lambda n}{\lambda+n} \right) x \right) = \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2} H(\lambda) (Ax + \hat{B}(\lambda)x),$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  com  $Re(\lambda) > \omega$ , por causa da continuidade das funções  $\lambda \mapsto H(\lambda)$  e  $\lambda \mapsto \hat{B}(\lambda)$ .

Além disso, para  $\lambda = \gamma + i\delta$ , com  $-\infty < \delta < \infty$ , temos

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2} \left( \frac{n}{\lambda+n} \right) H \left( \frac{\lambda n}{\lambda+n} \right) \left( Ax + \hat{B} \left( \frac{\lambda n}{\lambda+n} \right) x \right) \right| \\
 &\leq \frac{e^{\gamma t}}{(\gamma^2 + \delta^2)} \left( \frac{n}{\sqrt{(\gamma+n)^2 + \delta^2}} \right) \frac{M}{\left[ \left( \frac{n\gamma(\gamma+n) + \delta^2 n}{(\gamma+n)^2 + \delta^2} \right) - \omega \right]} \left[ |Ax| + \frac{|x|}{\left[ \left( \frac{n\gamma(\gamma+n) + \delta^2 n}{(\gamma+n)^2 + \delta^2} \right) + \beta \right]} \right] \\
 &\leq \frac{e^{\gamma t}}{\delta^2} k,
 \end{aligned}$$

onde  $k$  é a constante que limita os três últimos termos do produto acima para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $-\infty < \delta < \infty$ .

Então, pelo Teorema da convergência dominada A.10, temos

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{n\lambda^{-2} e^{\lambda t}}{\lambda+n} H \left( \frac{\lambda n}{\lambda+n} \right) \left( A + \hat{B} \left( \frac{\lambda n}{\lambda+n} \right) \right) x d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda^{-2} e^{\lambda t} H(\lambda) (A + \hat{B}(\lambda)) x d\lambda.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(t)x = tx + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda^{-2} e^{\lambda t} H(\lambda) (A + \hat{B}(\lambda)) x d\lambda,$$

sendo este limite uniforme para  $t$  em intervalos limitados.

Defina  $U(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(t)x$ , para  $x \in D(A)$  e  $t \geq 0$ .

Na verdade, podemos estender a definição de  $U(t)$  para todo o conjunto  $X$  uma vez que, como já argumentamos,  $\{U_n(t)\}_{n \geq 0}$  é limitado e  $\overline{D(A)} = X$ . Então, seja

$$U(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(t)x, \quad \text{para } x \in X \text{ e } t \geq 0.$$



Lembremos que essa convergência é uniforme para  $t$  em intervalos limitados.

Agora, com relação a transformada de  $U(\cdot)$ , observe que

$$\hat{U}(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{U}_n(\lambda) = \lambda^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}_n(\lambda) = \lambda^{-1} H(\lambda)$$

e, para  $x \in D(A)$ , segue de (4.15) que

$$\begin{aligned} \hat{U}(\lambda)x &= \lambda^{-2}x + \lambda^{-1}(\lambda^{-1}H(\lambda))Ax + \lambda^{-1}(\lambda^{-1}H(\lambda))\hat{B}(\lambda)x \\ &= \lambda^{-2}x + \lambda^{-1}\hat{U}(\lambda)Ax + \lambda^{-1}\hat{U}(\lambda)\hat{B}(\lambda)x \\ &= \lambda^{-2}x + \lambda^{-1}\hat{U}(\lambda)Ax + \lambda^{-1}(\widehat{U * B})(\lambda)x. \end{aligned}$$

Considere

$$V(t)x = tx + \int_0^t U(s)Ax ds + \int_0^t (U * B)(s)x ds, \quad x \in D(A).$$

Logo,

$$\hat{V}(\lambda)x = \lambda^{-2}x + \lambda^{-1}\hat{U}(\lambda)Ax + \lambda^{-1}\hat{U}(\lambda)\hat{B}(\lambda)x, \quad x \in D(A).$$

Como as funções  $t \mapsto U(t)Ax$  e  $t \mapsto (U * B)(t)x$  existem e são contínuas para  $x \in D(A)$ , pelo Teorema A.12, que nos dá a unicidade da Transformada de Laplace, nos garante que  $V(t)x = U(t)x$ , isto é,

$$V(t)x = U(t)x = tx + \int_0^t U(s)Ax ds + \int_0^t (U * B)(s)x ds, \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ e } x \in D(A).$$

Conseqüentemente, podemos concluir que  $t \mapsto U(t)x$  é continuamente diferenciável para  $x \in D(A)$ , com  $U'(t)x = x + U(t)Ax + (U * B)(t)x$ , para  $t \geq 0$  e  $x \in D(A)$ .

Note ainda que, pela limitação de  $\{S_n(t)\}_{n \geq 0}$ , para  $t, s \geq 0$ , temos

$$\begin{aligned} |U(t) - U(s)| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(t) - \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(s) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |U_n(t) - U_n(s)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^t S_n(\tau) d\tau - \int_0^s S_n(\tau) d\tau \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_s^t S_n(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_s^t |S_n(\tau)| d\tau \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_s^t \left[ e^{-n\tau} + M e^{\omega\tau\left(\frac{n}{n-\omega}\right)} \right] d\tau \\ &\leq \int_s^t [1 + M e^{\omega\tau}] d\tau \\ &\leq (1 + M e^{\omega a}) |t - s|, \end{aligned}$$

para  $t, s$  no intervalo limitado  $[0, a]$ , isto é,  $t \mapsto U(t)$  é lipschitziana em intervalos limitados.

Logo, como  $\overline{D(A)} = X$ , podemos concluir que  $t \mapsto U(t)x$  é continuamente diferenciável para todo  $x \in X$ .

- (2) Defina  $S(t)x = U'(t)x$  para todo  $x \in X$  e  $t \geq 0$ . Vamos mostrar que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é o operador resolvente que estamos procurando.

Antes de mais nada, observe que  $S(t)$  é um operador linear para todo  $t \geq 0$ . Mais ainda,  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$  para todo  $t \geq 0$ , pois

$$|S(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(t)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ e^{-nt} + M e^{\omega t \left( \frac{n}{n-\omega} \right)} \right] = M e^{\omega t},$$

para todo  $t \geq 0$ .

Isso também nos garante que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  satisfaz a condição **(S4)**.

- (3) Mostraremos agora que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  satisfaz a propriedade **(S1)**.

Como  $t \mapsto U(t)x$  é uma função continuamente diferenciável para todo  $x \in X$  e  $S(t)x = U'(t)x$ , segue que a função  $t \mapsto S(t)x$  é contínua em  $\mathbb{R}_+$  para todo  $x \in X$  fixado.

Para mostrarmos que  $S(0)x = x$ , para todo  $x \in X$ , tomemos inicialmente  $x \in D(A)$ . Então,

$$\begin{aligned} S(0)x = U'(0)x &= x + U(0)Ax + (U * B)(0)x \\ &= x + \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(0)Ax + 0 \\ &= x, \end{aligned}$$

pois  $U_n(t)Ax = \int_0^t S_n(s)Ax ds$  e  $(U * B)(t)x = \int_0^t U(t-s)B(s)x ds$ .

Se  $x \in X$ , como  $\overline{D(A)} = X$ , existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $D(A)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Logo,

$$\begin{aligned} |S(0)x - x| &\leq |S(0)|_{\mathcal{L}(X)}|x - x_n| + |S(0)x_n - x_n| + |x_n - x| \\ &\leq (|S(0)|_{\mathcal{L}(X)} + 1)|x - x_n|, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e assim, fazendo  $n \rightarrow \infty$ , obtemos que  $S(0)x = x$ .

Portanto,  $S(0)x = x$  para todo  $x \in X$  e a propriedade **(S1)** é válida.

- (4) Antes de prosseguirmos com as propriedades **(S2)** e **(S3)**, observe que, como provado anteriormente,  $\hat{U}(\lambda) = \lambda^{-1}H(\lambda)$ . Dessa forma,

$$\hat{S}(\lambda) = \widehat{(U'(t))} = \lambda \hat{U}(\lambda) - U(0) = H(\lambda),$$

isto é,  $\hat{S}(\lambda) = H(\lambda)$  como era de se esperar.

- (5) Usando a igualdade que acabamos de provar, mostraremos que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  satisfaz a equação (4.4) da condição **(S3)**.

Sejam  $x \in D(A)$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\lambda) > \omega$ . Por (4.15) temos

$$H(\lambda)x = \frac{x}{\lambda} + \frac{H(\lambda)Ax}{\lambda} + \frac{H(\lambda)\hat{B}(\lambda)x}{\lambda}$$

e então, visto que  $H(\lambda) = \hat{S}(\lambda)$ , usando propriedades da transformada de Laplace, concluímos que

$$\hat{S}(\lambda)x = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}\left(\int_0^t [S(s)Ax + (S * B)(s)x] ds\right),$$

onde  $\mathcal{L}$  indica a transformada de Laplace da função entre parênteses.

Logo, pela unicidade da transformada de Laplace, obtemos que

$$S(t)x = x + \int_0^t [S(s)Ax + (S * B)(s)x] ds, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Isso nos mostra que  $t \mapsto S(t)x$  é continuamente diferenciável para todo  $x \in D(A)$  e

$$\begin{aligned} S'(t)x &= S(t)Ax + (S * B)(t)x \\ &= S(t)Ax + \int_0^t S(t-s)B(s)x ds, \quad \text{para todo } t \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, a equação (4.4) da condição **(S3)** está demonstrada.

(6) Vejamos também que  $S(t)D(A) \subset D(A)$ .

Para isso, seja  $K(t) = B(t)(\lambda_0 I - A)^{-1}$ , para algum  $\lambda_0 \in \rho(A)$ , e denotamos por  $L(t)$  o núcleo resolvente de  $K(t)$ , isto é,

$$L(t) = K(t) - (K * L)(t) = K(t) - (L * K)(t).$$

Dado  $x \in D(A)$ , defina

$$f(t) = (\lambda_0 I - A)^{-1}(S'(t)x - (L * S')(t)x), \quad \text{para } t \geq 0.$$

Note que, pelo fato de  $(\lambda_0 I - A) : D(A) \rightarrow X$  ser uma bijeção,  $f(t) \in D(A)$  para todo  $t \geq 0$ . Além disso,  $f$  tem transformada de Laplace, com

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda_0 I - A)^{-1} (S'(t)x - (L * S')(t)x) dt \\ &= (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[ \int_0^\infty e^{-\lambda t} S'(t)x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} (L * S')(t)x dt \right] \\ &= (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[ \widehat{S'}(\lambda)x - \widehat{(L * S')}(\lambda)x \right] \\ &= (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[ \lambda \hat{S}(\lambda)x - x - \hat{L}(\lambda) \widehat{S'}(\lambda)x \right] \\ &= (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[ \lambda \hat{S}(\lambda)x - x - \hat{L}(\lambda) (\lambda \hat{S}(\lambda)x - x) \right] \\ &= (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[ I - \hat{L}(\lambda) \right] (\lambda \hat{S}(\lambda)x - x) \\ &= (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[ I - \hat{L}(\lambda) \right] (I + \hat{K}(\lambda)) A \hat{S}(\lambda)x \\ &= (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[ I + \hat{K}(\lambda) - \hat{L}(\lambda) - \hat{L}(\lambda) \hat{K}(\lambda) \right] A \hat{S}(\lambda)x \\ &= (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[ I - \hat{L}(\lambda) + (\hat{K}(\lambda) - \hat{L}(\lambda) \hat{K}(\lambda)) \right] A \hat{S}(\lambda)x \\ &= (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[ I - \hat{L}(\lambda) + \hat{L}(\lambda) \right] A \hat{S}(\lambda)x \\ &= (\lambda_0 I - A)^{-1} A \hat{S}(\lambda)x \\ &= \lambda_0 (\lambda_0 I - A)^{-1} \hat{S}(\lambda)x - \hat{S}(\lambda)x. \end{aligned}$$

Assim, a unicidade da transformada de Laplace garante que  $f(t) = \lambda_0(\lambda_0 I - A)^{-1}S(t)x - S(t)x$ , ou seja,  $S(t)x = \lambda_0(\lambda_0 I - A)^{-1}S(t)x - f(t)$ , para todo  $t \geq 0$ .

Consequentemente, como  $f(t) \in D(A)$  e  $\lambda_0(\lambda_0 I - A)^{-1}S(t)x \in D(A)$ ,  $S(t)x \in D(A)$  para todo  $t \geq 0$  e  $x \in D(A)$ . Portanto, temos  $S(t)D(A) \subset D(A)$ .

- (7) Antes de finalizarmos as propriedades necessárias para obtermos a condição **(S2)**, mostraremos que a equação (4.4) da condição **(S3)** é satisfeita.

Para isso, dado  $x \in D(A)$ , observe que

$$A\hat{S}(\lambda)x + (\widehat{B * S})(\lambda)x = A\hat{S}(\lambda)x + \hat{B}(\lambda)\hat{S}(\lambda)x = \lambda\hat{S}(\lambda)x - x = \widehat{S}'(\lambda)x$$

Então, tomando a transformada inversa, temos

$$S'(t)x = AS(t)x + (B * S)(t)x = AS(t)x + \int_0^t B(t-s)S(s)x ds,$$

que é a equação resolvente (4.4).

- (8) Para concluirmos a demonstração deste teorema falta mostrarmos que **(S2)** é satisfeita.

No passo (6), provamos que  $S(t)D(A) \subset D(A)$  para todo  $t \geq 0$ . Já no passo (5), mostramos que a função  $t \mapsto S(t)x$  é continuamente diferenciável.

Agora, como  $AS(t)x = S'(t)x + \int_0^t B(t-s)S(s)x ds$ , por conta do passo (7), concluímos que  $t \mapsto AS(t)x$  é contínua para todo  $x \in D(A)$ .

Portanto, a condição **(S2)** também está satisfeita e então,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é um operador resolvente para (4.1) satisfazendo a condição **(S4)**.

□

# APÊNDICE A – Resultados Complementares

**Teorema A.1.** [Teorema fundamental do Cálculo]. Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Uma função  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  pertence a  $AC_{loc}(I, \mathbb{R})$  se, e somente se:

- (i)  $u$  é contínua em  $I$ ;
- (ii)  $u$  é diferenciável quase sempre em  $I$  e  $u' \in L^1_{loc}(I)$ ;
- (iii) o Teorema fundamental do cálculo é válido, isto é, para todo  $x, x_0 \in I$ ,

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(t)dt.$$

*Demonstração.* (LEONI, 2009, Theorem 3.30, pág. 85). □

**Teorema A.2.** [Desigualdade generalizada de Gronwall]. Sejam  $\phi, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas,  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável tal que  $\beta(t) \geq 0, \forall t \in [a, b]$ , e

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Então,

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

*Demonstração.* (HALE, 1980, Lemma 6.2, pág. 36). □

Observamos que, nas condições da Desigualdade generalizada de Gronwall, se  $\alpha'$  existe e  $\alpha'(t) \geq 0, \forall t \in [a, b]$ , então, usando integração por partes para resolver a integral

$$\int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds,$$

obtemos

$$\phi(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \quad \forall t \in [a, b].$$

**Lema A.3.** [Lema de Dini]. Se  $f : (a, b) \rightarrow X$  é contínua em  $(a, b)$  e admite uma derivada à direita,  $f'_+$ , contínua em  $(a, b)$ , então  $f$  é continuamente diferenciável em  $(a, b)$ .

*Demonstração.* (GOMES, 2012, Lema A.3.2, pág. 149). □

Da Definição 4.8,  $AC(J, X)$  denota o espaço das funções absolutamente contínuas de  $J$  em  $X$ . Considere também  $AC_{loc}(J, X)$  o espaço das funções localmente absolutamente contínuas de  $J$  em  $X$ , ou seja, funções absolutamente contínuas num intervalo limitado.

**Lema A.4.** *Se  $A \in \mathcal{L}(X)$  e  $|A|_{\mathcal{L}(X)} < 1$  então  $I - A$  é invertível.*

*Demonstração.* O operador  $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$  é linear e limitado em  $X$ . Como  $A$  comuta com suas potências, então, pela série de potências tem-se

$$(I - A)f(A) = f(A)(I - A) = I.$$

Portanto  $I - A$  é invertível e  $(I - A)^{-1} = f(A)$ . □

**Proposição A.5.** *Sejam  $(X, |\cdot|)$  um espaço de Banach e  $G \in \mathcal{L}(X)$  com  $|G| \leq q < 1$ . Então  $I - G$  tem uma inversa contínua (isto é,  $(I - G)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ ) e vale a desigualdade  $|(I - G)^{-1}| \leq (1 - q)^{-1}$ . Além disso, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} G^n$  converge para  $(I - G)^{-1}$  e*

$$|(I - G)^{-1} - I - G| = O(|G|^2),$$

quando  $|G| \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* O resultado é um caso particular do Lema A.4. Note que  $f(G) = \sum_{n=0}^{\infty} G^n$  converge para  $(I - G)^{-1}$ . □

**Teorema A.6.** *[Princípio da limitação uniforme]. Seja  $X$  um espaço de Banach e  $Y$  um espaço normado qualquer. Se  $(T_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  é uma sequência tal que  $T_\alpha \in \mathcal{L}(X, Y)$ , para todo  $\alpha \in \Lambda$ , e para cada  $x \in X$ , existe uma constante  $C_x > 0$  de modo que  $|T_\alpha x| \leq C_x$ , para todo  $\alpha \in \Lambda$ , então a sequência  $(|T_\alpha|)_{\alpha \in \Lambda}$  é limitada em  $\mathcal{L}(X, Y)$ , ou seja, existe  $C > 0$  tal que*

$$|T_\alpha| \leq C, \quad \alpha \in \Lambda$$

*Demonstração.* (KREYSZIG, 1989, Theorem 4.7-3, pág. 249). □

**Teorema A.7.** *[Teorema do ponto fixo de Banach]. Seja  $X$  um espaço métrico completo e  $T : X \rightarrow X$  uma contração em  $X$ . Então  $T$  tem um único ponto fixo.*

*Demonstração.* (KREYSZIG, 1989, Theorem 5.1-2, pág. 300). □

**Teorema A.8.** *Seja  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$  um operador linear limitado, onde  $X$  é um espaço vetorial normado e  $Y$  é um espaço de Banach. Então  $T$  tem uma única extensão limitada  $\tilde{T} : \overline{D(T)} \rightarrow Y$ , com  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .*

*Demonstração.* (KREYSZIG, 1989, Theorem 2.7-11). □

**Teorema A.9.** *Suponha que  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach e seja  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$  um operador linear. Se  $T$  é invertível com  $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ , então  $T$  é um operador linear fechado.*

*Demonstração.* (TAYLOR, 1958, Theorem 4.2-c com  $f = T^{-1}$ ). □

**Teorema A.10.** *[Teorema da convergência dominada de Lebesgue]. Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções integráveis convergindo, em quase todo ponto, para uma função real mensurável  $f$ . Se existir uma função  $g$  tal que  $|f_n| \leq g$  para todo  $n$ , então  $f$  é integrável e*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

*Demonstração.* (BARTLE, 1995, Theorem 5.6, pág. 44). □

**Teorema A.11.** *[Teorema do Resíduo]. Seja  $C$  um caminho fechado tal que uma função  $f$  é analítica sobre  $C$  e no interior de  $C$  exceto num número finito de pontos singulares  $z_1, z_2, \dots, z_n$  interiores a  $C$ . Se  $K_1, K_2, \dots, K_n$  são os resíduos de  $f$  nesses pontos singulares, então*

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (K_1 + K_2 + \dots + K_n),$$

onde a integral é calculada no sentido anti-horário ao longo de  $C$ .

*Demonstração.* (CHURCHILL, 1975, Teorema do Resíduo, pág. 147). □

**Teorema A.12.** *[Teorema de Lerch]. Funções contínuas distintas definidas no intervalo  $[0, \infty)$ , admitem transformadas de Laplace distintas.*

*Demonstração.* (SCHIFF, 1999, Theorem 1.23, pág. 24). □

**Lema A.13.** *Se  $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$  então a transformada de Laplace de  $f$  satisfaz*

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda} f(t) dt \rightarrow 0,$$

sempre que  $|\lambda| \rightarrow \infty$  com  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ .

*Demonstração.* (BOCHNER S.; CHANDRASEKHARAN, 1949, pág. 02) □

## Referências

BARTLE, G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. Nova York: John Wiley & Sons. Inc., 1995. Citado na página 94.

BOCHNER S.; CHANDRASEKHARAN, K. *Fourier Transforms*. New York: Princeton University Press, 1949. Citado na página 94.

CHEN G.;GRIMMER, R. Semigroups and integral equations. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 2, p. 133–154, 1980. Citado na página 11.

CHEN G.;GRIMMER, R. Integral equations as evolution equations. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 45, n. 1, p. 53–74, jul 1982. Citado na página 11.

CHURCHILL, R. *Variáveis complexas e suas aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1975. Citado na página 94.

FRIEDMAN A.;SHINBROT, M. Volterra integral equations in banach space. *Transactions of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, Providence, v. 126, n. 1, p. 131–179, jan 1967. Citado na página 11.

GOMES, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2012. Citado na página 92.

GRIMMER R.;KAPPEL, F. Series expansions for resolvents of volterra integrodifferential equations in banach spaces. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, v. 15, n. 3, p. 595–604, jan 1984. Citado na página 11.

GRIMMER R.;PRUSS, J. On linear volterra equation in banach spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, New York, v. 11, n. 1, p. 189–205, jan 1985. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 78.

GRIMMER R.;SCHAPPACHER, W. Weak solutions of integro-differential equations and resolvent operators. *Journal of Integral Equations and Applications*, Rocky Mountain Mathematics Consortium, Arizona, v. 6, p. 205–229, 1984. Citado na página 11.

HALE, J. K. *Ordinary differential equations*. Florida: Krieger Publishing Company, 1980. Citado na página 92.

KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley & Sons., 1989. Citado na página 93.

LEONI, G. *A first Course in Sobolev Spaces*. Pittsburg: Carnegie Mellon University, Ams, Hardcover vol. 105, 2009. Citado na página 92.

MILLER, R. Volterra integral equation in a banach space. *Funkcial. Ekvac*, Elsevier, Amsterdam, v. 18, p. 163–193, 1975. Citado na página 11.



- MILLER, R. Well-posedness and stability of linear volterra integrodifferential equations in abstract spaces. *Funkcial. Ekvac*, Elsevier, Amsterdam, v. 21, p. 279–305, 1978. Citado na página 11.
- PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York: John Wiley & Sons., 1983. Citado na página 11.
- PRATO G.;IANELLI, M. D. Linear integro-differential equations in banach spaces. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, European Mathematical Society, Padova, v. 62, n. 2, p. 207–219, jul 1980. Citado na página 11.
- PRUSS, J. On resolvent operators for linear integrodifferential equations of volterra type. *Journal of Integral Equations and Applications*, Rocky Mountain Mathematics Consortium, Arizona, v. 5, p. 211–236, 1983. Citado na página 11.
- SCHIFF, J. *The Laplace Transform: Theory and Applications*. New York: Springer, 1999. Citado na página 94.
- STRAUSS, W. *Partial differential equations an introduction*. New York: John Wiley & Sons., 1992. Citado na página 73.
- TAYLOR, A. *Introduction to Functional Analysis*. New York: John Wiley & Sons., 1958. Citado na página 94.