UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
Campus de Ilha Solteira

José Luís Duarte

Problemas de Máximos e Mínimos no Ensino Médio

Ilha Solteira
2014

José Luís Duarte

Problemas de Máximos e Mínimos no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador:
Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin.

Ilha Solteira
2014

Duarte, José Luís.
Problemas de máximos e mínimos no ensino médio / José Luís Duarte. -- São José do Rio Preto, 2014
66 f. : il.

Orientador: Pedro Toniol Cardin
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática) 3. Máxima e mínima. 4. Cálculo diferencial. 5. Cálculo integral. I. Cardin, Pedro Toniol. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.5

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

José Luís Duarte

Problemas de Máximos e Mínimos no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin
UNESP – Campus de Ilha Solteira
Orientador

Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho
UNESP – Campus de Ilha Solteira

Prof. Dr. Wendel Cleber Soares
FAI – Faculdades Adamantinenses Integradas

Ilha Solteira
22 de setembro de 2014

Aos meus familiares (Marcela
e Otávio), pela compreensão
nos momentos que estive
ausente......
dedico.

“Dê-me, Senhor, a grandeza para entender, capacidade para reter, método e faculdade para aprender, sutileza para interpretar, graça e abundância para falar.
Dê-me, Senhor, acerto ao começar, direção ao progredir e perfeição ao concluir.”

(São Tomás de Aquino)

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por me ajudar em mais esta etapa da minha vida. Agradeço aos meus familiares pela paciência e pelo apoio. Aos meus amigos da minha turma de pós-graduação (Profmat), e demais amigos da Unesp pelo companheirismo em todos os momentos. A todas as pessoas e funcionários da Unesp de Ilha Solteira, do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho. A CAPES pelo auxílio financeiro. Agradeço também a todos os professores do programa PROFMAT da Unesp de Ilha Solteira, em especial ao Professor Dr. Pedro Toniol Cardin, pela orientação, pela paciência e dedicação na elaboração deste trabalho.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é fazer um estudo sobre problemas de máximos e mínimos de funções de uma variável no ensino médio. É destinado a professores e alunos de matemática deste nível de ensino. Tem a pretensão de melhorar a compreensão deste tema, muitas vezes só abordado a nível de funções quadráticas. Serve também como uma aplicação da fórmula de Taylor. Neste trabalho queremos incentivar alunos e professores de matemática ao estudo de máximos e mínimos de funções de uma variável.

Resolveremos diversos problemas envolvendo máximos e mínimos de funções polinomiais do 2º grau, utilizando os conceitos básicos de vértice, ponto de máximo, ponto de mínimo. Iremos também mostrar a resolução de problemas de máximos e mínimos que não recaem em uma função quadrática, utilizando o conceito de derivada. Por fim, para estes últimos problemas, utilizaremos a fórmula de Taylor para aproximar a função obtida por seu polinômio de Taylor de 2ª ordem. Encontraremos o valor máximo ou mínimo de tal polinômio usando as ferramentas básicas de função quadrática. De fato, devido à teoria de Taylor, constataremos que o valor ótimo obtido no problema e o valor máximo ou mínimo de tal polinômio estarão suficientemente próximos.

Palavras chave: Problemas de máximos e mínimos, funções quadráticas, fórmula de Taylor.

Abstract

The main goal of this work is to make a study about problems of maxima and minima of functions of one variable in High School. It is intended for teachers and students of mathematics of this level of learning. It intends to improve the understanding of this subject which it is often only addressed to the level of quadratic functions. It also serves as an application of the Taylor formula. In this work we want to encourage students and teachers of mathematics to the study of maxima and minima of functions of one variable.

We will solve several problems involving maxima and minima of polynomial functions of the second degree, using the basic concepts of vertex, maximum point, minimum point. We will also show the resolution of problems of maxima and minima that do not lead to a quadratic function, using the derivative concept. Finally, for these last problems, we will make use of the Taylor formula in order to approximate the function obtained by its Taylor polynomial of second order. We will find the maximum or minimum value of such polynomial by using the basic tools of quadratic function. In fact, due to Taylor theory, we will note that the optimal value obtained in the problem and the maximum or minimum value of such polynomial will be sufficiently close.

Key words: Plroblems of maxima and minima, quadratic functions, Taylor formula.

Sumário

Introdução

O conceito de função constitui um dos pilares da Matemática. Sofreu uma grande evolução ao longo dos séculos, sendo que a introdução do método analítico na definição de função (séculos XVI e XVII) veio para revolucionar a matemática.

Desde a Grécia antiga até a Idade Moderna o modelo de teoria matemática dominante era a Geometria Euclidiana baseada nos entes primitivos como o ponto, a reta e o plano. Foi a partir desta época que uma nova teoria, o Cálculo Infinitesimal, surgiu e acabou por se revelar fundamental no desenvolvimento da Matemática contemporânea. A noção de função foi um dos fundamentos do cálculo infinitesimal. Portanto, a noção de função não é muito antiga. No entanto, aspectos muito simples desse conceito podem ser encontrados em épocas anteriores (por exemplo, na mais elementar operação de contagem). Mas o seu surgimento como conceito claramente individualizado e como objeto de estudo corrente em matemática remonta apenas ao final do século XVII.

A origem da noção de função confunde-se assim com os primórdios do Cálculo Infinitesimal. Ela surgia de forma um tanto confusa nos "fluentes"e "fluxões"de Newton (1642-1727). Newton aproxima-se bastante do sentido atual de função com a utilização dos termos *relatia quantias* para designar variável dependente e *genita* para designar uma quantia obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais.

Foi Leibniz (1646-1716) quem primeiro usou o termo "função"em 1673 no manuscrito latino *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus.* Leibniz usou o termo apenas para designar, em termos muito gerais, a dependência de uma curva de quantidades geométricas, como as subtangentes e subnormais. Introduziu igualmente a terminologia de "constante", "variável"e "parâmetro".

Com o desenvolvimento do estudo de curvas por meios algébricos, tornou-se indispensável um termo que representasse quantidades dependentes de alguma variável por meio de uma expressão analítica. Com esse propósito, a palavra "função"foi adaptada a partir das correspondências trocadas entre 1694 e 1698 por Leibniz e Johann Bernoulli (1667-1748).

O termo "função"não aparecia ainda num léxico matemático surgido em 1716. Mas, dois anos mais tarde, Johann Bernoulli publicou um artigo, que viria a ter grande divulgação, contendo a sua definição de função de certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constante.

Um retoque final nesta definição viria a ser dado em 1748 por **Euler** (1707-1783), um antigo aluno de Bernoulli, substituindo o termo "quantidade"por "expressão analítica". Foi também Euler quem introduziu a notação $f(x)$.

A noção de função era assim identificada na prática com a expressão analítica, situação que haveria de vigorar pelos séculos XVIII e XIX, apesar de cedo para se perceber que conduziria a diversas incoerências e limitações (de fato, uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas diferentes).

Esta noção, associada às noções de continuidade e de desenvolvimento em série, conheceu sucessivas ampliações e clarificações, que lhe alteraram profundamente a sua natureza e significado.

Como consequência da evolução do estudo de funções surgem numerosas aplicações da matemática a outras ciências. Pois, os cientistas partindo de observações procuravam uma fórmula (uma função) para explicar os sucessivos resultados obtidos. A função era, então, o modelo matemático que explicava a relação entre as variáveis.

Assim o conceito de função que hoje nos parece simples é resultado de uma evolução histórica conduzindo sempre e cada vez mais à abstração, e que só no século XIX teve o seu final.

Na atualidade as funções estudadas na Análise Infinitesimal, e usadas nas aplicações, retêm no fundamental a idéia de dependência entre variáveis.

A noção de função é de importância central na concepção e no estudo de modelos (dinâmicos, probabilísticos, de distribuição espacial, ...), qualquer que seja a sua natureza, continuando por isso a ser uma noção chave na matemática atual.

Da observação e manuseio de muitos livros didáticos, geralmente do ensino médio, notamos que o conceito de função é organizado em três aspectos: um aspecto concreto, onde o conceito de funções é motivado por situações ditas cotidianas; um aspecto abstrato, em que o conceito de função é apresentado como um relacionamento entre os elementos de dois conjuntos e finalmente um aspecto operacional, em que se enfoca a manipulação algébrica de funções reais de variável real. No aspecto concreto, o que se espera é convencer os alunos da importância do conceito matemático de função por meio de situações supostamente familiares, mas que nem sempre são escolhidas de forma adequada. No aspecto abstrato, o objetivo é apresentar o conceito de função com todos os seus elementos, ou seja, domínio, contra-domínio, conjunto imagem, mas quase sempre os exemplos dados envolvem apenas conjuntos finitos. A forma mais comum de representação são os chamados diagramas de Venn. Logo após a abordagem muda significativamente para o aspecto operacional, ou seja, a ênfase passa a ser o estudo de propriedades de certas classes de funções reais elementares, por exemplo, funções afins, quadráticas, modular, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, todas representadas na forma algébrica. São enfatizados alguns procedimentos, muitas vezes inadequados, para manipulações algébricas e obtenção de gráficos. Nesse momento, a preocupação com o domínio e contra-domínio é esquecida e passa a se concentrar nas fórmulas algébricas. Os dois aspectos anteriores são deixados de lado e a partir daí no restante do livro a abordagem passa a ser essa. Notamos que existem poucas relações entre os três aspectos. Em alguns casos a separação é tão evidente que pode causar a impressão de que o termo "função"é empregado para noções matemáticas inteiramente distintas.

Acreditamos que o estudo das propriedades das funções reais elementares no ensino básico, com ênfase em suas principais classes, é certamente importante, mas no entanto, a separação excessiva entre essas classes e entre os diferentes aspectos, onde a função é abordada, pode prejudicar e muito a aprendizagem.

A fim de saber qual o tipo de função que deve ser empregado para resolver um determinado problema, é necessário comparar as características do problema com as características da função que se quer empregar. Para isso é necessário que se conheçam os vários tipos de funções, bem como a sua caracterização. Sem esse conhecimento é impossível aplicar de forma satisfatória os conceitos e métodos matemáticos para resolver os problemas concretos que ocorrem, tanto no dia-a-dia como nas aplicações da Matemática nas outras ciências e à tecnologia.

Uma parte importante das aplicações do Cálculo Diferencial está relacionada ao problema de encontrar máximos e mínimos de funções. São os chamados problemas de otimização e que consistem, de maneira geral, em construir um modelo matemático do problema no qual alguma grandeza é dada por uma função derivável de uma ou mais variáveis e a informação que buscamos consiste em encontrar o máximo ou mínimo da função.

Neste trabalho, abordaremos todos os aspectos do conceito de função, e daremos ênfase na utilização desses conceitos e propriedades, para obtenção de resultados que maximizam ou minimizam algumas situações, modeladas por conceitos matemáticos, afim de ajudar a resolver problemas de otimização.

Queremos acreditar que as aplicações aqui sugeridas despertem o interesse, justifiquem o esforço, exibam a eficiência e a utilidade dos métodos da Matemática mas, por outro lado, só podem ser alcançadas se contarem com uma base conceitual adequada.

A dissertação é organizada da seguinte forma: No primeiro capítulo abordaremos o conceito de função real de uma variável, isto é, funções $f : X \to \mathbb{R}$ que têm como domínio um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e cujos valores $f(x)$, para todo $x \in X$, são números reais. No segundo capítulo feremos um estudo sobre a função quadrática, dando ênfase a utilização do seu vértice para obtenção de valores que maximizam ou minimizam a função quadrática, obtida na modelagem de alguma situção problema. No terceiro capítulo, apresentaremos e resolveremos vários problemas de máximo e mínimos de situações que recaem em uma função quadrática. E finalmente, no quarto capítulo, mostraremos algumas situações que não recaem em uma função quadrática. Primeiramente, resolveremos o problema utilizando as ferramentas do Cálculo Diferencial. Em seguida, utilizamos a fórmula de Taylor para aproximar a função obtida por seu polinômio de Taylor de 2ª ordem. Encontraremos o valor máximo ou mínimo de tal polinômio usando as ferramentas básicas de função quadrática. De fato, devido à teoria de Taylor, constataremos que os valores obtidos nas duas situações estarão bastante próximos. Neste mesmo capítulo, fazemos algumas considerações finais a respeito do retorno do ensino dos conceitos básicos (limite e derivada) do Cálculo Diferencial no ensino médio.

Esperamos que este trabalho colabore com a melhoria do ensino de matemática, em todos os níveis, do básico ao superior. Que sirva de incentivo ao estudo de matemática a alunos e professores tanto do ensino básico como também dos anos iniciais do ensino superior.

Capítulo 1

Funções

1.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo fazer uma revisão geral e breve das ideias fundamentais relacionadas com o conceito de função. Apresentaremos o conceito de função de uma variável bem como alguns elementos que a compõe. Para um desenvolvimento mais amplo deste assunto recomendamos a leitura do capítulo 3 de [1].

Definição 1.1.1. *Dados os conjuntos X e Y, uma função $f : X \to Y$ (lê-se: uma função de X em Y) é uma regra (ou um conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$, um e somente um elemento $y = f(x) \in Y$.*

O conjunto X chama-se **domínio** e Y é o **contra-domínio** da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a **imagem** de x pela função f, ou o **valor** assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$.

Definição 1.1.2. *Dada uma função $f : X \to Y$ chamamos de* **imagem** *de f o subconjunto de Y, denotado por $Im(f)$, dos valores assumidos pela função f, ou seja, $Im(f) = \{f(x) : x \in X\}$.*

É importante observar que $f(x)$ é a imagem do elemento $x \in X$ pela função f, ou o valor da função f no ponto $x \in X$. É comum encontrar em livros antigos e até atuais a expressão "a função $f(x)$"quando o correto seria dizer "a função f". Algumas vezes a linguagem incorreta torna a comunicação mais rápida, mas é indispensável a cada momento ter a noção do que se está fazendo.

Note que em algumas funções é facil utilizar a terminologia correta. Por exemplo, é fácil acostumar-se a escrever as funções $sen : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, deixando as notações $sen(x)$ e $log(x)$ para os números reais que são os valores destas funções num dado ponto x. Observe agora que quando se trata de uma função polinomial, é mais fácil dizer "a função $x^2 - 3x + 2$"em vez da forma correta que seria "a função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x^2 - 3x + 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$". O mesmo se dá com a função exponencial e^x, que cada vez mais tem se tornado mais frequente escrever $exp(x) = e^x$ e assim poder falar da função $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Observação: É importante deixar claro que uma função é um conceito em matemática que consiste de três ingredientes:

1º Um conjunto onde a função está definida, que é chamado domínio da função.

2º O contra–domínio, que é o conjunto onde a função toma seus valores.

3º Uma regra, conjunto de instruções ou algoritmo que permite a cada elemento do domínio associar um único elemento no contra–domínio.

Diante do exposto acima, temos que duas funções $f : X \to Y$ e $g : X' \to Y'$, são iguais se, e somente se, $X = X', Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Mesmo quando dizemos simplesmente "a funçãof", ficam subentendidos seu domínio X e seu contra-domínio Y. Sem que eles sejam explicitados, a função não existe. Desse modo quando perguntamos "Qual é o domínio da função $f(x) = 1/x$?". Rigorosamente falando essa pergunta não faz sentido. A pergunda correta seria : "Qual é o maior subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ tal que a fórmula $f(x) = 1/x$ define uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?". Novamente notamos que a pergunta incorreta é mais simples de formular. Por exemplo, podemos definir o volume de uma esfera como uma função do seu raio pela fórmula:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Esta fórmula está definida para todos os números reais, mas a função volume não está definida para valores negativos de r. Assim se a nossa intenção é estudar o volume podemos restringir o domínio para todo $r \geq 0$.

Vejamos a seguir mais alguns exemplos de funções:

Exemplo 1: Sejam X o conjunto de todos os quadriláteros do plano Π e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Se a cada $q \in X$, fizermos corresponder o número real $f(q) =$ ao perímetro do quadrilátero q, obteremos uma função $f : X \to \mathbb{R}$.

Exemplo 2: Sejam C o conjunto de todas as circunferências do plano Π e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Se a cada $c \in C$, fizermos corresponder o número real $g(c) =$ a área da circunferência c, obteremos uma função $g : C \to \mathbb{R}$.

Exemplo 3: A correspondência que associa a cada número natural n seu dobro $2n$ define uma função $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, com $d(n) = 2n$.

Observação: Nessa dissertação trabalharemos com funções cujos domínios são subconjuntos de $\mathbb{R}$ e cujo contradomínio é $\mathbb{R}$. Como forma de exemplo, vamos observar as seguintes regras e vamos estabelecer as condições necessárias para que tais regras sejam funções definidas em um subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$. Note que a expressão dentro do radical não pode ser negativa. Como devemos ter $x + 3 \geq 0$, então $x \geq -3$, o domínio de f é $D = [-3, +\infty[$.

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-5}$. Nesse caso a expressão dentro do radical não pode ser negativa; portanto $x \geq 0$. Também, o denominador de uma fração não pode ser zero; portanto, $x \neq 5$. O domínio de g é o intervalo $[0, +\infty[$ com o número 5 removido, o qual podemos escrever como a união de dois intervalos da seguinte maneira: $D = [0, 5[\cup]5, +\infty[$.

c) $A(s) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}s^2$, onde $A(s)$ é a área de um triângulo equilátero com lados de comprimento s. Repare agora que a expressão algébrica tem como domínio todos os números reais, mas pelo que a função representa, s não pode ser negativo. O domínio de A é o intervalo $D = [0, +\infty[$.

1.2 Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Podemos classsificar as funções como injetivas, sobrejetivas e bijetivas .

Definição 1.2.1. *Uma função $f : X \to Y$ chama-se* **injetiva** *quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y. Ou seja, f é injetiva quando $x_1 \neq x_2$ em X então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Esta condição pode também ser expressa em sua forma contrapositiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

A função $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que associa a cada número natural n seu dobro $2n$ é um exemplo de função injetiva. Já a função $f : X \to \mathbb{R}$ que associa a cada quadrilátero o seu perímetro, não é uma função injetiva, pois podemos ter quadriláteros distintos com o mesmo perímetro.

Definição 1.2.2. *Uma função $f : X \to Y$ chama-se* **sobrejetiva** *quando, para qualquer elemento $y \in Y$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

A função $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que associa a cada número natural n seu dobro $2n$ não é um exemplo de função sobrejetiva, pois, por exemplo, o elememto $3 \in \mathbb{N}$ não é o dobro de algum $n \in \mathbb{N}$. Do mesmo modo a função que associa a cada circunferência do plano Π sua área, não é uma função sobrejetora, pois um número real negativo não é área de alguma circunferência de Π.

Já a função $g : S \to \Delta$ que associa cada segmento de reta $AB \in S$, onde S é o conjunto dos segmentos de reta do plano Π e Δ o conjunto das retas desse mesmo plano, sua mediatriz $g(AB)$, é uma função sobrejetiva, pois toda reta do plano é mediatriz de algum segmento .

Observação: Sempre é possível tornar uma função $f : X \to Y$ que não seja sobrejetiva em uma função sobrejetiva. Para isso, basta restringirmos o seu contradomínio Y ao conjunto imagem $Im(f)$. A função $f : X \to Im(f)$ é claramente sobrejetiva. Enfatizamos que as funções $f : X \to Y$ e $f : X \to Im(f)$ são distintas uma vez que possuem contradomínos diferentes.

Definição 1.2.3. *Uma função $f : X \to Y$ chama-se* **bijetiva***, ou* **correspondência biunívoca** *entre X e Y quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.*

Para ilustrar de forma mais eficás este conceito, forneceremos alguns exemplos:

Exemplo 1: Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{1, 4, 9, 16, 25\}$. Definindo $f : X \to Y$ pela regra $f(n) = n^2$, temos uma correspondência biunívoca, onde $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 16$ e $f(5) = 25$.

Exemplo 2: Um exemplo particularmente simples de uma função bijetiva é a **função identidade** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3: Um exemplo curioso de correspondência biunívoca foi descoberto pelo físico **Galileu Galilei**, que viveu há quatrocentos anos. Seja P o conjunto dos números naturais pares:

$$P = \{2, 4, 6, 8, ...\}$$

Obtém-se uma correspondência biunívoca $f : \mathbb{N} \to\ P$, onde $p(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O interessante é que P é subconjunto próprio de $\mathbb{N}$.

Exemplo 4: Sejam $X = \{1\}$ e $Y = \{0, 1\}$. É claro que não pode existir uma correspondência biunívoca $f : X \to Y$, portanto $f : X \to Y$ não é bijetiva.

1.3 Gráfico de uma função

A partir de um simples gráfico podemos descobrir muitas informações a respeito do comportamento das funções (ou situações) que eles representam. Por meio dele, podemos ter uma visão do crescimento (ou decrescimento) da função, dos valores máximos (ou mínimos) que ela assume, de eventuais simetrias, do comportamento para valores x muito grandes (ou pequenos), etc.

Definição 1.3.1. *O gráfico cartesiano de uma função $f : X \to Y$ é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano que satisfazem a condição, $x \in X$ e $y = f(x) \in Y$, ou seja, o conjunto de todos os pontos do plano da forma $(x, f(x))$, com x variando no domínio de*

f,

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\} \subset X \times Y$$

Em outras palavras, o gráfico de uma função f é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem sua lei de associação. Os gráficos cartesianos permitem representar geométricamente as funções, e com isto facilitar a compreensão de suas principais características. Podemos através de um gráfico verificar, por exemplo, se uma dada relação é ou não uma função.

Para que um subconjunto $G \subset A \times B$ seja o gráfico de uma função $f : A \to B$, é necessário e suficiente que, para cada $x \in A$, exista um único ponto $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada seja x. Para funções $f : A \to B$, onde A e B são conjuntos de números reais, esta condição significa que toda paralela ao eixo das ordenadas, traçada por um ponto de A deve cortar o gráfico G num e num só ponto (figura 1.1).

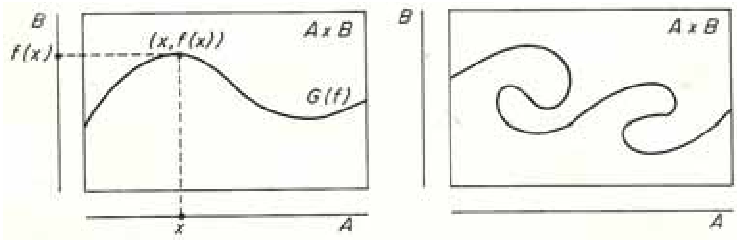

Figura 1.1: Na figura a esquerda temos o gráfico de uma função $f : A \to B$. A figura à direita mostra um subconjunto de $A \times B$ que não pode ser gráfico de uma função de A em B.

1.3.1 Domínio e imagem através do gráfico

Não é incomum encontrarmos em livros do ensino médio exercícios cujos enunciados pedem para determinar o domínio de funções com expressões algébricas dadas.

Como observamos anteriormente, uma função é definida por três elementos: domínio, contradomínio e lei de associação. Quando dizemos que conhecemos uma função, então seu domínio já deve ser sabido. Portanto, não faz sentido pedir que se determine o domínio de uma função dada. A intenção com exercícios deste tipo é pedir que se determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ possível que pode ser definido como domínio de uma função cuja lei de associação é estabelecida pela expressão algébrica dada.

No entanto se já for conhecido o gráfico da função, podemos facilmente obter o seu domínio e também sua imagem.

Considere o gráfico da figura 1.2 e observe que podemos identificar o domínio e a imagem da função através do seu gráfico. Observe, como forma de exemplo, o gráfico da

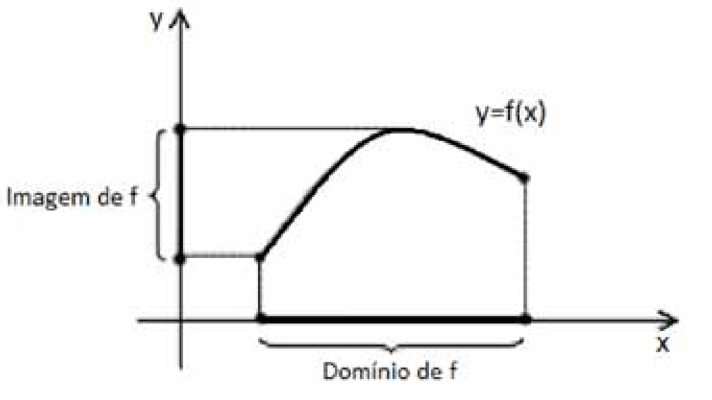

Figura 1.2: Gráfico de uma função f para observar o domínio e a imagem.

figura 1.3 de uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

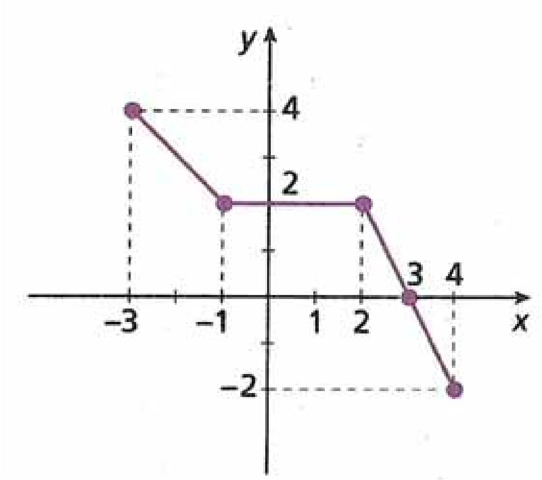

Figura 1.3: Gráfico de uma função f para determinar o domínio e a imagem

Traçando, de cada ponto do gráfico de f, retas perpendiculares ao eixo x, as intersecções dessas retas com o eixo x nos dará um subconjunto de $\mathbb{R}$. Esse intervalo é o domínio D da função f que pode ser expresso como: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 4\}$.

De forma análoga, traçando retas perpendiculares ao eixo y, por cada ponto do gráfico de f, as intersecções dessas retas com o eixo y nos dará um subconjunto de $\mathbb{R}$. Esse intervalo é o conjunto imagem de f que pode ser expresso como: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : -2 \leq y \leq 4\}$.

1.4 Crescimento e decrescimento

No ensino fundamental e no ensino médio, estamos acostumados a ensinar a classificação de funções do primeiro grau como crescentes ou decrescentes (dependendo do sinal do coeficiente angular). Porém, crescimento e decrescimento não são conceitos restritos a funções polinomiais de primeiro ou segundo graus. Observe suas definições gerais:

Definição 1.4.1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.*

(i) Dizemos que f é **crescente** *se x_1, $x_2 \in D$,*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

(ii) Dizemos que f é **não decrescente** *se x_1, $x_2 \in D$,*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

(iii) Dizemos que f é **decrescente** *se x_1, $x_2 \in D$,*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

(iv) Dizemos que f é **não crescente** *se x_1, $x_2 \in D$,*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Dizemos que f é **monótona** se f é de um dos quatro tipos acima.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Seja uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$. Observe:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

o que de acordo com o item (i) da definição anterior classifica f como crescente.

Exemplo 2: Seja uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -2x + 1$. Observe:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow (-2)x_1 > (-2)x_2 \Rightarrow -2x_1 + 1 > -2x_2 + 1 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2),$$

o que de acordo com item (iii) da definição anterior classifica g como decrescente.

Devemos notar que uma função pode ser crescente em um determinado intervalo do domínio e decrescente em outro. Observe o seguinte exemplo:

Exemplo 3: Seja uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cujo gráfico está representado na figura 1.4:

Note que h é crescente nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]1, \infty[$, e decrescente no intervalo $]-1, 1[$.

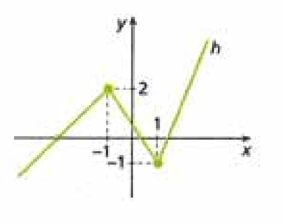

Figura 1.4: Gráfico da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, crescente em um determinado intervalo e decrescente em outro.

1.5 Função composta e função inversa

Nesta seção vamos abordar a respeito da composição de funções e também sobre funções inversas.

1.5.1 Função composta

Definição 1.5.1. *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções tais que o domínio de g é igual ao contradomínio de f. Neste caso, podemos definir a* **função composta** $g \circ f : A \to C$, *que consiste em aplicar primeiro f e depois g. Mais precisamente, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$*

Observamos que, geralmente, basta que a imagem $f(A)$ da função f esteja contida no domínio de g para que a definição $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ faça sentido e forneça a função composta $g \circ f : A \to C$.

Vale também observar que se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são injetivas então $g \circ f : A \to C$ é injetiva. Também a composta de funções sobrejetivas é sobrejetiva. Em particular, a composta de duas bijeções é uma bijeção.

Podemos representar também a composta $g \circ f$ através do diagrama da figura 1.5:

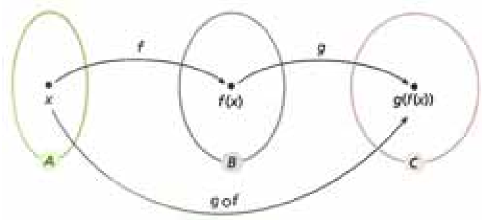

Figura 1.5: Gráfico que ilustra a composição de duas funções.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Sejam os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}, B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e as funções $f : A \to B$ definida por $f(x) = x^2$ e $g : B \to C$ definida por $g(x) = 2x + 1$. Aplicando f nos elementos de A obtemos: $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$ e $f(2) = 4$. Agora, aplicando g nas imagens dos elementos do domínio de f, teremos: $g(1) = 3, g(0) = 1$ e $g(4) = 9$. Note que o elemento -1 de A foi transformado em 3 pela composta $g \circ f$, ou seja, $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = 3$. Do mesmo modo temos $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = 1$, $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = 3$ e $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = 9$.

Nesse exemplo, vamos considerar os conjuntos A, B e C, todos iguais a $\mathbb{R}$ e as mesmas funções f e g. Podemos encontrar a expressão da função composta $g \circ f$ da seguinte forma:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2x^2 + 1.$$

Exemplo 2: Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$. Notemos que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + f(x) + 1 = (x + 1)^2 + (x + 1) + 1 = x^2 + 3x + 3.$$

Ou seja, a composta g com f será: $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(x) = x^2 + 3x + 3$.

Observe o seguinte teorema sobre associatividade da composição de funções:

Teorema 1.5.2. *Quaisquer que sejam as funções $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$, tem-se:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Demonstração : Consideremos um elemento qualquer x de A e coloquemos $f(x) = y$, $g(y) = w$ e $h(w) = z$; temos:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(w) = z$$

e notemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = w$$

portanto,

$$(h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(w) = z$$

então temos:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x),$$

para todo x de A. ■

1.5.2 Função inversa

Definição 1.5.3. *Uma função $f : X \to Y$ é invertível se existe uma função $g : Y \to X$ tal que:*

(i) $f \circ g = I_Y$;

(ii) $g \circ f = I_X$.

Observamos que I_A denota a função identidade do conjunto A, ou seja, $I_A : A \to A$, $I_A(x) = x$. Neste caso, a função g é dita função inversa de f e é denotada por $g = f^{-1}$.

Aplicar diretamente a definição anterior para verificar que uma função não é invertível não é fácil em geral, pois devemos mostrar que não existe nenhuma função satisfazendo as duas condições da definição. Por isso, é importante entender que injetividade e sobrejetividade são condições que garantem a existência da função inversa. Observe o seguinte teorema.

Teorema 1.5.4. *Uma função $f : X \to Y$ é invertível se, e somente se, é bijetiva.*

Demonstração : Suponhamos por hipótese que existe $g : Y \to X$ tal que: $(i) f \circ g = I_Y$ e $(ii) g \circ f = I_X$. Tomemos $y \in Y$ qualquer. Seja $x = g(y)$. Da condição (i) acima, segue que $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = I_Y(y) = y$. Então, f é sobrejetiva. Tomemos $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Logo, $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Da condição (ii), segue que $I_X(x_1) = I_X(x_2)$, logo, $x_1 = x_2$. Então, f é injetiva.

Reciprocamente, se f é bijetiva, desejamos construir uma função $g : Y \to X$ satisfazendo as condições (i) e (ii) da definição de função invertível. Dado $y \in Y$ qualquer, como f é sobrejetiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e, como f é injetiva, o elemento x com esta propriedade é único. Assim, definimos $g(y)$ como o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. As duas condições desejadas decorrem imediatamente da construção de g. ∎

Neste sentido, consideremos alguns exemplos:

Exemplo 1: Sejam $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ e $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(y) = \sqrt{y}$. Tem-se $f(g(y)) = y$ para todo $y \geqslant 0$ mas $g(f(x))$ só é igual a x quando $x \geqslant 0$. Se $x \in \mathbb{R}$ for negativo então $g(f(x)) = -x$. Portanto, g não é inversa de f. Se considerarmos a restrição de f a $[0, +\infty[$, isto é, a função $F : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, dada por $F(x) = x^2$, então F é uma correspondência biunívoca, e sua inversa é $G : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, dada por $G(y) = \sqrt{y}$, pois

$$G(F(x)) = G(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

e

$$F(G(y)) = F(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

para quaisquer $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Observe que nenhuma função $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ pode ser inversa de $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ porque f não é injetiva.

Exemplo 2: Generalizando, para todo $n \in \mathbb{N}$, a função $x \mapsto x^n$ é uma correspondência biunívoca de $[0, +\infty[$ sobre si mesmo, cuja inversa é $y \mapsto \sqrt[n]{y}$.

Se n é par, então $x \mapsto x^n$ é uma correspondência biunívoca de $[0, +\infty[$ sobre si mesmo, cuja inversa é $y \mapsto \sqrt[n]{y}$.

Se n é impar, então $x \mapsto x^n$ é uma correspondência biunívoca de $\mathbb{R}$ sobre si mesmo, cuja inversa $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $k(y) = \sqrt[n]{y}$.

Capítulo 2

Função Quadrática

2.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo fazer uma revisão geral e breve das idéias fundamentais relacionadas com o conceito de função quadrática bem como alguns elementos que a compõe. Para um desenvolvimento mais amplo deste assunto recomendamos a leitura do capítulo 7 de [4].

A parábola, que é o gráfico de uma função polinomial do 2º grau, também chamada função quadrática, aparece como padrão de comportamento de muitos fenômenos como, por exemplo, a trajetória de um projétil ao ser lançado, a linha descrita pela água numa fonte, a estrutura que sustenta o farol de um automóvel, as antenas parabólicas e etc. A função quadrática expressa algebricamente o comportamento dos pontos do gráfico que descrevem uma parábola.

Podemos encontrar a função quadrática, por exemplo, no cálculo do número de diagonais de um polígono convexo de n lados:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2}.$$

Observamos também a função quadrática na queda livre dos corpos, onde o espaço (s) percorrido é dado em função do tempo (t) por uma função quadrática:

$$s(t) = 4,9t^2$$

Definição 2.1.1. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *chama-se* **quadrática** *quando existem números reais* a, b, c, *com* $a \neq 0$ *tais que* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Vamos identificar a função quadrática com o trinômio do 2º grau a ela associado e a escreveremos simplesmente como $f(x) = ax^2 + bx + c$ sempre que não houver perigo de confundí-la com o número real $f(x)$, que é o valor por ela assumido no ponto x.

Exemplos: Abaixo temos alguns exemplos de funções quadráticas:

a) $f(x) = -x^2 + 100x$, em que $a = -1$, $b = 100$ e $c = 0$

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, em que $a = 3$, $b = -2$ e $c = 1$

c) $A(s) = -4s^2 + 4s - 1$, em que $a = -4$, $b = 4$ e $c = -1$

d) $s(t) = -4,9t^2$, em que $a = -4,9$; $b = c = o$

e) $g(s) = s^2 - 4$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -4$.

2.2 Forma canônica da função quadrática

Para iniciarmos um estudo analítico mais detalhado da função quadrática, vamos primeiramente reescrever sua expressão em uma forma mais conveniente, chamada forma canônica.

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c &= a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\Big) \\ &= a\Big[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\Big] \\ &= a\Big[\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\Big) - \Big(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\Big)\Big] \\ &= a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \Big(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big)\Big] \end{aligned}$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ, também chamado discriminante do trinômio do 2º grau, chegamos a forma canônica:

$$f(x) = a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big].$$

2.3 Zeros da função quadrática

Definição 2.3.1. *Os zeros ou raízes da função quadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *são os valores reais de* x *tais que* $f(x) = 0$ *e, portanto, as soluções da equação do 2º grau:*

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Utilizando a forma canônica, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \tag{2.1}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \tag{2.2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \tag{2.3}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{2.4}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \tag{2.5}$$

A passagem da equação (2.1) para a equação (2.2) deve-se pois temos que $a \neq 0$. A passagem da equação (2.3) para a equação (2.4) só tem sentido quando o discriminante Δ é ≥ 0.

Como consequência do resultado estabelecido na equação (2.5) a existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta}$ seja real. Assim temos três casos a considerar:

1º) Se $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes distintas, que são:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{e} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

2º) Se $\Delta = 0$, a equação apresentará duas raízes iguais, que são:

$$\boxed{x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}}$$

3º) Se $\Delta < 0$, sabendo que nesse caso $\sqrt{\Delta}$ não pertence a $\mathbb{R}$, diremos que a equação não apresenta raízes reais.

2.4 Gráfico da função quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, **a parábola de foco F e diretriz d** é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de **F** e de **d**. A reta perpendicular à reta d baixada a partir do foco, chama-se o **eixo da parábola**. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se **vértice** dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz.

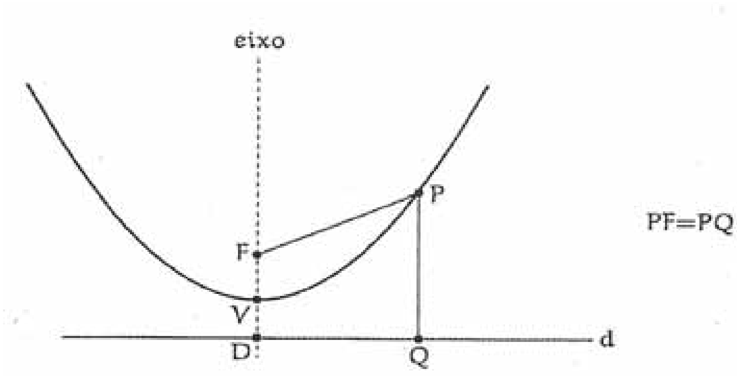

Figura 2.1: Gráfico da função quadrática.

2.4.1 Concavidade da parábola

Se $a \neq 0$, o gráfico da função qudrática do tipo $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = \dfrac{-1}{4a}$. A fim de se convencer desse fato, basta verificar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade

$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2,$$

onde o primeiro membro é o quadrado da distância do ponto genérico $P = (x, ax^2)$ do gráfico de $f(x) = ax^2$ ao foco $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ e o segundo membro é o quadrado da distância do mesmo ponto P à reta $y = -\dfrac{1}{4a}$. Conforme seja $a > 0$ ou $a < 0$, a parábola $y = ax^2$ tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo. Dados a, m, $K \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $F(x) = a(x - m)^2 + K$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, 1 + \dfrac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = K - \dfrac{1}{4a}$. Sendo assim, o gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, cuja diretriz é a reta horizontal $y = \dfrac{4ac - b^2 - 1}{4a}$ e cujo foco é o ponto $F = \Big(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2 + 1}{4a}\Big)$.

Esta parábola tem sua concavidade voltada para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$. Com efeito, a forma canônica do trinômio $ax^2 + bx + c$ nos dá

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + K,$$

onde $m = \dfrac{-b}{2a}$ e $K = \dfrac{(4ac - b^2)}{4a}$.

O ponto do gráfico de $f(x) = ax^2+bx+c$ mais próximo da diretriz é aquele de abscissa $x = \dfrac{-b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ atinge seu valor mínimo quando $a > 0$ e seu valor máximo quando $a < 0$, conforme representado na figura 2.2.

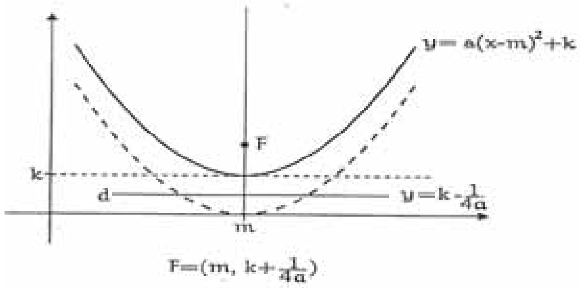

Figura 2.2: Concavidade da parábola.

2.5 Vértice da parábola

A determinação do vértice da parábola ajuda a elaboração do gráfico e permite determinar a imagem da função, bem como seu valor máximo e mínimo, como veremos no capítulo 3. Uma das maneiras de determinar o vértice é lembrar que a parábola é simétrica em relação a um eixo vertical (eixo de simetria). Determinando a posição desse eixo, encontraremos a abscissa do vértice, e com a abscissa do vértice obteremos a ordenada, que é função da abscissa. Temos que as raízes de uma função quadrática com $\Delta > 0$ são:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Note que o eixo de simetria tem sua posição bem no ponto médio dessas raízes, ou seja:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{-2b}{4a} = \frac{-b}{2a}$$

assim,

$$\boxed{x_v = \frac{-b}{2a}}$$

Como a ordenada do vértice é função da abscissa do vértice, para encontrá-lo faremos:

$$y_v = f(x_v) \Rightarrow y_v = a\Big(\frac{-b}{2a}\Big)^2 + b\Big(\frac{-b}{2a}\Big) + c \Rightarrow y_v = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow$$

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow \boxed{y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$$

Dessa forma, temos então as coordenadas do vértice da parábola:

$$\boxed{V = \Big(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\Big)}$$

Quando $\Delta = 0$, teremos duas raízes reais e iguais: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$ então:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b}{2a} + \frac{-b}{2a}}{2} = \frac{-2b}{4a} = \frac{-b}{2a}$$

De forma análoga teremos também que o vértice é:

$$\boxed{V = \Big(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\Big)}$$

Quando $\Delta < 0$, e supondo $a > 0$, teremos uma parábola com todos os seus pontos acima do eixo x. Analisando a forma canônica, $f(x) = a\Big[(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\Big]$, notamos que o ponto da parábola mais próximo da diretriz, é aquele de abscissa $x = \dfrac{-b}{2a}$. Neste ponto $f(x)$ assume seu valor mínimo. Ainda esse ponto $\Big(\dfrac{-b}{2a}, f(x)\Big)$ é o vértice da parábola, ou seja, novamente teremos que o vértice será:

$$\boxed{V = \Big(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\Big)}$$

Caso $a < 0$, o procedimento anterior é análogo.

2.6 Pontos notáveis da parábola

Alguns pontos pertencentes à parábola são importantes para construção do gráfico e para a sua análise.

a) **Zeros da Função Quadrática**: São os pontos de intersecção da parábola com o eixo x de coordenadas $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$. São os valores de x quando $f(x) = 0$.

b) **Vértice da Parábola**: É o ponto de coordenadas (x_v, y_v). Ao traçar uma reta perpendicular ao eixo x, passando pelo vértice da parábola, determina-se o eixo de simetria da parábola.

c) **O Coeficiente "c"da Função e a Parábola**: Na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, o coeficiente c indica a ordenada do ponto em que a parábola intersecta o eixo y, ou seja, $(0, c)$, conforme representado na figura 2.3. Observe:

$$f(0) = a.0^2 + b.0 + c \Rightarrow f(0) = c$$

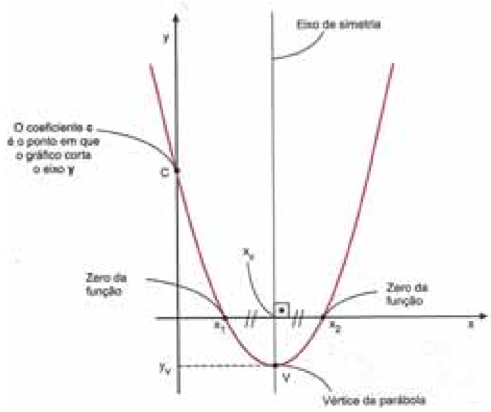

Figura 2.3: Pontos notáveis da parábola.

2.7 Valor máximo, valor mínimo e imagem da função quadrática

Uma função quadrática tem um **valor máximo** ou um **valor mínimo**. Esse valor é a ordenada do vértice da parábola que a representa e nos permite determinar o conjunto imagem dessa função. Quando a concavidade da parábola é voltada para cima, a função tem valor mínimo; caso contrário tem valor máximo. Para uma função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ temos:

Essa função tem valor mínimo $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$

$$Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} | y \geq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

conforme representado na figura 2.4

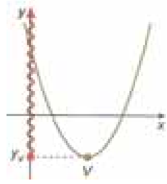

Figura 2.4: Parábola com valor mínimo.

Essa função tem valor máximo $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$

$$Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} | y \leq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

conforme representado na figura 2.5

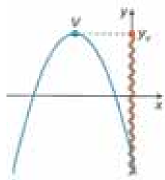

Figura 2.5: Parábola com valor máximo.

2.7.1 Máximo e mínimo

Conforme já vimos, se $a > 0$ ou $a < 0$, a parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo.

Definição 2.7.1. *Dizemos que o número $y_M \in Im(f)$ é o valor máximo da função $y = f(x)$ se $y_M \geq y$ para qualquer $y \in Im(f)$. O número $x_M \in D(f)$ tal que $y_M = f(x_M)$ é chamado ponto de máximo da função, conforme representado na figura* 2.6.

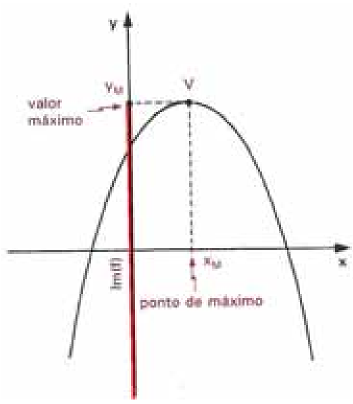

Figura 2.6: Valor máximo.

Definição 2.7.2. *Dizemos que o número $y_m \in Im(f)$ é o valor mínimo da função $y = f(x)$ se $y_m \leq y$ para qualquer $y \in Im(f)$. O número $x_m \in D(f)$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado ponto de mínimo da função, conforme representado na figura 2.7.*

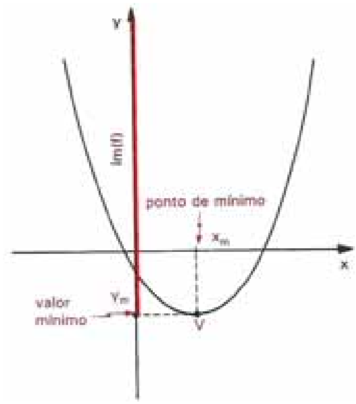

Figura 2.7: Valor mínimo.

Teorema 2.7.3. *(i) Se $a < 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = \dfrac{-\Delta}{4a}$ para $x_M = \dfrac{-b}{2a}$.*

(ii) Se $a > 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = \dfrac{-\Delta}{4a}$ para $x_m = \dfrac{-b}{2a}$.

Demonstração: (i) Considere a função quadrática na forma canônica:

$$f(x) = a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big].$$

Sendo $a < 0$, o valor de y será tanto maior quanto menor for o valor da diferença

$$\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Nesta diferença, $-\dfrac{\Delta}{4a^2}$ é constante (porque não depende de x, só depende de a, b, c) e $\Big(x + \dfrac{b}{2a}\Big)^2 \geq 0$ para todo x real. Então a diferença assume o menor valor possível quando $\Big(x + \dfrac{b}{2a}\Big)^2 = 0$, ou seja, quando $x = \dfrac{-b}{2a}$. Substituindo $x = \dfrac{-b}{2a}$ em $f(x) = a\Big[\Big(x + \dfrac{b}{2a}\Big)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\Big]$ teremos:

$$f(x) = a\Big[\Big(\frac{-b}{2a} + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big] = a\Big[0^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big] = -\frac{\Delta}{4a}.$$

(ii) Prova-se de modo análogo. ■

Capítulo 3

Problemas de Otimização que Recaem em uma Função Quadrática

Uma parte importante das aplicações do Cálculo Diferencial está relacionada ao problema de encontrar máximos e mínimos de funções. São os chamados **problemas de otimização** e que consistem, de maneira geral, em construir um modelo matemático do problema no qual alguma grandeza é dada por uma função derivável de uma ou mais variáveis e a informação que buscamos consiste em encontrar o máximo ou mínimo da função.

Neste capítulo vamos estudar alguns problemas de otimização que recaem em uma função quadrática. O conhecimento do ponto onde uma função quadrática assume seu valor máximo ou mínimo permite obter rapidamente uma resposta para diversos problemas de máximos e mínimos que recaem numa função quadrática.

Problema 1: Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais, conforme representado na figura 3.1. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

Solução: Chamando o comprimento da área cercada de y e a largura de x, notamos que $2x + y = 80$ (1), pois é a quantidade de cerca que o fazendeiro dispõe. Como a área de um retângulo é calculada fazendo comprimento vezes largura, teremos $A = x.y$ (2).

Figura 3.1: Figura ilustrando a situação apresentada no problema 1.

De (1) temos que $y = 80 - 2x$ e substituindo em (2) teremos $A(x) = x.(80 - 2x) \Rightarrow A(x) = 80x - 2x^2$, ou seja, uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola de concavidade voltada para baixo, logo apresenta um ponto de máximo. Como $x_v = \dfrac{-b}{2a}$, teremos $x_v = \dfrac{-80}{2.(-2)} = 20$. Assim como $y = 80 - 2x \Rightarrow y = 80 - 2.20 = 40$. Portanto as dimensões que tornam a área máxima são $40m$ de comprimento por $20m$ de largura.

Problema 2: Numa vidraçaria há um pedaço de espelho, sob a forma de um triângulo retângulo de lados $60cm$, $80cm$ e $1m$. Quer-se, a partir dele, recortar um espelho retangular com a maior área possível. A fim de economizar corte, pelo menos um dos lados do retângulo deve estar sobre um lado do triângulo. As posições sugeridas são as da figura3.2.

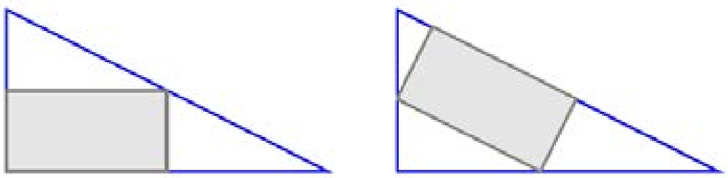

Figura 3.2: Figura ilustrando a situação apresentada no problema 2.

Em cada caso, determine qual o retângulo de maior área e compare os dois resultados.

Solução: i) Para proceder com a solução, primeiramente vamos nomear alguns pontos, como ilustrado na figura 3.3:

De acordo com o enunciado temos $AC = 60cm$, $AE = 100cm$ e $CE = 80cm$. Sejam

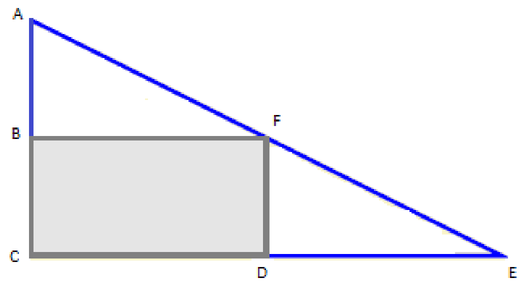

Figura 3.3: Figura ilustrando a situação apresentada no problema 2 (i).

$CD = y$ e $DF = x$. Note que os triângulos ABF e FDE são semelhantes, logo:

$$\frac{60-x}{x} = \frac{y}{80-y}$$

o que implica que

$$y = -\frac{4}{3}x + 80$$

A área do retângulo $BCDF$ será:

$$A_{BCDF} = x.y \Rightarrow A(x) = x.\Big(-\frac{4}{3}x + 80\Big) \Rightarrow A(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 80x$$

Note que encontramos uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola de concavidade voltada para baixo, logo possui um ponto de máximo.

A área será máxima se:

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-80}{2.(\frac{-4}{3})} \Rightarrow x = 30cm$$

Calculando o valor de y teremos:

$$y = \frac{-4}{3}(30) + 80 \Rightarrow y = 40cm$$

Com esses resultados concluímos que para se ter um espelho retangular com a maior área possível, o retângulo a ser cortado deve ter dimensões de $30cm$ de largura por $40cm$ de comprimento. A área máxima será de $1200cm^2$.

ii) Analogamente ao primeiro caso, primeiramente vamos nomear alguns pontos, como ilustrado na figura 3.4:

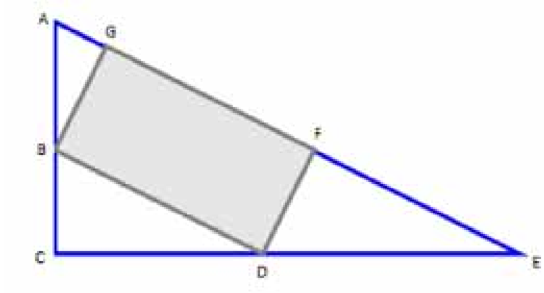

Figura 3.4: Figura ilustrando a situação apresentada no problema 2 (ii).

De acordo com o enunciado temos $AC = 60cm$, $AE = 100cm$ e $CE = 80cm$. Sejam $BD = x$ e $DF = y$. Podemos calcular a altura h do triângulo retângulo ACE, relativa a hipotenusa AE, usando a fórmula "cateto.cateto=hipotenusa.altura", então:

$$60.80 = h.100 \Rightarrow h = 48cm.$$

Note que a altura do triângulo BCD relativa a hipotenusa BD será $48 - y$. Observe que os triângulos BCD e ACE são semelhantes, logo:

$$\frac{x}{100} = \frac{48 - y}{48}$$

o que implica que

$$y = \frac{4800 - 48x}{100}.$$

A área do retângulo $BDFG$ será:

$$A_{BDFG} = x.y \Rightarrow A(x) = x.\frac{4800 - 48x}{100} \Rightarrow A(x) = -\frac{48}{100}x^2 + 48x$$

Observe que encontramos uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola de concavidade voltada para baixo, logo possui um ponto de máximo. A área será máxima se:

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-48}{2.\left(-\frac{48}{100}\right)} \Rightarrow x = 50cm$$

Calculando o valor de y teremos:

$$y = \frac{4800 - 48.50}{100} \Rightarrow y = 24cm$$

Com esses resultados concluímos que para se ter um espelho retangular com a maior área possível, o retângulo a ser cortado deve ter dimensões de $24cm$ de largura por $50cm$ de comprimento. A área máxima será também de $1200cm^2$.

Comparando os dois resultados, observamos que os retângulos obtidos tem a mesma área, $1200cm^2$, porém no caso (i) sobraram apenas dois pedaços do espelho, enquanto que no caso (ii) restaram três pedaços com áreas menores do que os pedaços restantes do caso (i). Outro ponto a se observar é que no caso (i), o espelho retangular obtido tem menor comprimento que o espelho obtido no caso (ii), porém tem largura maior. A escolha entre eles vai depender do uso que será dado ao espelho obtido, ou então, do uso que será dado ao que sobra do triângulo retângulo original.

Problema 3: Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro $R\$800,00$ mais $R\$10,00$ por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa será máxima?

Solução: Vamos supor que foram ocupados x lugares. Com isso teremos $(100-x)$ lugares vagos. Sendo $R(x)$ a rentabilidade da companhia teremos que

$$R(x) = (800 + (100 - x).10).x \Rightarrow R(x) = -10x^2 + 1800x$$

que é uma função quadrática de concavidade voltada para baixo, logo possui um ponto de máximo. O número de passageiros que torna a rentabilidade da companhia máxima será dada por

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-1800}{2.(-10)} = 90$$

Assim com 90 passageiros a companhia terá a maior rentabilidade.

Problema 4: João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés, por $R\$20,00$ cada caixa. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía $R\$1,00$ no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?

Solução: Seja x a quantidade de desconto de $R\$1,00$ dado em cada caixa. Sendo assim sua receita, em função de x seria:

$$R(x) = (300 + 40x).(20 - 1.x) \Rightarrow R(x) = -40x^2 + 500x + 6000.$$

Como se trata de uma expressão de uma função quadrática, notamos que a parábola que ela representa tem a concavidade voltada para baixo, com isso tem um ponto de máximo, dado por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-500}{2.(-40)} = 6,25.$$

Portanto para que a receita de João seja máxima, o desconto por caixa de picolé deve ser de $R\$6,25$. Com isso ele deverá cobrar $R\$13,75$ por caixa para que sua receita seja máxima.

<u>**Problema 5**</u>**:** Uma loja está fazendo uma promoção na venda de balas: "Compre x balas e ganhe $x\%$ de desconto". A promoção é válida para compras de até 60 balas, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Alfredo, Beatriz, Carlos e Daniel compraram 10, 15, 30 e 45 balas, respectivamente. Qual deles poderia ter comprado mais balas e gasto a mesma quantia, se empregasse melhor seus conhecimentos de Matemática?

Solução: Seja p o preço de cada bala. Logo, com desconto de $x\%$ o preço pago ao comprar x balas recebendo o desconto de $x\%$ será:

$$P(x) = px - \left(\frac{x}{100}\right).px = px.\left(1 - \frac{x}{100}\right) \Rightarrow P(x) = -\frac{p}{100}x^2 + px.$$

Note que o maior preço será alcançado para a seguinte quantidade de balas:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-p}{2.\left(\frac{-p}{100}\right)} \Rightarrow x_v = 50.$$

Note que como 40 e 60 são equidistantes de 50, quem por ventura comprar 40 balas vai pagar o mesmo de quem comprar 60. Do mesmo modo notamos que 45 e 55 são equidistantes de 50, logo Daniel que comprou 45 balas poderia ter comprado 55, que pagaria o mesmo valor.

<u>Problema 6</u>: O diretor de uma orquestra percebeu que, com o ingresso a $R\$9,00$, em média 300 pessoas assistem aos concertos e que, para cada redução de $R\$1,00$ no preço dos ingressos, o público aumenta de 100 espectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?

Solução: Seja x a redução no preço do ingresso, então a receita será dada por:

$$R(x) = (300 + 100x).(9 - x) \Rightarrow R(x) = -100x^2 + 600x + 2700.$$

Como se trata de uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola de concavidade voltada para baixo, teremos um ponto de máximo . Assim a receita será máxima quando o desconto x for:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-600}{2.(-100)} \Rightarrow x_v = 3.$$

Ou seja a receita será máxima quando o desconto for de $R\$3,00$. Com isso o preço do ingresso deverá ser de $R\$6,00$.

<u>Problema 7</u>: Um restaurante a quilo vende $100kg$ de comida por dia, a 12 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de $500g$ cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

Solução: Se o restaurante vende $100kg$ de comida por dia e cada cliente consome, em média, $500g$, o número médio de refeições servidas por dia nesse restaurante é:

$$\frac{100}{0,5} = 200 \text{ refeições por dia.}$$

Seja x o valor que deve ser acrescentado ao preço do quilo. Sendo assim, sua receita será:

$$R(x) = (200 - 10x).(12 + x) \Rightarrow R(x) = -10x^2 + 80x + 2400.$$

Percebendo que se trata de uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola de concavidade voltada para baixo, teremos um ponto de máximo. Com isso a receita será máxima quando o acréscimo for de:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-80}{2.(-10)} \Rightarrow x_v = 4.$$

Então para que a receita seja máxima, o restaurante deve cobrar $R\$12,00 + R\$4,00$, ou seja, $R\$16,00$ o quilo.

Problema 8: Um prédio de 1 andar, de forma retangular, vai ser construido, com lados proporcionais a 3 e 4, com a mesma razão. O imposto predial é de 7 reais por metro quadrado, mais uma taxa fixa de 2.500 reais. A prefeitura concede um desconto de 60 reais por metro linear do perímetro, como recompensa pela iluminação externa e pela calçada em volta do prédio. Quais devem ser as medidas dos lados do prédio para que o imposto seja o mínimo possível? Qual o valor desse imposto mínimo?

Solução: Como os lados do retângulo devem ser proporcionais a 3 e 4, faremos com que os lados do retângulo sejam $3x$ e $4x$. Com isso a área será $A(x) = 12x^2$ e o perímetro será $P(x) = 14x$. Sendo assim, o imposto deverá ser:

$$I(x) = 2500 + 7(3x.4x) - 60.(14x) \Rightarrow I(x) = 84x^2 - 840x + 2500.$$

Vemos que nesse caso se trata de uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola de concavidade voltada para cima. Então possui um ponto de mínimo, que será:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-840)}{2.84} \Rightarrow x_v = 5.$$

Portanto para que o imposto seja o mínimo possível, as medidas dos lados do prédio devem ser $3.5 = 15m$ por $4.5 = 20m$. Então o valor desse imposto será:

$$I(5) = 84.5^2 - 840.5 + 2500 \Rightarrow I(5) = 400 \text{ reais}.$$

Problema 9: Qual o valor máximo do produto de dois números cuja soma é constante.

Solução: Sendo "a"a constante dada, queremos achar dois números x e y, com $x + y = a$, tais que o produto $x.y$ seja o maior possível. De $x + y = a$ tiramos $y = a - x$, portanto deve-se encontrar o valor de x que torna máximo o produto $x.(a-x) = -x^2+ax$. Esse valor máximo é assumido quando $x = \frac{a}{2}$, logo $y = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$. Concluímos então que o produto de dois números cuja soma é constante assume seu valor máximo quando esses números são iguais.

<u>Problema 10</u>: A trajetória da bola num chute a gol, descreve uma parábola. Suponha que a sua altura "h", em metros, "t"segundos após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$. Em que instante a bola atinge a altura máxima ? Qual é a altura máxima ?

Solução: Como a parábola tem concavidade voltada para baixo, assume um ponto de máximo, quando:

$$t_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow t_v = \frac{-6}{2.(-1)} \Rightarrow t_v = 3.$$

Logo a bola atinge a altura máxima 3 segundos após o chute. A altura máxima atingida pela bola é:

$$h_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow h_v = \frac{-36}{4.(-1)} = 9$$

ou

$$h_v = h(3) = -3^2 + 6.3 = 9.$$

Logo a altura máxima atingida pela bola é 9 metros.

Capítulo 4

Problemas de Otimização que Não Recaem em uma Função Quadrática

Neste capítulo vamos estudar alguns problemas de otimização que não recaem em uma função quadrática, com apenas uma variável. Vamos resolvê-los usando algumas ferramentas do cálculo. Em seguida vamos lançar mão da fórmula de Taylor e aproximar a função por uma função quadrática, e ai resolvê-los novamente com as ferramentas de função quadrática, para depois então comparar os resultados.

4.1 Fórmula de Taylor

A **Série de Taylor** de uma função fornece uma aproximação da função por meio de polinômios. A expressão de uma função como soma infinita de monômios é utilizada por matemáticos desde muito antes da invenção do Cálculo. Há evidências de que o matemático indiano Madhava de Sangramagrama (1350–1425) descobriu a série que representa $senx$ para resolver problemas de astronomia.

No Séc. $XVII$, o matemático escocês James Gregory (1638–1675), formulou a expansão em série das funções $senx$, $cosx$, $arcsenx$ e $arccosx$, publicando esta descoberta em 1667. Embora Gregory tivesse obtido algumas séries particulares, foi o matemático inglês Brook Taylor (1685–1731) o primeiro a apresentar uma fórmula geral para a construção de séries de potências de funções, publicando o método em seu trabalho *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* de 1715.

Na fórmula de Taylor iremos lidar com a $n-$ésima derivada de f, denotada $f^{(n)}$. Seja f a função definida em um intervalo aberto I. Dizemos que f é n vezes derivável no ponto $a \in I$ se f é $n-1$ vezes derivável em uma vizinhança de a e $f^{(n-1)}$ é derivável em a. Denota-se por $f^{(0)}$ a própria função f, ou seja, f é sua derivada de ordem zero.

Definição 4.1.1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida no intervalo aberto I e n vezes derivável em $a \in I$.* **O polinômio de Taylor de ordem n de f em a** *é o polinômio*

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + ... + c_n(x-a)^n$$

tal que as derivadas de ordem $k \leq n$ de $p(x)$ em $x = a$ coincidem com as derivadas de mesma ordem de $f(x)$ em $x = a$.

Observe que os coeficientes do polinômio de Taylor podem ser determinados em função das derivadas de f. Para isto faremos $x = a$ em $p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + ... + c_n(x-a)^n$, obtendo $p(a) = c_0$ e como a definição diz que $p(a) = f(a)$ então $c_0 = f(a)$. Continuando, derivando p, teremos:

$$p'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + ... + nc_n(x-a)^{n-1},$$

substituindo x por a, teremos $c_1 = p'(a)$. Mas como $p'(a) = f'(a)$ segue que

$$c_1 = f'(a) = \frac{f'(a)}{1!}.$$

Se $n > 1$, podemos derivar novamente o polinômio para obter

$$p''(x) = 2c_2 + 2.3c_3(x-a) + ... + (n-1).n.c_n(x-a)^{n-2}$$

novamente substituindo x por a e lembrando que $p''(a) = f''(a)$, temos:

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2!}.$$

Procedendo de forma análoga, obteremos $c_3 = \dfrac{f'''(a)}{3!}$, $c_4 = \dfrac{f^{(4)}(a)}{4!}$, $\cdots$, $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, de tal forma que o polinômio de Taylor de ordem n de f em a será:

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Veremos a seguir que o polinômio de Taylor $p(x)$ é uma boa aproximação de $f(x)$ próximo a a sendo f uma função n vezes derivável em $x = a$. Seja, $r(x) = f(x) - p(x)$ a diferença entre a função e seu polinômio de Taylor em a. Sendo assim, $r : I \to \mathbb{R}$ é n vezes diferenciável em a e, como $f(x)$ e $p(x)$ têm as mesmas derivadas de ordem k para $k \leq n$ teremos

$$r(a) = r'(a) = r''(a) = \cdots = r^{(n)}(a) = 0.$$

A proposição seguinte mostra que isto equivale a $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Proposição 4.1.2. *Seja $r : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em $a \in I$. Então $r^{(k)}(a) = 0$ para $0 \leq k \leq n$ se, e somente se $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.*

Demonstração: Sabendo que $r(a) = r'(a) = \cdots = r^{(n)} = 0$, vamos mostrar que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Para $n = 1$, isto significa que $r(a) = r'(a) = 0$. Então

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{r(x) - r(a)}{x-a} = r'(a) = 0.$$

Para $n = 2$, isto significa que $r(a) = r'(a) = r''(a) = 0$. O Teorema do Valor Médio, assegura que para todo $x \neq a$, existe c_x no intervalo de extremos a e x tal que

$$r'(c_x) = \frac{r(x) - r(a)}{x-a} = \frac{r(x)}{x-a}$$

que implica em

$$\frac{r'(c_x)}{x-a} = \frac{r(x)}{(x-a)^2}.$$

Sendo assim

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{r'(c_x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \left(\frac{r'(c_x)}{c_x - a} \frac{c_x - a}{x-a} \right) \stackrel{*}{=}$$

Quando $x \to a$, isso implica que $c_x \to a$. Além disso, temos que $\displaystyle\lim_{c_x\to a} \frac{r'(c_x)}{c_x - a} = 0$ e $\left| \dfrac{c_x - a}{x-a} \right| \leq 1$. Então,

$$\stackrel{*}{=} \lim_{c_x\to a} \left(\frac{r'(c_x)}{c_x - a} \frac{c_x - a}{x-a} \right) = 0$$

De forma análoga, podemos passar de $n = 2$ para $n = 3$ e assim por diante.

Reciprocamente, suponhamos que $\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$. Isso resulta que, para $i = 0, 1, \cdots, n$,

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^i} = \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n}.(x-a)^{n-i} = 0.$$

Portanto,

$$r(a) = \lim_{x \to a} r(x) = \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^0} = 0$$

e

$$r'(a) = \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n}.(x-a)^{n-1} = 0.$$

Para $r''(a)$, considere a função auxiliar $g : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = r(x) - \frac{r''(a)(x-a)^2}{2}.$$

Evidentemente vale que

$$g(a) = r(a) - \frac{r''(a)(a-a)^2}{2} = 0,$$

$$g'(a) = r'(a) - r''(a)(a-a) = 0,$$

$$g''(a) = r''(a) - r''(a).1 = 0.$$

Pela parte da proposição já demonstrada segue que

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

Temos por hipótese que $\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^2} = 0$. Como

$$\frac{g(x)}{(x-a)^2} = \frac{r(x)}{(x-a)^2} - \frac{r''(a)}{2}$$

segue que

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^2} - \lim_{x \to a} \frac{r''(a)}{2}$$

o que implica em

$$0 = 0 - \lim_{x \to a} \frac{r''(a)}{2},$$

de tal forma que $r''(a) = 0$.

O mesmo argumento permite passar de $n = 2$ para $n = 3$ e assim por diante. ∎

Finalmente, com este resultado, podemos formular o Teorema de Taylor:

Teorema 4.1.3 (Teorema de Taylor)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em $a \in I$. A função $r : I \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x),$$

satisfaz $\lim_{x \to a} \dfrac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Reciprocamente, se $p(x)$ é um polinômio de grau $\leq n$ tal que $r(x) = f(x) - p(x)$ satisfaz $\lim_{x \to a} \dfrac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$ *então $p(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em a.*

Demonstração : Como vimos, a função $r(x)$ definida pela diferença de $f(x)$ e o polinômio de Taylor $p(x)$ satisfaz $r^{(k)}(a) = 0$ para $0 \leq k \leq n$. Logo, pela proposição anterior $\lim_{x \to a} \dfrac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Reciprocamente, se $r(x) = f(x) - p(x)$ é tal que $\lim_{x \to a} \dfrac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$, então, pela proposição anterior, as derivadas de ordem k, $0 \leq k \leq n$ de $r(x)$ se anulam em $x = a$. Portanto, $p^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ em $x = a$ para $0 \leq k \leq n$, ou seja, $p(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em a. ■

4.2 Teste da segunda derivada

Utilizaremos o teste da segunda derivada para descobrir se os pontos críticos encontrados são valores máximos ou mínimos de uma função, conforme representado na figura 4.1. Sabemos que para funções deriváveis, os extremos locais são pontos de derivada nula, embora nem todo ponto de derivada nula seja extremo local. Portanto, encontrando os pontos onde a derivada se anula, teremos os candidatos a extremos locais, ou seja, os pontos críticos.

Observe o seguinte teorema “Teste da Derivada Segunda”:

Teorema 4.2.1. *Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I e seja $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. Se $f''(c)$ existe então:*

(i) Se $f''(c) < 0$ então f possui um máximo local em c.

(ii) Se $f''(c) > 0$ então f possui um mínimo local em c.

O teste é inconclusivo caso $f''(c) = 0$.

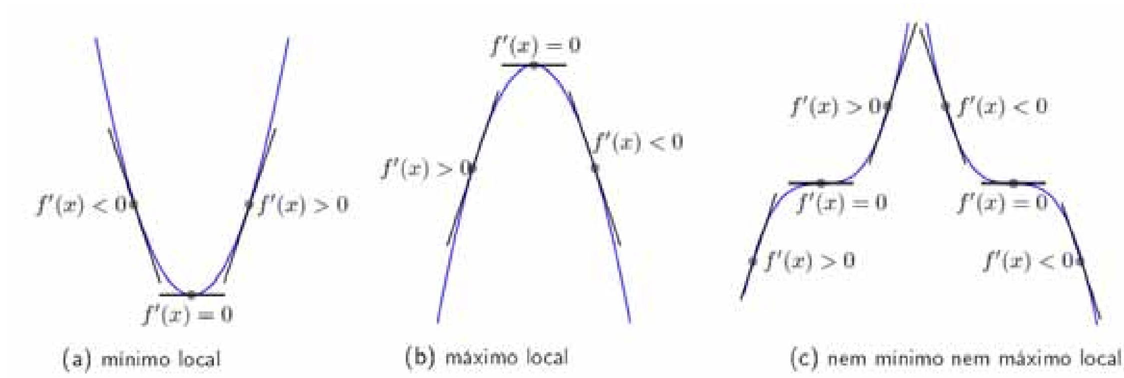

Figura 4.1: Pontos Críticos.

Demonstração : Demonstraremos o caso (i). O caso (ii) é análogo.

Suponha $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$. Então,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0.$$

Logo, há um intervalo (a, b) contendo c tal que $\dfrac{f'(x)}{x - c} < 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Portanto,

$$a < x < c \Rightarrow x - c < 0 \quad \text{e} \quad \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$
$$c < x < b \Rightarrow x - c > 0 \quad \text{e} \quad \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

Portando, f passa de crescente para decrescente em c, conforme representado na figura 4.2. Com isso f tem máximo local em $x = c$. ■

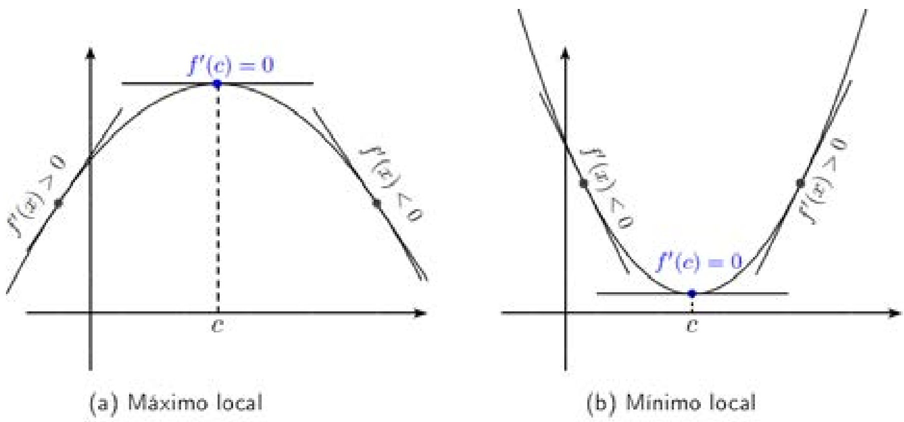

Figura 4.2: Máximo e Mínimo local.

4.3 Exemplos

Nesta seção resolveremos alguns problemas de máximos e mínimos que não recaem em uma função quadrática. Para isso usaremos as ferramentas conhecidas do Cálculo Diferencial para se chegar ao resultado ótimo. Logo após isso aproximaremos a função obtida por seu polinômio de Taylor de 2ª ordem em torno de algum ponto $x = a$ do seu domínio, e encontraremos o valor máximo ou mínimo do polinômio usando as ferramentas de função quadrática, para depois então comparar os resultados obtidos. De fato, devido ao Teorema de Taylor, veremos que os resultados finais obtidos estarão bastante próximos.

Exemplo 1: Uma pessoa sai de um ponto A na margem de um rio de 1 km de largura. Ela deve atravessar o rio de canoa e então chegar o mais rápido possível até um ponto B situado a $2km$ de distância pela margem do rio, conforme representado na figura 4.3. Se ela consegue remar a canoa a $6km/h$ e correr a $9km/h$, a que distância de B ela deve terminar a travessia de canoa?

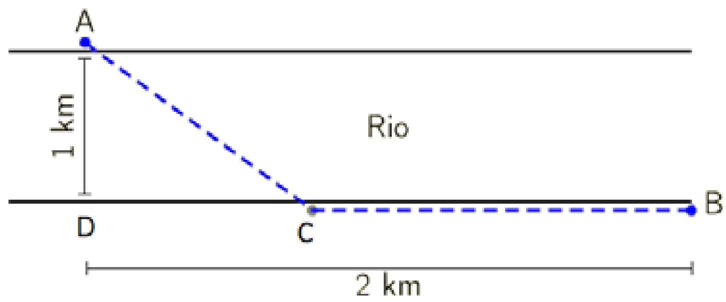

Figura 4.3: Figura ilustrando a situação apresentada no Exemplo 1.

Solução: Seja C o ponto da margem onde a pessoa deve terminar a travessia de canoa. Fazendo então $DC = x$, teremos $CB = 2 - x$. Note que ACD é um triângulo retângulo, e pelo Teorema de Pitágoras teremos $AC = \sqrt{1 + x^2}$. Seja t_1 o tempo de travessia com a canoa e t_2 o tempo gasto para ir de C até B correndo. Como a velocidade da canoa é de $6Km/h$, teremos que $t_1 = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{6}$ e que como a velocidade da corrida é $9Km/h$,

$t_2 = \dfrac{2-x}{9}$. Com isso o tempo total do percurso será $t = t_1 + t_2$, ou seja,

$$t(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{6} + \frac{2-x}{9}.$$

Note que o domínio da função para essa situação é o intervalo $[0,2]$ e que estamos a procura do valor de x desse domínio que torna mínimo o tempo para a pessoa sair do ponto A e chegar até o ponto B, ou seja, queremos um valor de x que minimiza $t(x)$. Para encontrar tal valor vamos lançar mão de algumas ferramentas de cálculo. Vamos então calcular a derivada de $t(x)$, achar o(s) ponto(s) críticos e verificar através da regra da segunda derivada se é ponto de máximo, mínimo ou inflexão.

A derivada de $t(x)$ é:

$$t'(x) = \frac{3x - 2\sqrt{x^2+1}}{18\sqrt{x^2+1}}$$

igualando a zero e resolvendo teremos:

$$\frac{3x - 2\sqrt{x^2+1}}{18\sqrt{x^2+1}} = 0.$$

Note que a fração será nula se:

$$3x - 2\sqrt{x^2+1} = 0 \Rightarrow 3x = 2\sqrt{x^2+1}.$$

Elevando os dois membros ao quadrado teremos:

$$9x^2 = 4(x^2+1) \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}.$$

Como x representa a distância, o valor negativo não interessa. Temos então que $x = \sqrt{\dfrac{4}{5}}$ é o único ponto crítico.

Calculando agora a segunda derivada de $t(x)$ teremos:

$$t''(x) = \frac{1}{6(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Note que $t''(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, logo $x = \sqrt{\dfrac{4}{5}}$, cujo valor aproximado é $0,89$, é um ponto de mínimo de t. Assim, para chegar o mais rápido possível em B, a distância que ela deve terminar a travessia de canoa é:

$$BC = 2 - \sqrt{\frac{4}{5}} \cong 1,11.$$

Outra solução: Utilizaremos agora a fórmula de Taylor para aproximar $t(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{6} + \dfrac{2-x}{9}$ por uma função quadrática. Vamos então encontrar o polinômio de Taylor de ordem 2 da função t em $a = 1$. Para isso utilizaremos a primeira e segunda derivada de $t(x)$, que são:

$$t'(x) = \frac{3x - 2\sqrt{x^2+1}}{18\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{e} \qquad t''(x) = \frac{1}{6(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

respectivamente. Substituindo x por 1 em $t(x)$, $t'(x)$ e em $t''(x)$, teremos:

$$t(1) = \frac{\sqrt{1+1^2}}{6} + \frac{2-1}{9} \Rightarrow t(1) = \frac{3\sqrt{2}+2}{18},$$

$$t'(1) = \frac{3.1 - 2\sqrt{1^2+1}}{18\sqrt{1^2+1}} \Rightarrow t'(1) = \frac{3\sqrt{2}-4}{36},$$

$$t''(1) = \frac{1}{6(1^2+1)\sqrt{1^2+1}} \Rightarrow t''(1) = \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

Com isso o polinômio de Taylor de segunda ordem será:

$$p(x) = t(1) + t'(1)(x-1) + \frac{t''(1)}{2}(x-1)^2 \Rightarrow$$

$$p(x) = \frac{3\sqrt{2}+2}{18} + \frac{3\sqrt{2}-4}{36}(x-1) + \frac{\frac{\sqrt{2}}{24}}{2}(x-1)^2 \Rightarrow$$

$$p(x) = \frac{\sqrt{2}}{48}x^2 + \frac{3\sqrt{2}-8}{72}x + \frac{32+15\sqrt{2}}{144}.$$

Como essa função é uma função quadrática, notamos que a parábola que representa essa função terá concavidade voltada para cima, logo vai possuir ponto de mínimo, dado por :

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-\left(\frac{3\sqrt{2}-8}{72}\right)}{2\frac{\sqrt{2}}{48}} = \frac{8\sqrt{2}-6}{6}$$

cujo valor aproximado é $x = 0,88$. Desse modo a distância que ela deve terminar a travessia de canoa será:

$$BC = 2 - \frac{8\sqrt{2}-6}{6} \cong 1,12$$

Como vimos, o valor aproximado que minimiza a função $t(x)$ encontrada na primeira resolução é $x = 0,89$. Observamos que existe ai uma diferença, pois de fato a expressão encontrada para $t(x)$ na segunda resolução é uma expressão aproximada . Vamos calcular o tempo total para os dois resultados. Da primeira resolução temos então que:

$$t(0,89) = \frac{\sqrt{1+0,89^2}}{6} + \frac{2-0,89}{9} \Rightarrow t(0,89) \cong 0,34645.$$

Com a segunda resolução temos:

$$p(0,88) = \frac{\sqrt{2}}{48}(0,88)^2 + \frac{3\sqrt{2}-8}{72}(0,88) + \frac{32+15\sqrt{2}}{144} \cong 0,3461.$$

O que nos mostra que mesmo tendo aproximado $t(x)$ por Taylor apenas até segunda ordem, o tempo de travessia encontrado nas duas soluções não foi muito diferente.

Exemplo 2: Uma caixa retangular aberta deve ser fabricada com uma folha de papelão de $15 \times 30cm$, recortando quadrados nos quatro cantos e depois dobrando a folha nas linhas determinadas pelos cortes, conforme representado na figura 4.4. Existe alguma medida do corte que produza uma caixa com volume máximo?

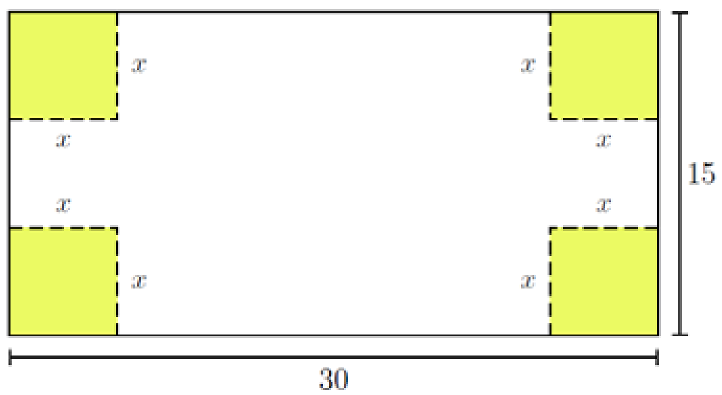

Figura 4.4: Figura ilustrando a situação apresentada no Exemplo 2.

Solução: Seja x a medida do lado do quadrado a ser recortado nos quatro cantos da folha de papelão. A caixa terá como base um retângulo de lados $30-2x$ e $15-2x$ e altura x. Seu volume será dado por:

$$V(x) = (30-2x).(15-2x).x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x,$$

observando que devemos ter $0 < x < \dfrac{15}{2}$ para que seja possível fazer o corte do retângulo.

Derivando e igualando a zero para encontrar os pontos críticos teremos:

$$V'(x) = 12x^2 - 180x + 450 \quad \text{e} \quad V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 180x + 450 = 0,$$

o que nos leva a $x = \dfrac{15 \pm 5\sqrt{3}}{2}$, ou seja, os pontos críticos são:

$$x_1 = \frac{15 + 5\sqrt{3}}{2} \cong 11,8 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{15 - 5\sqrt{3}}{2} \cong 3,2.$$

Note que $x_1 \cong 11,8$ deve ser desprezado, pois está fora do intervalo $(0, \frac{15}{2})$, logo o candidato a maximizar o volume $V(x)$ é $x_2 \cong 3,2$. Vamos então agora utilizar o "Teste da Derivada Segunda"para ver se esse valor de x é o valor que maximiza $V(x)$. Para isso vamos encontrar a derivada segunda de $V(x)$ que é:

$$V''(x) = 24x - 180,$$

e aplicando $V''(x)$ em $x_2 \cong 3,2$ teremos:

$$V''(3,2) = 24.3,2 - 180 = -103,2 < 0 \Rightarrow x_2 \cong 3,2 \text{ é ponto de máximo.}$$

Então a medida do corte x que produz uma caixa com volume máximo é $x \cong 3,2$.

Outra solução: Vamos agora utilizar a fórmula de Taylor para aproximar $V(x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x$ por uma função quadrática. Vamos então encontrar o polinômio de Taylor de ordem 2 da função V em $a = 3$. Para isso utilizaremos a primeira e segunda derivada de $V(x)$ que são:

$$V'(x) = 12x^2 - 180x + 450 \qquad \text{e} \qquad V''(x) = 24x - 180$$

respectivamente. Substituindo x por 3 em $V(x)$, $V'(x)$ e $V''(x)$, teremos:

$$V(3) = 4.(3)^3 - 90.(3)^2 + 450.(3) \Rightarrow V(3) = 648$$

$$V'(3) = 12.(3)^2 - 180.(3) + 450 \Rightarrow V'(3) = 18$$

$$V''(3) = 24.(3) - 180 \Rightarrow V''(3) = -108$$

Com isso o polinômio de Taylor de segunda ordem será:

$$p(x) = V(3) + V'(3).(x - 3) + \frac{V''(3)}{2}.(x - 3)^2 \Rightarrow$$

$$p(x) = 648 + 18.(x-3) + \frac{(-108)}{2}.(x-3)^2 \Rightarrow$$

$$p(x) = -54x^2 + 342x + 108.$$

Como essa função é uma função quadrática, notamos que a parábola que representa essa função terá concavidade voltada para baixo, logo vai possuir ponto de máximo, dado por :

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-342}{2.(-54)} \cong 3,1667.$$

Desse modo a medida do corte x que produz uma caixa com volume máximo é $x \cong 3,1667$.

Como vimos, o valor aproximado que maximiza a função $V(x)$ encontrada na primeira resolução é $x = 3,2$. Notamos que existe uma pequena diferença, pois de fato a expressão encontrada para $V(x)$ na segunda resolução é uma expressão aproximada. Vamos calcular o volume da caixa para os dois resultados. Da primeira resolução temos:

$$V(3,2) = 4.(3,2)^3 - 90.(3,2)^2 + 450.(3,2) \Rightarrow V(3,2) \cong 649,472$$

Com a segunda resolução temos:

$$p(3,1667) = -54.(3,1667)^2 + 342.(3,1667) + 108 \Rightarrow p(3,1667) \cong 649,5$$

O que, novamente, nos mostra que mesmo tendo aproximado $V(x)$ por Taylor apenas até segunda ordem, o volume da caixa encontrado nas duas soluções não foi muito diferente.

Observe o próximo exemplo, bastante similar ao anterior:

Exemplo 3: Uma caixa quadrangular aberta deve ser fabricada com uma folha de papelão de $12 \times 12cm$, recortando quadrados nos quatro cantos e depois dobrando a folha nas linhas determinadas pelos cortes, conforme representado na figura 4.5. Existe alguma medida do corte que produza uma caixa com volume máximo?

Solução: Seja x a medida do lado do quadrado a ser recortado nos quatro cantos da folha de papelão. A caixa terá como base um quadrado de lados $12 - 2x$ e altura x. Seu

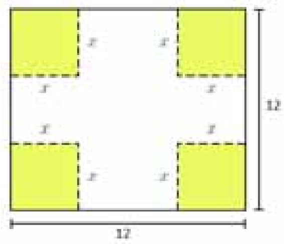

Figura 4.5: Figura ilustrando a situação apresentada no Exemplo 3.

volume será dado por:

$$V(x) = (12 - 2x)^2.x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x,$$

observando que devemos ter $0 < x < 6$ para que seja possível fazer o corte do quadrado.

Derivando e igualando a zero para encontrar os pontos críticos teremos:

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 \quad \text{e} \quad V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 96x + 144 = 0,$$

o que nos leva a $x = 2$ ou $x = 6$, ou seja, os pontos críticos são:

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_2 = 6.$$

Note que $x_2 = 6$ deve ser desprezado, pois está fora do intervalo $(0, 6)$, logo o candidato a maximizar o volume $V(x)$ é $x_1 = 2$. Vamos então agora utilizar o "Teste da Derivada Segunda"para ver se esse valor de x é o valor que maximiza $V(x)$. Para isso vamos encontrar a derivada segunda de $V(x)$ que é:

$$V''(x) = 24x - 96,$$

e aplicando $V''(x)$ em $x_1 = 2$ teremos:

$$V''(2) = 24.2 - 96 = -48 < 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ é ponto de máximo.}$$

Então a medida do corte x que produz uma caixa com volume máximo é $x = 2$.

Outra solução: Vamos agora utilizar a fórmula de Taylor para aproximar $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ por uma função quadrática. Vamos então encontrar o polinômio de

Taylor de ordem 2 da função V em $a = 3$. Para isso utilizaremos a primeira e segunda derivada de $V(x)$ que são:

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 \qquad \text{e} \qquad V''(x) = 24x - 96$$

respectivamente. Substituindo x por 3 em $V(x)$, $V'(x)$ e $V''(x)$, teremos:

$$V(3) = 4.(3)^3 - 48.(3)^2 + 144.3 \Rightarrow V(3) = 108$$

$$V'(3) = 12.(3)^2 - 96.3 + 144 \Rightarrow V'(3) = -36$$

$$V''(3) = 24.3 - 96 \Rightarrow V''(3) = -24$$

Com isso o polinômio de Taylor de segunda ordem será:

$$p(x) = V(3) + V'(3).(x-3) + \frac{V''(3)}{2}.(x-3)^2 \Rightarrow$$

$$p(x) = 108 - 36.(x-3) + \frac{-24}{2}.(x-3)^2 \Rightarrow$$

$$p(x) = -12x^2 + 36x + 108.$$

Como essa função é uma função quadrática, notamos que a parábola que representa essa função terá concavidade voltada para baixo, logo vai possuir um ponto de máximo, dado por :

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-36}{2.(-12)} = 1,5.$$

Desse modo a medida do corte x que produziria uma caixa com volume máximo seria $x = 1,5$. Mas como vimos, o valor que maximiza a função $V(x)$ encontrada na primeira resolução é $x = 2$. Notamos que, neste caso, existe uma diferença razoável entre os valores encontrados. O motivo para isso reside no fato de que, neste caso, a nossa escolha para o valor de "a"não foi das melhores possíveis. Vamos então encontrar qual deveria ser o valor de a para que o valor de x encontrado seja próximo de 2. Para isso, vamos utilizar a fórmula de Taylor para aproximar $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ por uma função quadrática em torno de a. Observe:

$$p(x) = V(a) + V'(a).(x-a) + \frac{V''(a)}{2}.(x-a)^2$$

onde

$$V(a) = 4a^3 - 48a^2 + 144a$$

$$V'(a) = 12a^2 - 96a + 144$$

$$V''(a) = 24a - 96.$$

Teremos então

$$p(x) = (4a^3 - 48a^2 + 144a) + (12a^2 - 96a + 144).(x-a) + \frac{24a - 96}{2}.(x-a)^2 \Rightarrow$$

$$p(x) = (12a - 48)x^2 + (144 - 12a^2)x + 4a^3.$$

Calculando a abscissa x_v do vértice e igualando a 2, teremos:

$$x_v = \frac{-(144 - 12a^2)}{2.(12a - 48)} = 2 \Rightarrow 12a^2 - 48a + 48 = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2.$$

Encontraremos agora o polinômio de Taylor de segunda ordem da função V em torno de $a = 2$. Ele é dado por:

$$p(x) = V(2) + V'(2).(x-2) + \frac{V''(2)}{2}.(x-2)^2,$$

onde:

$$V(2) = 4.2^3 - 48.2^2 + 144.2 = 128$$

$$V'(2) = 12.2^2 - 96.2 + 144 = 0$$

$$V''(2) = 24.2 - 96 = -48.$$

Então:

$$p(x) = 128 + 0.(x-2) + \frac{-48}{2}.(x-2)^2 \Rightarrow$$

$$p(x) = -24x^2 + 96x + 32.$$

Assim, sendo uma função quadrática, com a parábola que representa essa função de concavidade voltada para baixo, teremos um ponto de máximo dado por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-96}{2.(-24)} \Rightarrow x_v = 2.$$

Desse modo, vemos que a aproximação da função V por seu polinômio de Taylor de segunda ordem fornece o mesmo resultado encontrado anteriormente, como esperado.

Observação 1: Note que nos exemplos 1 e 2, a escolha do "a"foi um valor próximo do valor de x que resolve o problema. Por isso é que os resultados obtidos na segunda solução foram suficientemente próximos dos resultados obtidos na primeira solução. O valor escolhido para "a"na solução dos dois exemplos, além de ser um valor próximo do valor de x que resolve o problema, também tem o objetivo de facilitar as contas. Já no exemplo 3, o valor escolhido para "a"($a = 3$) não foi um valor próximo do valor que resolve o problema e isso contribuiu para que a resposta da segunda resolução ficasse um pouco mais distante da resposta da primeira solução.

Observação 2: Devemos observar que mesmo que a escolha de "a"seja exatamente o valor que resolve o problema, obtido na primeira resolução de cada exemplo, isso não garante que na segunda resolução o resultado encontrado será exato, visto que o polinômio de Taylor de segunda ordem da função que resolve o problema é uma aproximação. No exemplo 3 ocorreu, mas isso não é regra, foi uma exceção. De fato, supomos que $V(x)$ seja a função que modela algum problema de otimização. O seu polinômio de Taylor de segunda ordem em torno de algum valor "a"do seu domínio será:

$$p(x) = V(a) + V'(a)(x-a) + \frac{V''(a)}{2!}(x-a)^2 \Rightarrow$$

$$p(x) = \frac{V''(a)}{2}x^2 + [V'(a) - aV''(a)]x + V(a) - aV'(a) + \frac{a^2V''(a)}{2}.$$

Sendo $p(x)$ uma função quadrática, a abscissa x_v do vértice será:

$$x_v = \frac{aV''(a) - V'(a)}{V''(a)} \Rightarrow x_v = a - \frac{V'(a)}{V''(a)}.$$

No exemplo 3, note que para o valor $a = 2$ temos $V'(2) = 0$, o que faz com que $x_v = a$, ou seja, $x_v = 2$. E isso fez com que os resultados ficassem exatamente iguais. No próximo exemplo esse fato também ocorre:

<u>**Exemplo 4:**</u> Um fabricante de móveis estima que o custo semanal da fabricação de x reproduções (manuais) de uma mesa colonial é dado por $C(x) = x^3 - 3x^2 - 80x + 500$. Cada mesa é vendida por $R\$2800,00$. Que produção semanal maximizará o lucro?

Solução: Seja $R(x) = 2800x$ a receita semanal. Com isso então teremos que o lucro será:

$$L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(x) = 2800x - (x^3 - 3x^2 - 80x + 500),$$

ou seja

$$L(x) = -x^3 + 3x^2 + 2880x - 500.$$

Observe que x deve ser maior ou igua a zero, pois indica a quantidade de mesas produzidas por semana.

Derivando e igualando a zero para encontrar os pontos críticos teremos:

$$L'(x) = -3x^2 + 6x + 2880 \quad \text{e} \quad L'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x + 2880 = 0,$$

o que nos leva a $x = 32$ e $x = -30$, ou seja, os pontos críticos são:

$$x_1 = 32 \quad \text{e} \quad x_2 = -30.$$

Note que $x_2 = -30$ deve ser desprezado, pois como já vimos x deve ser maior ou igual a zero, logo o candidato a maximizar o lucro é $x = 32$. Vamos então agora utilizar o "Teste da Derivada Segunda"para ver se esse valor de x é o valor que maximiza $L(x)$. Para isso vamos encontrar a derivada segunda de $L(x)$ que é:

$$L''(x) = -6x + 6,$$

e aplicando $L''(x)$ em $x = 32$ teremos:

$$L''(32) = -6.32 + 6 = -186 < 0 \Rightarrow x = 32 \text{ é ponto de máximo.}$$

Então a quantidade de mesas que devem ser produzidas semanalmente para maximizar os lucros deve ser 32 mesas.

Outra solução: Vamos agora utilizar a fórmula de Taylor para aproximar $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 2880x - 500$ por uma função quadrática. Vamos então encontrar o polinômio de Taylor de ordem 2 da função L em $a = 32$. Para isso utilizaremos a primeira e segunda derivada de $L(x)$ que são:

$$L'(x) = -3x^2 + 6x + 2880 \qquad \text{e} \qquad L''(x) = -6x + 6$$

respectivamente. Substituindo x por 32 em $L(x)$, $L'(x)$ e $L''(x)$, teremos:

$$L(32) = -32^3 + 3.32^2 + 2880.32 - 500 \Rightarrow L(32) = 61.964$$

$$L'(32) = -3.32^2 + 6.32 + 2880 \Rightarrow L'(32) = 0$$

$$L''(32) = -6.32 + 6 \Rightarrow L''(32) = -186.$$

Com isso o polinômio de Taylor de segunda ordem será:

$$p(x) = L(32) + L'(32).(x - 32) + \frac{L''(32)}{2}.(x - 32)^2 \Rightarrow$$

$$p(x) = 61964 + 0.(x - 32) + \frac{-186}{2}.(x - 32)^2 \Rightarrow$$

$$p(x) = -93x^2 + 5952x - 33268.$$

Assim, sendo uma função quadrática, com a parábola que representa essa função de concavidade voltada para baixo, teremos um ponto de máximo dado por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-5952}{2.(-93)} \Rightarrow x_v = 32.$$

Desse modo, vemos que a aproximação da função L por seu polinômio de Taylor de segunda ordem fornece o mesmo resultado encontrado anteriormente, como esperado, pois como vimos $L'(32) = 0$ e de acordo com a observação 2 sendo $L'(a) = 0$, faz com que $x_v = a$.

4.4 Considerações finais

Notamos que muitos problemas tem sua solução na determinação do valor máximo ou mínimo de uma função. O estudo de máximos e mínimos de funções deveria ter mais destaque nos textos apresentados nos livros de matemática do Ensino Médio. Observamos que são apresentados apenas problemas que recaem em uma função quadrática. Talvez seja esse o motivo que leva a uma escassez de variações de problemas de otimização como são chamados. Existem, hoje em dia, muitos estudos na direção do "retorno"do estudo básico de cálculo diferencial no Ensino Médio, ou seja, limites e derivadas, visto que em livros de matemática do ensino médio, publicados por volta de 1980, como é o caso do livro " Matemática 2º Grau, de José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, volume 3", apresentam alguns capítulos reservados para o ensino de limites e derivadas no terceiro ano do ensino médio.

Nós também defendemos a reinclusão desse conteúdo no ensino médio, entre outros motivos, pelo fato de possibilitar o estudo de uma quantidade bem maior de problemas de otimização, que não recaem em uma função quadrática. Acreditamos que isso faria com que o processo de ensino e aprendizagem de matemática como um todo, teria uma melhora significativa, não somente no ensino médio, mas também nos primeiros anos de estudo da matemática no ensino superior.

Como podemos observar, nos exemplos resolvidos na seção anterior, foram utilizadas ferramentas básicas de cálculo como derivadas simples. Veja que com isso podemos apresentar uma aplicação para a fórmula de Taylor e dessa forma acreditamos que podemos incentivar mais o estudo de matemática, visto que muitos problemas de otimização sugerem atividades ou situações bem práticas, mostrando que a matemática pode ser bastante útil em aplicações básicas, como foram os exemplos 2 e 3, que sugeriam a construção de uma caixa com volume máximo. Essas e muitas outras situações poderiam servir de estímulo para um estudo mais aprofundado de máximos e mínimos de funções.

Acreditamos que com esse trabalho podemos propor, aos alunos do Ensino Médio, a solução de problemas não recaem em uma função quadrática. Sabemos que nesse estágio o aluno do ensino médio não sabe o básico de Cálculo Diferencial. Mas mesmo assim queremos tentar motivar o aluno, quem sabe, a fazer algum curso na área de exatas (Engenharia, Física, matemática,...) onde ele aprenderá a resolver esse tipo de problema facilmente. Suponha que haja então uma certa disposição para seguir o procedimento proposto nessa dissertação, ou seja, teríamos que ensinar algumas regras de derivação básicas, o que não é nada demais, além de também poderem ser usadas nas aulas de Física, e convencer o aluno qua a função quadrática $p(x) = V(a) + V'(a)(x-a) + \frac{V''(a)}{2}(x-a)^2$, onde $V(x)$ é a função que modela a solução do problema, é uma aproximação razoável da função $V(x)$ numa vizinhança de "a", sob certas condições que no momento não precisam ser explicitadas. Com respeito a escolha do valor de "a", poderíamos fazer uma tabela com vários valores de "a"e mostrar qual seria o valor mais adequado, e aproveitando esse momento para tentar incentivar mais ainda o aluno dizendo que num curso de exatas, poderemos aprender encontrar facilmente o valor ideal. Queremos observar aqui que a matemática é realmente uma ferramenta poderosa que pode ajudar a resolver problemas dos mais simples até alguns bem complicados da nossa vida.

Não temos a pretenção, com esse trabalho, de esgotar o assunto, visto que não abordamos máximos e mínimos de vários tipos de funções, como é o caso de funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, funções modulares, e muitas outras. Percebemos também que neste trabalho apenas tratamos de funções de uma variável. Queremos com esse trabalho, incentivar o estudo de matemática em todos os sentidos, mas especificamente, queremos incentivar o estudo de máximos e mínimos de funções. Acreditamos que a abordagem do conceito de derivada no ensino médio seria um facilitador para uma maior compreensão da matemática, visto que isso proporciona a aquisição de imagens conceituais ricas, desenvolvendo uma compreensão significativa, pelo aluno, da matemática como um todo.

Referências Bibliográficas

[1] Lima, Elon Lages, **A Matemática do Ensino Médio - Volume 1 / Elon Lages Lima,Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado**, 10ª edição, Rio de Janeiro: SBM 2012.

[2] Lima, Elon Lages, **Curso de análise volume 1, Rio de Janeiro, Intituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq**, 4ª edição, Rio de Janeiro: IMPA 1976.

[3] Nikolski,S. M., **Matemática para Engenharia - Pricípios de Análise - Volume 2 / Ia.S.Bugrov, S.M.Nikolski**,Traduzido do Russo por M.Dombrovsky, Editora Mir. Moscovo 1986.

[4] Iezzi, Gelson, **Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 1**, 8ª edição, São Paulo: Atual 2004.

[5] Ávila, Geraldo Severo de Souza, **Cálculo 1 : funções de uma variável**, 4ª edição, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora 1981.

[6] Roque, Tatiana, **Tópicos de História da Matemática / Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira Carvalho** , 1ª edição, Rio de Janeiro: SBM 2012.

[7] Dante, Luiz Roberto, **Matemática: contexto e aplicações - Volume 1** , 1ª edição, São Paulo : Ática 2010.

[8] Barroso, Juliane Matsubara / obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna, **Conexões com a Matemática - Volume 1** , 1ª edição, São Paulo : Moderna 2010.

[9] STEWART, JAMES, **Cálculo, Volume I**, 5ª edição, São Paulo : Pioneira Thomson learning 2006.

[10] STEWART, JAMES, **Cálculo, Volume II**, 5ª edição, São Paulo : Pioneira Thomson learning 2006.

[11] ÁVILA, GERALDO SEVERO DE SOUZA , **O ensino de Cálculo no 2° grau. Revista do Professor de Matemática, n° 18**, 1991.

[12] ÁVILA, GERALDO SEVERO DE SOUZA , **Limites e derivadas no ensino médio? Revista do Professor de Matemática, n° 60**, 2006.

[13] ANDRÉ, SELMA LOPES DA COSTA , **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio**, Rio de Janeiro Setembro/2008.

[14] DANTE, LUIZ ROBERTO, **Matemática: contexto e aplicações - Volume 3** , 1ª edição, São Paulo : Ática 2010.

[15] LEITHOLD, LOUIS , **O Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1** , 3ª edição, São Paulo : Editora Harbra 1994.

Índice Remissivo