



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Transformada de Fourier: Teoria como base para Aplicações em Mecânica Celeste

Edgard Lourenço Júnior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Nelson Callegari Júnior

2014

517.355 Lourenço Júnior, Edgard
L892t Transformada de Fourier: teoria como base para aplicações em
mecânica celeste / Edgard Lourenço Júnior. - Rio Claro, 2014
108 f. : il., figs., gráfs., forms., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de
Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Nelson Callegari Júnior

1. Fourier, Transformações de. 2. Métodos matemáticos. 3. Numérico.
4. Método. 5. Análise. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Agradecimentos

A Deus por me conceder tudo o que precisava para superar as dificuldades.

Ao Prof. Dr. Nelson Callegari Júnior, pela orientação empenhada, séria e dedicada a confecção de um trabalho de qualidade e pela compreensão e paciência ao realizá-la.

Especialmente ao Prof. Dr. Mário Roberto da Silva pela colaboração fundamental que proporcionou um excelente trabalho computacional e uma compreensão singular das teorias de Análise de Sinais, importantes na confecção, leitura e interpretação de espectros.

Ao Prof. Me. Demétrio Tadeu Ceccatto, pela leitura da versão original, correções e sugestões.

A todos os professores da UNESP que sempre demonstraram profundo respeito aos alunos e seus trabalhos, pelo apoio e palavras amigas que nunca faltaram. À instituição UNESP e seus funcionários pela calorosa simpatia que permitiu uma vivência agradável e inesquecível.

À minha família pelo carinho, incentivo e apoio incondicional à todas as decisões tomadas por mim, pela formação justa, amorosa e coeza que me permitiram trilhar caminhos inimagináveis e chegar até aqui. Em particular, agradeço imensamente ao meu tio Eduardo que todos os dias me ensina maestralmente a ter paciência e que não existe problema que não possa ser solucionado sem ela.

À minha namorada que incentivou veementemente a finalização deste trabalho, rumo a um novo ciclo de prosperidade e oportunidades.

(...) E, destemido,
Deixei meus lábios formarem um bramido:
"Childe Roland à Torre Negra chegou", foi minha chamada.
Robert Browning

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é mostrar a importância da Teoria da Transformada de Fourier Discreta como ferramenta nas análises de dados obtidos de simulações numéricas com modelos de Sistemas Dinâmicos em Mecânica Celeste. Mostraremos as principais motivações e justificativas presentes no desenvolvimento das Transformada de Fourier contínua, discreta, e de algoritmos computacionais para *Fast Fourier Transform*. Esse desenvolvimento será aplicado na dinâmica de rotação de satélites naturais.

Palavras-chave: Transformada Rápida de Fourier, Métodos Numéricos, Análise de Fourier, Transformada de Fourier.

Abstract

The main objective of this work is to show the importance of Discrete Fourier Transformation as a tool in the analyses of data obtained from numerical simulations of Dynamical Systems models in Celestial Mechanics. We will show the main motivations and justifications presented in development of continuous and discrete Fourier Transform, and computational algorithms to Fast Fourier Transform. We will apply these theoretical development in dynamics of rotation of natural satellites.

Keywords: Fast Fourier Transform, Numerical Recipes, Fourier Analysis, Fourier Transform.

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | (a) Função Degrau (Eq. 2.5); (b) Transformada de Fourier (Eq. 2.6) | 15 |
| 2.2 | (a) Função Triangular (Eq. 2.7); (b) $F(\xi) = -\frac{\cos(\pi\xi)-1}{(\pi\xi)^2}$ | 16 |
| 3.1 | Gráficos de $g(y)$ centrado em $y = 0$ (Eq. 3.32), e $f(x - y)$ centrado em: (a) $x = -\frac{5}{2}$; (b) $x = -\frac{1}{2}$; (c) $x = \frac{1}{2}$; (d) $x = \frac{5}{2}$; | 38 |
| 3.2 | Função Triangular (Eq. 3.35) | 39 |
| 3.3 | Produto de convolução $(f * g)(x)$, $f(x)$ e $g(x)$ | 40 |
| 3.4 | Transformada de Fourier (Eq. 3.53) | 44 |
| 3.5 | Sistematização do uso do Teorema da Convolução. (BRIGHAM, 1974, p. 60). | 45 |
| 4.1 | Amostras de $f(x)$ (Eq. 4.23) | 53 |
| 4.2 | Transformada de Fourier Discreta da eq. (4.23) | 53 |
| 4.3 | (a) Amostras de $f(x)$ (Eq. 4.25); (b) TFD da eq. (4.25) | 54 |
| 4.4 | Transformada Inversa da Fourier Discreta Eq. (4.23) | 56 |
| 4.5 | Transformada Inversa da Fourier Discreta Eq. (4.25) | 57 |
| 5.1 | Eq. (5.22): Amostras através do Fortran77 | 66 |
| 5.2 | FFT para Eq. (5.22): (a) Resultado obtido no Fortran77; (b) Resultado obtido no Maple [®] | 66 |
| 5.3 | FFT para Eq. (5.22): Resultado obtido no Maple [®] , $N = 64$ e $T = 0,25$ | 67 |
| 5.4 | função $y = 2\text{sen}(2\pi x)$ com número inteiro de ciclos. | 75 |
| 5.5 | FFT da função senóide. | 76 |
| 5.6 | (a) função com um número não inteiro de ciclos. (b) FFT da função senóide. | 76 |
| 5.7 | gráfico da função Hanning. | 77 |
| 5.8 | FFT da função $y = 2\text{sen}(2\pi x)$ aplicada à função Hanning. | 78 |
| 5.9 | FFT da função Hanning. | 78 |
| 6.1 | Movimento rotacional planetário sob torque externo (RIBEIRO, 2012). | 81 |
| 6.2 | Espectro de ψ para $\theta_0 = 1^\circ$ e $\dot{\theta}_0 = n$. | 83 |
| 6.3 | Espectro de ψ para o satélite Hipérion: (a) por frequência; (b) por período. | 85 |
| 6.4 | Espectro de ψ do sistema Terra-Lua. | 86 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|--|----|
| 5.1 | Indexação Binária | 64 |
| 5.2 | Método <i>bit-reverse</i> para $N = 4$ | 65 |
| 5.3 | Método <i>bit-reverse</i> para $N = 8$ | 65 |
| 6.1 | Elementos Orbitais do Sistema Terra-Lua (MURRAY e DERMOTT, 1999). | 82 |
| 6.2 | Elementos Orbitais do Sistema Saturno-Hipérion (MURRAY e DERMOTT, 1999). | 85 |

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 10 |
| 1.1 | Estruturação do Trabalho | 10 |
| 1.2 | Uma breve introdução histórica | 11 |
| 2 | Transformada de Fourier e inversa | 12 |
| 2.1 | Transformada de Fourier | 12 |
| 2.2 | Condição para as funções da Transformada | 17 |
| 2.3 | Séries de Fourier - Um caso particular da Transformada | 18 |
| 2.4 | Outras formas de representar a Transformada de Fourier | 23 |
| 3 | Propriedades da Transformada de Fourier | 25 |
| 3.1 | Funções da Integral de Fourier | 25 |
| 3.1.1 | Funções de Suporte Compacto | 28 |
| 3.2 | Espaço de Schwartz | 29 |
| 3.3 | Transformada como Transformação Linear | 31 |
| 3.4 | Transformada de Fourier da derivada | 32 |
| 3.5 | Derivada da Transformada de Fourier | 33 |
| 3.6 | Transformada como Operador Linear | 34 |
| 3.7 | Limite e Continuidade | 34 |
| 3.8 | Transformada da Translação | 36 |
| 3.9 | Produto e Transformada de Convolução | 36 |
| 4 | Transformada de Fourier Discreta | 46 |
| 4.1 | Teorema da Amostragem | 46 |
| 4.2 | Desenvolvimento Teórico | 49 |
| 4.2.1 | Inversa da Transformada de Fourier Discreta | 54 |
| 5 | Transformada Rápida de Fourier - FFT | 58 |
| 5.1 | Formulação Matricial | 58 |
| 5.2 | Algoritmo Danielson-Lanczos | 60 |
| 5.3 | Algoritmo Cooley-Tukey | 67 |
| 5.3.1 | Generalização para Cooley-Tukey | 73 |
| 5.4 | Janelamento de Sinais e os efeitos de <i>Leakage</i> | 75 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6 | Aplicações em Mecânica Celeste | 80 |
| 6.1 | Movimento Rotacional - Momento de Quadripolo Permanente | 80 |
| 6.2 | Sistema Terra-Lua | 82 |
| 7 | Conclusão Final | 87 |
| | Referências | 89 |
| A | Lema de Riemann-Lebesgue | 91 |
| B | Algoritmo TFD e Inversa - Maple® 12 | 94 |
| B.1 | Transformada de Fourier Discreta | 94 |
| B.2 | Inversa da Transformada de Fourier Discreta | 95 |
| C | Algoritmo Danielson-Lanczos - Fortran77 | 98 |
| D | Algoritmo Danielson-Lanczos - Maple® 12 | 104 |
| D.1 | Procedure <i>FFTT</i> | 104 |
| D.2 | Procedure <i>four1</i> | 106 |

1 Introdução

1.1 Estruturação do Trabalho

O objetivo principal desse trabalho é mostrar a importância da Teoria da Transformada de Fourier em tópicos de Mecânica Celeste. Para isso, será imprescindível entendermos os principais conceitos que constituem a Teoria da Transformada de Fourier.

Inicialmente, os principais conceitos da Teoria da Transformada de Fourier serão abordados no Capítulo 2. Acreditamos que o bom entendimento dos conceitos desenvolvidos para Transformada de Fourier contínua ajudam no estudo do caso discreto, bem como motivam o estudo das Séries de Fourier.

Uma vez definido a Transformada de Fourier, precisamos estudar suas propriedades e em quais condições elas são universais (Capítulo 3). Com isso, podemos entender sua conceitualização discreta e seus aspectos computacionais através do desenvolvimento de algoritmos (Capítulo 4).

Em seguida, abordamos um dos principais tópicos dissertados no trabalho: *Transformada Rápida de Fourier* (Capítulo 5). Será a transformada rápida de Fourier (FFT) que nos fornecerá os algoritmos para simularmos computacionalmente as aplicações desenvolvidas na segunda parte desse trabalho.

No Capítulo 6, apresentaremos um problema típico de rotação de satélite em Mecânica Celeste, na qual o uso dos métodos para obtenção da FFT (estudados no capítulo anterior) se faz necessário na análise dos dados.

Adicionalmente, o Apêndice A, ajudará na tarefa de compreender aspectos matemáticos, que fazem parte de uma abordagem mais rigorosa sobre as transformadas contínuas de Fourier. Além disso, temos a transcrição de todos os algoritmos computacionais usados para o cálculo dos exemplos expostos nas seções de Transformada Discreta de Fourier e FFT (Apêndices B, C e D).

1.2 Uma breve introdução histórica

A Teoria da Transformada de Fourier e, mais amplamente, o que chamamos de Análise de Fourier, possui um desenvolvimento teórico muito mais recente na história do que as teorias mais gerais envolvidas pelo tema Mecânica Celeste.

Em Paris, nos primeiros anos do séc. XIX, J. B. Fourier (1768-1830) deu início aos estudos de séries que se aproximavam de funções, sem dizer se de fato tais séries eram convergentes e obtidas de modo único, trabalho que coube ao seu aluno, Dirichlet (1805-1859). Na mesma época, P. S. Laplace (1749-1827) lançou seu famoso trabalho *Mécanique Céleste*, publicado em cinco volumes entre os anos de 1799 a 1805, onde relacionava as noções do Cálculo Diferencial e Integral com as muitas noções empíricas até então aceitas na área (BOYER, C. B. et al, 2010).

Podemos citar como exemplo, que o trabalho de Laplace traduziu para a linguagem do Cálculo muitas demonstrações construídas com argumentos geométricos nos três volumes da obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, escrita por Isaac Newton (1643-1727), e publicada em 1687.

Ao longo da história, o trabalho inicialmente desenvolvido por Fourier ganhou importantes contribuições direta e indiretamente de matemáticos como o próprio Dirichlet e o matemático alemão Wierstrass (1815-1897), dando um passo enorme da matemática discreta à contínua, merecendo, então, mais estudos que a tornariam conhecida como Análise de Fourier. Mas não foi a esmo esse esforço entre os matemáticos para desenvolver tal teoria: suas aplicações, sobre tudo na física, ganharam uma notável indispensabilidade.

É evidente, entretanto, que a sua utilidade chegue às áreas mais diversas como criptografia, processamento de imagens (médicas, comerciais, etc.), oceanografia e até em áreas de enfoque teórico, como Física e Química Quântica, Teoria dos Números, Teoria das Probabilidades, das Distribuições, e Análise Matemática, através da investigação de soluções em Equações Diferenciais Parciais, por exemplo.

Talvez, a aplicação mais conhecida, ou pelo menos a mais discutida atualmente, seja no campo do conhecimento de Processamento Digital de Sinais, que constitui uma sub-área das Ciências da Computação, Eletrônica e Telecomunicação.

2 Transformada de Fourier e inversa

Introduziremos, neste capítulo, a definição da Transformada de Fourier e alguns pequenos conceitos que nos ajudarão a entender mais claramente os estudos apresentados nos demais capítulos.

A priori, é importante que saibamos manipular com certa habilidade as expressões que definem tanto a transformada quanto a Transformada Inversa de Fourier, para isso, temos alguns exemplos que nos auxiliarão nesse entendimento e que servirão como aplicação, principalmente, para as propriedades das transformadas que estudaremos no Capítulo 3.

No decorrer desta introdução, também apresentaremos uma motivação matemática para o desenvolvimento da Transformada de Fourier, da qual notaremos que a Série de Fourier é um caso particular da transformada.

2.1 Transformada de Fourier

Antes de avançarmos, discutiremos brevemente o conceito de integral imprópria que é essencial e presente tanto na definição da Transformada de Fourier quanto em sua inversa.

Sabemos que as integrais impróprias são de dois tipos: de funções definidas em um intervalo limitado porém não fechado e, de funções definidas num intervalo ilimitado. Veremos as definições para cada um dos casos, respectivamente, e algumas observações sobre elas.

Definição 2.1.1. Seja $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Considere $\varepsilon > 0$ tal que f seja integrável em $[a + \varepsilon, b]$. Definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \quad (2.1)$$

desde de que o limite exista e seja finito.

Embora a definição (2.1.1) suponha que, para qualquer valor que se atribua a $f(a)$,

obtem-se sempre uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, esse é um resultado que pode ser demonstrado, mas que não o faremos neste trabalho. É possível também, obter uma definição análoga para o caso de $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiremos o outro tipo de integral imprópria.

Definição 2.1.2. Seja $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f integrável em $[a, t]$, para todo $t > a$. Definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx, \quad (2.2)$$

desde de que o limite exista e seja finito.

Em ambas as definições, dizemos que a integral é imprópria se o limite existir e for finito. No entanto, mesmo nos casos onde o limite existir, mas for $+\infty$ ou $-\infty$, continuaremos a dizer que é uma integral imprópria, embora seja classificada como **divergente**. Tanto no cálculo das integrais impróprias, quanto nas definições das transformadas, estamos interessados no caso onde a integral seja **convergente**, ou seja, limites que existam e sejam finitos.

Existe um caso mais geral da definição (2.1.2), na qual a função é definida em um intervalo $(-\infty, +\infty)$. Nesse caso, usaremos a definição a seguir.

Definição 2.1.3. Seja $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f integrável em $[-t, t]$, para todo $t > 0$, e um ponto arbitrário $a \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx, \quad (2.3)$$

desde que ambas as integrais do 2º membro sejam convergentes.

Note que, em todas as definições, a função f assume valores em \mathbb{R} e que, embora as funções apresentadas nas definições a seguir assumam valores em \mathbb{C} , as variáveis de integração são reais. Portanto, as observações feitas anteriormente continuam válidas.

Definiremos, agora, a Transformada de Fourier.

Definição 2.1.4 (Transformada de Fourier). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Sua transformada de Fourier, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, é dada pela expressão:

$$\mathcal{F}[f](\xi) \equiv F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx.$$

Observe que na definição (2.1.4) existe o fator integrando $e^{-i2\pi\xi x}$, que pode ser substituído pela expressão mais geral:

$$e^{-i(2\pi n\xi x)} = \cos(2\pi n\xi x) - i \operatorname{sen}(2\pi n\xi x), \quad (2.4)$$

com $n = 1$, conhecida como Fórmula de Euler.

Essencialmente, se a integral da definição (2.1.4) existe para todo valor do parâmetro ξ , então a definição (2.1.4) exhibe $F(\xi)$ como transformada de Fourier de $f(x)$.

Dizemos que $f(x)$ é uma função com parâmetro de tempo x , e $F(\xi)$ é uma função com parâmetro de frequência ξ . Neste trabalho, representaremos as funções com parâmetro de tempo por letras minúsculas e as funções com parâmetro de frequência por letras maiúsculas.

Exemplo 2.1.1. Considere a função degrau unitário:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Sua Transformada de Fourier é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi x\xi} dx \\ &= \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(x)e^{-i2\pi x\xi} dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^{-1} f(x)e^{-i2\pi x\xi} dx + \int_{-1}^1 f(x)e^{-i2\pi x\xi} dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N f(x)e^{-i2\pi x\xi} dx \\ &= \int_{-1}^1 e^{-i2\pi x\xi} dx = \frac{2}{2\pi\xi} \operatorname{sen}(2\pi\xi). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Portanto, $F(\xi) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi\xi)}{\pi\xi}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Observe os gráficos de $f(x)$ e de $F(\xi)$, respectivamente:

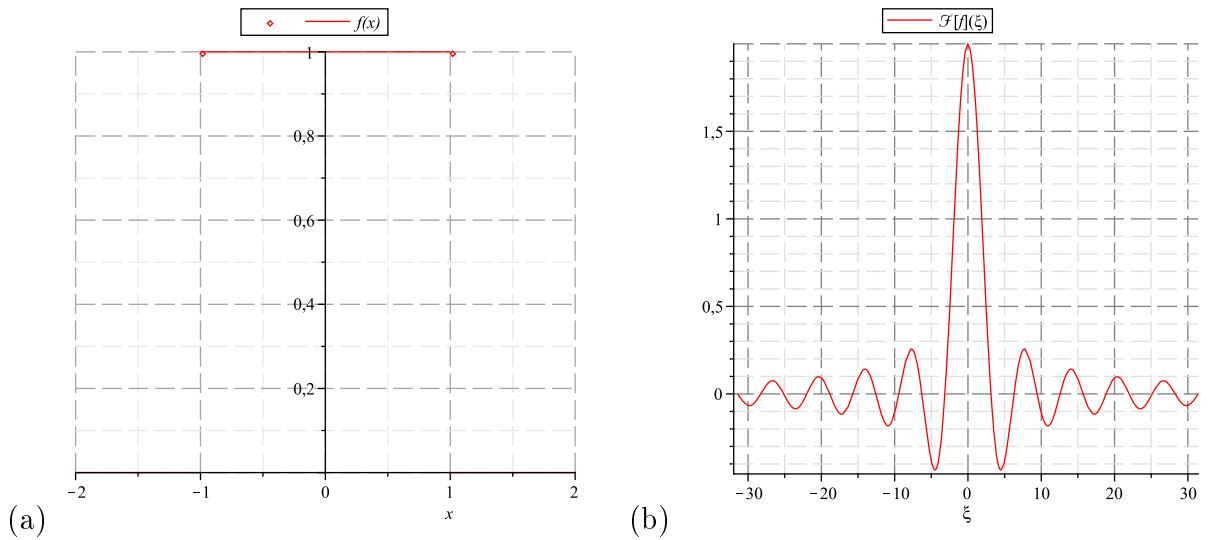


Figura 2.1: (a) Função Degrau (Eq. 2.5); (b) Transformada de Fourier (Eq. 2.6)

Vejamos mais um exemplo para a Transformada de Fourier:

Exemplo 2.1.2. Considere a função triangular:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2|x|, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Sua Transformada de Fourier é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi x\xi} dx \\ &= \lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(x)e^{-i2\pi x\xi} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)e^{-i2\pi x\xi} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - 2|x|)e^{-i2\pi x\xi} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i2\pi x\xi} dx - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x|e^{-i2\pi x\xi} dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Utilizando técnicas de integração, sabemos que:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x|e^{-i2\pi x\xi} dx = \frac{2 \operatorname{sen}(\pi\xi)}{4\pi\xi} + \frac{2}{(i2\pi\xi)^2} - \frac{\cos(\pi\xi)}{(i2\pi\xi)^2}. \quad (2.9)$$

Assim, teremos que a última igualdade em (2.8), será dada pela expressão:

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi\xi)}{\pi\xi} - 2 \left(\frac{2 \operatorname{sen}(\pi\xi)}{4\pi\xi} + \frac{2}{(i2\pi\xi)^2} - \frac{\cos(\pi\xi)}{(i2\pi\xi)^2} \right) = -\frac{\cos(\pi\xi) - 1}{(\pi\xi)^2}. \quad (2.10)$$

Portanto, $F(\xi) = -\frac{\cos(\pi\xi) - 1}{(\pi\xi)^2}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Observe os gráficos de $f(x)$ e de $F(\xi)$, respectivamente:

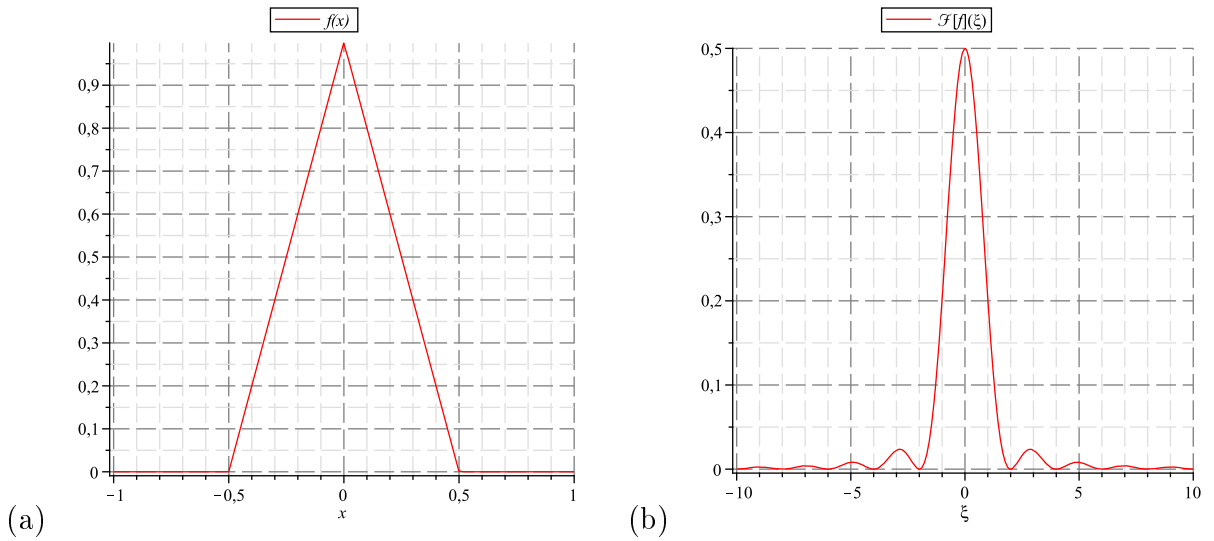


Figura 2.2: **(a)** Função Triangular (Eq. 2.7); **(b)** $F(\xi) = -\frac{\cos(\pi\xi)-1}{(\pi\xi)^2}$

A definição a seguir geralmente é exibida na forma de Teorema, passível de demonstração, no qual definimos uma expressão e mostramos sua injetividade e sobrejetividade, para que depois possamos afirmar que ela é, de fato, a expressão que define a Transformada Inversa. Sua demonstração pode ser encontrado na íntegra em (FIGUEREDO, p. 203), citado na referência [9]. No entanto, considere a definição a seguir.

Definição 2.1.5 (Transformada Inversa de Fourier). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, e $F(\xi)$ sua transformada de Fourier, então:

$$\overline{\mathcal{F}\mathcal{F}}[f] \equiv f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i2\pi\xi x} d\xi.$$

A definição (2.1.5) permite determinar a função que deu origem à Transformada de Fourier.

Portanto, se apresentarmos a função:

$$F(\xi) = \frac{\text{sen}(2\pi\xi)}{\pi\xi}, \quad (2.11)$$

do exemplo (2.1.1), a definição (2.1.5) garante que encontraremos como $f(x)$ a função degrau unitário, tal como descrita no exemplo (2.1.1).

Embora tenhamos definido a Transformada de Fourier e sua inversa, deixaremos para tratar das propriedades no Capítulo 3, devido sua importância no desenvolvimento teórico da versão discreta da transformada.

2.2 Condição para as funções da Transformada

Antes de entrarmos na próxima seção, precisaremos impor algumas condições às funções das definições (2.1.4) e (2.1.5). Ao estudar as motivações para a origem da Transformada de Fourier e sua inversa, descreveremos da Integral de Fourier que, por sua vez, exige as condições que serão definidas a seguir:

Condição 2.2.1. Suponha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nas seguintes condições:

- i. f é seccionalmente contínua em qualquer intervalo finito.
- ii. f é absolutamente integrável em $(-\infty, \infty)$.

Entendemos f seccionalmente contínua, como uma função f que possui apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado.

Note que, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dizemos que f está nas condições impostas em (2.2.1) se suas partes real e imaginária, que são funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , satisfazem individualmente a condição (2.2.1). Ou seja, se f assumir valores em \mathbb{C} , $f(x) = g(x) + ih(x)$, então além de $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ serem seccionalmente contínuas, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty \\ \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx < \infty \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Note que, para haver Transformada de Fourier e sua inversa, tal como definido em (2.1.4) e (2.1.5) respectivamente, a condição (2.2.1) é suficiente, mas não necessária.

Se analisarmos a seguir, para uma função f ter Transformada de Fourier e sua inversa, basta que ela seja integrável em $(-\infty, \infty)$. Além do mais, a integral no sentido de Riemman para o intervalo $(-\infty, \infty)$, implica em uma integral do tipo imprópria e com dois processos independentes de limite, como visto na definição (2.1.3).

Admita $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então dizemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(x)dx, \quad (2.13)$$

de modo que f só precisa ser contínua no intervalo $[-M, N]$, exceto, possivelmente, em um número finito de pontos. Nesse sentido, notamos um conjunto de funções muito maior do que o conjunto das funções que satisfazem as condições em (2.2.1). Como exemplo, podemos citar a função $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x)/x & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$, que é seccionalmente contínua e cuja integral é convergente, mas não absolutamente convergente.

Veremos nas próximas seções ser mais conveniente trabalhar com uma classe restrita de funções, justamente pelas propriedades que suas transformadas apresentaram como consequências dessa restrição.

2.3 Séries de Fourier - Um caso particular da Transformada

Estudaremos alguns conceitos que nos ajudarão a entender a Transformada de Fourier dentro de um contexto mais geral.

É relevante a relação que a Série de Fourier guarda com a Transformada de Fourier. Essa relação se revela como um caso particular da transformada através, por exemplo, da restrição do tipo da função f usada nas definições (2.1.4) e (2.1.5).

Para percebermos isso mais efetivamente, vamos percorrer o caminho inverso, tentando generalizar o conceito já bem conhecido da Série de Fourier.

Definição 2.3.1 (Série de Fourier). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica, de período T_0 . Definimos a Série de Fourier de $f(x)$, como:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n \xi x) + b_n \text{sen}(2\pi n \xi x)], \quad (2.14)$$

onde $\xi = \frac{1}{T_0}$ é a frequência fundamental, e a magnitude dos senoides é dado pelos coeficientes

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(x) \cos(2\pi n \xi x) dx, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(x) \text{sen}(2\pi n \xi x) dx, & n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como a função nas definições (2.1.4) e (2.1.5) assumem valores complexos, é conveniente observar a versão complexa da definição (2.3.1) acima. Para isso, considere a Fórmula de Euler na expressão (2.4).

De (2.4), segue que:

$$\cos(2\pi n \xi x) = \frac{e^{i(2\pi n \xi x)} + e^{-i(2\pi n \xi x)}}{2}; \quad \text{sen}(2\pi n \xi x) = \frac{e^{i(2\pi n \xi x)} - e^{-i(2\pi n \xi x)}}{2i}. \quad (2.16)$$

Aplicando as expressões acima em (2.14), podemos reescrever a série da seguinte forma:

$$\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i(2\pi n \xi x)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-i(2\pi n \xi x)}. \quad (2.17)$$

É possível simplificar a expressão (2.17) manipulando índices negativos:

$$\begin{aligned}
a_{-n} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(x) \cos(-2\pi n \xi x) dx \\
&= a_n \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\
b_{-n} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(x) \operatorname{sen}(-2\pi n \xi x) dx \\
&= -\frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(x) \operatorname{sen}(2\pi n \xi x) dx \\
&= -b_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-i(2\pi n \xi x)} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n e^{i(2\pi n \xi x)}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} i b_n e^{-i(2\pi n \xi x)} &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} i b_n e^{i(2\pi n \xi x)}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Substituindo (2.19) em (2.17), temos:

$$\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - i b_n) e^{i(2\pi n \xi x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i(2\pi n \xi x)}. \tag{2.20}$$

A equação (2.20) é a Série de Fourier expressa na forma complexa, com coeficientes também complexos dados pela expressão:

$$\alpha_n = \frac{a_n - i b_n}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \tag{2.21}$$

Combinando as expressões em (2.18) com os coeficientes dados na definição (2.3.1), temos que

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(x) e^{-i2\pi n \xi x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \tag{2.22}$$

Note que, a menos do índice n e do fator $\frac{1}{T_0}$, a integral acima é semelhante com a inte-

gral que define a Transformada de Fourier na definição (2.1.4). Analogamente, podemos dizer que o membro direito da equação em (2.20) é semelhante a expressão que define a Transformada Inversa de Fourier na definição (2.1.5), exceto pelo fato da expressão ser discreta.

Surge, então, algumas perguntas naturais, por exemplo, como definiríamos a Série de Fourier se $T_0 \rightarrow \infty$? Sabemos que se isso ocorrer, as condições para que haja a Série de Fourier para funções desse tipo não serão satisfeitas, pois se $T_0 \rightarrow \infty$, então essa função não será periódica.

No entanto, para essas funções, é possível obter um desenvolvimento em forma integral, chamada Integral de Fourier.

Definição 2.3.2 (Integral de Fourier). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nas condições (2.2.1). Definimos a Integral de Fourier da função $f(x)$, como:

$$\int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \text{sen}(\omega x)] d\omega, \quad (2.23)$$

onde ω é a frequência e os coeficientes são dados pelas expressões

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, & \omega \geq 0, \\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen}(\omega t) dt, & \omega \geq 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

De modo análogo à Série de Fourier, vamos escrever a Integral de Fourier na forma complexa. Das mesmas expressões em (2.16), e combinando as expressões na definição (2.3.2), segue que:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \text{sen}(\omega x)] d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(\omega t) \cos(\omega x) + \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\omega x)) dt d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega[x - t]) dt d\omega \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) [e^{i\omega(x-t)} + e^{-i\omega(x-t)}] dt d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\omega(x-t)} dt d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega(x-t)} dt d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\omega(x-t)} dt d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\omega(x-t)} dt d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\omega(x-t)} dt d\omega .
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Como último passo, podemos fazer:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega x} d\omega . \tag{2.27}$$

Se trocarmos a variável $\omega = 2\pi\xi$, então reescrevemos a expressão anterior como:

$$\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i2\pi\xi t} dt \right] e^{i2\pi\xi x} d\xi . \tag{2.28}$$

Dizemos então que a expressão (2.28) é a **forma complexa** da Integral de Fourier definida em (2.3.2).

Note que, em (2.28), a expressão dentro dos colchetes é exatamente a Transformada de Fourier da função $f(x)$ e a expressão que a complementa, fora dos colchetes, é a Transformada Inversa de $F(\xi)$, tal como nas definições (2.1.4) e (2.1.5). Assim, da expressão (2.28), temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\xi) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i2\pi\xi t} dt \\ f(x) = \int_{-\infty}^\infty F(\xi)e^{i2\pi\xi x} d\xi \end{array} \right. \tag{2.29}$$

Portanto, em um contexto geral, vemos que o conceito de Transformada de Fourier,

bem como sua inversa, podem ser generalizados partindo do conceito de Séries de Fourier, um caso bem específico, que só funciona para funções periódicas em uma situação discreta.

Note também, que evitamos falar que a Série de Fourier representa a $f(x)$ periódica, de período T_0 . Isso porque a representação, nesse sentido, significa a convergência da Série de Fourier para a função $f(x)$, assunto que geralmente envolve estudos das condições de Dirichlet para convergência dessa série, bem como o 1° e o 2° teorema sobre convergência uniforme da Série de Fourier.

Além disso, ainda há o Teorema de Fourier, que especifica em quais condições e para onde converge a Integral de Fourier ao representar uma classe mais geral de funções não periódicas.

2.4 Outras formas de representar a Transformada de Fourier

Existem outras formas de se representar as transformadas definidas em (2.1.4) e (2.1.5). Basicamente, todas elas são consequências do tipo de frequência que analisamos no último membro da igualdade em (2.25); isto é, para "separarmos" as integrais no último membro de (2.25) podemos usar tanto a frequência angular, representada pela letra ω , quanto a frequência fundamental ξ .

A relação entre as duas é dado pela expressão $\omega = 2\pi\xi$, como apresentada na definição (2.3.2). Apresentaremos dois modos bastante usados para separar as integrais em (2.25).

$$\mathbf{1^\circ \text{ Modo:}} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega x} d\omega, \quad (2.30)$$

onde definimos

$$\begin{cases} F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega. \end{cases} \quad (2.31)$$

Esse modo é o mais utilizado nas literaturas de Análise Matemática e Análise de Fou-

rier. Há também literaturas que definem a transformada do seguinte modo:

$$\mathbf{2^\circ \text{ Modo:}} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega x} d\omega, \quad (2.32)$$

onde definimos

$$\begin{cases} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \\ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega. \end{cases} \quad (2.33)$$

Seja como for, tanto as expressões no 1° modo quanto no 2° modo são equivalentes às definições (2.1.4) e (2.1.5), bastando apenas que se substitua o uso da frequência angular ω pela frequência fundamental ξ , respeitando a relação existente entre elas.

Por questão de conveniência, manteremos como padrão as expressões usadas nas definições (2.1.4) e (2.1.5), respectivamente, para a Transformada de Fourier e a Transformada Inversa de Fourier.

3 Propriedades da Transformada de Fourier

Definido a Transformada de Fourier, iremos discutir algumas de suas propriedades, tais como a continuidade e a linearidade, as derivadas de transformações, transformações de derivadas e o teorema da convolução, muito útil no estudo da Transformada Discreta de Fourier.

No entanto, para prosseguirmos o estudo sobre as propriedades das transformadas, de forma que os resultados obtidos sejam matematicamente tautológicos, necessitaremos de uma restrição na classe de funções apresentadas.

Se, na definição (2.1.4), bastava que f fosse absolutamente integrável, agora precisaremos que ela pertença ao Espaço de Schwartz, um subespaço das funções infinitamente diferenciáveis, i.e., de classe C^∞ . Nas duas seções seguintes, apresentamos um estudo algébrico e analítico mais rigoroso sobre a composição desse espaço, como sendo um espaço vetorial de funções que, além de obedecerem a condição (2.2.1), são de **decréscimento rápido**.

3.1 Funções da Integral de Fourier

Visto as definições (2.1.4) e (2.1.5), é natural nos perguntarmos para quais tipos de funções a Transformada de Fourier apresenta melhores "condições" de trabalho.

Como discutido anteriormente, vimos que a condição (2.2.1) é suficiente, mas não necessária para que ocorra a Transformada de Fourier, i.e., a exigência de que a função seja absolutamente integrável não é essencialmente necessária. No entanto, buscar restrições para as funções que definem a transformada, nos permite entender mais claramente a natureza da própria Transformada de Fourier.

Nesse sentido, admita o exemplo (2.1.1), onde $f(x)$ representa a função degrau unitário. Embora $f(x)$ satisfaça a condição (2.2.1), vemos que a própria $F(\xi) = (2/2\pi\xi) \text{sen}(2\pi\xi)$ não a satisfaz. No entanto, é possível encontrar funções cujas transformadas pertencem ao mesmo conjunto, ou seja, f e F possuem as mesmas características.

Veremos também que, restringindo um pouco mais essas funções, encontraremos na transformação $\mathcal{F}[f]$ características de um Operador Linear, que trará propriedades importantes para o desenvolvimento da Transformada Discreta de Fourier.

Como primeiro passo dessa restrição, considere o conjunto de funções de classe \mathbf{C}^∞ definidas em \mathbb{R} e assumindo valores em \mathbb{C} , denotado por $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. É claro que toda função $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ é contínua, assim como todas as suas derivadas, e tão logo também são funções integráveis.

Fica claro que as funções de $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ possuem transformadas, mas estamos procurando uma classe ainda mais restrita de funções. Em particular, procuramos o conjunto de funções chamados de **decréscimento rápido**, funções que, assim como suas derivadas, decaem para zero mais rápido do que qualquer polinômio.

Definição 3.1.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, infinitamente diferenciável, tal que:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^n f^{(q)}(x) = 0,$$

para todo $n, q \in \mathbb{N}$, onde $f^{(q)}(x)$ denota a q -ésima derivada de $f(x)$.

Dizemos também que, toda função da definição (3.1.1), é chamada de **Função de Schwartz**.

Observe que a definição acima mostra f e suas derivadas tendem para 0, quando $|x| \rightarrow \infty$, mais rapidamente do que potências x^n , que tendem para o infinito.

Em outras palavras, nas condições da definição (3.1.1), dados $n, q \geq 0$, existe uma constante $M(n, q)$, tal que:

$$|x^n f^{(q)}(x)| \leq M(n, q), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Para ver que (3.1.1) implica em (3.1), note que o limite em (3.1.1) nos permite encontrar um $N > 0$ tal que $|x^n f^{(q)}(x)| \leq 1$, para todo $|x| > N$; mas a função $x^n f^{(q)}(x)$ é contínua e limitada no intervalo $[-N, N]$, ou seja, existe $M_1 > 0$ tal que $|x^n f^{(q)}(x)| \leq M_1$,

para todo $|x| \leq N$.

Portanto, se tomarmos $M(n, q) = \max(1, M_1)$, vemos claramente que (3.1.1) implica em (3.1).

Falta verificar se (3.1) implica em (3.1.1). Se tomarmos $n + 1$ e q para (3.1), então teremos $|x^{n+1}f^{(q)}(x)| \leq M(n+1, q)$, que nos levará a $|x^n f^{(q)}(x)| \leq |x|^{-1}M(n+1, q)$, como queríamos.

Essa equivalência entre as duas expressões, nos permite fazer a seguinte proposição:

Propriedade 3.1.1. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de Schwartz, então $x^n f$ e $f^{(q)}$ também são de Schwartz. Consequentemente, $x^n f^{(q)}$, $\forall n, q \in \mathbb{N}$, também é uma função de Schwartz.

É possível, ainda, reescrever o limite na definição (3.1.1) utilizando a notação geral de polinômios e de operadores diferenciais. Suponha um polinômio $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, e D^n o operador diferencial da função f , $n \in \mathbb{N}$, e f como na definição (3.1.1), então

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x)D^n f(x) = 0 . \tag{3.2}$$

A proposição (3.1.1), então, nos diz que os operadores diferenciais levam funções do conjunto de Schwartz em outras funções do mesmo conjunto. Isso nos estimula a pensar que, se o conjunto das funções de Schwartz formassem um espaço vetorial, então esses operadores seriam de fato operadores lineares nesse espaço e, talvez, o mesmo poderia ocorrer com as integrais, em especial, com a Transformada de Fourier.

Mas, outra questão que deve ser discutida antes disso, é o fato das funções de Schwartz satisfazerem a condição (2.2.1).

Propriedade 3.1.2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de Schwartz. Então $f(x)$ satisfaz a condição (2.2.1).

Demonstração. Assegurada a hipótese, pelo fato de f ser contínua em cada intervalo $[-M, N]$, tem-se que f é limitada e integrável e, portanto, $|f|$ também é integrável nesse mesmo intervalo.

Para provar a convergência da integral imprópria de f , vamos usar a expressão (3.1), com $n = 2$ e $q = 0$. Obtemos a seguinte majoração:

$$\int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx \leq M(2, 0) \int_{|x| \geq 1} |x|^{-2} dx = 2M(2, 0). \quad (3.3)$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq \int_{-1}^1 |f(x)| dx + 2M(2, 0) < \infty. \quad (3.4)$$

□

Vamos analisar outra propriedade muito importante das funções de Schwartz, que também facilita o estudo da Transformada de Fourier.

3.1.1 Funções de Suporte Compacto

Algumas funções de Schwartz ainda revelam a propriedade de Suporte Compacto.

Definição 3.1.2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos como Suporte Compacto de uma função o conjunto:

$$\text{supp} := \overline{\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}}, \text{ onde a barra indica o fecho do conjunto.}$$

Essa propriedade, na verdade, é referente ao domínio das funções analisadas. Por exemplo:

Exemplo 3.1.1. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \text{ ou } x \geq b, \\ e^{-\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2}}, & \text{se } a < x < b, \end{cases}$ onde $-\infty < a < b < \infty$.

O suporte compacto da função $f(x)$ acima é o intervalo $[a, b]$, exatamente o fecho do conjunto de pontos onde a função não assume valores nulos.

Fica claro, também, que o cálculo da Transformada de Fourier de funções com suporte compacto elimina os processos de limite impostos pelas integrais indefinidas e, uma vez seccionalmente contínua no intervalo $[a, b]$, onde está definida, basta que se integre a função com relação a esse intervalo.

Em particular, algumas funções de Schwartz são periódicas tais que, para um intervalo fechado contido no período, a função assume valores não nulos e, assintoticamente, os valores assumidos são nulos. Como exemplo, considere a função definida no exemplo (3.1.1) tomando $a = -b$; a função fica, então, com suporte compacto em $[-b, b]$.

Na prática, isso significa que a integral em (2.1.4) pode ser escrita na seguinte forma, para uma função f de Schwartz com período $2a$, como dito anteriormente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{-a} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx + \int_{-a}^a e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx + \int_a^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx. \quad (3.5)$$

É claro que a primeira e a terceira parcelas do lado direito da igualdade (3.5) escondem um processo de limite, afinal, são integrais impróprias. No entanto, vemos que ela possui suporte compacto apenas no intervalo $[-a, a]$. Assim, podemos escrever (3.5) como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx = \int_{|x|>a} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx + \int_{-a}^a e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx. \quad (3.6)$$

A expressão $\int_{|x|>a} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx$ pode ser definida quando observado o comportamento assintótico de f que, nesse caso, possui valores nulos quando aplicamos o limite da integral imprópria. Portanto, facilitando ainda mais a obtenção da transformada através da expressão:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx = \int_{-a}^a e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx. \quad (3.7)$$

Podemos concluir, portanto, que o conjunto das Funções de Schwartz é ideal para se estudar Transformada de Fourier, especialmente para aquelas que são periódicas ou só possuem suporte compacto.

3.2 Espaço de Schwartz

Na seção anterior, definimos as funções de Schwartz em um subconjunto de $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Agora veremos que, na verdade, esse subconjunto é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} .

O que faremos agora é definir o conjunto das Funções de Schwartz, e mostrar que ele está contido propriamente em $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

Propriedade 3.2.1. Se $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ é o conjunto das Funções de Schwartz, então $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

Demonstração. A definição (3.1.1) mostra que: $\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Portanto, fica demonstrado que $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subset \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

Falta provar que $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, ou seja, que $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ está contido propriamente em $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Para isso, considere a função $f(x) = i \operatorname{sen}(x)$.

Está claro que $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, verificamos então que o limite na definição (3.1.1) é equivalente a:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x) f^{(q)}(x) \equiv \lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|)^m |i \operatorname{sen}^{(q)}(x)| = \infty, \quad (3.8)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $q \in \mathbb{N}$.

Portanto, existe $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ tal que $f \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$, logo $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e, assim, demonstramos que $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. □

Não é difícil ver que o conjunto dos elementos em $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, munidos com a soma e a multiplicação usuais, formam um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{C} . Demonstraremos o seguinte:

Propriedade 3.2.2. $(\mathcal{L}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um subespaço vetorial próprio de $(\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}), +, \cdot)$, sobre o corpo \mathbb{C} .

Demonstração. Embora todo subespaço vetorial seja um espaço vetorial, iremos utilizar o teorema equivalente para demonstrar o subespaço:

1. **Elemento Neutro:** Seja $\mathcal{O}(x)$ a função identicamente nula. Note que:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|)^m |\mathcal{O}^{(q)}(x)| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|)^m 0 = 0.$$

Logo, $\mathcal{O}(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $q \in \mathbb{N}$.

2. **Combinação Linear:** Seja $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Queremos provar que $(\alpha f^{(q)} + \beta g^{(q)}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, ou seja:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|)^m |\alpha f^{(q)} + \beta g^{(q)}| = 0, \quad (3.9)$$

para cada $m, q \in \mathbb{N}$.

Mas, pela desigualdade triangular e da hipótese, o limite em (3.9) pode ser majorado por:

$$\begin{aligned} & \lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|)^m (|\alpha| |f^{(q)}| + |\beta| |g^{(q)}|) \leq \\ & \left(\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\alpha| (1 + |x|)^m |f^{(q)}| \right) + \left(\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\beta| (1 + |x|)^m |g^{(q)}| \right) = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, (3.9) é majorada por um limite convergente em 0. Portanto, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha f^{(q)} + \beta g^{(q)}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, para cada $m, q \in \mathbb{N}$.

Logo, dos itens (1) e (2), fica provado que $(\mathcal{L}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um subespaço vetorial próprio sobre o corpo \mathbb{C} .

□

Corolário 3.2.1. $(\mathcal{L}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{C} , denominado Espaço de Schwartz.

Demonstração. É imediato, uma vez que todo subespaço vetorial é um espaço vetorial. □

Corolário 3.2.2. O Espaço \mathcal{L} de Schwartz, é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} .

Demonstração. Também é imediato, afinal $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. □

Portanto, note que a Integral de Fourier está definida sobre um espaço vetorial. Isso enriquece muito o estudo e o tratamento da Transformada de Fourier que, entre outras propriedades que serão estudadas a seguir, é uma transformação linear.

Para todas as propriedades discutidas a seguir, considere $\mathcal{F}[f](\xi) = F(\xi)$, onde $f \in \mathcal{L}$.

3.3 Transformada como Transformação Linear

Usamos amplamente essa propriedade nos dois primeiros exemplos do cálculo de Transformadas de Fourier. A linearidade das transformadas está intimamente ligada à linearidade da integral, que é uma transformação linear.

Teorema 3.3.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}$. A Transformada de Fourier $F(\xi)$ é uma transformação linear, tal que,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{L} &\rightarrow \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \text{ satisfaz} \\ \mathcal{F}[\alpha f + \beta g] &= \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g], \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall f, g \in \mathcal{L} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Demonstração. Considere, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com $f, g \in \mathcal{L}$, queremos provar:

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g]. \quad (3.11)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\alpha f + \beta g] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx \\ &= \left[\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx \right] + \left[\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} g(x) dx \right] \\ &= \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Portanto, \mathcal{F} é uma transformação linear. □

3.4 Transformada de Fourier da derivada

Na linguagem popular, dizemos que a Transformada de Fourier "destrói" derivadas. Observe o teorema a seguir:

Teorema 3.4.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de \mathcal{L} , então

$$\mathcal{F}[D^n f] = (i2\pi\xi)^n \mathcal{F}[f], \quad (\forall n)(n \in \mathbb{N}). \quad (3.13)$$

Demonstração. A prova segue facilmente por indução em n . Para $n = 1$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} f^{(1)}(x) dx = e^{-i2\pi\xi x} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i2\pi\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx = (i2\pi\xi) \mathcal{F}[f](\xi). \quad (3.14)$$

A penúltima igualdade segue de integração por partes. Repare que a expressão $e^{-i2\pi\xi x} f(x)|_{-\infty}^{\infty}$ é nula, uma vez que $f \in \mathcal{L}$ por hipótese.

Suponha que (3.13) vale para $n - 1$, mostraremos que vale para n :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[D^n f](\xi) &= \mathcal{F}[D(D^{n-1}f)](\xi) = (i2\pi\xi)\mathcal{F}[D^{n-1}f](\xi) \\ &= (i2\pi\xi)(i2\pi\xi)^{n-1}\mathcal{F}[f](\xi) \\ &= (i2\pi\xi)^n\mathcal{F}[f](\xi).\end{aligned}\tag{3.15}$$

□

3.5 Derivada da Transformada de Fourier

Teorema 3.5.1. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função de \mathcal{L} , então $\mathcal{F}[f]$ será infinitamente diferenciável, e:

$$D_\xi^n \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[(-i2\pi x)^n f(x)].\tag{3.16}$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema (3.4.1), aqui a demonstração também segue por indução em n . Faremos para $n = 1$:

$$\begin{aligned}D_\xi^1 \mathcal{F}[f](\xi) &= D_\xi^1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} D_\xi^1 [e^{-i2\pi\xi x} f(x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-i2\pi x) e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx \\ &= \mathcal{F}[(-i2\pi x) f(x)](\xi).\end{aligned}\tag{3.17}$$

Supondo que (3.16) vale para $n - 1$, mostraremos que vale para n :

$$\begin{aligned}
D_\xi^n \mathcal{F}[f](\xi) &= D_\xi^1 (D_\xi^{n-1} \mathcal{F}[f]) \\
&= D_\xi^1 (\mathcal{F}[(-i2\pi x)^{n-1} f(x)](\xi)) = \mathcal{F}[(-i2\pi x)(-i2\pi x)^{n-1} f(x)](\xi) \quad (3.18) \\
&= \mathcal{F}[(-i2\pi x)^n f(x)](\xi).
\end{aligned}$$

□

3.6 Transformada como Operador Linear

Até agora vimos que a Transformada de Fourier é uma transformação linear. Veremos a seguir que, na verdade, a transformada é operador linear no Espaço de Schwartz.

Para demonstrar esse teorema, usaremos duas proposições acerca do decrescimento rápido das funções de Schwartz, discutidas com detalhe na seção 3.1.

Teorema 3.6.1. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de \mathcal{L} , então $\mathcal{F}[f](\xi)$ também será uma função de \mathcal{L} .

Demonstração. Usando o Teorema (3.4.1) e o Teorema (3.5.1), temos

$$\xi^m D_\xi^n \mathcal{F}[f] = \xi^m \mathcal{F}[(-i2\pi x)^n f] = \mathcal{F}[(-i2\pi D_x)^m \{(-i2\pi x)^n f\}]. \quad (3.19)$$

Mas, pelas proposições (3.1.1) e (3.1.2), a expressão $(-i2\pi D_x)^m \{(-i2\pi x)^n f\}$ está em \mathcal{L} e o primeiro membro da expressão (3.19) é limitado pois, pelo Lema de Riemann-Lebesgue (Apêndice A),

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \xi^m D_\xi^n \mathcal{F}[f](\xi) = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathcal{F}[(-i2\pi D_x)^m \{(-i2\pi x)^n f(x)\}](\xi) = 0. \quad (3.20)$$

Portanto, $\mathcal{F}[f](\xi) \in \mathcal{L}$, como queríamos demonstrar.

□

3.7 Limite e Continuidade

O teorema a seguir nos ajuda a compreender um pouco mais a natureza do decrescimento rápido que acompanha as transformadas de funções que pertencem ao Espaço de

Schwartz.

Para demonstrá-la, também usaremos o Lema de Riemann-Lebesgue, enunciado e demonstrado no Apêndice A.

Teorema 3.7.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}$. A transformada $F(\xi)$ é contínua e se anula no infinito:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} F(\xi) = 0.$$

Demonstração. Sobre a continuidade de F , o teorema (3.6.1) mostra que $F(\xi) \in \mathcal{L}$, desde que $f \in \mathcal{L}$. Então, pela hipótese, $F(\xi)$ é de classe \mathbf{C}^∞ , logo, contínua.

Tomaremos um intervalo $[-a, a]$ e reescreveremos $F(\xi)$ como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx = \int_{-a}^a e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx + \int_{|x|>a} f(x) dx. \quad (3.21)$$

Para demonstrar que $F(\xi)$ se anula no infinito, considere o intervalo dado anteriormente e um $\varepsilon > 0$, tal que:

$$\int_{|x|>a} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.22)$$

No entanto, o corolário (A.0.1), do Lema de Riemann-Lebesgue, assegura que:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx = 0. \quad (3.23)$$

Portanto, para algum $|\xi| > \xi_0$, pelo mesmo lema e de (3.22), temos

$$|F(\xi)| \leq \left| \int_{-a}^a e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx \right| + \int_{|x|>a} |f(x)| dx < \varepsilon. \quad (3.24)$$

Ao aplicarmos o limite na desigualdade anterior, obtemos:

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \exists \xi_0 \text{ tal que } \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} F(\xi) = 0. \quad (3.25)$$

□

3.8 Transformada da Translação

Teorema 3.8.1. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de \mathcal{L} , então:

$$\mathcal{F}[f(x - a)](\xi) = e^{-i2\pi\xi a} \mathcal{F}[f](\xi). \quad (3.26)$$

E, analogamente:

$$\mathcal{F}[e^{i2\pi x a} f(x)](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi - a). \quad (3.27)$$

Dizemos que (3.26) é uma translação com respeito ao tempo, e (3.27) é uma translação com relação à frequência.

Demonstração. Primeiramente, demonstraremos (3.26). Para demonstrar essa propriedade, usaremos usaremos uma mudança de variável em f e $e^{-i2\pi\xi x}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x - a)](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} f(x - a) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi(x+a)} f(x) dx \\ &= e^{-i2\pi\xi a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx \\ &= e^{-i2\pi\xi a} \mathcal{F}[f](\xi). \end{aligned} \quad (3.28)$$

De modo análogo, se usarmos a relação de transformada inversa, demonstraremos (3.27):

$$\overline{\mathcal{F}}[F(\xi - a)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\xi x} F(\xi - a) d\xi = e^{i2\pi x a} f(x). \quad (3.29)$$

□

3.9 Produto e Transformada de Convolução

Antes de tratarmos diretamente do Teorema da Convolução, descreveremos sobre alguns aspectos importantes do Produto de Convolução, sobretudo devido a sua importância

no desenvolvimento da versão discreta da Transformada de Fourier.

Definição 3.9.1 (Produto de Convolução). Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos o produto de convolução da função $f(x)$ pela $g(y)$ como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy. \quad (3.30)$$

Em particular, se $f, g \in \mathcal{L}$, então a integral da definição (3.9.1) converge uniformemente, pois:

$$|(f * g)(x)| \leq M \left| \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|dy \right| < \infty, \quad (3.31)$$

onde $M = \sup |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$.

A seguir, analisaremos alguns exemplos de Produto de Convolução para que depois possamos explorar sua utilidade na aplicação de Transformadas de Fourier.

Exemplo 3.9.1. Considere as seguintes funções:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}. \quad (3.32)$$

Agora, precisamos calcular a integral da definição (3.9.1) para as funções $f(x)$ e $g(x)$ em (3.32). Observe que a integral é calculada para a expressão:

$$f(x - y)g(y). \quad (3.33)$$

O que nos leva à função:

$$f(x - y)g(y) = \begin{cases} 1, & |x - y| \leq 1 \\ 0, & |x - y| > 1 \end{cases}. \quad (3.34)$$

Desde que a variável de integração seja y , o parâmetro x é uma constante. Note também, que a função degrau $f(x - y)$ possui um centro em x , assim como $g(y)$ possui um centro em 0.

Mas, se variarmos a constante x em relação ao domínio da função f , teremos uma sequência de funções $f_n(x_n - y)$ cuja área abaixo do seu gráfico será sobreposta à área abaixo do gráfico de $g(y)$ somente para alguns índices n , tais que $-2 \leq x_n \leq 2$.

Em outras palavras, ao variar o centro x da função $f(x - y)$, criaremos a impressão de "deslocamento" da função degrau ao longo da abscissa, de modo que as áreas de $g(y)$ e $f(x - y)$ serão sobrepostas no instante em que x estiver contido no intervalo fechado $[-2, 2]$, um subconjunto do domínio.

Observe a figura (3.1). Comparamos a sobreposição das funções $g(y)$ e $f(x - y)$, para quatro valores distintos de x .

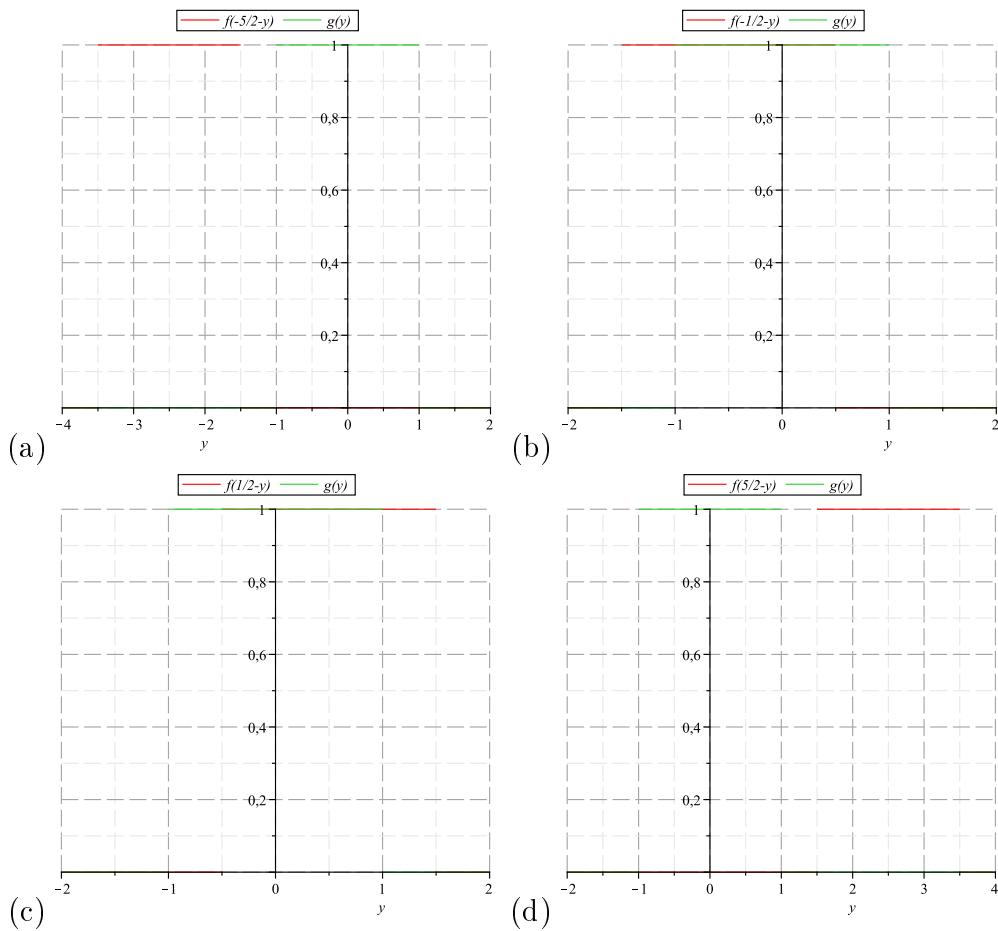


Figura 3.1: Gráficos de $g(y)$ centrado em $y = 0$ (Eq. 3.32), e $f(x - y)$ centrado em: **(a)** $x = -\frac{5}{2}$; **(b)** $x = -\frac{1}{2}$; **(c)** $x = \frac{1}{2}$; **(d)** $x = \frac{5}{2}$;

O que foi discutido acima, fornece subsídios para a noção intuitiva do significado da integral da função em (3.34). Nesse sentido, a convolução, i.e., a função integral, é uma função que mede a variação da área abaixo do gráfico da equação (3.34), com relação ao

parâmetro x . Ao calcularmos a convolução, temos:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy = \begin{cases} 2 - |x|, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases} . \quad (3.35)$$

O gráfico da convolução (3.35) está ilustrado na figura (3.2).

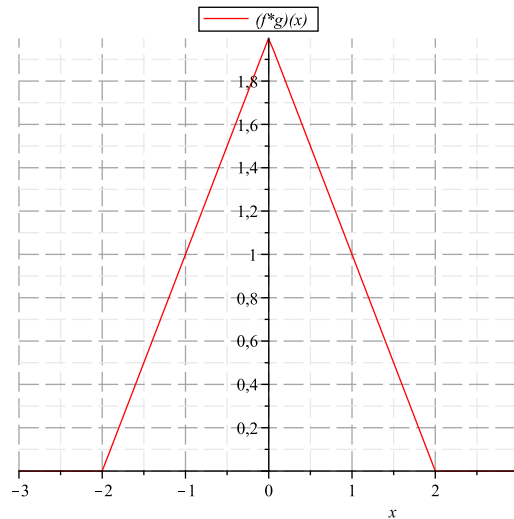


Figura 3.2: Função Triangular (Eq. 3.35)

Na figura anterior, percebemos que convolução (3.35) possui amplitude $A = 2$, definida para valores no intervalo fechado $[-2, 2]$.

Exemplo 3.9.2. Considere as funções:

$$f(x) = \cos(x) \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} . \quad (3.36)$$

Como no exemplo anterior, precisamos calcular a função que será integrada ao aplicarmos a definição (3.9.1):

$$f(x - y)g(y) = \begin{cases} \cos(x - y), & |y| \leq 1 \\ 0, & |y| > 1 \end{cases} . \quad (3.37)$$

Analogamente à observação anterior, o termo x na função integrando é constante em relação à variável de integração y .

Aplicando a integral da definição (3.9.1) para a função em (3.37), obtemos a convolução:

$$(f * g)(x) = \text{sen}(x + 1) - \text{sen}(x - 1). \quad (3.38)$$

Os gráficos das funções $(f * g)(x)$, $f(x)$ e $g(x)$ estão dados na figura (3.3).

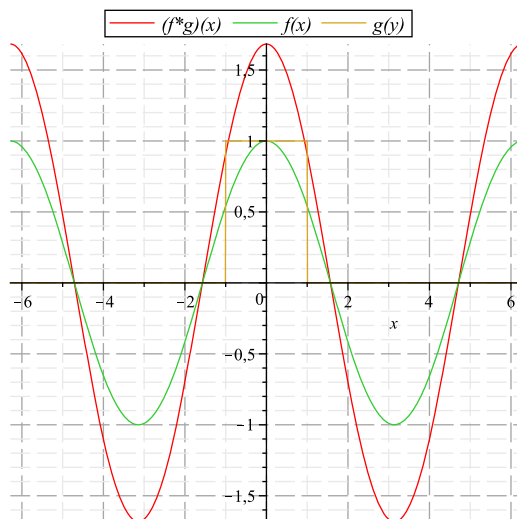


Figura 3.3: Produto de convolução $(f * g)(x)$, $f(x)$ e $g(x)$

A proposição a seguir merecerá uma observação mais cuidadosa antes de sua demonstração.

Propriedade 3.9.1. Se $f, g \in \mathcal{L}$, então $f * g \in \mathcal{L}$.

Precisaremos observar duas ocorrências. A primeira diz respeito à diferenciabilidade de funções do tipo:

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad (3.39)$$

considerando $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $I \subset \mathbb{R}$, com derivada parcial $f_x : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ também contínua.

Se supusermos que a integral abaixo seja convergente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x, y) dy, \quad (3.40)$$

então, podemos afirmar que a função integral $G(x)$ em (3.39) é derivável, e possui como derivada a expressão em (3.40).

Em particular, temos

$$D^n(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x - y)g(y)dy, \quad (3.41)$$

uma vez que a integral acima converge uniformemente em $-\infty < x < \infty$, pois

$$|f^n(x - y)g(y)| \leq M_1|g(y)|, \quad (3.42)$$

considerando $M_1 = \sup |f^{(n)}(x)|$.

A segunda ocorrência, é conhecida como Fórmula de Leibniz:

Lema 3.1 (Fórmula de Leibniz). *Seja $f, g \in \mathcal{L}$. Para $m \geq 0$, então*

$$x^m(f * g) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (x^k f) * (x^{m-k} g). \quad (3.43)$$

E isso ocorre, pois

$$\begin{aligned} x^m(f * g) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x - y)g(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (x - y)^k f(x - y)y^{m-k}g(y)dy. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Discutido essas duas ocorrências, podemos demonstrar a proposição (3.9.1).

Demonstração. (Demonstração da Proposição (3.9.1)) Devemos provar que $x^m D^n(f * g)$

$g)(x) \in \mathcal{L}$. Mas se usarmos a Fórmula de Leibniz e a expressão (3.41), teremos

$$x^m D^n(f * g)(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (x^k D^n f) * (x^{m-k} g) \quad (3.45)$$

No entanto, a proposição (3.1.1) nos garante que tanto $(x^k D^n f)$, quanto $(x^{m-k} g)$, estão em \mathcal{L} . Portanto, $x^m D^n(f * g)(x) \in \mathcal{L}$, demonstrando a proposição. \square

De modo geral, a proposição (3.9.1) em conjunto com os demais teoremas visto neste capítulo, garante que a Transformada de Fourier de uma convolução é uma função de Schwartz, se a própria convolução for uma função pertencente ao espaço de Schwartz. Ou seja, a transformada continua sendo um operador linear, mesmo quando observamos o teorema a seguir:

Teorema 3.9.1 (Teorema da Convolução). Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funções de \mathcal{L} , então:

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi). \quad (3.46)$$

Demonstração. Mudando a ordem de integração e usando o teorema (3.8.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(s)ds \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x} f(x-s)dx \right] g(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i2\pi\xi s} \mathcal{F}[f](\xi)) g(s)ds \\ &= \mathcal{F}[f](\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi s} g(s)ds \\ &= \mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi). \end{aligned} \quad (3.47)$$

\square

Além do seu importante aspecto teórico, o Teorema da Convolução nos traz uma enorme praticidade no cálculo de transformadas de funções que são obtidas por uma convolução, uma vez que transformam uma integral aparentemente complicada na multiplicação simples das transformadas desses sinais contínuos que compõem a convolução.

Exemplo 3.9.3. Considere as funções $f(x)$ e $g(x)$ do exemplo (3.9.1).

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}. \quad (3.48)$$

Ainda do exemplo (3.9.1), sabemos que a convolução $(f * g)(x)$ é dada pela expressão:

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \begin{cases} 2 - |x|, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}. \quad (3.49)$$

Note que o lado direito da expressão (3.49) é semelhante (a menos da amplitude e intervalo de definição) à função do exemplo (2.1.2), cuja Transformada de Fourier é dada pela expressão:

$$-\frac{\cos(\pi\xi) - 1}{(\pi\xi)^2}. \quad (3.50)$$

Esperamos, portanto, que a Transformada de Fourier de $h(x)$ seja semelhante também à expressão (3.50).

Por outro lado, o teorema (3.9.1) nos assegura que podemos poupar o trabalho de calcular a convolução $h(x)$, para depois calcularmos sua Transformada de Fourier, bastando que calculemos as transformadas de $f(x)$ e $g(x)$.

Conhecemos as transformadas de $f(x)$ e $g(x)$ pelo exemplo (2.1.1). Seja, então, $F(\xi)$ e $G(\xi)$ tais que:

$$F(\xi) = \frac{\text{sen}(2\pi\xi)}{\pi\xi}, \quad G(\xi) = \frac{\text{sen}(2\pi\xi)}{\pi\xi}. \quad (3.51)$$

Pelo teorema, temos

$$\mathcal{F}[h](\xi) = F(\xi)G(\xi) = \frac{\text{sen}^2(2\pi\xi)}{(\pi\xi)^2}. \quad (3.52)$$

Considere a seguinte identidade trigonométrica: $\text{sen}^2(2\pi\xi) = -\frac{\cos(4\pi\xi)-1}{2}$. Se a usarmos na equação (3.52), obtemos:

$$H(\xi) = -\frac{\cos(4\pi\xi) - 1}{2(\pi\xi)^2}. \quad (3.53)$$

Observe que, como esperado, o Teorema da Convolução garante à transformada (3.53) a proporcionalidade com relação à amplitude e à frequência da função triangular (3.49). Essa proporcionalidade também pode ser observado comparando os gráficos das figuras (2.1.2 (b)) e (3.4).

A figura (3.4) exibe o gráfico da transformada $H(\xi)$, dada pela expressão (3.53).

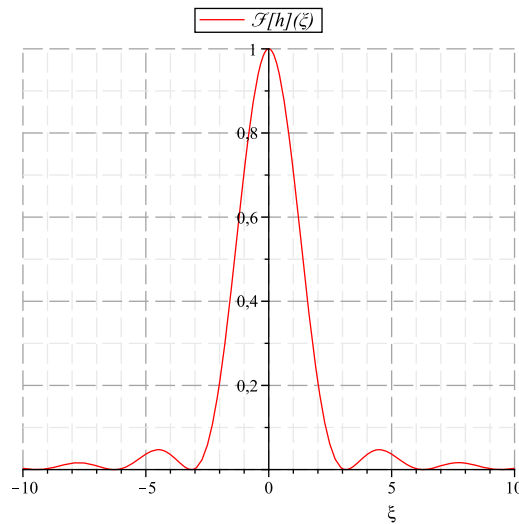


Figura 3.4: Transformada de Fourier (Eq. 3.53)

Brigham (1974, p. 60) sistematiza o uso do Teorema da Convolução, discutida no exemplo (3.9.3), através da ilustração na figura (3.5). Para isso, ele considera as funções degrau $h(t)$ e $x(t)$, com parâmetros no tempo t , de amplitude A , definidas no período T_0 e com frequência f .

Nos próximos capítulos, estudaremos a Transformada Discreta de Fourier e os algoritmos que compõem o objeto central de estudo desse trabalho, as transformadas rápidas de Fourier.

Esse estudo torna-se mais fácil à medida que conhecemos a definição analítica e as propriedades da Transformada de Fourier, vistas nesse capítulo.

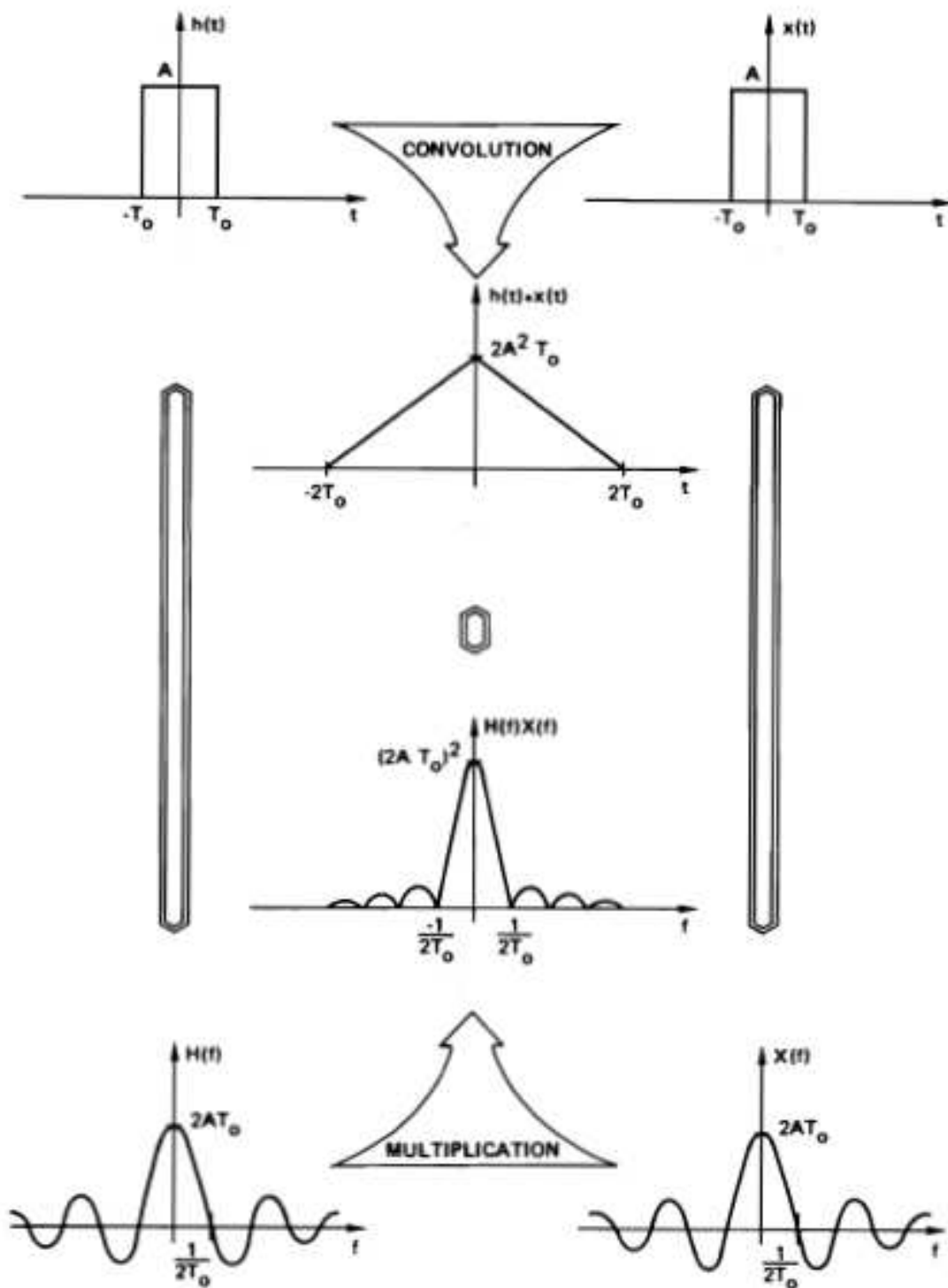


Figura 3.5: Sistematização do uso do Teorema da Convolução. (BRIGHAM, 1974, p. 60).

4 Transformada de Fourier Discreta

4.1 Teorema da Amostragem

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Na maioria das situações, a função f será amostrada em um eventual intervalo em seu domínio. Seja $T \in \mathbb{R}$ a diferença entre amostras consecutivas. Então, calculamos pontualmente a amostra fazendo:

$$f_k = f(kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.1)$$

onde T também é chamado de *taxa de amostragem*; se a taxa de amostragem é medida em segundos, por exemplo, então Tk será o número de amostras tiradas a cada segundo.

Para calcularmos uma aproximação discreta da função f como um todo, através de (4.1), é necessário usarmos a noção de impulsos equidistantes. Em particular, para o mesmo intervalo T em (4.1), podemos escrever a função $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\Delta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.2)$$

onde $\delta(x)$ é a função Delta de Dirac.

Uma aproximação discreta para f , contendo suas amostras, pode ser escrita como:

$$f(x)\Delta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(x - kT), \quad (4.3)$$

Para toda taxa de amostragem T , há uma frequência especial f_c chamada *frequência crítica de Nyquist*, onde:

$$f_c = \frac{1}{2T}. \quad (4.4)$$

Para não confundir com a nossa notação, embora não seja usual, faremos: $\xi_c = f_c$.

A frequência crítica de Nyquist é importante por duas razões distintas, porém, relacionadas. A primeira delas, é o conhecido *teorema da amostragem*:

Teorema 4.1.1 (Teorema da Amostragem). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Se $f(x)$ for amostrada a uma taxa T e sua frequência tiver magnitude inferior a $\xi_c = \frac{1}{2T}$, i.e., para todo $|\xi| \geq \xi_c$, $F(\xi) = 0$, então $f(x)$ é unicamente determinada pela expressão:

$$f(x) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\text{sen}[2\pi\xi_c(x - kT)]}{\pi(x - kT)}.$$

Demonstração. Em outras palavras, o teorema nos diz que, dado um sinal contínuo cuja frequência seja limitada no intervalo $(-\xi_c, \xi_c)$, é possível representá-lo com **erro nulo** através das amostras discretas f_k .

Com base nisso, e sabendo que as Transformadas de Fourier de um sinal são determinadas de modo biunívoco, basta compararmos a transformada inversa de uma função $F(\xi)$ qualquer, com a transformada inversa da mesma $F(\xi)$, mas, amostrada. Se a igualdade se revelar verdadeira, provamos o teorema.

Para isso, seja $F(\xi)$ a transformada de Fourier de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, contínua em seu domínio, com $\xi \in (-\xi_c, \xi_c)$, satisfazendo as condições do teorema.

Por outro lado, do Teorema da Convolução em (3.9.1), temos que a transformada da função de $f(x)$, amostrada a uma taxa T de seu domínio, é dada pela equação:

$$\mathcal{F}[f(x)\Delta(x)] = F(\xi) * \mathcal{F}[\Delta](\xi). \quad (4.5)$$

Note que: $\overline{\mathcal{F}[\mathcal{F}[\Delta]]} = \Delta(x)$, onde $\Delta(x)$ é definida pela expressão em (4.2).

Considere, também, a função degrau $Q(\xi)$ de amplitude T , de modo que a igualdade abaixo seja verdadeira:

$$F(\xi) = (F(\xi) * \mathcal{F}[\Delta](\xi)) Q(\xi). \quad (4.6)$$

Ainda do Teorema da Convolução (3.9.1) e da expressão acima, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{F}}[F](x) &= \overline{\mathcal{F}}[(F(\xi) * \mathcal{F}[\Delta](\xi))Q(\xi)](x) \\
\Rightarrow f(x) &= [f(x)\Delta(x)] * q(x) \\
\Rightarrow f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [f(kT)\delta(x - kT)] * q(x) \\
\Rightarrow f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)q(x - kT) \\
\Rightarrow f(x) &= T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\text{sen}[2\pi\xi_c(x - kT)]}{\pi(x - kT)}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

□

Note que, em termos de frequência, dizemos que o teorema (4.1.1) só vale para funções contínuas cuja frequência satisfaça $-\xi_c < \xi < \xi_c$, em particular, chamamos essas funções contínuas de *frequência limitada*.

O segundo fato é a discussão que envolve as funções contínuas que não são de frequência limitadas. Se, eventualmente, não considerarmos a condição da limitação de frequência da função e aplicarmos o teorema (4.1.1), teremos que toda magnitude da frequência de $f(x)$ fora do intervalo $(-\xi_c, \xi_c)$, que é não nula, será falsamente "traduzida" para a amostragem, distorcendo seu verdadeiro valor. Esse fenômeno é chamado de *aliasing*.

Podemos nos convencer disso se observarmos, por exemplo, as funções $e^{i2\pi\xi_1 t}$ e $e^{i2\pi\xi_2 t}$ que terão exatamente a mesma amostra em um intervalo T se, e somente se, ξ_1 e ξ_2 diferirem por um múltiplo de $1/T$, que é exatamente a largura da frequência no intervalo $(-\xi_c, \xi_c)$. Do contrário, teremos frequências sobrepostas, i.e., com valores diferentes para o mesmo intervalo T .

No entanto, podemos contornar o efeito de aliasing se soubermos o limite natural da frequência da função que queremos amostrar, ou ainda, impormos um limite para essa frequência através de filtros de sinais. Um desses filtros é a conhecida função degrau unitário (2.5), cuja escolha do domínio para quais os valores de sua imagem sejam um, definem a limitação na frequência observada.

Existe, na verdade, um conjunto de técnicas para a limitação de frequências de sinais dados por funções que chamamos de *janelamento de sinais*, parte integrante de uma teoria mais geral denominada *Análise de Sinais*.

Retomaremos brevemente esse assunto no final do próximo capítulo (seção 5.4), depois de definirmos a Transformada Rápida de Fourier, devido à necessidade trabalharmos com janelas de amostras e possíveis erros de cálculo numérico.

4.2 Desenvolvimento Teórico

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, contínua, e a sua Transformada de Fourier F . Para discretizá-las, primeiro é necessário preparar uma amostra de f ; a amostra pode ser escrita como $f(x)\Delta_0(x)$, onde Δ_0 é uma função impulso, como definido em (4.2). A taxa de amostra é $T \in \mathbb{R}$. De (4.3), a amostra da função f é dada por:

$$f(x)\Delta_0(x) = f(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(x - kT), \quad (4.8)$$

No próximo passo, a amostra da função calculada acima é truncada pela multiplicação com a função retangular q , definida como:

$$q = \begin{cases} 1, & \text{se } -\frac{T}{2} < x < T_0 - \frac{T}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (4.9)$$

onde T_0 é a "duração" da função de truncamento. Note que a função q não é centrada em 0 nem em $\frac{T_0}{2}$; o fato de não ser centrado em 0 é para não deixar confusa a notação que adotamos, e o fato de não ser centrado em $\frac{T_0}{2}$ se tornará mais claro no desenvolvimento que faremos adiante.

Ainda assim, o truncamento assegura:

$$f(x)\Delta_0(t)q(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)\delta(x - kT), \quad (4.10)$$

onde assumimos que há N impulsos equidistantes entre o intervalo de truncamento, i.e., $N = \frac{T_0}{T}$.

O próximo passo na modificação da função f , contínua, em sua equivalente discreta, para que possamos aplicar a transformada, é utilizar a equação (4.10). Para tanto, precisamos da convolução de (4.10) com a função Δ_1 , dada pela equação:

$$\Delta_1(x) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(x - rT_0). \quad (4.11)$$

Temos, então:

$$\begin{aligned} [f(x)\Delta_0(x)q(x)] * \Delta_1(x) &= \left[\sum_{k=0}^{N-1} f(kT)\delta(x - kT) \right] * \left[T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(x - rT_0) \right] \\ &= \cdots + T_0 \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(x + T_0 - rT) \\ &\quad + T_0 \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(x - kT) \\ &\quad + T_0 \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(x - T_0 - rT) + \cdots \end{aligned} \quad (4.12)$$

Note que a equação (4.12) é periódica, com período T_0 , e pode ser reescrita como:

$$\tilde{f}(x) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} f(kT)\delta(x - kT - rT_0) \right]. \quad (4.13)$$

Usamos a notação $\tilde{f}(x)$ para dizer que a expressão em (4.13) é uma aproximação de f em T_0 .

Podemos, agora, justificar a escolha da função retangular (4.9) usado no efeito de truncamento. Note que o resultado da convolução em (4.13) é uma função periódica com período T_0 que consiste de N amostras. Se a função retangular é escolhida de modo que o valor da amostra coincida com cada ponto final da função retangular, então a convolução da função de truncamento com os impulsos espaçados em T_0 resultarão no efeito de aliasing. Isto é, o N -ésimo ponto do período coincidirá com o primeiro ponto do próximo período. Para garantir que esse efeito de aliasing não ocorra, é necessário escolher o intervalo de truncamento tal como é dado pela função q em (4.9).

Enfim, para desenvolver a ideia de uma transformada de Fourier para a equação em (4.13), é necessário buscar a relação que a Transformada guarda com a Série de Fou-

rier, discutida no capítulo (2). Dizemos que a Transformada de Fourier de uma função periódica f é uma sequência de impulsos equidistantes:

$$\tilde{F}\left(\frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\xi - n\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{1}{T_0}, \quad (4.14)$$

onde

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0-T/2} \tilde{f}(x) e^{-i2\pi nx/T_0} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.15)$$

Substituindo (4.13) em (4.15), temos:

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0-T/2} \left[T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(x - kT - rT_0) \right) \right] e^{-i2\pi nx/T_0} dx, \quad (4.16)$$

de modo que:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \int_{-T/2}^{T_0-T/2} \delta(x - kT) e^{-i2\pi nx/T_0} dx = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-i2\pi knT/T_0}. \quad (4.17)$$

Se $T_0 = NT$, então (4.17) pode ser escrito como:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-i2\pi kn/N}, \quad (4.18)$$

e a Transformada de Fourier da equação (4.13) será:

$$\tilde{F}\left(\frac{r}{NT}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-i2\pi kn/N}. \quad (4.19)$$

Numa observação rápida da expressão em (4.19), não fica óbvio que a transformada $\tilde{F}(n/NT)$ possui somente N valores complexos distintos computáveis. Afim de esclarecer esse fato, seja $n = r$, onde $r \in \mathbb{Z}$ é arbitrário, então temos em (4.19):

$$\tilde{F}\left(\frac{r}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-i2\pi kr/N}. \quad (4.20)$$

Agora, façamos $n = r + N$; note que:

$$e^{i2k\pi(r+N)/N} = e^{i2k\pi r/N} e^{-i2k\pi} = e^{-i2\pi r/N}. \quad (4.21)$$

Desde que: $e^{-i2k\pi} = \cos(2k\pi) - i \operatorname{sen}(2k\pi) = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\tilde{F}\left(\frac{r+N}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-i2k\pi(r+N)/N} = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-i2k\pi r/N} = \tilde{F}\left(\frac{r}{NT}\right).$$

Portanto, há somente N valores distintos para o qual a expressão em (4.19) pode ser calculada; $\tilde{F}(n/NT)$ é periódica com N amostras. Equivalentemente, podemos expressar a Transformada de Fourier em (4.19) como:

$$\tilde{F}\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-i2k\pi n/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.22)$$

A equação em (4.22) é a expressão geral para Transformada de Fourier Discreta. Essa expressão relaciona N amostras de tempo e N amostras de frequência através da transformada contínua. Assim, vemos a transformada discreta como um caso especial da transformada contínua.

Veremos alguns exemplos utilizando um algoritmo computacional simples, com base na equação (4.22), para calcular a transformada discreta de funções contínua. O algoritmo encontra-se no apêndice.

Exemplo 4.2.1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{8}x\right), \quad (4.23)$$

com $N = 256$ e $T = 0,25$. Queremos:

$$\tilde{F}\left(\frac{n}{64}\right) = \sum_{k=0}^{31} f(k0, 25) [\cos(2k\pi n/256) + i \operatorname{sen}(2k\pi n/256)], \quad n = 0, 1, \dots, 255. \quad (4.24)$$

As amostras de $f(x)$ estão ilustradas nos gráfico abaixo.

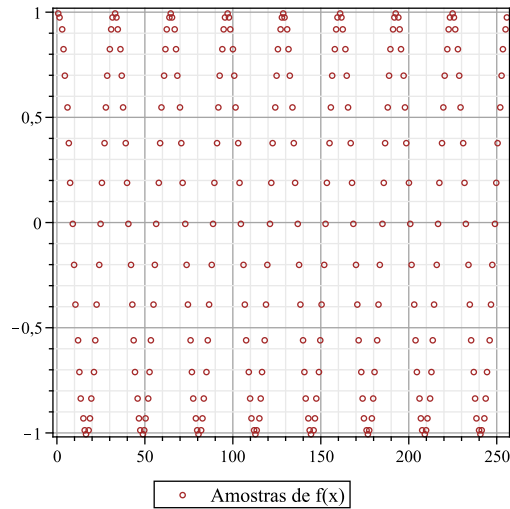


Figura 4.1: Amostras de $f(x)$ (Eq. 4.23)

Por sua vez, as Transformada de Fourier Discreta (TFD) de $f(x)$, está ilustrada no gráfico abaixo. Note que separamos a parte real e a parte imaginária da transformada, embora isso não seja perceptível na ilustração devido à proximidade dos pontos.

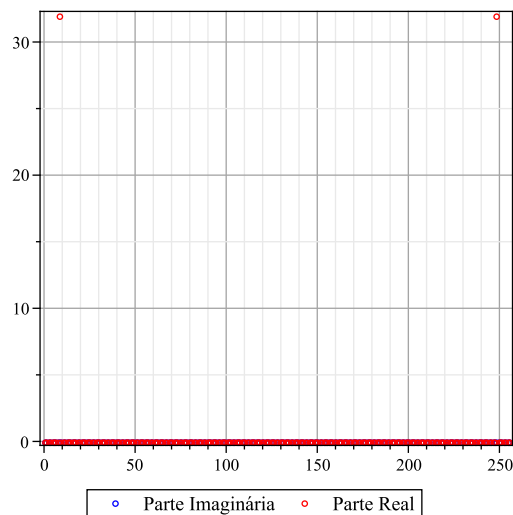


Figura 4.2: Transformada de Fourier Discreta da eq. (4.23)

No gráfico acima, a parte real da TFD para (4.23), reflete exatamente os pulsos que definem a Transformada de Fourier analítica de (4.23).

Observe mais um exemplo:

Exemplo 4.2.2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x) = e^{-t}, \quad (4.25)$$

com $N = 256$ e $T = 0,25$. Queremos:

$$\tilde{F}\left(\frac{n}{64}\right) = \sum_{k=0}^{31} f(k0,25) [\cos(2k\pi n/256) + i \operatorname{sen}(2k\pi n/256)], \quad n = 0, 1, \dots, 255. \quad (4.26)$$

As amostras de $f(x)$ e sua transformada discreta estão ilustradas nos gráfico abaixo:

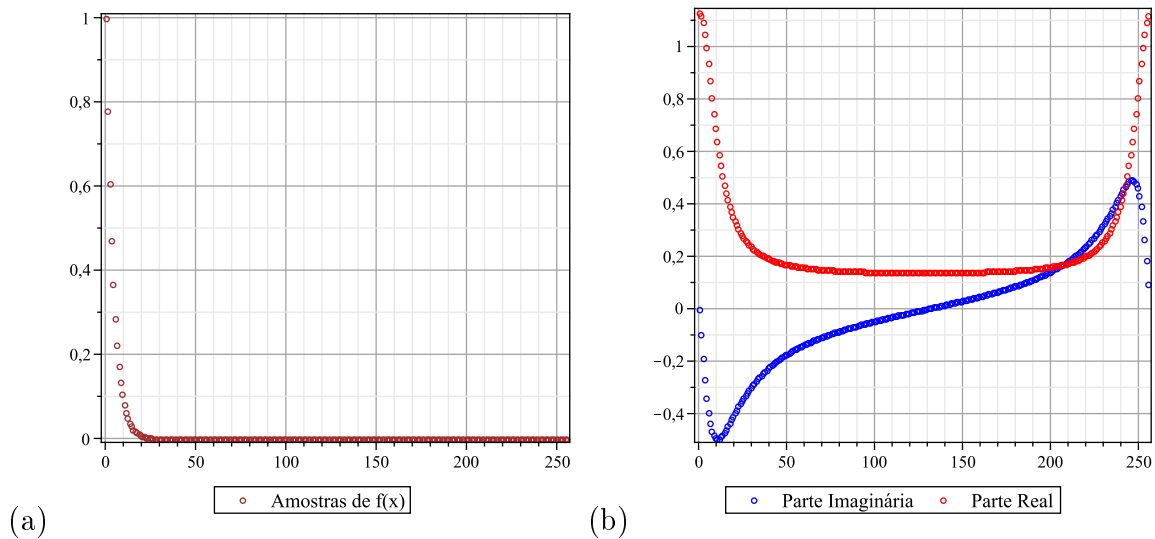


Figura 4.3: **(a)** Amostras de $f(x)$ (Eq. 4.25); **(b)** TFD da eq. (4.25)

Vale lembrar que a TFD de sinais contínuos sempre contém sua respectiva parte real e parte imaginária, mesmo que uma delas seja nula.

Lógico que, computacionalmente, é mais fácil manipular este sinal decompondo-o em dois outros sinais - a saber: parte real e imaginária - por motivos que ficarão mais claros na próxima seção.

4.2.1 Inversa da Transformada de Fourier Discreta

A Inversa da Transformada de Fourier Discreta é dada pela equação:

$$f(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{F}\left(\frac{n}{NT}\right) e^{i2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.27)$$

Para demonstrar que (4.27) é de fato a transformada inversa da expressão (4.22), substituiremos (4.27) em (4.22):

$$\begin{aligned} \tilde{F}\left(\frac{n}{NT}\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{F}\left(\frac{r}{NT}\right) e^{i2\pi rk/N} \right] e^{-i2\pi nk/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{F}\left(\frac{r}{NT}\right) \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi rk/N} e^{-i2\pi nk/N} \right] = \tilde{F}\left(\frac{n}{NT}\right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

A identidade anterior é conseguida se observarmos a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi rk/N} e^{-i2\pi nk/N} = \begin{cases} N, & \text{se } r = n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (4.29)$$

Dessa forma, fica demonstrado que a expressão dada por (4.27) é a inversa discreta da transformada.

Como exemplo, veremos as transformadas inversas das TDF calculadas nos exemplos (4.2.1) e (4.2.2), respectivamente.

Analogamente ao algoritmo anterior, o algoritmo computacional para a transformada inversa é calculada com base na equação (4.27), e encontra-se disponível no apêndice deste trabalho.

No entanto, há uma diferença: enquanto que no algoritmo anterior precisávamos apenas das amostras de f , nesse algoritmo precisamos das amostras da função $\tilde{F}(n/(NT))$, uma função complexa.

Consideramos, então, conhecidas a parte real e imaginária que compõem \tilde{F} . Assim, temos:

$$\tilde{F}\left(\frac{n}{NT}\right) = \text{Re}\left(\tilde{F}\left(\frac{n}{NT}\right)\right) + i\text{Im}\left(\tilde{F}\left(\frac{n}{NT}\right)\right). \quad (4.30)$$

De certo modo, nos exemplos anteriores, fica também justificada a escolha de calcular o sinal da TFD separando-a em dois outros sinais, justamente para que possam servir de amostras para o cálculo da transformada inversa e outras possibilidades de cálculo, por exemplo.

Exemplo 4.2.3. Considere conhecida a parte real e imaginária (Figura (4.2)) que compõem a Transformada de Fourier Discreta de (4.23).

Sabemos que o par de transformadas são obtidas de modo único. Portanto, espera-se que a transformada inversa das funções expostas nos gráficos da figura (4.2), seja $f(kT) = \cos(2\pi kT)$.

De fato, será exatamente essa a função calculada pelo algoritmo, se substituirmos a expressão em (4.30) em (4.27). Observe o gráfico:

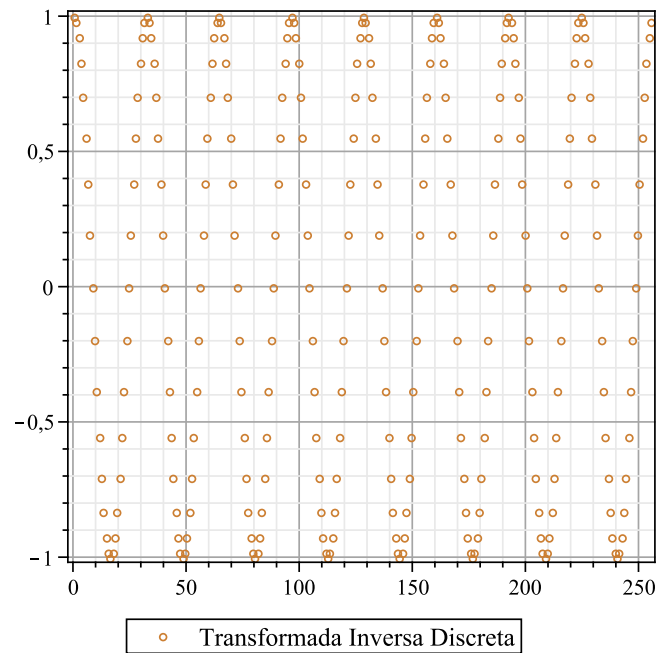


Figura 4.4: Transformada Inversa da Fourier Discreta Eq. (4.23)

Exemplo 4.2.4. Considere conhecida a parte real e imaginária (Figura (4.3) - (b)) que compõem a Transformada de Fourier Discreta de (4.25).

Do mesmo modo, como no exercício anterior, esperamos que a transformada inversa das funções expostas nos gráficos da figura (4.3), seja $f(kT) = e^{-(kT)}$.

Novamente, esta será a função calculada pelo algoritmo, observe:

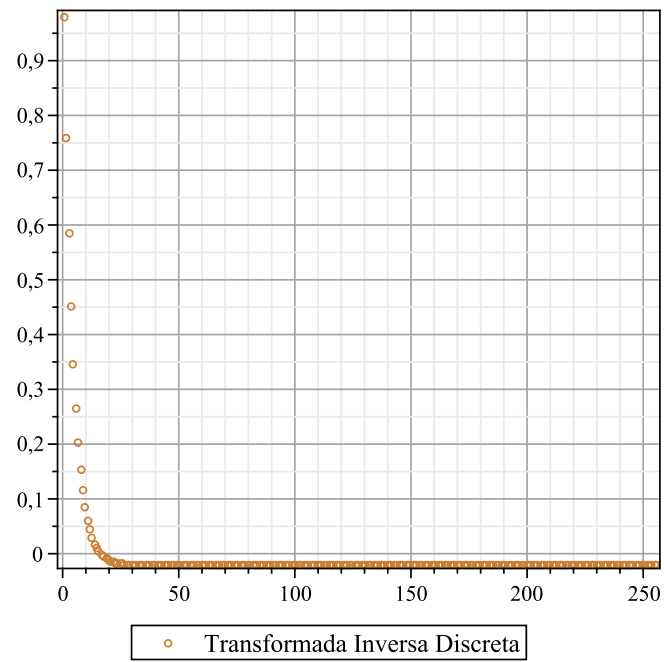


Figura 4.5: Transformada Inversa da Fourier Discreta Eq. (4.25)

Essa técnica da decomposição do sinal da transformada em dois sinais distintos também é amplamente usada como recurso computacional para o cálculo das transformadas rápidas de Fourier, objeto de estudo do próximo capítulo.

5 Transformada Rápida de Fourier - FFT

Para desenvolvermos uma teoria sobre a transformada rápida de Fourier (FFT), não precisamos necessariamente de um conhecimento profundo sobre a construção de algoritmos. No entanto, requer que dominemos o que foi discutido no capítulo anterior.

Isto, porque a FFT é um método bem específico para se calcular uma série de pontos, tal como nos diz (4.22), mais rapidamente do que outros algoritmos disponíveis para esse tipo de série numérica.

Nesse sentido, nossa discussão se dará no aspecto computacional do algoritmo FFT, explorando justificativas e motivações matemáticas, através da fatoração de matrizes, recursividade de funções e técnicas algébricas de indexação.

5.1 Formulação Matricial

Considere a seguinte notação para a mesma igualdade em (4.22):

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi nk/N} f(k), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.1)$$

Note que: trocamos kT por k , e n/NT por n .

Para facilitar a notação no desenvolvimento a seguir, façamos:

$$W = e^{-i2\pi/N}. \quad (5.2)$$

Perceba, também, que a equação (5.1) descreve N equações de N parcelas cada. Para analisar a expansão da expressão (5.1), observe o exemplo a seguir.

Exemplo 5.1.1. Suponha que $N = 4$; temos de (5.1) que:

$$\begin{aligned} F(0) &= f(0)W^0 + f(1)W^0 + f(2)W^0 + f(3)W^0, \\ F(1) &= f(0)W^0 + f(1)W^1 + f(2)W^2 + f(3)W^3, \\ F(2) &= f(0)W^0 + f(1)W^2 + f(2)W^4 + f(3)W^6, \\ F(3) &= f(0)W^0 + f(1)W^3 + f(2)W^6 + f(3)W^9. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Podemos representar mais facilmente as equações em (5.3) na forma matricial, se fizermos:

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Observando o exemplo anterior, notamos que podemos representar a expansão de (5.1) como em (5.4), mas na forma matricial compacta, como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{n}) = \mathbf{W}^{\mathbf{nk}}\mathbf{f}(\mathbf{k}). \quad (5.5)$$

Observe que, se seguirmos a expansão em (5.5) estritamente, teremos:

$$\begin{cases} (N)(N-1) & \text{adições complexas,} \\ (N)^2 & \text{multiplicações complexas.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Desse modo, qualquer algoritmo que execute essa expansão teria complexidade na ordem de $O(N^2)$. Os melhores algoritmos para FFT são aqueles que reduzem o número de adições e multiplicações e, portanto, sua ordem de complexidade.

No entanto, a partir da expressão (5.5) é possível desenvolver várias abordagens matemáticas para a elaboração de algoritmos de FFT e, entre os mais estudados, estão aqueles que possuem a menor complexidade algorítmica, tais como os métodos fornecidos por Danielson-Lanczos, Cooley-Tukey, Sande-Tukey. Esses dois últimos foram estudados em meados da década de 60, enquanto Danielson e Lanczos desenvolveram um método no início dos anos 40.

Nosso próximo objetivo é discutir as motivações e a origem dos dois primeiros algoritmos.

5.2 Algoritmo Danielson-Lanczos

Danielson e Lanczos perceberam que a expansão das equações em (5.1) sempre poderiam ser re-organizados de forma a separarem as parcelas de acordo com os fatores $f(n)$, respeitadas algumas condições.

Em geral, note que se os pontos de entrada N forem sempre da forma 2^γ , $\gamma \in \mathbb{N} - \{0\}$, sempre haverá um número par de parcelas e de equações. Na verdade, mais do que isso, temos o seguinte lema:

Lema 5.2.1 (Danielson-Lanczos). Seja $N = 2^\gamma$, onde $\gamma \in \mathbb{N} - \{0\}$. Então podemos escrever a Transformada Discreta de Fourier do seguinte modo:

$$\begin{aligned} F(n) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-i2\pi\frac{n(2k)}{N}} f(2k) + W^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-i2\pi\frac{n(2k)}{N}} f(2k+1) \\ &= F^{\text{par}}(n) + W^n F^{\text{ímpar}}(n). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Demonstração. Seja N da forma 2^γ , com $\gamma \in \mathbb{N} - \{0\}$, de acordo com a hipótese do lema. Então podemos dividir a soma em (5.1), cujo tamanho é N , em duas somas menores de tamanho $(N/2)$:

$$\begin{aligned} F(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi nk/N} f(k) \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{-i2\pi n(2k)/N} f(2k) + \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{-i2\pi n(2k+1)/N} f(2k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{-i2\pi n(2k)/N} f(2k) + W^n \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{-i2\pi n(2k)/N} f(2k+1) \\ &= F^{\text{par}}(n) + W^n F^{\text{ímpar}}(n). \end{aligned} \quad (5.8)$$

□

A principal utilidade do lema (5.2.1) é dividir a transformada discreta em dois componentes - par e ímpar, respectivamente - que também são Transformadas Discretas de Fourier, embora tenham a metade do tamanho original de N .

Nesse sentido, observamos que a necessidade de $N = 2^\gamma$, uma potência de 2, é imperativo. Sem essa restrição sobre os dados de entrada, não seria possível haver a divisão exata de N tal como o lema Danielson-Lanczos nos revela.

Antes de discutirmos mais profundamente o que de fato queremos com o lema (5.2.1), veja um exemplo onde o aplicamos:

Exemplo 5.2.1. Suponha, novamente, $N = 4$. Note que, de acordo com a hipótese do lema, temos que $\gamma = 2$. Então, podemos escrever:

$$F(n) = F^{\text{par}}(n) + W^n F^{\text{impar}}(n), \quad n = 0, 1, 2, 3. \quad (5.9)$$

Fazendo,

$$F(n) = \sum_{k=0}^1 e^{-i2\pi \frac{n(2k)}{4}} f(2k) + W^n \sum_{k=0}^1 e^{-i2\pi \frac{n(2k)}{4}} f(2k+1). \quad (5.10)$$

Desenvolvendo a expressão anterior, temos:

$$\begin{aligned} F(0) &= [e^0 f(0) + e^0 f(2)] + W^0 [e^0 f(1) + e^0 f(3)], \\ F(1) &= [e^0 f(0) + e^{-i2\pi/4} f(2)] + W^1 [e^0 f(1) + e^{-i2\pi/4} f(3)], \\ F(2) &= [e^0 f(0) + e^{-i2\pi} f(2)] + W^2 [e^0 f(1) + e^{-i2\pi} f(3)], \\ F(3) &= [e^0 f(0) + e^{-i2\pi 6/4} f(2)] + W^3 [e^0 f(1) + e^{-i2\pi 6/4} f(3)]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Trocando as exponenciais pelo termo W , e aplicando as distributivas, temos que:

$$\begin{aligned} F(0) &= W^0 f(0) + W^0 f(2) + W^0 f(1) + W^0 f(3), \\ F(1) &= W^0 f(0) + W^2 f(2) + W^1 f(1) + W^3 f(3), \\ F(2) &= W^0 f(0) + W^4 f(2) + W^2 f(1) + W^6 f(3), \\ F(3) &= W^0 f(0) + W^6 f(2) + W^3 f(1) + W^9 f(3). \end{aligned} \quad (5.12)$$

E se temos os valores de $f(n)$, $n = 0, 1, 2, 3$, obtemos então os valores numéricos das transformadas discretas.

Note que, exceto pela ordem das parcelas e fatores, as equações em (5.12) são iguais a (5.3).

Outro ponto de discussão importante, e que na verdade é o foco principal do desenvolvimento do algoritmo baseado no lema (5.2.1), é a possibilidade de se aplicá-lo de forma recursiva. De fato, se recorrermos ao lema uma segunda vez, o tamanho original de N será reduzido à $N/4$ e, se aplicarmos uma terceira vez, reduziremos para $N/8$ e assim sucessivamente.

Observe que há um padrão na recursividade, podemos dizer que:

Propriedade 5.2.1. Se σ for o número de recorrência da aplicação do lema (5.2.1) e N o tamanho original dos dados de entrada (N satisfazendo as hipóteses do lema (5.2.1)), então o tamanho de N a cada σ recorrência será:

$$\frac{N}{2^\sigma} \quad (5.13)$$

É fácil perceber que a recorrência só é possível enquanto $\sigma \leq \gamma$ e, que o caso mais interessante, ocorre quando $\sigma = \gamma$.

Em outras palavras, a recursividade nos permite quebrar cada componente par e ímpar da transformada discreta em mais outras duas componentes par e ímpar, respectivamente.

Para $\sigma = 1$, observe que:

$$F(n) = F^{\text{par}}(n) + W^{2^{\sigma-1}n} F^{\text{ímpar}}(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.14)$$

Agora, para $\sigma = 2$, podemos fazer:

$$\begin{cases} F^{\text{par}}(n) = F^{[\text{par}][\text{par}]}(n) + W^{2n} F^{[\text{par}][\text{ímpar}]}(n) \\ F^{\text{ímpar}}(n) = F^{[\text{ímpar}][\text{par}]}(n) + W^{2n} F^{[\text{ímpar}][\text{ímpar}]}(n) \end{cases} \quad (5.15)$$

Combinando as equações (5.15) e (5.14), e simplificando a notação fazendo $[\text{par}] = P$ e $[\text{ímpar}] = I$, temos:

$$F(n) = [F^{PP}(n) + W^{2n} F^{PI}(n)] + W^n [F^{IP}(n) + W^{2n} F^{II}(n)]. \quad (5.16)$$

Onde as expansões dos termos que se iniciam com par, são obtidas observando somente a primeira parcela da equação no lema (5.2.1), substituindo k por $2k$, no termo que termina em par, e por $2k + 1$ no ímpar. Fazendo isso, teremos:

$$\left\{ \begin{aligned} F^{PP}(n) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2^2}-1} e^{-i2\pi n \frac{2(2k)}{N}} f(2(2k)) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} e^{-i2\pi n \frac{4k}{N}} f(4k) \\ W^{2n} F^{PI}(n) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2^2}-1} e^{-i2\pi n \frac{(2(2k+1))}{N}} f(2(2k+1)) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} e^{-i2\pi n \frac{(4k+2)}{N}} f(4k+2) \\ &= W^{2n} \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} e^{-i2\pi n \frac{4k}{N}} f(4k+2) \end{aligned} \right. \quad (5.17)$$

De modo análogo, para resolver as expansões dos termos que se iniciam com ímpar, analisaremos somente a segunda parcela da equação no lema (5.2.1), substituindo k por $2k$ no termo que termina em par, e por $2k + 1$ no ímpar:

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{IP}(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} e^{-i2\pi n \frac{4k}{N}} f(4k + 1) \\ W^{2n} F^{II}(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} e^{-i2\pi n \frac{2(2k+1)}{N}} f(2(2k + 1) + 1) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} e^{-i2\pi n \frac{(4k+2)}{N}} f(4k + 3) \\ = W^{2n} \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} e^{-i2\pi n \frac{(4k)}{N}} f(4k + 3) \end{array} \right. \quad . \quad (5.18)$$

Para ilustrar a recursividade em (5.16), vamos usar o exemplo (5.2.1).

Exemplo 5.2.2. Suponha $N = 4$, então $\gamma = 2$. Vamos aplicar o lema (5.2.1) com $\sigma = 2$.

Observe que o comprimento de N é $4/2^2 = 1$, "eliminando" o efeito do somatório em k , ou melhor dizendo, fazendo $k = 0$ para qualquer n . Então, de (5.16):

$$F(n) = [f(0) + W^{2n} f(2)] + W^n [f(1) + W^{2n} f(3)]. \quad (5.19)$$

Para $n = 0, 1, 2, 3$, teremos:

$$\begin{aligned} F(0) &= [f(0) + W^0 f(2)] + W^0 [f(1) + W^0 f(3)], \\ F(1) &= [f(0) + W^2 f(2)] + W^1 [f(1) + W^2 f(3)], \\ F(2) &= [f(0) + W^4 f(2)] + W^2 [f(1) + W^4 f(3)], \\ F(3) &= [f(0) + W^6 f(2)] + W^3 [f(1) + W^6 f(3)]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Note também, que as equações anteriores são iguais as calculadas em (5.12), com $\sigma = 1$.

Além de ilustrar a recursividade para $\sigma = 2$, o exemplo anterior também ilustra o caso onde $\sigma = \gamma$, e a consequência desse fato é justamente a independência que a transformada discreta ganha com relação ao termo k . Lógico que, quanto maior for γ empregado no cálculo de N , maior será o grau σ de recursividade do lema Danielson-Lanczos para obtermos a independência do termo k .

No entanto, os ganhos ainda são enormes ao compararmos a complexidade desse algoritmo baseado no lema (5.2.1), com os de complexidade $O(N^2)$.

Se repararmos nas expressões geradas pela recursividade, onde $\sigma = \gamma$, com $N = 2^\gamma$, para algum $\gamma \in \mathbb{N} - \{0\}$, notaremos que sempre haverá N multiplicações e adições com termos complexos, mas o que muda é a quantidade de execuções dessas operações, que só aconteceram σ vezes.

Podemos dizer, então, que a complexidade do algoritmo de Danielson-Lanczos é de ordem $O(N\sigma)$, ou mais precisamente, se observarmos que $\sigma = \log_2 N$, temos que a complexidade é de ordem $O(N \log_2 N)$.

Nosso próximo passo, também se origina da discussão do $\gamma = \sigma$. Como sabemos, quando isso ocorre, as transformadas discretas tornam-se independentes de k , fazendo com que as componentes pares e ímpares dependam apenas de $f(n)$. Em outras palavras:

$$(\exists!n) (0 \leq n \leq N - 1), \text{ tal que } F^{PIPIIP\dots IPIIP} = f(n). \quad (5.21)$$

Um único n , porque a Transformada de Fourier é obtida de modo único. A questão principal é como relacionar uma sequência de P 's e de I 's com um único n .

Uma resposta vem do próprio método de Danielson-Lanczos ao separar as componentes da transformada discreta em pares e ímpares, fazendo as respectivas substituições do argumento k das funções f , ora por $2k$, ora por $2k + 1$.

Observe a seguinte tabela obtida do exemplo (5.2.2), em comparação com a equação (5.16):

Tabela 5.1: Indexação Binária

| Transformada | Dependência $f(n)$ |
|--------------|--------------------|
| F^{PP} | $f(0)$ |
| F^{PI} | $f(2)$ |
| F^{IP} | $f(1)$ |
| F^{II} | $f(3)$ |

Se reescrevermos a sequência de P 's e I 's, fazendo $P = 0$ e $I = 1$, e os valores numéricos assumidos por n para a base binária, conseguiremos uma relação biunívoca entre a nova sequência e os novos valores assumidos por n .

Tabela 5.2: Método *bit-reverse* para $N = 4$

| Transf. Índice Bin. | Dependência $f(n_{\text{binário}})$ |
|---------------------|-------------------------------------|
| F^{00} | $f(00)$ |
| F^{01} | $f(10)$ |
| F^{10} | $f(01)$ |
| F^{11} | $f(11)$ |

As duas tabelas acima são equivalentes.

Note que F^{00} depende somente de $f(00)$, onde $n_{\text{binário}} = 00$. Observe também, que F^{01} depende de $f(10)$, $n_{\text{binário}} = 10$ correspondente a $n = 2$.

Aliás, esse padrão consiste em inverter os bits da sequência de P 's e I 's para obter o único $n_{\text{binário}}$, argumento da função f da qual depende a transformada. Esse método é chamado de *bit-reverse*.

De modo simples, invertendo os bits de $n_{\text{binário}} = 00$, então teremos que $F^{00} = f(00)$; se invertermos os bits de $n_{\text{binário}} = 01$, então teremos que $F^{01} = f(10)$, e assim sucessivamente. Observe a tabela para $N = 8$:

Tabela 5.3: Método *bit-reverse* para $N = 8$

| Transformada | Transf. Índice Bin. | Dependência $f(n_{\text{binário}})$ | Dependência $f(n)$ |
|--------------|---------------------|-------------------------------------|--------------------|
| F^{PPP} | F^{000} | $f(000)$ | $f(0)$ |
| F^{PPI} | F^{001} | $f(100)$ | $f(4)$ |
| F^{PIP} | F^{010} | $f(010)$ | $f(2)$ |
| F^{PII} | F^{011} | $f(110)$ | $f(6)$ |
| F^{IPP} | F^{100} | $f(001)$ | $f(1)$ |
| F^{IPI} | F^{101} | $f(101)$ | $f(5)$ |
| F^{IIP} | F^{110} | $f(011)$ | $f(3)$ |
| F^{III} | F^{111} | $f(111)$ | $f(7)$ |

Esse método pode ser usado para qualquer N satisfazendo as condições do lema (5.2.1) e $\sigma = \gamma$.

Vejamos alguns exemplos utilizando os algoritmos de Danielson-Lanczos desenvolvido na linguagem Fortran77 e no programa de Maple[®], com linguagem computacional simbólica. Ambos algoritmos encontram-se nos apêndices D e E, respectivamente.

Exemplo 5.2.3. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua:

$$f(x) = \cos(2\pi x), \tag{5.22}$$

com $N = 4$ e $T = 0.25$.

As amostras recolhidas da função, são exibidas no gráfico abaixo:

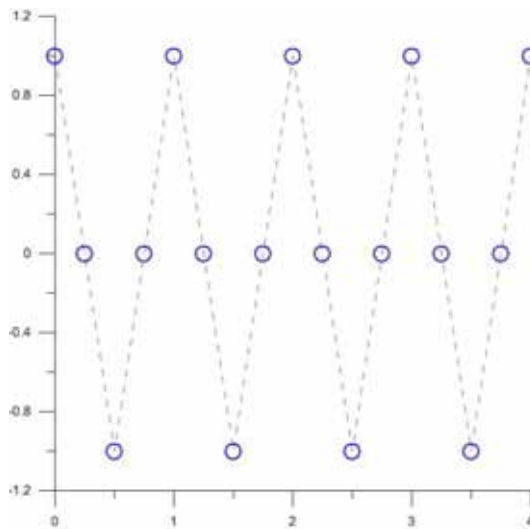


Figura 5.1: Eq. (5.22): Amostras através do Fortran77

Com estes parâmetros, calculamos a FFT para a função acima e obtemos os seguintes resultados ilustrados nos gráficos abaixo:

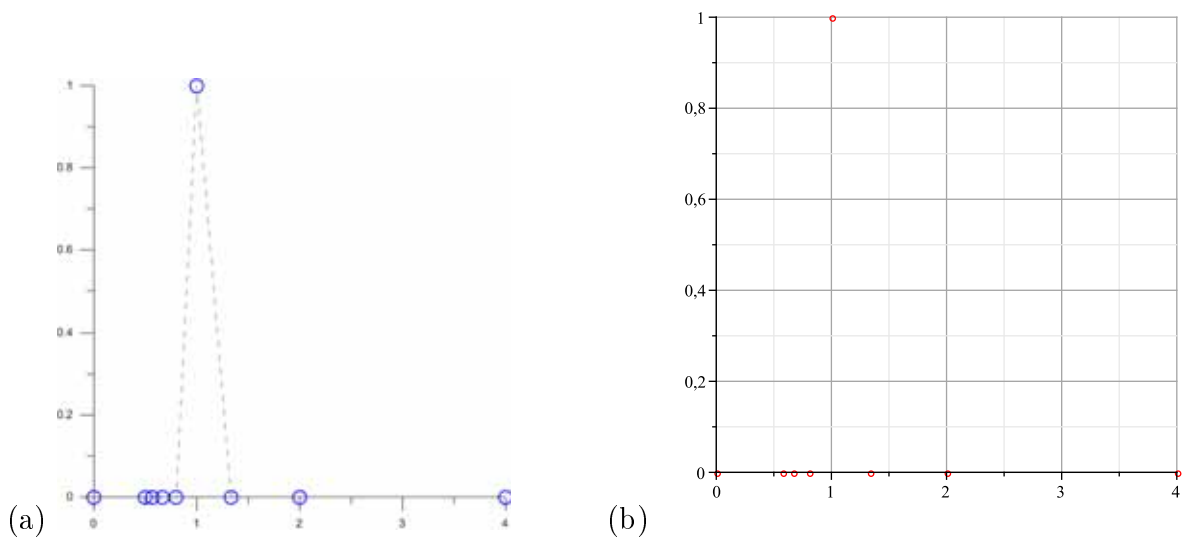


Figura 5.2: FFT para Eq. (5.22): **(a)** Resultado obtido no Fortran77; **(b)** Resultado obtido no Maple®

Calculamos também, a FFT para mesma função apresentada, mas com $N = 64$ e $T = 0,25$. Observe:

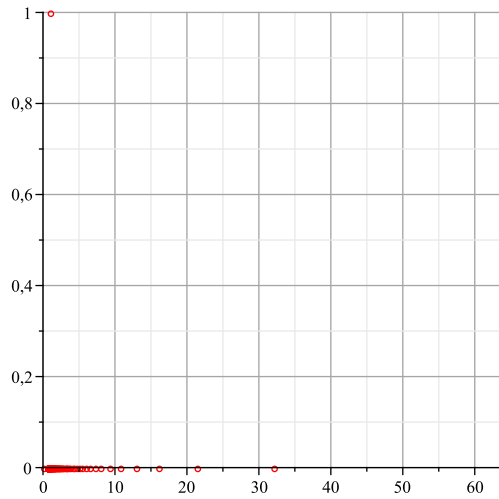


Figura 5.3: FFT para Eq. (5.22): Resultado obtido no Maple[®], $N = 64$ e $T = 0,25$

Veremos um segundo algoritmo para a FFT que parte da mesma problematização apresentada inicialmente pela formulação matricial da Transformada Discreta de Fourier.

5.3 Algoritmo Cooley-Tukey

Antes de desenvolvermos uma base teórica mais geral para o algoritmo de Cooley-Tukey, considerando $N = 2^\gamma$, estudaremos alguns casos específicos partindo de $N = 4$ e $N = 8$ com o objetivo de explorar e justificar a ideia principal desse método.

Vamos, então, definir algumas notações com as quais trabalharemos ao longo desta seção. Considere o seguinte reajuste na notação da Transformada de Fourier Discreta dada em (5.1), utilizando o termo W^{nk} :

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} f_0(k), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (5.23)$$

onde $W = e^{-i2\pi/N}$.

Na discussão desse método, precisaremos utilizar a base teórica do *bit-reverse* para os argumentos k e n com a finalidade de calcular as transformadas a partir (5.23). Mas, por enquanto, vamos apenas apresentar as notações.

Para isso, assumimos $N = 4$, portanto $\gamma = 2$, e representaremos k e n na forma binária com 2 bits cada:

$$k = 0, 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad k = (k_1, k_0) = 00, 01, 10, 11,$$

$$n = 0, 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad n = (n_1, n_0) = 00, 01, 10, 11.$$

De forma compacta, podemos escrever k e n da seguinte maneira:

$$\begin{cases} k = 2k_1 + k_0, \\ n = 2n_1 + n_0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Os únicos valores que cada k_j e n_j , $j = 0, 1$, podem assumir ou será 1 ou 0.

Usando a representação em (5.24), podemos reescrever (5.23) para o caso $N = 4$, como:

$$F(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 f_0(k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}. \quad (5.25)$$

Note que a quantidade de somatórios em (5.25) agora depende intrinsecamente do valor de γ para poder ordenar os bits da representação binária de k .

Agora, considere o termo W^p . Sabemos que, se $W^{a+b} = W^a W^b$, então:

$$\begin{aligned} W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} &= W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \\ &= [W^{4n_1k_1}] W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \\ &= W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Note que o termo no colchete representa a unidade:

$$W^{4n_1k_1} = [W^4]^{n_1k_1} = [e^{-i2\pi 4/4}]^{n_1k_1} = 1. \quad (5.27)$$

Portanto, a equação (5.25) pode ser escrita como:

$$F(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left[\sum_{k_1=0}^1 f_0(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} \right] W^{(2n_1+n_0)k_0}. \quad (5.28)$$

A equação anterior representa toda a fundamentação desse método para o cálculo da FFT. Para ilustrar esse ponto de vista, consideremos cada somatório em (5.28) individualmente. Primeiro, vamos analisar a mais interna delas:

$$f_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 f_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1}. \quad (5.29)$$

Expandindo as equações em (5.29), temos:

$$\begin{aligned} f_1(0, 0) &= f_0(0, 0) + f_0(1, 0)W^0, \\ f_1(0, 1) &= f_0(0, 1) + f_0(1, 1)W^0, \\ f_1(1, 0) &= f_0(0, 0) + f_0(1, 0)W^2, \\ f_1(1, 1) &= f_0(0, 1) + f_0(1, 1)W^2. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Escrevendo as equações anteriores sob a forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} f_1(0, 0) \\ f_1(0, 1) \\ f_1(1, 0) \\ f_1(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0, 0) \\ f_0(0, 1) \\ f_0(1, 0) \\ f_0(1, 1) \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Por sua vez, analisaremos o somatório mais externo, escrevendo-o em função de $f_1(n_0, k_0)$. Fazendo

$$f_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 f_1(n_0, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_0}, \quad (5.32)$$

obtemos, de modo análogo, a forma matricial das equações expandidas em:

$$\begin{bmatrix} f_2(0, 0) \\ f_2(0, 1) \\ f_2(1, 0) \\ f_2(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(0, 0) \\ f_1(0, 1) \\ f_1(1, 0) \\ f_1(1, 1) \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Antes de prosseguirmos com o desenvolvimento teórico, repare no resultado da multiplicação das matrizes quadradas dadas em (5.33) e (5.31), respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^5 \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

É possível mostrar que a matriz obtida em (5.34) é equivalente a matriz quadrada na expressão (5.4) através de duas relações de equivalência, a saber: (a) classes de equivalência geradas pelo resto da divisão de nk por N e (b) a linha-equivalência de matrizes.

Lema 5.3.1. Seja $n, k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$. Se $W = e^{-i2\pi/N}$, então:

$$W^{nk} = W^{(nk) \bmod(N)}. \quad (5.35)$$

Demonstração. Isso na verdade ocorre pela natureza trigonométrica do termo W . Seja n e k como no enunciado do lema, e $r \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ tal que:

$$r = (nk) \bmod(N). \quad (5.36)$$

Então, do algoritmo da divisão, temos

$$(\exists!q)(q \in \mathbb{N}) \text{ tal que } nk = qN + r. \quad (5.37)$$

Para provar o lema, então, basta mostrar que a igualdade abaixo ocorre:

$$W^{nk} = W^r. \quad (5.38)$$

Por outro lado, de (5.37):

$$W^{nk} = W^{(qN+r)} = e^{-i2\pi\left[\frac{(qN+r)}{N}\right]} = e^{-i2\pi\left[q + \frac{r}{N}\right]} = e^{-i2q\pi} e^{-i2\pi\frac{r}{N}}. \quad (5.39)$$

E, desde que: $q \in \mathbb{N} \Rightarrow e^{-i2q\pi} = 1$, então:

$$W^{nk} = e^{-i2\pi\frac{r}{N}} = W^r. \quad (5.40)$$

□

De fato, o lema nos permite separar o fator nk em classes de equivalência de \bar{r} , onde $r \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$. Observe, por exemplo, que o próprio valor máximo assumido por nk , $(N - 1)(N - 1) = N^2 - 2N + 1$, pertence à classe $\bar{r} = \bar{1}$.

Nesse sentido, o termo W^5 em (5.34) é equivalente ao termo W^1 , quando $N = 4$, pois $5 \in \bar{1}$.

Assegurado os resultados do lema, e usando a linha-equivalência entre matrizes para trocar a linha 2 pela 3, teremos de (5.34):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Posto isso, dizemos que houve uma fatoração da matriz (5.41) em duas matrizes quadradas nas respectivas expressões em (5.31) e (5.33).

A ideia principal do algoritmo de Cooley-Tukey é exatamente essa, ao fatorar a matriz quadrada de (5.4) na multiplicação de duas matrizes, como em (5.34), aliado ao uso do método bit-reverse para os somatórios, reduzimos a complexidade do algoritmo para a ordem de $O(N \text{Log}_2 N)$, como no algoritmo de Danielson-Lanczos.

Retornando ao problema principal, analisando (5.33), dizemos que a transformada discreta é dada pela expressão:

$$F(n_1, n_0) = f_2(n_0, n_1). \quad (5.42)$$

Isto é, a transformada discreta é obtida de um somatório na ordem reversa de bits, com respeito aos valores de $F(n_1, n_0)$.

As equações a seguir resumem a formulação original para o caso $N = 4$ do algoritmo de Cooley-Tukey, de caráter recursivo:

$$\begin{cases} f_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 f_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1}, \\ f_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 f_1(n_0, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_0}, \\ F(n_1, n_0) = f_2(n_0, n_1). \end{cases} \quad (5.43)$$

Vejamos um outro caso.

Exemplo 5.3.1. Suponha $N = 8$, portanto $\gamma = 3$. Neste caso, temos que:

$$\begin{aligned} n &= 4n_2 + 2n_1 + n_0, & n_i &= 0 \text{ ou } 1, \\ k &= 4k_2 + 2k_1 + k_0, & k_i &= 0 \text{ ou } 1. \end{aligned} \quad (5.44)$$

De (5.23), temos:

$$F(n_2, n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 f_0(k_2, k_1, k_0) W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)}. \quad (5.45)$$

Fatorando o termo W^p :

$$\begin{aligned} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} &= W^{(4n_2+2n_1+n_0)4k_2} W^{(4n_2+2n_1+n_0)2k_1} \\ &\times W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Observe que $W^8 = 1$, então teremos:

$$\begin{aligned} W^{(4n_2+2n_1+n_0)4k_2} &= [W^{8(2n_2k_2)}] [W^{8(n_1k_2)}] W^{4(n_0k_2)} = W^{4(n_0k_2)} \\ W^{(4n_2+2n_1+n_0)2k_1} &= [W^{8(n_2k_1)}] W^{(2n_1+n_0)2k_1} = W^{(2n_1+n_0)2k_1}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Fatorado o termo W^p , podemos reescrever (5.45) como:

$$\begin{aligned} F(n_2, n_1, n_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 f_0(k_2, k_1, k_0) W^{4(n_0k_2)} \\ &\times W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Que nos leva ao conjunto de equações:

$$\left\{ \begin{aligned} f_1(n_0, k_1, k_0) &= \sum_{k_2=0}^1 f_0(k_2, k_1, k_0) W^{4(n_0k_2)}, \\ f_2(n_0, n_1, k_0) &= \sum_{k_1=0}^1 f_1(n_0, k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)2k_1}, \\ f_3(n_0, n_1, n_2) &= \sum_{k_0=0}^1 f_2(n_0, n_1, k_0) W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0}, \\ F(n_2, n_1, n_0) &= f_3(n_0, n_1, n_2). \end{aligned} \right. \quad (5.49)$$

5.3.1 Generalização para Cooley-Tukey

Até agora discutimos o algoritmo Cooley-Tukey para os casos particulares $N = 4$ e $N = 8$. Agora, desenvolveremos um resultado mais geral para o caso $N = 2^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Assim como foi feito em (5.24), escreveremos n e k de modo generalizado, fazendo:

$$\begin{cases} n = 2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0, \\ k = 2^{\gamma-1}k_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}k_{\gamma-2} + \dots + k_0. \end{cases} \quad (5.50)$$

Note que a quantidade de bits empregada na numeração binária de n e k depende essencialmente de γ .

Com o uso dessa notação, podemos reescrever (5.23) com a forma:

$$F(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 f(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^p, \quad (5.51)$$

onde

$$p = (2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + \dots + n_0)(2^{\gamma-1}k_{\gamma-1} + \dots + k_0). \quad (5.52)$$

Desde que $W^{a+b} = W^a W^b$, então teremos que:

$$W^p = W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + \dots + n_0)(2^{\gamma-1}k_{\gamma-1})} W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + \dots + n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})} \\ \times \dots \times W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + \dots + n_0)k_0}. \quad (5.53)$$

Precisamos fatorar o termo W , como fizemos em (5.46). Se, a princípio, consierarmos o primeiro fator do lado direito de (5.53), teremos:

$$W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + \dots + n_0)(2^{\gamma-1}k_{\gamma-1})} = \left[W^{2^\gamma(2^{\gamma-2}n_{\gamma-1}k_{\gamma-1})} \right] \left[W^{2^\gamma(2^{\gamma-3}n_{\gamma-2}k_{\gamma-1})} \right] \\ \times \dots \times W^{2^\gamma(n_1k_{\gamma-1})} W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})} \\ = W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})}. \quad (5.54)$$

Lembrando que a unidade sob o termo W ocorre quando:

$$W^{2^\gamma} = W^N = [e^{-i2\pi/N}]^N = 1. \quad (5.55)$$

E, de modo análogo, se considerarmos o segundo fator, temos:

$$\begin{aligned}
 W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+\dots+n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})} &= \left[W^{2^\gamma(2^{\gamma-3}n_{\gamma-1}k_{\gamma-2})} \right] \left[W^{2^\gamma(2^{\gamma-4}n_{\gamma-2}k_{\gamma-2})} \right] \\
 &\times \dots \times W^{2^{\gamma-1}(n_1k_{\gamma-2})} W^{2^{\gamma-2}(n_0k_{\gamma-2})} \\
 &= W^{2^{\gamma-2}k_{\gamma-2}(2n_1+n_0)}. \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

Continuando esse processo até que o último fator em (5.53) seja analisado, de (5.51) teremos:

$$\begin{aligned}
 F(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 f_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) \\
 &\times W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})} W^{2^{\gamma-2}k_{\gamma-2}(2n_1+n_0)} \dots \\
 &\times W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots+n_0)k_0}. \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

Esta equação, assim como a (5.28) para o caso $N = 4$, constitui a ideia principal para o desenvolvimento do algoritmo de Cooley-Tukey para o caso geral $N = 2^\gamma$.

Se desenvolvermos cada um dos γ somatórios, de forma individual, no final do processo teremos um conjunto de equações que nos revelará a Transformada Discreta de Fourier:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 f_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) = \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 f_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})} \\
 f_2(n_0, n_1, k_{\gamma-3}, \dots, k_0) = \sum_{k_{\gamma-2}=0}^1 f_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^{2^{\gamma-2}k_{\gamma-2}(2n_1+n_0)} \\
 \vdots \\
 f_\gamma(n_0, n_1, \dots, n_{\gamma-1}) = \sum_{k_0=0}^1 f_{\gamma-1}(n_0, n_1, \dots, k_0) W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots+n_0)k_0} \\
 F(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) = f_\gamma(n_0, n_1, \dots, n_{\gamma-1})
 \end{array} \right. \quad (5.58)$$

Assim como observamos no algoritmo de Danielson-Lanczos, a formulação (5.58), conhecido como algoritmo de Cooley-Tukey, possui γ equações que representam as N equações do problema original em (5.5). Note que, de (5.58), há somente uma soma e uma multiplicação com termos complexos e, portanto, no conjunto geral do algoritmo podemos

ver que há $N\gamma$ multiplicações.

Em outras palavras, observamos que a complexidade do algoritmo em (5.58) é de ordem $O(N\gamma)$, ou de modo geral, $O(N \log_2 N)$.

No próximo tópico, trataremos do efeito de leakage e da necessidade de uma escolha criteriosa no janelamento de funções (ou sinais) para a realização bem sucedida da FFT, independentemente do método escolhido para calculá-la.

5.4 Janelamento de Sinais e os efeitos de *Leakage*

Nos exemplos utilizados durante todo esse capítulo, as funções periódicas possuem um número inteiro de ciclos no período de observação das amostras e, assim, suas respectivas FFT foram calculadas para essas amostras bem comportadas.

Na tentativa de contornar os efeitos de aliasing, por exemplo, podemos limitar a frequência do sinal amostrado através de sua multiplicação pela função (2.5), que se enquadra como filtro ou um janelamento desse sinal. Em alguns casos, a utilização de certos filtros aliado ao tempo de observação do sinal, pode revelar outro tipo de efeito: o efeito de *leakage*.

Basicamente, o leakage é um efeito que traduz de forma errônea as frequências não exatas de um sinal, dentro de um período onde ele é amostrado, quando sua transformada de Fourier é calculada.

Para entendermos melhor esse efeito, considere uma função senoide com um número inteiro de ciclos dentro do período observado. O gráfico desse senoide é representado a seguir:

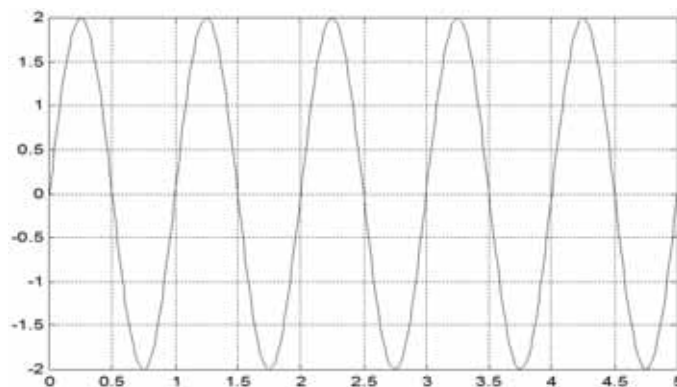


Figura 5.4: função $y = 2 \text{sen}(2\pi x)$ com número inteiro de ciclos.

Observe que o período no qual o sinal é observado - e que seus valores são amostrados - contém um número inteiro de frequências. Sua FFT é representada pelo gráfico abaixo:

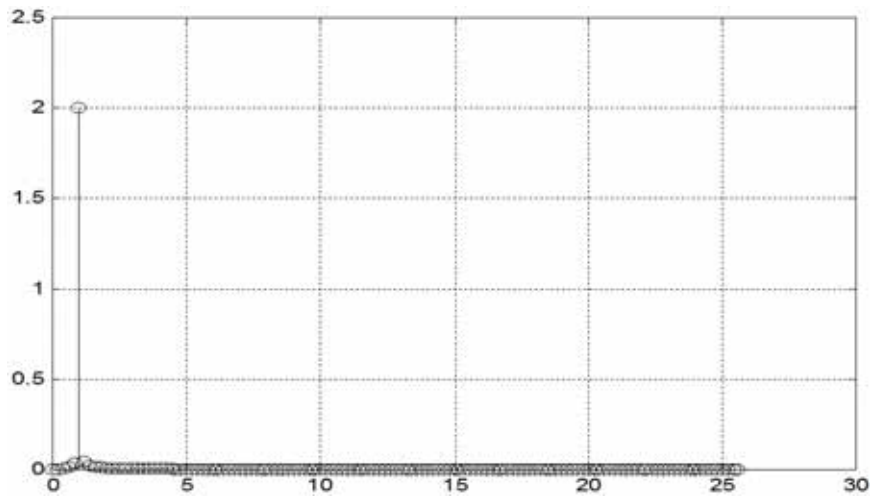


Figura 5.5: FFT da função senóide.

Considere, por sua vez, a mesma função senódica observado no gráfico (5.4), mas com um número não inteiro de ciclos dentro do período observado, e sua FFT, ambas exibidas pela figura (5.6) a seguir.

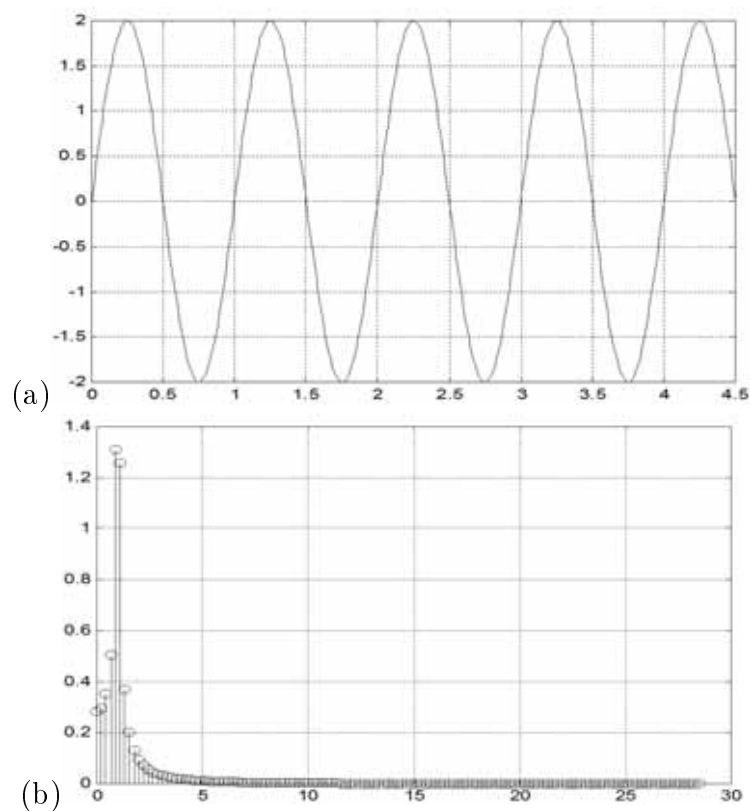


Figura 5.6: (a) função com um número não inteiro de ciclos. (b) FFT da função senóide.

Comparando as duas FFT, notamos que há um ruído na transformada rápida da função cujas amostras são colhidas em um período que contém um número não inteiro de ciclos. No entanto, se ambas são a mesma função, apenas com o período de observação diferente, então suas FFT deveriam ser iguais.

Note que a amplitude mais alta no gráfico (5.4) chega ao valor de 2 pontos, enquanto o efeito leakage faz com que a frequência mais alta exibida no gráfico (5.6), item **(b)**, chega próximo à 1,4 pontos. Essa redução é ocasionada devido a distribuição indevida de energia da raia com maior amplitude às raias adjacentes, que passam de quase nulas no primeiro gráfico para valores consideravelmente altos, como demonstrados anteriormente.

Esse é o efeito de leakage, que é evidenciado pela utilização de um filtro inadequado para o sinal, no caso, a função degrau (2.5). Entretanto, muitas vezes a escolha do período de observação do sinal é uma condição experimental imposta devido aos mais diversos fatores, e o surgimento do leakage se torna inevitável.

Podemos, contudo, minimizar os efeitos de leakage escolhendo um janelamento mais adequado. A seguir, mostraremos a função que define a janela Hanning.

Definição 5.4.1 (Função Hanning). Considere uma amostra com tamanho N . Para essa amostra, a função Hanning é dada por:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) \right), & n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.59)$$

O gráfico da função Hanning está representado na figura a seguir:

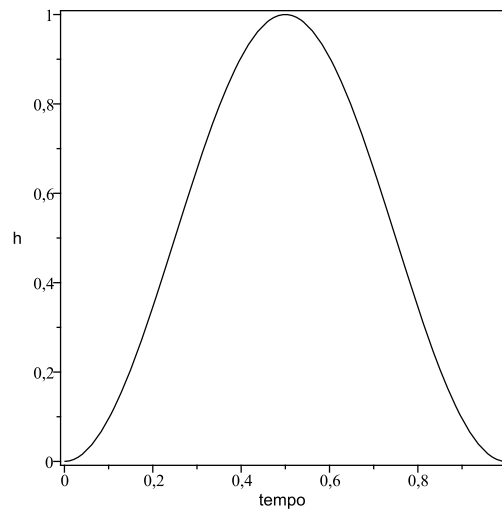


Figura 5.7: gráfico da função Hanning.

Ao aplicarmos a janela Hanning na função exibida pelo gráfico (5.6), item **(a)**, com um número não inteiro de ciclos, obtemos uma nova FFT com redução considerável nos efeitos de leakage. É possível observar, inclusive, que a maior amplitude se aproxima à 1,8.

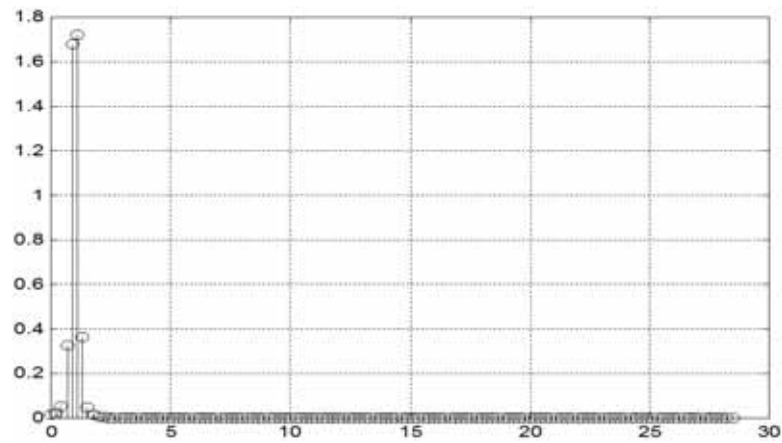


Figura 5.8: FFT da função $y = 2 \text{sen}(2\pi x)$ aplicada à função Hanning.

A metodologia de aplicação da janela Hanning é bem simples e embasada pelo uso do teorema (3.9.1), o Teorema da Convolução. Na verdade, é preciso entender que as reduções de leakage só ocorrem devido à convolução da FFT do sinal, com ruído, por um filtro adequado que os reduzem.

No entanto, o teorema (3.9.1) garante que essa convolução ocorre se multiplicarmos esse sinal (antes de transformá-lo) pela função inversa do filtro. Em particular, a função Hanning, assim como as funções degrau unitário e a triangular (2.7), são exemplos de transformadas inversas desses filtros. As figuras (2.1), item **(b)**, e (2.2), item **(b)**, ilustram as transformadas das funções degrau unitário e triangular, respectivamente.

A figura abaixo ilustra a transformada de Fourier da função Hanning, definida em (5.4).

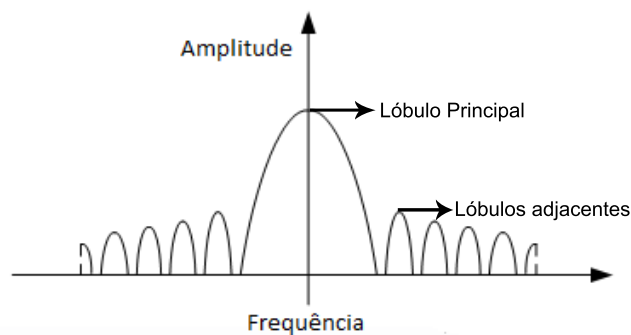


Figura 5.9: FFT da função Hanning.

Notamos que a transformada da janela Hanning apresenta os chamados lóbulo principal, bem maior em amplitude, e os lóbulos adjacentes. Note também, que as transformadas das funções triangular e degrau também possuem lóbulos. De fato, o que ocasiona o efeito leakage é a convolução do filtro pela transformada do sinal cujas raias do espectro se sobrepõem aos vales entre lóbulos, isso faz com que os valores das amplitudes das raias espectrais sejam distribuídas às raias adjacentes.

O filtro ideal é aquele que tenta ajustar cada raia espectral ao centro de cada lóbulo, deixando, por sua vez, a maior raia no centro do lóbulo principal. Outro fato é que, quando há um número inteiro de ciclos dentro do período de observação, geralmente a situação do filtro ideal ocorre com maior facilidade se aplicado à função degrau unitário.

No caso do período de observação não conter um número inteiro de ciclos, precisamos encontrar um filtro adequado a cada espectro do sinal. Não existe uma regra específica para isso, é uma questão pontual que requer sensibilização de quem estuda o sinal, e tão pouco haverá um filtro ideal. É necessário estudar otimizações para a aplicação de filtros e, assim, o efeito de leakage será reduzido, mas ele é inevitável e sempre estará presente nesses casos.

Os espectros gerados para as aplicações do próximo capítulo possuem o janelamento Hanning em seu processamento, isso ajuda a identificar com erro menor as frequências com maior amplitude, tornando mais exato o cálculo de algumas variáveis e facilitando sua leitura e interpretação.

6 Aplicações em Mecânica Celeste

Neste capítulo, analisaremos as aplicações dos métodos desenvolvidos para a Transformada de Fourier e que foram estudadas nos capítulos 4 e 5.

Essencialmente, apresentaremos um problema clássico em Mecânica Celeste não com o intuito de enfatizar seu desenvolvimento teórico em si, mas com a finalidade de usar a Transformada de Fourier como ferramenta para sua resolução numérica, uma vez que as soluções analíticas nem sempre são conhecidas.

6.1 Movimento Rotacional - Momento de Quadripolo Permanente

Nosso objetivo é calcular o movimento rotacional de um planeta sob torque externo, exercido pelo momento de quadripolo permanente, devido à existência de uma estrela distante.

Para discutirmos movimento rotacional, apresentaremos as Equações de Euler que descrevem a rotação de um corpo rígido em um sistema de referência com eixos fixo à ele e paralelos aos seus eixos de inércia.

Considere um planeta permanentemente deformado, com um sistema referencial de coordenadas (x, y, z) cujo ponto O de origem é interno à ele, e cujos eixos desse sistema são paralelos aos eixos de inércia do planeta. Considere também, um vetor de rotação com origem em O. Escrevemos as Equações de Euler, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\dot{\omega}_x - (\mathcal{B} - \mathcal{C})\omega_y\omega_z &= N_x, \\ \mathcal{B}\dot{\omega}_y - (\mathcal{C} - \mathcal{A})\omega_z\omega_x &= N_y, \\ \mathcal{C}\dot{\omega}_z - (\mathcal{A} - \mathcal{B})\omega_x\omega_y &= N_z, \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde \mathcal{A}, \mathcal{B} e \mathcal{C} são os momentos de inércia com relação aos eixos x, y e z , respectivamente, e ω_x, ω_y e ω_z são as projeções do vetor de rotação em cada um dos eixos de coordenada.

Apresentamos também, as equações para as componentes do torque externo \vec{N} , segundo os eixos de coordenadas:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{3\mathcal{G}(C - \mathcal{B})yz}{r^5}, \\ N_y &= \frac{3\mathcal{G}(\mathcal{A} - C)zx}{r^5}, \\ N_z &= \frac{3\mathcal{G}(\mathcal{B} - \mathcal{A})xy}{r^5}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde \mathcal{G} é a constante de gravitação universal.

No entanto, nosso problema é um pouco mais simples do que sugere as equações em (6.1) e (6.2). Enquanto as Equações de Euler se referem a um vetor de rotação arbitrário e de origem em O , nós suporemos um vetor de rotação normal ao plano orbital e com a mesma origem no ponto O .

Isso implica que as projeções do vetor de rotação em dois dos eixos de coordenadas serão aproximadamente nulos, uma vez que o sistema de referência possui um de seus planos, digamos o formado pelos eixos x e y , coincidentes ao plano orbital do planeta. Na prática, podemos desprezar os componentes ω_x e ω_y , reduzindo as equações (6.1) e (6.2) em:

$$C\dot{\omega}_z = \frac{3\mathcal{G}(\mathcal{B} - \mathcal{A})xy}{r^5}. \quad (6.3)$$

Na figura a seguir, representamos graficamente a rotação de um planeta com massa m_p e o eixo de rotação normal ao plano orbital:

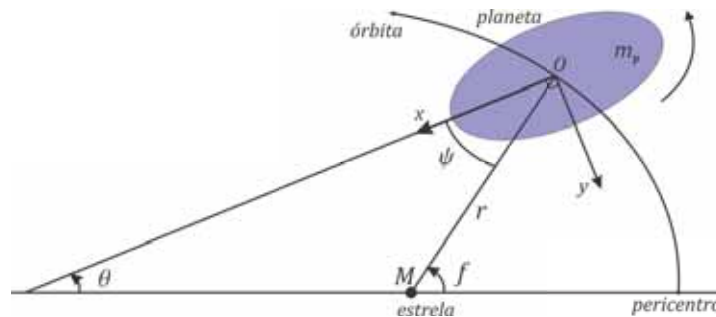


Figura 6.1: Movimento rotacional planetário sob torque externo (RIBEIRO, 2012).

Vemos ψ como o ângulo entre a linha estrela-planeta, r , e o eixo principal \mathcal{A} associado com o mínimo momento de inércia do planeta. O ângulo θ é medido com respeito a uma direção fixa no espaço.

Definindo $\omega_z = \dot{\theta}$, e tomarmos os cossenos diretores com respeito aos eixos x e y , dados por $\frac{x}{r} = \cos \psi$ e $\frac{y}{r} = \sin \psi$, respectivamente, onde $\psi = f - \theta$ (Fig. (6.1)), poderemos reescrever a equação (6.3) como:

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \right) \frac{\mathcal{G}M}{r^3} \sin 2\psi, \quad (6.4)$$

onde o ângulo θ é medido com respeito a uma direção fixa no espaço.

Dizemos que a equação (6.4), descreve o movimento rotacional de um planeta sob um eixo de rotação normal ao plano orbital deste, com relação a estrela que exerce um torque através do momento de quadripolo permanente.

6.2 Sistema Terra-Lua

Uma vez desenvolvida a equação generalizada do movimento rotacional planetário, aplicaremos (6.4) no Sistema Terra-Lua. Isso significa que adotaremos o planeta Terra no papel da estrela que exerce o torque no movimento rotacional da Lua que, por sua vez, assumirá o papel do planeta.

Portanto, para os efeitos de simulação numérica, usaremos os dados conhecidos do sistema:

| Dados | Terra | Lua |
|---|--------------------------------|---------------------------------|
| Massa | $3,003 \times 10^{-6} M_{Sol}$ | $1,23 \times 10^{-2} M_{Terra}$ |
| Semi-Eixo Maior (ua) | - | $2,57 \times 10^{-3}$ |
| Período Sideral Orbital (dias) | - | 27,32 |
| Excentricidade | - | $5,49 \times 10^{-2}$ |
| Movimento Médio n | - | $3,66 \times 10^{-2}$ |
| ω_0 | - | $6,66 \times 10^{-3}$ |
| $\frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{C}}$ | - | $2,80 \times 10^{-4}$ |

Tabela 6.1: Elementos Orbitais do Sistema Terra-Lua (MURRAY e DERMOTT, 1999).

A solução numérica da equação (6.4) fornecerá uma função que mostra o comportamento do ângulo θ através do tempo. Esse comportamento nos revelará muito sobre o movimento rotacional do satélite, sendo possível a determinação de algumas características do sistema.

Em particular, parte da metodologia consiste em identificar ressonâncias entre os corpos celestes observados, ver (CALLEGARI e YOKOYAMA, 2010; CALLEGARI e RODRIGUEZ, 2013; CALLEGARI e RIBEIRO, 2014), por exemplo. Para isso, procuramos grandes valores (picos) de amplitudes associadas a suas respectivas frequências angulares.

Mas para realizarmos tal análise, primeiramente é necessário complementarmos essa metodologia solucionando numericamente a equação (6.4), que envolverá o integrador RA15 desenvolvido em Everhart (1985). Então, no próximo passo, utilizaremos o algoritmo de Danielson-Lanczos para obtermos a FFT da variável angular ψ e, assim, identificarmos as possíveis ressonâncias orbitais no sistema estudado.

Apresentamos os resultados a seguir para o conjunto de dados observado na tabela (6.2), com as condições iniciais para $\theta_0 = 1^\circ$ e $\dot{\theta}_0 = n$, onde n é o movimento médio apresentado na tabela (6.2), aplicados na equação (6.4):

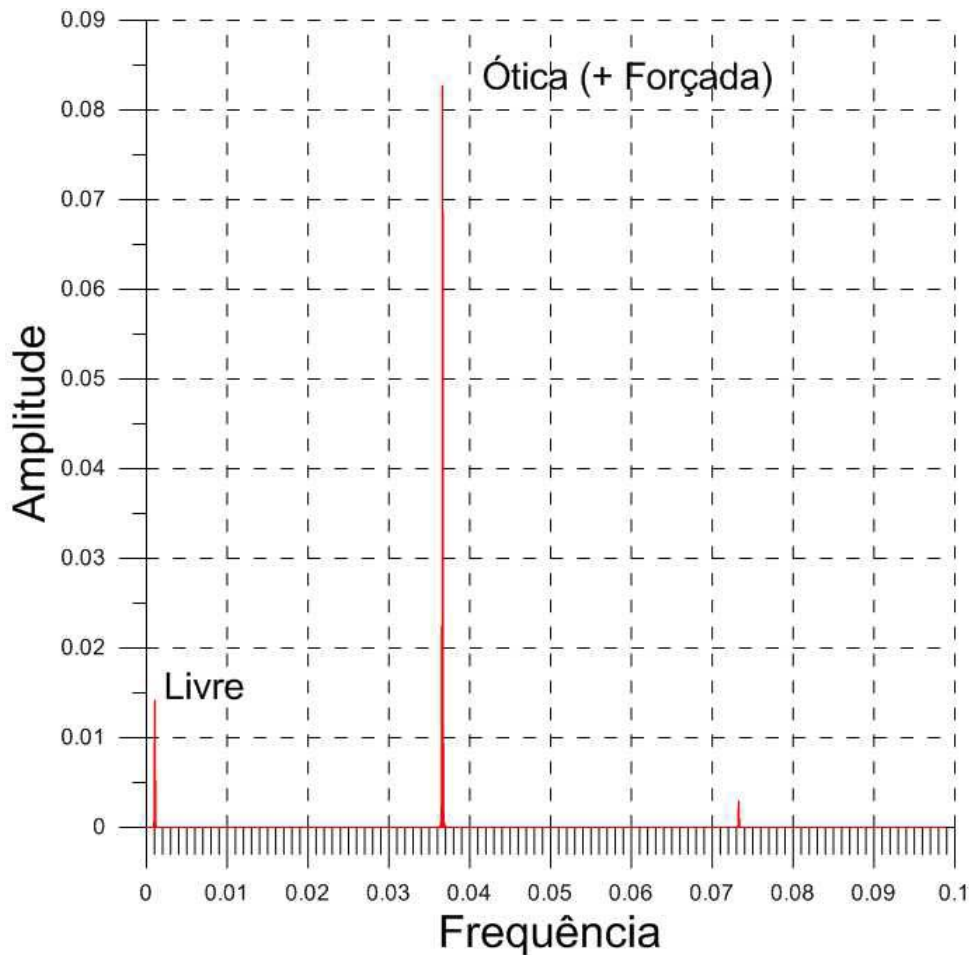


Figura 6.2: Espectro de ψ para $\theta_0 = 1^\circ$ e $\dot{\theta}_0 = n$.

Observe que ocorrem dois picos de amplitude significativos, o primeiro próximo à frequência 0,001 e o segundo na frequência 0,0366. Essas frequências são, respectivamente, chamadas de librações livres e ótica (incluindo a libração forçada).

Para entendermos melhor o movimento rotacional e orbital da Lua em relação à Terra, realizaremos uma leitura mais cuidadosa do gráfico exibido na figura (6.2).

Observe que a maior amplitude está associada a uma frequência próxima de $3,66 \times 10^{-2}$. No entanto, em nossos cálculos, sabemos que a frequência angular é definida pela expressão:

$$\omega = \frac{1}{T}, \quad (6.5)$$

onde T é o período do movimento medido em dias.

Portanto, sabendo que $\omega = 3,66 \times 10^{-2}$, temos que o período do movimento de rotação é $T = 27,32$ dias. Isso significa que a Lua leva aproximadamente 27 dias para dar uma volta completa sob seu eixo de rotação. De fato, como consideramos inicialmente $\dot{\theta}_0 = n$, temos que a velocidade de rotação é próxima da velocidade orbital média. Esse fenômeno ocorre com a Lua e é chamado de sincronismo "spin-orbit", ou ressonância "spin-orbit".

Basicamente, a libração ótica da Lua é um conjunto de oscilações em seus movimentos longitudinais, que faz com que ela não se apresente sempre na mesma posição entre uma lua cheia e outra, por exemplo.

Ainda, segundo a expressão (6.5), temos que a primeira amplitude observada, na magnitude aproximada de 1×10^{-3} , que revela um período perto de 1000 dias e, aproximadamente 2,86 anos, está relacionada à libração livre. Este fenômeno ocorre pois a Lua não é totalmente esférica, de forma que $\mathcal{B} - \mathcal{A} \neq 0$.

O período da libração livre é dado de forma aproximada pela expressão analítica:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_S} \sqrt{3 \left(\frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \right)}, \quad (6.6)$$

onde $T_S = 27,32$ é o movimento médio do satélite.

Portanto, temos que $\omega_0 = 0,0066656$, o que nos revela um período $T_0 = 942$ dias, aproximadamente. Isso explica a primeira frequência encontrada em torno de $\omega = 1 \times 10^{-3}$ que, pela expressão (6.5), também revela um período aproximado de 1000 dias.

Existe ainda um componente fundamental na variação angular de ψ , chamada de libração forçada, que ocorre devido a órbita não circular da Lua em torno da Terra e à sua forma não esférica. Seu período é igual a da libração ótica, porém, sua amplitude é muito menor que as demais amplitudes e está sobreposta à ótica.

Há casos, ainda, em que a análise do espectro se torna mais difícil, sobretudo nos corpos celestes que possuem uma dinâmica totalmente caótica em seu movimento. Hipérion, uma das luas de Saturno, possui uma dinâmica complexa que dificulta prever seu movimento de rotação, por exemplo. (WISDOM et al, 1984).

Os gráficos da figura, a seguir, mostram o espectro calculado para a rotação do satélite Hipérion:

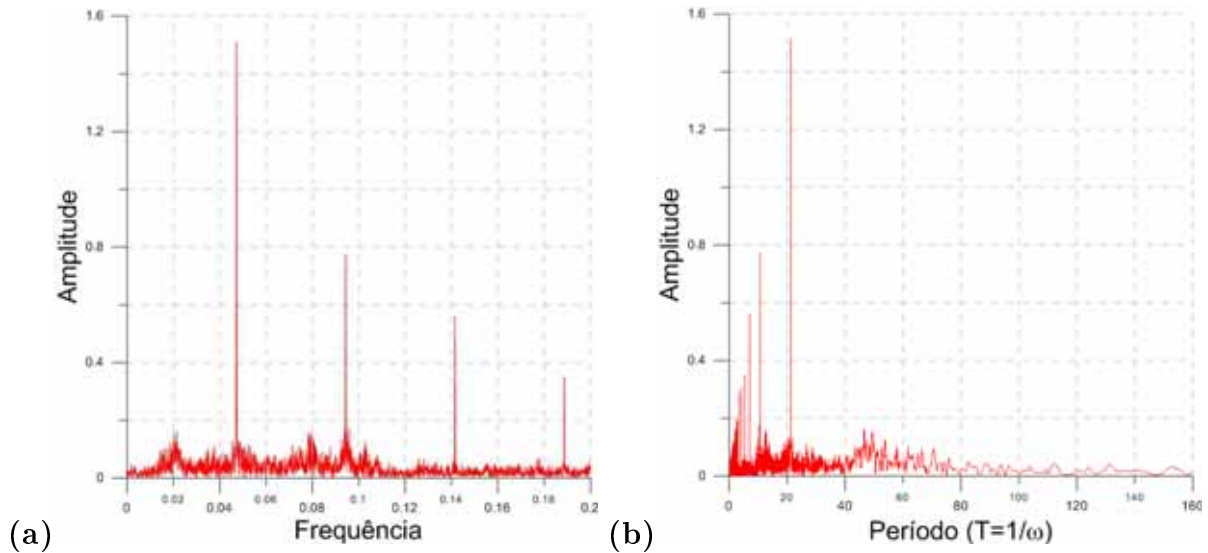


Figura 6.3: Espectro de ψ para o satélite Hipérion: (a) por frequência; (b) por período.

Para esta simulação, usamos os dados conhecidos do sistema Saturno-Hipérion, exibidos abaixo:

| Dados | Saturno | Hipérion |
|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| Massa | $2,858 \times 10^{-4} M_{Sol}$ | $1,34 \times 10^{-7} M_{Terra}$ |
| Semi-Eixo Maior (ua) | - | $9,87 \times 10^{-3}$ |
| Período Sideral Orbital (dias) | - | 21,27 |
| Excentricidade | - | $1,04 \times 10^{-1}$ |
| Movimento Médio n | - | $4,69 \times 10^{-2}$ |
| $\frac{B-A}{C}$ | - | $2,80 \times 10^{-2}$ |

Tabela 6.2: Elementos Orbitais do Sistema Saturno-Hipérion (MURRAY e DERMOTT, 1999).

Observe que o maior pico ocorre próxima da amplitude 1,6, associada à frequência $\omega = 4,69 \times 10^{-2}$. Conforme a equação (6.5), temos que o período orbital de Hipérion se aproxima de 21,27 dias, tal como também é indicado pela figura (6.3), no item (b), que possui seu maior pico associado ao período de mesmo valor.

No entanto, observe que o espectro de Hipérion, apresentado na figura (6.3), se difere bastante do espectro da Lua, apresentado na figura (6.2). Isso se deve ao fato de que Hipérion é bem menos esférica do que a Lua e, assim, o torque exercido por Saturno dificulta uma previsão exata do seu movimento rotacional, refletindo no cálculo as oscilações das raias espectrais.

Observamos, assim, que a análise espectral de corpos celestes podem revelar muito sobre sua natureza física através do estudo do seu movimento.

Lembramos também, como dissemos no final do capítulo anterior, que todos os espectros calculados neste capítulo possuem o filtro Hanning em seu processamento. A título de ilustração, portanto, considere a frequência livre ω_0 no espectro do sistema Terra-Lua. Mostraremos uma comparação entre os espectros com o janelamento Hanning e sem o filtro.

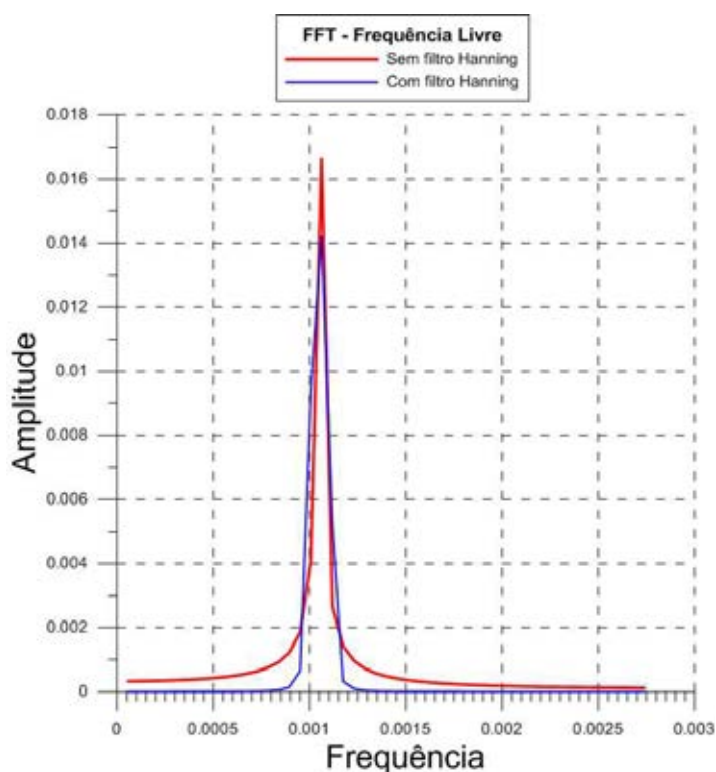


Figura 6.4: Espectro de ψ do sistema Terra-Lua.

Notamos que o espectro com o filtro Hanning possui uma precisão maior na determinação da frequência livre. Isso se deve ao controle do "vazamento" de energia no cálculo da FFT às raias espectrais adjacentes, tal como discutido no capítulo 5. No entanto, fica evidente que mesmo aplicando o filtro, o efeito de leakage existe e que a determinação exata da frequência com maior amplitude não é imediata.

7 Conclusão Final

De modo geral, o estudo de teorias matemáticas que parecem abstratas e com fim em si mesma, a priori, permite a quem as estudam elaborar estratégias de resolução inteligentes e diretamente focado na resolução de um problema delimitado, porém, promovendo o progresso e o conhecimento científico em várias áreas.

Nesse sentido, vemos que o estudo da Transformada de Fourier nos permite não só sua aplicação simples e direta nos estudos de Mecânica Celeste, mas também permite entender melhor o próprio problema proposto e quais os possíveis métodos de resolução dentro do seu próprio âmbito.

O estudo do movimento orbital de satélites, nesse trabalho, envolveu análises espectrais para a identificação de órbitas ora regulares, como a da Lua, ora caóticas, como o caso de Hipérion. Mas como construir espectros que sejam capazes de simular um sistema dinâmico de movimentos entre satélites e seus planetas? Além de conhecermos bem o problema proposto, necessitamos de ferramentas capazes de simulá-los numericamente. É nesse momento que encontramos na Transformada de Fourier uma aliada.

O primeiro passo, seria entender as definições básicas sobre a Transformada de Fourier. Entendê-la como a generalização das Séries de Fourier, por exemplo, nos ajudam a compreender que a Integral de Fourier também pode representar analiticamente uma outra função cuja expressão desconhecemos, embora nos sejam dados um conjunto de suas amostras, segundo algumas condições favoráveis. Assim, esse aspecto pode fornecer estratégias de recuperação de sinais a partir da simples observação em um certo período de tempo.

Destarte, torna-se essencial discutir suas propriedades analíticas até conseguirmos ferramentas para um passo importante: a Transformada de Fourier Discreta. Ao estudarmos uma versão discreta para a transformada, conheceremos também os possíveis problemas e vantagens de sua implementação computacional que, por sua vez, nos forçará a buscar novas metodologias para a construção de algoritmos eficientes, como vimos em Danielson-Lanczos e Cooley-Tukey.

Enfim, o estudo da Transformada de Fourier proporcionou não somente um conhecimento sobre ela e a *Fast Fourier Transform* (FFT), mas também um conhecimento mais aprofundado sobre as dinâmicas de movimentos dos satélites, em Mecânica Celeste. De certo modo, mesmo fora do escopo desse trabalho, esse estudo permitiu compreender a importância da transformada em outras áreas do conhecimento, com aplicações em problemas bem diferentes dos desenvolvidos aqui, mas que exigem como métodos de solução as mesmas ideias que foram empregadas nesse trabalho.

Referências

- [1] BARATA, J. C. A. Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier. In: _____. *Curso de Física-Matemática*. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2013. 1676-1767 p. Disponível em: <http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html>. Acesso em 13 de jul. de 2013.
- [2] BIEZUNER, R. J. Transformada de Fourier. In: _____. *Equações Diferenciais Parciais Lineares: Notas de Aulas*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2010. 139-151 p. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/edb.pdf>. Acesso em 13 de jul. de 2013.
- [3] BOYER, C. B., MERZBACK, U. *A History of Mathematics*. 3ª Edição. New Jersey, USA: John Wiley and Sons, Inc., 2010. 668 p.
- [4] BRIGHAM, E. O. *The Fast Fourier Transform*. New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., 1974. 230 p.
- [5] CALLEGARI, N., RIBEIRO, F. B. *The spin-orbit resonant problem including core-mantle gravitational coupling*. Rio Claro, São Paulo: Unesp, 2014.
- [6] CALLEGARI, N. RODRIGUEZ, A. *Dynamics of rotation of super-Earths*. Rio Claro, São Paulo: Springer Science and Business Media Dordrecht, 2013.
- [7] CALLEGARI, N. YOKOYAMA, T. Numerical exploration of resonant dynamics in the system of Saturnian major satellites. In: _____. *Planetary and Space Science*. Rio Claro, São Paulo: Elsevier, 2010. Vol 58, 1906-1921 p.
- [8] EVERHART, E. *An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings*. IAU Colloquium 185-200. Denver, USA: University of Denver, 1985.
- [9] FIGUEREDO, D. G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: IMPA-CNPq, 1977. 274 p.
- [10] HOFFMAN, K., KUNZE, R. *Linear Algebra*. 2ª Edição. New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., 1971. 407 p.

-
- [11] LANG, S. (1970). *Linear Algebra*. 3ª Edição. New Haven, USA: Springer, 2004. 296 p.
- [12] LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de Uma Variável*. 11º Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. Vol 1.
- [13] MURRAY, C., DERMOTT, S. F. *Solar System Dynamics*. New York, USA: Cambridge University Press, 1999.
- [14] PRESS, W. H., et al. *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*. New York, USA: Cambridge University Press, 1996. 973 p.
- [15] RIBEIRO, F. B. *Dinâmica de Rotação de Exoplanetas tipo Terrestre com Perturbação de Terceiro Corpo*. Rio Claro, São Paulo: Relatório Final FAPESP, 2012.
- [16] SPIEGEL, M. R. *Análise de Fourier*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1976. 259 p.
- [17] SUSSMAN, G. J., et al. *Structure and Interpretation of classical mechanics*. Massachusetts, USA: The Massachusetts Institute of Technology Press, 2001.
- [18] WISDOM, J., PEALE, S. J., MIGNARD, F. *The Chaotic Rotation of Hyperion*. Massachusetts, USA: The Massachusetts Institute of Technology Press, 1984. Disponível em: <web.mit.edu/wisdom/www/hyperion.pdf>. Acesso em 22 de julho de 2014.
- [19] WOLBERG, G. *Fast Fourier Transform: A Review*. Technical Report CUCS 388-88. New York, USA: Columbia University, 1988, 19 p. Disponível em: <<http://academiccommons.columbia.edu/catalog/ac:142808>>. Acesso em 1 de maio de 2013.

A Lema de Riemann-Lebesgue

Discutiremos o lema de Riemann-Lebesgue importante para mostrar que a transformada em (2.1.4) e em (2.1.5) é limitada.

Lema A.0.1 (Riemann-Lebesgue). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida e absolutamente integrável no intervalo $[a, b]$. Então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{cos}(tx) dx = 0. \quad (\text{A.2})$$

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que f seja limitada, portanto:

$$\exists M, M > 0, \text{ tal que } |f(x)| \leq M, \text{ para todo } x \in [a, b]. \quad (\text{A.3})$$

Como consequência imediata, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição π do intervalo $[a, b]$

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad (\text{A.4})$$

tal que:

$$S[f, \pi] - s[f, \pi] < \varepsilon, \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\begin{aligned}
S[f, \pi] &= \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \quad M_j = \sup\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}, \\
s[f, \pi] &= \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}), \quad m_j = \inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

são as somas superior e inferior, respectivamente, associadas à partição π .

Considere a partição do intervalo $[a, b]$ determinada pelos pontos $x_j = a + \frac{j}{n(b-a)}$, para $j = 0, 1, \dots, n$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx &= \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx. \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Agora, observe que:

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| = \left| \frac{-\cos(tx)}{t} \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \right| \leq \frac{2}{t}, \tag{A.8}$$

e que:

$$|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j, \text{ para } x_{j-1} \leq x \leq x_j. \tag{A.9}$$

Usando as estimativas (A.8) (A.9) em (A.7), obtemos:

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}). \tag{A.10}$$

Note que a expressão anterior é exatamente a diferença em (A.5). Portanto, dado $\varepsilon > 0$, tome n tal que essa diferença seja menor que $\varepsilon/2$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, temos:

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \varepsilon, \quad (\forall t)(t \geq t_0). \tag{A.11}$$

Provando, então, a igualdade (A.1). De modo análogo, podemos provar a igualdade

(A.2)

□

Corolário A.0.1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função absolutamente integrável em seu domínio. Então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-i2\pi tx} f(x) dx = 0. \quad (\text{A.12})$$

Demonstração. Não é difícil notar que podemos reescrever (A.0.1) como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b \cos(2\pi tx) f(x) dx - i \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b \sin(2\pi tx) f(x) dx. \quad (\text{A.13})$$

Que nos revela as mesmas condições do Lema de Riemann-Lebesgue.

□

B Algoritmo TFD e Inversa - Maple®

12

B.1 Transformada de Fourier Discreta

Para calcular a Transformada de Fourier Discreta - *Discrete Fourier Transform (DFT)*:

DFT(N,T) – Procedure

```
> DFT := proc (N, T)
```

```
local i, k, h, M, A, B, C, F;
```

```
global R, Q, listaR, listaQ, listaxi, listat;
```

```
M := N-1;
```

```
#Zerando "vetores"
```

```
for i from 0 to M do
```

```
R[i] := 0;
```

```
Q[i] := 0;
```

```
F[i] := 0;
```

```
W[i] := 0;
```

```
h[i] := 0;
```

```
end do;
```

```
#Obtendo amostras de f(x)
```

```
i := 0;
```

```
for i from 0 to M do
```

```
h[i] := evalf(f(T*i))
```

```
end do;
```

```

#Calculando a DFT para f(x)
i := 0; k := 0;

for i from 0 to M do

for k from 0 to M do
R[i] := evalf(R[i]+T*h[k]*cos(-2*Pi*i*k/N));
Q[i] := evalf(Q[i]+T*h[k]*sin(-2*Pi*i*k/N))
end do;

end do;

#Gerando Lista de Pontos para plotagem
listaxi := [seq(i, i = 0 .. M)];
listaR := [seq(R[i], i = 0 .. M)];
listaQ := [seq(Q[i], i = 0 .. M)];
listat := [seq(h[i], i = 0 .. M)];

A := plot(Vector(listaxi), Vector(listaR), style = point,
symbol = circle, color = red, axes = box, gridlines = true,
legend = "Parte Real");
B := plot(Vector(listaxi), Vector(listaQ), style = point,
symbol = circle, color = blue, axes = box, gridlines = true,
legend = "Parte Imaginária");

plots[display]({A, B})

end proc;

plot(Vector(listaxi), Vector(listat), style = point, symbol = circle,
color = brown, axes = box, gridlines = true,
legend = "Amostras de f(x)")

```

B.2 Inversa da Transformada de Fourier Discreta

Para calcular a Inversa da Transformada de Fourier Discreta - *Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT)*:

```
IDFT := proc (N, Dxi)
```



```
local i, k, r, q, g, H, L, M, a, b;

global listar, listaq, listax, listag;

M := N-1;

#Zerando*vetores"
for k from 0 to M do
r[k] := 0;
q[k] := 0;
g[k] := 0;
w[k] := 0;
H[k] := 0;
L[k] := 0;
end do;

#Obtendo amostras de F'(x)
k := 0;

for k to M do
H[k] := R[k];
L[k] := Q[k];
end do;

#Calculando a IDFT para f(x)
k := 0; i := 0;

for k from 0 to M do

for i from 0 to M do
r[k] := evalf(r[k]+Dxi*(H[i]-L[i])*cos(-2*Pi*i*k/N));
q[k] := evalf(q[k]+Dxi*(H[i]+L[i])*sin(-2*Pi*i*k/N));
end do;

g[k] := evalf(r[k]+q[k]);
end do;

#Gerando Lista de Pontos para plotagem
listax := [seq(k, k = 0 .. M)];
```

```
listar := [seq(r[k], k = 0 .. M)];
listaq := [seq(q[k], k = 0 .. M)];
listag := [seq(g[k], k = 0 .. M)];

a := plot(Vector(listax), Vector(listar), style = point,
          symbol = circle, color = red, axes = box, gridlines = true,
          legend = "Parte Real");
b := plot(Vector(listax), Vector(listaq), style = point,
          symbol = circle, color = blue, axes = box, gridlines = true,
          legend = "Parte Imaginária");

plots[display]({a, b})

end proc

plot(Vector(listax), Vector(listag), style = point, symbol = circle,
      color = gold, axes = box, gridlines = true,
      legend = "Transformada Inversa Discreta");
```

C Algoritmo Danielson-Lanczos - Fortran77

O algoritmo está dividido em duas partes:

- 1º - Há o programa principal que colhe as amostras, prepara os vetores de frequência e os demais parâmetros para a função "four1". Depois de calculada a FFT, reorganiza os vetores no arquivo saida.dat para serem exibidos;
- 2º - Subrotina "four1": calcula a FFT discreta pelo algoritmo de Danielson-Lanczos, utilizando *bit-reverse*. Algoritmo original extraído de [14].

Observe o código-fonte:

```
PROGRAM FFT
```

C -> Declarando e Preparando variáveis

```
INTEGER n , nn , dnn , i , j , isign  
REAL data (1600000) , ff (1600000) , gg (1600000) , a  
REAL*8 X , Y , NLINHAS , TT , DELTAT , T  
REAL*8 uu , fuu , pi
```

```
pi=4.0d0*datan (1.0 d0)
```

C -> Preparando arquivos para escrita

```
OPEN(1 , FILE='entrada . dat ' , STATUS='UNKNOWN' )  
OPEN(2 , FILE='saida . dat ' , STATUS='UNKNOWN' )
```

C -> Lendo dados inseridos na tela

```
WRITE(* , 1)
```

```

1      FORMAT(1X, 'Tempo de Integracao:', \)
c      WRITE(*,*) 'Tempo de Int.: '
      READ(*,*) TT

```

```

      WRITE(*,2)
2      FORMAT(1X, 'Espacamento da Malha:', \)
c      WRITE(*,*) 'Espacamento: '
      READ(*,*) deltat

```

C → Colhendo Amostras, gravando no Arquivo entrada.dat (tempo, amostra)

```

      DO uu=0.0d0, TT, deltat
      fuu=1.0d0*dcos(uu*3.0d0*pi)
      WRITE(1,*) uu, fuu

```

```

      ENDDO

```

C → Verificando o número de linhas no arquivo entrada.dat

```

      Nlinhas=1.0d0+TT/deltat

```

```

3      CONTINUE

```

```

      x=dlog10(Nlinhas)/(dlog10(2.0D0))
      y=dnint(x)

```

```

      IF (dmod(x,y).eq.0.0d0) THEN
      GOTO 4
      ELSE
      Nlinhas=Nlinhas-1.0D0
      ENDIF

```

```

      GOTO 3

```

C→ Reajustando as amostras colhidas ao vetor complexo
data(i)= p.real da amostra, e data(i+1)= 0 (imaginário da amostra)

```

4      CONTINUE

```

```

      WRITE(*,*) 'x, Nlinhas, T(Nlinhas)=', x, Nlinhas, (Nlinhas-1.0d0) * del

```

```

PAUSE

nn=idint(Nlinhas)
dnn=2*nn

rewind(1)
i=1
n=0

DO WHILE (n.le.nn-1)

READ(1,*)t,a

data(i)=a
data(i+1)=0.0d0

IF(n.eq.0) gg(n+1)=0.0d0
IF(n.ge.1. and. n.le.nn/2-1) gg(n+1)=n/(nn*deltat)
IF(n.eq.nn/2) gg(n+1)=1.0d0/(2.0d0*deltat)
IF(n.ge.nn/2+1. and. n.le.nn-1) THEN
ff(n+1)=-gg(n-1-2*j)
j=j+1
ENDIF

n=n+1
i=i+2
ENDDO

```

C -> CÁLCULO DA FFT

```

isign=1
CALL FOUR1(data,nn,isign)

n=0
i=1

DO WHILE(n.le.nn-1)

```

```

tf=2.0d0*((data(i)**2+data(i+1)**2)**0.5d0)/nn

IF(n.eq.0) WRITE(2,*) gg(n+1),tf/2.0d0

IF(n.ge.1.and.n.le.nn/2-1) WRITE(2,*)1.0d0/gg(n+1),tf

IF(n.eq.nn/2) write(2,*) 1.0d0/gg(n+1),tf

n=n+1
i=i+2

ENDDO

END

```

C ->

```

SUBROUTINE four1(data,nn, isign)

INTEGER isign,nn
REAL data(2*nn)
INTEGER i, istep, j, m, mmax, n
REAL tempi, tempr
DOUBLE PRECISION theta, wi, wpi, wpr, wr, wtemp

n=2*nn
j=1

```

C -> Ordenação Bit-Reverso

```

DO 11 i=1,n,2

IF(j.gt.i) THEN
tempr=data(j)
tempi=data(j+1)
data(j)=data(i)
data(j+1)=data(i+1)
data(i)=tempr
data(i+1)=tempi
ENDIF

```

```
m=n/2
```

```
1      IF ((m.ge.2).and.(j.gt.m)) THEN
      j=j-m
      m=m/2
      GOTO 1
      ENDIF
```

```
      j=j+m
```

```
11     CONTINUE
```

C -> Execução do Método Danielson-Lanczos, com loop de $\text{Log}_2(\text{nn})$ vezes

```
mmax=2
```

```
2      IF (n.gt.mmax) THEN

      istep=2*mmax
      theta=6.28318530717959d0/(isign*mmax)
      wpr=-2.d0*sin(0.5d0*theta)**2
      wpi=sin(theta)
      wr=1.d0
      wi=0.d0
```

```
      DO 13 m=1,mmax,2
```

C -> Fórmula de Danileson-Lanczos

```
      DO 12 i=m,n,istep
```

```
      j=i+mmax
      tempr=sngl(wr)*data(j)-sngl(wi)*data(j+1)
      tempi=sngl(wr)*data(j+1)+sngl(wi)*data(j)
      data(j)=data(i)-tempr
      data(j+1)=data(i+1)-tempi
      data(i)=data(i)+tempr
      data(i+1)=data(i+1)+tempi
```

12 CONTINUE

C-> Recorrência trigonométrica

```
wtemp=wr  
wr=wr*wpr-wi*wpi+wr  
wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi
```

13 CONTINUE

```
mmax=istep  
GOTO 2
```

```
ENDIF
```

```
RETURN
```

```
END
```


D Algoritmo Danielson-Lanczos - Maple[®] 12

Algoritmo também dividido em duas partes, adaptado do código-fonte em Fortran77. Na primeira **procedure** (FFTT), há os preparativos para a chamada da segunda **procedure** (four1) e a reorganização para exibir os cálculos através do gráfico. A *procedure* *four1* é a exata adaptação da subrotina homônima do código-fonte em Fortran77.

Observe o código-fonte:

D.1 Procedure *FFTT*

```
FFTT := proc (T, deltaT, sign)
local z, p, c, isinal, listax, listaG, DT, M, dataf, dataG, abssG,
      gg, tf, i;

p := T;
c := 0;
DT := deltaT;
isinal := sign;

for z from 0 by DT to p do
dataf[c] := 0;
dataf[c+1] := 0;
c := c+2
end do;

c := 0;
for z from 0 by DT to p do
dataf[c] := evalf(f(z));
```

```

dataf[c+1] := 0;
c := c+2
end do;

M := (1/2)*c-1;

lprint("nn:", M, "cont:", c-2);

four1(dataf, M, isinal);

c := 0;
for z from 0 to M do
gg[z] := 0
end do;

for z from 0 while c <= M-1 do

if c = 0 then gg[c+1] = 0 end if;

if 1 <= c and c <= (1/2)*M-1 then gg[c+1] := evalf(c/(M*DT)) end if;

if c = (1/2)*M then gg[c+1] := evalf((1/2)/DT) end if;

c := c+1;

end do;

c := 0; i := 1;

for z from 0 while c <= M-1 do

tf := 2*sqrt(data[i]^2+data[i+1]^2)/M;

if c = 0 then abssG[c] := gg[c+1]; dataG[c] := (1/2)*tf end if;

if 1 <= c and c <= (1/2)*M-1 then abssG[c] := 1/gg[c+1];
                                dataG[c] := tf end if;

if c = (1/2)*M then abssG[c] := 1/gg[c+1]; dataG[c] := tf end if;

```

```

c := c+1; i := i+2;

end do;

listax := [seq(abssG[z], z = 0 .. (1/2)*M-1)];
listaG := [seq(dataG[z], z = 0 .. (1/2)*M-1)];
lprint("g", listax); lprint("DATAG", listaG);

c := 0;

plot(Vector(listax), Vector(listaG), style = point, symbol = circle,
      color = red, axes = normal, gridlines = true)

end proc

```

D.2 Procedure *four1*

```

four1 := proc (dat, nn, isig)

local i, k, j, m, n, istep, mmax, tempi, tempr, thete, wr, wi, wpi, wpr,

global data;

n := 2*nn;
j := 1;
k := 0;
isign := isig;

for k from 0 to n do
data[k] := dat[k]
end do;

for i by 2 to n do

if i < j then
tempr := data[j];
tempi := data[j+1];
data[j] := data[i];
data[j+1] := data[i+1];
data[i] := tempr;
data[i+1] := tempi

```

```
end if;

m := (1/2)*n;

for k from 0 while 2 <= m and m < j do
j := j-m;
m := (1/2)*m
end do;

j := j+m

end do;

mmax := 2;

for k from 0 while mmax < n do
istep := 2*mmax;
thete := 6.28318530717959/((isign*mmax));
wpr := -2*sin(.5*thete)^2;
wpi := sin(thete);
wr := 1;
wi := 0;

for m by 2 to mmax do
for i from m by istep to n do
j := i+mmax;
tempr := wr*data[j]-wi*data[j+1];
tempi := wr*data[j+1]-wi*data[j];
data[j] := data[i]-tempr;
data[j+1] := data[i+1]-tempi;
data[i] := data[i]+tempr;
data[i+1] := data[i+1]+tempi;
end do;

wtemp := wr;
wr := wr*wpr-wi*wpi+wr;
wi := wi*wpr+wtemp*wpi+wi;
end do;

mmax := istep
```

end do

end proc