

SOBRE O USO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

ABOUT USING COMPUTER ALGEBRAIC SYSTEMS IN STRUCTURAL MECHANICS ANALYSIS

Antonio C. Rigitano, Paulo S. S. Bastos e Luttgardes de Oliveira Neto
Departamento de Engenharia Civil, FE – UNESP, CEP 17033-360, Bauru/SP, Brasil,
E-mails: rigitano@feb.unesp.br, pbastos@feb.unesp.br, lutt@feb.unesp.br

RESUMO

O presente texto tem como objetivo mostrar o uso de Sistemas de Computação Algébrica (CAS) na solução de problemas de mecânica das estruturas. Em tempos atuais tornou-se viável transferir operações matemáticas trabalhosas e desestimulantes para esses aplicativos, o que permite dedicar maior tempo à compreensão dos aspectos físicos dos problemas de engenharia. Para explorar esse potencial, expõe-se a dedução de expressões analíticas de linhas de influência para o caso de vigas contínuas sob quatro apoios pelo Método das Forças com manipulações algébrica realizadas no aplicativo Mathematica, chamando-se a atenção para a possibilidade do uso do sistema gratuito wsMaxima. As funções resposta obtidas são polinomiais, redação bastante simples e alternativa ao tratamento por outras vias. As expressões podem ser empregadas na obtenção de valores extremos exatos e elaboração de programas de visualização gráfica, procedimento introduzido em tópicos de disciplinas oferecidas pela Faculdade de Engenharia de Bauru. Ao final do trabalho é apresentado um exemplo com o propósito de divulgar o método.

Palavras-chave: Mecânica das estruturas. Sistemas de computação algébrica. Linhas de influência

ABSTRACT

This text aims to show the use of Computer Algebra Systems (CAS) in Structural Mechanics. Nowadays it becomes feasible transfer mathematical laborious and discouraging operations for this kind of software, which allows devoting more time to understand physical aspects of engineering problems. To exploit this potential, we expose the deduction of analytical expressions of influence lines for continuous beams under four supports using Force Methods with algebraic manipulations performed in Mathematica, draw the attention to the possibility of use of free system wsMaxima. The response functions obtained are polynomials, an alternative way of structural analysis instead of matrix methods. These functions can be helpful to obtain numerical values and graphical display, motivating procedure introduced in topics of lectures offered by the Faculty of Engineering of Bauru. At the end it is shown a case study in order to disclose the method.

Key-words: Structural mechanic, Computer algebraic systems, Influence lines

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo mostrar uma prática introduzida em disciplinas oferecidas pelo Departamento de Engenharia Civil da FEB-Unesp sob responsabilidade dos autores, visando resolver problemas de mecânica das estruturas com o uso de Sistemas de Computação Algébrica (CAS).

Com esse propósito, descreve-se um estudo de caso de traçado de linhas de influência em abordagem analítica diferente da encontrada na literatura técnica, que geralmente resolve o problema pela análise matricial de estruturas.

Trata-se de aplicação de método exposto em Rigitano et al. (2008) para vigas isostáticas e vigas hiperestáticas sob três apoios, estendido ao caso de vigas contínuas de inércia constante sobre quatro

apoios, conforme mostra o esquema estático da Figura 1, na qual a coordenada z estabelece a posição de uma ação unitária concentrada.

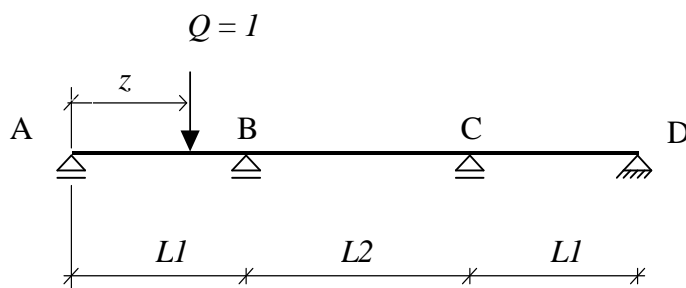


Figura 1 – Viga contínua sob quatro apoios.

A ideia de trabalhar com linhas de influência na maneira exposta originou-se no texto publicado por Anger (1949), podendo-se dizer clássico para os antigos calculistas, autor que resolveu alguns sistemas estruturais mais comuns de vigas de pontes de modo bastante prático.

Muito utilizado na época, o livro ainda é citado como referência em Pfeil (1983), cuja abrangência pode ser aperfeiçoada com o método proposto e servir de modelo para obter maior variedade de opções de comprimentos dos tramos.

Acrescente-se que as expressões polinomiais obtidas são bastante simples de se trabalhar para gerar a visualização dos resultados.

Para resolver o problema utiliza-se o Método das Forças com operações algébricas remetidas ao sistema Mathematica, que trabalha com linguagem simbólica, observando-se que tais manipulações podem ser também realizadas no wsMaxima, cuja vantagem é se tratar de software livre que pode ser obtido no endereço <http://wxmaxima.sourceforge.net>.

São mostrados os resultados obtidos das funções linhas de influência dos momentos fletores e esforços cortantes, num roteiro que pode ser estendido a outros tipos estruturais.

2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA PELO MÉTODO DAS FORÇAS

Considerando-se que a estrutura em questão é duas vezes hiperestática, a opção em resolvê-la pelo Método das Forças leva, conforme Süsskind (1977), Soriano e Lima (2006) e inúmeros outros autores, às conhecidas equações de compatibilidade de deslocamento assim redigidas:

$$\begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

A solução do sistema de Equações (1) é dada por:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

observando-se que essa expressão contém o vetor de incógnitas hiperestáticas $\{X\}$, a matriz de flexibilidade $[\delta]$ e o vetor $\{\delta_0\}$ que carrega as informações da ação externa, no caso uma ação unitária ou seja $Q = 1$.

Conforme bibliografia corrente do Método das Forças, é prático adotar como incógnitas hiperestáticas X_1 e X_2 os momentos nos apoios internos MB e MC , resolvendo em seguida a Equação (2) em caráter numérico.

A proposta que se faz consiste em escrever o vetor $\{\delta_0\}$ em função da posição z da ação (Figura 1), o que permite, ao invés de se obterem os valores numéricos tradicionais, gerar as expressões analíticas das linhas de influência.

Em resumo, o problema matemático que se apresenta é obter a solução analítica da equação:

$$\begin{Bmatrix} LI (MB) \\ LI (MC) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Considerando que as operações matemáticas para resolver a Equação (3) são bastante trabalhosas se forem realizadas a mão, toda manipulação algébrica é remetida para um sistema computacional, objeto do item que segue.

Com o resultado obtido, é possível dar sequência à análise para se obterem expressões analíticas das linhas dos demais esforços solicitantes de interesse.

2.1 Geração das fórmulas das linhas de influência no Mathematica

Para obter o conjunto dos deslocamentos δ_{ij} da Equação (3), é prático considerar a convenção da Figura 2, que mostra um trecho genérico de comprimento L da viga com momentos nas extremidades e variação linear, providência que facilita as operações de integração do produto das funções pertinentes em Sistemas de Computação Algébrica e evita o uso de tabelas similares às de Kurt-Beyer.

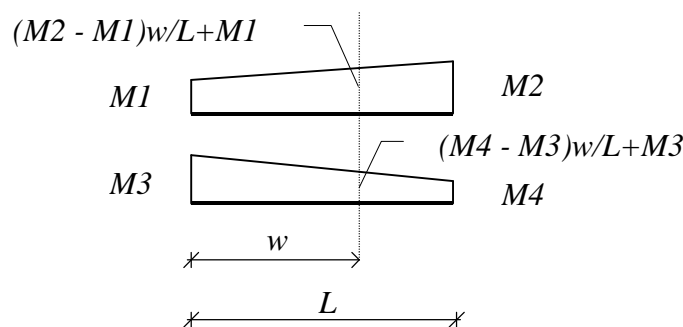


Figura 2 – Esquema para integração do produto de duas funções lineares.

Escolhendo as incógnitas hiperestáticas $LI (MB)$ e $LI (MC)$ na Equação (3), a aplicação do processo dos esforços leva aos diagramas de estado que se encontram na Figura 3, observando-se que, em razão do percurso da ação unitária, o usualmente denominado “Problema 0” deverá ser dividido nos intervalos $AB - BC - CD$, o que significa que para cada trecho resultarão diferentes funções de influência.

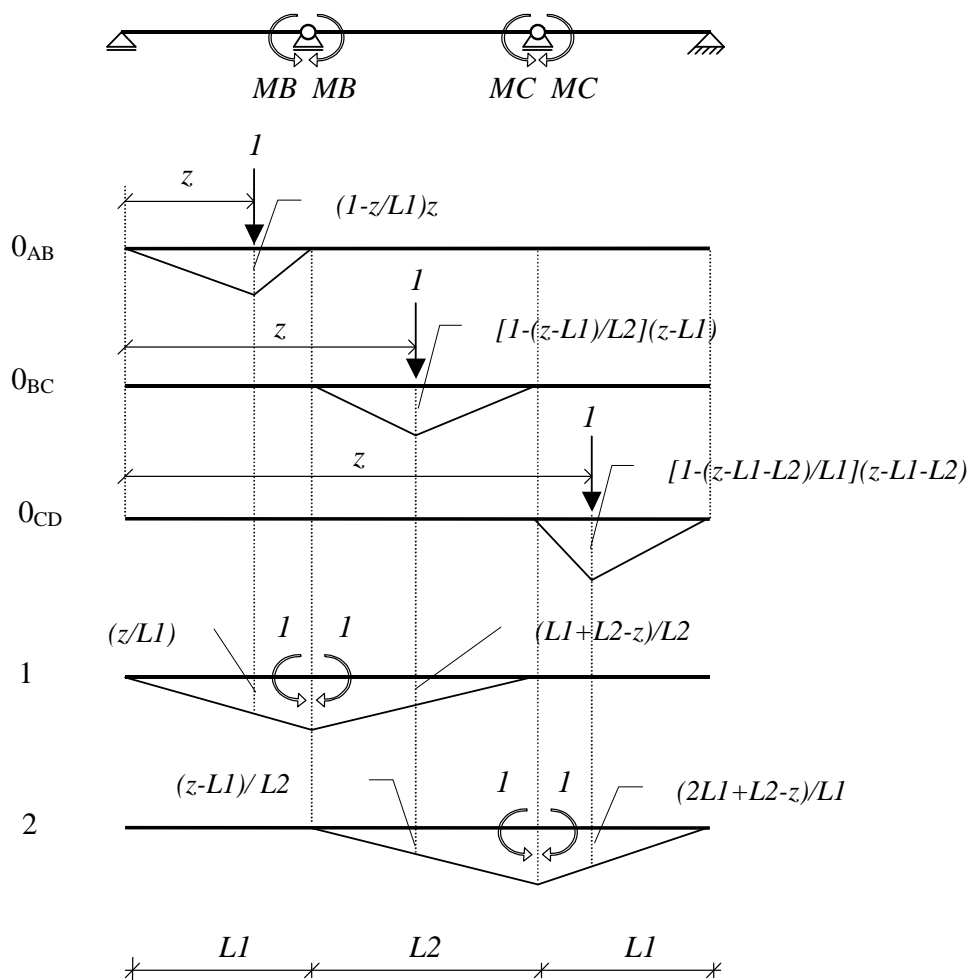


Figura 3 – Sistema principal para cálculo dos momentos MB e MC .

Após essa organização, as operações podem ser remetidas ao programa Mathematica, cujos comandos autoexplicativos que seguem são encontrados em Wolfram (2003), considerando w uma nova variável porque z já foi empregada para posicionar a ação unitária.

Assim, tem-se que os δ_{ij} serão obtidos com:

$$L = \quad M1 = \quad M2 = \quad M3 = \quad M4 =$$

$$FullSimplify \left[\int_0^L \left(\frac{M2 - M1}{L} w + M1 \right) \left(\frac{M4 - M3}{L} + M3 \right) dw \right] \quad (4)$$

De posse dos momentos fletores nos extremos das diversas subdivisões mostradas na Figura 3 e do comando da Expressão (4), resultam os seguintes deslocamentos:

$$\delta_{11} = (L1 + L2) / 3 \quad \delta_{12} = L2 / 6 \quad \delta_{22} = (L1 + L2) / 3 \quad (5)$$

e quando a ação percorrer o tramo AB tem-se que:

$$\delta_{10} = (L1 - z)z(L1 + z) / 6L1 \qquad \delta_{20} = 0 \qquad (6)$$

Na sequência, para obter as linhas de influência dos momentos basta resolver a Equação (3) com os deslocamentos das Expressões (5) e (6), o que é feito no Mathematica através do comando que segue, com uma instrução para reunir os termos comuns e simplificar a resposta:

$$FullSimplify \left[\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{pmatrix} \right] \qquad (7)$$

Assim, para a ação unitária percorrendo o primeiro vão ($0 \leq z \leq L1$), as funções linhas de influência que se obtém da Equação (7) são dadas por:

$$\begin{aligned} LIMB &= -\frac{2(L1 + L2)(L1 - z)z(L1 + z)}{L1(2L1 + L2)(2L1 + 3L2)} \\ LIMC &= \frac{L2(L1 - z)z(L1 + z)}{L1(2L1 + L2)(2L1 + 3L2)} \end{aligned} \qquad (8)$$

Como se observa, trata-se de polinômios, funções bastante fáceis de trabalhar e programar em qualquer que seja a linguagem computacional adotada.

Repetindo-se o procedimento, para o percurso da ação unitária no intervalo ($L1 \leq z \leq L1 + L2$) tem-se que:

$$\begin{aligned} LIMB &= \frac{(2L1^2 + L1(7L2 - 2z) + 3L2(L2 - z))(L1 - z)(L1 + L2 - z)}{L2(2L1 + L2)(2L1 + 3L2)} \\ LIMC &= -\frac{(L1 - z)(L1 + L2 - z)(2L1^2 + L1(L2 - 2z) - 3L2z)}{L2(2L1 + L2)(2L1 + 3L2)} \end{aligned} \qquad (9)$$

e finalmente para o percurso no terceiro tramo, ou seja ($L1 + L2 \leq z \leq 2L1 + L2$), obtêm-se:

$$\begin{aligned} LIMB &= -\frac{L2(L1 + L2 - z)(2L1 + L2 - z)(3L1 + L2 - z)}{L1(2L1 + L2)(2L1 + 3L2)} \\ LIMC &= \frac{2(L1 + L2)(L1 + L2 - z)(2L1 + L2 - z)(3L1 + L2 - z)}{L1(2L1 + L2)(2L1 + 3L2)} \end{aligned} \qquad (10)$$

À vista do caráter analítico, essas expressões podem ser trabalhadas para obter as ordenadas onde se situam os extremos, bastando derivá-las e igualá-las a zero, o que é resolvido com novas instruções dadas por:

$$\begin{aligned} &D[\text{Escrever aqui a expressão da Linha de Influência, } z] \\ &Derivada = FullSimplify[\%] \\ &FullSimplify[Solve[Derivada = 0, z]] \end{aligned} \qquad (11)$$

Considerando os intervalos $(0 \leq z \leq L_1)$, $(L_1 \leq z \leq L_1 + L_2)$ e $(L_1 + L_2 \leq z \leq 2L_1 + L_2)$ e os comandos das Expressões (11), os extremos estão localizados, respectivamente, nas coordenadas:

$$z \rightarrow \frac{L_1}{\sqrt{3}}$$

$$z \rightarrow \frac{3(2L_1 + L_2)(L_1 + 2L_2) - \sqrt{3}\sqrt{L_2^2(4L_1^2 + 6L_1L_2 + 3L_2^2)}}{6L_1 + 9L_2} \quad (12)$$

$$z \rightarrow 1.42265L_1 + L_2$$

Para obter as demais linhas de influência dos momentos fletores e dos esforços cortantes, basta considerar a superposição mostrada na Figura 4, que representa o percurso da ação unitária no $0 \leq z \leq L_1$ e seção transversal S localizada na coordenada x do intervalo $0 < x \leq L_1$.

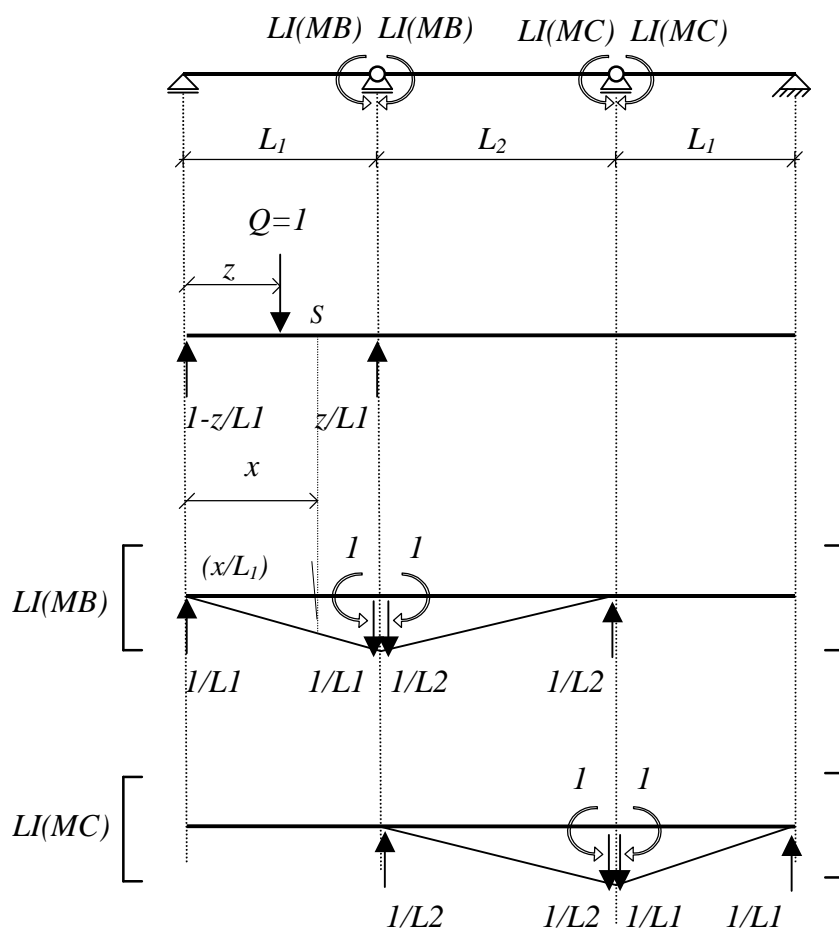


Figura 4 – Superposição de efeitos para obtenção das demais linhas de influência.

Assim, para a linha de influência do momento quando $z \leq x$ tem-se que:

$$LI(M) = \left(1 - \frac{z}{L1}\right)x - (x - z) + \frac{LI(MB)}{L1}x \quad (13)$$

Substituindo $LI(MB)$ e simplificando obtém-se:

$$LI(M) = z - \frac{xz}{L1} - \frac{2(L1+L2)x(L1-z)z(L1+z)}{L1^2(2L1+L2)(2L1+3L2)} \quad (14)$$

Por equilíbrio ou pela derivada da Equação (13), resulta na linha de influência do cortante, ou seja:

$$LI(V) = \left(1 - \frac{z}{L1}\right) + \frac{LI(MB)}{L1} - 1 \quad (15)$$

ou simplificando a expressão com a substituição da $LI(MB)$:

$$LI(V) = -\frac{z}{L1} - \frac{2(L1+L2)(L1-z)z(L1+z)}{L1^2(2L1+L2)(2L1+3L2)} \quad (16)$$

Repetindo o procedimento para o percurso $z \geq x$ tem-se que:

$$LI(M) = \left(1 - \frac{z}{L1}\right)x + \frac{LI(MB)}{L1}x \quad (17)$$

Substituindo $LI(MB)$ tem-se:

$$LI(M) = x \left(1 - \frac{z}{L1} - \frac{2(L1+L2)(L1-z)z(L1+z)}{L1^2(2L1+L2)(2L1+3L2)}\right) \quad (18)$$

Da mesma maneira:

$$LI(V) = \left(1 - \frac{z}{L1}\right) + \frac{LI(MB)}{L1} \quad (19)$$

ou já substituída $LI(MB)$:

$$LI(V) = 1 - \frac{z}{L1} - \frac{2(L1+L2)(L1-z)z(L1+z)}{L1^2(2L1+L2)(2L1+3L2)} \quad (20)$$

Procedimentos similares nas demais seções e percursos são feitos, de modo a obter a coleção de expressões com menor número de termos, o que é mais conveniente para a programação.

2.2 Exemplos numéricos e gráficos

Para ilustrar o uso, são apresentados na Tabela 1 os valores numéricos obtidos da linha de influência dos momentos no apoio B para tramos de comprimentos $L1 = 10$ m e $L2 = 12$ m e na Figura 5 o resultado gráfico utilizando recursos de programação da planilha Excel.

Tabela 1 – Valores da LI de momentos no apoio B para cada décimo dos tramos.

z	$LI (MB)$	z	$LI (MB)$	z	$LI (MB)$
0	0	10	0	22	0
1	-0,24308	11,2	-0,50914	23	0,114509
2	-0,47143	12,4	-0,83314	24	0,192857
3	-0,67031	13,6	-0,999	25	0,239063
4	-0,825	14,8	-1,03371	26	0,257143
5	-0,92076	16	-0,96429	27	0,251116
6	-0,94286	17,2	-0,81771	28	0,225
7	-0,87656	18,4	-0,621	29	0,182813
8	-0,70714	19,6	-0,40114	30	0,128571
9	-0,41987	20,8	-0,18514	31	0,066295
10	0	22	0	32	0

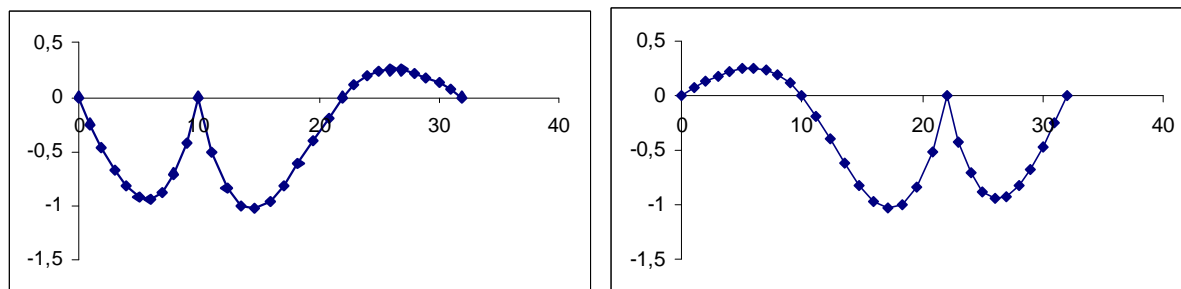


Figura 5 – Linha de influência dos momentos fletores nos apoio B e C.

Na sequência as figuras 6 e 7 mostram saídas gráficas para as linhas de influência dos momentos fletores e esforços cortantes nas seções $x = 5$ e 16 m, respectivamente.

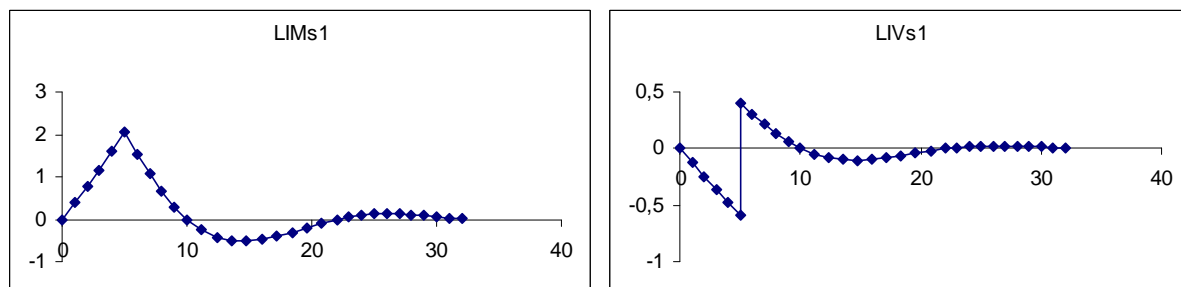


Figura 6 – Linhas de influência do momento fletor e cortante na seção $x = 5$ m.

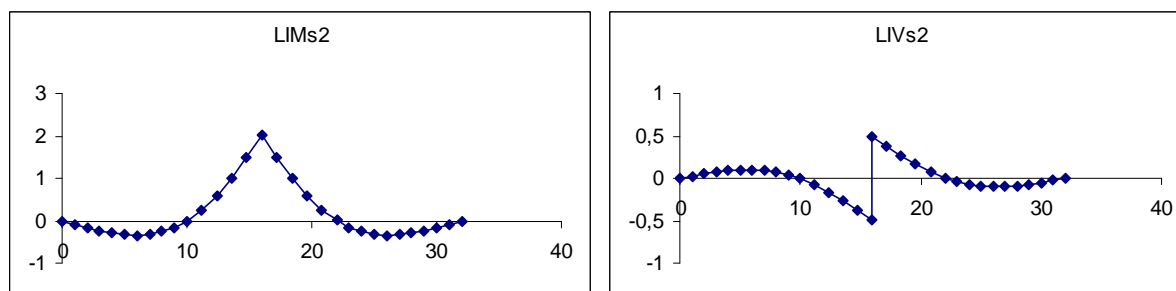


Figura 7 – Linhas de influência do momento fletor e cortante na seção $x = 16$ m.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho procura mostrar a viabilidade da utilização de Sistemas de Computação Algébrica (CAS) na solução de problemas de mecânica das estruturas em caráter analítico.

As operações foram realizadas no aplicativo Mathematica, podendo ser executadas também no wsMaxima, software gratuito que possui uma interface similar, ligeiramente mais trabalhosa, que fornece as mesmas respostas algumas vezes em redação não coincidente.

É interessante registrar o ponto de vista de que a análise estrutural em épocas passadas procurava evitar tratamentos algébricos mais complicados por causa do excessivo trabalho manual requerido, que era e continua sendo desestimulante, conduta que não tem mais sentido em tempos atuais em razão do aprimoramento dos aplicativos de manipulação simbólica.

O uso mais intensivo desses aplicativos tem a vantagem de permitir que se dedique maior tempo ao entendimento físico e à interpretação de resultados dos problemas de engenharia, o que abre excelente perspectiva para a resolução de problemas de mecânica das estruturas.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundunesp e à Fapesp pelo constante apoio recebido.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANGER, G. **Linhas de influência para vigas contínuas**. São Paulo: Todtman, 1949.

PFEIL, W. **Pontes em concreto armado**. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983.

RIGITANO, A. C., HIROSE, F. H, GAIOTTO JUNIOR, A. T. Sobre um método de traçado de linhas de influência e cálculo de esforços solicitantes sem uso de análise matricial na linguagem visual basic das planilhas Excel. In JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL, XXXIII. Santiago. **Anais...** Chile: Universidad Central, 2008.

SORIANO, H.L. e LIMA, S.S. **Análise de estruturas – Método das forças e dos deslocamentos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Moderna, 2006.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural**. 2. ed. Porto Alegre: Globo, 1977.

WOLFRAM, S. **The mathematica book**. 5th ed. Wolfram Media, 2003.