

ALEXANDRE ATAIDE CARNIATO

**CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS
INCERTOS COM ACESSO À SAÍDA**

Ilha Solteira
2016



ALEXANDRE ATAIDE CARNIATO

CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS INCERTOS COM ACESSO À SAÍDA

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Câmpus de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira
2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

C289c Carniato, Alexandre Ataide.
Controle de sistemas lineares chaveados incertos com acesso à saída /
Alexandre Ataide Carniato. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2016
133 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia
de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2016

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Chaveamento dependente da saída da planta. 2. Realimentação robusta
estática e dinâmica de saída. 3. Controle de sistemas lineares chaveados
incertos. 4. Desigualdades matriciais lineares. 5. Differential evolution - linear
matrix inequalities (De-Lmi).



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Controle de Sistemas Lineares Chaveados Incertos com Acesso à Saída

AUTOR: ALEXANDRE ATAÍDE CARNIATO

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: AUTOMAÇÃO pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. JEAN MARCOS DE SOUZA RIBEIRO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. CRISTIANO MARCOS AGULHARI
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. CRISTIANO QUEVEDO ANDREA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Ilha Solteira, 16 de dezembro de 2016

*À minha família, em especial à minha filha Alice e minha esposa Giselle, aos meus pais
Irenaldo e Cristina, aos meus irmãos
Leonardo e Guilherme, por todo amor, apoio, confiança e incentivo em todos os momentos.*

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- A Deus, por ter me dado força e saúde para chegar até aqui;
- À minha esposa Giselle, pelo apoio, incentivo e carinho sempre presentes. Além disto, agradeço à ela por ter dado o melhor presente da minha vida, nossa filha Alice;
- Aos meus pais Irenaldo e Cristina e aos meus irmãos Leonardo e Guilherme pelo carinho, apoio e incentivo;
- Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pela amizade, por todo ensinamento, incentivo, confiança e orientação;
- Aos Profs. Dr. Edvaldo Assunção e Dr. Rodrigo Cardim, pelo acompanhamento nas bancas examinadoras, sugestões e incentivo sempre motivando e transmitindo confiança e serenidade;
- Ao Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari pelas valiosas contribuições para melhoria deste trabalho;
- Ao Prof. Dr. Cristiano Quevedo Andrea pela amizade, companheirismo e valiosas contribuições para melhoria deste trabalho;
- Aos amigos que trabalharam comigo no laboratório de controle, em especial ao Leonardo Ataíde Carniato, meu irmão e amigo que foi fundamental para a finalização deste trabalho. Valeu Léo!!
- Aos amigos do LPC, em especial ao Diogo e Uiliam pela excelente receptividade e discussões pertinentes. Valeu pessoal !!
- À Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS-UNESP), local onde estudei durante o doutorado.

*“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades,
lembrai-vos de que as grandes coisas do homem
foram conquistadas do que parecia impossível.*

Charles Chaplin

RESUMO

Este trabalho examina o problema de controle robusto aplicado a sistemas lineares chaveados contínuos no tempo através de uma estratégia de chaveamento dependente apenas da saída medida da planta. Em implementações de sistemas de controle com alocação de polos, o vetor de estado pode não estar completamente disponível. Deste modo, é importante desenvolver estratégias de chaveamento que dependam da saída medida da planta. Inicialmente são propostas novas condições de estabilidade para sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas através de uma estratégia de chaveamento adequada. Posteriormente considera-se também o chaveamento de realimentações estáticas da saída. Além disto, considera-se a inserção de um critério de desempenho, neste caso, um custo garantido para sistemas chaveados. Variáveis de folga são acrescentadas nas condições de teoremas dispostos na literatura visando reduzir o conservadorismo das desigualdades matriciais lineares. Em sequência, definindo um sistema aumentado interpretando-se a saída medida da planta como uma nova variável de estado do sistema, são propostas condições originais para a estabilidade que podem reduzir o conservadorismo de técnicas conhecidas. No que tange à realimentação dinâmica de saída, condições de estabilidade e desempenho foram propostas considerando filtros dinâmicos alocados em série com a saída medida da planta. Em seguida, apresentam-se condições para o projeto de controladores robustos estáticos/dinâmicos de saída utilizando-se equações matriciais lineares. Nesta etapa, além da regra de chaveamento, os controladores robustos são responsáveis por garantir estabilidade assintótica e um desempenho adequado. Adicionalmente são propostas novas condições de estabilidade e desempenho para sistemas lineares chaveados incertos considerando que a matriz de entrada é incerta, porém invariante no tempo. Porém, tais condições são representadas por desigualdades matriciais bilineares. Para a obtenção de soluções factíveis para este problema, utilizou-se o método híbrido *Differential Evolution - Linear Matrix Inequalities* (DE-LMI), que é baseado em um algoritmo evolutivo e também em um *solver* de LMIs. Análises teóricas e exemplos numéricos de simulação mostram que as técnicas de controle propostas são eficazes e menos conservadoras do que procedimentos similares disponíveis na literatura. O procedimento proposto pode também ser usado para projetar controladores robustos para plantas com incertezas e sujeitas a falhas estruturais, considerando as incertezas da planta e as falhas estruturais como incertezas politópicas. Um exemplo ilustra a potencialidade do método por meio da aplicação prática no projeto e implementação de um controlador robusto para um sistema de suspensão ativa sujeito a falhas estruturais.

Palavras-chave: Chaveamento dependente da saída da planta. Realimentação robusta estática e dinâmica de saída. Controle de sistemas lineares chaveados incertos. Desigualdades matriciais lineares. *Differential Evolution - Linear Matrix Inequalities* (DE-LMI).

ABSTRACT

This work investigates the robust control problem applied to continuous-time switched linear systems considering an output-dependent switching law. In practical applications, the state vector may not be completely available. Thereby, it is important to develop output-depending switching strategies. Initially, new stability conditions for switched linear systems with polytopic uncertainties, based on a suitable switching strategy, are proposed. Then, it was also added a static output switched control. Furthermore, it is considered the insertion of a performance criteria, in this case, a guaranteed cost. Slack variables are introduced in the conditions of theorems available on literature aiming to reduce the conservatism of linear matrix inequalities. Additionally, through of a definition of augmented system, considering the controlled outputs of the plant as new state variables of the system, it is proposed novel conditions for stability that can reduce the conservatism of known techniques. Concerning the dynamic output feedback, stability and performance conditions are propounded considering a dynamic compensator on controlled output of the plant. Moreover, conditions for the design of static/dynamic robust output controllers using linear matrix inequalities are proposed. In this situation, the robust output controllers jointly with the switching strategy are responsible to guarantee asymptotic stability and an adequate performance. For cases when the input matrix of the system is uncertain, but time-invariant, the aforementioned ideas are not applicable. Thus, are proposed new stability conditions. However, such conditions are described by bilinear matrices inequalities. In order to obtain feasible solutions for this problem, it was used an hybrid method, DE-LMI (Differential Evolution - Linear Matrix Inequalities), which is based on an evolutionary algorithm and an LMI solver. A theoretical analysis and several numerical examples show that the proposed control techniques are effective and less conservative when compared to similar procedures available on literature, even when all of the dynamical subsystems matrices are not Hurwitz. The proposed procedure can also be used for designing robust controllers for uncertain switched plants subject to structural failures, considering the plant uncertainties and the structural failures as polytopic uncertainties. An example illustrates a practical application of the method in the design and implementation of a robust controller of an active suspension subject to structural failures.

Keywords: Output-dependent switching strategy. Robust static and dynamic output feedback. Continuous-time uncertain switched linear systems. Linear matrix inequalities. Differential evolution - linear matrices inequalities (DE-LMI).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Diagrama de Controle Proposto	47
Figura 2	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 4 e 5, sendo que a região factível obtida através do Teorema 4 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 5 é representada por (●) e (×).	55
Figura 3	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 5 e 7, sendo que a região factível obtida através do Teorema 5 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 7 é representada por (●) e (×).	56
Figura 4	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 7 e 9, sendo que a região factível obtida através do Teorema 7 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (●) e (×).	57
Figura 5	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 9 e 18, sendo que a região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 18 é representada por (●) e (×).	57
Figura 6	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 9 e 16, sendo que a região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (●) e a região factível obtida através do Teorema 16 é representada por (●) e (×).	58
Figura 7	Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teorema 6	58
Figura 8	Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teorema 8	59
Figura 9	Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teorema 10.	59
Figura 10	Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teorema 14	60
Figura 11	Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teorema 17	60

Figura 12	Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teorema 19	61
Figura 13	Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teoremas 10 (preto), 17 (vermelho) e 19 (verde)	61
Figura 14	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 4 e 5, sendo que a região factível obtida através do Teorema 4 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 5 é representada por (●) e (×)	63
Figura 15	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 5 e 7, sendo que a região factível obtida através do Teorema 5 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 7 é representada por (●) e (×)	64
Figura 16	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 7 e 9, sendo que a região factível obtida através do Teorema 7 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (●) e (×)	64
Figura 17	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 9, 13, 16 e 18, sendo que a região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (●), a região factível obtida através do Teorema 13 é representada por (●) e (×), a região factível obtida através do Teorema 16 é representada por (●), (×) e (□), a região factível obtida através do Teorema 18, considerando $M = 1$ é representada por (●), (×), (□) e (+), a região factível obtida através do Teorema 18, considerando $M = 2$ é representada por (●), (×), (□), (+) e (*) e a região factível obtida através do Teorema 18, considerando $M = 3$, é representada por (●), (×), (□), (+), (*) e (o)	65
Figura 18	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 9, 13, 16 e 18, sendo que a região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (●), a região factível obtida através do Teorema 13 é representada por (●) e (×), a região factível obtida através do Teorema 16 é representada por (●), (×) e (□), a região factível obtida através do Teorema 18, considerando $M = 1$ é representada por (●), (×), (□) e (+)	66
Figura 19	Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 10	67
Figura 20	Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 14	68

Figura 21	Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 17.	69
Figura 22	Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 19, considerando $M = 1$	70
Figura 23	Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 19, considerando $M = 2$	70
Figura 24	Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 19, considerando $M = 3$	71
Figura 25	Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 10 (preto) e Teorema 14 (azul).	71
Figura 26	Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 14 (preto) e Teorema 17 (azul).	72
Figura 27	Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 19, considerando $M = 1$ (preto), considerando $M = 2$ (azul) e considerando $M = 3$ (vermelho).	72
Figura 28	Resposta Temporal	73
Figura 29	Chaveamento entre os subsistemas	73
Figura 30	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 5 e 21, sendo que a região factível obtida através do Teorema 5 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 21 é representada por (●) e (×).	99
Figura 31	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 7 e 23, sendo que a região factível obtida através do Teorema 7 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 23 é representada por (●) e (×).	100
Figura 32	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 9 e 25, sendo que a região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 25 é representada por (●) e (×).	101
Figura 33	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 21, 23 e 25, sendo que a região factível obtida através do Teorema 21 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 23 é representada por (●) e (×) e a região obtida com o Teorema 25 é representada por (●), (×) e (○).	102

Figura 34	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 13 e 27, sendo que a região factível obtida através do Teorema 13 é representada por (●) e a região factível obtida através do Teorema 27 é representada por (●) e (×)	102
Figura 35	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 16 e 29, sendo que a região factível obtida através do Teorema 16 é representada por (●) e a região factível obtida através do Teorema 29 é representada por (●) e (×)	103
Figura 36	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 18 e 31, sendo que a região factível obtida através do Teorema 18 é representada por (●) e a região factível obtida através do Teorema 31 é representada por (●) e (×)	103
Figura 37	Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 27, 29 e 31, sendo que a região factível obtida através do Teorema 27 é representada por (●), a região factível obtida através do Teorema 29 é representada por (●) e (×) e a região factível obtida através do Teorema 31 é representada por (●), (×) e (○)	104
Figura 38	Variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros h_1 e h_2 para as condições do Teorema 22	104
Figura 39	Variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros h_1 e h_2 para as condições do Teorema 24	105
Figura 40	Variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros h_1 e h_2 para as condições do Teorema 26	105
Figura 41	Variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros h_1 e h_2 para as condições do Teorema 28	106
Figura 42	Variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros h_1 e h_2 para as condições do Teorema 30	106
Figura 43	Variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros h_1 e h_2 para as condições do Teorema 32	107
Figura 44	Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições dos Teoremas 28 (azul), 30 e 32 (vermelho)	107
Figura 45	Principais Estágios do Algoritmo da ED	111
Figura 46	Rotina do Algoritmo Híbrido ED-LMI.	113
Figura 47	Sistema didático de suspensão ativa Quanser, pertencente ao LPC-UNESP-FEIS	114

Figura 48	Sistema de suspensão ativa de um veículo	115
Figura 49	Diagrama utilizado para a implementação prática	118
Figura 50	Resposta temporal prática implementada no módulo de suspensão ativa considerando $M_s = 2,45kg$	119
Figura 51	Sinal de Controle $u(t) = F_c(t)$ considerando $M_s = 2,45kg$	119
Figura 52	Chaveamento entre os subsistemas em malha fechada considerando $M_s = 2,45kg$	120
Figura 53	Resposta temporal prática implementada no módulo de suspensão ativa considerando $M_s = 1,9525kg$	120
Figura 54	Sinal de Controle $u(t) = F_c(t)$ considerando $M_s = 1,9525kg$	121
Figura 55	Chaveamento entre os subsistemas em malha fechada considerando $M_s = 1,9525kg$	121
Figura 56	Resposta temporal prática implementada no módulo de suspensão ativa considerando $M_s = 1,455kg$	122
Figura 57	Sinal de Controle $u(t) = F_c(t)$ considerando $M_s = 1,455kg$	122
Figura 58	Chaveamento entre os subsistemas em malha fechada considerando $M_s = 1,455kg$	123

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Custo garantido obtido com o Teorema 19	68
Tabela 2	Valores Nominais dos Parâmetros da Suspensão Ativa (QUANSER, 2009)	115

LISTA DE ABREVIACÕES E SIGLAS

LMEs	Linear Matrix Equalities
LMIs	Linear Matrix Inequalities
BMIs	Bilinear Matrix Inequalities
ED	Evolução Diferencial
CES	Controladores Estticos de Saída
CDS	Controladores Dinâmicos de Saída

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	21
2	PROPRIEDADES E CONCEITOS INICIAIS	23
2.1	SISTEMAS AUTÔNOMOS, NÃO-AUTÔNOMOS E PONTOS DE EQUILÍBRIO	23
2.2	ESTABILIDADE SEGUNDO LYAPUNOV	23
2.3	SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS	25
2.4	CONCLUSÕES PARCIAIS	26
3	CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS INCERTOS COM CHAVEAMENTO DEPENDENTE DA SAÍDA DA PLANTA	27
3.1	SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS COM INCERTEZAS POLITÓPICAS .	27
3.2	CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS INCERTOS COM REGRA DE CHAVEAMENTO DEPENDENTE DA SAÍDA DA PLANTA	28
3.2.1	Realimentação estática de saída para sistemas lineares chaveados incertos	28
3.2.2	Realimentação dinâmica da saída para sistemas lineares chaveados incertos	46
3.3	EXEMPLO 1 - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	53
3.3.1	Estudo sobre regiões de factibilidade I	53
3.3.2	Estudo sobre regiões de factibilidade II	54
3.3.3	Cômputo do custo garantido	55
3.4	EXEMPLO 2 - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	62
3.4.1	Estudo sobre factibilidade	62
<i>3.4.1.1</i>	<i>Caso I</i>	<i>63</i>
<i>3.4.1.2</i>	<i>Caso II</i>	<i>63</i>
<i>3.4.1.3</i>	<i>Caso III</i>	<i>65</i>

3.4.2	Cômputo do custo carantido	66
3.5	EXEMPLO 3 - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	67
3.6	CONCLUSÕES PARCIAIS	68
4	PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS VIA REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS INCERTOS	74
4.1	PROJETO DE CONTROLADORES VIA REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS COM INCERTEZAS POLITÓPICAS	74
4.2	PROJETO DE CONTROLADORES VIA REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS COM INCERTEZAS POLITÓPICAS	93
4.3	EXEMPLO 4 - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	97
4.3.1	Estudo sobre Regiões de Factibilidade I	98
4.3.2	Estudo sobre Regiões de Factibilidade II	98
4.3.3	Cômputo do Custo Garantido	99
4.4	CONCLUSÕES PARCIAIS	100
5	IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA EM UM SISTEMA ED SUSPENSÃO ATIVA	108
5.1	PROJETO DE CONTROLADORES VIA REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA . . .	108
5.2	ALGORITMO HÍBRIDO BASEADO EM EVOLUÇÃO DIFERENCIAL E LMIS	110
5.2.1	Evolução diferencial (ED)	111
5.2.1.1	<i>Algoritmo híbrido ed-lmi aplicado no problema proposto</i>	<i>112</i>
5.3	EXEMPLO 5 - APLICAÇÃO PRÁTICA: SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA .	114
5.3.1	Implementação prática do controlador estático de saída em um sistema didático de suspensão ativa	118
5.3.1.1	<i>Caso I - $M_s = 2,45kg$</i>	<i>118</i>
5.3.1.2	<i>Caso II - $M_s = 1,9525kg$</i>	<i>120</i>
5.3.1.3	<i>Caso III - $M_s = 1,455kg$</i>	<i>121</i>
5.4	CONCLUSÕES PARCIAIS	122

6	CONCLUSÕES	124
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	125
6.2	ARTIGOS PUBLICADOS	125

1 INTRODUÇÃO

Sistemas chaveados representam uma subclasse dos sistemas híbridos. Deste modo, pode-se dizer que sistemas chaveados são sistemas dinâmicos compostos por um número finito de subsistemas que comutam entre si, respeitando uma regra de chaveamento. Os subsistemas não precisam apresentar as mesmas características, ou seja, caso o sistema global seja estável, não necessariamente, cada subsistema será estável (LIBERZON, 2003).

Recentemente, tópicos de pesquisa relacionados aos sistemas chaveados apresentaram um crescimento considerável (YU; WU, 2015; ZHANG; ZHUANG; BRAATZ, 2016). Este fato associa-se à uma vasta possibilidade de descrever sistemas físicos. Pode-se citar algumas aplicações práticas, tais como: controle de tráfego urbano (PAPAGEORGIOU et al., 2003), controle de conversores CC-CC (CARDIM et al., 2009; CARDIM et al., 2011; DEAECTO et al., 2010; MAINARDI JÚNIOR et al., 2012), dentre outros.

Com relação à comutação, os sistemas chaveados podem ser classificados em: comutação controlada e comutação autônoma. O chaveamento autônomo é caracterizado pela inexistência de controle sobre o sinal de comutação. Já a comutação controlada é caracterizada pela imposição de um sinal de chaveamento visando atingir um desempenho esperado. Além disto, o chaveamento pode ser dependente do vetor de estado ($\sigma(x)$) ou dependente do tempo ($\sigma(t)$) (LIBERZON, 2003).

Os sistemas chaveados ainda podem ser classificados com relação ao comportamento de seus respectivos subsistemas, ou seja, quando todos os subsistemas são lineares, o sistema comutado é linear. Estes sistemas são bastante estudados pelo motivo de apresentarem menor complexidade de análise. Por exemplo, existem os seguintes artigos sobre o assunto: (GEROMEL; COLANERI, 2006; DECARLO et al., 2000; HABIBI; MOSHIRI; SEDIGH, 2006; JI; WANG; XIE, 2003; ZHAI; LIN; ANTSAKLIS, 2003), dentre outros. Para casos em que os subsistemas apresentam uma parcela afim, a análise torna-se mais complexa devido à existência de vários pontos de equilíbrio. Estes sistemas têm recebido bastante atenção da comunidade acadêmica e muitas pesquisas vêm sendo desenvolvidas recentemente (BOLZERN; SPINELLI, 2004; CARDIM et al., 2009; DEAECTO et al., 2010; HAUROIGNE; RIEDINGER; IUNG, 2011; MAINARDI JÚNIOR et al., 2012; HETEL; FRIDMAN, 2013; SCHARLAU et al., 2014; DEAECTO; SANTOS, 2015; NOORI; FARSI; ESFANJANI, 2016). A seguir descreve-se um

histórico envolvendo os conceitos de controle aplicado a sistemas chaveados.

A existência de uma regra de chaveamento estabilizante é um fator primordial para o controle dos sistemas chaveados. Em Wicks, Peleties e DeCarlo (1994), os autores demonstraram que se existir uma combinação convexa Hurwitz (todos autovalores apresentam parte real negativa) entre as matrizes do subsistemas dinâmicos, isto implica na existência de uma regra de chaveamento dependente das variáveis de estado que estabiliza o sistema linear chaveado. A partir destes resultados, Feron (1996) provou que as condições propostas em Wicks, Peleties e DeCarlo (1994) são necessárias e suficientes para um sistema chaveado com dois subsistemas dinâmicos.

Mais recentemente em Geromel e Colaneri (2006), os autores propuseram duas estratégias para sistemas lineares chaveados contínuos no tempo. A primeira, em malha aberta, baseia-se na utilização de várias funções de Lyapunov, do tipo, $V(x) = \min_{i \in \mathbb{K}^N} x' P_i x$. A segunda regra, refere-se à resolução das desigualdades matriciais conhecidas como *Lyapunov-Metzler*. Em Deaecto et al. (2010) os autores generalizaram as condições de estabilidade assintótica para sistemas lineares chaveados proposta em Wicks, Peleties e DeCarlo (1994) considerando N subsistemas dinâmicos e uma regra de chaveamento dependente das variáveis de estado.

Para sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas, foi proposta em Zhai, Lin e Antsaklis (2003) uma regra de chaveamento estabilizante e robusta baseada em funções quadráticas de Lyapunov e LMIs (do inglês, *Linear Matrices Inequalities*) para sistemas contínuos e discretos no tempo. Em Lin e Antsaklis (2007), os autores apresentaram condições suficientes e necessárias para sistemas lineares chaveados com incertezas paramétricas variantes no tempo. Em Ji, Wang e Xie (2003) foram propostas duas condições necessárias para estabilidade de sistemas lineares chaveados através da realimentação de estados e também da realimentação de saída juntamente com a estratégia de chaveamento. Foram apresentados em Xie e Yu (2006) critérios para estabilidade exponencial quando as matrizes incertas são comutativas par a par. Os autores propuseram em Songlin et al. (2008) a estabilização de sistemas lineares incertos através de um observador baseado na realimentação de saída e múltiplas funções de Lyapunov. Além destes trabalhos supracitados, outros resultados importantes também são encontrados em Soga e Otsuka (2011) e Soga et al. (2013).

Na implementação de sistemas de controle com alocação de polos, com lei de controle $u(t) = -Kx(t)$, o vetor de estado pode não estar completamente disponível. Portanto, é importante estabelecer estratégias de chaveamento que dependam apenas da saída da planta. Em Mainardi Júnior et al. (2012), os autores apresentaram condições de estabilidade considerando chaveamento através da saída da planta para o sistema linear sem incertezas. Já em Mainardi Júnior et al. (2014), os autores generalizaram estes resultados para os sistemas lineares com incertezas politópicas. Um dos problemas mais desafiadores nesta área de pesquisa é o projeto de controladores por meio da realimentação da saída, seja estática, ou dinâmica. Um trabalho

minucioso a respeito deste assunto encontra-se em Syrmos et al. (1997).

Nos anos recentes, o projeto de Controladores Estáticos de Saída (CES), tem recebido grande atenção de vários autores, principalmente, devido às facilidades de sua implementação em aplicações práticas. Considerando igualdades matriciais lineares, em Crusius e Trofino (1999) foram apresentadas condições suficientes para o projeto de CES. Os autores em Peaucelle e Arzelier (2005) propuseram um algoritmo iterativo de duas etapas focado na otimização da norma H_2 . No trabalho Agulhari, Oliveira e Peres (2010) apresentou-se uma generalização do método anterior considerando funções polinomiais de Lyapunov. Ademais, em Ding e Yang (2010) os autores investigaram o projeto de CES H_∞ para sistemas lineares chaveados em tempo discreto. Por conseguinte, em Dong e Yang (2013) foram propostas novas condições LMI considerando casos em que a matriz de saída não tem posto completo. Recentemente, em Yuan e Wu (2015) apresentou-se uma nova abordagem para controle de sistemas lineares chaveados robustos em tempo discreto. Uma extensão do método *path-following* foi proposta em Chen e Lin (2015) visando projetar CES para sistemas lineares chaveados em tempo discreto.

No que tange o projeto de Controladores Dinâmicos de Saída (CDS), em Geromel, Colaneri e Bolzern (2008) os autores propuseram condições de estabilidade para sistemas contínuos e discretos no tempo considerando malha aberta/fechada usando uma classe particular de desigualdades, chamadas *Lyapunov-Metzler inequalities*. Por conseguinte, em Deaecto, Geromel e Daafouz (2011) foram discutidas condições para CDS H_∞ para sistemas lineares chaveados. Já em, Jungers et al. (2013) os autores propuseram condições suficientes para a estabilização de sistemas de controle em rede via CDS. Uma lei de chaveamento híbrida, dependente do tempo e das variáveis de estado, para o projeto de CDS foi proposta em Zhai et al. (2016). Considerando chaveamento assíncrono, em Yang, Li e Niu (2015) apresentaram-se condições para o projeto de CDS robustos para sistemas lineares chaveados incertos.

Atualmente, pelo conhecimento do autor, verificou-se que, não existem na literatura trabalhos que considerem o projeto de controladores robustos chaveados de saída para sistemas lineares chaveados com regra de comutação dependente exclusivamente da saída controlada da planta (com realimentação estática da saída da planta). Com relação aos artigos supracitados, geralmente considera-se um filtro de ordem completa ou reduzida. Sendo assim, projeta-se a regra de chaveamento dependente das variáveis de estado estimadas a partir deste filtro.

Deste modo, entre outros aspectos, este trabalho visa generalizar os resultados para estabilidade quadrática de sistemas chaveados lineares incertos obtidos em Mainardi Júnior (2013), Mainardi Júnior et al. (2014) e Mainardi Júnior et al. (2015). Primeiramente, serão propostas condições menos conservadoras visando estabilizar e também garantir um critério de desempenho para sistemas lineares chaveados incertos. Em seguida, utiliza-se a técnica proposta em Crusius e Trofino (1999) para o projeto de CES visando estabilizar e garantir um desempenho adequado para o sistema linear chaveado incerto através de uma regra de comutação depen-

dente da saída da planta (DECARLO et al., 2000). Para o cômputo de controladores robustos de saída, as condições de projeto são representadas por desigualdades matriciais bilineares (do inglês, *Bilinear Matrices Inequalities* - BMIs). Para a obtenção de soluções factíveis para este problema, utilizou-se o método híbrido *Differential Evolution - Linear Matrices Inequalities* (DE-LMI) (DAS; SUGANTHAN, 2011; PRICE; STORN; LAMPINEN, 2006), que é baseado em um algoritmo evolutivo e também em um solver de LMIs. Resumidamente, objetiva-se projetar controladores estáticos/dinâmicos de saída juntamente com uma estratégia de chaveamento que dependa exclusivamente da saída controlada da planta. Análises teóricas e vários exemplos numéricos de simulação mostram que as técnicas de controle propostas são eficazes e menos conservadoras do que procedimentos similares disponíveis, até mesmo, em casos nos quais todas as matrizes dinâmicas dos subsistemas não são Hurwitz. O procedimento proposto pode também ser usado para projetar controladores robustos para plantas com incertezas e sujeitas a falhas estruturais, considerando as incertezas da planta e as falhas estruturais como incertezas politópicas. Um exemplo ilustra a aplicação prática do método no projeto e implementação de um controlador robusto para um sistema de suspensão ativa sujeito a falhas estruturais (QUANSER, 2009).

Na literatura especializada, encontram-se trabalhos referentes aos sistemas lineares e não lineares sujeitos a incertezas na planta entre outros, utilizando técnicas baseadas em LMIs (BOYD et al., 1994). Estas desigualdades matriciais lineares quando factíveis, são resolvidas através de ferramentas de programação convexa disponíveis na literatura (GAHINET et al., 1995). Por conveniência, a seguir são definidas algumas notações que serão utilizadas ao longo do trabalho. Para matrizes ou vetores reais, o símbolo ($'$) indica o transposto. O conjunto formado pelos N primeiros inteiros $\{1, \dots, N\}$ é denotado por \mathbb{K}_N . O conjunto de todos os vetores $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_N]'$ tais que $\lambda_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_N$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = 1$ é denotado por Λ . A combinação convexa de um conjunto de matrizes (A_1, \dots, A_N) é denotada $A_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i$, sendo $\lambda \in \Lambda$. Além disso, o símbolo ($*$) será usado em expressões matriciais para denotar o transposto de um elemento simétrico. Para expressões em linha, este símbolo denotará o transposto dos termos do lado esquerdo, como mostrado nos exemplos a seguir:

$$\begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & (*) \\ B & C \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$A + B + A' + B' = A + B + (*). \quad (2)$$

1.1 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A estrutura do texto apresentado a seguir é organizada da seguinte maneira:

- No Capítulo 2 são apresentados conceitos para as condições de estabilidade assintótica de sistemas lineares que servirão de base para o desenvolvimento teórico do trabalho.
- No Capítulo 3 investiga-se a estabilidade assintótica para sistemas lineares chaveados incertos através do chaveamento dependente exclusivamente da saída controlada da planta. Deste modo, serão propostos novos teoremas visando generalizar os resultados apresentados em Mainardi Júnior (2013), Mainardi Júnior et al. (2014) e Mainardi Júnior et al. (2015). Análises teóricas e resultados de simulação mostram que as técnicas de controle propostas oferecem condições mais relaxadas do que as disponíveis na literatura.
- No Capítulo 4 apresentam-se teoremas para o projeto de controladores estáticos/dinâmicos de saída juntamente com uma regra de chaveamento dependente da saída controlada da planta para sistemas lineares chaveados incertos. Utilizam-se as aproximações propostas em Crusius e Trofino (1999) e os teoremas apresentados no Capítulo 3 serão generalizados através do projeto de controladores robustos de saída. Um exemplo numérico de simulação mostra que o projeto de controladores estáticos/dinâmicos de saída apresenta maiores regiões de factibilidade e também reduz o custo garantido, quando comparado com os resultados obtidos no Capítulo 3.
- No Capítulo 5 utiliza-se um método híbrido baseado em um algoritmo evolutivo e um solver de LMIs para encontrar valores sub-ótimos para os controladores robustos de saída. Em seguida, apresenta-se a implementação prática em ambiente laboratorial visando validar a técnica proposta. O procedimento proposto pode também ser usado para projetar controladores robustos para plantas com incertezas e sujeitas a falhas estruturais, considerando as incertezas da planta e as falhas estruturais como incertezas politópicas. Um exemplo ilustra a aplicação prática do método no projeto e implementação de um controlador robusto para um sistema de suspensão ativa sujeito a falhas estruturais (QUANSER, 2009).
- No Capítulo 6 apresentam-se as conclusões deste trabalho e também algumas sugestões para trabalhos futuros. Em seguida, listam-se as publicações relacionadas com este trabalho.

2 PROPRIEDADES E CONCEITOS INICIAIS

Este capítulo apresenta conceitos gerais e fundamentais para o desenvolvimento teórico deste trabalho. Inicialmente, definem-se os sistemas autônomos e não-autônomos. Em seguida, discute-se brevemente o conceito de estabilidade através da função de energia (SLOTINE; LI, 1991). Além disso, aborda-se estabilidade assintótica via Lyapunov para sistemas dinâmicos. Em seguida, apresentam-se as generalizações destes conceitos para os sistemas lineares chaveados.

2.1 SISTEMAS AUTÔNOMOS, NÃO-AUTÔNOMOS E PONTOS DE EQUILÍBRIO

A dinâmica não linear de um sistema pode ser representada através de um conjunto de equações não lineares, da forma:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (3)$$

sendo $f \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ um vetor não linear e $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ o vetor de estado.

Definição 1. (SLOTINE; LI, 1991) *O sistema não linear (3) é dito ser autônomo se f não depender explicitamente do tempo. Desta maneira, a dinâmica do sistema pode ser reescrita, como:*

$$\dot{x} = f(x), \quad (4)$$

caso contrário, o sistema (3) é dito ser não-autônomo.

Definição 2. (SLOTINE; LI, 1991) *Um estado \hat{x} é um ponto de equilíbrio do sistema (3), se $x(t) = \hat{x}$ para todo $t \geq 0$. Matematicamente, isto significa que o vetor \hat{x} satisfaz:*

$$0 = f(\hat{x}). \quad (5)$$

O sistema linear e invariante no tempo mostrado em (6) apresenta um único ponto de equilíbrio, neste caso, a origem ($x = 0$), se A for não singular.

$$\dot{x} = Ax. \quad (6)$$

2.2 ESTABILIDADE SEGUNDO LYAPUNOV

Esta seção introduz os conceitos relativos à estabilidade segundo Lyapunov. Esta análise é conhecida como Segundo Método de Lyapunov, ou também, como Método Direto e baseia-se

em um conceito análogo à energia de um sistema. Sendo assim, se a energia total de um sistema mecânico ou elétrico é continuamente dissipada, então o sistema converge para um ponto de equilíbrio (SLOTINE; LI, 1991). Desta maneira, é possível concluir sobre a estabilização de um sistema através da variação no tempo (derivada) de uma função escalar.

Desta forma, considere a equação diferencial a seguir que descreve a dinâmica de um sistema massa-mola-amortecedor, com amortecimento não linear e coeficiente de mola não linear (SLOTINE; LI, 1991):

$$m\ddot{x}_p + b\dot{x}_p |\dot{x}_p| + k_0 x_p + k_1 x_p^3 = 0, \quad (7)$$

sendo que m é a massa do carro, $b\dot{x}_p |\dot{x}_p|$ representa a dissipação não linear do amortecedor e $k_0 x_p + k_1 x_p^3$ o termo não linear referente à mola. A energia associada ao sistema (7) é a soma entre a energia potencial e a energia cinética. Deste modo, considerando-se o vetor de estado $x = [x'_p \quad \dot{x}'_p]'$, obtém-se:

$$V(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}_p^2 + \int_0^{x_p} (k_0 x_p + k_1 x_p^3) dx_p = \frac{1}{2} m \dot{x}_p^2 + \frac{1}{2} k_0 x_p^2 + \frac{1}{4} k_1 x_p^4. \quad (8)$$

A partir de (8) é possível fazer algumas considerações com relação à estabilidade do sistema representado em (7). Note que, $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Porém, se o sistema sempre dissipar energia, $V(x)$ será sempre decrescente, e o vetor de estado $x = [x'_p \quad \dot{x}'_p]'$ tenderá ao ponto de equilíbrio. Deste modo, a derivada da função energia em relação ao tempo é dada por:

$$\dot{V}(x) = m\dot{x}_p\ddot{x}_p + (k_0 x_p + k_1 x_p^3)\dot{x}_p = \dot{x}_p(-b\dot{x}_p |\dot{x}_p|) = -b |\dot{x}_p|^3. \quad (9)$$

Desta maneira, $\dot{V}(x) < 0$ para todo $\dot{x}_p \neq 0$. Analisando a equação do sistema (7) é possível constatar que esta situação somente acontecerá se também $x_p = 0$ e assim x tende ao ponto de equilíbrio ($x = 0$). Sendo assim, a expressão (8) decrescerá até que $x = 0$. Finalmente, conclui-se que o sistema é estável e converge para o ponto de equilíbrio de (7). A formulação teórica deste resultado é apresentada no Teorema 1.

Teorema 1. (SLOTINE; LI, 1991) *Se existir uma função candidata de Lyapunov $V(x)$ que satisfaça as condições a seguir:*

- $V(x)$ é positiva definida,
- $\dot{V}(x)$ é negativa definida,
- $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$,

então o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema autônomo (4) é globalmente assintoticamente estável.

Estas análises podem ser estendidas para os casos onde $\dot{V}(x)$ é negativa semi-definida, utilizando o teorema dos conjuntos invariantes (SLOTINE; LI, 1991). Além disto, utilizando o princípio de invariância de LaSalle, em Hespanha (2001) o autor generalizou os conceitos de estabilidade para os sistemas lineares chaveados.

2.3 SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS

Considere o sistema linear chaveado definido em Geromel e Colaneri (2006):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (10)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída medida, $\sigma(t)$ é a regra ou lei de chaveamento, x_0 é a condição inicial e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída do sistema, constante para todo $t \geq 0$. Considere um conjunto dado de matrizes constantes $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para $i \in \mathbb{K}_N$. Deste modo, a regra de chaveamento atua da seguinte maneira:

$$A_{\sigma(t)} \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\}, \quad (11)$$

sendo que $A_{\sigma(t)}$ deve comutar de A_i para A_j , $i \neq j$, quando o chaveamento ocorrer entre $\sigma(t) = i$ e $\sigma(t) = j$.

Observação 1. Não existe a necessidade de que cada matriz do conjunto $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ seja Hurwitz.

A partir de (10) e (11) define-se o seguinte problema de controle:

Problema 1. *Projetar uma regra de chaveamento $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ tal que:*

$$\sigma(t) = u(x(t)), \quad (12)$$

torne o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema (10) globalmente assintoticamente estável.

Em Wicks, Peleties e DeCarlo (1994) os autores concluíram que, se existir $\lambda \in \Lambda$, tais que, A_{λ} seja Hurwitz, então existe uma regra de chaveamento estabilizante que depende das variáveis de estado do sistema. A partir deste resultado, visando resolver o Problema de Controle 1, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática de sistemas lineares chaveados foi proposta em Feron (1996), para um sistema chaveado composto por dois subsistemas dinâmicos.

Teorema 2. (FERON, 1996). *Considere $N = 2$, o sistema linear chaveado (10) e (11) é quadraticamente estabilizável, se e somente, se, existir $\lambda \in \Lambda$, tais que, $A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2$ seja Hurwitz.*

Demonstração. Para maiores detalhes, veja (FERON, 1996). □

Em Deaecto et al. (2010) foi proposta a generalização do Teorema 2 para N subsistemas dinâmicos. Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz simétrica positiva definida e a seguinte função candidata de Lyapunov:

$$V(x) = x'Px. \quad (13)$$

Teorema 3. (DEAECTO et al., 2010) *Suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ está disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiva definida, tais que:*

$$A'_\lambda P + PA_\lambda < 0, \quad (14)$$

então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (x'PA_i x), \quad (15)$$

torna o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema (10) e (11) globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Para maiores detalhes, veja (DEAECTO et al., 2010). □

2.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foram apresentados os principais conceitos relativos ao controle de sistemas lineares chaveados. Estes resultados servirão de base para o desenvolvimento teórico das novas condições de estabilidade propostas no Capítulo 3. Nos próximos capítulos, esta análise será estendida para sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas.

3 CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS INCERTOS COM CHAVEAMENTO DEPENDENTE DA SAÍDA DA PLANTA

Neste capítulo serão apresentadas novas condições de estabilidade para sistemas lineares chaveados incertos em que o vetor de estado pode não estar completamente disponível, e portanto, utiliza-se a saída medida como variável para definir a estratégia de chaveamento. Variáveis de folga são inseridas visando aumentar a região de factibilidade. Em seguida, um critério de desempenho será considerado, neste caso, o custo garantido. Define-se o custo como sendo a energia necessária para que saída do sistema chaveado atinja o patamar solicitado pelo projetista. Deste modo, objetiva-se minimizar a energia despendida (custo garantido) para todos os pontos internos pertencentes ao politopo de incertezas e também nos vértices. Três exemplos numéricos mostram que a metodologia de controle é eficaz e apresenta resultados satisfatórios, mesmo quando as matrizes dos subsistemas não são Hurwitz.

3.1 SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS COM INCERTEZAS POLITÓPICAS

Considere o sistema linear chaveado incerto com a seguinte realização em espaço de estados (Mainardi Júnior et al., 2015):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma, \alpha)x(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (16)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída medida, $\sigma(t)$ é a regra ou lei de chaveamento, x_0 é a condição inicial e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída do sistema, constante para todo $t \geq 0$. Na matriz $A(\sigma, \alpha)$ o vetor $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ representa as incertezas politópicas da planta. A matriz $A(\sigma, \alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser descrita através da combinação convexa de seus vértices, como mostrado abaixo:

$$A(\sigma, \alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j A_{\sigma_j}, \quad \sum_{j=1}^r \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, \quad \sigma(t) \in \mathbb{K}_N, \quad (17)$$

sendo r o número de vértices do politopo. Para mais detalhes sobre incertezas politópicas, veja (BOYD et al., 1994).

3.2 CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS INCERTOS COM REGRA DE CHAVEAMENTO DEPENDENTE DA SAÍDA DA PLANTA

Em implementações de sistema de controle com alocação de polos, o vetor de estado pode não estar completamente disponível. Deste modo, não é possível aplicar diretamente o Teorema 3 para a projeto de uma lei de chaveamento que estabilize o sistema chaveado. Portanto, é importante estabelecer estratégias de chaveamento que dependam da saída da planta. Neste aspecto, pode-se ainda considerar a realimentação estática, quando o chaveamento entre os subsistemas disponíveis depende exclusivamente da saída medida da planta. Além disto, por meio da inserção de um compensador dinâmico (filtro) na saída medida da planta, pode-se realizar a realimentação dinâmica de saída, ou seja, utiliza-se além da saída medida a saída do compensador como variável da lei de chaveamento. Sendo assim, nas seções posteriores são propostos teoremas visando garantir estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio ($x = 0$) e também atender um critério de desempenho, neste caso o custo garantido, considerando-se realimentação estática e dinâmica de saída.

3.2.1 Realimentação estática de saída para sistemas lineares chaveados incertos

Em Mainardi Júnior et al. (2014), os autores apresentaram condições de estabilidade considerando o chaveamento através da saída da planta para sistemas lineares chaveado com incertezas politópicas. A partir destas ideias, define-se o seguinte problema de controle:

Problema 2. *Projetar uma regra de chaveamento $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ tal que:*

$$\sigma(t) = u(y(t)), \text{ para todo } t \geq 0, \quad (18)$$

torne o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema (10) globalmente assintoticamente estável.

Teorema 4. *(Mainardi Júnior et al., 2014) Considere o sistema linear chaveado incerto (16) e (17) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $Q_{0_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiva definida, tais que:*

$$A'_{ij}P + PA_{ij} < Q_{0_j} + C'Q_iC, \quad (19)$$

$$Q_{0_j} + C'Q_\lambda C < 0, \quad (20)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j \in \mathbb{K}_r$, sendo $Q_\lambda = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \dots + \lambda_N Q_N$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_i y), \quad (21)$$

torna o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema (16) e (17) globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Para maiores detalhes, veja (Mainardi Júnior et al., 2014). □

A partir destes conceitos iniciais, são propostas novas condições de estabilidade (Mainardi Júnior et al., 2015) visando relaxar as condições dispostas no Teorema 4. Considere que o vetor $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ é incerto, porém invariante no tempo.

Teorema 5. *Considere o sistema linear chaveado incerto (16) e (17) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $Q_{0_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:*

$$\frac{1}{2} \times (A'_{ij}P_k + P_kA_{ij} + A'_{ik}P_j + P_jA_{ik}) < Q_{0_j} + C'Q_iC, \quad (22)$$

$$Q_{0_j} + C'Q_\lambda C < 0, \quad (23)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (21) torna a origem ($x = 0$) do sistema (16) e (17) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere a função quadrática candidata de Lyapunov:

$$V(x) = \sum_{k=1}^r \alpha_k x'P_kx, \quad (24)$$

sendo $k = 1, 2, \dots, r$. A partir de (16), (17), (21), (22) e (23), têm-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{k=1}^r \alpha_k x'(A(\sigma, \alpha)'P_k + P_kA(\sigma, \alpha))x \\ &= \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(A'_{\sigma_j}P_k + P_kA_{\sigma_j})x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(A'_{\sigma_j}P_k + P_kA_{\sigma_j} + A'_{\sigma_k}P_j + P_jA_{\sigma_k})x \\ &< \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0_j} + C'Q_\sigma C)x \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0_j} + C'Q_\sigma C)x \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j x'Q_{0_j}x + \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(C'Q_\sigma C)x \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j x'Q_{0_j}x + x'(C'Q_\sigma C)x \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0_j})x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_iy) \\ &\leq \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0_j} + C'Q_\lambda C)x < 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Note que, a primeira desigualdade é obtida utilizando a expressão (23). A última desigualdade é

obtida através do conceito, de que, o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual do que qualquer combinação convexa dos elementos deste conjunto. Além disso, sabendo-se que $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ e $\dot{V}(0) = 0$, então a origem ($x = 0$) é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Deste modo, a prova está concluída. \square

Observação 2. Note que o Teorema 4 é um caso particular do Teorema 5. Desta maneira, é possível obter o Teorema 4 considerando que $A_{ik} = A_{ij}$, $P_k = P_j = P$ para todo $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$. Deste modo, observe que, se as condições dadas no Teorema 4 são factíveis, então as condições dispostas no Teorema 5 também são factíveis.

Objetivando-se a inserção de um critério de desempenho, considera-se o custo garantido definido a seguir (DEAECTO et al., 2010):

$$J = \int_0^{\infty} y(t)'y(t)dt = \int_0^{\infty} x(t)'C'Cx(t)dt. \quad (26)$$

Observação 3. A definição do custo garantido (26) normalmente é um índice de desempenho, cuja minimização é um dos objetivos do sistema de controle. Note que minimizando J em (26), supondo um sistema assintoticamente estável com $y(t)$ escalar, de modo que $y(\infty) = 0$, de certa forma está sendo exigido que o transitório de $y(t)$ deva ser rápido e sem muitas oscilações. Outro uso interessante deste custo foi feito em Deaecto et al. (2010), em que J foi igual à energia dissipada, na forma de calor, devido às resistências presentes nos indutores reais, presentes na implementação de controladores chaveados em conversores CC – CC.

Deste modo, generalizando-se o Teorema 5 através da inserção do custo garantido definido em (26), obtém-se o seguinte teorema:

Teorema 6. Considere o sistema linear chaveado incerto (16) e (17) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes simétricas $Q_{0_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:

$$P_j - \rho I_n < 0 \quad (27)$$

$$\frac{1}{2} \times (A'_{ij}P_k + P_kA_{ij} + A'_{ik}P_j + P_jA_{ik} + 2C'C) < Q_{0_j} + C'Q_iC, \quad (28)$$

$$Q_{0_j} + C'Q_\lambda C < 0, \quad (29)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (21) torna a origem ($x = 0$) do sistema (16) e (17) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e admite o seguinte limitante superior para o custo garantido

$$J = \int_0^{\infty} y'(t)y(t) dt \leq \max_{j \in \mathbb{K}_r} x'_0 P_j x_0 < \rho x'_0 I_n x_0. \quad (30)$$

Demonstração. A prova deste teorema segue os mesmos passos mostrados na demonstração do Teorema 6. Deste modo, têm-se para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \sum_{k=1}^r \alpha_k x'(A(\sigma, \alpha)'P_k + P_k A(\sigma, \alpha) + C'C - C'C)x \\
&= \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(A'_{\sigma_j}P_k + P_k A_{\sigma_j} + C'C)x - y'y \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(A'_{\sigma_j}P_k + P_k A_{\sigma_j} + A'_{\sigma_k}P_j + P_j A_{\sigma_k} + 2C'C)x - y'y \\
&< \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0_j} + C'Q_{\sigma}C)x - y'y \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0_j} + C'Q_{\sigma}C)x - y'y \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0_j})x + \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(C'Q_{\sigma}C)x - y'y \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0_j})x + x'(C'Q_{\sigma}C)x - y'y \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0_j})x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_i y) - y'y \\
&\leq \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0_j} + (C'Q_{\lambda}C))x - y'y < 0 \\
\dot{V}(x) &< -y'y \leq 0. \tag{31}
\end{aligned}$$

A partir de (17) e uma função candidata de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, sendo $P(\alpha) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r$, note que $V(x) > 0$. Em seguida, integrando-se (31) e considerando (27), $x(0) = x_0 \neq 0$ e $V(x(\infty)) = 0$, obtém-se para todo $j \in \mathbb{K}_r$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \dot{V}(x) dt &\leq - \int_0^{\infty} y' y dt, \\
V(x(\infty)) - V(x(0)) &\leq - \int_0^{\infty} y' y dt, \\
-x'_0 P_j x_0 &\leq - \int_0^{\infty} y' y dt, \\
\int_0^{\infty} y' y dt &\leq x'_0 P_j x_0 < \rho x'_0 I_n x_0.
\end{aligned}$$

Sabendo-se que $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ e $V(x(\infty)) = 0$, então a origem ($x = 0$) é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Deste modo, a prova está concluída. \square

Então o Teorema 6 fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P_j=P'_j>0, \rho>0, Q_{0_j}=Q'_{0_j}, Q_i=Q'_i} \{\rho : (27) - (29) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j \in \mathbb{K}_r\}. \quad (32)$$

Nos teoremas a seguir, variáveis de folga são inseridas visando aumentar a flexibilidade das condições dispostas nos casos anteriores.

Teorema 7. *Considere o sistema linear chaveado incerto (16) e (17) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes $X_{1_i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2_i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:*

$$\begin{bmatrix} X_{1_i}A_{ij} + A'_{ij}X'_{1_i} & P_j - X_{1_i} + A'_{ij}X'_{2_i} \\ P_j - X'_{1_i} + X_{2_i}A_{ij} & -X_{2_i} - X'_{2_i} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0_j} + C'Q_iC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$Q_{0_j} + C'Q_\lambda C < 0, \quad (34)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (21) torna a origem ($x = 0$) do sistema (16) e (17) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere que (33) e (34) são factíveis. Deste modo, a partir de (21) e (34), para $x \neq 0$ segue que:

$$\begin{aligned} 0 > x'(Q_{0_j} + C'Q_\lambda C)x &\geq x'Q_{0_j}x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_i y) \\ &= x'(Q_{0_j} + C'Q_\sigma C)x. \end{aligned} \quad (35)$$

Note que (35) pode ser reescrita como:

$$0 > x'(Q_{0_j} + C'Q_\sigma C)x = x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{0_j} + C'Q_\sigma C & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \quad (36)$$

Desta maneira, observe que a partir de (33) e (36), obtém-se:

$$\begin{aligned} 0 > x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{0_j} + C'Q_\sigma C & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ > x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1_\sigma}A_{\sigma j} + A'_{\sigma j}X'_{1_\sigma} & P_j - X_{1_\sigma} + A'_{\sigma j}X'_{2_\sigma} \\ P_j - X'_{1_\sigma} + X_{2_\sigma}A_{\sigma j} & -X_{2_\sigma} - X'_{2_\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (37)$$

Definindo-se $P(\alpha) = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)$ e a partir de (17), multiplicando (37) por α_j e

realizando a soma entre $j = 1$ e $j = r$, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
0 &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r \alpha_j (Q_{0j} + C' Q_\sigma C) & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\
&> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma} A(\sigma, \alpha) + A(\sigma, \alpha)' X_{1\sigma}' & P(\alpha) - X_{1\sigma} + A(\sigma, \alpha)' X_{2\sigma}' \\ P(\alpha) - X_{1\sigma}' + X_{2\sigma} A(\sigma, \alpha) & -X_{2\sigma} - X_{2\sigma}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\
&= x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{1\sigma} \\ X_{2\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\sigma, \alpha) & -I_n \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} A(\sigma, \alpha) & -I_n \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_{1\sigma} \\ X_{2\sigma} \end{bmatrix}' \right\} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\
&= x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x. \tag{38}
\end{aligned}$$

Considerando a função candidata quadrática de Lyapunov $V(x) = x' P(\alpha) x$, note que a partir de (17), $V(x) > 0$ para $x \neq 0$. Além disto, observe que a partir de (16) e (38), $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$. Deste modo, a prova está concluída. \square

O teorema a seguir generaliza as condições dispostas no Teorema 7 através da inserção do custo garantido definido em (30).

Teorema 8. *Considere o sistema linear chaveado incerto (16) e (17) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes $X_{1i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:*

$$P_j - \rho I_n < 0, \tag{39}$$

$$\begin{bmatrix} X_{1i} A_{ij} + A'_{ij} X_{1i}' + C' C & P_j - X_{1i} + A'_{ij} X_{2i}' \\ P_j - X_{1i}' + X_{2i} A_{ij} & -X_{2i} - X_{2i}' \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0j} + C' Q_i C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{40}$$

$$Q_{0j} + C' Q_\lambda C < 0, \tag{41}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (21) torna a origem ($x = 0$) do sistema (16) e (17) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e admite o limitante superior para o custo garantido definido em (30).

Demonstração. A prova deste teorema utiliza as mesmas ideias apresentadas na demonstração

do Teorema 7. Note que, a partir de (38), segue que:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'C & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ 0 &> \dot{V}(x) + y'y, \end{aligned} \quad (42)$$

sendo $P(\alpha) = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)$. Considerando uma função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, note que a partir de (17), $V(x) > 0$ para $x \neq 0$. Além disto, observe que $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$ doravante (42). Agora, integrando (42) de zero até o infinito, considerando $x_0 = x(0) \neq 0$, a partir de (39), têm-se que:

$$J = \int_0^\infty y'y dt < x_0' P(\alpha) x_0 < \max_{j \in \mathbb{K}_r} (x_0' P_j x_0) < \rho x_0' I_n x_0. \quad (43)$$

□

Então o Teorema 8 fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P_j = P_j' > 0, \rho > 0, Q_{0j} = Q_{0j}', Q_i = Q_i', X_{1i}, X_{2i}} \{ \rho : (39) - (41) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j \in \mathbb{K}_r \}. \quad (44)$$

Agora, considere que o vetor $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ definido em (17) é incerto, porém invariante no tempo. Sendo assim, busca-se flexibilizar as condições dispostas no Teorema 7 inserindo variáveis de folga. Desta maneira, propõe-se o seguinte teorema:

Teorema 9. *Considere o sistema linear chaveado incerto (16) e (17) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes $X_{1ik} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2ik} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:*

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} X_{1ik} A_{ij} + X_{1ij} A_{ik} + A'_{ij} X'_{1ik} + A'_{ik} X'_{1ij} & P_{jk} - X_{1ik} + A'_{ij} X'_{2ik} + P_{kj} - X_{1ij} + A'_{ik} X'_{2ij} \\ (*) & -X_{2ik} - X'_{2ik} - X_{2ij} - X'_{2ij} \end{bmatrix} \\ &< \begin{bmatrix} Q_{0jk} + Q_{0kj} + 2C' Q_i C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$Q_{0jk} + C' Q_i C < 0, \quad (46)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (21) torna a origem ($x = 0$) do sistema (16) e (17) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere que (45) e (46) são factíveis. Deste modo, a partir de (21) e (46),

para $x \neq 0$ segue que:

$$\begin{aligned} 0 > x'(Q_{0_{jk}} + C'Q_{\lambda}C)x &\geq x'Q_{0_{jk}}x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_i y) \\ &= x'(Q_{0_{jk}} + C'Q_{\sigma}C)x. \end{aligned} \quad (47)$$

Deste modo, observe que (47) pode ser reescrita como:

$$0 > x'(Q_{0_{jk}} + C'Q_{\sigma}C)x = x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + C'Q_{\sigma}C & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \quad (48)$$

Agora, considere $P(\alpha) = (\alpha_1 \alpha_1 P_{11} + \alpha_1 \alpha_2 P_{12} + \dots + \alpha_r \alpha_r P_{rr})$, $X_1(\sigma, \alpha) = (\alpha_1 X_{1\sigma_1} + \alpha_2 X_{1\sigma_2} + \dots + \alpha_r X_{1\sigma_r})$, $X_2(\sigma, \alpha) = (\alpha_1 X_{2\sigma_1} + \alpha_2 X_{2\sigma_2} + \dots + \alpha_r X_{2\sigma_r})$. Deste modo, multiplicando (48) por $\alpha_j \times \alpha_k$ e somando entre $j = 1$ até $j = r$ e $k = 1$ até $k = r$, respectivamente, a partir de (45) note que:

$$\begin{aligned} 0 > & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + Q_{0_{kj}} + 2C'Q_{\sigma}C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ > & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma_k} A_{\sigma_j} + A'_{\sigma_j} X'_{1\sigma_k} + X_{1\sigma_j} A_{\sigma_k} + A'_{\sigma_k} X'_{1\sigma_j} \\ P_{jk} - X'_{1\sigma_k} + X_{2\sigma_k} A_{\sigma_j} + P_{kj} - X'_{1\sigma_j} + X_{2\sigma_j} A_{\sigma_j} \\ P_{jk} - X_{1\sigma_k} + A'_{\sigma_j} X'_{2\sigma_k} + P_{kj} - X_{1\sigma_j} + A'_{\sigma_k} X'_{2\sigma_j} \\ -X_{2\sigma_k} - X'_{2\sigma_k} - X_{2\sigma_j} - X'_{2\sigma_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (49)$$

Note que (49) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} 0 > & \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma_k} A_{\sigma_j} + A'_{\sigma_j} X'_{1\sigma_k} \\ P_{jk} - X'_{1\sigma_k} + X_{2\sigma_k} A_{\sigma_j} \\ P_{jk} - X_{1\sigma_k} + A'_{\sigma_j} X'_{2\sigma_k} \\ -X_{2\sigma_k} - X'_{2\sigma_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ > & x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(\sigma, \alpha) A(\sigma, \alpha) + A(\sigma, \alpha)' X_1(\sigma, \alpha)' \\ P(\alpha) - X_1(\sigma, \alpha)' + X_2(\sigma, \alpha) A(\sigma, \alpha) \\ P(\alpha) - X_1(\sigma, \alpha) + A(\sigma, \alpha)' X_2(\sigma, \alpha)' \\ -X_2(\sigma, \alpha) - X_2(\sigma, \alpha)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ = & x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1(\sigma, \alpha) \\ X_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\sigma, \alpha) & -I_n \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[A(\sigma, \alpha) \quad -I_n \right]' \left\{ \begin{array}{l} X_1(\sigma, \alpha) \\ X_2(\sigma, \alpha) \end{array} \right\}' \left[\begin{array}{c} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{array} \right] x \\
& = x' \left[\begin{array}{cc} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{array} \right] x. \tag{50}
\end{aligned}$$

Considerando $P(\alpha) = (\alpha_1 \alpha_1 P_{11} + \alpha_1 \alpha_2 P_{12} + \dots + \alpha_r \alpha_r P_{rr})$ e uma função quadrática candidata de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, note que a partir de (17), $V(x) > 0$, para $x \neq 0$. Além disto, observe que $\dot{V}(x) < 0$, doravante de (50) e (16). Deste modo, a prova está concluída. \square

O teorema a seguir insere o critério de desempenho definido em (30) nas condições dispostas no Teorema 9.

Teorema 10. *Considere o sistema linear chaveado incerto (16) e (17) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes $X_{1_{ik}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2_{ik}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:*

$$P_{jk} - \rho I_n < 0, \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cc} X_{1_{ik}} A_{ij} + X_{1_{ij}} A_{ik} + A'_{ij} X'_{1_{ik}} + A'_{ik} X'_{1_{ij}} + 2C' C & P_{jk} - X_{1_{ik}} + A'_{ij} X'_{2_{ik}} + P_{kj} - X_{1_{ij}} + A'_{ik} X'_{2_{ij}} \\ (*) & -X_{2_{ik}} - X'_{2_{ik}} - X_{2_{ij}} - X'_{2_{ij}} \end{array} \right] \\
& < \left[\begin{array}{cc} Q_{0_{jk}} + Q_{0_{kj}} + 2C' Q_i C & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \tag{52}
\end{aligned}$$

$$Q_{0_{jk}} + C' Q_i C < 0, \tag{53}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (21) torna a origem ($x = 0$) do sistema (16) e (17) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e admite o limitante superior para o custo garantido definido em (30).

Demonstração. Considerando as mesmas ideias utilizadas nos Teoremas 8 e 9, conclui-se que a partir de (17), $V(x) > 0$ para $x \neq 0$. Além disto, observe que $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$ e o custo (43) mantêm-se. \square

Então o Teorema 10 fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{\substack{P_{jk}=P'_{jk}>0, \rho>0, Q_{0_{jk}}=Q'_{0_{jk}}, Q_i=Q'_i \\ X_{1_{ik}}, X_{2_{ik}}, X_{1_{ij}}, X_{2_{ij}}} \{ \rho : (51) - (53) \text{ mantêm-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j, k \in \mathbb{K}_r \}. \tag{54}$$

O teorema a seguir compara as condições dispostas nos Teoremas 5 e 9.

Teorema 11. *Se as condições apresentadas no Teorema 5 são satisfeitas, então as condições do Teorema 9 também são satisfeitas.*

Demonstração. Suponha que as condições (22) e (23) do Teorema 5 são factíveis para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$. Se existem matrizes Q_{0_j} , Q_i , P_k e P_j e uma pequena constante $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi > 0$ tais que:

$$\frac{1}{2} \times \left\{ (A'_{ij}P_k + P_kA_{ij} + A'_{ik}P_j + P_jA_{ik}) - 2Q_{0_j} - 2C'Q_iC + \xi(A'_{ij} + A'_{ik}) \left(\frac{1}{4} \times \xi^{-1}I_n \right) (A_{ij} + A_{ik})\xi \right\} < 0. \quad (55)$$

Aplicando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) em (55) obtêm-se:

$$\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} (A'_{ij}P_k + P_kA_{ij} + A'_{ij}P_j + P_jA_{ik}) - 2Q_{0_j} - 2C'Q_iC & \xi(A'_{ij} + A'_{ik}) \\ (A_{ij} + A_{ik})\xi & -4\xi I_n \end{bmatrix} < 0. \quad (56)$$

Observe que, sendo $Q_{0_{jk}} = Q_{0_{kj}} = Q_{0_j}$, $P_{jk} = P_k$, $P_{kj} = P_j$, $X_{1_{ik}} = P_k$, $X_{1_{ij}} = P_j$ e $X_{2_{ij}} = X_{2_{ik}} = \xi I_n$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, se a condição (56) se mantêm, então a condição (45) também se mantêm. Deste modo, a prova está concluída. \square

Teorema 12. *Se as condições dadas no Teorema 7 são satisfeitas, então as condições do Teorema 9 também são satisfeitas.*

Demonstração. Note que, sendo $X_{1_{ik}} = X_{1_i}$, $X_{2_{ik}} = X_{2_i}$ e $Q_{0_{jk}} = Q_{0_j}$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a condição (45) é equivalente à condição (33). Desta maneira, a prova está concluída. \square

Durante o desenvolvimento da tese, os Teoremas 5, 7, 9, 11 e 12 foram publicados em Mainardi Júnior et al. (2015). Em seguida, visando generalizar as condições dispostas no Teorema 9, utilizam-se as relaxações propostas em Liu e Zhang (2003) e Teixeira, Assunção e Avellar (2003).

Teorema 13. *Considere o sistema linear chaveado incerto (16) e (17) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $\xi_{ijk} = \xi'_{ikj} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\phi_{jk} = \phi'_{kj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $w_{jk} = w'_{kj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{jk} =$*

$P'_{kj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{1,jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2,jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$\Psi_{ikk} - \gamma_{ikk} < \xi_{ikk}, \quad (57)$$

$$\Psi_{ijk} + \Psi'_{ijk} - \gamma_{ijk} - \gamma'_{ijk} < \xi_{ijk} + \xi'_{ijk}, \quad k \neq j, \quad (58)$$

$$\theta_{kk} < \phi_{kk}, \quad (59)$$

$$\theta_{jk} + \theta'_{jk} < \phi_{jk} + \phi'_{jk}, \quad k \neq j, \quad (60)$$

$$P_{kk} > w_{kk} \quad (61)$$

$$P_{jk} + P'_{jk} > w_{jk} + w'_{jk}, \quad k \neq j, \quad (62)$$

$$W^* > 0, \quad (63)$$

$$\Phi^* < 0, \quad (64)$$

$$\Xi_i^* < 0, \quad (65)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j, k \in \mathbb{K}_r$, sendo,

$$W^* = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & \cdots & w_{rr} \end{bmatrix}, \quad (66)$$

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{r1} & \cdots & \phi_{rr} \end{bmatrix}, \quad (67)$$

$$\Xi_i^* = \begin{bmatrix} \xi_{i11} & \cdots & \xi_{i1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{ir1} & \cdots & \xi_{irr} \end{bmatrix}, \quad (68)$$

$$\Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} X_{1,ik}A_{ij} + A'_{ij}X'_{1,ik} + X_{1,ij}A_{ik} + A'_{ik}X'_{1,ij} \\ P_{jk} - X'_{1,ik} + X_{2,ik}A_{ij} + P_{kj} - X'_{1,ij} + X_{2,ij}A_{ik} \\ P_{jk} - X_{1,ik} + A'_{ij}X'_{2,ik} + P_{kj} - X_{1,ij} + A'_{ik}X'_{2,ij} \\ -X_{2,ik} - X'_{2,ik} - X_{2,ij} - X'_{2,ij} \end{bmatrix}, \quad (69)$$

$$\gamma_{ijk} = \begin{bmatrix} Q_{0,jk} + Q_{0,kj} + 2C'Q_iC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (70)$$

$$\theta_{jk} = Q_{0,jk} + C'Q_\lambda C. \quad (71)$$

Então, a regra de chaveamento (21), torna a origem ($x=0$) do sistema linear chaveado incerto (16) e (17) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere as seguintes definições:

$$X = \begin{bmatrix} X_1(\sigma, \alpha) \\ X_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k, \quad \Delta(\sigma, \alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_1 T \\ \alpha_2 T \\ \vdots \\ \alpha_r T \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Em seguida, considere que (57)-(65) são factíveis. Então, a partir de (57)-(58), (67)-(72), para $x \neq 0$, segue que:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \Delta'(\sigma, \alpha) \Xi_i^* \Delta(\sigma, \alpha) x \\ &= x' \sum T' \xi_{ijk} T x \\ &> x' \sum T' (\psi_{ijk} - \gamma_{ijk}) T x. \end{aligned} \quad (73)$$

A partir de (69)-(71), note que (73) pode ser reescrita como:

$$0 > x' \sum T' \left(\begin{bmatrix} X_{1ik} A_{ij} + A'_{ij} X'_{1ik} + X_{1ij} A_{ik} + A'_{ik} X'_{1ij} \\ P_{jk} - X'_{1ik} + X_{2ik} A_{ij} + P_{kj} - X'_{1ij} + X_{2ij} A_{ik} \\ P_{jk} - X_{1ik} + A'_{ij} X'_{2ik} + P_{kj} - X_{1ij} + A'_{ik} X'_{2ij} \\ -X_{2ik} - X'_{2ik} - X_{2ij} - X'_{2ij} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{0jk} + Q_{0kj} + 2C' Q_i C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) T x. \quad (74)$$

Observe que, $\sum (X_{1ik} A_{ij} + X_{1ij} A_{ik}) = 2 \sum X_{1ik} A_{ij}$, $\sum (P_{jk} + P_{kj}) = 2 \sum P_{jk}$, $\sum (X_{1ik} + X_{1ij}) = 2 \sum X_{1ik}$ e $\sum (Q_{0jk} + Q_{0kj}) = 2 \sum Q_{0jk}$. Deste modo, verifique que (74) pode ser reescrita como:

$$0 > 2x' \sum T' \left(\begin{bmatrix} X_{1ik} A_{ij} + (*) & P_{jk} - X_{1ik} + A'_{ij} X'_{2ik} \\ (*) & -X_{2ik} - X'_{2ik} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{0jk} + C' Q_i C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) T x. \quad (75)$$

Então, defina que $X_1(\sigma, \alpha) = (\alpha_1 X_{1\sigma_1} + \alpha_2 X_{1\sigma_2} + \dots + \alpha_r X_{1\sigma_r})$, $X_2(\sigma, \alpha) = (\alpha_1 X_{2\sigma_1} + \alpha_2 X_{2\sigma_2} + \dots + \alpha_r X_{2\sigma_r})$, $Q_0(\alpha) = (\alpha_1 \alpha_1 Q_{011} + \alpha_1 \alpha_2 Q_{012} + \alpha_2 \alpha_1 Q_{021} + \dots + \alpha_r \alpha_r Q_{0rr})$, $P(\alpha) = (\alpha_1 \alpha_1 P_{11} + \alpha_1 \alpha_2 P_{12} + \alpha_2 \alpha_1 P_{21} + \dots + \alpha_r \alpha_r P_{rr})$ e a partir (17) e (75), considerando $\sigma = i$, obtém-se:

$$0 > x' T' \left(\begin{bmatrix} X_1(\sigma, \alpha) A(\sigma, \alpha) + (*) & (*) \\ P(\alpha) - X'_1(\sigma, \alpha) + X_2(\sigma, \alpha) A(\sigma, \alpha) & -X_2(\sigma, \alpha) - X'_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} - \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cc} Q_0(\alpha) + C'Q_\sigma C & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] T x \\
= & x' T' \left(\left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{array} \right] + X \left[\begin{array}{c} A'(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{array} \right]' + \left[\begin{array}{c} A'(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{array} \right] X' \right\} - \right. \\
& \left. \left[\begin{array}{cc} Q_0(\alpha) + C'Q_\sigma C & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \right) T x \\
= & x' T' \left(\left[\begin{array}{cc} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} Q_0(\alpha) + C'Q_\sigma C & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \right) T x. \tag{76}
\end{aligned}$$

Agora, considerando que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual do que a combinação convexa destes números, observe que, a partir de (16) e (21), (76) torna-se:

$$\begin{aligned}
0 &> \dot{V}(x) - x' (Q_0(\alpha)) x - \min_{i \in \mathbb{K}_N} y' Q_i y, \\
&\geq \dot{V}(x) - x' (Q_0(\alpha) + C'Q_\lambda C) x, \\
&= \dot{V}(x) - x' \sum \theta_{jk} x. \tag{77}
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, considerando uma função candidata de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, sendo que $P(\alpha)$ foi definida anteriormente, a partir de (59)-(60), (71), note que (77) pode ser representada como:

$$\begin{aligned}
0 &> \dot{V}(x) - \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k x' \theta_{jk} x, \\
&> \dot{V}(x) - \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k x' \phi_{jk} x. \tag{78}
\end{aligned}$$

Em seguida, de (64) e (67), segue que:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &< \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k x' \phi_{jk} x, \\
\dot{V}(x) &< x' [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I] \Phi^* [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I]' x < 0. \tag{79}
\end{aligned}$$

Finalmente, a partir de (17), (61), (62), (63) e (66), observe que:

$$\begin{aligned}
V(x(t)) &= x' [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I] \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1} & \dots & P_{rr} \end{bmatrix} [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I]' x, \\
&> x' [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I] \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & \dots & w_{rr} \end{bmatrix} [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I]' x,
\end{aligned}$$

$$= x' \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k W^* x > 0. \quad (80)$$

Além disto, a partir de (79) e (80), verifique que, respectivamente, $\dot{V}(x) < 0$ e $V(x) > 0$, para $x \neq 0$. Deste modo, a prova está concluída. \square

A seguir propõe-se a generalização do Teorema 13 através da inserção de um critério de desempenho, neste caso, o custo garantido (30).

Teorema 14. *Considere o sistema linear chaveado incerto (16) e (17) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes simétricas $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $\xi_{ijk} = \xi'_{ikj} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\phi_{jk} = \phi'_{kj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $w_{jk} = w'_{kj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{jk} = P'_{kj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{1_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\Psi_{ikk} - \gamma_{ikk} < \xi_{ikk}, \quad (81)$$

$$\Psi_{ijk} + \Psi'_{ijk} - \gamma_{ijk} - \gamma'_{ijk} < \xi_{ijk} + \xi'_{ijk}, \quad k \neq j, \quad (82)$$

$$\theta_{kk} < \phi_{kk}, \quad (83)$$

$$\theta_{jk} + \theta'_{jk} < \phi_{jk} + \phi'_{jk}, \quad k \neq j, \quad (84)$$

$$P_{kk} > w_{kk} \quad (85)$$

$$P_{jk} + P'_{jk} > w_{jk} + w'_{jk}, \quad k \neq j, \quad (86)$$

$$P_{kk} - \rho I_n < 0, \quad (87)$$

$$\frac{1}{2} \times (P_{jk} + P'_{jk}) - \rho I_n < 0, \quad k \neq j, \quad (88)$$

$$W^* > 0, \quad (89)$$

$$\Phi^* < 0, \quad (90)$$

$$\Xi_i^* < 0, \quad (91)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j, k \in \mathbb{K}_r$, sendo,

$$W^* = \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & \dots & w_{rr} \end{bmatrix}, \quad (92)$$

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{r1} & \dots & \phi_{rr} \end{bmatrix}, \quad (93)$$

$$\Xi_i^* = \begin{bmatrix} \xi_{i11} & \dots & \xi_{i1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{ir1} & \dots & \xi_{irr} \end{bmatrix}, \quad (94)$$

$$\Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} X_{1ik}A_{ij} + A'_{ij}X'_{1ik} + X_{1ij}A_{ik} + A'_{ik}X'_{1ij} + 2C'C \\ P_{jk} - X'_{1ik} + X_{2ik}A_{ij} + P_{kj} - X'_{1ij} + X_{2ij}A_{ik} \\ P_{jk} - X_{1ik} + A'_{ij}X'_{2ik} + P_{kj} - X_{1ij} + A'_{ik}X'_{2ij} \\ -X_{2ik} - X'_{2ik} - X_{2ij} - X'_{2ij} \end{bmatrix}, \quad (95)$$

$$\gamma_{ijk} = \begin{bmatrix} Q_{0jk} + Q_{0kj} + 2C'Q_iC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (96)$$

$$\theta_{jk} = Q_{0jk} + C'Q_\lambda C. \quad (97)$$

Então, a regra de chaveamento (21), torna a origem ($x = 0$) do sistema linear chaveado incerto (16) e (17) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (30) mantém-se para todas as condições iniciais, $x_0 = x(0) \neq 0$.

Demonstração. A partir da demonstração do Teorema 13, note que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) + y'y &< \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k x' \phi_{jk} x, \\ \dot{V}(x) + y'y &< x' [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I] \Phi^* [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I]' x < 0. \end{aligned} \quad (98)$$

A partir de (80), verifique que $V(x) > 0$, para $x \neq 0$. Agora, multiplicando (87) e (88) à esquerda por $[\alpha_1 I, \alpha_2 I, \dots, \alpha_r I]$ e à direita por $[\alpha_1 I, \alpha_2 I, \dots, \alpha_r I]'$, segue que $P(\alpha) - \rho I_n < 0$. Em seguida, integrando (98) de zero até o infinito, obtém-se (30). Desta maneira, a prova está concluída. \square

Então o Teorema 14 fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{\substack{P_{jk}=P'_{kj}, \rho>0, Q_{0jk}=Q'_{0jk}, Q_i=Q'_i, \xi_{ijk}=\xi'_{ikj} \\ X_{1ik}, X_{2ik}, X_{1ij}, X_{2ij}, \phi_{jk}=\phi'_{kj}, w_{jk}=w'_{kj}}} \{\rho : (81) - (91) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j, k \in \mathbb{K}_r\}. \quad (99)$$

Teorema 15. *Se as condições do Teorema 9 são mantidas, então as condições dadas no Teorema 13 também se mantêm.*

Demonstração. A partir das definições (69) e (70), sendo $\psi_{ijk} = \psi'_{ijk}$, $\gamma_{ijk} = \gamma'_{ijk}$, então a condição (45) é equivalente à $\psi_{ijk} - \gamma_{ijk} < 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $k, j \in \mathbb{K}_r$. Se (45) é mantida, então existe $\xi_{ikk} = \psi_{ikk} - \gamma_{ikk} + \varepsilon I$, sendo $\varepsilon > 0$, um escalar suficientemente pequeno, tal que, $\xi_{ikk} < 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $k \in \mathbb{K}_r$, e $\xi_{ijk} = 0$ para $k \neq j$, $i \in \mathbb{K}_N$, $j, k \in \mathbb{K}_r$, tal que, (57) e (58) são mantidas. Além disto, neste caso, a condição (65) também se mantém, porque pode ser reescrita como mostrado em (68). Observe que no Teorema 9, $P_{jk} = P'_{jk} > 0$, porém, não se faz necessário que $P_{jk} = P'_{kj}$, para $j \neq k$. No entanto, note que $P(\alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j^2 P_{jj} +$

$$\sum_{j \neq k}^r \alpha_j \alpha_k (P_{jk} + P_{kj}) = \sum_{j=1}^r \alpha_j^2 P_{jj} + \sum_{j \neq k}^r \alpha_j \alpha_k (P_{N_{jk}} + P_{N_{kj}}),$$
 sendo $P_{N_{jk}} = P'_{N_{kj}} = \frac{1}{2} \times (P_{jk} + P_{kj})$. Adicionalmente, na condição (45) do Teorema 9, verifique que P_{jk} aparece somada com P_{kj} . Sendo assim, $P_{jk} + P_{kj} = P_{N_{jk}} + P_{N_{kj}}$. Portanto, sem perda de generalidade, considere que $P_{jk} = P'_{kj}$. Em seguida, note que, existe $w_{kk} = P_{kk} - \varepsilon I$, sendo $\varepsilon > 0$ um escalar suficientemente pequeno, tal que, $w_{kk} > 0$ para todo $k \in \mathbb{K}_r$, e $w_{jk} = 0$ para $j \neq k$, tal que as condições (61) e (62) se mantêm. Nesta situação, a condição (63) também é mantida, porque pode ser reescrita como apresentado em (66). Agora, a partir da definição (71), a condição (46) equivale-se à $\theta_{jk} < 0$, $j, k \in \mathbb{K}_r$. Sendo assim, quando (46) se mantêm, observe que (59) e (60) também são mantidas para $\phi_{ikk} = \gamma_{ikk} + \varepsilon I$, sendo que, $\varepsilon > 0$ é um escalar suficientemente pequeno, tal que, $\phi_{ikk} < 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $k \in \mathbb{K}_r$, e $\phi_{ijk} = 0$, para $j \neq k$, $i \in \mathbb{K}_N$ e $k, j \in \mathbb{K}_r$. Deste modo, a condição (64) mantêm-se, porque pode ser reescrita como mostrado em (67). Finalmente, quando (51) é mantida para algum $\rho > 0$, as condições (87) e (88) também são mantidas. Desta maneira, a prova está concluída. \square

A seguir, propõe-se contemplar a saída como uma nova variável de estado. Tal abordagem visa aumentar a ordem do sistema. Ao fazê-lo, a regra de chaveamento pode ser generalizada através da inserção de outras variáveis de decisão. Sendo assim, o novo vetor de variáveis de estado, será composto por $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Considere que o sistema linear chaveado incerto (10) possa ser reescrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma, \alpha)x(t), & x(0) = x_0 \\ \dot{y}(t) = CA(\sigma, \alpha)x(t) \end{cases} \quad (100)$$

Deste modo, a expressão (100) pode ser reescrita como:

$$\dot{\xi}(t) = A_N(\sigma, \alpha)\xi, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (101)$$

sendo $\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $A_N(\sigma, \alpha) = \begin{bmatrix} A(\sigma, \alpha) & 0 \\ CA(\sigma, \alpha) & 0 \end{bmatrix}$.

A partir de (17) e (101) propõe-se o seguinte teorema:

Teorema 16. *Considere o sistema linear chaveado incerto (100) e (101) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para realimentação. Se existirem, $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $P_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{1_{jk}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:*

$$\begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} > 0, \quad (102)$$

$$\begin{bmatrix} A'_{ij}P_{0_{jk}} + P_{0_{jk}}A_{ij} & A'_{ij}C'P_{1_{jk}} \\ P_{1_{jk}}CA_{ij} & 0_{p \times p} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & C'Z_i \\ Z_iC & Q_i \end{bmatrix}, \quad (103)$$

$$Q_{0_{jk}} + C'(2Z_\lambda + Q_\lambda)C < 0, \quad (104)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, j e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(y) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} [y'(2Z_i + Q_i)y], \quad (105)$$

torna o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema representado por (17) e (101) globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere que (102), (103) e (104) são factíveis e uma função candidata quadrática de Lyapunov:

$$V(\xi) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \xi' \begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} \xi, \quad (106)$$

sendo $k = 1, 2, \dots, r$ e $j = 1, 2, \dots, r$.

A partir de (100), (101), (103), (104), (105) e (106) têm-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \left\{ \begin{bmatrix} A'_{\sigma_j} & A'_{\sigma_j} C' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\sigma_j} & 0 \\ CA_{\sigma_j} & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_{\sigma_j} P_{0_{jk}} + P_{0_{jk}} A_{\sigma_j} & A'_{\sigma_j} C' P_{1_{jk}} \\ P_{1_{jk}} C A_{\sigma_j} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &< \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & C' Z_\sigma \\ Z_\sigma C & Q_\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \left[x'(Q_{0_{jk}})x + y'(2Z_\sigma + Q_\sigma)y \right] \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \left[x'(Q_{0_{jk}})x \right] + \min_{i \in \mathbb{K}_N} y'(2Z_i + Q_i)y \\ &\leq \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \left[Q_{0_{jk}} + C'(2Z_\lambda + Q_\lambda)C \right] < 0. \end{aligned} \quad (107)$$

Note que, a primeira desigualdade é obtida considerando (103). A partir de (17) e (106), verifique que $V(\xi) > 0$, para $\xi_0 = \xi(0) \neq 0$ e a partir de (107), $\dot{V}(\xi) < 0$. Deste modo, a prova está concluída. \square

O teorema a seguir generaliza as condições do Teorema 16 através da inserção de um critério de performance definido anteriormente, o custo garantido (30).

Teorema 17. *Considere o sistema linear chaveado incerto definido (100) e (101) e que a saída da planta $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para realimentação. Se existirem, $\lambda \in \Lambda$, um escalar, $\rho > 0$, matrizes simétricas $P_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{1_{jk}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} - \rho I_{(n+p)} < 0, \quad (108)$$

$$\begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} > 0, \quad (109)$$

$$\begin{bmatrix} A'_{ij}P_{0_{jk}} + P_{0_{jk}}A_{ij} + C'C & A'_{ij}C'P_{1_{jk}} \\ P_{1_{jk}}CA_{ij} & 0_{p \times p} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & C'Z_i \\ Z_iC & Q_i \end{bmatrix}, \quad (110)$$

$$Q_{0_{jk}} + C'(2Z_\lambda + Q_\lambda)C < 0, \quad (111)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, j e $k \in \mathbb{K}_r$, então a nova estratégia de chaveamento (105) torna a origem ($x = 0$) do sistema linear chaveado incerto (17) e (101) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (30) mantêm-se para todas as condições iniciais, $\xi_0 = \xi(0) \neq 0$.

Demonstração. A partir da demonstração do Teorema 16, observe que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \left\{ \begin{bmatrix} A'_{\sigma_j}P_{0_{jk}} + P_{0_{jk}}A_{\sigma_j} + C'C & A'_{\sigma_j}C'P_{1_{jk}} \\ P_{1_{jk}}CA_{\sigma_j} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C'C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &< \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \left\{ \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & C'Z_\sigma \\ Z_\sigma C & Q_\sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C'C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \left[x'(Q_{0_{jk}})x + y'(2Z_\sigma + Q_\sigma)y \right] - y'y \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \left[x'(Q_{0_{jk}})x \right] + \min_{i \in \mathbb{K}_N} y'(2Z_i + Q_i)y - y'y \\ &\leq \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k x' \left(Q_{0_{jk}} + C'(2Z_\lambda + Q_\lambda)C \right) x - y'y \\ &< -y'y \leq 0. \end{aligned} \quad (112)$$

A partir de (17) e considerando uma função quadrática de Lyapunov (106), note que, $V(\xi) > 0$ para $\xi \neq 0$. Em seguida, verifique que a partir de (112), $\dot{V}(\xi) < 0$ para $\xi \neq 0$. Agora, integrando (112) de zero até o infinito, considerando (108) e $\xi_0 = \xi(0) \neq 0$, obtém-se (43). Sendo assim, a prova está concluída. \square

Então o Teorema 17 fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{\substack{P_{0,jk}=P'_{0,jk}, P_{1,jk}=P'_{1,jk}, \rho>0 \\ Q_{0,jk}=Q'_{0,jk}, Q_i=Q'_i, Z_i=Z'_i}} \{\rho : (108) - (111) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j, k \in \mathbb{K}_r\}. \quad (113)$$

Na seção a seguir, considera-se a realimentação dinâmica de saída. Utiliza-se, além da saída medida da planta, a saída filtrada como uma nova variável a ser considerada na estratégia ou lei de chaveamento.

3.2.2 Realimentação dinâmica da saída para sistemas lineares chaveados incertos

Esta subseção destina-se ao estudo e análise de conceitos relacionados a compensadores dinâmicos para o controle de sistemas lineares chaveados incertos. Tal tópico de pesquisa, conforme descrito anteriormente, apresenta importantes contribuições na literatura, para mais detalhes, veja (GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2008). Porém, na maioria dos trabalhos, a regra de chaveamento não depende da saída medida da planta. Os autores utilizam um filtro de ordem completa em cascata com a planta. Sendo assim, a regra de chaveamento entre os subsistemas depende das variáveis de estado estimadas através deste filtro.

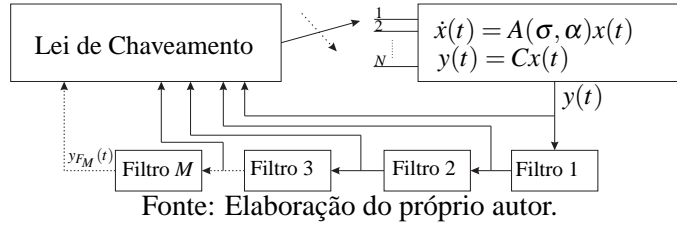
Deste modo, objetiva-se projetar uma nova regra de chaveamento dependente da saída da planta e também da saída filtrada. Desta maneira, consideram-se compensadores dinâmicos em cascata inseridos na saída medida da planta. em Geromel, Colaneri e Bolzern (2008) os autores propuseram a realimentação dinâmica de saída para o controle de sistemas lineares chaveados incertos usando uma classe particular de matrizes, conhecidas como Desigualdades *Lyapunov-Metzler* e uma estrutura especial para a função candidata de Lyapunov:

$$P_i = \begin{bmatrix} X & V \\ V' & \hat{X}_i \end{bmatrix}, \quad \det V \neq 0. \quad (114)$$

De (GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2008), a estratégia de chaveamento é definida como:

$$u(\hat{x}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \hat{x}' \hat{X}_i \hat{x}, \quad (115)$$

sendo \hat{x} o vetor estado estimado do filtro. Neste trabalho, considera-se que a matriz $P(\alpha)$ é incerta, porém, invariante no tempo, conforme mostrado em (17). Sendo assim, a metodologia de controle proposta em Geromel, Colaneri e Bolzern (2008) não pode ser diretamente aplicada. Desta maneira, propõe-se adicionar novas variáveis de estado visando aumentar a ordem do sistema através da inserção de um ou mais filtros dinâmicos em cascata na saída medida da planta, como mostrado na Figura 1.

Figura 1 - Diagrama de Controle Proposto .

Note que, na metodologia de controle proposta, a escolha da função de transferência do filtro dinâmico é critério do projetista. Neste trabalho, adotou-se a seguinte dinâmica do compensador:

$$\phi = \frac{w}{s + w}. \quad (116)$$

A partir de (116), note que o novo vetor de saída é dado por:

$$\dot{y}_F(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}_{F_1}(t) \\ \dot{y}_{F_2}(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_{F_M}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(y(t) - y_{F_1}(t)) \\ w(y_{F_1}(t) - y_{F_2}(t)) \\ \vdots \\ w(y_{F_{M-1}}(t) - y_{F_M}(t)) \end{bmatrix}, \quad (117)$$

sendo M o número de filtros dinâmicos em cascata alocados na saída medida. Sendo assim, considerando (116)-(117), a nova dinâmica da planta pode ser descrita como:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \hat{A}(\sigma, \alpha)\xi(t), & \xi(0) = \xi_0, \\ v(t) = \hat{C}\xi(t), \end{cases} \quad (118)$$

sendo $\xi(t) = [x(t)' \ y_F(t)']' \in \mathbb{R}^q$, $v = [y(t)' \ y_F(t)']' \in \mathbb{R}^z$, $\hat{A} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\hat{C} \in \mathbb{R}^{z \times q}$, $q = n + (M \times p)$, $z = (1 + M) \times p$.

As matrizes do sistema aumentado são descritas usando os parâmetros do sistema original (16), (17) e também através do número de filtros (M) selecionados pelo usuário, como segue:

$$\hat{A}(\sigma, \alpha) = \begin{bmatrix} A(\sigma, \alpha) & T_M \\ V_M & W_M \end{bmatrix}, \quad (119)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C & R_M \\ T'_M & Z_M \end{bmatrix}, \quad (120)$$

sendo que: $T_M \in \mathbb{R}^{n \times Mp}$, $V_M \in \mathbb{R}^{Mp \times n}$, $W_M \in \mathbb{R}^{Mp \times Mp}$, $R_M \in \mathbb{R}^{p \times Mp}$ e $Z_M \in \mathbb{R}^{Mp \times Mp}$ são descritas como:

$$T_M = 0_{n \times pM} \quad (121)$$

$$V_M = \begin{cases} \begin{bmatrix} wC \\ 0_{p(M-1) \times n} \end{bmatrix}, & \text{se } M > 1 \\ wC & , \text{se } M = 1 \end{cases} \quad (122)$$

$$W_M = \begin{cases} W_{i,j} = -wI_p, & \text{se } i = j, \\ W_{i,j} = wI_p, & \text{se } i > j \text{ e } i - j = 1, \\ W_{i,j} = 0_p, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (123)$$

$$R_M = 0_{p \times pM} \quad (124)$$

$$Z_M = \begin{cases} Z_{i,j} = I_p, & \text{se } i = j, \\ Z_{i,j} = 0_p, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (125)$$

para $i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$.

Observação 4. Note que, a metodologia de compensadores dinâmicos proposta acima, diferentemente das ideias publicadas em Geromel, Colaneri e Bolzern (2008), não exige que os filtros dinâmicos apresentem a mesma ordem da planta. Nos resultados de simulação, diferentes casos serão considerados.

Sendo assim, a partir de (118)-(125), formula-se o seguinte problema de controle:

Problema 3. Projetar uma regra de chaveamento $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ tal que:

$$\sigma(t) = u(v(t)), \quad (126)$$

torne o ponto de equilíbrio $\xi = 0$ do sistema definido em (17) e (118) globalmente assintoticamente estável e que também satisfaça um certo índice de desempenho, por exemplo, o custo garantido (30).

Desta maneira, a partir de (117), (118), propõe-se uma solução para o Problema de Controle 3.

Observação 5. Cabe ressaltar que, a metodologia de realimentação dinâmica proposta neste trabalho pode ser aplicada em qualquer teorema desenvolvido na seção anterior. Porém, aplicou-se, como exemplo de projeto, a abordagem proposta nas condições do Teorema 9.

Teorema 18. Considere o sistema linear chaveado incerto (17), (117) e (118) e que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para realimentação. Se existirem, $\lambda \in \Lambda$, matrizes $\Psi_{1_{ik}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Psi_{2_{ik}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, matrizes simétricas $\Gamma_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{z \times z}$ e matrizes simétricas definidas positiva

$P_{N_{jk}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, tais que:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{1_{ik}}\hat{A}_{ij} + \Psi_{1_{ij}}\hat{A}_{ik} + (*) & P_{N_{jk}} - \Psi_{1_{ik}} + \hat{A}'_{ij}\Psi'_{2_{ik}} + P_{N_{kj}} - \Psi_{1_{ij}} + \hat{A}'_{ik}\Psi'_{2_{ij}} \\ P_{N_{jk}} - \Psi'_{1_{ik}} + \Psi_{2_{ik}}\hat{A}_{ij} + P_{N_{kj}} - \Psi'_{1_{ij}} + \Psi_{2_{ij}}\hat{A}_{ik} & -\Psi_{2_{ik}} - \Psi_{2_{ij}} - (*) \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \Gamma_{0_{jk}} + \Gamma_{0_{kj}} + 2\hat{C}'\Gamma_i\hat{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (127)$$

$$\Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}'\Gamma_\lambda\hat{C} < 0, \quad (128)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento,

$$\sigma(\mathbf{v}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (\mathbf{v}'\Gamma_i\mathbf{v}) \quad (129)$$

torna a origem ($\xi = 0$) do sistema linear chaveado incerto (17), (117) e (118) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere que (127) e (128) são factíveis. A partir de (128) e (129), note que:

$$\begin{aligned} 0 &> \xi'(\Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}'\Gamma_\lambda\hat{C})\xi \geq \xi'\Gamma_{0_{jk}}\xi + \min_{i \in \mathbb{K}_N} \mathbf{v}'\Gamma_i\mathbf{v} \\ &= \xi'(\Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}'\Gamma_\sigma\hat{C})\xi \end{aligned} \quad (130)$$

Observe que, (130) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j \xi' \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}'\Gamma_\sigma\hat{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi, \\ &= \frac{1}{2} \times \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j \xi' \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Gamma_{0_{jk}} + \Gamma_{0_{kj}} + 2\hat{C}'\Gamma_\sigma\hat{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi. \end{aligned} \quad (131)$$

Deste modo, a partir de (127) e (131), obtém-se:

$$\begin{aligned} 0 &> \frac{1}{2} \times \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j \xi' \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Psi_{1_{ik}}\hat{A}_{ij} + \Psi_{1_{ij}}\hat{A}_{ik} + (*) \\ P_{N_{jk}} - \Psi'_{1_{ik}} + \Psi_{2_{ik}}\hat{A}_{ij} + P_{N_{kj}} - \Psi'_{1_{ij}} + \Psi_{2_{ij}}\hat{A}_{ik} \\ (*) \\ -\Psi_{2_{ik}} - \Psi_{2_{ij}} - (*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi. \end{aligned} \quad (132)$$

Note que de (132) tem-se que:

$$0 > \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j \xi' \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Psi_{1ik} \hat{A}_{ij} + \hat{A}'_{ij} \Psi'_{1ik} & (*) \\ P_{N_{jk}} - \Psi'_{1ik} + \Psi_{2ik} \hat{A}_{ij} & -\Psi_{2ik} - \Psi'_{2ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi. \quad (133)$$

Definindo-se $P_N(\alpha) = (\alpha_1 \alpha_1 P_{N_{11}} + \alpha_1 \alpha_2 P_{N_{12}} + \dots + \alpha_r \alpha_r P_{N_{rr}})$, $\Psi_1(\sigma, \alpha) = (\alpha_1 \Psi_{1\sigma 1} + \alpha_2 \Psi_{1\sigma 2} + \dots + \alpha_r \Psi_{1\sigma r})$, $\Psi_2(\sigma, \alpha) = (\alpha_1 \Psi_{2\sigma 1} + \alpha_2 \Psi_{2\sigma 2} + \dots + \alpha_r \Psi_{2\sigma r})$, note que (133) pode ser reescrita como:

$$0 > \xi' \begin{bmatrix} I_n & \hat{A}'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & P_N(\alpha) \\ P_N(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_1(\sigma, \alpha) \\ \Psi_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}(\sigma, \alpha) & -I_n \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \hat{A}'(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi'_1(\sigma, \alpha) & \Psi'_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi, \\ 0 > \begin{bmatrix} I_n & \hat{A}'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P_N(\alpha) \\ P_N(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}. \quad (134)$$

Considerando uma função candidata de Lyapunov $V(\xi) = \xi' P_N(\alpha) \xi$, note que de (17), $V(\xi) > 0$ para $\xi \neq 0$ e de (118) e (134), segue que $\dot{V}(\xi) < 0$. Deste modo, a prova está concluída. \square

O teorema a seguir generaliza as condições do Teorema 18 através da inserção de um critério de desempenho, neste caso, o custo garantido (30).

Teorema 19. *Considere o sistema linear chaveado incerto (17), (117) e (118) e que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para realimentação. Se existirem, um escalar $\rho > 0$, $\lambda \in \Lambda$, matrizes $\Psi_{1ik} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Psi_{2ik} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, matrizes simétricas $\Gamma_{0jk} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{z \times z}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_{N_{jk}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, tais que:*

$$P_{N_{jk}} - \rho I_q < 0, \quad (135)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{1ik} \hat{A}_{ij} + \Psi_{1ij} \hat{A}_{ik} + (*) + 2C'_c C_c & (*) \\ P_{N_{jk}} - \Psi'_{1ik} + \Psi_{2ik} \hat{A}_{ij} + P_{N_{kj}} - \Psi'_{1ij} + \Psi_{2ij} \hat{A}_{ik} & -\Psi_{2ik} - \Psi_{2ij} - (*) \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \Gamma_{0jk} + \Gamma_{0kj} + 2\hat{C}' \Gamma_i \hat{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (136)$$

$$\Gamma_{0jk} + \hat{C}' \Gamma_\lambda \hat{C} < 0, \quad (137)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (129) torna a origem ($\xi = 0$) do sistema linear chaveado incerto (117) e (118) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (30) mantêm-se para $\xi_0 = \xi(0) \neq 0$.

Observação 6. Note que, na definição do custo garantido (30), somente a saída medida da planta é utilizada para o cômputo. Desta maneira, define-se a matriz $C_c \in \mathbb{R}^{z \times q}$:

$$C_c = \begin{bmatrix} C & T_M \\ T'_M & T_M \end{bmatrix}. \quad (138)$$

Demonstração. A partir da demonstração do Teorema 18 note que:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \begin{bmatrix} I_n & \hat{A}'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'C & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ 0 &> \dot{V}(x) + y'y, \end{aligned} \quad (139)$$

sendo $P(\alpha) = (\alpha_1 \alpha_1 P_{11} + \alpha_1 \alpha_2 P_{12} + \dots + \alpha_r \alpha_r P_{rr})$. Considerando uma função quadrática de Lyapunov $V(\xi) = \xi' P(\alpha) \xi$, note que a partir de (17), $V(\xi) > 0$ para $\xi \neq 0$. Além disto, observe que $\dot{V}(\xi) < 0$ para $\xi \neq 0$ doravante (139). Agora, integrando (139) de zero até o infinito, considerando $\xi_0 = \xi(0) \neq 0$, obtém-se (30). Deste modo, a prova está concluída. \square

Então o Teorema 19 fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{\substack{P_{N_{jk}} = P'_{N_{jk}} > 0, \rho > 0, \Gamma_{0_{jk}} = \Gamma'_{0_{jk}}, \Gamma_i = \Gamma'_i \\ \Psi_{1_{ik}}, \Psi_{2_{ik}}, \Psi_{1_{ij}}, \Psi_{2_{ij}}} \{ \rho : (135) - (137) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j, k \in \mathbb{K}_r \}. \quad (140)$$

Teorema 20. Se as condições dispostas no Teorema 9 são satisfeitas, então as condições dispostas no Teorema 18 também são atendidas.

Demonstração. Suponha que as condições do Teorema 9 são satisfeitas. Então, existem $\lambda \in \Lambda$, $X_{1_{ik}}, X_{2_{ik}}, Q_{0_{jk}} = Q'_{0_{jk}}, Q_i = Q'_i$ e $P_{jk} = P'_{jk}$ que tornam as condições (45) e (46) factíveis para $i \in \mathbb{K}_N, j, k \in \mathbb{K}_r$. Objetiva-se mostrar que existem matrizes, $\Psi_{1_{ik}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Psi_{2_{ik}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Gamma_{0_{jk}} = \Gamma'_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Gamma_i = \Gamma'_i \in \mathbb{R}^{z \times z}$ e $P_{N_{jk}} = P'_{N_{jk}} > 0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$, descritas abaixo:

$$\begin{aligned} \Psi_{1_{ik}} &= \begin{bmatrix} X_{1_{ik}} & 0 \\ 0 & \delta I \end{bmatrix}, \Psi_{2_{ik}} = \begin{bmatrix} X_{2_{ik}} & 0 \\ 0 & \delta I \end{bmatrix}, \Gamma_{0_{jk}} = \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & \delta I \end{bmatrix}, \\ \Gamma_i &= \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & -\delta I \end{bmatrix}, P_{N_{jk}} = \begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & \delta I \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (141)$$

sendo um escalar $\delta > 0$, que tornem factíveis as condições dispostas no Teorema 18, dadas em (127) e (128). A prova é dividida em duas etapas. No primeiro passo, prova-se que a LMI (127) é factível. Em seguida, a análise segue para a condição (128).

Passo I Considere que todas as matrizes tenham dimensões adequadas. Substituindo as matrizes dispostas em (141) na condição (127) do Teorema 18, considerando (118)-(125) e

multiplicando à esquerda por T e à direita T' , obtém-se:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (142)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{1_{ijk}} & Z'_{2_{ijk}} \delta \\ \delta Z_{2_{ijk}} & \delta Z_{3_{ijk}} \end{bmatrix} < 0, \quad (143)$$

sendo que, $Z_{1_{ijk}} < 0$ é equivalente à condição (45) disposta no Teorema 9. Além disso, verifique que:

$$Z_{2_{ijk}} = \begin{bmatrix} 2CwI & 0 \\ 2CwI & 0 \end{bmatrix}, \quad (144)$$

$$Z_{3_{ijk}} = \begin{bmatrix} -4wI & -2wI \\ -2wI & -4I \end{bmatrix}. \quad (145)$$

Aplicando o complemento de Schur em (143), note que:

$$-Z_{1_{ijk}} - \delta Z_{2_{ijk}} (\delta Z_{3_{ijk}})^{-1} \delta Z'_{2_{ijk}} > 0. \quad (146)$$

Como $-Z_{1_{ijk}} > 0$, então existe um $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que:

$$\rho_{min}(-Z_{1_{ijk}}) > \rho_{max}(\delta Z_{2_{ijk}} (Z_{3_{ijk}})^{-1} Z'_{2_{ijk}}), \quad (147)$$

sendo que ρ representa os autovalores, a expressão (146) é satisfeita. Desta forma, (143) é atendida.

Passo II Verifica-se que, a partir de (141), utilizando $\lambda \in \Lambda$ obtido no Teorema 9, e utilizando as equações que descrevem o sistema aumentado (118)-(120), a expressão (128) pode ser reescrita como:

$$\Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}' \Gamma_{\lambda} \hat{C} = \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & -\delta I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\lambda} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (148)$$

$$= \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + C' Q_{\lambda} C & 0 \\ 0 & -\delta I + \tilde{Q}_{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (149)$$

sendo que \tilde{Q}_{λ} será definida a seguir. A partir de (46), verifique que $Q_{0_{jk}} + C' Q_{\lambda} C < 0$. Desta maneira, para que $\Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}' \Gamma_{\lambda} \hat{C} < 0$, basta que, $-\delta I + \tilde{Q}_{\lambda} < 0$, sendo que, de (141), $\tilde{Q}_{\lambda} = -\sum_{i=1}^N \lambda_i \delta I$. Deste modo, como $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = 1$, tem-se que, para um escalar $\delta > 0$, $-\delta I + \tilde{Q}_{\lambda} = -2\delta I < 0$. Segundo as demonstrações explicitadas nos passos I e II, a prova está concluída. \square

A seguir são apresentados três exemplos numéricos visando comprovar a eficácia da técnica de controle proposta nos teoremas supracitados. Os Exemplos 1 e 2 mostram que as condições propostas no Teorema 18 apresentam regiões de factibilidades maiores se comparadas com as condições dispostas nos Teoremas 4, 5, 7, 9, 13, 16. Além disto, gráficos de superfície mostram a variação do custo garantido (30) em relação às incertezas politópicas. Para finalizar, calcula-se o custo definido em (30) comparando-se os valores obtidos com os Teoremas 6, 8, 10, 14, 17 e 19. A partir do Exemplo 3, verifica-se que as condições propostas no Teorema 18 estabilizam o ponto de equilíbrio ($x = 0$), mesmo quando, as matrizes dos subsistemas não são Hurwitz.

3.3 EXEMPLO 1 - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Considere o sistema linear incerto (16) e (17), sendo $r = N = 2$, $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2\}$, e as seguintes matrizes que representam as dinâmicas dos subsistemas:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} h_1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & -1,5 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 & 0 \\ -2 & h_2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que as matrizes A_{12} e A_{22} dependem dos parâmetros incertos h_1 e h_2 . Deste modo, note que a matriz A_{12} não é Hurwitz para todos $h_1 \in [-30, -20]$ e matriz A_{22} é Hurwitz para todos $h_2 \in [0, 1, 5]$. Além disto, verifica-se que as A_{11} e A_{21} não são Hurwitz. Neste primeiro exemplo apresenta-se um estudo comparativo sobre a região de factibilidade obtida através das condições dos Teoremas 4, 5, 7, 9, 13, 16 e 18 para alguns pares de h_1 e h_2 , sendo $h_1 \in [-30, -20]$ e $h_2 \in [0, 1, 5]$. Além disto, comparações entre o custo garantido (30) são realizadas a partir das condições propostas nos Teoremas 6, 8, 10, 14, 17 e 19. A matriz de saída do sistema linear incerto chaveado (16) e (17) é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (150)$$

O *solver* utilizado para solucionar as LMIs foi o *LMILab* com a interface do *Yalmip* (LOFBERG, 2004) em ambiente MATLAB.

3.3.1 Estudo sobre regiões de factibilidade I

Inicialmente, adotou-se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$. Cabe ressaltar que escolheram-se tais valores baseando-se na factibilidade obtida pelas condições dispostas no Teorema 4 considerando-se $h_1 \in [-30, -20]$

e $h_2 \in [0, 1, 5]$, ou seja, para quaisquer outros valores de $\lambda_1 \neq 0,5$, a solução do Teorema 4 é in-factível. Em seguida, realizar-se-á a comparação entre as áreas de factibilidades obtidas através das condições dos Teoremas 4, 5, 7, 9, 13, 16 e 18.

A Figura 2 mostra um estudo comparativo entre as regiões de factibilidade obtidas através das condições propostas nos Teoremas 4 e 5. Observa-se que a região de factibilidade obtida com o Teorema 5 é maior se comparada com a região alcançada pelo Teorema 4. Tal fato pode ser justificado pela maior flexibilidade das variáveis do projeto.

Na Figura 3 apresenta-se o estudo comparativo sobre a factibilidade para os Teoremas 5 e 7. Note que a região de factibilidade alcançada através das condições do Teorema 7 é maior do que a região obtida pelo Teorema 5. Este aumento pode ser justificado pela inclusão das variáveis de folga presentes no Teorema 7.

Na Figura 4 comparam-se as regiões de factibilidades atingidas pelos Teoremas 7 e 9. Verifica-se que o Teorema 9 apresenta condições mais relaxadas, e portanto, justifica-se o aumento na área de factibilidade.

Na Figura 5 comparam-se as regiões de factibilidades obtidas através das condições dos Teoremas 9 e 18, considerando-se apenas um filtro dinâmico na saída da planta, e $w = 50$. Verifica-se que a realimentação dinâmica de saída proporcionou um ganho considerável na região de factibilidade. Tal fato, pode-se explicar pela flexibilização nas condições do Teorema 18 e também pela nova regra de chaveamento (129), que além da saída medida, também considera a saída filtrada como variável para definir o subsistema a ser ativado.

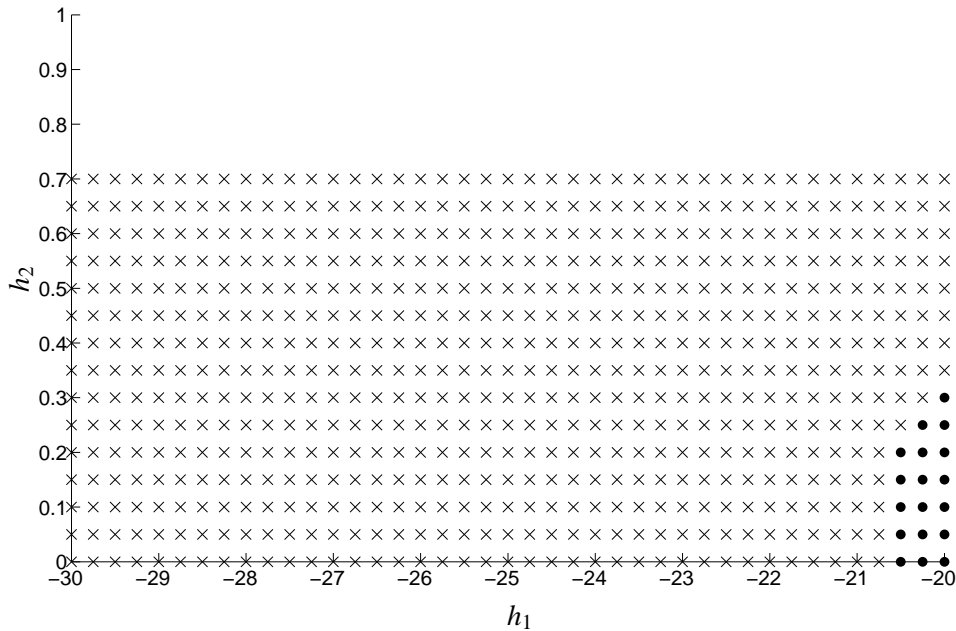
Observação 7. Para os valores de $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$ adotados neste exemplo, as condições dispostas nos Teoremas 13 e 16 apresentaram a mesma região de factibilidade obtida através das condições do Teorema 9. Deste modo, na Subseção 3.3.2 adotam-se outros valores para os parâmetros da combinação convexa visando refazer as comparações referentes às regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 9, 13 e 16.

3.3.2 Estudo sobre regiões de factibilidade II

Considere que $\lambda_1 = 0,75$ e $\lambda_2 = 0,25$. Tais valores foram escolhidos pois apresentam a maior região de factibilidade. Objetiva-se comparar as regiões de factibilidade obtidas com as condições dos Teoremas 9, 13 e 16 considerando alguns pares de $h_1 \in \{-30, -20\}$ e $h_2 \in \{2, 3\}$. Na Figura 6 comparam-se as regiões de factibilidade obtidas através das condições dos Teoremas 9 e 16. Ao considerar a saída medida como uma nova variável de estado, as condições do Teorema 16 tornam-se mais flexíveis. Deste modo, justifica-se o aumento da região factível.

Observação 8. Note que a região de factibilidade obtida através das condições dos Teoremas 9 e 13 permanecem iguais. Porém, no Exemplo 2, com a inserção de mais um subsistema e

Figura 2 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 4 e 5, sendo que a região factível obtida através do Teorema 4 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 5 é representada por (×).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

também com o aumento do número de incertezas, verificar-se-á que as condições mais gerais do 13 atingem maiores regiões de factibilidade e também reduzem o custo garantido.

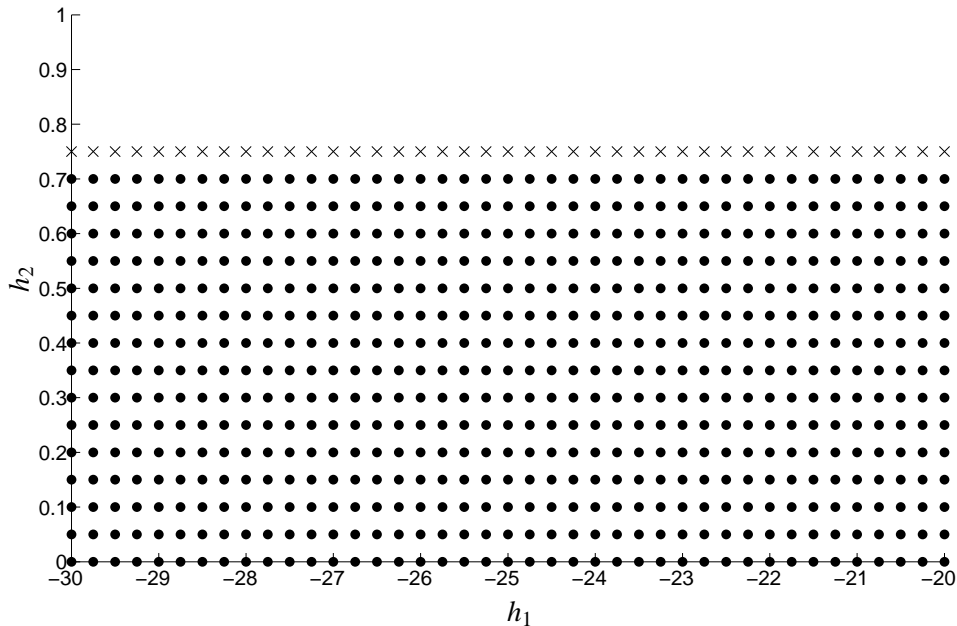
3.3.3 Cômputo do custo garantido

A seguir, comparar-se-á os custos obtidos através das condições propostas nos Teoremas 6, 8, 10, 14, 17 e 19. Para o cômputo do custo garantido definido em (30), inicialmente considera-se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$, $h_1 \in [-30, -20]$, $h_2 \in [0, 0,7]$ e uma condição inicial $x_0 = [2 \ 1]'$.

A Figura 7 mostra a variação do custo garantido em relação aos parâmetros incertos h_1 e h_2 , obtida através da solução das condições propostas no Teorema 6. Verifica-se que, a partir da Figura 3, as condições propostas no Teorema 5 são factíveis até $h_2 = 0,7$. Tal fato, também se observa no cômputo do custo garantido. Pode-se observar que conforme h_1 e h_2 aumentam, o valor do custo garantido também aumenta.

Na Figura 8 refaz-se a análise para o Teorema 8. Note que, as condições menos conservadoras propostas no Teorema 8 reduziram o valor do custo garantido significativamente. Já, a Figura 9 traça a variação do custo com relação as condições do Teorema 10. Tais condições são menos conservadoras e também reduziram o valor do custo, se comparado ao custo atingido com o Teorema 5.

Figura 3 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 5 e 7, sendo que a região factível obtida através do Teorema 5 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 7 é representada por (×).



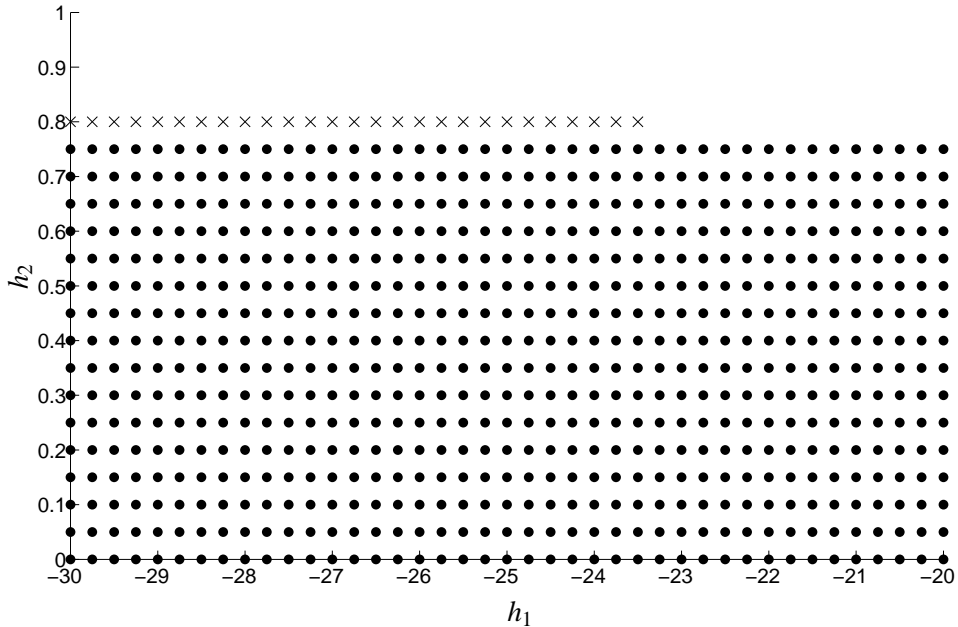
Fonte: Elaboração do próprio autor.

As Figuras 10, 11 e 12 mostram a variação do custo garantido obtido através das condições dos Teoremas 14, 17 e 19, respectivamente. Verifique que, as condições menos conservadoras do Teorema 17 reduziram o custo garantido se comparado com as condições do Teorema 14. A mesma análise segue para a diminuição do custo garantido, verificada através da flexibilização das condições do Teorema 19 quando comparadas às condições do Teorema 17.

Na Figura 13, a análise retrata uma comparação entre os custos garantidos calculados pelos Teoremas 10, 17 e 19. Verifica-se que, conforme esperado, as condições menos conservadoras propostas no Teorema 19 (traço verde) tornaram o custo garantido menor ou igual aos valores obtidos com as condições do Teorema 10 (traço preto) e Teorema 17 (traço vermelho).

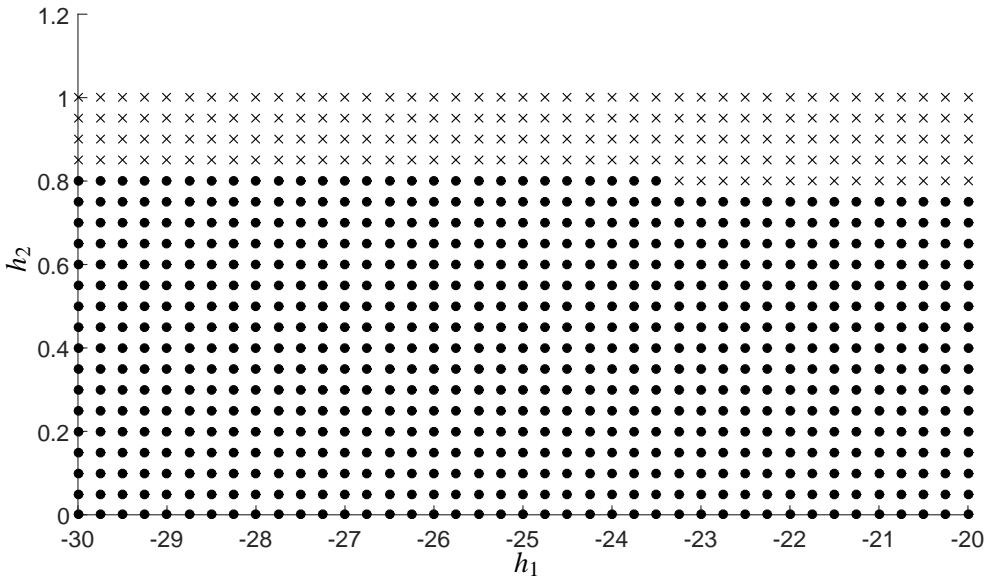
Observação 9. Note que, para o Exemplo 1, as condições dos Teoremas 10 e 14 apresentaram o mesmo valor para o custo garantido. Porém, quando aumenta-se a ordem do sistema, ou adicionam-se novas incertezas, as condições mais relaxadas do Teorema 14 reduzem o valor do custo garantido e aumentam a região de factibilidade. No Exemplo 2 estas afirmações tornar-se-ão mais claras.

Figura 4 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 7 e 9, sendo que a região factível obtida através do Teorema 7 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (×).



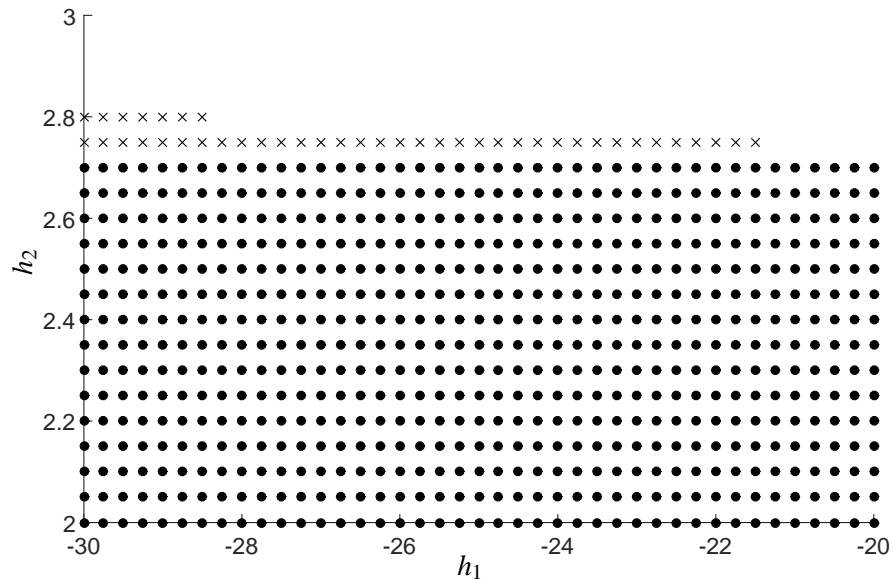
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 5 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 9 e 18, sendo que a região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 18 é representada por (×).



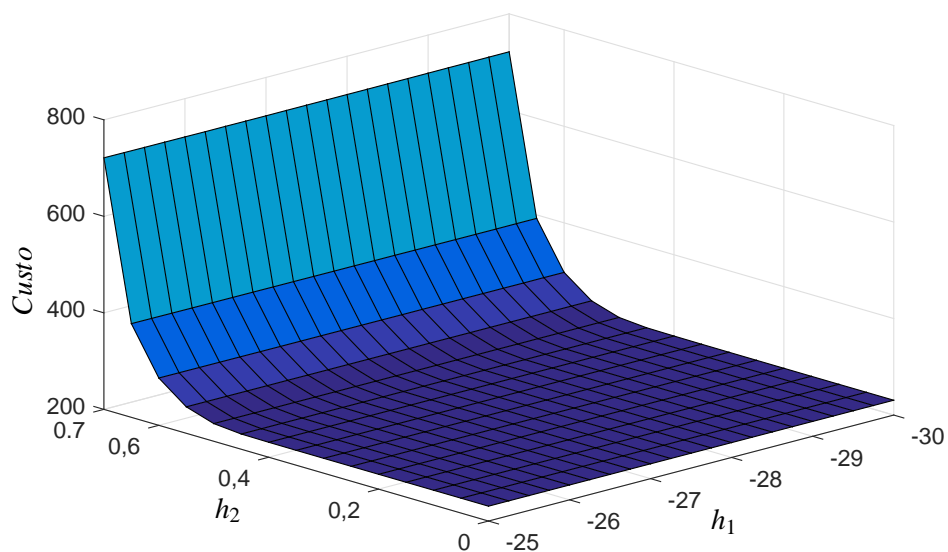
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 6 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 9 e 16, sendo que a região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (●) e a região factível obtida através do Teorema 16 é representada por (×) .



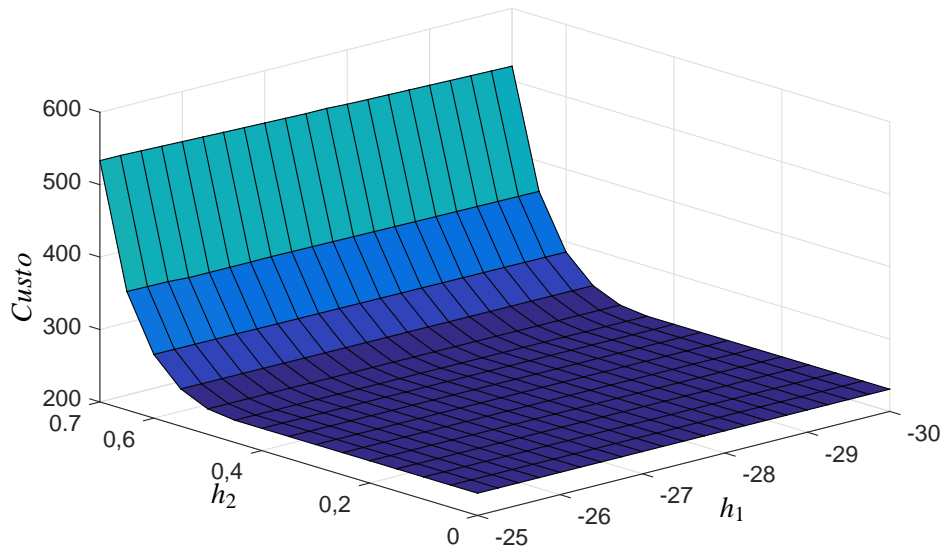
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 7 - Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teorema 6 .



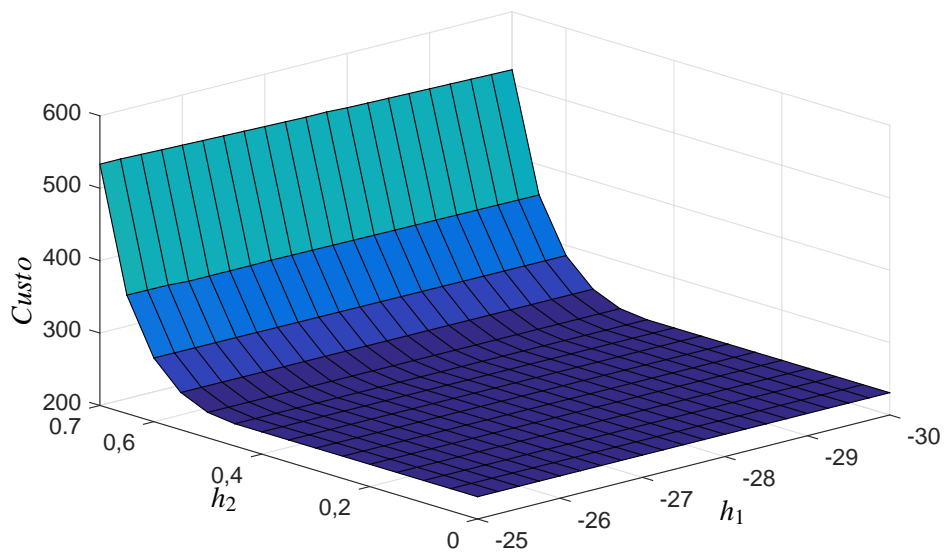
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 8 - Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teorema 8 .



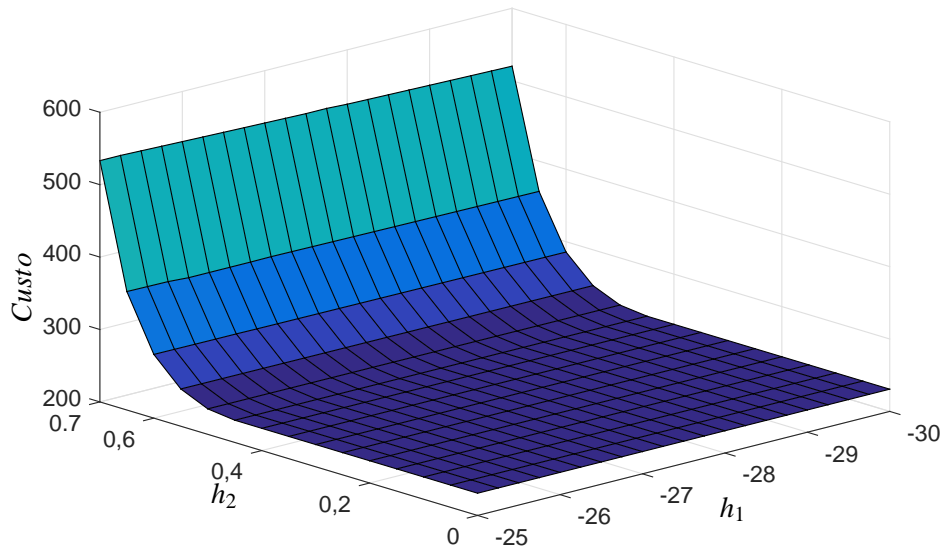
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 9 - Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teorema 10.



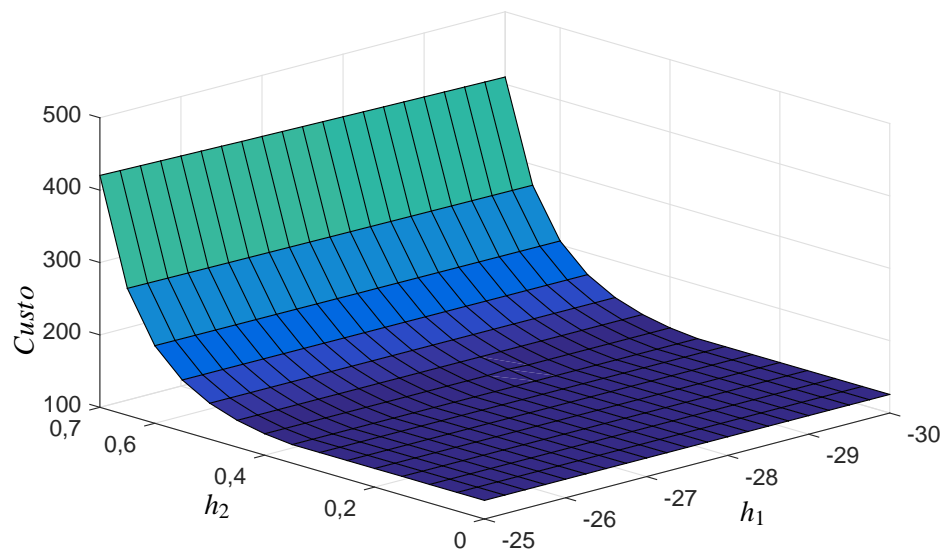
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 10 - Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teorema 14 .



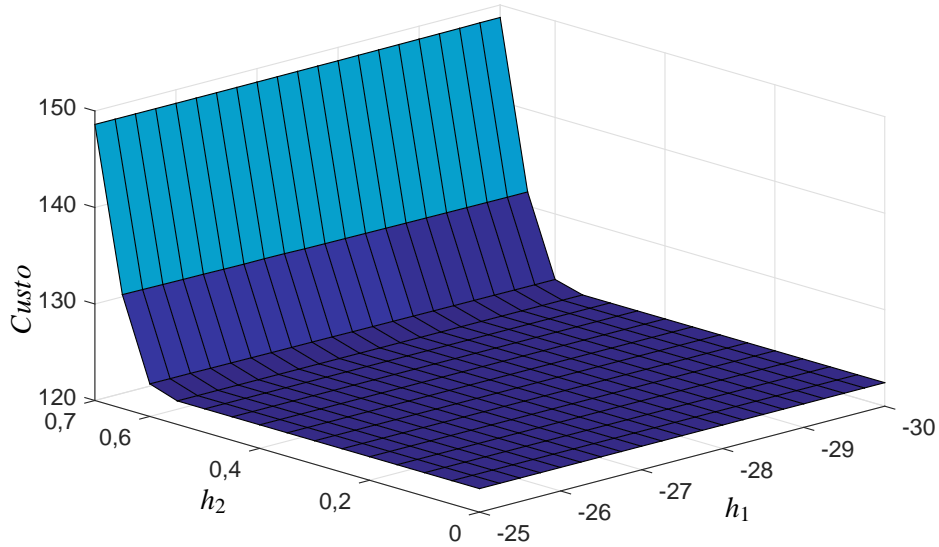
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 11 - Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teorema 17 .



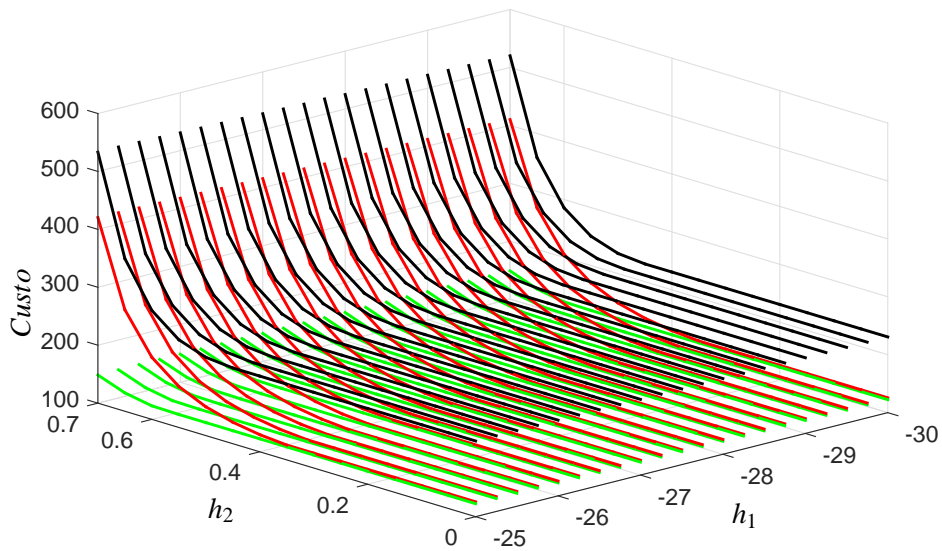
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 12 - Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teorema 19 .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 13 - Variação do custo (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 obtida através das condições do Teoremas 10 (preto), 17 (vermelho) e 19 (verde) .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

3.4 EXEMPLO 2 - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Considere o sistema linear incerto (16) e (17), sendo $r = 2$, $N = 3$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$, e as seguintes matrizes que representam as dinâmicas dos subsistemas:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, & A_{12} &= \begin{bmatrix} h_1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \\
 A_{21} &= \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, & A_{22} &= \begin{bmatrix} -5 & -6 & 1 \\ -3 & h_2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \\
 A_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}, & A_{32} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & h_3 & -3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{151}$$

As matrizes A_{12} , A_{22} e A_{32} dependem de parâmetros incertos, h_1 , h_2 e h_3 respectivamente. Desta maneira, é possível verificar que A_{12} e A_{32} não são Hurwitz para todos valores de $h_1 \in [-5, 5]$ e $h_3 \in [-2, 5, 27, 5]$, respectivamente. Além disso, note que a matriz A_{22} é Hurwitz para todos valores de $h_2 \in [-50, 0]$. Outrossim, observe que as matrizes A_{11} e A_{31} não são Hurwitz e a matriz A_{21} é Hurwitz.

Este exemplo apresenta um estudo comparativo referente à duas etapas. Inicialmente estuda-se as regiões de factibilidade de acordo com as condições dispostas nos Teoremas 4, 5, 7, 9, 13, 16 e 18. Em seguida, calcula-se o custo garantido definido em (30) para os Teoremas 6, 8, 10, 17 e 19. A matriz de saída do sistema linear chaveado é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{152}$$

O *solver* utilizado nas simulações foi o *LMILab* com a interface do *Yalmip* (LOFBERG, 2004) em ambiente MATLAB.

3.4.1 Estudo sobre factibilidade

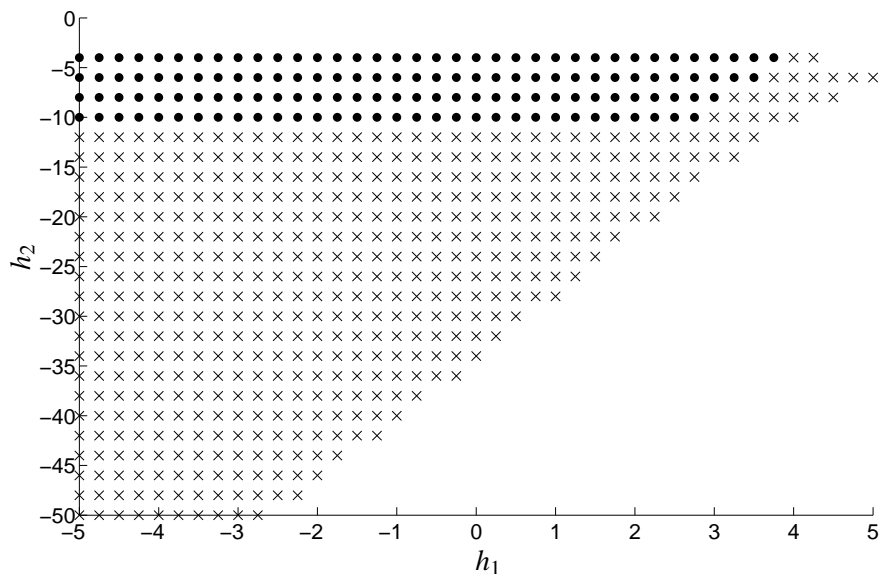
A seguir são apresentados três estudos referentes as regiões de factibilidade obtidas com as condições propostas nos Teoremas 4, 5, 7, 9, 13, 16 e 18.

3.4.1.1 Caso I

Nesta situação, adotou-se $\lambda_1 = 0,1$, $\lambda_2 = 0,7$ e $\lambda_3 = 0,2$. As regiões factíveis obtidas com as condições dos Teoremas 4, 5, 7 e 9 para alguns pares de valores $h_1 \in [-5, 5]$, $h_2 \in [-50, 0]$, $h_3 = -(h_1 + h_2)/2$ serão comparadas nas figuras a seguir. Inicialmente, verifica-se na Figura 14 que a flexibilidade adicionada no Teorema 5 apresenta maior área de factibilidade se comparada com a região factível alcançada com as condições do Teorema 4.

Em seguida, na Figura 15 comparam-se as factibilidades atingidas pelas condições dos Teoremas 5 e 7. Note que, as condições menos conservadoras dispostas no Teorema 7 resultaram em uma maior região factível. Na última análise apresentada na Figura 16 verifica-se que o Teorema 9 apresenta maior região factível quando comparado com o Teorema 7.

Figura 14 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 4 e 5, sendo que a região factível obtida através do Teorema 4 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 5 é representada por (●) e (×).

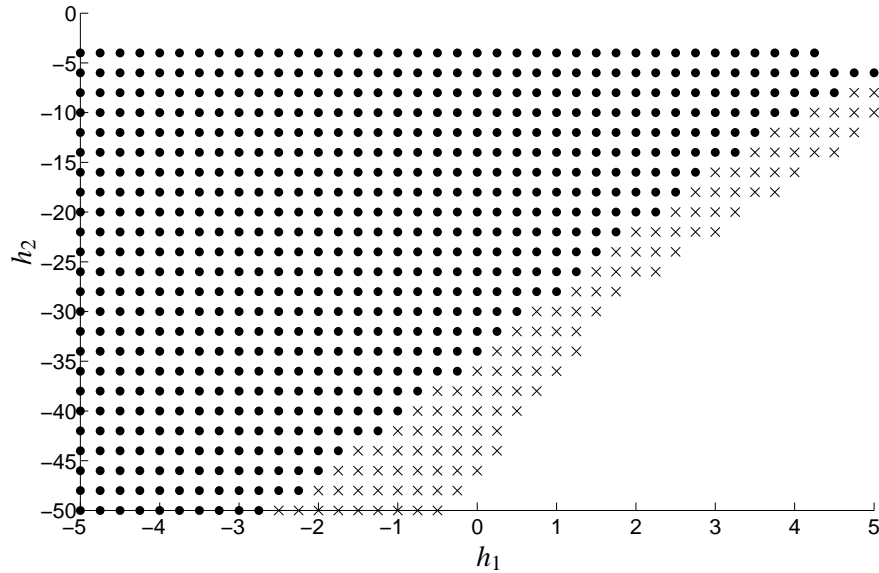


Fonte: Elaboração do próprio autor.

3.4.1.2 Caso II

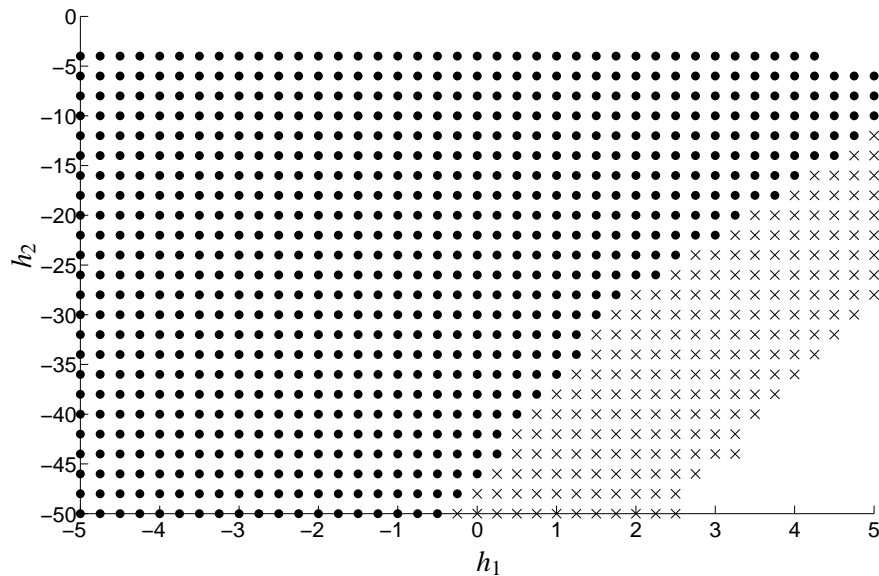
Nesta situação, adotou-se $\lambda_1 = 0,1$, $\lambda_2 = 0,7$ e $\lambda_3 = 0,2$. A Figura 17 mostra as regiões factíveis obtidas através das condições dos Teoremas 9, 13, 16 e 18 para alguns pares de valores $h_1 \in [0, 20]$, $h_2 \in [-50, 0]$, $h_3 = -(h_1 + h_2)/2$. Note que, a realimentação dinâmica de saída, considerando-se três filtros dinâmicos em cascata na saída medida da planta, obteve a maior região de factibilidade.

Figura 15 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 5 e 7, sendo que a região factível obtida através do Teorema 5 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 7 é representada por (●) e (×).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

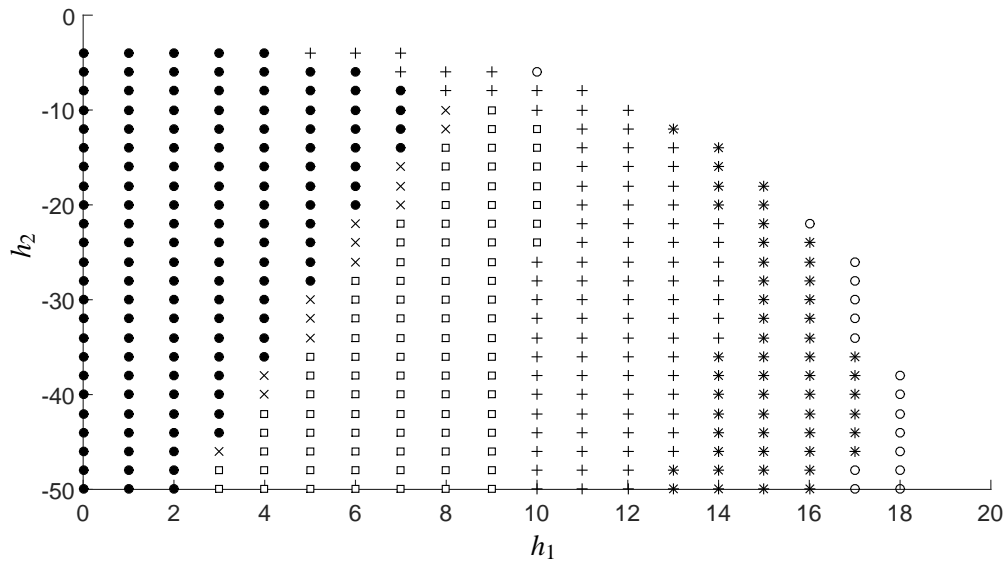
Figura 16 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 7 e 9, sendo que a região factível obtida através do Teorema 7 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (●) e (×).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observação 10. Note que, durante as simulações, considerou-se vários filtros em cascata,

Figura 17 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 9, 13, 16 e 18, sendo que a região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (\bullet) , a região factível obtida através do Teorema 13 é representada por (\bullet) e (\times) , a região factível obtida através do Teorema 16 é representada por (\bullet) , (\times) e (\square) , a região factível obtida através do Teorema 18, considerando $M = 1$ é representada por (\bullet) , (\times) , (\square) e $(+)$, a região factível obtida através do Teorema 18, considerando $M = 2$ é representada por (\bullet) , (\times) , (\square) , $(+)$ e $(*)$ e a região factível obtida através do Teorema 18, considerando $M = 3$, é representada por (\bullet) , (\times) , (\square) , $(+)$, $(*)$ e (\circ) .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

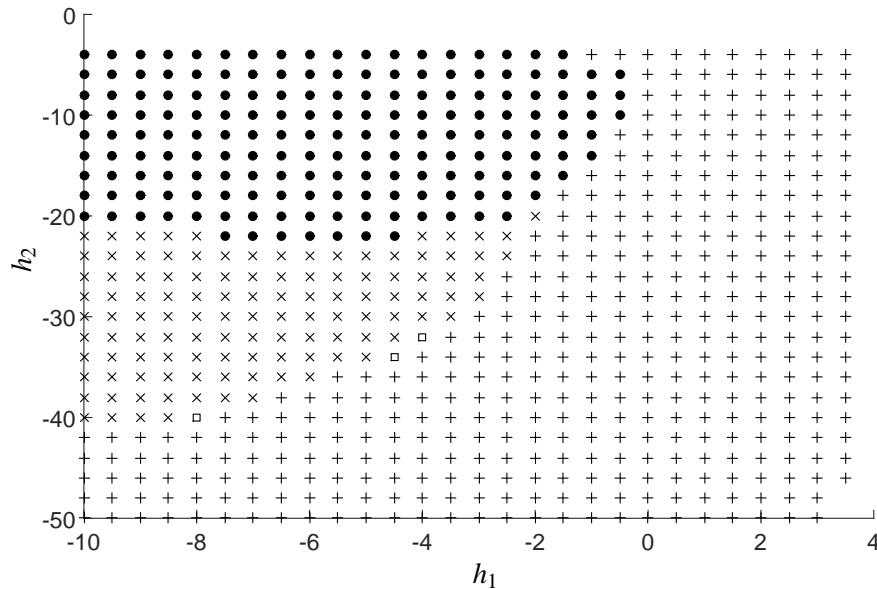
porém, para $M > 3$ não houve aumento na região de factibilidade. Porém, para esta proposta de filtro dinâmico não existe a necessidade que o filtro seja da mesma ordem da planta.

3.4.1.3 Caso III

Considerando alguns valores de $h_1 \in [-10, 0]$, $h_2 \in [-40, 0]$, $h_3 = -(h_1 + h_2)/3$, neste caso, adotou-se $\lambda_1 = 0,4$, $\lambda_2 = 0,3$ e $\lambda_3 = 0,3$. Note que, para estes valores dos parâmetros da combinação convexa, $\lambda \in \Lambda$, não existe nenhum subsistema privilegiado. Desta maneira, pretende-se comparar a potencialidade dos Teoremas 9, 13, 16 e 18. A partir da Figura 18, verifica-se que a região factível atingida pelas condições do Teorema 13 é praticamente a mesma obtida com as condições do Teorema 16. Além disto, novamente, a realimentação dinâmica de saída, considerando $w = 50$, apresentou as maiores regiões de factibilidade através das condições do Teorema 18.

Observação 11. Note que, durante as simulações, considerou-se vários filtros em cascata, porém, para $M > 1$ não houve aumento na região de factibilidade. Este fato relata que, a ordem do filtro não necessariamente deve ter a mesma ordem da planta.

Figura 18 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 9, 13, 16 e 18, sendo que a região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (\bullet) , a região factível obtida através do Teorema 13 é representada por (\bullet) e (\times) , a região factível obtida através do Teorema 16 é representada por (\bullet) , (\times) e (\square) , a região factível obtida através do Teorema 18, considerando $M = 1$ é representada por (\bullet) , (\times) , (\square) e $(+)$.



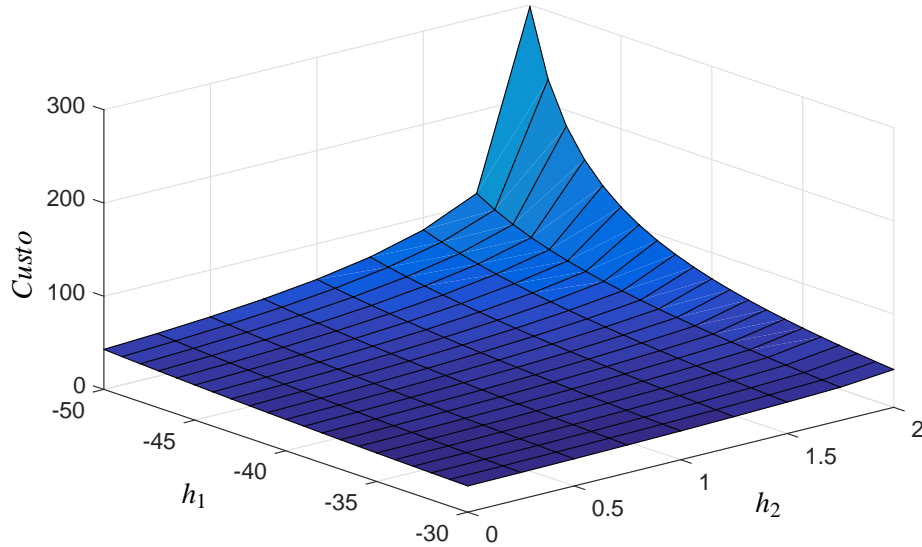
Fonte: Elaboração do próprio autor.

3.4.2 Cômputo do custo carantido

Nas figuras a seguir, os custos obtidos através das condições propostas nos Teoremas 10, 14, 17 e 19 serão comparados, considerando $\lambda_1 = 0,1$, $\lambda_2 = 0,7$ e $\lambda_3 = 0,2$, $h_1 \in [-50, -30]$, $h_2 \in [0, 2]$ e uma condição inicial $x_0 = [0, 25 \ 0, 5 - 0, 25]'$. A Figura 19 apresenta a variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 10. Observa-se que, conforme h_1 diminui e h_2 aumenta, o custo garantido assume valores crescentes. Tais análises seguem o mesmo padrão para as Figuras 20, 21, 22, 23 e 24, considerando as condições dos Teoremas 14, 17 e 19, respectivamente.

A partir da Figura 25, verifica-se através da flexibilização obtida nas condições do Teorema 14, o custo garantido (30) torna-se menor ou igual quando comparado com as condições do Teorema 10. Do mesmo modo, conforme a Figura 26, a flexibilização gerada pelo sistema aumentado (Teorema 17) reduziu o custo garantido (30), quando comparado com o custo obtido através das condições do Teorema 14. A realimentação dinâmica, vide Teorema 19, obteve o menor custo garantido. Simulações foram feitas considerando até três compensadores dinâmicos na saída medida da planta. A Figura 27 compara os custos obtidos.

Figura 19 - Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 10 .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

3.5 EXEMPLO 3 - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Considere o sistema linear chaveado incerto (16) e (17), sendo $r = 2$, $N = 3$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$ e as seguintes matrizes:

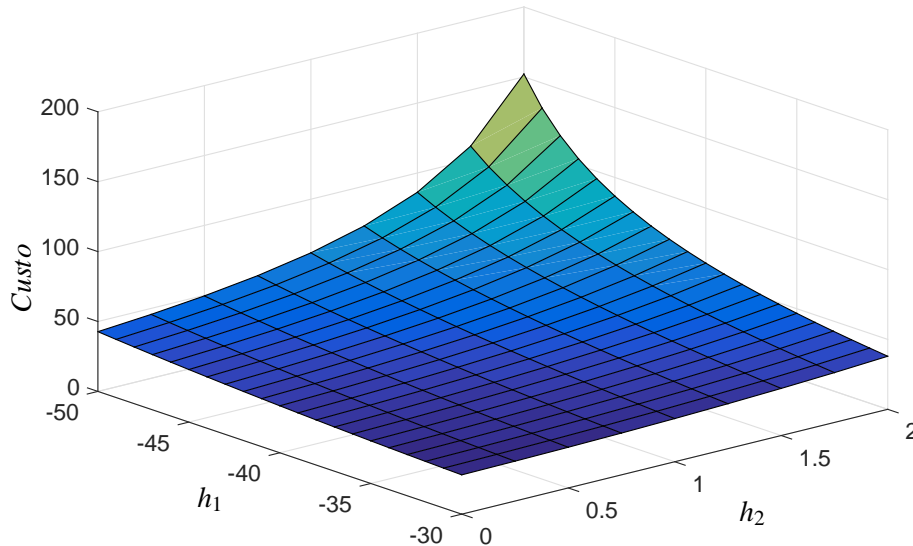
$$A_1(a) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2(b) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3(c) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (153)$$

Note que, se $a < -\frac{1}{3}$, $b < -4$, $c < -2$, as matrizes $A_1(a)$, $A_2(b)$ e $A_3(c)$, respectivamente, são Hurwitz. Caso contrário, se $a \geq -\frac{1}{3}$, $b \geq -4$, $c \geq -2$, as matrizes $A_1(a)$, $A_2(b)$ e $A_3(c)$ não são Hurwitz. Os vértices do politopo foram obtidos considerando $0 \leq a \leq 1$, $-3 \leq b \leq -1,5$, $-1,5 \leq c \leq -1$. Inicialmente, considere que $\lambda_1 = 0,3$, $\lambda_2 = 0,4$, $\lambda_3 = 0,3$, $x_0 = x(0) = [0,25 \ 0,5 \ -0,25]'$. A partir das condições do Teorema 19, considerando-se $w = 50$, obtém-se os custos garantidos apresentados na Tabela 1.

Na Figura 28, considerando $x_0 = x(0) = [0,25 \ 0,5 \ -0,25]'$, apresentam-se as trajetórias

Figura 20 - Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 14 .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 1 - Custo garantido obtido com o Teorema 19

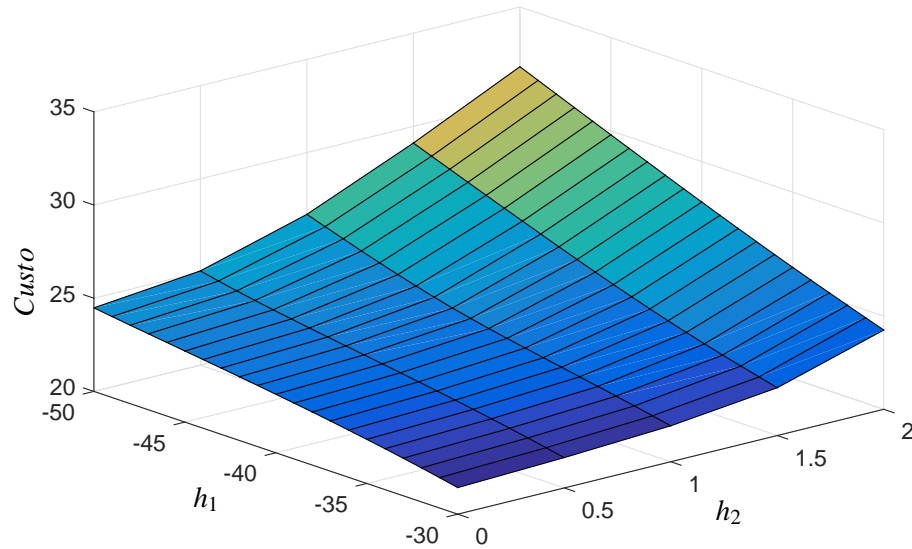
Número de Filtros (M)	Custo Garantido
1	4,5724
2	4,1552
3	3,9170

das variáveis de estado para as condições do Teorema 19, considerando-se $M = 3$. É importante destacar que, as condições propostas no Teorema 19 estabilizam o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema linear chaveado incerto (16) e (17), mesmo quando todas as matrizes dos subsistemas não são Hurwitz. Além disto, note que, quando $t > 4s$ as respostas temporais das variáveis de estado estão próximas do ponto de equilíbrio ($x = 0$). Porém, a partir da Figura 29, verifique a estratégia de chaveamento (129) continua selecionando o melhor subsistema disponível.

3.6 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foram apresentados resultados considerando a estabilidade assintótica e também um critério de desempenho, neste caso, o custo garantido, para sistemas lineares chaveados incertos. Inicialmente, uma breve revisão sobre os principais conceitos relacionados aos sistemas lineares foi realizada. Em seguida, alguns resultados disponíveis na literatura foram abordados (Mainardi Júnior et al., 2012) e (Mainardi Júnior et al., 2014). Tais informações foram necessárias para a principal contribuição deste capítulo: novos critérios de esta-

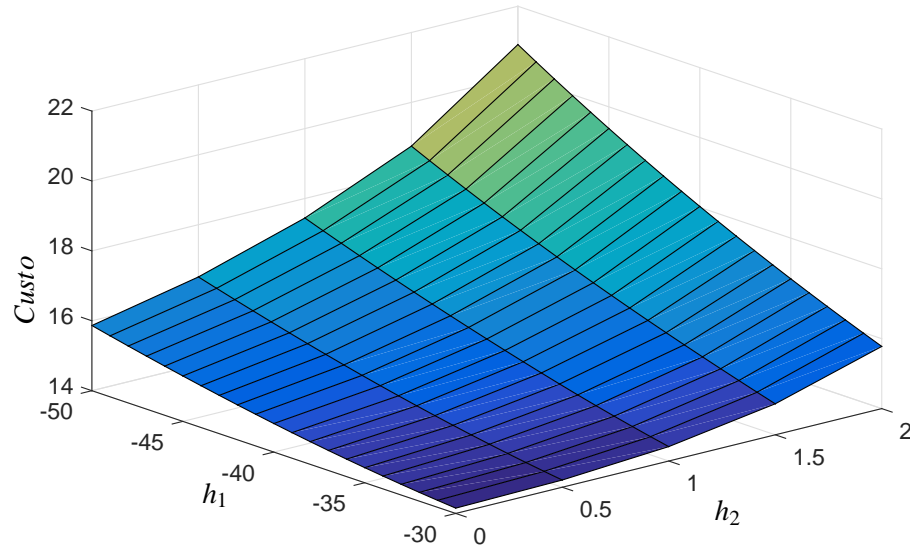
Figura 21 - Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 17.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

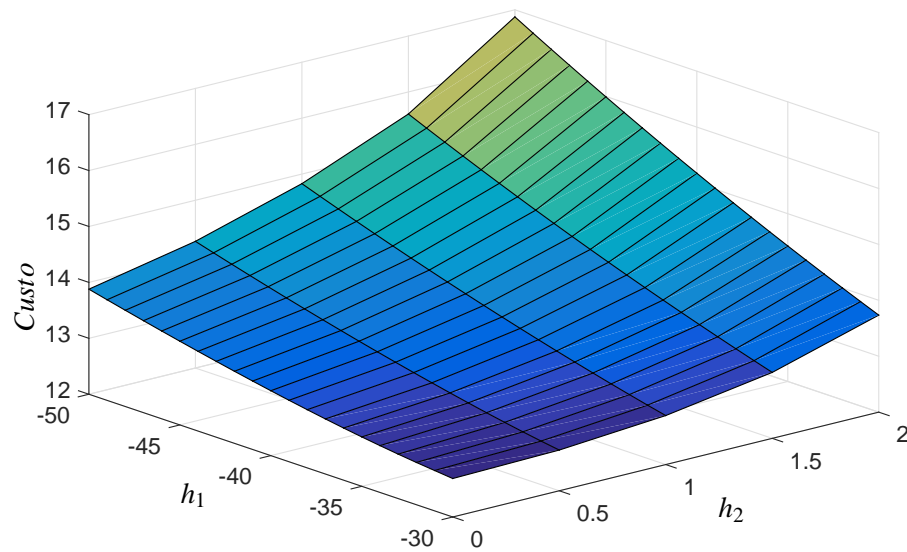
bilidade para sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas através da realimentação estática de saída (Mainardi Júnior et al., 2015) e também através da realimentação dinâmica de saída. Finalmente, três exemplos numéricos mostraram que a flexibilidade adicionada nas condições dos teoremas discutidos neste capítulo garantiu maiores regiões de factibilidade e também diminuição do custo garantido. Além disto, destaca-se novamente que a metodologia de controle proposta é eficiente mesmo quando as matrizes dos subsistemas não são Hurwitz.

Figura 22 - Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 19, considerando $M = 1$.



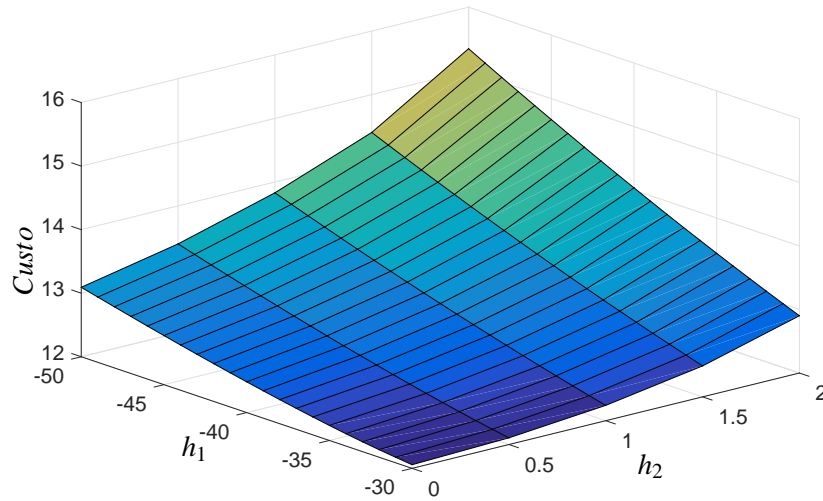
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 23 - Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 19, considerando $M = 2$.



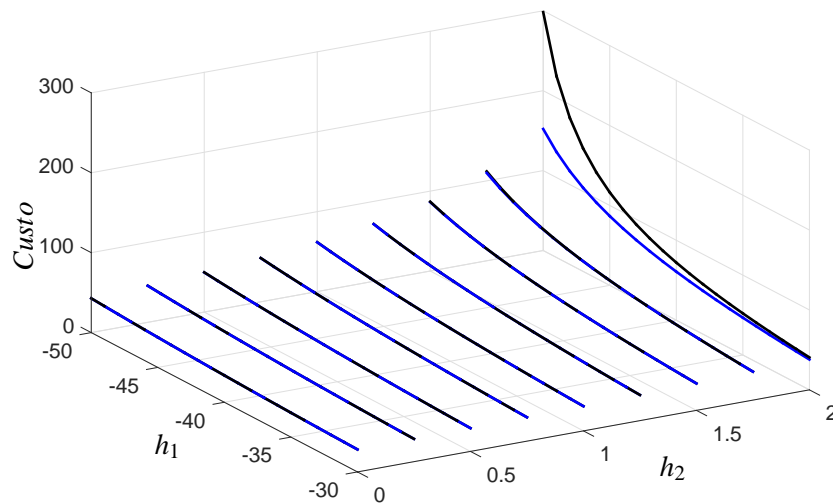
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 24 - Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 19, considerando $M = 3$.



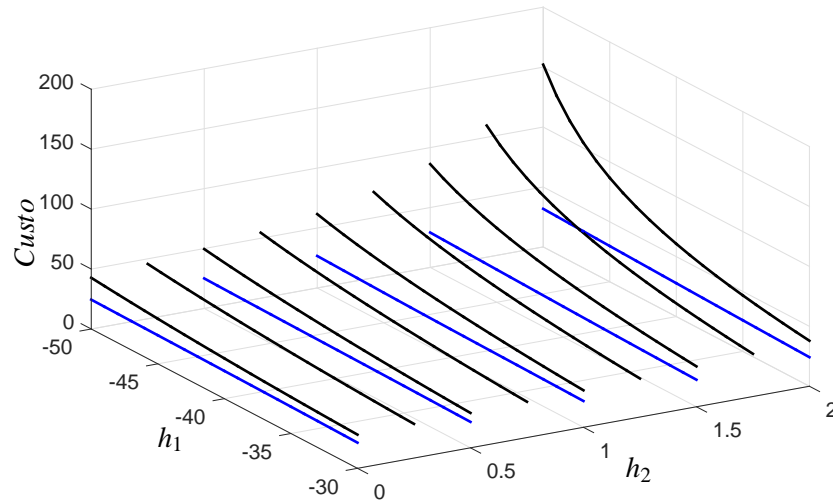
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 25 - Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 10 (preto) e Teorema 14 (azul).



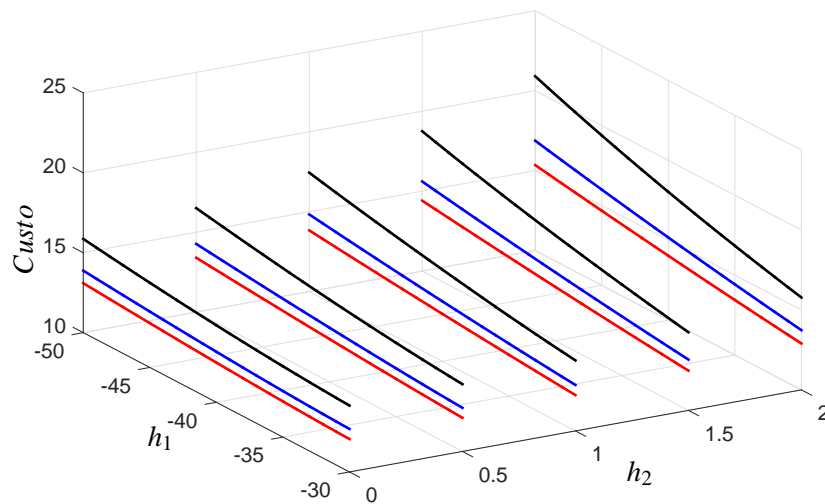
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 26 - Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 14 (preto) e Teorema 17 (azul) .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 27 - Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições do Teorema 19, considerando $M = 1$ (preto), considerando $M = 2$ (azul) e considerando $M = 3$ (vermelho) .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 28 - Resposta Temporal .

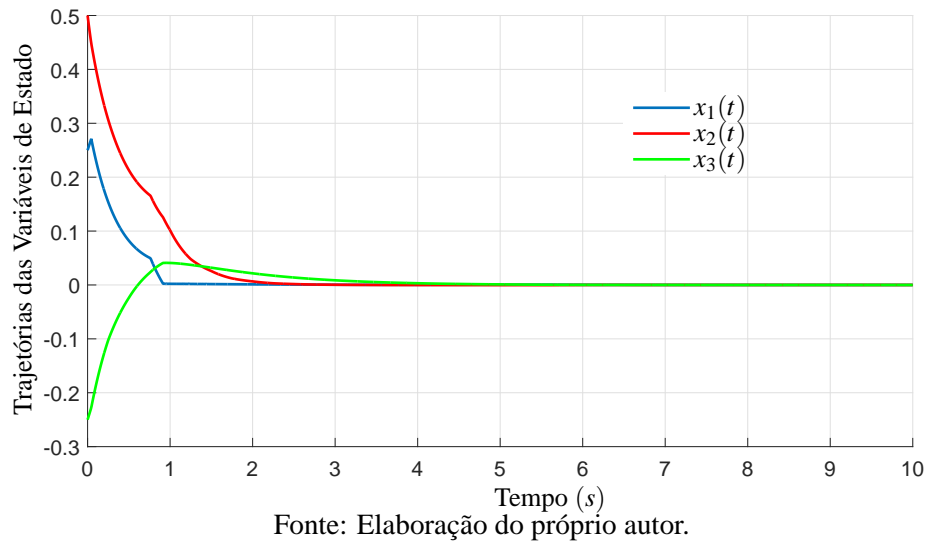
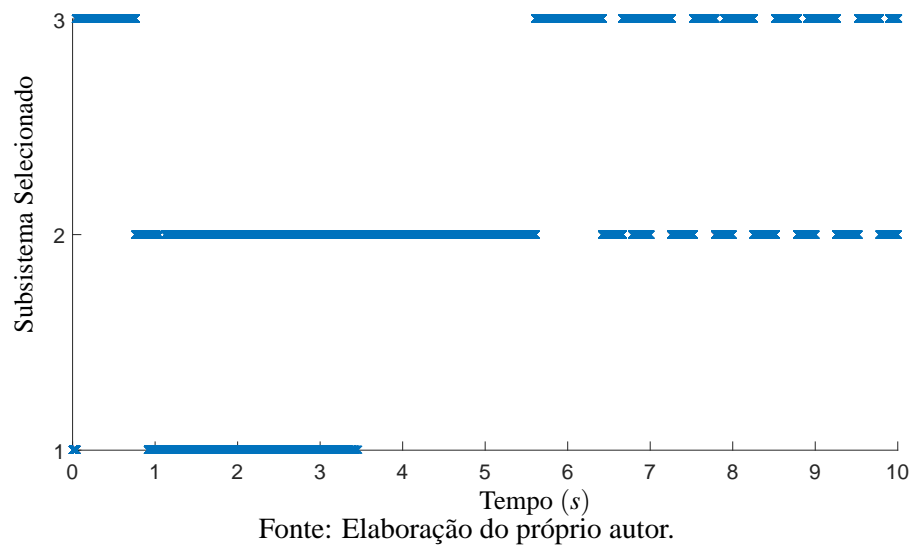


Figura 29 - Chaveamento entre os subsistemas .



4 PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS VIA REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS INCERTOS

Neste capítulo apresentam-se resultados para o projeto de controladores de saída via realimentação estática e dinâmica de saída para sistemas lineares chaveados incertos. Este problema é um dos mais desafiadores dentre os pesquisadores da área de controle de sistemas (SYRMOS et al., 1997). Tal fato, explica-se pela existência de BMIs durante o projeto de controladores. Em Crusius e Trofino (1999) os autores utilizaram uma técnica de aproximação visando descrever o projeto dos controladores em forma de LMIs. Esta aproximação será utilizada no decorrer deste capítulo. Objetiva-se generalizar os resultados apresentados no Capítulo 3 inserindo-se controladores de saída. Deste modo, a estabilização do ponto de equilíbrio do sistema de controle será realizada através da lei ou regra de chaveamento e também dos ganhos dos controladores. Além disso, um exemplo numérico, ilustra que, com a inserção dos controladores de saída, as regiões de factibilidade aumentaram quando comparadas com os teoremas do Capítulo 3. Deste modo, as simulações computacionais comprovam a eficácia da técnica de controle proposta.

4.1 PROJETO DE CONTROLADORES VIA REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS COM INCERTEZAS POLITÓPICAS

Considere o sistema linear chaveado incerto com a seguinte realização em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma, \alpha)x(t) + B_{\sigma}u(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (154)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída medida, x_0 é a condição inicial e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída do sistema, constante para todo $t \geq 0$. Considere que $\sigma(t)$ é a regra ou lei de chaveamento, que seleciona em cada instante de tempo $t \geq 0$, um subsistema disponível $(A(i, \alpha), B_i)$, $i \in \mathbb{K}_N$, sendo que $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é uma matriz constante, conhecida e com posto completo e que $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle da planta. A matriz $A(\sigma, \alpha)$ pode ser descrita através da combinação convexa de seus vértices, como mostrado em (17).

Entretanto, suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ não está totalmente disponível, mas a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está passível para realimentação. Deste modo, define-se o seguinte problema de controle:

Problema 4. *Encontrar uma função $f(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ e ganhos $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i \in \mathbb{K}_N$ tal*

que a estratégia de chaveamento

$$\sigma(t) = f(y(t)), \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (155)$$

e a entrada de controle

$$u(t) = K_\sigma y(t), \quad (156)$$

tornem o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema definido em (17) e (154) globalmente assintoticamente estável e também satisfaçam um certo índice de desempenho, por exemplo, o custo garantido (30).

Então, substituindo (156) em (154), obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C)x(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (157)$$

A partir de (154), (156), (157) e das aproximações propostas em Crusius e Trofino (1999), propõe-se o seguinte teorema:

Teorema 21. *Considere o sistema apresentado em (17) e (157), sendo que posto(B_i) = m para $i \in \mathbb{K}_N$ e suponha que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $Q_{0_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:*

$$\frac{1}{2} \times (A'_{ij}P_k + P_k A_{ij} + A'_{ik}P_j + P_j A_{ik}) + C'N'_i B'_i + B_i N_i C < Q_{0_j} + C'Q_i C, \quad (158)$$

$$B_i M_i = P_k B_i, \quad (159)$$

$$Q_{0_j} + C'Q_\lambda C < 0 \quad (160)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j, k \in \mathbb{K}_r$, então a regra de chaveamento (21) e (156) com os ganhos $K_i = M_i^{-1}N_i$, tornam o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (157) e (17) globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere a candidata à função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, sendo $P(\alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j P_j = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)$. A partir de (17) e (157), tem-se que, para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x' [(A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C)' P(\alpha) + P(\alpha) (A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C)] x \\ &= \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' [(A_{\sigma_j} + B_\sigma K_\sigma C)' P_k + P_k (A_{\sigma_j} + B_\sigma K_\sigma C)] x \\ &= \frac{1}{2} \times \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' [(A'_{\sigma_j} P_k + A'_{\sigma_k} P_j + P_k B_\sigma K_\sigma C + P_j B_\sigma K_\sigma C + (*))] x \end{aligned} \quad (161)$$

Como B_i tem posto completo, então a partir de (159), conclui-se que, M_i , $i \in \mathbb{K}_N$, também tem posto completo. Deste modo, de (159), têm-se que $P_k B_\sigma = B_\sigma M_\sigma$, $\sigma \in \mathbb{K}_N$. Considerando que $K_\sigma = M_\sigma^{-1} N_\sigma$, $\sigma \in \mathbb{K}_N$, então $P_k B_\sigma K_\sigma C = B_\sigma M_\sigma K_\sigma C = B_\sigma N_\sigma C$. Do mesmo modo, é possível verificar que $P_j B_\sigma K_\sigma C = B_\sigma M_\sigma K_\sigma C = B_\sigma N_\sigma C$. Logo, de (158), (160), (161) e (21), para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{1}{2} \times \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' [(A'_{\sigma_j} P_k + A'_{\sigma_k} P_j + 2B_\sigma N_\sigma C + (*))] x \\ &< \sum_{j=1}^r \alpha_j x' (Q_{0_j} + C' Q_\sigma C) x \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j x' Q_{0_j} x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y' Q_i y) \\ &\leq \sum_{j=1}^r \alpha_j x' (Q_{0_j} + C' Q_\lambda C) x < 0. \end{aligned} \quad (162)$$

A partir da função quadrática candidata de Lyapunov $V(x) = x' P(\alpha) x$, sendo $P(\alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j P_j = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)$, note que, a partir de (17), $V(x) > 0$, para $x \neq 0$. Além disto, a partir de (162), observe que $\dot{V}(x) < 0$, para $x \neq 0$. Deste modo, a prova está concluída. \square

Observação 12. Note que, para implementação das LMIs do Teorema 21, considerou-se $P_j B_i = P_k B_i$, pois $j, k \in \mathbb{K}_r$.

O Teorema 22 insere o critério de desempenho custo garantido definido em (30) nas condições dispostas no Teorema 21.

Teorema 22. Considere o sistema apresentado em (17) e (157), sendo que $\text{posto}(B_i) = m$ para $i \in \mathbb{K}_N$ e suponha que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes simétricas $Q_{0_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:

$$P_k - \rho I_n < 0, \quad (163)$$

$$\frac{1}{2} \times (A'_{ij} P_k + P_k A_{ij} + A'_{ik} P_j + P_j A_{ik}) + C' C + C' N_i' B_i' + B_i N_i C < Q_{0_j} + C' Q_i C, \quad (164)$$

$$B_i M_i = P_k B_i, \quad (165)$$

$$Q_{0_j} + C' Q_\lambda C < 0 \quad (166)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j, k \in \mathbb{K}_r$, então a regra de chaveamento (21) e (156) com os ganhos $K_i = M_i^{-1} N_i$, tornam o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema (17) e (157) globalmente assintoticamente estável e o custo (30) é mantido para $x(0) = x_0 \neq 0$.

Demonstração. A prova deste teorema segue as mesmas ideias apresentadas na demonstração

do Teorema 21. Desta maneira, têm-se que:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &< \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' (Q_{0_j} + C' Q_{\sigma} C) x - y' y \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j x' Q_{0_j} x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y' Q_i y) - y' y \\
&\leq \sum_{j=1}^r \alpha_j x' (Q_{0_j} + C' Q_{\lambda} C) x < 0 \\
\dot{V}(x) &< -y' y \leq 0.
\end{aligned} \tag{167}$$

A partir de função quadrática candidata de Lyapunov $V(x) = x' P(\alpha) x$, sendo $P(\alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j P_j = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)$, note que, a partir de (17), $V(x) > 0$, para $x \neq 0$. Sabendo-se que $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ e $\dot{V}(0) = 0$, então a origem ($x = 0$) é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Integrando (167) de zero até o infinito, obtém-se (30). Deste modo, a prova está concluída. \square

Então o Teorema 22 fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P_k = P_k' > 0, \rho > 0, Q_{0_{jk}} = Q_{0_{jk}}', Q_i = Q_i', N_i, M_i} \{ \rho : (163) - (166) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j, k \in \mathbb{K}_r \}. \tag{168}$$

Observação 13. Note que, para implementação das LMIs do Teorema 22, considerou-se $P_j B_i = P_k B_i$, pois $j, k \in \mathbb{K}_r$.

Observação 14. Observe que as condições (159) e (165), apresentadas nos Teoremas 21 e 22 são igualdades matriciais lineares. Deste modo, não podem ser resolvidas diretamente pelas ferramentas computacionais disponíveis. Desta maneira, utilizam-se as ideias apresentadas em Covacic (2006). Sendo assim, considere que as expressões (159) e (165) possam ser aproximadas por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^2 & (B_i M_i - P_k B_i)' l'_p \\ l_p (B_i M_i - P_k B_i) & I \end{bmatrix} > 0, \tag{169}$$

com $\varepsilon \approx 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $k \in \mathbb{K}_r$, e $p = \{1, \dots, t\}$, sendo:

$$l_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, l_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, l_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{170}$$

Visando flexibilizar o Teorema 21, condições menos conservadoras são propostas no Teorema 23. Suponha que $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ definido em (17) é um parâmetro desconhecido, porém invariante no tempo.

Teorema 23. Considere o sistema apresentado em (17) e (157), sendo que $\text{posto}(B_i) = m$ para $i \in \mathbb{K}_N$ e suponha que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes $X_{1i}, X_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:

$$\begin{bmatrix} X_{1i}A_{ij} + B_iN_iC + A'_{ij}X'_{1i} + C'N'_iB'_i & P_j - X_{1i} + A'_{ij}X'_{2i} + C'N'_iB'_i \\ P_j - X'_{1i} + X_{2i}A_{ij} + B_iN_iC & -X_{2i} - X'_{2i} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0j} + C'Q_iC & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (171)$$

$$X_{1i}B_i = B_iM_i, \quad (172)$$

$$X_{2i}B_i = B_iM_i, \quad (173)$$

$$Q_{0j} + C'Q_\lambda C < 0. \quad (174)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j \in \mathbb{K}_r$, então a regra de chaveamento (21) e (156) com os ganhos $K_i = M_i^{-1}N_i$, tornam o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (17) e (157) globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere que (171), (172), (173) e (174) são factíveis. Deste modo, a partir de (21) e (174), para $x \neq 0$ tem-se que:

$$0 > x'(Q_{0j} + C'Q_\lambda C)x \geq x'Q_{0j}x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_iy) = x'(Q_{0j} + C'Q_\sigma C)x. \quad (175)$$

Note que, (175) pode ser reescrita como:

$$0 > x' \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q_{0j} + C'Q_\sigma C & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C \end{bmatrix} x, \quad (176)$$

A partir de (171), (172), (173) e (176), sabendo-se que $N_\sigma = M_\sigma K_\sigma$ e denotando $A_{cl}(\sigma, \alpha) = (A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C)$, note que:

$$x' \begin{bmatrix} I_n & A'_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma}(A_{\sigma j} + B_\sigma K_\sigma C) + (A_{\sigma j} + B_\sigma K_\sigma C)'X'_{1\sigma} \\ P_j - X'_{1\sigma} + X_{2\sigma}(A_{\sigma j} + B_\sigma K_\sigma C) \\ P_j - X_{1\sigma} + (A_{\sigma j} + B_\sigma K_\sigma C)'X'_{2\sigma} \\ -X_{2\sigma} - X'_{2\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x < 0. \quad (177)$$

Considere que $P(\alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j P_j = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)$. Deste modo, a partir de (17), multiplicando (177) por α_j e realizando a soma de $j = 1$ até $j = r$, têm-se:

$$x' \begin{bmatrix} I_n & A'_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma}(A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C) + (A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C)'X'_{1\sigma} \\ P(\alpha) - X'_{1\sigma} + X_{2\sigma}(A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C) \end{bmatrix} x < 0.$$

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - X_{1\sigma} + (A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C)' X'_{2\sigma} \\ -X_{2\sigma} - X'_{2\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x < 0. \quad (178)$$

Verifique que, a expressão (178) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} 0 > x' & \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \left\{ \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{1\sigma} \\ X_{2\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{cl}(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{bmatrix}' \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} A'_{cl}(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma} \\ X_{2\sigma} \end{bmatrix}' \right\} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ & = x' \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (179)$$

Considerando uma função candidata de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, sendo $P(\alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j P_j = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)$, note que, a partir de (17), $V(x) > 0$ para $x \neq 0$ e a partir de (157) e (179), $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$. Deste modo, a prova está concluída. \square

O próximo teorema, além de garantir a estabilidade assintótica, também assegura um critério de desempenho, por exemplo, o custo garantido (30).

Teorema 24. *Considere o sistema apresentado em (17) e (157), sendo que $\text{posto}(B_i) = m$ para $i \in \mathbb{K}_N$ e suponha que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes $X_{1i}, X_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:*

$$P_j - \rho I_n < 0 \quad (180)$$

$$\begin{bmatrix} X_{1i}A_{ij} + B_i N_i C + A'_{ij} X'_{1i} + C' N'_i B'_i + C' C \\ P_j - X'_{1i} + X_{2i} A_{ij} + B_i N_i C \\ P'_j - X_{1i} + A'_{ij} X'_{2i} + C' N'_i B'_i \\ -X_{2i} - X'_{2i} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0j} + C' Q_i C & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (181)$$

$$X_{1i} B_i = B_i M_i, \quad (182)$$

$$X_{2i} B_i = B_i M_i, \quad (183)$$

$$Q_{0j} + C' Q_\lambda C < 0. \quad (184)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j \in \mathbb{K}_r$, então a regra de chaveamento (21) e (156) com os ganhos $K_i = M_i^{-1} N_i$, tornam o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema (17) e (157) globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (30) é mantido para todas as condições iniciais,

$$x(0) = x_0 \neq 0.$$

Demonstração. Considerando os passos e as ideias mostradas na demonstração do Teorema 23, verifica-se:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C'C & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x. \\ 0 &> \dot{V}(x) + y'y \end{aligned} \quad (185)$$

sendo $P(\alpha) = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)$. Considerando uma função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, note que a partir de (17), $V(x) > 0$ para $x \neq 0$. Além disto, observe que $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$ doravante (185). Agora, integrando (185) de zero até o infinito, considerando $x_0 = x(0) \neq 0$, obtém-se (43). Deste modo, a prova está concluída. \square

Então o Teorema 24 fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{\substack{P_k = P'_k > 0, \rho > 0, Q_{0,jk} = Q'_{0,jk} \\ Q_i = Q'_i, N_i, M_i, X_{1,i}, X_{2,i}}} \{\rho : (180) - (184) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j, k \in \mathbb{K}_r\}. \quad (186)$$

Observação 15. Observe que as condições (172), (173), (182), (183), apresentadas, respectivamente, nos Teoremas 23 e 24 são igualdades matriciais lineares. Deste modo, não podem ser resolvidas diretamente pelas ferramentas computacionais disponíveis. Desta maneira, utilizam-se as ideias apresentadas em Covacic (2006). Sendo assim, considere que as expressões (172), (173), (182), (183) possam ser aproximadas por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^2 & (X_{1,i}B_i - B_iM_i)'l'_p \\ l_p(X_{1,i}B_i - B_iM_i) & I \end{bmatrix} > 0, \quad (187)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^2 & (X_{2,i}B_i - B_iM_i)'l'_p \\ l_p(X_{2,i}B_i - B_iM_i) & I \end{bmatrix} > 0, \quad (188)$$

com $\varepsilon \approx 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $k \in \mathbb{K}_r$, e $p = \{1, \dots, t\}$, sendo:

$$l_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0], l_2 = [0 \ 1 \ \dots \ 0], \dots, l_t = [0 \ 0 \ \dots \ 1]. \quad (189)$$

No próximo teorema, objetiva-se flexibilizar as condições apresentadas no Teorema 23. Desta maneira, considere o vetor $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ definido em (17) é incerto, porém invariante no tempo.

Teorema 25. Considere o sistema apresentado em (17) e (157), sendo que $\text{posto}(B_i) = m$ para $i \in \mathbb{K}_N$ e suponha que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes $X_{1,ik} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2,ik} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0,jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $N_i \in$

$\mathbb{R}^{p \times n}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:

$$\begin{bmatrix} X_{1_{ik}}A_{ij} + X_{1_{ij}}A_{ik} + 2B_iN_iC + (*) & P_{jk} + P_{kj} - X_{1_{ik}} - X_{1_{ij}} + A'_{ik}X'_{2_{ij}} + A'_{ij}X'_{2_{ik}} + 2C'_iN'_iB'_i \\ (*) & -X_{2_{ik}} - X'_{2_{ik}} - X_{2_{ij}} - X'_{2_{ij}} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + Q_{0_{kj}} + 2C'Q_iC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (190)$$

$$X_{1_{ij}}B_i = B_iM_i, \quad (191)$$

$$X_{2_{ij}}B_i = B_iM_i, \quad (192)$$

$$Q_{0_{jk}} + C'Q_\lambda C < 0, \quad (193)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a regra de chaveamento (21) e (156) com os ganhos $K_i = M_i^{-1}N_i$, tornam o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema (17) e (157) globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere que (190)-(193) são factíveis. Deste modo, a partir de (21) e (193), para $x \neq 0$ segue que:

$$\begin{aligned} 0 > x'(Q_{0_{jk}} + C'Q_\lambda C)x &\geq x'Q_{0_{jk}}x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_iy) \\ &= x'(Q_{0_{jk}} + C'Q_\sigma C)x. \end{aligned} \quad (194)$$

Deste modo, considerando $A_{cl}(\sigma, \alpha) = A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C$, observe que (194) pode ser reescrita como:

$$0 > x'(Q_{0_{jk}} + C'Q_\sigma C)x = x' \begin{bmatrix} I_n & A'_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + C'Q_iC & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \quad (195)$$

Agora, considere $P(\alpha) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \alpha_j \alpha_k P_{jk} = (\alpha_1 \alpha_1 P_{11} + \alpha_1 \alpha_2 P_{12} + \dots + \alpha_r \alpha_r P_{rr})$, $X_1(\sigma, \alpha) = (\alpha_1 X_{1_{\sigma_1}} + \alpha_2 X_{1_{\sigma_2}} + \dots + \alpha_r X_{1_{\sigma_r}})$, $X_2(\sigma, \alpha) = (\alpha_1 X_{2_{\sigma_1}} + \alpha_2 X_{2_{\sigma_2}} + \dots + \alpha_r X_{2_{\sigma_r}})$. Deste modo, multiplicando (195) por $\alpha_j \times \alpha_k$ e somando entre $j = 1$ até $j = r$ e $k = 1$ até $k = r$, respectivamente, a partir de (190) note que:

$$\begin{aligned} 0 > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' \begin{bmatrix} I_n & A'_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + Q_{0_{kj}} + 2C'Q_\sigma C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' \begin{bmatrix} I_n & A'_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1_{\sigma_k}}A_{\sigma_j} + X_{1_{\sigma_j}}A_{\sigma_k} + 2B_\sigma N_\sigma C + (*) \\ (*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (196)$$

$$\begin{bmatrix} P_{jk} + P_{kj} - X_{1_{\sigma_k}} - X_{1_{\sigma_j}} + A'_{\sigma_k}X'_{2_{\sigma_j}} + A'_{\sigma_j}X'_{2_{\sigma_k}} + 2C'_\sigma N'_\sigma B'_\sigma \\ -X_{2_{\sigma_k}} - X'_{2_{\sigma_k}} - X_{2_{\sigma_j}} - X'_{2_{\sigma_j}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_{1\sigma k}(A_{\sigma j} + B_{\sigma}K_{\sigma}C) + X_{1\sigma j}(A_{\sigma k} + B_{\sigma}K_{\sigma}C) + (*) \\ (*) \\ P_{jk} + P_{kj} - X_{1\sigma k} - X_{1\sigma j} + (A_{\sigma k} + B_{\sigma}K_{\sigma}C)'X'_{2\sigma j} + (A_{\sigma j} + B_{\sigma}K_{\sigma}C)'X'_{2\sigma k} \\ -X_{2\sigma k} - X'_{2\sigma k} - X_{2\sigma j} - X'_{2\sigma j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \quad (197)
\end{aligned}$$

Note que (197) pode ser reescrita considerando a variação dos índices j e k como sendo independentes:

$$\begin{aligned}
0 &> \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' \begin{bmatrix} I_n & A'_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma k}(A_{\sigma j} + B_{\sigma}K_{\sigma}C) + (*) \\ P_{jk} - X'_{1\sigma k} + X_{2\sigma j}(A_{\sigma k} + B_{\sigma}K_{\sigma}C) \\ P_{jk} - X_{1\sigma k} + (A_{\sigma k} + B_{\sigma}K_{\sigma}C)'X'_{2\sigma j} \\ -X_{2\sigma k} - X'_{2\sigma k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\
&> x' \begin{bmatrix} I_n & A'_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(\sigma, \alpha)(A(\sigma, \alpha) + B_{\sigma}K_{\sigma}C) + (*) \\ P(\alpha) - X_1(\sigma, \alpha)' + X_2(\sigma, \alpha)(A(\sigma, \alpha) + B_{\sigma}K_{\sigma}C) \\ P(\alpha) - X_1(\sigma, \alpha) + (A(\sigma, \alpha) + B_{\sigma}K_{\sigma}C)'X_2(\sigma, \alpha)' \\ -X_2(\sigma, \alpha) - X_2(\sigma, \alpha)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\
&= \begin{bmatrix} I_n & A'_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1(\sigma, \alpha) \\ X_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{cl}(\sigma, \alpha) & -I_n \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + x \begin{bmatrix} I_n & A'_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(\sigma, \alpha) \\ X_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \right\} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\
&= x' \begin{bmatrix} I_n & A'_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x. \quad (198)
\end{aligned}$$

Considerando $P(\alpha) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \alpha_j \alpha_k P_{jk} = (\alpha_1 \alpha_1 P_{11} + \alpha_1 \alpha_2 P_{12} + \dots + \alpha_r \alpha_r P_{rr})$ e uma função quadrática candidata de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, note que a partir de (17), $V(x) > 0$, para $x \neq 0$. Além disto, observe que $\dot{V}(x) < 0$, doravante de (198) e (157). Deste modo, a prova está concluída. \square

Observação 16. Note que, para implementação das LMIs do Teorema 25, considerou-se $X_{1_{ij}}B_i = X_{1_{ik}}B_i$ e $X_{2_{ij}}B_i = X_{2_{ik}}B_i$, pois $j, k \in \mathbb{K}_r$.

O Teorema 26 além de garantir estabilidade assintótica para o sistema (157) também insere um critério de desempenho, neste caso, um limitante superior para o custo garantido (43).

Teorema 26. Considere o sistema apresentado em (17) e (157), sendo que $\text{posto}(B_i) = m$ para $i \in \mathbb{K}_N$ e suponha que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um

escalar $\rho > 0$, matrizes $X_{1_{ik}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2_{ik}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:

$$P_{jk} - \rho I_n < 0, \quad (199)$$

$$\begin{bmatrix} X_{1_{ik}}A_{ij} + X_{1_{ij}}A_{ik} + 2B_iN_iC + (*) + 2C'C & (*) \\ P_{jk} + P_{kj} - X'_{1_{ik}} - X'_{1_{ij}} + X_{2_{ij}}A_{ik} + X_{2_{ik}}A_{ij} + 2B_iN_iC_i & -X_{2_{ik}} - X'_{2_{ik}} - X_{2_{ij}} - X'_{2_{ij}} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + Q_{0_{kj}} + 2C'Q_iC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (200)$$

$$X_{1_{ij}}B_i = B_iM_i, \quad (201)$$

$$X_{2_{ij}}B_i = B_iM_i, \quad (202)$$

$$Q_{0_{jk}} + C'Q_\lambda C < 0, \quad (203)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a regra de chaveamento (21) e (156) com os ganhos $K_i = M_i^{-1}N_i$, tornam o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema (17) e (157) globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (30) é mantido para todas as condições iniciais, $x(0) = x_0 \neq 0$.

Demonstração. Considerando os passos e as ideias mostradas na demonstração do Teorema 25, verifica-se:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C'C & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x. \\ 0 &> \dot{V}(x) + y'y \end{aligned} \quad (204)$$

sendo $P(\alpha) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \alpha_j \alpha_k P_{jk} = (\alpha_1 \alpha_1 P_{11} + \alpha_1 \alpha_2 P_{12} + \dots + \alpha_r \alpha_r P_{rr})$. Considerando uma função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, note que a partir de (17), $V(x) > 0$ para $x \neq 0$. Além disto, observe que $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$ doravante (204). Agora, integrando (204) de zero até o infinito, considerando $x_0 = x(0) \neq 0$, obtém-se (43). Deste modo, a prova está concluída. \square

Então o Teorema 26 fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{\substack{P_{jk}=P'_{jk}>0, \rho>0, Q_{0_{jk}}=Q'_{0_{jk}} \\ Q_i=Q'_i, N_i, M_i, X_{1_{ik}}, X_{2_{ik}}, X_{1_{ij}}, X_{2_{ij}}} \{ \rho : (199) - (203) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j, k \in \mathbb{K}_r \}. \quad (205)$$

Observação 17. Note que, para implementação das LMIs do Teorema 26, considerou-se $X_{1_{ij}}B_i = X_{1_{ik}}B_i$ e $X_{2_{ij}}B_i = X_{2_{ik}}B_i$, pois $j, k \in \mathbb{K}_r$.

Observação 18. Observe que as condições (191), (192), (201) e (202), apresentadas nos Teoremas 25 e 26 são igualdades matriciais lineares. Deste modo, não podem ser resolvidas diretamente pelas ferramentas computacionais disponíveis. Desta maneira, utilizam-se as ideias apresentadas em Covacic (2006). Sendo assim, considere que as expressões (191), (192), (201) e (202) possam ser aproximadas por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^2 & (X_{1ij}B_i - B_iM_i)' l'_p \\ l_p (X_{1ij}B_i - B_iM_i) & I \end{bmatrix} > 0, \quad (206)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^2 & (X_{2ij}B_i - B_iM_i)' l'_p \\ l_p (X_{2ij}B_i - B_iM_i) & I \end{bmatrix} > 0, \quad (207)$$

com $\varepsilon \approx 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$, e $p = \{1, \dots, t\}$, sendo:

$$l_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0], l_2 = [0 \ 1 \ \dots \ 0], \dots, l_t = [0 \ 0 \ \dots \ 1]. \quad (208)$$

A partir das relaxações propostas em Liu e Zhang (2003) e Teixeira, Assunção e Avellar (2003), propõe-se generalizar o Teorema 25.

Teorema 27. Considere o sistema apresentado em (17) e (157), sendo que $\text{posto}(B_i) = m$ para $i \in \mathbb{K}_N$ e suponha que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $Q_{0jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $\xi_{ijk} = \xi'_{ikj} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\phi_{jk} = \phi'_{kj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $w_{jk} = w'_{kj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{jk} = P'_{kj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{1jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tais que

$$\Psi_{ikk} - \gamma_{ikk} < \xi_{ikk}, \quad (209)$$

$$\Psi_{ijk} + \Psi'_{ijk} - \gamma_{ijk} - \gamma'_{ijk} < \xi_{ijk} + \xi'_{ijk}, \quad k \neq j, \quad (210)$$

$$\theta_{kk} < \phi_{kk}, \quad (211)$$

$$\theta_{jk} + \theta'_{jk} < \phi_{jk} + \phi'_{jk}, \quad k \neq j, \quad (212)$$

$$P_{kk} > w_{kk} \quad (213)$$

$$P_{jk} + P'_{jk} > w_{jk} + w'_{jk}, \quad k \neq j, \quad (214)$$

$$W^* > 0, \quad (215)$$

$$\Phi^* < 0, \quad (216)$$

$$\Xi_i^* < 0, \quad (217)$$

$$B_iM_i = X_{1ik}B_i, \quad (218)$$

$$B_iM_i = X_{2ik}B_i, \quad (219)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j, k \in \mathbb{K}_r$, sendo,

$$W^* = \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & \dots & w_{rr} \end{bmatrix}, \quad (220)$$

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{r1} & \dots & \phi_{rr} \end{bmatrix}, \quad (221)$$

$$\Xi_i^* = \begin{bmatrix} \xi_{i11} & \dots & \xi_{i1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{ir1} & \dots & \xi_{irr} \end{bmatrix}, \quad (222)$$

$$\Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} X_{1ik}A_{ij} + A'_{ij}X'_{1ik} + X_{1ij}A_{ik} + A'_{ik}X'_{1ij} + 2B_iN_iC + 2C'N'_iB'_i \\ P_{jk} - X'_{1ik} + X_{2ik}A_{ij} + P_{kj} - X'_{1ij} + X_{2ij}A_{ik} + 2B_iN_iC \\ P_{jk} - X_{1ik} + A'_{ij}X'_{2ik} + P_{kj} - X_{1ij} + A'_{ik}X'_{2ij} + 2C'N'_iB'_i \\ -X_{2ik} - X'_{2ik} - X_{2ij} - X'_{2ij} \end{bmatrix}, \quad (223)$$

$$\gamma_{ijk} = \begin{bmatrix} Q_{0jk} + Q_{0kj} + 2C'Q_iC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (224)$$

$$\theta_{jk} = Q_{0jk} + C'Q_\lambda C. \quad (225)$$

Então, a regra de chaveamento (21) e (156) com os ganhos $K_i = M_i^{-1}N_i$, tornam a origem ($x = 0$) do sistema linear chaveado incerto (17) e (157) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere que $A_{cl}(\sigma, \alpha) = A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C$ e as seguintes definições:

$$X = \begin{bmatrix} X_1(\sigma, \alpha) \\ X_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} I_n \\ A_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k, \quad \Delta(\sigma, \alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_1 T \\ \alpha_2 T \\ \vdots \\ \alpha_r T \end{bmatrix}. \quad (226)$$

Em seguida, considere que (209)-(219) são factíveis. Então, a partir de (209)-(210), (221)-(226), para $x \neq 0$, segue que:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \Delta'(\sigma, \alpha) \Xi_i^* \Delta(\sigma, \alpha) x \\ &= x' \sum T' \xi_{ijk} T x \\ &> x' \sum T' (\Psi_{ijk} - \gamma_{ijk}) T x. \end{aligned} \quad (227)$$

A partir de (223)-(225), note que (227) pode ser reescrita como:

$$0 > x' \sum T' \left(\begin{bmatrix} X_{1_{ik}}A_{ij} + A'_{ij}X'_{1_{ik}} + X_{1_{ij}}A_{ik} + A'_{ik}X'_{1_{ij}} + 2B_iN_iC + 2C'N'_iB'_i \\ P_{jk} - X'_{1_{ik}} + X_{2_{ik}}A_{ij} + P_{kj} - X'_{1_{ij}} + X_{2_{ij}}A_{ik} + 2B_iN_iC \\ P_{jk} - X_{1_{ik}} + A'_{ij}X'_{2_{ik}} + P_{kj} - X_{1_{ij}} + A'_{ik}X'_{2_{ij}} + 2C'N'_iB'_i \\ -X_{2_{ik}} - X'_{2_{ik}} - X_{2_{ij}} - X'_{2_{ij}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + Q_{0_{kj}} + 2C'Q_iC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) T_x. \quad (228)$$

Observe que, $\sum (X_{1_{ik}}A_{ij} + X_{1_{ij}}A_{ik}) = 2 \sum X_{1_{ik}}A_{ij}$, $\sum (P_{jk} + P_{kj}) = 2 \sum P_{jk}$, $\sum (X_{1_{ik}} + X_{1_{ij}}) = 2 \sum X_{1_{ik}}$ e $\sum (Q_{0_{jk}} + Q_{0_{kj}}) = 2 \sum Q_{0_{jk}}$. Deste modo, verifique que (228) pode ser reescrita como:

$$0 > 2x' \sum T' \left(\begin{bmatrix} X_{1_{ik}}A_{ij} + B_iN_iC + (*) & P_{jk} - X_{1_{ik}} + A'_{ij}X'_{2_{ik}} + C'N'_iB'_i \\ (*) & -X_{2_{ik}} - X'_{2_{ik}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + C'Q_iC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) T_x. \quad (229)$$

Então, defina que $X_1(\sigma, \alpha) = (\alpha_1 X_{1_{\sigma_1}} + \alpha_2 X_{1_{\sigma_2}} + \dots + \alpha_r X_{1_{\sigma_r}})$, $X_2(\sigma, \alpha) = (\alpha_1 X_{2_{\sigma_1}} + \alpha_2 X_{2_{\sigma_2}} + \dots + \alpha_r X_{2_{\sigma_r}})$, $Q_0(\alpha) = (\alpha_1 \alpha_1 Q_{0_{11}} + \alpha_1 \alpha_2 Q_{0_{12}} + \alpha_2 \alpha_1 Q_{0_{21}} + \dots + \alpha_r \alpha_r Q_{0_{rr}})$, $P(\alpha) = (\alpha_1 \alpha_1 P_{11} + \alpha_1 \alpha_2 P_{12} + \alpha_2 \alpha_1 P_{21} + \dots + \alpha_r \alpha_r P_{rr})$ e a partir (17) e (229), considerando $\sigma = i$, obtém-se:

$$\begin{aligned} 0 > x' T' & \left(\begin{bmatrix} X_1(\sigma, \alpha) (A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C) + (*) & (*) \\ P(\alpha) - X'_1(\sigma, \alpha) + X_2(\sigma, \alpha) (A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C) & -X_2(\sigma, \alpha) - X'_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_0(\alpha) + C'Q_\sigma C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) T_x \\ & = x' T' \left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} A'_{cl}(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} A'_{cl}(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{bmatrix} X' \right\} - \begin{bmatrix} Q_0(\alpha) + C'Q_\sigma C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) T_x \\ & = x' T' \left(\begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_0(\alpha) + C'Q_\sigma C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) T_x. \quad (230) \end{aligned}$$

Agora, considerando que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual do que a combinação convexa destes números, observe que, a partir de (21) e (157), (230) torna-se:

$$\begin{aligned} 0 > \dot{V}(x) - x' (Q_0(\alpha)) x - \min_{i \in \mathbb{K}_N} y' Q_i y, \\ & \geq \dot{V}(x) - x' (Q_0(\alpha) + C'Q_\lambda C) x, \end{aligned}$$

$$= \dot{V}(x) - x' \sum \theta_{jk} x. \quad (231)$$

Conseqüentemente, considerando uma função candidata de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, sendo que $P(\alpha)$ foi definida acima, a partir de (211)-(212), (225), note que (231) pode ser representada como:

$$\begin{aligned} 0 &> \dot{V}(x) - \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k x' \theta_{jk} x, \\ &> \dot{V}(x) - \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k x' \phi_{jk} x. \end{aligned} \quad (232)$$

Em seguida, de (216) e (221), segue que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &< \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k x' \phi_{jk} x, \\ \dot{V}(x) &< x' [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I] \Phi^* [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I]' x < 0. \end{aligned} \quad (233)$$

Finalmente, a partir de (17), (213), (214), (215) e (220), observe que:

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= x' [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I] \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1} & \dots & P_{rr} \end{bmatrix} [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I]' x, \\ &> x' [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I] \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & \dots & w_{rr} \end{bmatrix} [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I]' x, \\ &= x' \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k W^* x > 0. \end{aligned} \quad (234)$$

Além disto, a partir de (233) e (234), verifique que, respectivamente, $\dot{V}(x) < 0$ e $V(x) > 0$, para $x \neq 0$. Deste modo, a prova está concluída. \square

Observação 19. Note que, para implementação das LMIs do Teorema 27, considerou-se $X_{1_{ij}} B_i = X_{1_{ik}} B_i$ e $X_{2_{ij}} B_i = X_{2_{ik}} B_i$, pois $j, k \in \mathbb{K}_r$.

O teorema a seguir generaliza as condições do Teorema 27 através da inserção de um critério de desempenho, o custo garantido (30).

Teorema 28. Considere o sistema apresentado em (17) e (157), sendo que $\text{posto}(B_i) = m$ para $i \in \mathbb{K}_N$ e suponha que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes simétricas $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $\xi_{ijk} = \xi'_{ikj} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\phi_{jk} = \phi'_{kj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $w_{jk} = w'_{kj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{jk} = P'_{kj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{1_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$,

$M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tais que

$$\Psi_{ikk} - \gamma_{ikk} < \xi_{ikk}, \quad (235)$$

$$\Psi_{ijk} + \Psi'_{ijk} - \gamma_{ijk} - \gamma'_{ijk} < \xi_{ijk} + \xi'_{ijk}, \quad k \neq j, \quad (236)$$

$$\theta_{kk} < \phi_{kk}, \quad (237)$$

$$\theta_{jk} + \theta'_{jk} < \phi_{jk} + \phi'_{jk}, \quad k \neq j, \quad (238)$$

$$P_{kk} > w_{kk} \quad (239)$$

$$P_{jk} + P'_{jk} > w_{jk} + w'_{jk}, \quad k \neq j, \quad (240)$$

$$P_{kk} - \rho I_n < 0, \quad (241)$$

$$\frac{1}{2} \times (P_{jk} + P'_{jk}) - \rho I_n < 0, \quad k \neq j, \quad (242)$$

$$W^* > 0, \quad (243)$$

$$\Phi^* < 0, \quad (244)$$

$$\Xi_i^* < 0, \quad (245)$$

$$B_i M_i = X_{1ik} B_i, \quad (246)$$

$$B_i M_i = X_{2ik} B_i, \quad (247)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j, k \in \mathbb{K}_r$, sendo,

$$W^* = \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & \dots & w_{rr} \end{bmatrix}, \quad (248)$$

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{r1} & \dots & \phi_{rr} \end{bmatrix}, \quad (249)$$

$$\Xi_i^* = \begin{bmatrix} \xi_{i11} & \dots & \xi_{i1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{ir1} & \dots & \xi_{irr} \end{bmatrix}, \quad (250)$$

$$\Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} X_{1ik} A_{ij} + A'_{ij} X'_{1ik} + X_{1ij} A_{ik} + A'_{ik} X'_{1ij} + 2B_i N_i C + 2C' N'_i B'_i + 2C' C \\ P_{jk} - X'_{1ik} + X_{2ik} A_{ij} + P_{kj} - X'_{1ij} + X_{2ij} A_{ik} + 2B_i N_i C \\ P_{jk} - X_{1ik} + A'_{ij} X'_{2ik} + P_{kj} - X_{1ij} + A'_{ik} X'_{2ij} + 2C' N'_i B'_i \\ - X_{2ik} - X'_{2ik} - X_{2ij} - X'_{2ij} \end{bmatrix}, \quad (251)$$

$$\gamma_{ijk} = \begin{bmatrix} Q_{0jk} + Q_{0kj} + 2C' Q_i C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (252)$$

$$\theta_{jk} = Q_{0,jk} + C' Q_{\lambda} C. \quad (253)$$

Então, a regra de chaveamento (21) e (156) com os ganhos $K_i = M_i^{-1} N_i$, tornam a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (17) e (157) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (30) mantém-se para todas as condições iniciais, $x_0 = x(0) \neq 0$.

Demonstração. A partir da demonstração do Teorema 27, note que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) + y'y &< \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k x' \phi_{jk} x, \\ \dot{V}(x) + y'y &< x' [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I] \Phi^* [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I]' x < 0. \end{aligned} \quad (254)$$

A partir de (234), verifique que $V(x) > 0$, para $x \neq 0$. Agora, multiplicando (241) e (242) à esquerda por $[\alpha_1 I, \alpha_2 I, \dots, \alpha_r I]$ e à direita por $[\alpha_1 I, \alpha_2 I, \dots, \alpha_r I]'$, segue que $P(\alpha) - \rho I_n < 0$. Em seguida, integrando (254) de zero até o infinito, obtém-se (30). Desta maneira, a prova está concluída. \square

Então o Teorema 28 fornece o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \inf \quad & \{\rho : (235) - (247) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j, k \in \mathbb{K}_r\}. \\ & P_{jk} = P'_{kj}, \rho > 0, Q_{0,jk} = Q'_{0,jk}, Q_i = Q'_i, \xi_{ijk} = \xi'_{ikj} N_i \\ & X_{1,ik}, X_{2,ik}, X_{1,ij}, X_{2,ij}, \phi_{jk} = \phi'_{kj}, w_{jk} = w'_{kj} M_i \end{aligned} \quad (255)$$

Observação 20. Note que, para implementação das LMIs do Teorema 28, considerou-se $X_{1,ij} B_i = X_{1,ik} B_i$ e $X_{2,ij} B_i = X_{2,ik} B_i$, pois $j, k \in \mathbb{K}_r$.

Observação 21. Observe que as condições (218), (219), (246) e (247), apresentadas nos Teoremas 27 e 28 são igualdades matriciais lineares. Deste modo, não podem ser resolvidas diretamente pelas ferramentas computacionais disponíveis. Desta maneira, utilizam-se as ideias apresentadas em Covacic (2006). Sendo assim, considere que as expressões (218), (219), (246) e (247) possam ser aproximadas por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^2 & (B_i M_i - X_{1,ik} B_i)' l'_p \\ l_p (B_i M_i - X_{1,ik} B_i) & I \end{bmatrix} > 0, \quad (256)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^2 & (B_i M_i - X_{2,ik} B_i)' l'_p \\ l_p (B_i M_i - X_{2,ik} B_i) & I \end{bmatrix} > 0, \quad (257)$$

com $\varepsilon \approx 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $k \in \mathbb{K}_r$, e $p = \{1, \dots, t\}$, sendo:

$$l_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0], l_2 = [0 \ 1 \ \dots \ 0], \dots, l_t = [0 \ 0 \ \dots \ 1]. \quad (258)$$

A seguir, propõe-se considerar a saída como uma nova variável de estado. A partir de (101) e (157) obtém-se:

$$\dot{\xi}(t) = A_N(\sigma, \alpha)\xi, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (259)$$

sendo $\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $A_N(\sigma, \alpha) = \begin{bmatrix} A_{cl}(\sigma, \alpha) & 0 \\ CA_{cl}(\sigma, \alpha) & 0 \end{bmatrix}$, sendo $A_{cl}(\sigma, \alpha) = A(\sigma, \alpha) + B_\sigma K_\sigma C$.

Deste modo a partir de (17) e (259), propõe-se o teorema a seguir.

Teorema 29. *Considere o sistema linear chaveado incerto (17) e (259) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para realimentação. Se existirem, $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $P_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{1_{jk}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tais que*

$$\begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} > 0, \quad (260)$$

$$\begin{bmatrix} A'_{ij}P_{0_{jk}} + P_{0_{jk}}A_{ij} + B_iN_iC + C'N'_iB'_i & A'_{ij}C'P_{1_{jk}} + C'N'_iB'_iC' \\ P_{1_{jk}}CA_{ij} + CB_iN_iC & 0_{p \times p} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & C'Z_i \\ Z_iC & Q_i \end{bmatrix}, \quad (261)$$

$$B_iM_i = P_{0_{jk}}B_i, \quad (262)$$

$$P_{1_{jk}}CB_i = CB_iM_i, \quad (263)$$

$$Q_{0_{jk}} + C'(2Z_\lambda + Q_\lambda)C < 0, \quad (264)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, j e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (105) e (156) com os ganhos $K_i = M_i^{-1}N_i$ tornam o ponto de equilíbrio ($\xi = 0$) do sistema representado por (17) e (259) globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Defina $A_{cl\sigma_j} = A_{\sigma_j} + B_\sigma K_\sigma C$. Considere que (105), (106), (260)-(264) são factíveis. A partir de (259) e (261)-(264) têm-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \left\{ \begin{bmatrix} A'_{cl\sigma_j} & A'_{cl\sigma_j}C' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{cl\sigma_j} & 0 \\ CA_{cl\sigma_j} & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_{ij}P_{0_{jk}} + P_{0_{jk}}A_{ij} + B_iN_iC + C'N'_iB'_i & A'_{ij}C'P_{1_{jk}} + C'N'_iB'_iC' \\ P_{1_{jk}}CA_{ij} + CB_iN_iC & 0_{p \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & C'Z_\sigma \\ Z_\sigma C & Q_\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \left[x'(Q_{0_{jk}})x + y'(2Z_\sigma + Q_\sigma)y \right] \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \left[x'(Q_{0_{jk}})x \right] + \min_{i \in \mathbb{K}_N} y'(2Z_i + Q_i)y \\
&\leq \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k x' \left[Q_{0_{jk}} + C'(2Z_\lambda + Q_\lambda)C \right] x < 0.
\end{aligned} \tag{265}$$

Note que, a primeira desigualdade é obtida considerando (261). A partir de (17) e (106), verifique que $V(\xi) > 0$, para $\xi_0 = \xi(0) \neq 0$ e a partir de (265), $\dot{V}(\xi) < 0$. Deste modo, a prova está concluída. \square

O teorema a seguir generaliza as condições do Teorema 29 através da inserção de um critério de desempenho, o custo garantido (30).

Teorema 30. *Considere o sistema linear chaveado incerto (17) e (259) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para realimentação. Se existirem, $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes simétricas $P_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{1_{jk}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tais que*

$$\begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} - \rho I_{(n+p)} < 0, \tag{266}$$

$$\begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} > 0, \tag{267}$$

$$\begin{bmatrix} A'_{ij}P_{0_{jk}} + P_{0_{jk}}A_{ij} + B_iN_iC + C'N'_iB'_i + C'C & A'_{ij}C'P_{1_{jk}} + C'N'_iB'_iC' \\ P_{1_{jk}}CA_{ij} + CB_iN_iC & 0_{p \times p} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & C'Z_i \\ Z_iC & Q_i \end{bmatrix}, \tag{268}$$

$$B_iM_i = P_{0_{jk}}B_i, \tag{269}$$

$$P_{1_{jk}}CB_i = CB_iM_i, \tag{270}$$

$$Q_{0_{jk}} + C'(2Z_\lambda + Q_\lambda)C < 0, \tag{271}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, j e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (105) e (156) com os ganhos $K_i = M_i^{-1}N_i$ tornam o ponto de equilíbrio $\xi = 0$ do sistema representado por (17) e (259) glob-

almente assintoticamente estável e o custo garantido (30) mantém-se para todas as condições iniciais, $\xi_0 = \xi(0) \neq 0$.

Demonstração. A partir da demonstração do Teorema 29, observe que:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\xi) &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \left\{ \begin{bmatrix} A'_{ij}P_{0_{jk}} + B_i N_i C + (*) & A'_{ij}C'P_{1_{jk}} + C'N'_i B'_i C' \\ P_{1_{jk}}CA_{ij} + CB_i N_i C & 0_{p \times p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C'C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&< \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \left\{ \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & C'Z_\sigma \\ Z_\sigma C & Q_\sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C'C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \left[x'(Q_{0_{jk}})x + y'(2Z_\sigma + Q_\sigma)y \right] - y'y \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \left[x'(Q_{0_{jk}})x \right] + \min_{i \in \mathbb{I}_{K_N}} y'(2Z_i + Q_i)y - y'y \\
&\leq \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k x' \left(Q_{0_{jk}} + C'(2Z_\lambda + Q_\lambda)C \right) x - y'y \\
&< -y'y \leq 0.
\end{aligned} \tag{272}$$

A partir de (17) e considerando uma função quadrática de Lyapunov (106), note que, $V(\xi) > 0$ para $\xi \neq 0$. Em seguida, verifique que a partir de (272), $\dot{V}(\xi) < 0$ para $\xi \neq 0$. Agora, integrando (272) de zero até o infinito, considerando (266) e $\xi_0 = \xi(0) \neq 0$, obtém-se (43). Sendo assim, a prova está concluída. \square

Então o Teorema 30 fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{\substack{P_{0_{jk}}=P'_{0_{jk}}, P_{1_{jk}}=P'_{1_{jk}}, \rho>0, Q_{0_{jk}}=Q'_{0_{jk}} \\ Q_i=Q'_i, Z_i=Z'_i, M_i, N_i}} \{ \rho : (266) - (271) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{I}_{K_N} \text{ e } j, k \in \mathbb{I}_{K_r} \}. \tag{273}$$

Observação 22. Observe que as condições (262), (263), (269) e (270), apresentadas nos Teoremas 29 e 30 são igualdades matriciais lineares. Deste modo, não podem ser resolvidas diretamente pelas ferramentas computacionais disponíveis. Desta maneira, utilizam-se as ideias apresentadas em Covacic (2006). Sendo assim, considere que as expressões (262), (263), (269) e (270) possam ser aproximadas por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^2 & (B_i M_i - P_{0_{jk}} B_i)' l'_p \\ l_p (B_i M_i - P_{0_{jk}} B_i) & I \end{bmatrix} > 0, \tag{274}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^2 & (P_{1_{jk}} C B_i - C B_i M_i)' l'_p \\ l_p (P_{1_{jk}} C B_i - C B_i M_i) & I \end{bmatrix} > 0, \tag{275}$$

com $\varepsilon \approx 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j, k \in \mathbb{K}_r$, e $p = \{1, \dots, t\}$, sendo:

$$l_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, l_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, l_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (276)$$

Na seção a seguir, propõe projetar controladores de saída através da saída medida e também da saída filtrada da planta.

4.2 PROJETO DE CONTROLADORES VIA REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS COM INCERTEZAS POLITÓPICAS

Nesta seção, propõe-se utilizar a realimentação dinâmica de saída juntamente com o controlador dinâmico de saída. Deste modo, considere o sistema filtrado:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \hat{A}(\sigma, \alpha)\xi(t) + \hat{B}\hat{u}(t), & \xi(0) = \xi_0, \\ \mathbf{v}(t) = \hat{C}\xi(t), \end{cases} \quad (277)$$

sendo $\xi(t) = [x(t)' \ y_F(t)']' \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{v} = [y(t)' \ y_F(t)']' \in \mathbb{R}^z$, $\hat{A} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\hat{B}_i \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $\hat{C} \in \mathbb{R}^{z \times q}$, $q = n + (M \times p)$, $z = (1 + M) \times p$ e $\hat{u}(t)$ é a entrada de controle. As matrizes do sistema aumentado são descritas usando os parâmetros do sistema original (17), (154) e também através do número de filtros (M) selecionados pelo usuário, como segue:

$$\hat{A}(\sigma, \alpha) = \begin{bmatrix} A(\sigma, \alpha) & T_M \\ V_M & W_M \end{bmatrix}, \quad (278)$$

$$\hat{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0_{Mp \times m} \end{bmatrix}, \quad (279)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C & R_M \\ T'_M & Z_M \end{bmatrix}, \quad (280)$$

sendo: $T_M \in \mathbb{R}^{n \times Mp}$, $V_M \in \mathbb{R}^{Mp \times n}$, $W_M \in \mathbb{R}^{Mp \times Mp}$, $R_M \in \mathbb{R}^{p \times Mp}$ e $Z_M \in \mathbb{R}^{Mp \times Mp}$ são descritas como::

$$T_M = 0_{n \times pM} \quad (281)$$

$$V_M = \begin{cases} \begin{bmatrix} wC \\ 0_{p(M-1) \times n} \end{bmatrix}, & \text{se } M > 1 \\ wC, & \text{se } M = 1 \end{cases} \quad (282)$$

$$W_M = \begin{cases} W_{i,j} = -wI_p, & \text{se, } i = j, \\ W_{i,j} = wI_p, & \text{se, } i > j \text{ e } i - j = 1, \\ W_{i,j} = 0_p, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (283)$$

$$R_M = 0_{p \times pM} \quad (284)$$

$$Z_M = \begin{cases} Z_{i,j} = I_p, & \text{se, } i = j, \\ Z_{i,j} = 0_p, & \text{se, } i \neq j, \end{cases} \quad (285)$$

para $i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$.

A partir de (277), (278)-(285), formula-se o seguinte problema de controle:

Problema 5. *Determine uma lei de controle*

$$\hat{u}(t) = K_\sigma v(t), \quad (286)$$

que torne o ponto de equilíbrio ($\xi = 0$) do sistema definido em (17) e (277) globalmente assintoticamente estável, considerando a regra de chaveamento (129) e também satisfaça um índice de desempenho, neste caso, o custo garantido (30).

Desta maneira, a seguir propõe-se uma nova solução para o Problema de Controle 5.

Teorema 31. *Considere o sistema linear chaveado incerto (17), (117) e (277) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para realimentação. Se existirem, $\lambda \in \Lambda$, matrizes $\Psi_{1_{ik}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Psi_{2_{ik}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, matrizes simétricas $\Gamma_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{z \times z}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_{N_{jk}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{p \times z}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tais que:*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{1_{ik}} \hat{A}_{ij} + \Psi_{1_{ij}} \hat{A}_{ik} + 2\hat{B}_i N_i \hat{C} + (*) & (*) \\ P_{N_{jk}} - \Psi'_{1_{ik}} + \Psi_{2_{ik}} \hat{A}_{ij} + P_{N_{kj}} - \Psi'_{1_{ij}} + \Psi_{2_{ij}} \hat{A}_{ik} + 2\hat{B}_i N_i \hat{C} & -\Psi_{2_{ik}} - \Psi_{2_{ij}} - (*) \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \Gamma_{0_{jk}} + \Gamma_{0_{kj}} + 2\hat{C}' \Gamma_i \hat{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (287)$$

$$\Psi_{1_{ij}} \hat{B}_i = \hat{B}_i M_i, \quad (288)$$

$$\Psi_{2_{ij}} \hat{B}_i = \hat{B}_i M_i, \quad (289)$$

$$\Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}' \Gamma_\lambda \hat{C} < 0, \quad (290)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (129) e (286) com os ganhos $K_i = M_i^{-1} N_i$, tornam a origem ($\xi = 0$) do sistema linear chaveado incerto (17), (117) e (277) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Defina $\hat{A}_{cl}(\sigma, \alpha) = \hat{A}(\sigma, \alpha) + \hat{B}_\sigma K_\sigma \hat{C}$. Considere que (287) - (290) são factíveis. A partir de (129) e (290), note que:

$$\begin{aligned} 0 &> \xi' (\Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}' \Gamma_\lambda \hat{C}) \xi \geq \xi' \Gamma_{0_{jk}} \xi + \min_{i \in \mathbb{K}_N} v' \Gamma_i v \\ &= \xi' (\Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}' \Gamma_\sigma \hat{C}) \xi \end{aligned} \quad (291)$$

Observe que, (291) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
0 &> \xi' \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Gamma_{0jk} + \hat{C}'\Gamma_\sigma\hat{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi, \\
0 &> \frac{1}{2} \times \xi' \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Gamma_{0jk} + \Gamma_{0kj} + 2\hat{C}'\Gamma_\sigma\hat{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi. \quad (292)
\end{aligned}$$

Deste modo, a partir de (287) e (292), obtém-se:

$$\begin{aligned}
0 &> \frac{1}{2} \times \xi' \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Psi_{1ik}\hat{A}_{ij} + \Psi_{1ij}\hat{A}_{ik} + 2\hat{B}_iN_i\hat{C} + (*) \\ P_{N_{jk}} - \Psi'_{1ik} + \Psi_{2ik}\hat{A}_{ij} + P_{N_{kj}} - \Psi'_{1ij} + \Psi_{2ij}\hat{A}_{ik} + 2\hat{B}_iN_i\hat{C} \\ P_{N_{jk}} - \Psi_{1ik} + \hat{A}'_{ij}\Psi'_{2ik} + P_{N_{kj}} - \Psi_{1ij} + \hat{A}'_{ik}\Psi'_{2ij} + 2\hat{C}'_iN'_i\hat{B}' \\ - \Psi_{2ik} - \Psi_{2ij} - (*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi. \quad (293)
\end{aligned}$$

Note que de (293) tem-se que:

$$\begin{aligned}
0 &> \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j \xi' \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Psi_{1ik}(\hat{A}_{ij} + \hat{B}_iK_i\hat{C}_i) + (*) \\ P_{N_{jk}} - \Psi'_{1ik} + \Psi_{2ik}(\hat{A}_{ij} + \hat{B}_iK_i\hat{C}_i) \\ (*) \\ - \Psi_{2ik} - \Psi'_{2ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi. \quad (294)
\end{aligned}$$

Definindo-se $P_N(\alpha) = (\alpha_1\alpha_1P_{N_{11}} + \alpha_1\alpha_2P_{N_{12}} + \dots + \alpha_r\alpha_rP_{N_{rr}})$, $\Psi_1(\sigma, \alpha) = (\alpha_1\Psi_{1\sigma 1} + \alpha_2\Psi_{1\sigma 2} + \dots + \alpha_r\Psi_{1\sigma r})$, $\Psi_2(\sigma, \alpha) = (\alpha_1\Psi_{2\sigma 1} + \alpha_2\Psi_{2\sigma 2} + \dots + \alpha_r\Psi_{2\sigma r})$, note que (294) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
0 &> \xi' \begin{bmatrix} I_n & \hat{A}'_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & P_N(\alpha) \\ P_N(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_1(\sigma, \alpha) \\ \Psi_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{cl}(\sigma, \alpha) & -I_n \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} \hat{A}'_{cl}(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi'_1(\sigma, \alpha) & \Psi'_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \xi, \\
&> \begin{bmatrix} I_n & \hat{A}'_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P_N(\alpha) \\ P_N(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}_{cl}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix}. \quad (295)
\end{aligned}$$

Considerando uma função candidata de Lyapunov $V(\xi) = \xi'P_N(\alpha)\xi$, note que de (17), $V(\xi) > 0$ para $\xi \neq 0$ e de (277) e (295), segue que $\dot{V}(\xi) < 0$. Deste modo, a prova está concluída. \square

Observação 23. Note que, para implementação das LMIs do Teorema 31, considerou-se $\Psi_{1ij}B_i = \Psi_{1ik}B_i$ e $\Psi_{2ij}B_i = \Psi_{2ik}B_i$, pois $j, k \in \mathbb{K}_r$.

O teorema a seguir considera além da estabilidade assintótica, um critério de desempenho, neste caso, o custo garantido (30).

Teorema 32. *Considere o sistema linear chaveado incerto (17), (117) e (277) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para realimentação. Se existirem, um escalar $\rho > 0$, $\lambda \in \Lambda$, matrizes $\Psi_{1_{ik}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Psi_{2_{ik}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, matrizes simétricas $\Gamma_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{z \times z}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_{N_{jk}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{p \times z}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tais que:*

$$P_{N_{jk}} - \rho I_q < 0, \quad (296)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{1_{ik}} \hat{A}_{ij} + \Psi_{1_{ij}} \hat{A}_{ik} + 2\hat{B}_i N_i \hat{C} + (*) + 2C'_c C_c & (*) \\ P_{N_{jk}} - \Psi'_{1_{ik}} + \Psi_{2_{ik}} \hat{A}_{ij} + P_{N_{kj}} - \Psi'_{1_{ij}} + \Psi_{2_{ij}} \hat{A}_{ik} + 2\hat{B}_i N_i \hat{C} & -\Psi_{2_{ik}} - \Psi_{2_{ij}} - (*) \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 6\Gamma_{0_{jk}} + \Gamma_{0_{kj}} + 2\hat{C}' \Gamma_i \hat{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (297)$$

$$\Psi_{1_{ij}} \hat{B}_i = \hat{B}_i M_i, \quad (298)$$

$$\Psi_{2_{ij}} \hat{B}_i = \hat{B}_i M_i, \quad (299)$$

$$\Gamma_{0_{jk}} + \hat{C}' \Gamma_\lambda \hat{C} < 0, \quad (300)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (129) e (286) com os ganhos $K_i = M_i^{-1} N_i$, tornam a origem ($\xi = 0$) do sistema linear chaveado incerto (117) e (277) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (30) mantêm-se para $\xi_0 = \xi(0) \neq 0$.

Observação 24. *Note que, na definição do custo garantido (30), somente a saída medida da planta é utilizada para o cômputo. Desta maneira, define-se a matriz $C_c \in \mathbb{R}^{z \times q}$:*

$$C_c = \begin{bmatrix} C & T_M \\ T'_M & T_M \end{bmatrix}. \quad (301)$$

Demonstração. A partir da demonstração do Teorema 31 note que:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \begin{bmatrix} I_n & \hat{A}'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_c & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ 0 &> \dot{V}(x) + y'y, \end{aligned} \quad (302)$$

sendo $P(\alpha) = (\alpha_1 \alpha_1 P_{11} + \alpha_1 \alpha_2 P_{12} + \dots + \alpha_r \alpha_r P_{rr})$. Considerando uma função quadrática de Lyapunov $V(\xi) = \xi' P(\alpha) \xi$, note que a partir de (17), $V(\xi) > 0$ para $\xi \neq 0$. Além disto, observe que $\dot{V}(\xi) < 0$ para $\xi \neq 0$ doravante (302). Agora, integrando (302) de zero até o infinito, considerando $\xi_0 = \xi(0) \neq 0$, obtém-se (30). Deste modo, a prova está concluída. \square

Então o Teorema 32 fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{\substack{P_{N_{jk}}=P'_{N_{jk}}>0, \rho>0, \Gamma_{0_{jk}}=\Gamma'_{0_{jk}}, \Gamma_i=\Gamma'_i, M_i \\ \Psi_{1_{ik}}, \Psi_{2_{ik}}, \Psi_{1_{ij}}, \Psi_{2_{ij}}, N_i}} \{\rho : (296) - (300) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j, k \in \mathbb{K}_r\}. \quad (303)$$

Observação 25. Note que, para implementação das LMIs do Teorema 32, considerou-se $\Psi_{1_{ij}}B_i = \Psi_{1_{ik}}B_i$ e $\Psi_{2_{ij}}B_i = \Psi_{2_{ik}}B_i$, pois $j, k \in \mathbb{K}_r$.

Observação 26. Observe que as condições (288), (289), (298) e (299), apresentadas nos Teoremas 31 e 32 são igualdades matriciais lineares. Deste modo, não podem ser resolvidas diretamente pelas ferramentas computacionais disponíveis. Desta maneira, utilizam-se as ideias apresentadas em Covacic (2006). Sendo assim, considere que as expressões (288), (289), (298) e (299) possam ser aproximadas por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^2 & (\Psi_{1_{ij}}\hat{B}_i - \hat{B}_iM_i)'l'_p \\ l_p(\Psi_{1_{ij}}\hat{B}_i - \hat{B}_iM_i) & I \end{bmatrix} > 0, \quad (304)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^2 & (\Psi_{2_{ij}}\hat{B}_i - \hat{B}_iM_i)'l'_p \\ l_p(\Psi_{2_{ij}}\hat{B}_i - \hat{B}_iM_i) & I \end{bmatrix} > 0, \quad (305)$$

com $\varepsilon \approx 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$, e $p = \{1, \dots, t\}$, sendo:

$$l_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, l_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, l_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (306)$$

A seguir um exemplo numérico comprova a eficácia da técnica de controle proposta neste capítulo. Inicialmente comparam-se as regiões de factibilidade obtidas com as condições dispostas nos Teoremas 4, 5, 7, 9, 13, 16 e 18, com as regiões factíveis atingidas, respectivamente, através das condições dos Teoremas 21, 23, 25, 27, 29 e 31. Em seguida, calcula-se o custo garantido obtido pelas condições dos Teoremas 22, 24, 26, 28, 30 e 32. Verifica-se que o projeto de controladores, sejam estáticos ou dinâmicos, juntamente com uma regra de chaveamento dependente exclusivamente da saída, incorporado nos teoremas deste capítulo, aumenta a região de factibilidade e diminui o custo garantido, quando comparado com os resultados obtidos com os teoremas do Capítulo 3.

4.3 EXEMPLO 4 - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Considere o sistema linear incerto (17) e (157), sendo $r = N = 2$, $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2\}$, e as seguintes matrizes que representam as dinâmicas dos subsistemas:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} h_1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & -1,5 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 & 0 \\ -2 & h_2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que as matrizes A_{12} e A_{22} dependem dos parâmetros incertos h_1 e h_2 . Deste modo, note que a matriz A_{12} não é Hurwitz para todos $h_1 \in [-30, -20]$ e matriz A_{22} é Hurwitz para todos $h_2 \in [0, 3]$. Além disto, verifica-se que as A_{11} e A_{21} não são Hurwitz. Inicialmente apresenta-se um estudo comparativo sobre a região de factibilidade obtida através das condições dos Teoremas 4, 5, 7, 9, 13, 16, 18, 21, 23, 25, 27, 29 e 31 para alguns pares de h_1 e h_2 , sendo $h_1 \in [-30, -20]$ e $h_2 \in [0, 3]$. Além disto, comparações entre o custo garantido (30) são realizadas a partir das condições propostas nos Teoremas 22, 24, 26, 28, 30 e 32. A matriz de saída do sistema linear incerto chaveado (157) e (17) é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (307)$$

O *solver* utilizado nas simulações foi o *LMILab* com a interface do *Yalmip* (LOFBERG, 2004) em ambiente MATLAB.

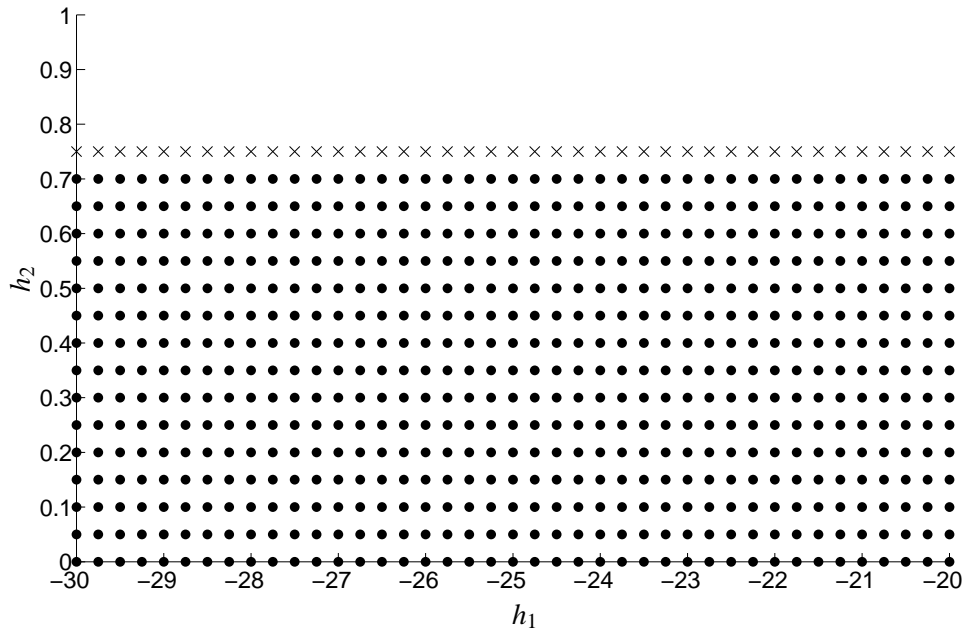
4.3.1 Estudo sobre Regiões de Factibilidade I

Inicialmente, adota-se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$. Nesta primeira etapa da simulação, consideram-se alguns pares de h_1 e h_2 , sendo $h_1 \in [-30, -20]$ e $h_2 \in [0, 1]$ visando comparar as áreas factíveis obtidas através das condições dos Teoremas 5, 7, 9, com os Teoremas 21, 23 e 25. Observa-se que, conforme esperado, as regiões de factibilidade aumentaram com a inserção do controlador estático de saída. Sendo assim, através das Figuras 30, 31 e 32 verifica-se que a região factível obtida com os Teoremas 21, 23 e 25 é maior quando comparada com as regiões obtidas através dos Teoremas 5, 7, 9, respectivamente.

4.3.2 Estudo sobre Regiões de Factibilidade II

Nesta segunda etapa da simulação, adota-se $\lambda_1 = 0,75$ e $\lambda_2 = 0,25$. Consideram-se alguns pares de h_1 e h_2 , sendo $h_1 \in [-30, -20]$ e $h_2 \in [2, 3, 5]$ visando comparar as áreas factíveis obtidas através das condições dos Teoremas 13, 16 e 18, com as regiões factíveis atingidas, respectivamente, através das condições dos Teoremas 27, 29 e 31. Na Figura 34 comparam-se as regiões de factibilidade atingidas com as condições dos Teoremas 13 e 27. Note que, o Teorema 27 além da regra de chaveamento, também considera a realimentação de um ganho estático estabilizante. Tal fato justifica o aumento da região de factibilidade. A mesma análise é válida para a Figura 35, que compara a factibilidade alcançada com as condições dos Teoremas 16 e 29. Na Figura 36 comparam-se as regiões factíveis obtidas através das condições dos

Figura 30 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 5 e 21, sendo que a região factível obtida através do Teorema 5 é representada por (•) e região factível obtida através do Teorema 21 é representada por (×).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

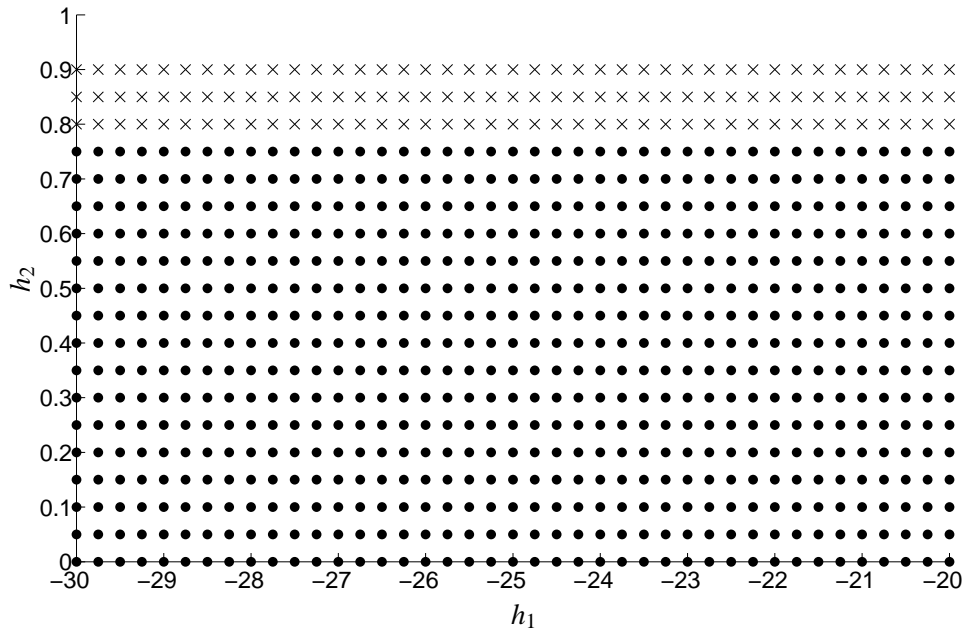
Teoremas 18 e 31, considerando $M = 1$ e $w = 50$.

4.3.3 Cômputo do Custo Garantido

A seguir, comparam-se os valores do custo garantido obtido com as condições dos Teoremas 22, 24, 26, 28, 30 e 32. Para critérios de comparação, consideram-se os seguintes intervalos para os parâmetros: $h_1 \in [-30, -25]$ e $h_2 \in [0, 0,7]$. A escolha deste intervalo baseou-se na menor região de factibilidade obtida através do Teorema 21, como verificou-se na Figura 33. Na Figura 38 observa-se a variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 para as condições mostradas no Teorema 22. Nota-se uma superfície decrescente, sendo que os maiores valores para o custo garantido (30) surgiram com o aumento dos valores da incerteza h_2 .

Observa-se através da Figura 39 a variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 para as condições mostradas no Teorema 24. É possível verificar que, com a flexibilização deste teorema, que o custo garantido (30) reduziu, quando comparado com a análise da Figura 38. Já, a Figura 40 apresenta o mesmo estudo para as condições do Teorema 26. Verifique que, os resultados das Figuras 38 e 39 são semelhantes, ou seja, os custos obtidos com os Teoremas 24 e 26 são próximos para este exemplo. As mesmas análises são válidas

Figura 31 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 7 e 23, sendo que a região factível obtida através do Teorema 7 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 23 é representada por (●) e (×).



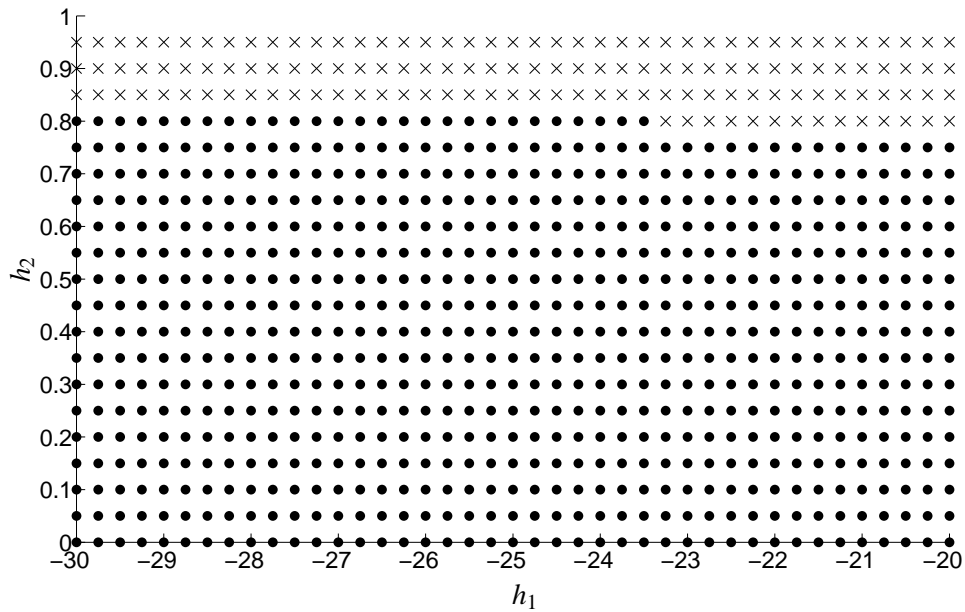
Fonte: Elaboração do próprio autor.

para as Figuras 41, 42 e 43, que mostram, respectivamente, a variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições dos Teoremas 28, 30 e 32. Note que, a partir da Figura 44, para as condições do Teorema 32, considerando-se $w = 50$ e um filtro dinâmico na saída medida da planta, o custo garantido reduziu-se, quando comparado com as condições dos Teoremas 28 e 30.

4.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

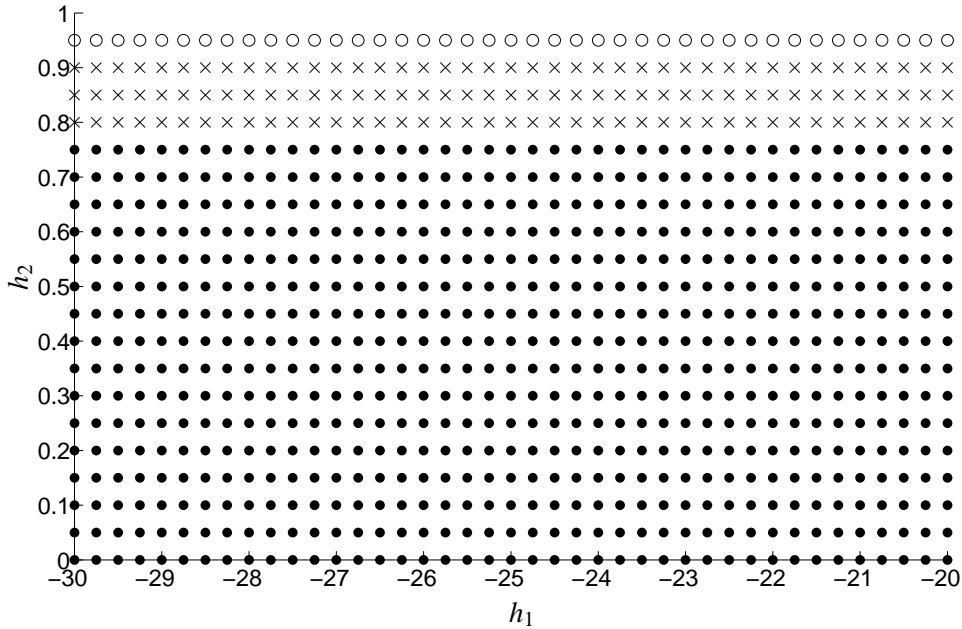
Neste capítulo apresentaram-se resultados referentes ao projeto de controladores estáticos e dinâmicos via realimentação de saída para sistemas lineares chaveados incertos utilizando as aproximações disponibilizadas em Crusius e Trofino (1999). Propuseram-se teoremas visando garantir estabilidade assintótica e um critério de desempenho, neste caso, custo garantido. Um exemplo de simulação computacional mostrou a eficácia da técnica de controle proposta. Inicialmente, compararam-se os resultados referentes à região de factibilidade obtidas com as condições dispostas nos teoremas do Capítulo 3 com as condições dispostas neste capítulo. Notou-se que, o projeto de controladores de saída, juntamente com o chaveamento dependente da saída, proporcionou melhor desempenho (maior região factível). Tal fato, era esperado, justamente devido à inserção de novas variáveis nas condições dos teoremas, os ganhos estabi-

Figura 32 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 9 e 25, sendo que a região factível obtida através do Teorema 9 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 25 é representada por (×).



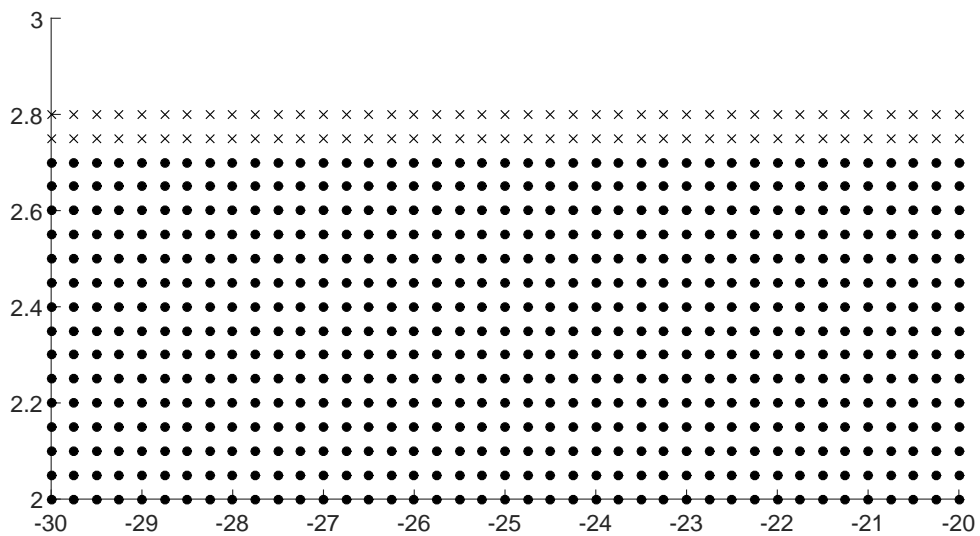
lizantes K_{σ} . Além disso, verificou-se que, conforme esperado, o valor do custo garantido (30) em função dos parâmetros incertos h_1 e h_2 também foi reduzido. Por fim, verificou-se que o projeto de controladores dinâmicos de saída apresentaram resultados mais eficientes do que os controladores estáticos de saída.

Figura 33 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 21, 23 e 25, sendo que a região factível obtida através do Teorema 21 é representada por (●) e região factível obtida através do Teorema 23 é representada por (●) e (×) e a região obtida com o Teorema 25 é representada por (●), (×) e (○) .



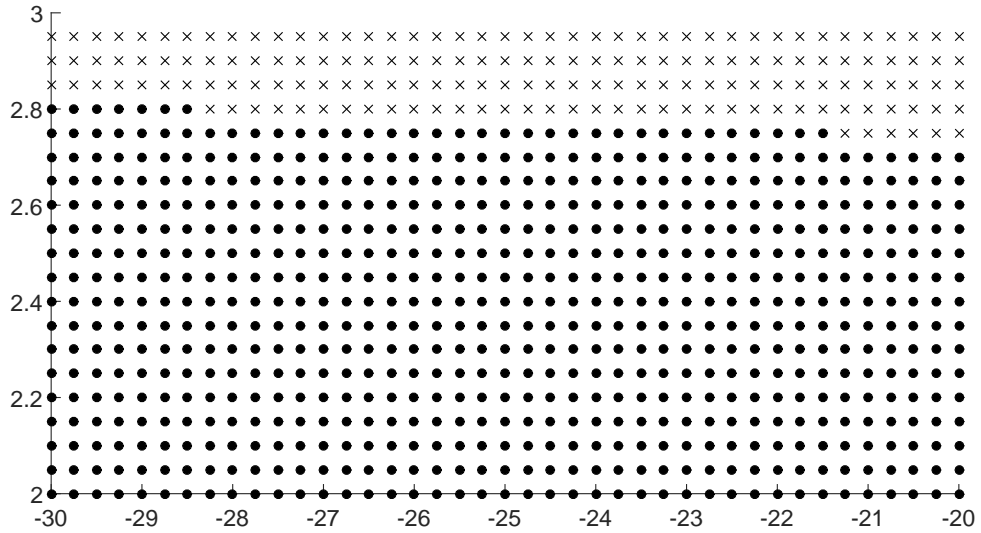
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 34 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 13 e 27, sendo que a região factível obtida através do Teorema 13 é representada por (●) e a região factível obtida através do Teorema 27 é representada por (●) e (×) .



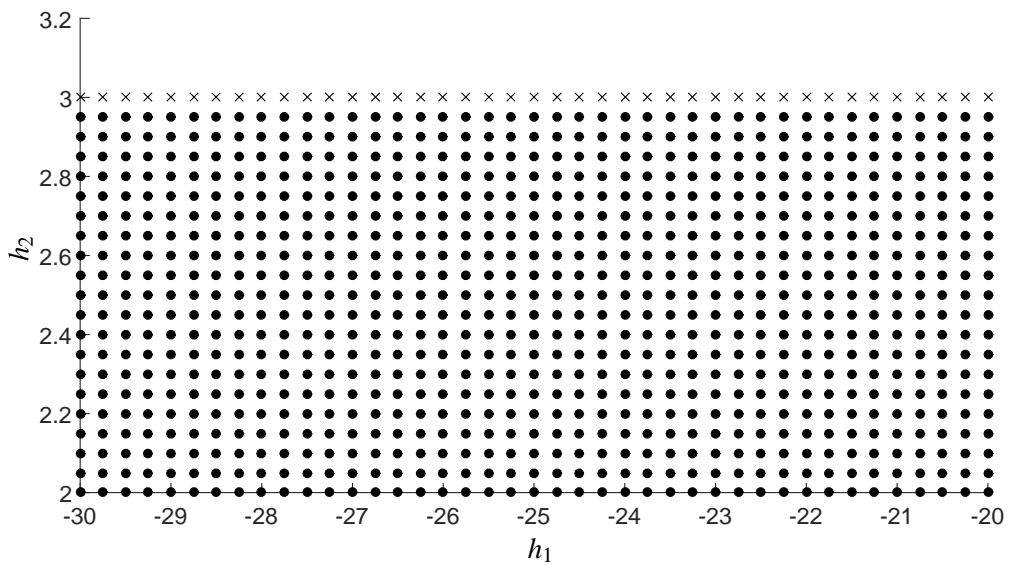
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 35 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 16 e 29, sendo que a região factível obtida através do Teorema 16 é representada por (●) e a região factível obtida através do Teorema 29 é representada por (●) e (×) .



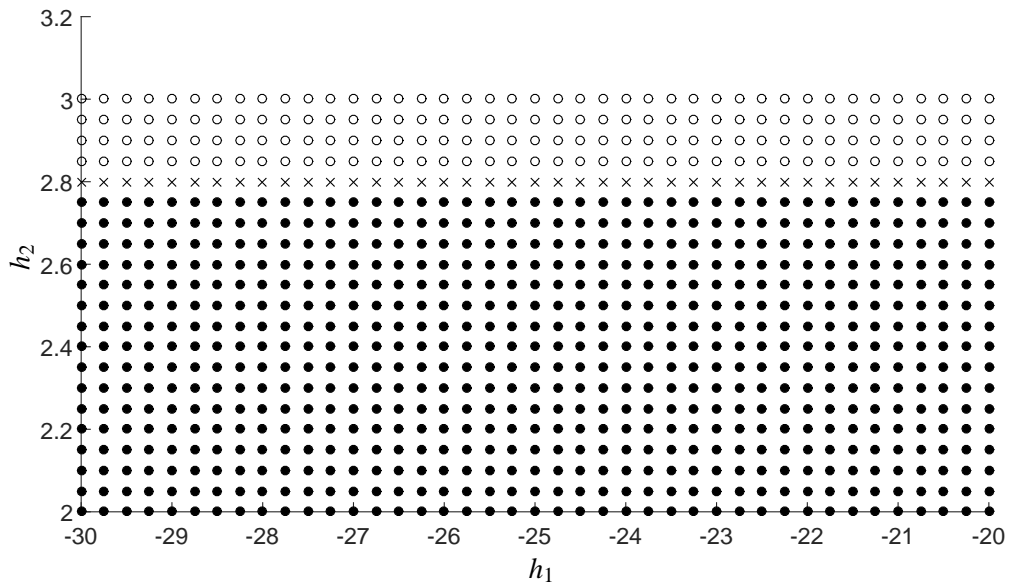
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 36 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 18 e 31, sendo que a região factível obtida através do Teorema 18 é representada por (●) e a região factível obtida através do Teorema 31 é representada por (●) e (×) .



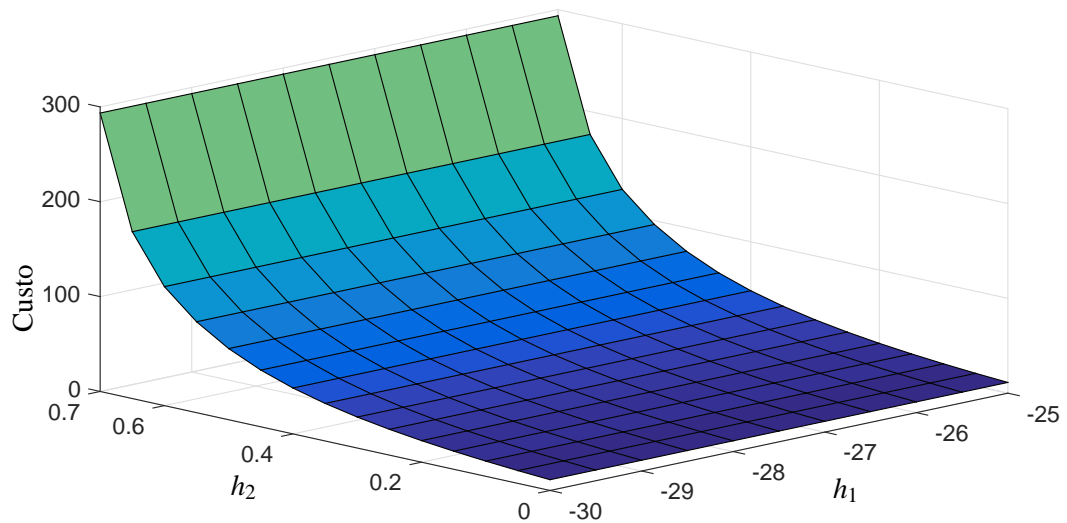
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 37 - Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 27, 29 e 31, sendo que a região factível obtida através do Teorema 27 é representada por (●), a região factível obtida através do Teorema 29 é representada por (●) e (×) e a região factível obtida através do Teorema 31 é representada por (●), (×) e (○) .



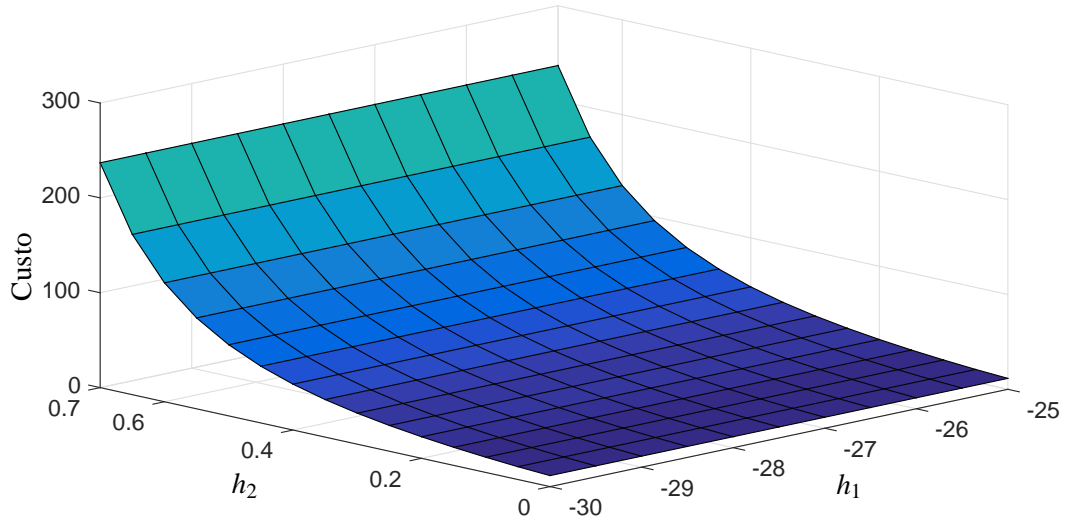
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 38 - Variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros h_1 e h_2 para as condições do Teorema 22 .



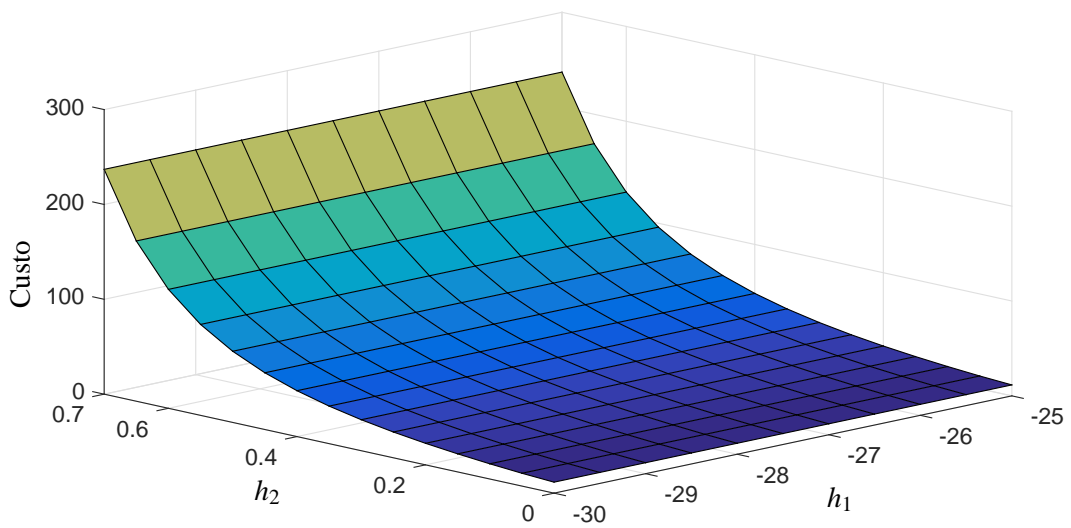
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 39 - Variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros h_1 e h_2 para as condições do Teorema 24 .



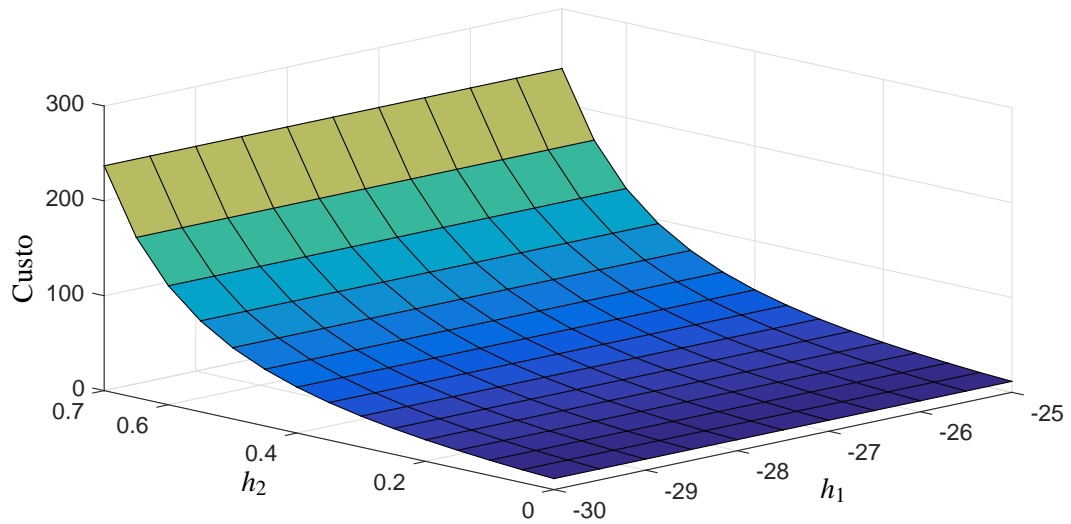
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 40 - Variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros h_1 e h_2 para as condições do Teorema 26 .



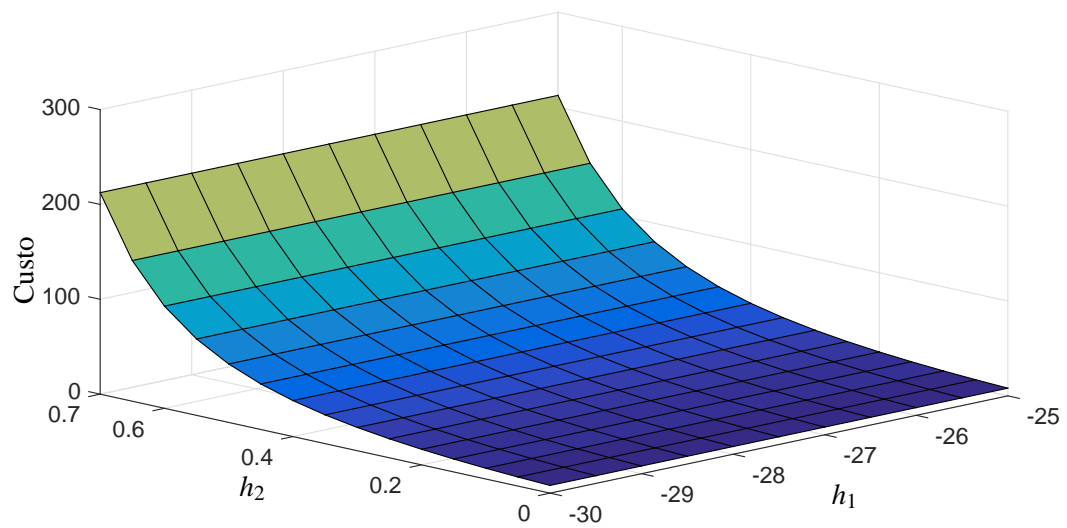
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 41 - Variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros h_1 e h_2 para as condições do Teorema 28 .



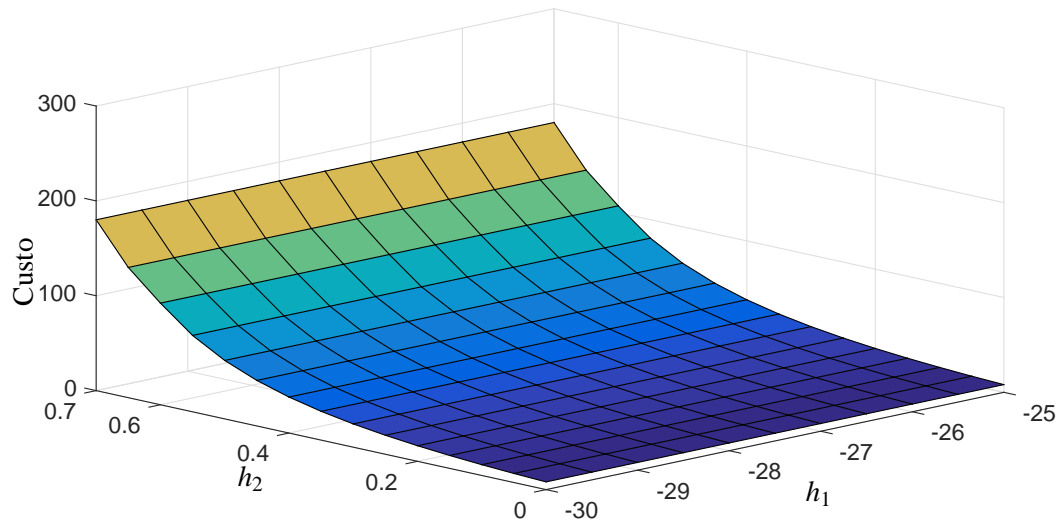
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 42 - Variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros h_1 e h_2 para as condições do Teorema 30 .



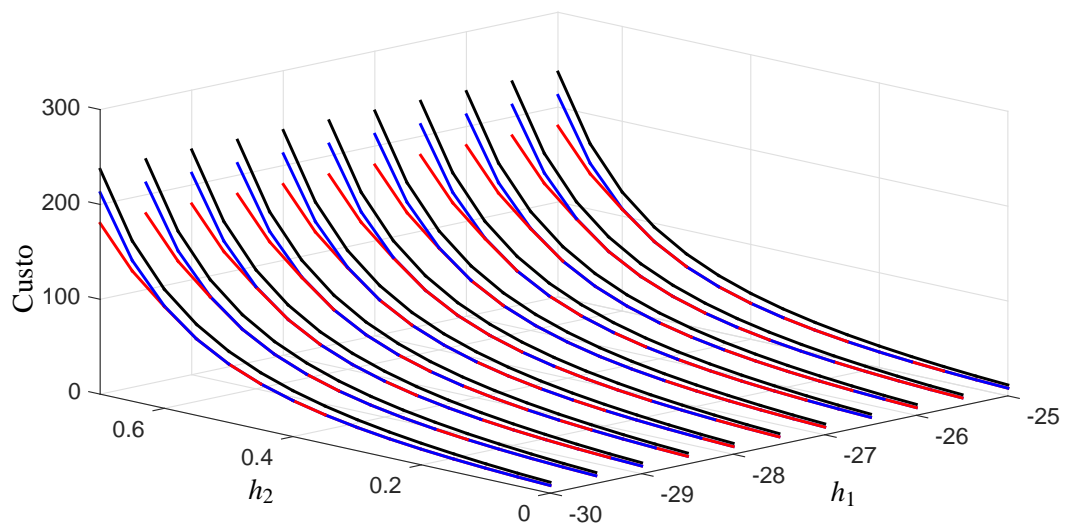
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 43 - Variação do custo garantido (30) em função dos parâmetros h_1 e h_2 para as condições do Teorema 32 .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 44 - Variação do custo garantido (30) em função das incertezas politópicas h_1 e h_2 para as condições dos Teoremas 28 (azul), 30 e 32 (vermelho) .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

5 IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA EM UM SISTEMA ED SUSPENSÃO ATIVA

Neste capítulo apresenta-se a implementação prática do controlador robusto estático de saída. Sabe-se que a realimentação de saída não é um problema de fácil solução devido à presença de BMIs em sua formulação (SYRMOS et al., 1997), (LIN; ANTSAKLIS, 2009). No Capítulo 4 utilizou-se a abordagem proposta em Crusius e Trofino (1999) visando reescrever as condições em forma de LMIs. Atualmente não existem *solvers* na literatura capazes de encontrar valores ótimos para BMIs devido as suas características não convexas. Porém, neste capítulo, propõe-se utilizar uma técnica híbrida, envolvendo uma meta-heurística, neste caso, a Evolução Diferencial (ED) juntamente com um *solver* de LMI, visando encontrar valores sub-ótimos para os controladores de saída. A implementação prática em um sistema didático de suspensão ativa comprova a eficácia da técnica de controle e também do algoritmo de resolução proposto.

5.1 PROJETO DE CONTROLADORES VIA REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

Considere o sistema linear chaveado incerto com a seguinte realização em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma, \alpha)x(t) + B(\sigma, \alpha)u(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t), \\ v(t) = Hx(t), \end{cases} \quad (308)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída medida da planta, $v(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída controlada da planta, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída do sistema, conhecida e constante para todo $t \geq 0$, $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz referente à saída controlada, constante para todo $t \geq 0$, $\sigma(t)$ é a regra ou lei de chaveamento, x_0 é a condição inicial e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é entrada de controle. Nas matrizes $A(\sigma, \alpha)$ e $B(\sigma, \alpha)$, o vetor $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ representa as incertezas politópicas da planta, previamente definidas em (17).

Deste modo, a partir de (156) e (308), considere o sistema linear chaveado incerto em malha fechada, considerando a saída medida $y(t) \in \mathbb{R}^p$ como uma nova variável de estado, representado a seguir:

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} A(\sigma, \alpha) + B(\sigma, \alpha)K_\sigma C & 0 \\ C(A(\sigma, \alpha) + B(\sigma, \alpha)K_\sigma C) & 0 \end{bmatrix} \xi, \quad \xi = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \xi(0) = \xi_0. \quad (309)$$

Observação 27. Note que, nos teoremas propostos no Capítulo 4, a matriz de entrada do sistema linear incerto chaveado B_i , $i \in \mathbb{K}_N$ era conhecida e tinha posto completo. A partir de agora, considere que $B(\sigma, \alpha)$ é incerta, porém invariante no tempo.

Deste modo, a partir de (17), (156), (309) propõe-se uma solução para o Problema de Controle 4 no teorema a seguir:

Teorema 33. *Considere o sistema linear chaveado incerto (17) e (309) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem, $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $P_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{1_{jk}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $K_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$, tais que*

$$\begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} > 0, \quad (310)$$

$$\begin{bmatrix} A'_{ij}P_{0_{jk}} + P_{0_{jk}}A_{ij} + P_{0_{jk}}B_{ij}K_iC + C'K'_iB'_{ij}P_{0_{jk}} & A'_{ij}C'P_{1_{jk}} + C'K'_iB'_{ij}P'_{1_{jk}} \\ P_{1_{jk}}CA_{ij} + P_{1_{jk}}B_{ij}K_iC & 0_{p \times p} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & C'Z_i \\ Z_iC & Q_i \end{bmatrix}, \quad (311)$$

$$Q_{0_{jk}} + C'(2Z_\lambda + Q_\lambda)C < 0, \quad (312)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, j e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (105) e (156) com os ganhos K_i tornam o ponto de equilíbrio $\xi = 0$ do sistema representado por (309) globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. A demonstração segue os mesmos passos mostrados na prova do Teorema 29. \square

Objetivando-se a inserção de um critério de desempenho, considera-se o custo garantido definido a seguir (DEAECTO et al., 2010):

$$J = \int_0^\infty v(t)'v(t)dt = \int_0^\infty \xi'(t)H'H\xi(t)dt \quad (313)$$

O teorema a seguir considera um critério de desempenho, neste caso, o custo garantido (313), visando generalizar as condições dispostas no Teorema 33.

Teorema 34. *Considere o sistema linear chaveado incerto (17) e (309) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ esteja disponível para realimentação. Se existirem, um escalar $\rho > 0$, $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $P_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{1_{jk}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $K_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$, tais que*

$$\begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} - \rho I_{(n+p)} < 0, \quad (314)$$

$$\begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} > 0, \quad (315)$$

$$\begin{bmatrix} A'_{ij}P_{0_{jk}} + P_{0_{jk}}A_{ij} + P_{0_{jk}}B_{ij}K_iC + C'K'_iB'_{ij}P_{0_{jk}} + H'H & A'_{ij}C'P_{1_{jk}} + C'K'_iB'_{ij}P'_{1_{jk}} \\ P_{1_{jk}}CA_{ij} + P_{1_{jk}}B_{ij}K_iC & 0_{p \times p} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & C'Z_i \\ Z_iC & Q_i \end{bmatrix}, \quad (316)$$

$$Q_{0_{jk}} + C'(2Z_\lambda + Q_\lambda)C < 0, \quad (317)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, j e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (105) e (156) com os ganhos K_i tornam o ponto de equilíbrio $\xi = 0$ do sistema representado por (309) globalmente assintoticamente estável e admite o seguinte limitante superior para o custo garantido

$$J = \int_0^\infty v(t)'v(t) dt \leq \max_{j,k \in \mathbb{K}_r} \xi'_0 \begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} \xi_0 < \rho \xi'_0 I_{(n+p)} \xi_0. \quad (318)$$

Demonstração. A demonstração segue os mesmos passos mostrados na prova do Teorema 30. \square

Na seção a seguir propõe-se a utilização de um método híbrido baseado em um algoritmo evolutivo e também em LMIs visando obter soluções sub-ótimas para os controladores de saída.

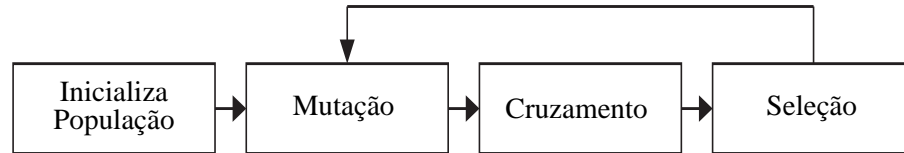
5.2 ALGORITMO HÍBRIDO BASEADO EM EVOLUÇÃO DIFERENCIAL E LMIS

Devido à existência de BMIs, as condições (311) e (316) dispostas nos Teoremas 33 e 34, respectivamente, apresentam características não convexas. Portanto, não existem *solvers* na literatura capazes de encontrar soluções ótimas. O problema em encontrar os valores dos ganhos de realimentação de saída está relacionado aos mínimos locais gerados pelas BMIs. Visando encontrar soluções factíveis, propõe-se um algoritmo híbrido baseado em LMIs e Evolução Diferencial (ED). Basicamente, este método aplica o algoritmo do *solver* SeDuMi (STURM, 1999) para resolver as LMIs e fornecer resultados para compor a função objetivo, que é minimizada através de gerações, pela ED. Neste trabalho, considere o custo garantido (30), resultado da otimização LMI, como a principal característica da função objetivo. Para maiores detalhes sobre o algoritmo da ED, consulte (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2006) e (DAS; SUGANTHAN, 2011).

5.2.1 Evolução diferencial (ED)

Otimização global é considerada eficaz em diferentes ramos da engenharia, estatística e modelos financeiros. Conseqüentemente, existem várias técnicas propostas na literatura visando resolver tais problemas. A ED é um método estocástico baseado em um algoritmo de otimização populacional introduzido por (STORN; PRICE, 1997). Tal método pertence à classe dos Algoritmos Evolutivos (AE), que também incluem: Algoritmos Genéticos (AG), Estratégias Evolutivas (EE) e Programação Evolutiva (PE) (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2006). A ED despontou-se como um dos melhores algoritmos evolutivos que foram apresentados no *Second International Contest on Evolutionary Optimization* e durante os últimos anos tem recebido grande atenção por parte dos pesquisadores (DAS; SUGANTHAN, 2011). O algoritmo ED, aplicado para resolver problemas com parâmetros reais, pode ser resumido em quatro etapas: inicialização da população/parâmetros, mutação, cruzamento e seleção, conforme observa-se na Figura 45. Resumidamente, o algoritmo envolve a geração de uma população inicial e modificação da mesma a cada iteração (geração) considerando os três operadores da ED (mutação, cruzamento e seleção).

Figura 45 - Principais Estágios do Algoritmo da ED .



Fonte: Adaptado de (DAS; SUGANTHAN, 2011).

Denota-se a população formada por NP vetores que serão atualizados ao longo das G gerações como segue (319):

$$\{\vec{x}_{i,G} \mid i = 0, 1, 2 \dots NP - 2, NP - 1\}. \quad (319)$$

Para inicializar a população ($G = 0$) considera-se o conhecimento prévio do problema, no que tange as restrições dos valores dos parâmetros. Dessa forma, objetiva-se cobrir a maior faixa possível desses valores, considerando desta maneira, indivíduos aleatórios distribuídos uniformemente. Após a geração da população inicial, realiza-se a avaliação do valor da função objetivo de cada indivíduo.

Os estágios (operadores da ED) que são descritos a seguir são realizados para cada indivíduo da população ($\vec{x}_{i,G}$) em cada geração (G), ou seja, para cada geração as etapas descritas são realizadas NP vezes, onde NP , denota o tamanho da população (quantidade de indivíduos) (319). Quando todos os indivíduos da população já foram submetidos aos operadores da ED e o critério de parada ainda não foi atingido, uma nova geração é iniciada. Caso o critério de

parada seja atingido, a execução do algoritmo é finalizada.

A mutação é o estágio que envolve uma soma ponderada entre dois indivíduos ($\vec{x}_{\beta,G}$ e $\vec{x}_{\gamma,G}$) da população relacionada a um terceiro indivíduo ($\vec{x}_{\kappa,G}$), como mostrado em (320), onde todos os indivíduos envolvidos são diferentes entre si e diferentes do vetor alvo (o qual está sendo submetido às etapas evolutivas).

$$\vec{v} = \vec{x}_{\kappa,G} + F(\vec{x}_{\beta,G} - \vec{x}_{\gamma,G}). \quad (320)$$

O termo real e constante, $F > 0$, controla a amplitude da variação diferencial. Para cada vetor alvo $\vec{x}_{i,G}$ um vetor mutação \vec{v} é gerado (STORN; PRICE, 1997). Uma possível variação da ED original trata-se da substituição do vetor $\vec{x}_{\kappa,G}$ pelo melhor indivíduo da população da geração G ($\vec{x}_{best,G}$).

Objetivando-se incrementar a diversidade entre os indivíduos da população, realiza-se o cruzamento entre o vetor mutação e o vetor alvo visando gerar o vetor julgamento \vec{u} . O detalhamento do cruzamento utilizado é apresentado em Storn e Price (1997), denominado cruzamento binomial (bin), o qual depende da constante de cruzamento $CR \in [0, 1]$. No último estágio (seleção), verifica-se se o vetor julgamento deve ou não substituir o vetor alvo. Neste procedimento, compara-se o custo garantido entre os dois vetores. Se o vetor julgamento apresentar um custo garantido menor, então este substitui o vetor alvo. Caso contrário, o vetor alvo é mantido.

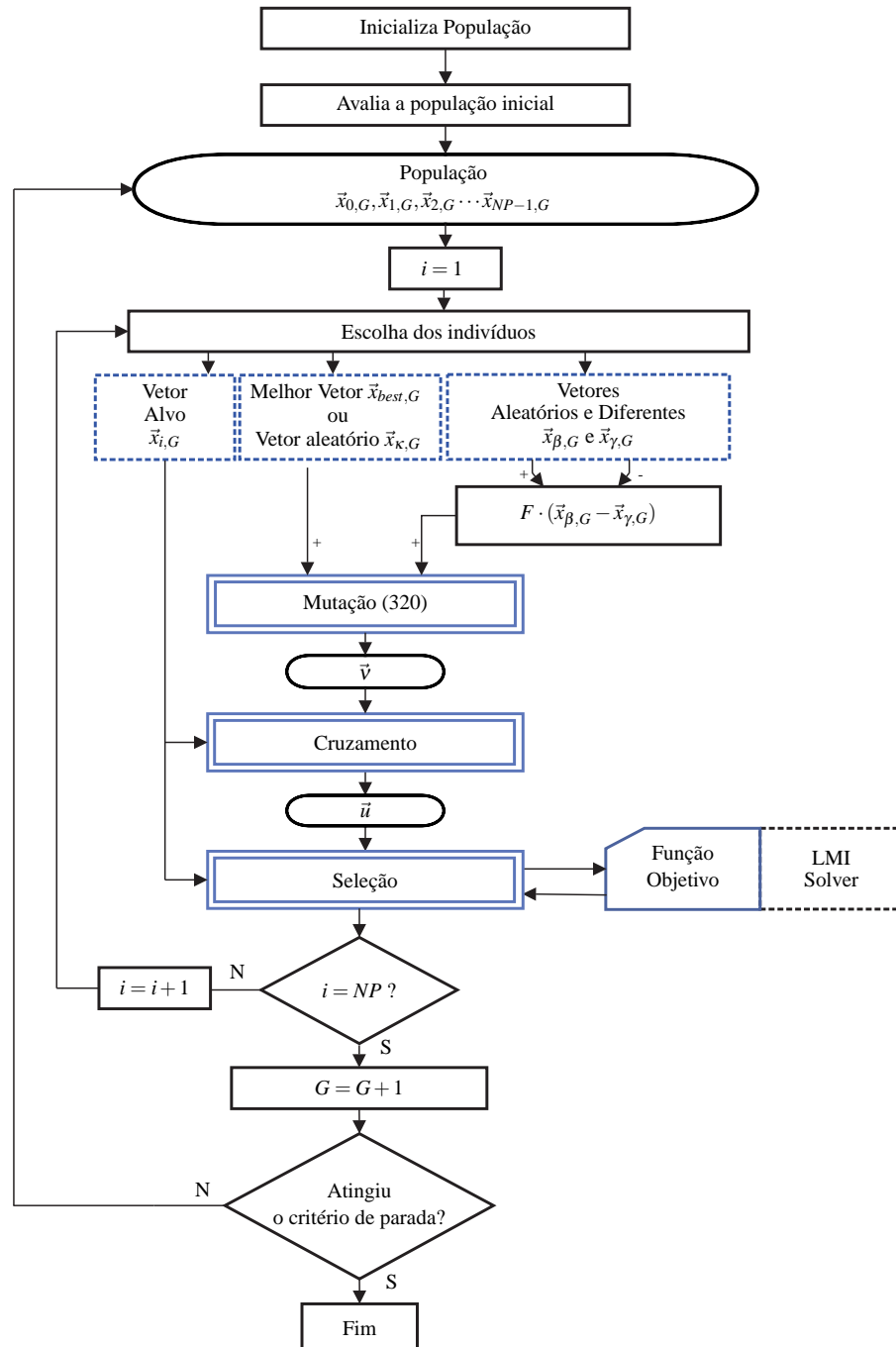
O procedimento é finalizado, como supracitado, por meio de algum critério de parada, como o número de gerações ou obtenção de um valor dentro de uma tolerância pré-estabelecida. Destaca-se que, neste trabalho utilizou-se o algoritmo original desenvolvido por (STORN; PRICE, 1997). Atualmente na literatura existem variações do método original proposto aplicadas em diversas áreas de pesquisa (COELHO; MARIANI, 2006), (WANG; CHIOU; LIU, 2007), (CHIOU; CHANG; SU, 2005), dentre outros. Devido às possíveis variações da ED, utiliza-se na literatura a notação $ED/x/y/z$ para classificar as diferentes variantes (STORN; PRICE, 1997). Resumidamente, x indica qual vetor será utilizado na mutação, y é o número de diferenças envolvidas na mutação e z o esquema de cruzamento. Neste trabalho a variante $ED/best/1/bin$ foi utilizada, denotando portanto que o melhor indivíduo $best$ é utilizado na mutação a qual ocorre com somente uma diferença entre vetores e que o cruzamento binomial é adotado.

5.2.1.1 Algoritmo híbrido ed-lmi aplicado no problema proposto

Como mencionado anteriormente, o algoritmo híbrido ED-LMI utiliza o solver SeDuMi (STURM, 1999) para resolver as LMIs visando fornecer os parâmetros de cada indivíduo, neste caso, o custo garantido (30) que será utilizado como função objetivo da ED. Considerando o algoritmo

tradicional da ED descrito na Subseção 5.2.1 e para ilustrar a integração entre a ED e o *solver* LMI, a Figura 46 apresenta o fluxograma geral, ou a rotina do algoritmo. Note que, o principal objetivo aqui é obter os ganhos dos controladores de saída, ou seja, K_σ , $\sigma \in \mathbb{K}_N$, para as condições dadas no Teorema 33. Sendo assim, os indivíduos da população são formados pelos valores dos ganhos K_σ , $\sigma \in \mathbb{K}_N$.

Figura 46 - Rotina do Algoritmo Híbrido ED-LMI.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A seguir, aplicam-se os conceitos discutidos anteriormente para obtenção dos ganhos es-

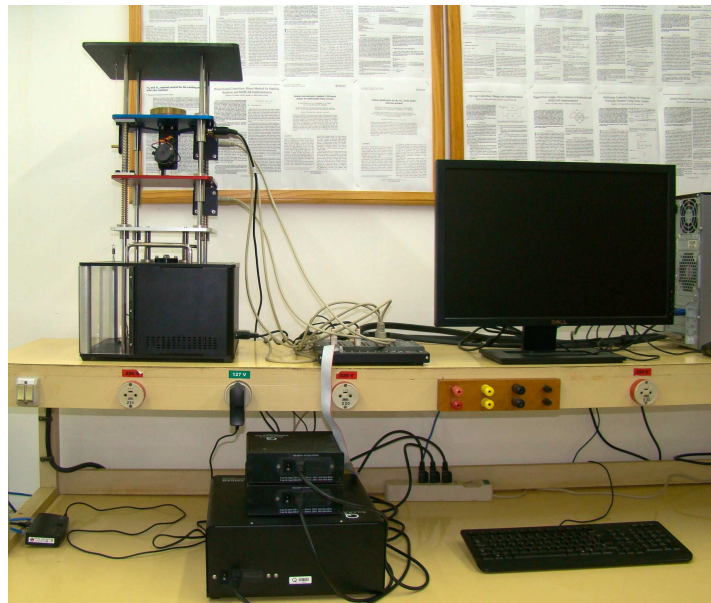
tabilizantes de saída K_{σ} , $\sigma \in \mathbb{K}_N$ para implementação em um sistema de suspensão ativa de veículos (QUANSER, 2009).

5.3 EXEMPLO 5 - APLICAÇÃO PRÁTICA: SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA

Considere o modelo esquemático do sistema de suspensão ativa mostrado na Figura 48. Tal modelagem refere-se ao sistema dinâmico didático apresentado na Figura 47. Conforme Figura 48 observa-se que o conjunto é formado por duas massas M_s , M_{us} . A massa M_s representa $\frac{1}{4}$ da massa total de um veículo sendo suportada pela mola k_s e pelo amortecedor b_s . A massa M_{us} corresponde à massa do conjunto do pneu do veículo, sendo suportada pela mola k_{us} e pelo amortecedor b_{us} .

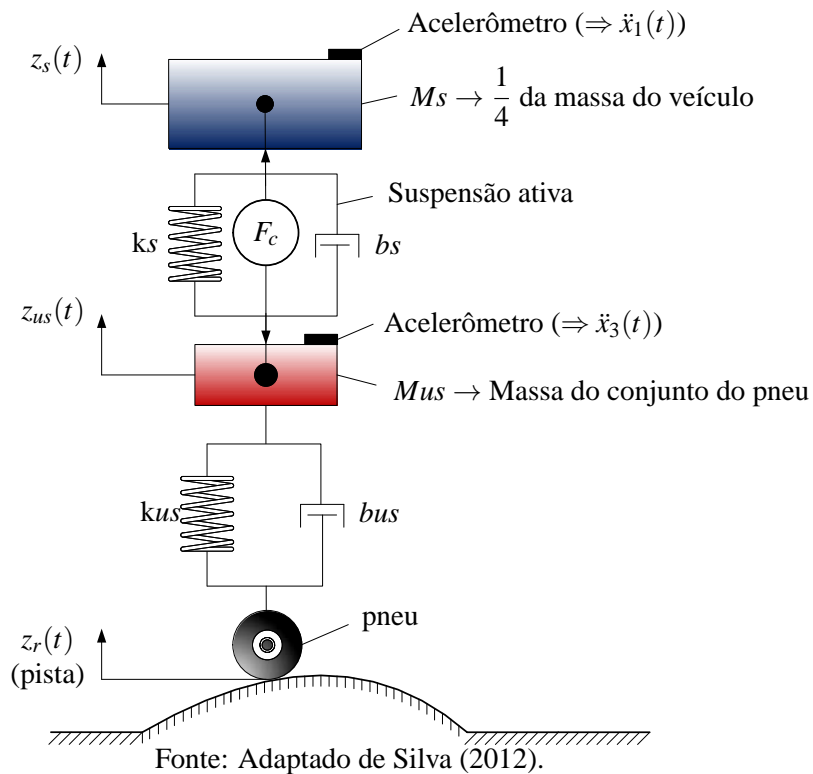
Propõe-se instalar um sistema de suspensão ativa visando diminuir as vibrações causadas por irregularidades da pista. Deste modo, o atuador (motor) conectado entre as massas M_s e M_{us} é controlado pela força F_c . Os valores nominais das constantes supracitadas estão disponibilizados na Tabela 2.

Figura 47 - Sistema didático de suspensão ativa Quanser, pertencente ao LPC-UNESP-FEIS .



Fonte: Elaboração do Próprio Autor.

O modelo dinâmico do esquemático da Figura 48 pode ser representado por (308). Deste

Figura 48 - Sistema de suspensão ativa de um veículo .**Tabela 2** - Valores Nominiais dos Parâmetros da Suspensão Ativa (QUANSER, 2009)

Parâmetro	Valor	Unidade
M_s	2,45	kg
M_{us}	1	kg
K_s	900	N/m
K_{us}	2500	N/m
b_s	7,5	Ns/m
b_{us}	5	Ns/m

modo, têm-se que (QUANSER, 2009):

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & -\frac{k_{us}}{M_{us}} & -\frac{(b_s + b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} w(t),$$

$$= Ax(t) + Bu(t) + B_d w(t), \quad (321)$$

sendo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s(t) \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us}(t) \end{bmatrix}. \quad (322)$$

A entrada de controle é $u(t)$ e $w(t)$ é a entrada exógena que reflete a velocidade do perfil da pista ($\dot{z}_r(t)$). A matriz de saída do sistema é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (323)$$

Considerando que no sistema linear (321), $z_r(t) = A_0$ para $t \geq 0$ (degrau unitário), então $\dot{z}_r(t) = A_0\delta(t)$ ($\delta(t)$ é um sinal de impulso unitário). Note que, para este $\dot{z}_r(t)$, o vetor de estado $r(t)$ do sistema linear $\dot{r}(t) = Ar(t) + B_s\dot{z}_r(t)$ é igual a $r(t) = e^{At}B_sA_0 + e^{At}r(0)$, $t \geq 0$, que é o mesmo vetor de estado $v(t)$ obtido para o sistema $\dot{v}(t) = Av(t)$ com uma condição inicial $v(0) = r(0) + B_sA_0$. Portanto, usando esta interpretação e considerando o princípio da superposição, neste caso o sistema (321), com uma condição inicial $x(0) = x_{p0}$, é equivalente ao novo sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ com uma nova condição inicial $x(0) = x_{p0} + B_sA_0$ e agora pode ser descrito pela classe de sistemas estudada neste texto (17) e (308), para $N = 1$.

Neste exemplo objetiva-se projetar um controlador robusto chaveado através da realimentação estática de saída (K_σ) que atue somente na força de controle $F_c(t)$, tal que, $F_c(t) = K_\sigma y(t)$, $\sigma \in \mathbb{K}_N$. Adicionalmente, considere que M_s é um parâmetro incerto e pertence ao intervalo, $1,455kg \leq M_s \leq 2,45kg$. Além disto, considere que a entrada de controle, $F_c(t) = K_\sigma y(t)$, está sujeita à falhas na alimentação do motor (atuador), ou seja, a entrada de controle do sistema (321) é dada por $u(t) = k_{fault}F_c(t)$, sendo que $k_{fault} \in [0,5, 1]$ é um parâmetro constante, porém incerto.

Portanto, considerando $F_c(t)$ como sendo a nova entrada de controle de (321), este sistema apresenta incertezas politópicas e pode ser representado por (17) e (309), com $N = 1$ (apenas um subsistema), $r = 4$ e assim possui quatro vértices $(A, Bk_{fault}) = (A_{1j}, B_j)$, $j \in \mathbb{K}_4$, referentes a todas combinações de $M_s = 1,455kg$ e $2,45kg$, com $k_{fault} = 0,5$ e 1 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,56 & -5,154 & 0 & 5,154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,687 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

com $M_s = 1,455\text{kg}$ e sem falha na alimentação do motor (atuador),

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,56 & -5,154 & 0 & 5,154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,343 \\ 0 \\ -0,5 \end{bmatrix},$$

com $M_s = 1,455\text{kg}$ e com falha de 50% na alimentação do motor (atuador),

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,34 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,687 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

com $M_s = 2,45\text{kg}$ e sem falha na alimentação do motor (atuador),

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,34 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,343 \\ 0 \\ -0,5 \end{bmatrix},$$

com $M_s = 2,45\text{kg}$ e com falha de 50% na alimentação do motor (atuador). Note que para todos os vértices, $B_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}'$.

Verifique que, o modelo físico apresenta somente um sistema dinâmico (321). Deste modo, impondo a existência de três ganhos K_1 , K_2 e K_3 , que serão projetados usando o procedimento proposto, considera-se o sistema chaveado em malha fechada com:

$$\tilde{A}_{ij} = A_j + B_j K_i C, \quad j \in \mathbb{IK}_4 \text{ e } i \in \mathbb{IK}_3 \quad (324)$$

Neste exemplo considere $N = 3$ e $\lambda_1 = 0,2032$, $\lambda_2 = 0,4976$ e $\lambda_3 = 0,2992$. A partir das condições do Teorema 34 e $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, usando o algoritmo ED-LMI abordado na Seção 5.2, o controlador robusto estabilizante de saída é:

$$K_1 = [-109,318 \quad -83,949], \quad K_2 = [-587,510 \quad -119,352], \quad K_3 = [-540,903 \quad -113,458], \quad (325)$$

e $\rho = 0,1074$.

Observação 28. Note que, a matriz $B(\sigma, \alpha)$ é incerta, porém invariante no tempo. Deste modo, os teoremas discutidos no Capítulo 4 não podem ser aplicadas. Deste modo, considera-se o Teorema 34.

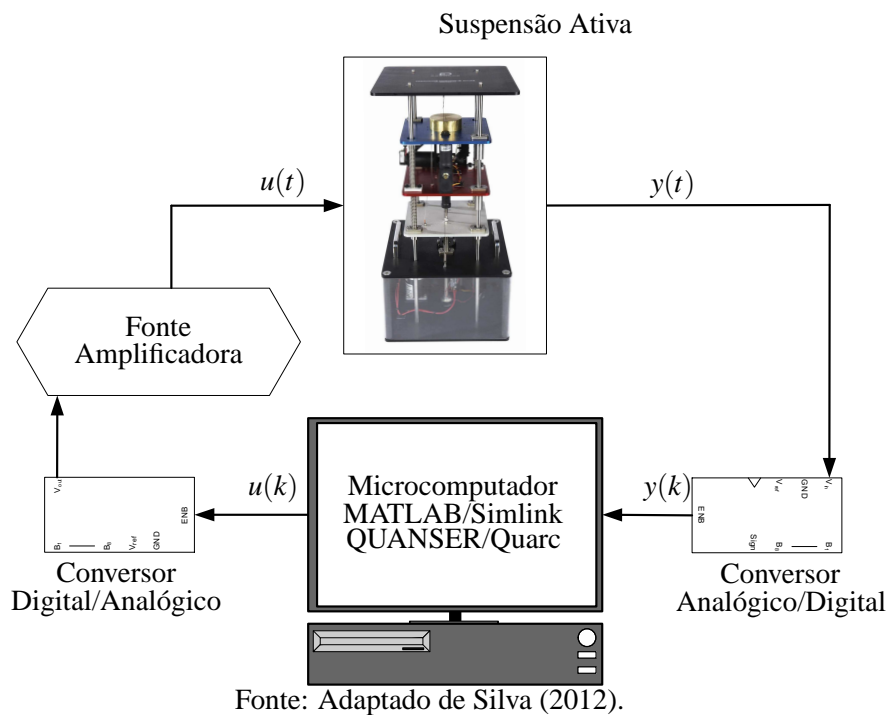
Observação 29. Note que, devido a restrições práticas de implementação, os ganhos dos controladores foram limitados considerando a norma máxima de 600.

5.3.1 Implementação prática do controlador estático de saída em um sistema didático de suspensão ativa

Objetiva-se implementar os controladores estáticos de saída no sistema de suspensão ativa visando atenuar os efeitos das irregularidades da pista ($z_r(t)$) na posição da massa M_s , representada por $z_s(t)$. Define-se o sinal de referência de $z_r(t)$, como sendo, uma onda quadrada, com $0,02\text{ m}$ de amplitude e uma frequência de $\frac{1}{4}\text{ Hz}$, considerando uma razão cíclica de 50%. A partir disto, consideram-se três diferentes cenários: $0s \leq t < 4s$, malha aberta, quando $u(t) = F_c(t) = 0$, $4s \leq t < 8s$ malha fechada, quando $u(t) = F_c(t) = K_\sigma y$, $\sigma \in \mathbb{K}_N$, e $8s \leq t \leq 12s$, malha fechada, considerando que o motor conectado entre as massas M_{us} e M_s , está sujeito a falhas na tensão de alimentação, $u(t) = F_c(t) = 0,5K_\sigma y$.

Na Figura 49 apresenta-se o diagrama de controle utilizado para a implementação do controlador.

Figura 49 - Diagrama utilizado para a implementação prática .

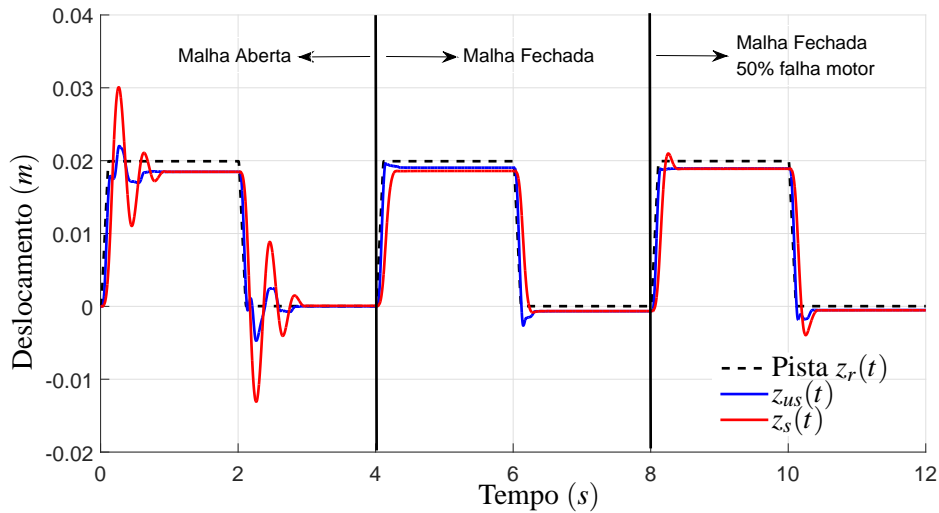


5.3.1.1 Caso I - $M_s = 2,45\text{kg}$

Na Figura 50 apresenta-se a resposta temporal do sistema físico (real). Verifica-se que, o sistema de suspensão ativa é naturalmente estável. Porém, a resposta em malha aberta é pouco amortecida e isto causa desconforto ao motorista. Desta maneira, a partir do atuador ($F_c(t)$) pode-se reduzir o efeito das irregularidades da pista na posição do banco do passageiro. Note

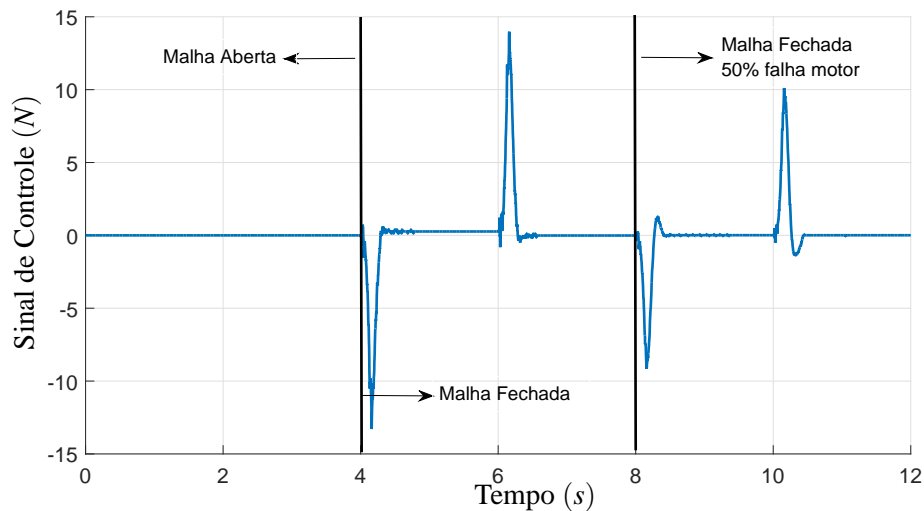
que, mesmo quando a alimentação no motor apresenta falha de 50%, o controlador projetado é capaz de atenuar as oscilações da massa M_s . A Figura 51 exibe o esforço do sinal de controle. O chaveamento entre os subsistemas disponíveis é mostrado na Figura 52.

Figura 50 - Resposta temporal prática implementada no módulo de suspensão ativa considerando $M_s = 2,45kg$.



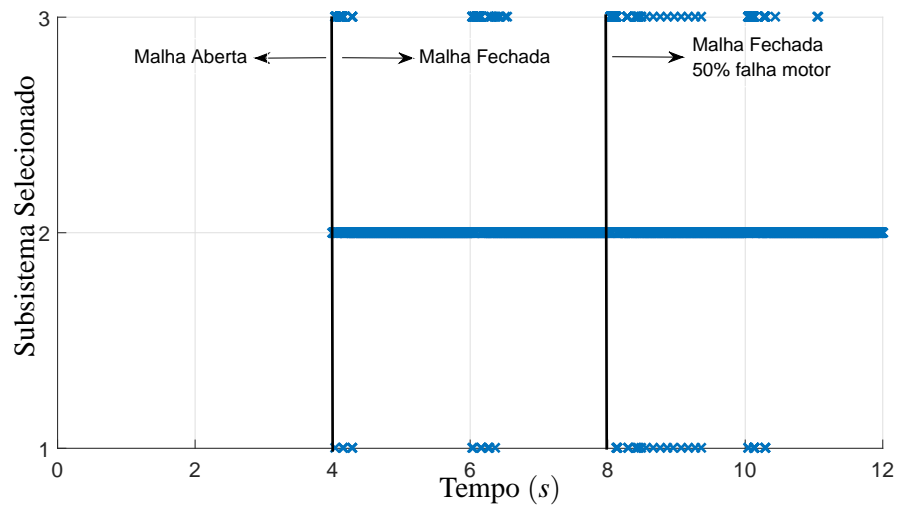
Fonte: Elaboração do Próprio Autor.

Figura 51 - Sinal de Controle $u(t) = F_c(t)$ considerando $M_s = 2,45kg$.



Fonte: Elaboração do Próprio Autor.

Figura 52 - Chaveamento entre os subsistemas em malha fechada considerando $M_s = 2,45kg$.

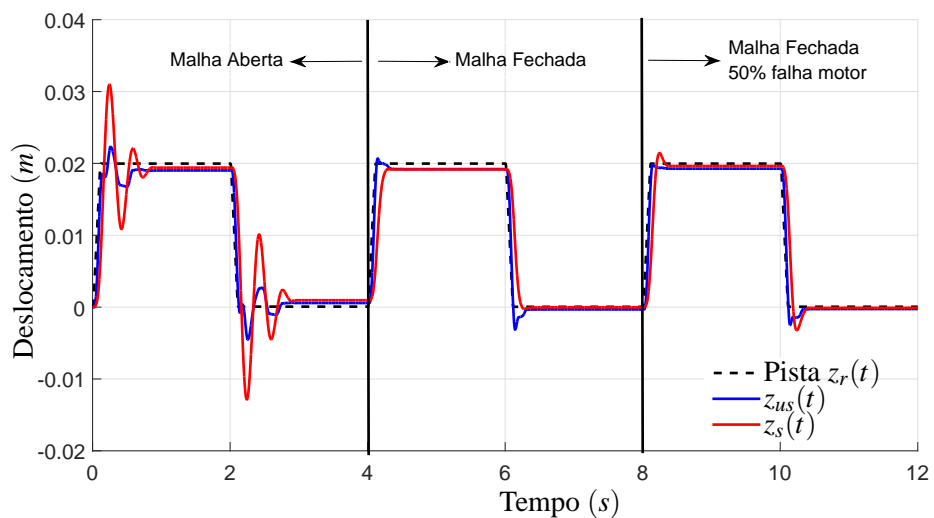


Fonte: Elaboração do Próprio Autor.

5.3.1.2 Caso II - $M_s = 1,9525kg$

Na Figura 53 apresenta-se a resposta temporal do sistema físico (real). A Figura 54 exibe o esforço do sinal de controle. O chaveamento entre os subsistemas disponíveis é mostrado na Figura 55.

Figura 53 - Resposta temporal prática implementada no módulo de suspensão ativa considerando $M_s = 1,9525kg$.



Fonte: Elaboração do Próprio Autor.

Figura 54 - Sinal de Controle $u(t) = F_c(t)$ considerando $M_s = 1,9525kg$.

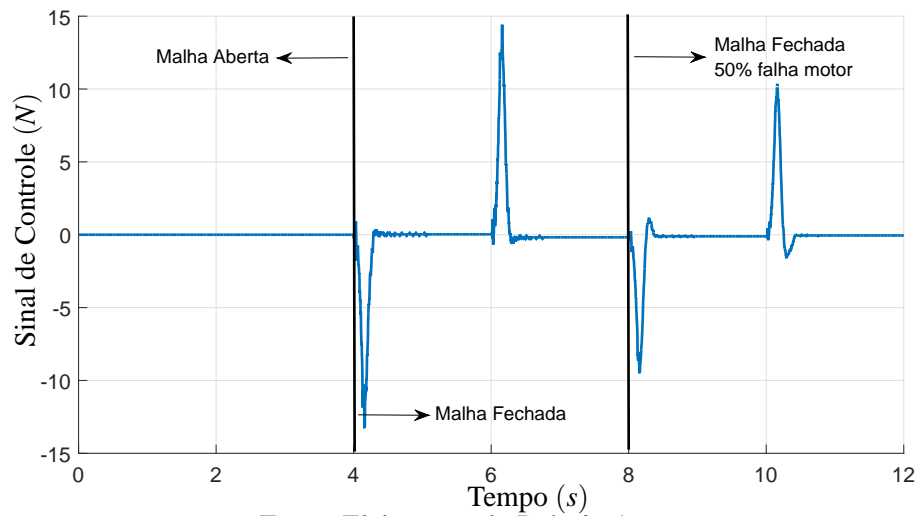
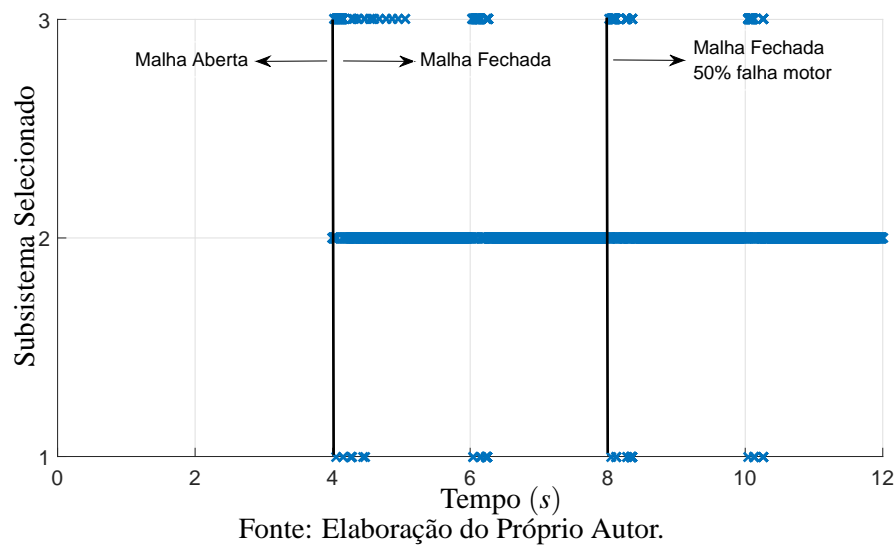


Figura 55 - Chaveamento entre os subsistemas em malha fechada considerando $M_s = 1,9525kg$.



5.3.1.3 Caso III - $M_s = 1,455kg$

Na Figura 56 apresenta-se a resposta temporal do sistema físico (real). A Figura 57 exibe o esforço do sinal de controle. O chaveamento entre os subsistemas disponíveis é mostrado na Figura 58.

A partir das figuras mostradas anteriormente, pode-se verificar que a metodologia de projeto de controladores robustos de saída via ED-LMI é eficaz para as três condições da massa M_s .

Figura 56 - Resposta temporal prática implementada no módulo de suspensão ativa considerando $M_s = 1,455kg$.

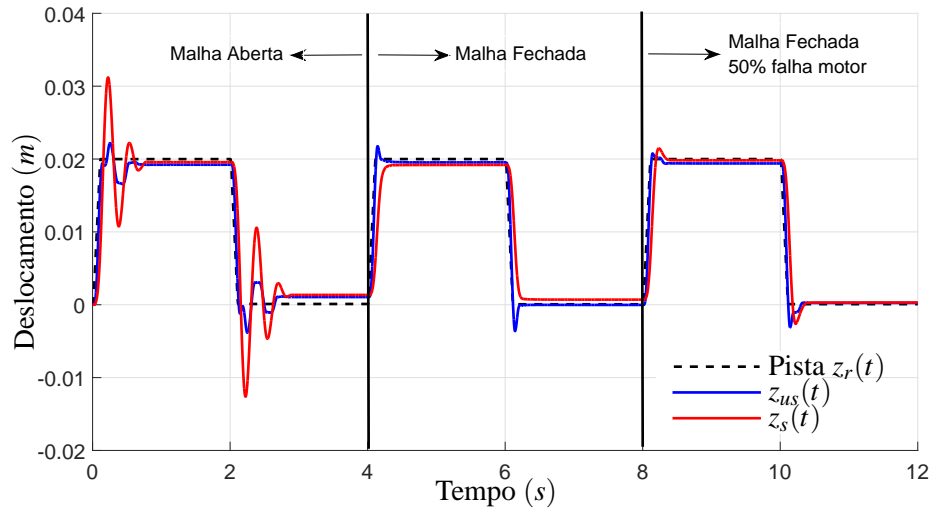
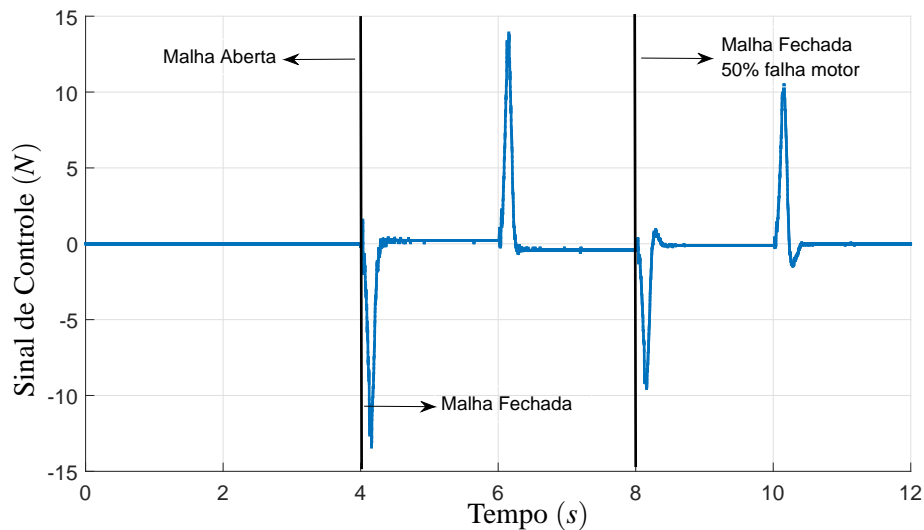


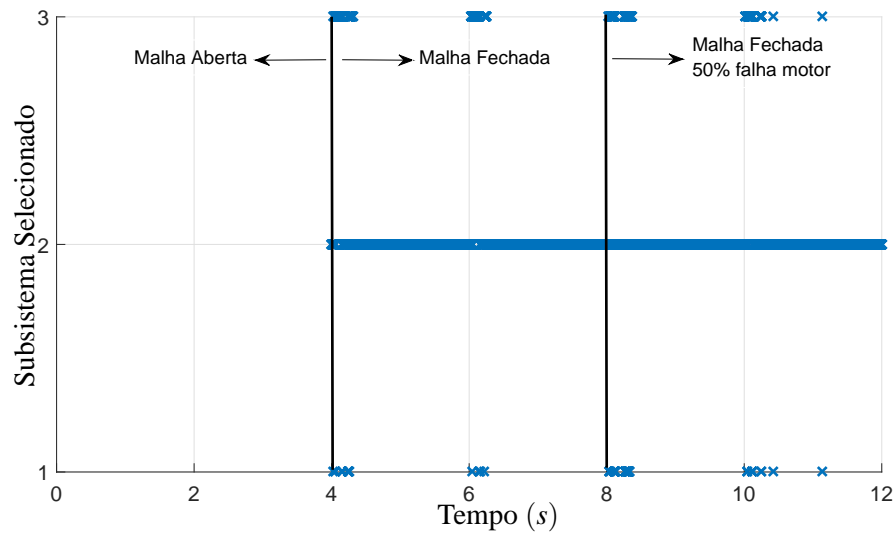
Figura 57 - Sinal de Controle $u(t) = F_c(t)$ considerando $M_s = 1,455kg$.



5.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo, implementou-se um controlador robusto estático de saída para um sistema didático de suspensão ativa de veículos (QUANSER, 2009). As condições dos teoremas propostos apresentam termos bilineares. Deste modo, os *solvers* tradicionais não são capazes de encontrar uma solução ótima. Sendo assim, propõe-se utilizar uma técnica híbrida envolvendo

Figura 58 - Chaveamento entre os subsistemas em malha fechada considerando $M_s = 1,455kg$.



um algoritmo evolutivo e um *solver* de LMIs. Utilizou-se a Evolução Diferencial (STORN; PRICE, 1997) e o *solver* SeDuMi (STURM, 1999). Os resultados de implementação comprovam que o algoritmo ED-LMI é capaz de encontrar soluções factíveis. Além disto, mostram que o controlador robusto projetado atende as expectativas de projeto, ou seja, menor tempo de assentamento e menor ultrapassagem percentual garantindo desta maneira que o motorista não sofra os efeitos indesejáveis de irregularidades na pista. Em outras palavras, verifica-se que com diferentes massas e diferentes condições de operação, os resultados são satisfatórios.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram propostas novas condições para realimentação estática e dinâmica de saída para sistemas lineares chaveados incertos ou com falhas estruturais, com chaveamento dependente apenas da saída medida da planta. As condições foram expostas através de teoremas através de LMIs que podem ser facilmente resolvidas com ferramentas disponíveis na literatura (GAHINET et al., 1995).

Em aplicações práticas, o vetor de estado pode não estar completamente disponível. Sendo assim, destaca-se a importância de projeto de regras de chaveamento que dependam exclusivamente da saída medida da planta. Inicialmente, no Capítulo 3 foram propostas condições para estabilidade de sistemas lineares chaveados incertos, generalizando, desta forma, resultados presentes na literatura (MAINARDI JÚNIOR et al., 2014; MAINARDI JÚNIOR et al., 2015). Além disto, considerou-se a inserção de um índice de desempenho, o custo garantido (DEAECTO et al., 2010). Variáveis de folga foram inseridas em condições de teoremas publicados na literatura. Através das relaxações propostas em Liu e Zhang (2003) e Teixeira, Assunção e Avellar (2003) foram elaboradas condições menos conservadoras para o controle de sistemas lineares chaveados incertos. Em seguida, abordou-se a metodologia de sistema aumentado, considerando a saída medida como uma nova variável de estado. Adicionalmente, por meio de filtros dinâmicos colocados em cascata com a saída da planta, novas condições para a realimentação dinâmica de saída foram propostas. Todas as manipulações algébricas nas condições dos teoremas generalizaram os resultados presentes na literatura. Em seguida, visando comprovar a eficácia da técnica, três exemplos de simulação numérica foram realizados. Os resultados foram satisfatórios e impactantes, quando comparados com resultados previamente publicados.

Já no Capítulo 4 apresentaram-se teoremas para o projeto de controladores estáticos/dinâmicos de saída juntamente com uma regra de chaveamento dependente da saída medida da planta para sistemas lineares chaveados incertos. Utilizaram-se as ideias apresentadas em Crusius e Trofino (1999) e os teoremas apresentados no Capítulo 3 foram generalizados através do projeto de controladores robustos de saída. Verificou-se que o controlador robusto de saída juntamente com a regra de chaveamento dependente da saída flexibilizaram as condições dos teoremas. As novas condições de estabilidade foram validadas através de um exemplo numérico de simulação.

Para casos onde a matriz B é incerta, porém invariante no tempo, no Capítulo 5 utilizou-se um método híbrido baseado em um algoritmo evolutivo e um solver de LMIs para encontrar valores sub-ótimos para os controladores robustos de saída. Em seguida, apresentou-se a implementação prática em ambiente laboratorial visando validar a técnica proposta em um sistema de

suspensão ativa da Quanser (QUANSER, 2009). Vários casos foram implementados, considerando variações na massa do motorista e também falhas na alimentação no motor da suspensão ativa.

Vários exemplos numéricos explorados ao longo do texto validaram as condições propostas em formas de teoremas. Os resultados de simulação e implementação comprovaram a eficácia das técnicas de controle que foram propostas neste trabalho. Além disto, destacou-se que, os resultados propostos generalizam resultados previamente publicados na literatura.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Desenvolver novas condições de estabilidade e desempenho utilizando as técnicas propostas neste trabalho em conjunto, como por exemplo, sistemas aumentados com filtros dinâmicos;
- Estabelecer outros critérios de desempenho como, por exemplo H_∞ , taxa de decaimento, para os resultados apresentados neste trabalho;
- Projetar um filtro dinâmico de saída em espaço de estado.

6.2 ARTIGOS PUBLICADOS

Publicações diretamente relacionadas com o conteúdo da tese.

Artigos completos publicados em periódicos:

MAINARDI JÚNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; MOREIRA, M.; OLIVEIRA, D. de; CARNIATO, A. A. Robust control of switched linear systems with output switching strategy. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Heidelberg, p. 111, 2015. ISSN 2195-3880.

Trabalhos completos publicados em anais de congressos:

CARNIATO, A. A., MAINARDI JÚNIOR, E. I., TEIXEIRA, M., ASSUNÇÃO, E., ALVES, T. L. N. U., PEREYRA, H. S. Controle de sistemas chaveados incertos com realimentação da saída da planta. In: SBA: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO - SBAI, 2015, Natal. *Anais...* Natal: SBAI, 2015. p. 462 – 467.

CARNIATO, L. A., CARNIATO, A. A., MAINARDI JÚNIOR, E. I., TEIXEIRA, M., ASSUNÇÃO, E., CARDIM, R. Controle robusto de sistemas lineares chaveados usando um

compensador dinâmico na saída da planta. In: SBA: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 2016, Vitória. *Anais...* Vitória: CBA, 2016. p. 2293 – 2298.

Publicações indiretamente relacionadas com o conteúdo da tese.

MAINARDI JÚNIOR, E. I., TEIXEIRA, M., CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E., DE SOUZA, J. M., CARNIATO, A. A. Projeto de controladores para sistemas afins com aplicação em um conversor CC-CC Buck. In: SBA: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO - SBAI, 2015, Natal. *Anais...* Natal: SBAI, 2015. p. 1259 – 1264.

CARNIATO, A. A., MAINARDI JÚNIOR, E. I., CARNIATO, L. A., TEIXEIRA, M., ASSUNÇÃO, E., CARDIM, R. Observadores de estado para sistemas lineares chaveados com estratégia de chaveamento dependente da saída da planta. In: SBA: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 2016, Vitória. *Anais...* Vitória: CBA, 2016. p. 3440 – 3445.

REFERÊNCIAS

- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Static output feedback control of polytopic systems using polynomial Lyapunov functions. *IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL - CDC 29.*, 2010. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2010. p. 6894-6901.
- BOLZERN, P.; SPINELLI, W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In: *AMERICAN CONTROL CONFERENCE*, 2004, Massachusetts. *Proceedings...* Massachusetts: [s. n.], 2004. v. 5, p. 3890-3895.
- BOYD, S. P.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia: SIAM, 1994. 205 p.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 56, n. 9, p. 3505-3513, 2009.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R.; FARIA, F. A.; SEIXAS, F. J. M.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. Design and implementation of a DC-DC converter based on variable structure control of switched systems. *IFAC*, Kidlington, v. 18, p. 11048-11054, 2011.
- CHEN, J.; LIN, C. Static output feedback control for discrete-time switched systems via improved path-following method. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, New York, v. 2015, p. 1-8, 2015.
- CHIOU, J.-P.; CHANG, C.-F.; SU, C.-T. Variable scaling hybrid differential evolution for solving network reconfiguration of distribution systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 20, n. 2, p. 668-674, 2005.
- COELHO, L. D.; MARIANI, V. C. Evolução diferencial híbrida com programação quadrática aplicada ao problema de despacho econômico de energia elétrica. *Sba: Controle & Automação*, Campinas, v. 17, n. 4, p. 409-423, 2006.
- COVACIC, M. R. *Síntese de sistemas ERP baseada em LMIs e controle com estrutura variável*. 2006. 237 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.
- CRUSIUS, C. A.; TROFINO, A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 44, n. 5, p. 1053-1057, 1999.
- DAS, S.; SUGANTHAN, P. N. Differential evolution: a survey of the state-of-the-art. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Piscataway, v. 15, n. 1, p. 4-31, 2011.

- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *Automatica*, Elmsford, v. 47, n. 8, p. 1713-1720, 2011.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; GARCIA, F.; POMILIO, J. Switched affine systems control design with application to DC-DC converters. *IET Control Theory and Applications*, IET, Stevenage, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010.
- DEAECTO, G. S.; SANTOS, G. C. State feedback h infin control design of continuous-time switched affine systems. *IET Control Theory and Applications*, Stevenage, v. 9, n. 7, p. 877-881, 2015.
- DECARLO, R. A.; BRANICKY, M. S.; PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, Piscataway, v. 88, n. 7, p. 1069-1082, 2000.
- DING, D.-W.; YANG, G.-H. H static output feedback control for discrete-time switched linear systems with average dwell time. *IET Control Theory and Applications*, Stevenage, v. 4, n. 3, p. 381-390, 2010.
- DONG, J.; YANG, G.-H. Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties. *Automatica*, Elmsford, v. 49, n. 6, p. 1821-1829, 2013.
- FERON, E. *Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback*. [S.l.]: Center for Intelligent Control Systems, 1996.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. LMI control toolbox: for use with MATLAB. [S. l.: s. n.], 1995.
- GEROMEL, J.; COLANERI, P.; BOLZERN, P. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 53, n. 3, p. 720–733, 2008.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.
- HABIBI, J.; MOSHIRI, B.; SEDIGH, A. Performance benefits of hybrid control design for switched linear systems. In: INTERNATIONAL JOINT CONFERENCE. - SICE-ICASE, 2006, [S. l.]. *Proceedings...* [S. l.]: IEEE, 2006. p. 920-925.
- HAUROIGNE, P.; RIEDINGER, P.; IUNG, C. Switched affine systems using sampled-data controllers: robust and guaranteed stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 56, n. 12, p. 2929–2935, 2011.
- HESPANHA, J. Extending lasalle’s invariance principle to switched linear systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL. 40., 2001, [S. l.]. *Proceedings...* [S. l.]: IEEE, 2001. v. 3, p. 2496-2501.

- HETEL, L.; FRIDMAN, E. Robust sampled: data control of switched affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 58, n. 11, p. 2922–2928, 2013.
- JI, Z.; WANG, L.; XIE, G. New results on the quadratic stabilization of switched linear systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 42., 2003. *Proceedings...* [S.l.]: IEEE, 2003. v. 2, p. 1657-1662.
- JUNGERS, M.; CASTELAN, E.; MORAES, V. M.; MORENO, U. F. A dynamic output feedback controller for a network controlled system based on delay estimates. *Automatica*, Elmsford, v. 49, n. 3, p. 788-792, 2013.
- LIBERZON, D. *Switching in systems and control*. New York: Springer Science & Business Media, 2003.
- LIN, H.; ANTSAKLIS, P. Switching stabilizability for continuous-time uncertain switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 52, n. 4, p. 633-646, 2007.
- LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 54, n. 2, p. 308–322, 2009.
- LIU, X.; ZHANG, Q. Approaches to quadratic stability conditions and H_∞ control designs for ts fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 11, n. 6, p. 830–839, 2003.
- LOFBERG, J. Yalmip: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: 2004 IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 2004. [S. l.: s. n.], 2004. p. 284–289.
- MAINARDI JÚNIOR, E. I. *Projeto de controladores para sistemas chaveados com aplicações em conversores CC-CC*. 2013. 167 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013.
- MAINARDI JÚNIOR, E. I.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M.; MOREIRA, M.; CARDIM, R.; YOSHIMURA, V. L. *On Control Design of Switched Affine Systems with Application to DC-DC Converters*. [S.l.]: INTECH Open Access, 2012.
- MAINARDI JÚNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; MOREIRA, M.; YOSHIMURA, V. L. Controle via realimentação da saída para sistemas lineares chaveados. In: SBA: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 2012, Campina Grande. *Anais...* Campina Grande: CBA, 2012. p. 1255-1261.
- MAINARDI JÚNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; MOREIRA, M.; OLIVEIRA, D. R. de. Robust control of switched linear systems with output switching strategy. In: SBA: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 2014, Belo Horizonte. *Anais...* Uberlândia: SWGE, 2014. p. 360-366.

MAINARDI JÚNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; MOREIRA, M.; OLIVEIRA, D. de; CARNIATO, A. A. Robust control of switched linear systems with output switching strategy. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Heidelberg, v. 26, n. 5, p. 1-11, 2015.

NOORI, A.; FARSI, M.; ESFANJANI, R. M. Design and implementation of a robust switching strategy for DC-DC converters. *IET Power Electronics*, Stevenage, v. 9, n. 6, p. 316–322, 2016.

PAPAGEORGIOU, M.; DIAKAKI, C.; DINOPOULOU, V.; KOTSIALOS, A.; WANG, Y. Review of road traffic control strategies. *Proceedings of the IEEE*, Piscataway, v. 91, n. 12, p. 2043-2067, 2003.

PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. Ellipsoidal sets for resilient and robust static outputfeedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 50, n. 6, p. 899-904, 2005.

PRICE, K.; STORN, R. M.; LAMPINEN, J. A. *Differential evolution: a practical approach to global optimization*. New York: Springer Science & Business Media, 2006.

QUANSER. Active suspension: user's manual. [S. l.], 2009.

SCHARLAU, C. C.; OLIVEIRA, M. C. de; TROFINO, A.; DEZUO, T. J. Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 68, p. 1-8, 2014.

SILVA, E. R. P. da. *Controle de sistemas lineares incertos via realimentação derivativa utilizando funções de lyapunov dependentes de parâmetros*. 2012. 126 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2012.

SLOTINE, J. J.; LI, W. P. *Applied nonlinear control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.

SOGA, T.; OTSUKA, N. Quadratic stabilizability for polytopic uncertain continuous-time switched linear systems via switched observer. In: MEDITERRANEAN CONFERENCE ON CONTROL AUTOMATION - MED, 19., 2011, Corfu. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2011. p. 724-729.

SOGA, T.; OTSUKA, N.; NAKAYAMA, G.; TOJO, A. Stabilization for polytopic uncertain switched linear systems with constant input. In: CONTROL CONFERENCE - ASCC, 9., 2013, Istanbul. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2013. p. 1-6.

SONGLIN, C.; YU, Y.; KAI, Z.; JIE, M. Stabilizing a class of uncertain switched linear systems via observer-based output feedback. In: CHINESE CONTROL CONFERENCE - CCC, 27., 2008. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2008. p. 118-122.

STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution: a simple and efficient heuristic for global

optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, New York, v. 11, n. 4, p. 341-359, 1997.

STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, Abingdon, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.

SYRMOS, V. L.; ABDALLAH, C. T.; DORATO, P.; GRIGORIADIS, K. Static output feedback - a survey. *Automatica*, Elmsford, v. 33, n. 2, p. 125-137, 1997.

TEIXEIRA, M. C.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 11, n. 5, p. 613-623, 2003.

WANG, S.; CHIOU, J.; LIU, C. Non-smooth/non-convex economic dispatch by a novel hybrid differential evolution algorithm. *IET Generation, Transmission & Distribution*, IET, Stevenage, v. 1, n. 5, p. 793–803, 2007.

WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 1994. v. 4, p. 3492-3497.

XIE, D.; YU, M. Stability analysis of switched linear systems with polytopic uncertainties. In: IEEE INTERNATIONAL ON SYSTEMS, MAN AND CYBERNETICS, 2006, [S. 1.]. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2006. v. 5, p. 3749-3753.

YANG, T.; LI, A.; NIU, E. Robust dynamic output feedback control for switched polytopic systems under asynchronous switching. *Chinese Journal of Aeronautics*, Beijing, v. 28, n. 4, p. 1226 – 1235, 2015.

YU, Q.; WU, B. Robust stability analysis of uncertain switched linear systems with unstable subsystems. *International Journal of Systems Science*, Abingdon, v. 46, n. 7, p. 1278–1287, 2015.

YUAN, C.; WU, F. Asynchronous switching output feedback control of discrete-time switched linear systems. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 88, n. 9, p. 1766–1774, 2015.

ZHAI, D.; LU, A.-Y.; LI, J.-H.; ZHANG, Q.-L. State and dynamic output feedback control of switched linear systems via a mixed time and state-dependent switching law. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, London, v. 22, p. 228-248, 2016.

ZHAI, G.; LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 76, n. 7, p. 747-753, 2003.

ZHANG, L.; ZHUANG, S.; BRAATZ, R. D. Switched model predictive control of switched linear systems: Feasibility, stability and robustness. *Automatica*, Elmsford, v. 67, p. 8- 21, 2016.