



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

O Teorema de Classificação das Cônicas - uma aplicação no Ensino Médio

Mauricio Evandro Eloy

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-
Graduação – Mestrado Profissional em Mate-
mática em Rede Nacional como requisito par-
cial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. João Peres Vieira

2013

516.3 Eloy, Mauricio Evandro
E48t O Teorema de Classificação das Cônicas - uma aplicação no Ensino Médio / Mauricio Evandro Eloy- Rio Claro: [s.n.], 2013.
65 f.: il., figs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: João Peres Vieira

1. Geometria Analítica. 2. Álgebra Linear. 3. Cônicas. 4. Movimentos Rígidos. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Mauricio Evandro Eloy

O TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO DAS CÔNICAS - UMA APLICAÇÃO
NO ENSINO MÉDIO

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Peres Vieira
Orientador

Profa. Dra. Denise de Mattos
ICMC/USP - São Carlos

Prof. Dr. Wladimir Seixas
UFSCar - Sorocaba

Rio Claro, Agosto de 2013

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por mostrar quais caminhos deveria seguir e colocar pessoas especiais em minha vida.

À minha família, em especial meu pai Mauricio, minha avó Maria Rute e meu tio Marcio, que foram os pilares da minha formação como pessoa.

Aos amigos de turma, especialmente Leandro e Denis Gisoldi, que tornaram essa caminhada menos árdua através de horas de estudo e divertimento.

Aos docentes do Departamento de Matemática da Unesp Rio Claro, especialmente o professor Dr. João Peres Vieira, pelo acolhimento, orientação, dedicação e incentivo.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Por fim, aos idealizadores do PROFMAT, que fizeram do meu sonho uma realidade.

Existe um paralelismo fiel entre o progresso social e a atividade matemática, os países socialmente atrasados são aqueles em que a atividade matemática é nula ou quase nula.

Jacques Chapellon

Resumo

Nesta dissertação apresentamos o estudo do caso geral das cônicas e o Teorema de Classificação das Cônicas via Geometria Analítica e Álgebra Linear. Também apresentamos uma proposta didática para as cônicas aos docentes do Ensino Médio.

Palavras-chave: Geometria Analítica, Álgebra Linear, Cônicas, Movimentos Rígidos.

Abstract

In this work we present the study of conics, in general case, and the Theorem Classification of Conics via Analytic Geometry and Linear Algebra. We also present a didactic proposal of conics to the high school teachers.

Keywords: Analytic Geometry, Linear Algebra, Conical, Rigid Motions.

Lista de Figuras

2.1	Circunferência	22
2.2	Elipse	23
2.3	Hipérbole	24
2.4	Parábola	25
2.5	Cone	26
2.6	Circunferência a partir da secção do cone	26
2.7	Parábola a partir da secção do cone	27
2.8	Elipse a partir da secção do cone	27
2.9	Hipérbole a partir da secção do cone	28
2.10	Ponto a partir da secção do cone	28
2.11	Reta a partir da secção do cone	29
2.12	Reunião de duas retas concorrentes a partir da secção do cone	29

Lista de Tabelas

3.1	Ângulos entre os vetores	34
3.2	Redução da equação geral de uma cônica via Geometria Analítica e Álgebra Linear	44

Sumário

1	Introdução	19
2	Cônicas	21
2.1	Origens históricas	21
2.2	Definições	22
2.3	Obtenção das cônicas a partir de secções no cone	26
3	Classificação das cônicas	31
3.1	Pré-requisitos	31
3.1.1	Considerações Gerais	31
3.1.2	Equações de translação e rotação no plano	32
3.2	Aplicação das translações e rotações do plano no estudo das cônicas	35
3.2.1	Simplificação da equação de uma cônica através de uma translação	35
3.2.2	Simplificação da equação de uma cônica através de uma rotação	36
3.2.3	Classificação das cônicas após uma translação	39
3.2.4	Classificação das cônicas após uma rotação	40
3.3	Aplicações	45
4	Proposta Didática	53
4.1	Sequência Didática	53
	Referências	55
A	Plano de Aula: Definições	57
B	Plano de Aula: As secções cônicas e suas origens	59
C	Plano de Aula: A utilização das cônicas nos dias atuais	61
D	Plano de Aula: Translação e rotação	63
E	Plano de Aula: Classificando as cônicas	65

1 Introdução

As cônicas são frequentemente apresentadas em cursos regulares de Ensino Médio, como sendo a circunferência, a elipse, a hipérbole e a parábola.

Pretendemos, com este trabalho, fazer um estudo do caso geral das cônicas, mostrando que além das cônicas regularmente apresentadas também temos como cônicas o ponto, o vazio, a reta, a reunião de duas retas concorrentes e a reunião de duas retas paralelas.

No capítulo 2, falaremos das origens históricas das cônicas, de suas definições e de como obtê-las a partir de secções no cone.

No capítulo 3, exibiremos toda a teoria do caso geral das cônicas e o teorema de classificação das cônicas, via Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Por fim, no capítulo 4, apresentaremos uma proposta didática, tornando possível a abordagem de todas as cônicas aos alunos do Ensino Médio.

2 Cônicas

2.1 Origens históricas

Ao que tudo indica a história das secções cônicas se iniciou na Grécia antiga com as tentativas de resolução de um dos "três problemas clássicos" da antiguidade, o da duplicação do cubo, que se enuncia da seguinte forma: dada a aresta de um cubo, construir com o uso de régua e compasso a aresta de um segundo cubo cujo volume é o dobro do primeiro.

Existem duas passagens históricas que mostram o surgimento de tal problema, a primeira nos diz que um certo poeta grego antigo, leigo em matemática, deu uma solução errada para o problema da dobra do tamanho do túmulo de Glauco (filho do rei Minos), a segunda se refere a resposta dada pelo oráculo aos delianos, onde deveriam dobrar o altar cúbico de Apolo para se livrar de uma peste que os amedrontava.

Hipócrates de Chios (470 - 410 a.C.) revelou que a duplicação do cubo poderia ser resolvida encontrando curvas com propriedades expressas na proporção contínua entre dois segmentos $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, no caso em que $b = 2a$.

Menaecmus (380 - 320 a.C.) por sua vez, percebeu que tais curvas (ou família de curvas), podiam ser obtidas a partir de secções entre um cone circular reto e um plano perpendicular a um elemento do cone, dando origem ao que chamamos hoje de elipse, parábola e hipérbole.

Mais tarde, Pappus (290 - 350 d.C.) em sua obra *Tesouro da Análise*, cita dois tratados sobre as secções cônicas: as *Cônicas* de Euclides (325 - 265 a.C.) e *Lugares Sólidos* de Aristeu (370 - 300 a.C.).

Eis que aparece a figura de Apolônio (262 - 190 a.C.) escrevendo o tratado sobre as *Cônicas*. Esse trabalho de Apolônio marcou a história das cônicas, por substituir todos os trabalhos anteriores e permanecer na antiguidade sem aperfeiçoamentos.

Dois nomes do século XVII descobriram uma aplicação para uma das cônicas. Tal aplicação nos diz que os planetas se movem em elipses. Kepler (1571 - 1630) utilizou de observações astronômicas e Newton (1642 - 1727) uma prova matemática baseada na lei da gravitação universal.

As aplicações das cônicas vem sendo utilizadas no cotidiano desde a antiguidade

até os dias atuais.

2.2 Definições

Definição 2.1. *Por um plano entendemos o conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais.*

Definição 2.2. *Sejam P um ponto de um plano α e r um número real estritamente positivo. O lugar geométrico dos pontos de α que distam r de P é chamado de circunferência, que denotaremos por \mathcal{C} . Em outras palavras, $X \in \mathcal{C} \Leftrightarrow d(P, X) = r$.*

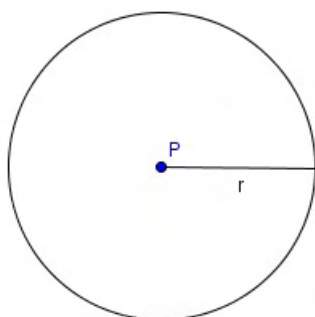


Figura 2.1: Circunferência

Podemos encontrar, através da definição (2.2), a equação reduzida de uma circunferência.

Sejam $P = (0, 0)$, $X = (x, y)$ um ponto pertencente a circunferência e r um número real estritamente positivo. Então a equação reduzida da circunferência é:

$$\begin{aligned} d(P, X) &= r \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= r \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definição 2.3. *Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos tais que $d(F_1, F_2) = 2f$ e considere o número real $2a$ tal que $2a > 2f$. O lugar geométrico de todos os pontos do plano tais que a soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$ é chamado de elipse, que denotaremos por \mathcal{E} . Em outras palavras, $P \in \mathcal{E} \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.*

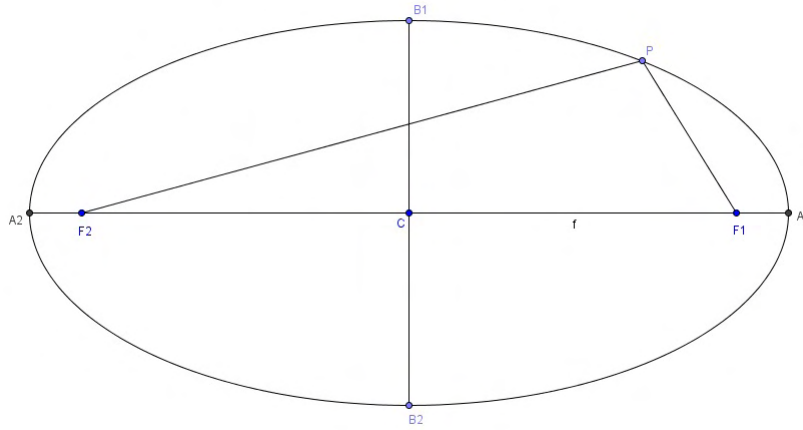


Figura 2.2: Elipse

Podemos encontrar, através da definição (2.3), uma equação reduzida da elipse.

Sejam $C = (0, 0)$ o centro da elipse, $F_1 = (f, 0)$ e $F_2 = (-f, 0)$. Então a equação reduzida da elipse é:

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2a \\ \sqrt{(x-f)^2 + y^2} + \sqrt{(x+f)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+f)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos:

$$\begin{aligned} (x+f)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + (x-f)^2 + y^2 \\ x^2 + 2xf + f^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + x^2 - 2xf + f^2 + y^2 \\ 4xf &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Dividindo por 4 ambos os membros, obtemos:

$$\begin{aligned} xf &= a^2 - a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} \\ a^2 - xf &= a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os membros, obtemos:

$$\begin{aligned} (a^2 - xf)^2 &= a^2 [(x-f)^2 + y^2] \\ a^4 - 2a^2xf + x^2f^2 &= a^2x^2 - 2a^2xf + a^2f^2 + a^2y^2 \\ a^2y^2 + a^2x^2 - x^2f^2 &= a^4 - a^2f^2 \\ (a^2 - f^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - f^2) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $b^2 = a^2 - f^2$.

Definição 2.4. Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos tais que $d(F_1, F_2) = 2f$ e considere o número real $2a$ tal que $0 < 2a < 2f$. O lugar geométrico de todos os pontos do plano tais que a diferença das distâncias a F_1 e F_2 , em módulo, é constante e igual a $2a$ é chamado hipérbole, que denotaremos por \mathcal{H} . Em outras palavras, $P \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

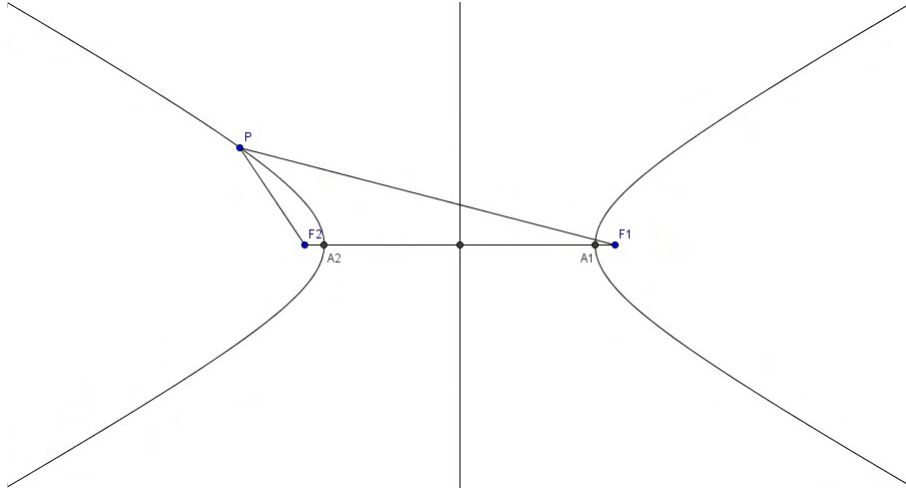


Figura 2.3: Hipérbole

Podemos encontrar, através da definição (2.4), uma equação reduzida da hipérbole.

Sejam $C = (0, 0)$ o centro da hipérbole, $F_1 = (f, 0)$ e $F_2 = (-f, 0)$. Então a equação reduzida da hipérbole é:

$$\begin{aligned} |d(P, F_1) - d(P, F_2)| &= 2a \\ d(P, F_1) - d(P, F_2) &= \pm 2a \\ \sqrt{(x - f)^2 + y^2} - \sqrt{(x + f)^2 + y^2} &= \pm 2a \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por (-1) , obtemos:

$$\begin{aligned} -\sqrt{(x - f)^2 + y^2} + \sqrt{(x + f)^2 + y^2} &= \mp 2a \\ \sqrt{(x + f)^2 + y^2} &= \sqrt{(x - f)^2 + y^2} \mp 2a \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 + 2xf + f^2 + y^2 &= x^2 - 2xf + f^2 + y^2 \mp 4a\sqrt{(x - f)^2 + y^2} + 4a^2 \\ 4xf &= \mp 4a\sqrt{(x - f)^2 + y^2} + 4a^2 \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por 4, obtemos:

$$\begin{aligned} xf &= \mp a\sqrt{(x - f)^2 + y^2} + a^2 \\ a^2 - xf &= \pm a\sqrt{(x - f)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Elevando novamente ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned}
 (a^2 - xf)^2 &= \left[\pm a \sqrt{(x-f)^2 + y^2} \right]^2 \\
 f^2 x^2 - a^2 x^2 - a^2 y^2 &= a^2 f^2 - a^4 \\
 (f^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 &= a^2(f^2 - a^2) \\
 \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $b^2 = f^2 - a^2$.

Definição 2.5. *Seja s uma reta e P um ponto não pertencente a s . O conjunto de todos os pontos do plano equidistante da reta s e do ponto P é chamado de parábola, que denotaremos por \mathcal{P} . Em outras palavras, $P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, s) = d(P, F)$.*

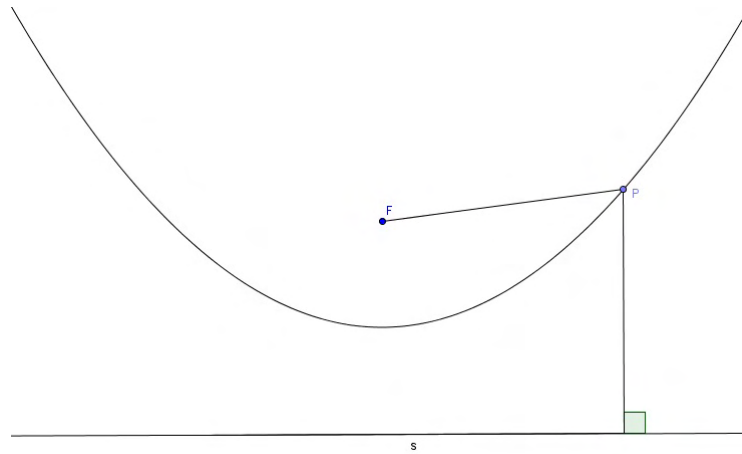


Figura 2.4: Parábola

Podemos encontrar, através da definição (2.5), uma equação reduzida da parábola.

Sejam $V = (0, 0)$ o vértice da parábola, $F = (0, p)$ e $y = -p$ a equação da reta s . Então a equação reduzida da parábola é:

$$\begin{aligned}
 d(P, F) &= d(P, s) \\
 \sqrt{x^2 + (y - p)^2} &= |y + p|
 \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned}
 x^2 + (y - p)^2 &= (y + p)^2 \\
 x^2 + y^2 - 2yp + p^2 &= y^2 + 2yp + p^2 \\
 x^2 &= 4py
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Veremos nas subseções (3.2.3) e (3.2.4) que além das cônicas citadas nas definições anteriores, temos também aquelas que chamaremos de *cônicas degeneradas*, a saber: o vazio, a reta, a reunião de duas retas paralelas, a reunião de duas retas concorrentes e o ponto.

2.3 Obtenção das cônicas a partir de secções no cone

Vimos na seção (2.2) as definições de cônicas na Geometria Plana. Nesta seção veremos as definições de cônicas na Geometria Espacial.

Por um cone de eixo e (reta que passa por O e o centro da circunferência), reta geratriz I e vértice O , entendemos, a reunião das retas I que passam por O e um ponto da circunferência conforme a figura

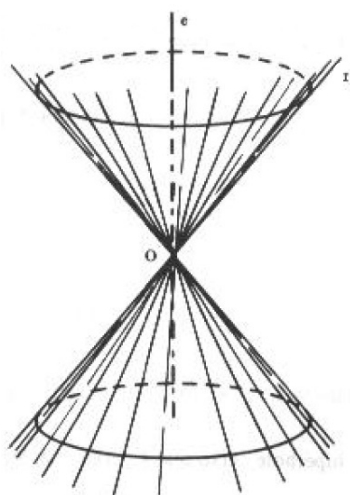


Figura 2.5: Cone

Por uma secção cônica entendemos a curva formada pela intersecção entre um plano π e o cone da figura (2.5). Desta forma temos:

- i) a circunferência: quando o plano π for perpendicular ao eixo e , não passando pelo vértice O (figura (2.6));

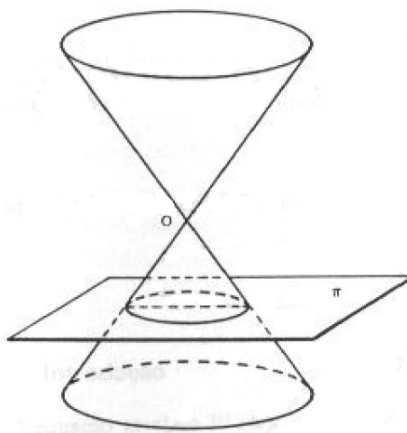


Figura 2.6: Circunferência a partir da secção do cone

- ii) a parábola: quando o plano π for paralelo a geratriz I , não passando por ela (figura (2.7));

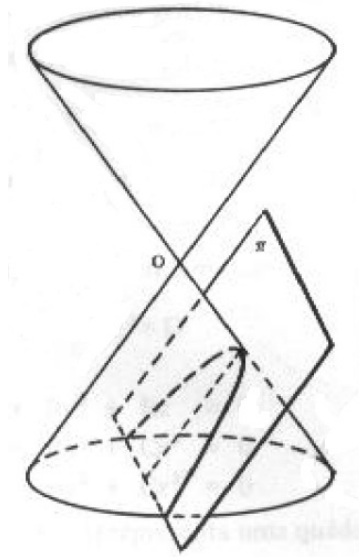


Figura 2.7: Parábola a partir da secção do cone

- iii) a elipse: quando o plano π for oblíquo ao eixo e , não contendo o vértice O e não paralelo a geratriz I (figura (2.8));

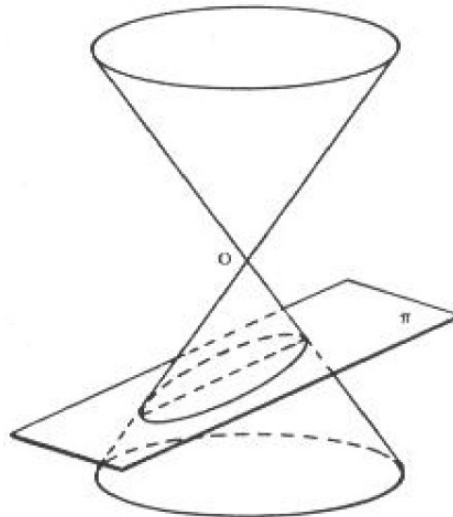


Figura 2.8: Elipse a partir da secção do cone

- iv) a hipérbole: quando o plano π for paralelo ao eixo e , não passando por ele (figura (2.9));

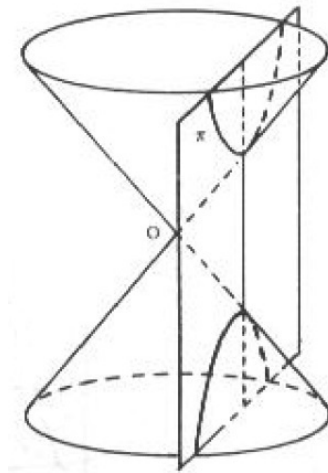


Figura 2.9: Hipérbole a partir da secção do cone

- v) o ponto: quando o plano π passar somente pelo vértice O (figura (2.10));

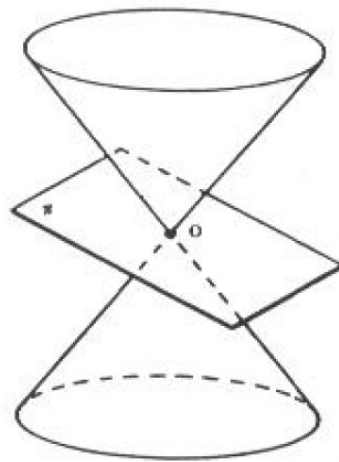


Figura 2.10: Ponto a partir da secção do cone

vi) a reta: quando o plano π passar pelo vértice O , contendo a reta geratriz I (figura (2.11));

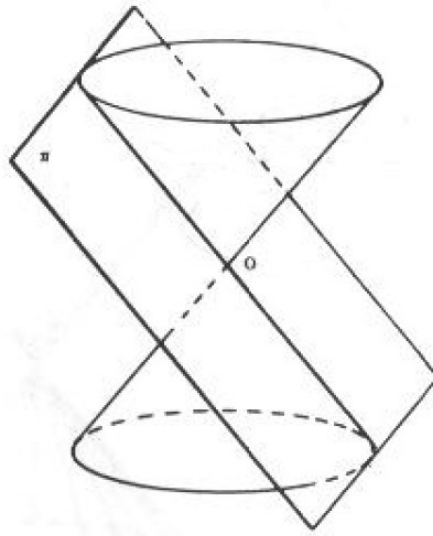


Figura 2.11: Reta a partir da secção do cone

vii) a reunião de duas retas concorrentes: quando o plano π passar pelo vértice O , não contendo a reta geratriz I e seccionando o cone (figura (2.12));

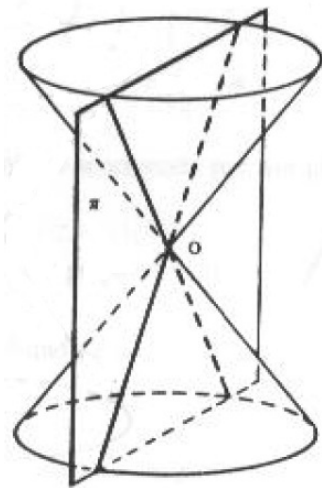


Figura 2.12: Reunião de duas retas concorrentes a partir da secção do cone

3 Classificação das cônicas

3.1 Pré-requisitos

Nesta seção apresentaremos algumas definições e deduziremos as equações de translação e rotação no plano, para que possamos utilizá-las na próxima seção.

3.1.1 Considerações Gerais

Definição 3.1. Seja $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ um vetor do plano. Definimos a norma do vetor \vec{u} , denotada por $\|\vec{u}\|$, por $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definição 3.2. Sejam $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ vetores do plano. Definimos o produto escalar entre os vetores \vec{u} e \vec{v} , denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x.x' + y.y'$.

Definição 3.3. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos do plano. Definimos o ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} como sendo o ângulo θ entre 0 e π tal que $\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$.

Definição 3.4. Chamaremos de discriminante δ o determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ou seja, $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$.

Definição 3.5. Seja M uma matriz de ordem 2. Se existem $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\vec{v} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\lambda \in R$, tais que $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$, ou equivalentemente, $(M - \lambda.I)\vec{v} = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dizemos que λ é um autovalor de M e \vec{v} é um autovetor de M associado a λ .

Proposição 3.1. Se M é uma matriz de ordem 2 e M^t denota a sua transposta, então $\left\langle M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, M^t \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \right\rangle$.

Demonstração. Sejam $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $M^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \left\langle M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \right\rangle = axz + byz + \\ & \quad cxw + dyw \\ \text{ii)} \quad \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, M^t \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} az + cw \\ bz + dw \end{bmatrix} \right\rangle = axz + cxw + \\ & \quad byz + dyw = axz + byz + cxw + dyw \end{aligned}$$

De (i) e (ii) podemos concluir que $\left\langle M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, M^t \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \right\rangle$. \square

Proposição 3.2. *Se M é uma matriz simétrica e \vec{e}_1, \vec{e}_2 são autovetores de M associados a autovalores distintos λ_1, λ_2 , respectivamente, então \vec{e}_1 e \vec{e}_2 são vetores ortogonais.*

Demonstração. Da proposição (3.1) temos que $\langle M\vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_1, M^t\vec{e}_2 \rangle$. Como a matriz M é simétrica, temos $M = M^t$ e assim $\langle M\vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_1, M\vec{e}_2 \rangle$.

Utilizando a definição (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle M\vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle &= \langle \vec{e}_1, M\vec{e}_2 \rangle \\ \langle \lambda_1\vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle &= \langle \vec{e}_1, \lambda_2\vec{e}_2 \rangle \\ \lambda_1 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle &= \lambda_2 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \\ \lambda_1 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle - \lambda_2 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle &= 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ concluímos que $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$, ou seja, \vec{e}_1 e \vec{e}_2 são vetores ortogonais. \square

Proposição 3.3. *Sejam M uma matriz simétrica de ordem 2, λ_1 e λ_2 autovalores de M , $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix}$ autovetores ortonormais associados a λ_1 e λ_2 respectivamente e $B = \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix}$, então: $B^tMB = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$*

Demonstração. Primeiramente iremos calcular o produto matricial $MB = M \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix} =$
 $\begin{bmatrix} M\vec{v}_1 & M\vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1d & \lambda_2e \\ \lambda_1f & \lambda_2g \end{bmatrix}$. Assim, temos que $B^tMB = \begin{bmatrix} d & f \\ e & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1d & \lambda_2e \\ \lambda_1f & \lambda_2g \end{bmatrix} =$
 $\begin{bmatrix} \lambda_1(d^2 + f^2) & \lambda_2(de + gf) \\ \lambda_1(ed + gf) & \lambda_2(e^2 + g^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\|\vec{v}_1\|^2 & \lambda_2\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \\ \lambda_1\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle & \lambda_2\|\vec{v}_2\|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot 1 & \lambda_2 \cdot 0 \\ \lambda_1 \cdot 0 & \lambda_2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ \square

3.1.2 Equações de translação e rotação no plano

Definição 3.6. *Por um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no plano, Σ , entendemos o par (O, B) onde O é a origem do sistema e B é uma base ortonormal.*

Muitos problemas que aparecem em Geometria Analítica podem ser facilitados se a origem do sistema de coordenadas cartesianas fosse trocada por um ponto conveniente.

Nosso objetivo agora é mostrar como podemos passar de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no plano $\Sigma = (O, \vec{i}, \vec{j})$ para outro $\Sigma' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$, mais conveniente.

Sejam $B = (\vec{i}, \vec{j})$ e $B' = (\vec{i}', \vec{j}')$ bases ortonormais dos sistemas de coordenadas cartesianas $\Sigma = (O, B)$ e $\Sigma' = (O', B')$, respectivamente.

Denotemos $\begin{bmatrix} \overrightarrow{OP} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ as coordenadas de um ponto P qualquer do plano no sistema Σ , $\begin{bmatrix} \overrightarrow{OO'} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ as coordenadas do ponto O' no sistema Σ e $\begin{bmatrix} \overrightarrow{O'P} \end{bmatrix}_{B'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ as coordenadas do ponto P no sistema Σ' .

Sabemos da Geometria Analítica (vide [1], p.62) que

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{O'P} \end{bmatrix}_B = M_{BB'} \begin{bmatrix} \overrightarrow{O'P} \end{bmatrix}_{B'} \quad (3.1)$$

onde $M_{BB'}$ é a matriz de mudança da base B para a base B' .

Sabemos também das operações com vetores que

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{OP} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \overrightarrow{OO'} \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} \overrightarrow{O'P} \end{bmatrix}_B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \overrightarrow{O'P} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \overrightarrow{OP} \end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix} \overrightarrow{OO'} \end{bmatrix}_B \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2) temos $\begin{bmatrix} \overrightarrow{OP} \end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix} \overrightarrow{OO'} \end{bmatrix}_B = M_{BB'} \begin{bmatrix} \overrightarrow{O'P} \end{bmatrix}_{B'} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = M_{BB'} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ e portanto

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = M_{BB'} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Definição 3.7. *Uma translação consiste em uma transformação do sistema de coordenadas cartesianas usual em outro, onde a origem se localiza em um outro ponto, sendo mantida a base, ou seja, as respectivas direções dos eixos.*

Vejamos agora como podemos mudar do sistema de coordenadas cartesianas $\Sigma = (O, B)$ para o sistema $\Sigma' = (O', B)$, ou seja, estaremos apenas mudando a origem do sistema de coordenadas cartesianas.

De (3.3) temos: $\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = M_{BB} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

Como a base não se altera a matriz M_{BB} é igual a matriz identidade I , assim: $\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = M_{BB} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Logo,

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases} \quad (3.4)$$

O sistema (3.4) é chamado de *Sistema de Equações de Translação*.

Definição 3.8. Uma rotação consiste em uma transformação do sistema de coordenadas cartesianas habitual em outro, onde a base do sistema de coordenadas é rotacionada e a origem não.

Vejam agora como podemos mudar do sistema de coordenadas cartesianas $\Sigma = (O, B)$ para o sistema $\Sigma' = (O, B')$, ou seja, estaremos apenas movimentando a base, onde $B = (\vec{i}, \vec{j})$ e $B' = (\vec{i}', \vec{j}')$ são bases ortonormais.

Para isso consideremos como conhecidos os ângulos que formam cada um dos vetores \vec{i}, \vec{j} com os vetores \vec{i}', \vec{j}' , a saber

	\vec{i}	\vec{j}
\vec{i}'	θ	α
\vec{j}'	γ	β

Tabela 3.1: Ângulos entre os vetores

Como B é uma base temos $\vec{i}' = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j}$, onde λ_1 e λ_2 são univocamente determinados.

Para encontrar λ_1 , sendo B uma base ortonormal, basta calcularmos o produto escalar $\langle \vec{i}', \vec{i} \rangle$, pois

$$\langle \vec{i}', \vec{i} \rangle = \langle (\lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j}), \vec{i} \rangle = \langle \lambda_1 \vec{i}, \vec{i} \rangle + \langle \lambda_2 \vec{j}, \vec{i} \rangle = \lambda_1 \langle \vec{i}, \vec{i} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{j}, \vec{i} \rangle = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = \lambda_1.$$

De modo análogo $\langle \vec{i}', \vec{j} \rangle = \lambda_2$.

Mas $\langle \vec{i}', \vec{i} \rangle = \cos \theta$ e $\langle \vec{i}', \vec{j} \rangle = \cos \alpha$. Portanto

$$\vec{i}' = \cos \theta \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}$$

Da mesma forma também obtemos:

$$\vec{j}' = \cos \gamma \vec{i} + \cos \beta \vec{j}$$

Assim $M_{BB'} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \gamma \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{bmatrix}$.

Como $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\gamma = \frac{\pi}{2} + \theta$ e $\beta = \theta$, temos $\cos \alpha = \sin \theta$, $\cos \gamma = -\sin \theta$ e $\cos \beta = \cos \theta$ e portanto $M_{BB'} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

Logo, segue de (3.1) que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

onde a matriz $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ é chamada de *matriz de rotação*.

Se preferirmos podemos escrever a equação matricial (3.5) na forma de sistema,

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta \\ y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta \end{cases}, \quad (3.6)$$

chamado de *Sistema de Equações de Rotação*

Observação 1. A matriz R_θ faz uma rotação de θ radianos do sistema $\Sigma = (O, B)$ no sentido anti-horário.

3.2 Aplicação das translações e rotações do plano no estudo das cônicas

Definição 3.9. Uma cônica em \mathbb{R}^2 é o conjunto dos pontos do plano, cujas coordenadas cartesianas x e y satisfazem uma equação do 2º grau do tipo

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (3.7)$$

onde os coeficientes a, b, c, d, e e f não são todos nulos.

Na equação (3.7) temos um termo quadrático, $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 =$, onde o termo bxy pode ser chamado de termo quadrático misto, um termo linear, $l(x, y) = dx + ey$, e um termo constante f . Assim temos que a equação (3.7) pode ser escrita como:

$$f(x, y) = q(x, y) + l(x, y) + f = 0 \quad (3.8)$$

Pretendemos mostrar através das subseções seguintes que a equação (3.7) pode ser simplificada.

3.2.1 Simplificação da equação de uma cônica através de uma translação

Consiste em descobrir um novo sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $\Sigma' = (O', B)$, mais conveniente do que o anterior $\Sigma = (O, B)$, onde $B = (\vec{i}, \vec{j})$, de modo que na equação (3.7) o termo linear possa ser eliminado. Assim a equação (3.7) se transforma em uma equação da forma:

$$f'(x', y') = a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + d'x' + e'y' + f' = 0 \quad (3.9)$$

Substituindo as equações (3.4) na equação (3.7), obtemos:

$$f'(x', y') = f(x_0 + x', y_0 + y') = a(x_0 + x')^2 + b(x_0 + x')(y_0 + y') + c(y_0 + y')^2 + d(x_0 + x') + e(y_0 + y') + f = 0, \text{ ou equivalentemente,}$$

$$\begin{aligned} f'(x', y') = & a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + (2ax_0 + by_0 + d)x' + (bx_0 + 2cy_0 + e)y' + ax_0^2 + \\ & bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Note que $f(x_0, y_0) = ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0 + f$ é o termo independente da equação (3.10), assim podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$f'(x', y') = a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + (2ax_0 + by_0 + d)x' + (bx_0 + 2cy_0 + e)y' + f(x_0, y_0) = 0 \quad (3.11)$$

Como o que nos interessa após a translação é a eliminação do termo linear na equação (3.11), temos que encontrar x_0 e y_0 tais que $2ax_0 + by_0 + d = 0$ e $bx_0 + 2cy_0 + e = 0$, o que é equivalente a resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} 2ax_0 + by_0 + d = 0 \\ bx_0 + 2cy_0 + e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 + \frac{b}{2}y_0 + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}x_0 + cy_0 + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Seja $M = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ a matrix de coeficientes do sistema de equações (3.12).

Sabemos que as únicas possibilidades para o discriminante δ são: $\delta = 0$ ou $\delta \neq 0$.

Se $\delta = 0$, o sistema (3.12) pode ser possível e indeterminado (assumindo infinitas soluções) ou impossível (não assumindo nenhuma solução), sendo que no caso impossível não podemos eliminar o termo linear através de uma translação.

Se $\delta \neq 0$, o sistema (3.12) é possível e determinado (assumindo uma única solução). Suponhamos que essa solução seja o par (x_0, y_0) e calculemos $f(x_0, y_0)$ novamente:

$$f(x_0, y_0) = ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = ax_0^2 + \frac{b}{2}x_0y_0 + \frac{b}{2}x_0y_0 + cy_0^2 + \frac{d}{2}x_0 + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + \frac{e}{2}y_0 + f$$

Agrupando os termos de forma a encontrar as equações do sistema (3.12), temos:

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= x_0 \left(ax_0 + \frac{b}{2}y_0 + \frac{d}{2} \right) + y_0 \left(cy_0 + \frac{b}{2}x_0 + \frac{e}{2} \right) + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f = \\ &= x_0 \cdot 0 + y_0 \cdot 0 + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f = \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) e (3.12) em (3.11), obtemos:

$$f'(x', y') = a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f = 0 \quad (3.14)$$

que é a equação de uma cônica no sistema de coordenadas $\Sigma' = (O', B)$.

Observemos, comparando a equação geral da cônica (3.7) com a equação da cônica transladada (3.14), que os coeficientes a, b e c dos termos quadráticos não se alteram, ou seja, após uma translação os coeficientes do termo quadrático ficam inalterados.

3.2.2 Simplificação da equação de uma cônica através de uma rotação

Consiste em descobrir um novo sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $\Sigma' = (O, B')$, mais conveniente do que o anterior $\Sigma = (O, B)$, onde O é a origem do sistema,

de modo que na equação (3.7) o termo quadrático misto possa ser eliminado. Assim a equação (3.7) se transforma na equação (3.9).

Desde que $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = \left\langle \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle$ e $l(x, y) = dx + ey = \left\langle \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle$, podemos utilizar a equação (3.7) na sua forma matricial, ou seja:

$$f(x, y) = \left\langle \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle + f = 0 \quad (3.15)$$

Escrevendo $M = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ e usando a equação matricial de rotação do sistema de coordenadas cartesianas $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ em (3.15), obtemos:

$$f'(x', y') = \left\langle MR_\theta \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, R_\theta \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}, R_\theta \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + f = 0 \quad (3.16)$$

Observe que se R_θ^t é a matriz transposta de R_θ , temos:

$$f'(x', y') = \left\langle R_\theta^t MR_\theta \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle R_\theta^t \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + f = 0 \quad (3.17)$$

Colocando $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ na equação $(M - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ da definição (3.5), temos:

$$\begin{aligned} (M - \lambda I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a - \lambda & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Podemos escrever a equação (3.18) na forma de sistema linear, obtendo:

$$\begin{cases} (a - \lambda)x + \frac{b}{2}y = 0 \\ \frac{b}{2}x + (c - \lambda)y = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Chamemos $W = \begin{bmatrix} a - \lambda & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - \lambda \end{bmatrix}$ a matriz de coeficientes do sistema de equações (3.19) e δ o discriminante da matriz W .

Como estamos interessados em encontrar valores de x e y que satisfaçam as condições da definição (3.5), ou seja, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, devemos ter $\delta = 0$, e assim o sistema

(3.19) pode ser possível e indeterminado (assumindo infinitas soluções) ou impossível (não assumindo nenhuma solução).

Ao desenvolvermos δ encontraremos um polinômio $P_\lambda(M)$ na variável λ , que é chamado de *polinômio característico* de M . Assim, esse polinômio deve ser igual a 0. Desta forma:

$$\begin{aligned} \delta &= 0 \\ \det(M - \lambda.I) &= 0 \\ P_\lambda(M) &= 0 \\ (a - \lambda).(c - \lambda) - \frac{b^2}{4} &= 0 \\ \lambda^2 - (a + c)\lambda + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Resolvendo a equação (3.20), temos:

$$\begin{aligned} \Delta &= (a + c)^2 - 4\left(ac - \frac{b^2}{4}\right) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + b^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 = \\ &= (a - c)^2 + b^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Assim podemos concluir que $\Delta = 0$ ou $\Delta > 0$.

Se $\Delta = 0$ então $a = c$ e $b = 0$. Logo, obtemos $\lambda_1 = \lambda_2 = a = c$.

Resolvendo a equação (3.19) com o valor $\lambda_1 = \lambda_2 = a = c$, obtemos:

$$\begin{cases} (a - c)x + \frac{b}{2}y = 0 \\ \frac{b}{2}x + (c - c)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Assim todo par (x, y) é solução do sistema (3.22), e como $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, logo $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$ são autovetores ortonormais relativos a $\lambda_1 = \lambda_2 = a = c$.

Se $\Delta > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e assim obtemos os autovetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 relativos a λ_1 e λ_2 , resolvendo o sistema

$$(M - \lambda_j.I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Como a matriz M é simétrica e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue da proposição (3.2) que os autovetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 relativos a λ_1 e λ_2 , respectivamente, são ortogonais.

Mas procuramos dois vetores ortonormais e assim basta tomarmos esses vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 normalizados, ou seja, $\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}$ e $\frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}$. Logo, podemos escrever, $\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}$ e $\frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}$ na forma $\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$, respectivamente.

Portanto, em ambos os casos $\Delta = 0$ e $\Delta > 0$, conseguimos exibir autovetores ortonormais \vec{e}_1 e \vec{e}_2 relativos aos autovalores λ_1 e λ_2 respectivamente.

Utilizando a proposição (3.3) e colocando $R_{\theta}^t \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d' \\ e' \end{bmatrix}$ na equação (3.17), obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x', y') &= \left\langle \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} d' \\ e' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + f = \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} \lambda_1 x' \\ \lambda_2 y' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + d'x' + e'y' + f = 0 \\ &= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

que é a equação de uma cônica no sistema de coordenadas $\Sigma' = (O, B')$.

Observemos, comparando a equação geral da cônica (3.7) com a equação da cônica rotacionada (3.23), que o termo constante f não se altera, ou seja, após uma rotação o coeficiente f fica inalterado.

3.2.3 Classificação das cônicas após uma translação

Pretendemos mostrar nesta subseção um meio de classificar as cônicas após uma translação. Esta classificação será feita a partir de algumas modificações da equação (3.14).

Aplicando uma rotação na equação (3.14), obtemos:

$$f''(x'', y'') = \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f' = 0 \tag{3.24}$$

onde $f' = \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f$.

Dividiremos o estudo da equação (3.24) nos seguintes casos: quando $\lambda_1\lambda_2 > 0$, ou $\lambda_1\lambda_2 < 0$ ou ainda $\lambda_1\lambda_2 = 0$.

Se $\lambda_1\lambda_2 > 0$ na equação (3.24), temos:

$$\begin{aligned} \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f' &= 0 \\ \frac{(x'')^2}{\lambda_2} + \frac{(y'')^2}{\lambda_1} &= -\frac{f'}{\lambda_1\lambda_2} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Analisando a equação (3.25) podemos concluir que:

- i) Se $f' > 0$, então a equação (3.25) representa o *vazio*;
- ii) Se $f' = 0$, então a equação (3.25) representa o *ponto* $O'' = (0, 0)$;
- iii) Se $f' < 0$, então a equação (3.25) representa uma *elipse* ou uma *circunferência* (quando $\lambda_1 = \lambda_2$).

Se $\lambda_1\lambda_2 < 0$ na equação (3.25), temos:

- i) Se $f' \neq 0$, então a equação (3.25) representa uma *hipérbole*;
- ii) Se $f' = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{(x'')^2}{\lambda_2} + \frac{(y'')^2}{\lambda_1} &= 0 \\ (y'')^2 &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(x'')^2 \\ y'' &= \pm \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot x''\end{aligned}$$

que é a equação que representa a *reunião de duas retas concorrentes*.

Se $\lambda_1\lambda_2 = 0$ com $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ (poderíamos utilizar $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ sem alterar as conclusões) na equação (3.24), temos:

$$\begin{aligned}\lambda_2(y'')^2 + f' &= 0 \\ (y'')^2 &= -\frac{f'}{\lambda_2}\end{aligned}\tag{3.26}$$

Analisando a equação (3.26) podemos concluir que:

- i) Se $\lambda_2 f' > 0$, então a equação (3.26) representa o *vazio*;
- ii) Se $\lambda_2 f' < 0$, então a equação (3.26) representa a *reunião de duas retas paralelas*, a saber, $y'' = \pm \sqrt{-\frac{f'}{\lambda_2}}$;
- iii) Se $\lambda_2 f' = 0$, então a equação (3.26) representa uma *reta*, a saber, $y'' = 0$.

3.2.4 Classificação das cônicas após uma rotação

Pretendemos mostrar nesta subseção um meio de classificar as cônicas após uma rotação.

Esta classificação será feita a partir de algumas modificações da equação (3.23).

Desta forma, se $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, dividindo por $\lambda_1\lambda_2$ e fazendo o complemento de quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + f &= 0 \\ \frac{(x')^2}{\lambda_2} + \frac{(y')^2}{\lambda_1} + \frac{d'}{\lambda_1\lambda_2}x' + \frac{e'}{\lambda_1\lambda_2}y' + \frac{f}{\lambda_1\lambda_2} &= 0 \\ \frac{(x')^2}{\lambda_2} + \frac{(y')^2}{\lambda_1} + \frac{(d')^2}{4\lambda_1^2\lambda_2} + \frac{d'}{\lambda_1\lambda_2}x' + \frac{e'}{\lambda_1\lambda_2}y' + \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2\lambda_1} &= -\frac{f}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{(d')^2}{4\lambda_1^2\lambda_2} + \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2\lambda_1} \\ \frac{\left(x' + \frac{d'}{2\lambda_1}\right)^2}{\lambda_2} + \frac{\left(y' + \frac{e'}{2\lambda_2}\right)^2}{\lambda_1} &= -\frac{f}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{(d')^2}{4\lambda_1^2\lambda_2} + \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2\lambda_1}\end{aligned}\tag{3.27}$$

Efetuando as seguintes translações: $\bar{x} = x' + \frac{d'}{2\lambda_1}$ e $\bar{y} = y' + \frac{e'}{2\lambda_2}$ em (3.27), obtemos:

$$\frac{\bar{x}^2}{\lambda_2} + \frac{\bar{y}^2}{\lambda_1} = -\frac{f}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{(d')^2}{4\lambda_1^2\lambda_2} + \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2\lambda_1} \quad (3.28)$$

Dividiremos o estudo da equação (3.28) nos seguintes casos: quando $\lambda_1\lambda_2 > 0$, ou $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

Se $\lambda_1\lambda_2 > 0$ na equação (3.28), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}^2}{\lambda_2} + \frac{\bar{y}^2}{\lambda_1} &= -\frac{f}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{(d')^2}{4\lambda_1^2\lambda_2} + \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2\lambda_1} \\ \frac{\bar{x}^2}{\lambda_2} + \frac{\bar{y}^2}{\lambda_1} &= \frac{-4\lambda_1\lambda_2f + \lambda_2(d')^2 + \lambda_1(e')^2}{4\lambda_1^2\lambda_2^2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Seja $M = -4\lambda_1\lambda_2f + \lambda_2(d')^2 + \lambda_1(e')^2$, então a equação (3.29) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\bar{x}^2}{\lambda_2} + \frac{\bar{y}^2}{\lambda_1} = \frac{M}{4\lambda_1^2\lambda_2^2} \quad (3.30)$$

Analisando a equação (3.30) podemos concluir que:

- i) Se $M = 0$, então a equação (3.30) representa o *ponto* $\bar{O} = (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$;
- ii) Se $M > 0$, então a equação (3.30) representa uma *elipse* ou uma *circunferência* (quando $\lambda_1 = \lambda_2$);
- iii) Se $M < 0$, então a equação (3.30) representa o *vazio*.

Se $\lambda_1\lambda_2 < 0$ na equação (3.28), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}^2}{\lambda_2} + \frac{\bar{y}^2}{\lambda_1} &= -\frac{f}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{(d')^2}{4\lambda_1^2\lambda_2} + \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2\lambda_1} \\ \frac{\bar{x}^2}{\lambda_2} + \frac{\bar{y}^2}{\lambda_1} &= \frac{-4\lambda_1\lambda_2f + \lambda_2(d')^2 + \lambda_1(e')^2}{4\lambda_1^2\lambda_2^2} \\ \frac{\bar{x}^2}{-\lambda_2} - \frac{\bar{y}^2}{\lambda_1} &= \frac{4\lambda_1\lambda_2f - \lambda_2(d')^2 - \lambda_1(e')^2}{4\lambda_1^2\lambda_2^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Seja $M = 4\lambda_1\lambda_2f - \lambda_2(d')^2 - \lambda_1(e')^2$, então a equação (3.31) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\bar{x}^2}{-\lambda_2} - \frac{\bar{y}^2}{\lambda_1} = \frac{M}{4\lambda_1^2\lambda_2^2} \quad (3.32)$$

Analisando a equação (3.32) podemos concluir que:

- i) Se $M \neq 0$, então a equação (3.32) representa uma *hipérbole*;

ii) Se $M = 0$, temos a equação (3.32) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{x}^2}{-\lambda_2} - \frac{\bar{y}^2}{\lambda_1} &= 0 \\ \frac{\bar{y}^2}{\lambda_1} &= \frac{\bar{x}^2}{-\lambda_2} \\ \bar{y}^2 &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \bar{x}^2 \\ \bar{y} &= \pm \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \bar{x}}\end{aligned}\quad (3.33)$$

Concluimos então que a (3.33) representa a *reunião de duas retas concorrentes*.

Se $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ (poderíamos utilizar $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ sem alterar as conclusões) na equação (3.23), temos:

$$\lambda_2 (y')^2 + d'x + e'y + f = 0 \quad (3.34)$$

Dividiremos o estudo da equação (3.34) nos seguintes casos: quando $d' \neq 0$ ou $d' = 0$.

Se $d' \neq 0$ na equação (3.34), temos:

$$\begin{aligned}\lambda_2 (y')^2 + d'x + e'y + f &= 0 \\ (y')^2 + \frac{d'}{\lambda_2} x' + \frac{e'}{\lambda_2} y' + \frac{f}{\lambda_2} &= 0 \\ (y')^2 + \frac{d'}{\lambda_2} x' + \frac{e'}{\lambda_2} y' + \frac{f}{\lambda_2} + \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2} &= \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2} \\ \left(y' + \frac{e'}{2\lambda_2}\right)^2 &= \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2} - \frac{f}{\lambda_2} - \frac{d'}{\lambda_2} x' \\ \left(y' + \frac{e'}{2\lambda_2}\right)^2 &= 4 \left(-\frac{d'}{4\lambda_2}\right) \left[x' + \frac{\lambda_2}{d'} \left(\frac{f}{\lambda_2} - \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2}\right)\right]\end{aligned}\quad (3.35)$$

Efetuada as seguintes translações: $\bar{y} = y' + \frac{e'}{2\lambda_2}$, $p = -\frac{d'}{4\lambda_2}$ e $\bar{x} = x' + \frac{\lambda_2}{d'} \left(\frac{f}{\lambda_2} - \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2}\right)$ em (3.35), obtemos:

$$\bar{y}^2 = 4p\bar{x} \quad (3.36)$$

que é a equação de uma *parábola*.

Se $d' = 0$ na equação (3.34), temos:

$$\begin{aligned}
 \lambda_2(y')^2 + e'y + f &= 0 \\
 (y')^2 + \frac{e'}{\lambda_2}y' + \frac{f}{\lambda_2} &= 0 \\
 (y')^2 + \frac{e'}{\lambda_2}y' + \frac{f}{\lambda_2} + \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2} &= \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2} \\
 \left(y' + \frac{e'}{2\lambda_2}\right)^2 &= \frac{(e')^2}{4\lambda_2^2} - \frac{f}{\lambda_2} \\
 \left(y' + \frac{e'}{2\lambda_2}\right)^2 &= \frac{(e')^2 - 4\lambda_2 f}{4\lambda_2^2} \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

Dividiremos o estudo da equação (3.37) nos seguintes casos:

- i Se $(e')^2 - 4\lambda_2 f > 0$, então a equação representa um *reunião de duas retas paralelas*, a saber, $y' = \frac{-e' \pm \sqrt{(e')^2 - 4\lambda_2 f}}{2\lambda_2}$;
- ii Se $(e')^2 - 4\lambda_2 f < 0$, então a equação representa o *vazio*;
- iii Se $(e')^2 - 4\lambda_2 f = 0$, então a equação representa uma *reta*, a saber, $y' = \frac{-e'}{2\lambda_2}$.

Assim, a partir da união de resultados desta subseção com os da subseção anterior obtemos o

Teorema 3.1. (*Teorema de classificação das cônicas*): *Dada uma cônica definida pela equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, esta equação no plano só pode representar: o ponto, a elipse, a circunferência, o vazio, a hipérbole, a reunião de duas retas concorrentes, a parábola, a reunião de duas retas paralelas e a reta*

Observação 2. Observamos que as cônicas *vazio* e *reunião de duas retas paralelas* foram obtidas a partir do estudo algébrico e não a partir das secções do cone.

Esta discussão pode ser resumida da seguinte forma:

Redução da equação geral de uma cônica via Geometria Analítica e Álgebra Linear	
1°	<p>Dada a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$,</p> <p>calcule seu discriminante $\delta = \begin{vmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{vmatrix} e$</p> <p>discuta o sistema $\begin{cases} ax_0 + \frac{b}{2}y_0 + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}x_0 + cy_0 + \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$</p>
2°	<p>Para $\delta = 0$ e sistema impossível: Encontre as raízes λ_1 e λ_2</p> <p>do polinômio característico, ou seja,</p> <p>os valores admissíveis para λ em</p> $\lambda^2 - (a + c)\lambda + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) = 0.$ <p>Para $\delta = 0$ e sistema possível indeterminado ou $\delta \neq 0$: Encontre $O' = (x_0, y_0)$, de modo que:</p> $\begin{cases} ax_0 + \frac{b}{2}y_0 + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}x_0 + cy_0 + \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$
3°	<p>Se $a \neq c$ ou $b \neq 0$ substitua $\lambda = \lambda_1$ no sistema</p> $\begin{cases} (a - \lambda)x + \frac{b}{2}y = 0 \\ \frac{b}{2}x + (c - \lambda)y = 0 \end{cases}$ <p>para obter $\vec{e}_1 = (x_1, y_1)$, autovetor associado a λ_1. Repita esse processo com a raiz λ_2 para obter $\vec{e}_2 = (-y_1, x_1)$. Caso contrário, $\lambda_1 = \lambda_2 = a = c$, $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$.</p> <p>Substitua os valores de x e y dados pela translação abaixo</p> $\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$ <p>na equação inicial e reagrpe para obter a equação</p> $f'(x', y') = a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + f' = 0.$ <p>onde $f' = f(x_0, y_0) = \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f$.</p>
4°	<p>Determine os vetores normalizados \vec{v}_1, \vec{v}_2 fazendo</p> $\vec{v}_1 = \left(\frac{x_1}{\ \vec{e}_1\ }, \frac{y_1}{\ \vec{e}_1\ } \right)$ $\vec{v}_2 = \left(\frac{-y_1}{\ \vec{e}_2\ }, \frac{x_1}{\ \vec{e}_2\ } \right)$ <p>Finalize com a rotação através dos passos 2°, 3°, 4° e 5° da coluna ao lado para obter uma equação da forma:</p> $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + f' = 0$
5°	<p>Substitua os valores de x e y dados pela rotação abaixo</p> $\begin{cases} x = \frac{x_1}{\ \vec{e}_1\ }x' - \frac{y_1}{\ \vec{e}_2\ }y' \\ y = \frac{y_1}{\ \vec{e}_1\ }x' + \frac{x_1}{\ \vec{e}_2\ }y' \end{cases}$ <p>na equação inicial e reagrpe para obter a equação na forma:</p> $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0,$ <p>onde $\begin{cases} d' = \frac{x_1}{\ \vec{e}_1\ }d + \frac{y_1}{\ \vec{e}_1\ }e \\ e' = -\frac{y_1}{\ \vec{e}_2\ }d + \frac{x_1}{\ \vec{e}_2\ }e \end{cases}$</p> <p>Por meio de mudança de coordenadas e análise de sinais identifique a cônica.</p>
6°	<p>Por meio do completamento de quadrados e análise de sinais identifique a cônica.</p>

Tabela 3.2: Redução da equação geral de uma cônica via Geometria Analítica e Álgebra Linear

3.3 Aplicações

Nesta seção faremos uso da teoria desenvolvida na seção (3.2) para identificar algumas cônicas.

O processo utilizado será o de aplicar a Tabela 3.2.

Exemplo 3.1. Identifique a cônica $5x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$.

Como o discriminante da equação desta cônica é $\delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, devemos eliminar o termo linear por meio de uma translação.

Para isso, devemos encontrar a única solução do sistema de equações (3.12),

$$\begin{cases} ax_0 + \frac{b}{2}y_0 + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}x_0 + cy_0 + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0 + 2y_0 = 3 \\ 2x_0 + y_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

e aplicar na equação (3.14).

$$\begin{aligned} f'(x', y') &= a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f = 0 \\ f'(x', y') &= 5(x')^2 + 4x'y' + (y')^2 - 3.1 - 1.(-1) + 2 = 0 \\ f'(x', y') &= 5(x')^2 + 4x'y' + (y')^2 = 0 \end{aligned}$$

Agora devemos eliminar o termo quadrático misto por meio de uma rotação. Assim, devemos encontrar a solução da equação (3.20),

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a + c)\lambda + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) &= 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 1 &= 0 \end{aligned}$$

que é $\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Aplicando esta solução em (3.23), obtemos:

$$\begin{aligned} f''(x'', y'') &= \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f' = 0 \\ (3 + 2\sqrt{2})(x'')^2 + (3 - 2\sqrt{2})(y'')^2 &= 0, \end{aligned}$$

que é a equação que representa o *ponto* de coordenadas $(0, 0)$.

Exemplo 3.2. Identifique a cônica $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Como o discriminante da equação desta cônica é $\delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, devemos eliminar o termo linear por meio de uma translação.

Para isso, devemos encontrar a única solução do sistema de equações (3.12),

$$\begin{cases} ax_0 + \frac{b}{2}y_0 + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}x_0 + cy_0 + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0 + 3y_0 = -1 \\ 3x_0 + 5y_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{11}{16} \\ y_0 = \frac{39}{48} \end{cases}$$

e aplicar na equação (3.14).

$$\begin{aligned} f'(x', y') &= a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f = 0 \\ f'(x', y') &= 5(x')^2 + 6x'y' + 5(y')^2 - \frac{11}{16} - 2 \cdot \frac{39}{48} + 1 = 0 \\ f'(x', y') &= 5(x')^2 + 6x'y' + 5(y')^2 - \frac{21}{16} = 0 \end{aligned}$$

Agora devemos eliminar o termo quadrático misto por meio de uma rotação. Assim, devemos encontrar a solução da equação (3.20),

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a + c)\lambda + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) &= 0 \\ \lambda^2 - 10\lambda + 16 &= 0 \end{aligned}$$

que é $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$.

Aplicando esta solução em (3.23), obtemos:

$$\begin{aligned} f''(x'', y'') &= \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f' = 0 \\ f''(x'', y'') &= 8(x'')^2 + 2(y'')^2 - \frac{21}{16} = 0 \\ \frac{(x'')^2}{\frac{512}{21}} + \frac{(y'')^2}{\frac{2048}{21}} &= 1, \end{aligned}$$

que é a equação de uma *elipse*.

Exemplo 3.3. Identifique a cônica $16x^2 + 16y^2 - 16x + 8y - 54 = 0$.

Como o discriminante da equação desta cônica é $\delta = \begin{vmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{vmatrix} \neq 0$, devemos eliminar o termo linear por meio de uma translação.

Para isso, devemos encontrar a única solução do sistema de equações (3.12),

$$\begin{cases} ax_0 + \frac{b}{2}y_0 + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}x_0 + cy_0 + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x_0 + 0y_0 = 8 \\ 0x_0 + 16y_0 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

e aplicar na equação (3.14).

$$\begin{aligned} f'(x', y') &= a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f = 0 \\ f'(x', y') &= 16(x')^2 + 0x'y' + 16(y')^2 - \frac{16}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{8}{2} \cdot \frac{1}{4} - 54 = 0 \\ f'(x', y') &= 16(x')^2 + 16(y')^2 - 59 = 0 \\ &16(x')^2 + 16(y')^2 = 59 \\ &(x')^2 + (y')^2 = \frac{59}{16}, \end{aligned}$$

que é a equação de uma *circunferência*.

Exemplo 3.4. Identifique a cônica $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$.

Como o discriminante da equação desta cônica é $\delta = \begin{vmatrix} 19 & 3 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} \neq 0$, devemos eliminar o termo linear por meio de uma translação.

Para isso, devemos encontrar a única solução do sistema de equações (3.12),

$$\begin{cases} ax_0 + \frac{b}{2}y_0 + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}x_0 + cy_0 + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x_0 + 3y_0 = -19 \\ 3x_0 + 11y_0 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

e aplicar na equação (3.14).

$$\begin{aligned} f'(x', y') &= a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f = 0 \\ f'(x', y') &= 19(x')^2 + 6x'y' + 11(y')^2 + \frac{38}{2} \cdot (-1) + \frac{6}{2} \cdot 0 + 29 = 0 \\ f'(x', y') &= 19(x')^2 + 6x'y' + 11(y')^2 + 10 = 0 \end{aligned}$$

Agora devemos eliminar o termo quadrático misto por meio de uma rotação. Assim, devemos encontrar a solução da equação (3.20),

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a + c)\lambda + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) &= 0 \\ \lambda^2 - 30\lambda + 200 &= 0 \end{aligned}$$

que é $\lambda_1 = 20$ e $\lambda_2 = 10$.

Aplicando esta solução em (3.23), obtemos:

$$\begin{aligned} f''(x'', y'') &= \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f' = 0 \\ f''(x'', y'') &= 20(x'')^2 + 10(y'')^2 + 10 = 0 \\ (x'')^2 + \frac{(y'')^2}{2} &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

que é a equação que representa o *vazio*.

Exemplo 3.5. Identifique a cônica $x^2 - 5xy - 11y^2 - x + 37y + 52 = 0$.

Como o discriminante da equação desta cônica é $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -11 \end{vmatrix} \neq 0$, devemos eliminar o termo linear por meio de uma translação.

Para isso, devemos encontrar a única solução do sistema de equações (3.12),

$$\begin{cases} ax_0 + \frac{b}{2}y_0 + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}x_0 + cy_0 + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - \frac{5}{2}y_0 = -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2}x_0 - 11y_0 = \frac{37}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

e aplicar na equação (3.14).

$$\begin{aligned} f'(x', y') &= a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f = 0 \\ f'(x', y') &= (x')^2 - 5x'y' - 11(y')^2 - \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{37}{2} \cdot (-1) + 52 = 0 \\ f'(x', y') &= (x')^2 - 5x'y' - 11(y')^2 + 35 = 0 \end{aligned}$$

Agora devemos eliminar o termo quadrático misto por meio de uma rotação. Assim, devemos encontrar a solução da equação (3.20),

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a + c)\lambda + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) &= 0 \\ 4\lambda^2 + 40\lambda - 69 &= 0 \end{aligned}$$

que é $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{23}{2}$.

Aplicando esta solução em (3.23), obtemos:

$$\begin{aligned} f''(x'', y'') &= \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f' = 0 \\ f''(x'', y'') &= \frac{3}{2}(x'')^2 - \frac{23}{2}(y'')^2 + 35 = 0 \\ \frac{(y'')^2}{3} - \frac{(x'')^2}{23} &= \frac{70}{69}, \end{aligned}$$

que é a equação de uma *hipérbole*.

Exemplo 3.6. Identifique a cônica $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$.

Como o discriminante da equação desta cônica é $\delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, devemos eliminar o termo linear por meio de uma translação.

Para isso, devemos encontrar a única solução do sistema de equações (3.12),

$$\begin{cases} ax_0 + \frac{b}{2}y_0 + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}x_0 + cy_0 + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_0 + 3y_0 = -14 \\ 3x_0 - y_0 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

e aplicar na equação (3.14).

$$\begin{aligned} f'(x', y') &= a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f = 0 \\ f'(x', y') &= 7(x')^2 + 6x'y' - (y')^2 + \frac{28}{2} \cdot (-2) + \frac{12}{2} \cdot 0 + 28 = 0 \\ f'(x', y') &= 7(x')^2 + 6x'y' - (y')^2 = 0 \end{aligned}$$

Agora devemos eliminar o termo quadrático misto por meio de uma rotação. Assim, devemos encontrar a solução da equação (3.20),

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a + c)\lambda + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) &= 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda - 16 &= 0 \end{aligned}$$

que é $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = -2$.

Aplicando esta solução em (3.23), obtemos:

$$\begin{aligned} f''(x'', y'') &= \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f' = 0 \\ f''(x'', y'') &= 8(x'')^2 - 2(y'')^2 = 0 \\ y'' &= \pm 2x'', \end{aligned}$$

que é equação que representa a *reunião de duas retas concorrentes*.

Exemplo 3.7. Identifique a cônica $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 8x + 6y + 1 = 0$.

Como o discriminante da equação desta cônica é $\delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$, devemos eliminar (se possível) o termo linear por meio de uma translação.

Vemos que o sistema de equações (3.12) não assume nenhuma solução, desta forma se torna impossível eliminar o termo linear através de uma translação.

Portanto devemos eliminar o termo quadrático misto por meio de uma rotação. Assim, devemos encontrar a solução da equação (3.20),

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a + c)\lambda + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) &= 0 \\ \lambda^2 - 13\lambda &= 0 \end{aligned}$$

que é $\lambda_1 = 13$ e $\lambda_2 = 0$ e aplicar na teoria desenvolvida na seção (4.2.2), em outras palavras, devemos encontrar dois vetores ortonormais $\vec{v}_1 = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}$ e $\vec{v}_2 = \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}$ associados a λ_1 e λ_2 , através da resolução da equação (3.19).

Para $\lambda_1 = 13$ temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a - \lambda)x + \frac{b}{2}y = 0 \\ \frac{b}{2}x + (c - \lambda)y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (4 - 13)x + \frac{12}{2}y = 0 \\ \frac{12}{2}x + (9 - 13)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x + 6y = 0 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y}{3} \\ x = \frac{2y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \vec{e}_1 = (2, 3) \Rightarrow \left\{ \vec{v}_1 = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|} = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right) \right. \right. \end{aligned}$$

Para $\lambda_2 = 0$ temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a - \lambda)x + \frac{b}{2}y = 0 \\ \frac{b}{2}x + (c - \lambda)y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (4 - 0)x + \frac{12}{2}y = 0 \\ \frac{12}{2}x + (9 - 0)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ 6x + 9y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3y}{2} \\ x = -\frac{3y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \vec{e}_2 = (-3, 2) \Rightarrow \left\{ \vec{v}_2 = \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|} = \left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13} \right) \right. \right. \end{aligned}$$

Aplicando estas informações na equação (3.23), obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + f &= 0 \\ 13(x')^2 + 0(y')^2 + \frac{34\sqrt{13}}{13}x' - \frac{12\sqrt{13}}{13}y' + 1 &= 0 \\ \left(\sqrt{13}x' + \frac{17}{13} \right)^2 &= \frac{120 + 156\sqrt{13}y'}{169}, \end{aligned}$$

que é a equação que representa uma *parábola*.

Exemplo 3.8. Identifique a cônica $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0$.

Como o discriminante da equação desta cônica é $\delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, devemos eliminar (se possível) o termo linear por meio de uma translação.

Vemos que o sistema de equações (3.12) assume infinitas soluções, iremos encontrar uma delas,

$$\begin{cases} ax_0 + \frac{b}{2}y_0 + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}x_0 + cy_0 + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0 - 2y_0 = 3 \\ -2x_0 + y_0 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{5}{4} \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

e aplicar na equação (3.14).

$$\begin{aligned} f'(x', y') &= a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f = 0 \\ f'(x', y') &= 4(x')^2 - 4x'y' + (y')^2 - \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{4} + \frac{3}{2} \cdot 1 + 2 = 0 \\ f'(x', y') &= 4(x')^2 - 4x'y' + (y')^2 - \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

Agora devemos eliminar o termo quadrático misto por meio de uma rotação. Assim, devemos encontrar a solução da equação (3.20),

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a+c)\lambda + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) &= 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda &= 0 \end{aligned}$$

que é $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 0$.

Aplicando esta solução em (3.23), obtemos:

$$\begin{aligned} f''(x'', y'') &= \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f' = 0 \\ f''(x'', y'') &= 5(x'')^2 + 0(y'')^2 - \frac{1}{4} = 0 \\ x'' &= \pm \sqrt{\frac{1}{20}}, \end{aligned}$$

que é a equação que representa a *reunião de duas retas paralelas*.

Exemplo 3.9. Identifique a cônica $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$.

Como o discriminante da equação desta cônica é $\delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$, devemos eliminar (se possível) o termo linear por meio de uma translação.

Vemos que o sistema de equações (3.12) assume infinitas soluções, iremos encontrar uma delas,

$$\begin{cases} ax_0 + \frac{b}{2}y_0 + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}x_0 + cy_0 + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0 + 6y_0 = -2 \\ 6x_0 + 9y_0 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

e aplicar na equação (3.14).

$$\begin{aligned}f'(x', y') &= a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f = 0 \\f'(x', y') &= 4(x')^2 + 12x'y' + 9(y')^2 + \frac{4}{2} \cdot (-2) + \frac{6}{2} \cdot 1 + 1 = 0 \\f'(x', y') &= 4(x')^2 + 12x'y' + 9(y')^2 = 0\end{aligned}$$

Agora devemos eliminar o termo quadrático misto por meio de uma rotação. Assim, devemos encontrar a solução da equação (3.20),

$$\begin{aligned}\lambda^2 - (a + c)\lambda + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) &= 0 \\ \lambda^2 - 13\lambda &= 0\end{aligned}$$

que é $\lambda_1 = 13$ e $\lambda_2 = 0$.

Aplicando esta solução em (3.23), obtemos:

$$\begin{aligned}f''(x'', y'') &= \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f' = 0 \\f''(x'', y'') &= 13(x'')^2 + 0(y'')^2 = 0 \\x'' &= 0,\end{aligned}$$

que é a equação que representa uma *reta*.

4 Proposta Didática

Neste capítulo apresentaremos aos professores de Matemática uma proposta didática de como podemos apresentar as cônicas aos alunos do Ensino Médio.

4.1 Sequência Didática

A partir de agora pretendemos desenvolver uma sequência didática inovadora a respeito das cônicas, cabendo ao professor analisar todas as etapas deste trabalho e verificar se é pertinente e aplicável em sua turma, podendo esta ser adaptada em caso de necessidade.

Espera-se que neste momento os alunos já dominem todos os conteúdos analíticos sobre ponto e reta.

Desta forma o professor deve iniciar o processo dando as definições/desenhos da geometria plana sobre circunferência, elipse, hipérbole e parábola, como está apresentado no Apêndice A.

Acreditamos que a visualização tridimensional de determinados conceitos pode impressionar os alunos e fazer com que se interessem mais pelo assunto. Pensando nisto, o professor deve seguir com seu trabalho aplicando as idéias apresentadas no Apêndice B, após trabalhar juntamente com os alunos todas as secções no cone observando que algumas delas já foram estudadas em sua vida escolar embora não fossem apresentadas desta forma, ou seja, o vazio ocorre quando não é possível encontrar a solução de uma equação, o ponto, a reta, a reunião de duas retas concorrentes e a reunião de duas retas paralelas são os primeiros conceitos analíticos estudados detalhadamente pelos alunos.

No final do Apêndice B aparece um detalhamento didático que consideramos ser de grande importância aos alunos, a saber, as origens históricas das cônicas. Percebemos que quando os alunos conhecem a história de determinados assuntos começam a dar mais valor a eles e percebem que os mesmos não surgiram ao acaso e sim para solucionar algum problema cotidiano.

Por último, com o objetivo de entreter os alunos no estudo das cônicas pretendemos mostrar a eles as aplicações/utilizações cotidianas dos assuntos apresentados, conforme é feito no Apêndice C.

Nesta etapa do processo o professor deve fazer todo o estudo analítico da circunferência, da elipse, da hipérbole e da parábola apoiando-se num material didático de sua preferência.

Para finalizar o estudo das cônicas o professor deve seguir as instruções apresentadas nos Apêndices D e E.

A avaliação será feita diariamente através de uma análise participativa de cada aluno e compreendida como:

- Elemento integrador entre aprendizagem e ensino;
- Conjunto de ações cujo objetivo é o ajuste e a orientação da intervenção pedagógica para que o aluno aprenda da melhor forma;
- Conjunto de ações que busque obter informações sobre o que foi aprendido e como;
- Elemento de reflexão contínua para o professor sobre sua prática educativa;
- Instrumento que possibilite ao aluno consciência de seus avanços.

Referências

- [1] BOULOS, P.; CAMARGO, I. *Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- [2] BOLDRINI, J. S. et al. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [3] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.
- [4] CORREIA, J. M. *Superfícies Quádricas. Transformação das Coordenadas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2010.
- [5] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [6] LOPES, J. F. *Cônicas e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2011.
- [7] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria Analítica*. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

A Plano de Aula: Definições

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio

Recursos Didáticos: Lousa e materiais de desenho.

Objetivo: Atribuir significado aos conceitos de circunferência, de elipse, de hipérbole e de parábola na geometria plana.

Conteúdo: Lugares geométricos.

O tempo necessário para realização desta atividade é de uma aula.

Inicie a aula procedendo da seguinte forma:

- Dê a definição de circunferência: Sejam P um ponto de um plano α e r um número real estritamente positivo. O lugar geométrico dos pontos de α que distam r de P é chamado de circunferência, que denotaremos por \mathcal{C} . Em outras palavras, $X \in \mathcal{C} \Leftrightarrow d(P, X) = r$.
 - Desenhe a circunferência a partir da definição.
- Dê a definição de elipse: Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos tais que $d(F_1, F_2) = 2f$ e considere o número real $2a$ tal que $2a > 2f$. O lugar geométrico de todos os pontos do plano tais que a soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$ é chamado de elipse, que denotaremos por \mathcal{E} . Em outras palavras, $P \in \mathcal{E} \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.
 - Desenhe a elipse a partir da definição.
- Dê a definição de hipérbole: Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos tais que $d(F_1, F_2) = 2f$ e considere o número real $2a$ tal que $0 < 2a < 2f$. O lugar geométrico de todos os pontos do plano tais que a diferença das distâncias a F_1 e F_2 , em módulo, é constante e igual a $2a$ é chamado hipérbole, que denotaremos por \mathcal{H} . Em outras palavras, $P \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.
 - Desenhe a hipérbole a partir da definição.
- Dê a definição de parábola: Seja s uma reta e P um ponto não pertencente a s . O conjunto de todos os pontos do plano equidistante da reta s e do ponto P é chamado de parábola, que denotaremos por \mathcal{P} . Em outras palavras, $P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, s) = d(P, P)$.

(b) Desenhe a parábola a partir da definição.

Para esta aula, consulte a seção F do Capítulo 22 de ([1], p.339), antes de realizar seus desenhos.

B Plano de Aula: As secções cónicas e suas origens

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio

Recursos Didáticos: Data show e software de geometria dinâmica (o importante é que o software escolhido permita construir um cone duplo e um plano que o interseccionem).

Objetivo: Reconhecer todas as secções cónicas a partir da intersecção entre um cone duplo e um plano, bem como, conhecer a origem histórica das secções cónicas.

Conteúdo: Secções cónicas.

O tempo necessário para realização desta atividade é de uma aula.

Inicie esta aula a partir de algumas instruções e/ou indagações aos alunos:

1. Imagine um cone;
2. Agora imagine um cone duplo;
3. Pense em um plano;
4. Agora corte esse cone duplo com esse plano;
5. Quais são as secções encontradas a partir da intersecção entre o cone duplo e o plano?

Neste momento o professor deve nortear as discussões de modo que os alunos consigam visualizar todas as secções cónicas apresentadas na seção (2.3). Para isso é aconselhável que após algumas conclusões iniciais dos alunos, o professor utilize um vídeo mostrando algumas secções cónicas a partir do software de geometria dinâmica de sua preferência.

Após a visualização de todas as cónicas o professor deve apresentar as origens históricas como foi feito na seção (2.1).

Sugestões:

- vídeo disponível no youtube sobre secções cónicas:

<http://www.youtube.com/watch?v=1wTe0VJBAZ8> (20/05/2013 às 10:30 h)

- softwares de geometria dinâmica: Geogebra 3D e Microsoft Mathematics.

C Plano de Aula: A utilização das cônicas nos dias atuais

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio

Recursos Didáticos: Laboratório de informática e recursos utilizados por cada grupo em suas exposições.

Objetivo: Mostrar aos alunos que a descoberta das cônicas foi de grande importância para o desenvolvimento tecnológico da sociedade.

Conteúdo: Cônicas

O tempo necessário para realização desta atividade é de quatro aulas.

Nas duas aulas iniciais o professor deve dividir a sala em oito grupos da seguinte forma:

- Grupo 1 e 2: trabalharão com aplicações da circunferência no cotidiano.
- Grupo 3 e 4: trabalharão com aplicações da elipse no cotidiano.
- Grupo 5 e 6: trabalharão com aplicações da hipérbole no cotidiano.
- Grupo 7 e 8: trabalharão com aplicações da parábola no cotidiano.

O professor deverá orientar os alunos sobre a pesquisa/apresentação desejada. Desta forma, o professor deve salientar que a pesquisa deve conter exemplos detalhados de aplicações cotidianas das cônicas previamente selecionadas e a apresentação deve ser clara, de modo que todos os outros alunos possam verificar/entender a aplicação exposta pelo grupo.

Feito isso, o professor deve ir ao laboratório de informática com os alunos, para que os mesmos façam o desenvolvimento da pesquisa/montagem do trabalho em grupo.

As outras duas aulas ficarão reservadas para exposição/argumentação dos grupos.

Por fim, o professor deve finalizar a atividade com um debate de opiniões e idéias sobre a aplicação das cônicas.

D Plano de Aula: Translação e rotação

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio

Recursos Didáticos: Lousa, data show e software de geometria dinâmica.

Objetivo: Apresentar (visualmente e algebricamente) aos alunos os movimentos de translação e rotação.

Conteúdo: Movimentos de translação e rotação.

O tempo necessário para realização desta atividade é de duas aulas.

Inicialmente, o professor deve utilizar seu software de geometria dinâmica de preferência para mostrar visualmente os movimentos de translação e rotação de figuras.

A seguir, o professor deve desenvolver com os alunos o conteúdo apresentado na seção (3.1.2) da maneira que achar mais conveniente. O importante é que os alunos conheçam neste momento os sistemas (3.4) e (3.6).

Então, o professor deve aplicar os sistemas (3.4) e (3.6) em algumas cônicas, de modo que as equações iniciais sejam modificadas.

Posteriormente, o professor deve desenhar as cônicas iniciais e as modificadas inserindo suas equações no software de geometria dinâmica. Desta forma os alunos poderão compará-las visualmente.

O professor deve finalizar sua aula perguntando aos alunos se podemos fazer o processo inverso, ou seja, a partir de uma cônica transladada/rotacionada, encontrar qual foi a cônica que a gerou.

E Plano de Aula: Classificando as cônicas

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio

Recursos Didáticos: Lousa.

Objetivo: Mostrar como é possível classificar uma cônica tendo apenas sua equação.

Conteúdo: Classificação das cônicas.

O tempo necessário para realização desta atividade é de cinco aulas.

O professor deve apresentar aos alunos a teoria desenvolvida nas seções (3.2.1) e (3.2.2) da forma mais adequada possível para o entendimento dos alunos.

O importante é que os alunos conheçam e saibam identificar os elementos formadores das equações (3.12), (3.14), (3.20) e (3.23).

Desenvolva neste momento todos os exemplos feitos na seção (3.3).