



Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Propriedades Topológicas dos Conjuntos de Julia

Rafael Asmat Uceda

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto

Março - 2008

Uceda, Rafael Asmat.

Propriedades Topológicas dos conjuntos de Julia /Rafael Asmat
Uceda. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2008.
82 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Ali Messaoudi

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de
Bióciências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Geometria. 3. Topologia 4. Conjuntos de
4. Julia. I. Messaoudi, Ali. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto
de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.93

RAFAEL MARCEL ASMAT UCEDA

Propriedades Topológicas dos Conjuntos de Julia

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Geometria e Topologia junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Julio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ali Messaoudi
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr Edson Vargas
Professor Doutor
IME - USP São Paulo

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
Professor Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 14 de março de 2008

Aos meus pais,
Gerardo e Arlette
e aos meus queridos irmãos,
Martin e Denisse
dedico.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a DEUS por todas as oportunidades maravilhosas que obtive em minha vida e pela oportunidade de estudar no Brasil onde conheci pessoas maravilhosas.

Agradeço aos meus pais, Gerardo e Arlette, e meus irmãos Martin e Denisse, pelo amor, paciência, respeito e confiança. Minha mãe não está, hoje, presente entre nós, mas sempre confiou em mim e meus irmãos e semeou os valores e a perseverança necessários para triunfar na vida.

Agradeço muito ao meu orientador, Ali Messaoudi, pela orientação, amizade e paciência com meu portunhol. Por dar-me a oportunidade de aprender com ele e pelos conselhos acadêmicos, profissionais e humanos.

Agradeço à banca examinadora: Prof. Dr. Edson Vargas, pela disponibilidade, ao Prof. Paulo Ricardo da Silva também pela disponibilidade e ao Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi, por toda a ajuda nestes anos em Rio Preto e por ser um exemplo de professor e amigo.

Agradeço também à todos os professores do departamento de matemática do Ibilce, em especial aos professores peruanos Dr. German Lozada e Dr. Walter Julio, pelo incentivo, simpatia e acolhida desde o início.

Aos amigos da pós-graduação e do Brasil pela agradável convivência. Aos meus amigos do Perú, pelos grandes momentos de alegria.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

“Há homens que lutam um dia e são bons, há outros que lutam um ano e são melhores, há os que lutam muitos anos e são muito bons, mas há os que lutam toda uma vida e estes são imprescindíveis.”

(Bertold Brecht)

Resumo

Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial. O conjunto de Julia, $J(f)$, associado a f , é o conjunto dos números complexos z onde a família $\{f^n\}$ dos iterados de f não é normal em z .

Neste trabalho, estudaremos varias propriedades topológicas de $J(f)$. Calcularemos também a dimensão de Hausdorff de $J(f_c)$, onde $f_c(z) = z^2 + c$ e $|c|$ é grande, e estudaremos as propriedades do conjunto de Mandelbrot associado a f_c , isto é, o conjunto M dos números complexos pelos quais $J(f_c)$ é conexo. Em particular provaremos o Teorema de Douady-Hubard que menciona que M é conexo.

Palavras chave: Julia, Mandelbrot, Conexidade, Dimensão de Hausdorff.

Abstract

Let $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be a polynomial function. The Julia set, $J(f)$ associated to f , is the set of the complex numbers z where the family $\{f^n\}$ of iterates of f is not normal at z .

In this work, we will study many topological properties of $J(f)$. We will compute the Hausdorff dimension of $J(f_c)$ too, where $f_c(z) = z^2 + c$ and $|c|$ is large, and we will study the properties of the Mandelbrot set associated to f_c , that is, the set M of the complex numbers by which $J(f_c)$ is connected. In particular we will prove the Theorem of Douady-Hubard that mentions the connectedness of M .

Key words: Julia, Mandelbrot, Connectedness, Hausdorff dimension.

Sumário

Introdução	11
1 Iterações de Funções Complexas -Conjuntos de Julia	13
1.1 Teoria Geral dos Conjuntos de Julia	13
1.2 Funções Quadráticas -O Conjunto de Mandelbrot	21
2 Dimensão de Hausdorff e Dimensão Fractal	27
2.1 Medida de Hausdorff	27
2.1.1 Propriedades da Medida de Hausdorff	28
2.2 Dimensão de Hausdorff	30
2.2.1 Propriedades da dimensão de Hausdorff	31
2.2.2 Definições Equivalentes de Dimensão de Hausdorff	35
2.2.3 Definições mais finas de Dimensão	35
2.3 Dimensão Fractal	36
2.3.1 Definições Equivalentes de Dimensão Fractal	36
2.3.2 Propriedades da dimensão fractal	40
3 Funções Iteradas e Dimensão de Hausdorff	43
3.1 Dimensões de conjuntos auto-similares	47
3.2 Algumas Variantes	51
4 Conjuntos de Julia de Funções Quadráticas	54
4.1 Propriedades do conjunto de Mandelbrot	58

Apêndice	65
4.1.1 O espaço das funções contínuas $\mathcal{C}(G, \Omega)$	65
4.1.2 O espaço das funções analíticas	71
Bibliografia	81

Introdução

Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial de grau $d \geq 2$. O conjunto de Julia, $J(f)$, associado a f é o conjunto dos números complexos z onde a família $\{f^n\}$ não é normal em z .

Um dos primeiros a estudar as propriedades de $J(f)$ foi Gaston Julia em 1915 e junto com Pierre Fatou introduziram também os métodos iterativos no estudo dos sistemas dinâmicos. Os conjuntos de Julia foram usados em vários domínios, como Sistemas Dinâmicos, Teoria dos Números, Análise Funcional e Probabilidades e Processos Estocásticos, entre outros. Os conjuntos de Julia fornecem um dos mais surpreendentes exemplos de como um processo aparentemente simples, pode gerar conjuntos altamente intrincados. Funções no plano complexo tão simples como $f(z) = z^2 + c$, com c constante, podem fazer surgir fractais de aparência exótica.

Neste trabalho estudaremos várias propriedades topológicas de $J(f)$. Em particular mostramos que o conjunto de Julia é compacto, perfeito e que ele é igual ao fecho do conjunto dos pontos repulsores de f . Este estudo envolve a Análise Complexa e Análise Funcional (teorema de Montel). Estudamos também propriedades finas do conjunto de Julia, $J(f_c)$, onde $f_c = z^2 + c$, em particular mostramos que se $|c|$ é pequeno, então $J(f_c)$ é uma curva fechada simples, e se $|c|$ é grande, então ele é desconexo com dimensão de Hausdorff igual a $2 \log 2 / \log 4 (|c| + |2c|^{1/2})$.

Estudamos também as propriedades do conjunto de Mandelbrot associado à f_c , isto é, o conjunto M dos números complexos pelos quais $J(f_c)$ é conexo. Em particular provaremos o Teorema de Douady-Hubard que menciona que M é conexo.

O trabalho está dividido em quatro capítulos e um apêndice. No primeiro

capítulo definimos os conjuntos de Julia e mostramos algumas propriedades topológicas. Também definimos o conjunto de Mandelbrot e obtemos uma caracterização alternativa deste conjunto.

No segundo capítulo definimos a dimensão de Hausdorff e a dimensão fractal, e para isso definimos um conceito prévio de medida de Hausdorff, com o intuito de estudar algumas propriedades dos conjuntos de Julia de funções quadráticas. Abordamos algumas definições equivalentes de dimensão.

No terceiro capítulo, definimos conjuntos invariantes por contrações e mostramos a existência e unicidade de um conjunto invariante por contrações. Finalmente discutimos as dimensões de conjuntos auto-similares para obter as dimensões de Hausdorff e Fractais e vemos algumas variantes.

No quarto capítulo estudamos os conjuntos de Julia de funções quadráticas e vemos como muda a estrutura dos conjuntos de Julia ao variarmos o parâmetro c no plano complexo. Finalmente estudamos mostramos algumas propriedades do conjunto de Mandelbrot.

O apêndice traz a prova do Teorema de Montel, muito útil no primeiro capítulo para a prova das propriedades topológicas dos conjuntos de Julia.

Capítulo 1

Iterações de Funções Complexas -Conjuntos de Julia

Os conjuntos de Julia surgem ao iterarmos uma função de variável complexa e por isso estão relacionados aos sistemas dinâmicos. Neste capítulo estudamos a geometria e a natureza fractal dos conjuntos de Julia de polinômios.

1.1 Teoria Geral dos Conjuntos de Julia

Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial de grau $n \geq 2$, isto é $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, para todo $z \in \mathbb{C}$, onde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Denotamos f^k a k -ésima composta $f \circ f \circ \dots \circ f$ da função f .

Definição 1.1.1 *Seja $z \in \mathbb{C}$*

z é um ponto fixo de f se $f(z) = z$

z é um ponto periódico de f se existir um inteiro $p \geq 1$ tal que $f^p(z) = z$

O menor inteiro positivo p tal que $f^p(z) = z$ é chamado o período de z .

Definição 1.1.2 *Seja z um ponto periódico de período p e $(f^p)'(z) = \lambda$. O ponto z é chamado:*

superatrator se $\lambda = 0$

<i>atrator</i>	se $0 \leq \lambda < 1$
<i>indiferente</i>	se $ \lambda = 1$
<i>repulsor</i>	se $ \lambda > 1$

Definimos o Conjunto de Julia $J(f)$ de f como o fecho do conjunto dos pontos periódicos repulsores de f . O complementar do conjunto de Julia é chamado o *conjunto de Fatou*, \mathcal{F} .

Exemplo 1.1.1 Seja $f(z) = z^2$. Logo $f^k(z) = z^{2^k}$. Os pontos periódicos de f são os pontos que satisfazem $f^p(z) = z, p \in \mathbb{N}^*$, isto é, $z^{2^p} = z, z \neq 0$. Temos $z^{2^p-1} = 1$, logo z é uma raiz da unidade e os pontos periódicos de f são $\{e^{\frac{2\pi iq}{2^p-1}} : 0 \leq q < 2^p-2\}$, os quais são repulsores, pois $|(f^p)'(z)| = 2^p|z|^{2^p-1} = 2^p > 1$. Assim, o conjunto de Julia, $J(f)$, é o círculo unitário $|z| = 1$. Neste caso $J = f(J) = f^{-1}(J)$ e $f^k(z) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, se $|z| < 1$ e $f^k(z) \rightarrow \infty$ se $|z| > 1$. Observamos que $f^k(z)$ permanece em J para todo k se $|z| = 1$.

Observação 1.1.1 : Se modificarmos levemente o exemplo anterior e tomarmos $f(z) = z^2 + c$, onde c é um número complexo pequeno, teríamos ainda que $f^k(z) \rightarrow \omega$ se z é pequeno, onde ω é o ponto fixo de f próximo de 0, e que $f^k(z) \rightarrow \infty$ se z é grande.

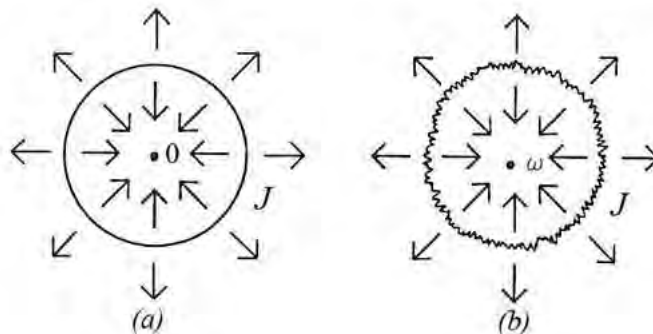


Fig. 1: (a) O conjunto de Julia de $f(z) = z^2$. (b) O conjunto de Julia de $f(z) = z^2 + c$

Para estabelecer as propriedades básicas dos conjuntos de Julia precisamos da seguinte definição.

Definição 1.1.3 *Sejam U um conjunto aberto em \mathbb{C} e $g_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma família de funções analíticas complexas. Dizemos que a família g_k é normal em U se toda seqüência de funções escolhida de g_k possui uma subseqüência que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de U , ou para uma função analítica limitada ou para ∞ . A família g_k é normal no ponto ω de U se existe algum subconjunto aberto V de U contendo ω tal g_k é uma família normal em V .*

Teorema 1.1.1 (Teorema de Montel) *Seja g_k uma família de funções analíticas complexas num domínio aberto U . Se g_k não é uma família normal, então para todo $w \in \mathbb{C}$, com no máximo uma exceção, temos $g_k(z) = w$ para algum $z \in U$ e algum k .*

Demonstração: Veja o Apêndice. □

Definição 1.1.4 *Seja f uma função polinomial complexa. Definimos*

$$J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{a família } \{f^k\}_{k \geq 0} \text{ não é normal em } z\}.$$

Observação 1.1.2 *O complementar*

$$F_0(f) \equiv \mathbb{C} \setminus J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{existe um aberto } V \text{ contendo } z \text{ e } \{f^k\} \text{ é normal em } V\}$$

é trivialmente um conjunto aberto, pois é a união de conjuntos abertos.

Teorema 1.1.2 *O conjunto de Julia, $J_0(f)$, de f tem as seguintes propriedades:*

- $J_0(f)$ é compacto.
- $J_0(f)$ é não vazio.
- $J(f) = f(J_0(f)) = f^{-1}(J_0(f))$.
- $J(f)$ tem interior vazio e é um conjunto perfeito.

Proposição 1.1.1 $J_0(f)$ é compacto.

Demonstração: O complementar de $J_0(f)$, $F_0(f)$, é um conjunto aberto, logo $J_0(f)$ é fechado. Por outro lado, f é um polinômio de grau $n \geq 2$, podemos achar r tal que $|f(z)| \geq 2|z|$, se $|z| \geq r$. Logo $|f^k(z)| > 2^k r$, se $|z| > r$. Assim $f^k(z) \rightarrow \infty$ uniformemente no conjunto aberto $V = \{z : |z| > r\}$. Portanto f^k é normal em V . Logo $V \subset \mathbb{C} \setminus J_0(f)$. Assim, $J_0(f)$ é limitado e portanto, um conjunto compacto. \square

Proposição 1.1.2 $J_0(f)$ é não vazio.

Demonstração: Suponha que $J_0(f) = \phi$. Então, para cada $r > 0$, a família $\{f^k\}$ é normal no disco aberto $B_0(r)$ com centro na origem e raio r . Como f é uma função polinomial, podemos tomar r suficientemente grande para garantir que $B^0(r)$ contém um ponto z tal que $|f^k(z)| \rightarrow \infty$. Além disso, se resolvemos a equação $f(w) = w$ e tomamos $R = |w|$, então, para $r > R$, existe $z \in B^0(r)$ tal que $f^k(w) = w$, para todo k . Portanto, é impossível que qualquer subsequência de $\{f^k\}$ convirja uniformemente para uma função analítica limitada ou para infinito em qualquer subconjunto compacto de $B^0(r)$ que contenha os pontos z e w , o que contradiz a normalidade de $\{f^k\}$. \square

Proposição 1.1.3 $J_0(f) = f(J_0) = f^{-1}(J_0)$

Demonstração: Vamos mostrar equivalentemente que $F_0 = f(F_0) = f^{-1}(F_0)$. Seja $z \in F$, então existe um conjunto aberto V tal que $z \in V$ e $\{f^k\}$ é normal em V . Seja $\{f^{k_i}\}$ uma subsequência de $\{f^k\}$. Então $\{f^{k_i+1}\}$ tem uma subsequência $\{f^{k'_i+1}\}$ que converge uniformemente em subconjuntos compactos de V . Temos que $f^{-1}(V)$ é aberto, pois f é contínua. Logo, se D é um subconjunto compacto de $f^{-1}(V)$, então $f(D)$ é um subconjunto compacto de V . Temos que $\{f^{k'_i+1}\}$ converge uniformemente em $f(D)$, então $\{f^{k'_i}\}$ converge uniformemente em D . Assim, $\{f^k\}$ é normal em $f^{-1}(V)$ e portanto $F_0 \subset f^{-1}(F_0)$.

As outras inclusões poder ser obtidas de maneira igual, usando o fato de que o polinômio $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação aberta. \square

Proposição 1.1.4 $J_0(f^p) = J_0(f)$ para todo inteiro positivo p

Demonstração: Note que $J_0(f^p) = J_0(f)$ se e somente se $F_0(f^p) = F_0(f)$. Logo, mostraremos a segunda igualdade.

Notemos que, se toda subsequência de $\{f^k\}$ tem uma subsequência uniformemente convergente num conjunto dado D , então toda subsequência de $\{f^{pk}\}_{k \geq 1}$ também possui uma subsequência uniformemente convergente em D . Assim, temos que $F_0(f) \subset F_0(f^p)$.

Se D é um compacto e $\{g_k\}$ uma família de funções uniformemente convergentes em D para uma função analítica ou para infinito, então o mesmo é verdade para a família $\{h \circ g_k\}$, onde h é um polinômio arbitrário. Logo, se $\{f^{pk}\}_{k \geq 1}$ é normal num conjunto aberto V , então também é normal a família $\{f^r \circ f^{pk}\}_{k \geq 1} = \{f^{pk+r}\}_{k \geq 1}$ para $r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Qualquer subsequência de $\{f^k\}_{k \geq 1}$ deve conter uma subsequência infinita de $\{f^{pk+r}\}_{k \geq 1}$ para algum inteiro $r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, a qual contém uma subsequência uniformemente convergente para uma função limitada ou para infinito em subconjuntos compactos de V . Assim, $\{f^k\}$ é normal e portanto, $F_0(f^p) \subset F_0(f)$ e temos o resultado. \square

O resultado a seguir nos diz que os iterados de f dispersam as vizinhanças de pontos em J_0 por todo o plano complexo.

Proposição 1.1.5 *Sejam f uma função polinomial, $\omega \in J_0(f)$ e U uma vizinhança de ω . Então $W := \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ é todo \mathbb{C} , exceto possivelmente um único ponto. Esse ponto excepcional não está em $J_0(f)$ e não depende de U .*

Demonstração: Por hipótese, $w \in J_0(f)$, logo a família $\{f^k\}$ não é normal em w . O Teorema de Montel implica que $W = \mathbb{C}$ exceto possivelmente um único ponto.

Considere um ponto $\nu \notin W$. Se além disso $f(z) = \nu$, então $z \notin W$ pois $f(W) \subset W$. Como $\mathbb{C} \setminus W$ consiste de no máximo um ponto, segue que $z = \nu$. Assim, f é um polinômio de grau n tal que a única solução de $f(z) - \nu = 0$ é ν . Logo, $f(z) - \nu = c(z - \nu)^n$ para alguma constante c .

Seja $V = \{z : |z - \nu| < (2c)^{\frac{-1}{n-1}}\}$. Logo

$$|f^k(z) - \nu| = |f(f^{k-1}(z)) - \nu| = |c(f^{k-1}(z) - \nu)^n| = c^{n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n+1} |z - \nu|^{n^k} < c^{\frac{n^k-1}{n-1}} (2c)^{\frac{-n^k}{n-1}} = c^{\frac{-1}{n-1}} 2^{\frac{-n^k}{n-1}}$$

Assim, se $z \in V$ então $f^k(z) - \nu \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, e a convergência é uniforme. Logo $\{f^k\}$ é normal em ν e portanto $\nu \notin J_0(f)$. Claramente ν depende somente do polinômio f . \square

Corolário 1.1.1

- a) Se U é um subconjunto aberto que intercepta $J_0(f)$, então, para todo $z \in \mathbb{C}$ com no máximo uma exceção, $f^{-k}(z)$ intercepta U para valores infinitos de k .
- b) Se $z \in J_0(f)$ então $J_0(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$.

Demonstração:

- a) Se $z \in \mathbb{C}$ não for o ponto excepcional da proposição 1.1.5, então $z \in f^k(U)$ e portanto $f^{-k}(z)$ intercepta U para algum k . Usando isto repetidas vezes obtemos uma seqüência infinita de valores de k tal que $f^{-k}(z)$ intercepta U .
- b) Seja $z \in J_0(f)$. Então $f^{-k}(z) \in J_0(f)$ pela proposição 1.1.3. Logo $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ e portanto seu fecho estão contidos em $J_0(f)$. Por outro lado, se U é um conjunto aberto contendo $z \in J(f)$, então, pela parte (a), f^{-k} intercepta U para algum k . Portanto, pela proposição 1.1.5, z não pode ser o ponto excepcional. \square

Corolário 1.1.2 $J_0(f)$ tem interior vazio.

Demonstração: Suponha que $J_0(f)$ contém um conjunto aberto U . Então, pela proposição 1.1.3, $f^k(U) \subset J_0(f)$ para todo k . Logo $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \subset J_0(f)$. Pela proposição 1.1.5 $J_0(f)$ é todo \mathbb{C} com a exceção de, no máximo, um ponto e portanto $J_0(f)$ é ilimitado, mas isto contradiz a propriedade de $J_0(f)$ ser compacto. \square

Proposição 1.1.6 $J_0(f)$ é um conjunto perfeito.

Demonstração: Seja $\nu \in J_0(f)$ e U uma vizinhança de ν . Devemos mostrar que existe $\omega \in J(f), \nu \neq \omega$ tal que $\omega \in U$. Vamos considerar três casos.

(i). ν não é um ponto fixo ou periódico de f . Pelo corolário 1.1.1 (b) e a proposição 1.1.3 temos que U contém um ponto de $f^{-k}(\nu) \subset J_0(f)$ para algum $k \geq 1$ e esse ponto é distinto de ν pois ν não é um ponto fixo.

(ii). $f(\nu) = \nu$. Se $f(z) = \nu$ não tem outra solução exceto ν , então, como na prova da proposição 1.1.5, $\nu \notin J_0(f)$. Logo, existe $\omega \neq \nu$ tal que $f(\omega) = \nu$. Pelo corolário 1.1.1(b), U contém um ponto de $f^{-k}(\omega)$ para algum $k \geq 1$. Pela proposição 1.1.3 esse ponto está em $J_0(f)$ e é distinto de ν pois $f^k(\nu) = \nu$.

(iii). $f^p(\nu) = \nu, p > 1$. Pela proposição 1.1.4, $J_0(f) = J_0(f^p)$, logo podemos usar o método usado no caso (ii) substituindo f^p ao invés de f , para obter o resultado requerido.

Assim, temos que $J_0(f)$ não tem pontos isolados, é fechado e portanto é um conjunto perfeito. \square

Proposição 1.1.7 $J(f) = J_0(f)$.

Demonstração: Seja ω um ponto periódico repulsor de f , de período p . Então ω é um ponto fixo repulsor de $g := f^p$. Suponha que $\{g^k\}$ é normal em ω ; então ω tem uma vizinhança V na qual a subsequência $\{g^{k_i}\}$ converge para uma função analítica g_0 ou para infinito. Mas, como $g^k(\omega) = \omega$ para todo k , a subsequência $\{g^{k_i}\}$ não pode convergir para infinito. Pelo teorema 4.1.6 do Apêndice, a derivada também converge, $(g^{k_i})'(z) \rightarrow g_0'(z)$ para todo $z \in V$. Usando a regra da cadeia, $|(g^{k_i})'(\omega)| = |(g'(\omega))^{k_i}| \rightarrow \infty$ pois ω é um ponto fixo repulsor e $|g'(\omega)| > 1$. Isto contradiz o fato de g_0' ser finito. Logo $\{g^k\}$ não é normal em V . Assim, $\omega \in J_0(g) = J_0(f^p) = J_0(f)$, pela proposição 1.1.4. Como $J_0(f)$ é fechado, segue que $J(f) \subset J_0(f)$.

Definamos o conjunto $K = \{\omega \in J_0(f) : \exists z \neq \omega, f(z) = \omega, f'(z) \neq 0\}$. Suponha que $\omega \in K$. Então existe uma vizinhança aberta V de ω na qual podemos obter

uma inversa analítica local $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C} \setminus V$ tal que $f(f^{-1}(z)) = z$ para todo $z \in V$. Definamos agora uma família de funções analíticas $\{h_k\}$ em V por:

$$h_k(z) = \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}.$$

Seja U uma vizinhança aberta de ω tal que $U \subset V$. Como $\omega \in J_0(f)$, a família $\{f^k\}$ e portanto a família $\{h_k\}$ não são normais em U . Pelo teorema de Montel $h_k(z) \in \{0, 1\}$ para algum k e algum $z \in U$. Se $h_k(z) = 0$, então $f^k(z) = z$ para algum $z \in U$. Se $h_k(z) = 1$, então $f^k(z) = f^{-1}(z)$, e portanto $f^{k+1}(z) = z$, para algum $z \in U$. Assim, U contém um ponto periódico de f , logo $\omega \in J(f)$.

Assim $K \subset J(f)$, logo tomando fechos $\overline{K} \subset \overline{J(f)} = J(f)$. Porém K contém todo $J_0(f)$ exceto um número finito de pontos. Como, pela proposição 1.1.6, $J_0(f)$ não tem pontos isolados, $J_0(f) = \overline{K} \subset J(f)$. Portanto $J(f) = J_0(f)$. \square

Definição 1.1.5 *Seja ω um ponto fixo atrator de f . O conjunto $A(\omega) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \rightarrow \omega \text{ quando } k \rightarrow \infty\}$ é chamado a bacia de atração de ω . Quando $\omega = \infty$ definimos a bacia de atração $A(\infty)$ da mesma maneira.*

Observação 1.1.3 *Como ω é um ponto atrator, existe um conjunto aberto $V \subset A(\omega)$ tal que $\omega \in V$. (se $\omega = \infty$, podemos tomar $\{z : |z| > r\}$, para r suficientemente grande). Isto implica que $A(\omega)$ é aberto, pois se $f^k(z) \in V$ para algum k , então $z \in f^{-k}(V)$, o qual é aberto.*

A seguinte caracterização de $J(f)$ como a fronteira da bacia de atração de um ponto fixo atrator de f é extremamente útil para determinar os conjuntos de Julia.

Lema 1.1.1 *Seja ω um ponto fixo atrator de f . Então $\partial A(\omega) = J(f)$. A igualdade é válida também se $\omega = \infty$.*

Demonstração: Seja $z \in J(f)$, então $f^k(z) \in J(f)$ para todo k . Logo $\{f^k\}$ não pode convergir para um ponto fixo atrator e, portanto, $z \notin A(\omega)$. Porém, pela

proposição 1.1.5, se U é uma vizinhança de z , o conjunto $f^k(U)$ contém pontos de $A(\omega)$ para algum k . Logo, existem pontos arbitrariamente próximos de z os quais são iterados até ω . Assim, $z \in \overline{A(\omega)}$ e portanto $z \in \partial A(\omega)$.

Por outro lado, seja $z \in \partial A(\omega)$ mas $z \notin J(f)$. Então z tem uma vizinhança aberta conexa V na qual $\{f^k\}$ tem uma subsequência que converge ou para uma função analítica ou para ∞ . A subsequência converge para ω em $V \cap A(\omega)$, o qual é aberto e não vazio, e portanto converge em V , pois uma função é constante num conjunto conexo se ela é constante em qualquer subconjunto aberto. Todos os pontos de V são aplicados em $A(\omega)$ por iterados de f , logo $V \subset A(\omega)$. Mas isto contradiz o fato de $z \in \partial A(\omega)$. Portanto, $\partial A(\omega) \subset J(f)$ \square

1.2 Funções Quadráticas -O Conjunto de Mandelbrot

Vamos considerar o caso das funções quadráticas em \mathbb{C} . Estudamos os conjuntos de Julia de polinômios da forma

$$f_c(z) = z^2 + c.$$

Seja $h(z) = \alpha z + \beta$ ($\alpha \neq 0$). Então

$$h^{-1}(f_c(h(z))) = (\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta)/\alpha.$$

Escolhendo valores apropriados de α, β e c podemos transformar esta expressão em uma função quadrática arbitrária, f , isto é, $h^{-1} \circ f_c \circ h = f$ e $h^{-1} \circ f_c^k \circ h = f^k$ para todo k . Isto quer dizer que a seqüência dos iterados $\{f^k(z)\}$ de um ponto z por f é justamente a imagem por h^{-1} da seqüência dos iterados $\{f_c^k(h(z))\}$ do ponto $h(z)$ por f_c . z é um ponto p -periódico de f se e somente se $h(z)$ é um ponto p -periódico de f_c . Assim, o conjunto de Julia de f é a imagem por h^{-1} do conjunto de Julia de f_c .

A transformação h é chamada de conjugação entre f e f_c .

Observação 1.2.1 *Toda função quadrática é conjugada com f_c , para algum c . Logo, ao estudarmos os conjuntos de Julia de $f_c, c \in \mathbb{C}$, estudamos efetivamente os conjuntos de Julia de todos os polinômios quadráticos. Como h é uma transformação de similaridade, o conjunto de Julia de todo polinômio quadrático é geometricamente similar ao de f_c , para algum $c \in \mathbb{C}$.*

Devemos tomar em consideração ao longo desta seção que $f_c^{-1}(z)$ toma dois valores distintos $\pm(z - c)^{1/2}$, chamados os dois ramos de $f_c^{-1}(z)$, exceto para $z = c$. Assim, se U é um conjunto aberto pequeno tal que $c \notin U$, então a pre-imagem $f_c^{-1}(U)$ tem duas partes, as quais são aplicadas bijetivamente e suavemente por f_c em U .

Definição 1.2.1 : *Definimos o conjunto de Mandelbrot M como o conjunto dos parâmetros c tais que o conjunto de Julia $J(f_c)$ é conexo*

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ é conexo}\}.$$

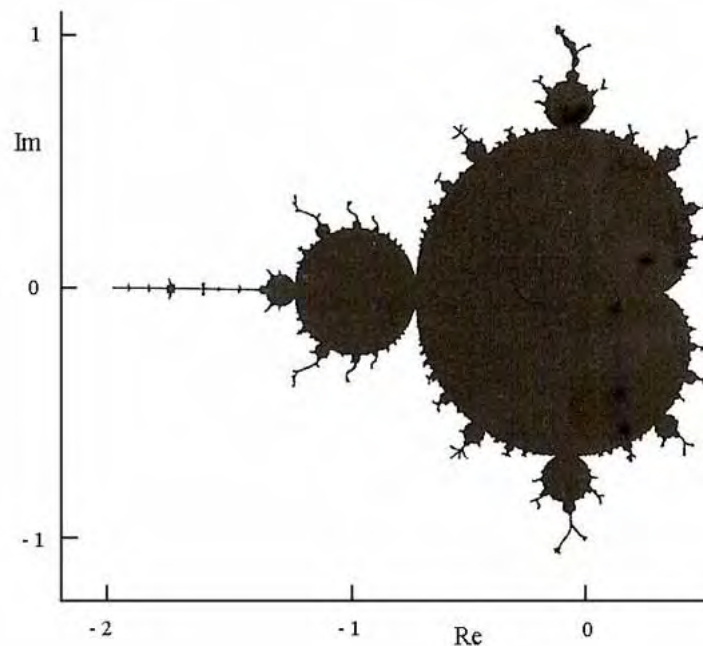


Fig. 2: O Conjunto de Mandelbrot, M , no plano complexo

Esta definição parece estar relacionada mais com uma propriedade específica de $J(f_c)$. Na verdade, M contém muita informação sobre a estrutura dos conjuntos de Julia. Vamos obter uma caracterização alternativa do conjunto de Mandelbrot em termos dos iterados de f_c . Para fazer isso precisamos saber um pouco mais sobre o efeito da transformação f_c em curvas suaves. Chamamos uma curva suave, fechada, simples no plano complexo de laço. Vamos nos referir as partes de \mathbb{C} dentro e fora dessa curva como o interior e o exterior do laço. Uma figura de oito é uma curva fechada suave com um único ponto de auto-intersecção.

Lema 1.2.1 *Seja C um laço no plano complexo*

- a) *Se c está dentro de C , então $f_c^{-1}(C)$ é um laço e a imagem inversa do interior de C é o interior de $f_c^{-1}(C)$.*
- b) *Se c está sobre C , então $f_c^{-1}(C)$ é uma figura de oito tal que a imagem inversa do interior de C é o interior dos dois laços.*

Demonstração: Note que $f_c^{-1}(z) = (z - c)^{1/2}$ e $(f_c^{-1})'(z) = \frac{1}{2}(z - c)^{-1/2}$, o qual é finito e não nulo se $z \neq c$. Logo, se escolhermos um dos dois ramos de f_c^{-1} , o conjunto $f_c^{-1}(C)$ é localmente uma curva suave, sempre que $c \notin C$.

- a) Suponha que c está dentro de C . Tomemos um ponto inicial ω em C e escolhamos um dos dois valores de $f_c^{-1}(\omega)$. Se permitirmos $f_c^{-1}(z)$ variar continuamente quando z percorre C , então o ponto $f_c^{-1}(z)$ traça uma curva suave. No entanto, quando z retorna a ω , $f_c^{-1}(\omega)$ toma seu segundo valor. Quando z atravessa novamente C , $f_c^{-1}(z)$ continua traçando seu caminho suave o qual fecha quando z retorna a ω pela segunda vez. Por hipótese, $c \notin C$, então $0 \notin f_c^{-1}(C)$, logo $f_c'(z) \neq 0$ em $f_c^{-1}(C)$. Assim, f_c é localmente uma transformação bijetiva suave para pontos próximos em $f_c^{-1}(C)$. Em particular $z \in f_c^{-1}(C)$ não pode ser um ponto de auto-intersecção de $f_c^{-1}(C)$, pois caso contrario, $f_c(z)$ seria uma auto-intersecção de C .

Desde que f_c é uma função continua que aplica o laço $f_c^{-1}(C)$ e nenhum outro ponto, no laço C , o polinômio f_c deve aplicar o interior e o exterior de $f_c^{-1}(C)$

no interior e exterior de C respectivamente. Logo, f_c^{-1} aplica o interior de C no interior de $f_c^{-1}(C)$.

- b) Usamos o mesmo método da parte (a), notando que se C_0 é um pedaço suave da curva através de c , então $f_c^{-1}(C_0)$ consiste de dois pedaços suaves de curvas através de 0 os quais atravessam-se em ângulo reto. Temos assim a auto-intersecção da figura de oito.

□

O Teorema a seguir fornece uma caracterização alternativa do conjunto de Mandelbrot.

Teorema 1.2.1

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ é limitado}\} = \{c \in \mathbb{C} : f_c^k(0) \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\}.$$

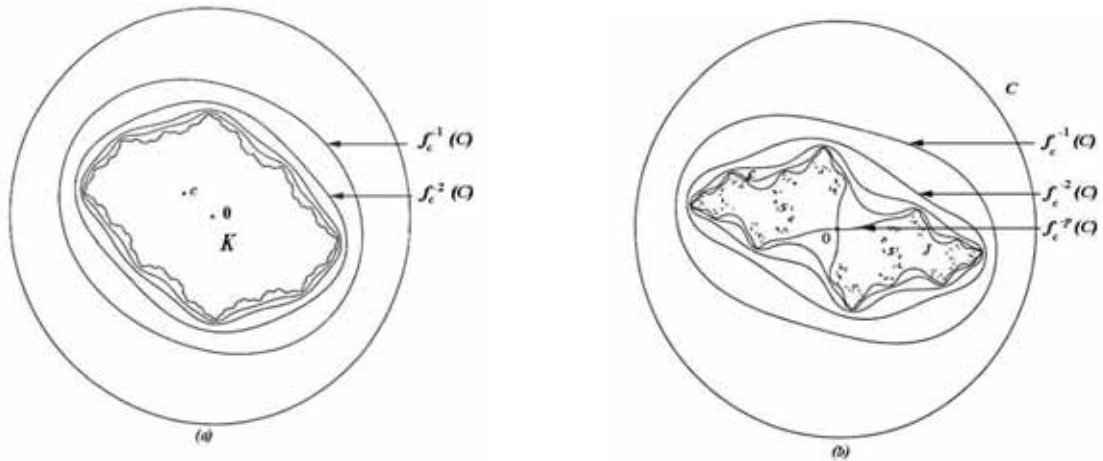


Fig. 3: Iterados inversos de um círculo C por f_c

Demonstração: Seja r um número real positivo tal que $|f_c(z)| > 2|z|$ se $|z| > r$, temos que $f_c^k(0) \rightarrow \infty$ se e somente se $\{f_c^k(0)\}$ é limitada. Logo temos a igualdade dos conjuntos acima.

a) Vamos mostrar primeiro que se $\{f_c^k(0)\}$ é limitada, então $J(f_c)$ é conexo. Seja C um círculo grande em \mathbb{C} tal que todos os pontos $\{f_c^k(0)\}$ estejam dentro de C , $f_c^{-1}(C)$ é interior a C e os pontos fora de C sejam iterados por f_c^k para ∞ . Se $c = f_c(0)$ está dentro de C , o lema 1.2.1(a) implica que $f_c^{-1}(C)$ é um laço contido no interior de C . Além disso, $f_c(c) = f_c^2(0)$ está no interior de C e f_c^{-1} aplica o exterior de C no exterior de $f_c^{-1}(C)$, logo c está dentro de $f_c^{-1}(C)$. Assim, $f_c^{-2}(C)$ é um laço contido no interior de $f_c^{-1}(C)$. Continuando desta maneira, temos que $\{f_c^{-k}(C)\}$ consiste de uma seqüência de laços, contendo cada um o seguinte no seu interior (figura 3(a)). Denote por K o conjunto fechado dos pontos que estão sobre ou dentro dos laços $f_c^{-k}(C)$ para todo k . Se $z \in \mathbb{C} \setminus K$, algum iterado $f_c^k(z)$ fica fora de C e portanto $f_c^k(z) \rightarrow \infty$. Assim,

$$A(\infty) = \{z : f_c^k(z) \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\} = \mathbb{C} \setminus K.$$

Pelo Lema 1.1.1, $J(f_c)$ é a fronteira de $\mathbb{C} \setminus K$ o qual é, de fato, igual a fronteira de K . Mas K é a intersecção de uma seqüência decrescente de conjuntos fechados simplesmente conexos. Logo, K é simplesmente conexo e por tanto tem fronteira conexa. Logo, $J(f_c)$ é conexo.

b) Seja c tal que $\{f_c^k(0)\}$ é ilimitado. Vamos mostrar que $J(f_c)$ não é conexo. Com efeito: seja C um círculo grande tal que $f_c^{-1}(C)$ esteja dentro de C , todos os pontos fora de C sejam iterados para ∞ e tal que para algum p , o ponto $f_c^{p-1}(c) = f_c^p(0) \in C$, onde $f_c^k(0)$ fica dentro ou fora de C segundo k seja maior ou menor que p . Assim como na primeira parte da prova, construímos uma série de laços $\{f_c^{-k}(C)\}$, contendo cada um o seguinte no seu interior (figura 3(b)). No entanto, o argumento falha quando obtemos o laço $f_c^{1-p}(C)$, pois $c \in f_c^{1-p}(C)$ e não aplica o lema 1.2.1(a). Mas, pelo Lema 1.2.1(b), temos que $E \equiv f_c^{-p}(C)$ é uma figura de oito dentro do laço $f_c^{1-p}(C)$, e f_c aplica o interior de cada metade de E no interior de $f_c^{1-p}(C)$. O conjunto de Julia, $J(f_c)$, deve estar no interior dos laços de E , pois qualquer outro ponto é iterado para infinito. Como $J(f_c)$ é invariante por f_c^{-1} , partes dele devem estar contidas em cada um dos laços de E . Assim, $J(f_c)$ é desconexo.

□

Observação 1.2.2 : *A razão de considerarmos iterados na origem é porque a origem é o ponto crítico de f_c , para cada c , i.é., o ponto tal que $f'_c(z) = 0$. Os pontos críticos são os pontos onde f_c falha em ser uma bijeção local -propriedade que foi fundamental para distinguir os dois casos na prova do Teorema 4.2.1.*

Capítulo 2

Dimensão de Hausdorff e Dimensão Fractal

Neste capítulo estudaremos o conceito de Dimensão de Hausdorff, devido a Felix Hausdorff (1919) o qual é baseado em um conceito prévio de medida.

2.1 Medida de Hausdorff

Seja F um subconjunto limitado não vazio de \mathbb{R}^n . O diâmetro de F é definido como $|F| = \sup\{|x - y| : x, y \in F\}$. Se $\{U_i\}$ é uma coleção enumerável (ou finita) de conjuntos de diâmetros no máximo, δ que cobre F , i.é., $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, tal que $0 < |U_i| \leq \delta$, para cada i , dizemos que $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F .

Seja F um subconjunto de \mathbb{R}^n e s um número não negativo. Para qualquer $\delta > 0$ definimos

$$\mathbb{H}_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta \text{-cobertura de } F \right\}.$$

Quando δ diminui, o valor de $\mathbb{H}_{\delta}^s(F)$ cresce, pois decresce o número de coberturas disponíveis. Assim, podemos escrever

$$\mathbb{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{H}_{\delta}^s(F).$$

Chamamos $\mathbb{H}^s(F)$ de **medida de Hausdorff s-dimensional** de F . O valor dessa medida pode ser finito ou infinito.

2.1.1 Propriedades da Medida de Hausdorff

A quantidade \mathbb{H}^s tem as propriedades que deve ter uma medida, se restringirmos aos subconjuntos de Borel de \mathbb{R}^n . Em particular,

- $\mathbb{H}^s(\emptyset) = 0$;
- Se $F_1 \subset F_2$ então $\mathbb{H}^s(F_1) \leq \mathbb{H}^s(F_2)$;
- Se $\{F_i\}$ é uma coleção (enumerável) de conjuntos de Borel de \mathbb{R}^n , tais que $F_i \cap F_j = \emptyset$ se $i \neq j$, então

$$\mathbb{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{H}^s(F_i).$$

Observação 2.1.1 : *A medida de Hausdorff generaliza as ideias de comprimento, área, volume, etc. Se F é um subconjunto de Borel de \mathbb{R}^n , então*

$$\mathbb{H}^n(F) = c_n \text{vol}^n(F)$$

onde a constante $c_n = 2^n(\frac{1}{2}n)!/\pi^{\frac{1}{2}n}$ é o volume de uma bola n -dimensional de diâmetro 1. Para subconjuntos de \mathbb{R}^n temos que $\mathbb{H}^0(F)$ é o número de pontos de F , $\mathbb{H}^1(F)$ é o comprimento de uma curva suave, F , $\mathbb{H}^2(F) = \frac{4}{\pi} \times \text{área}(F)$ se F é uma superfície suave e $\mathbb{H}^3(F) = \frac{3}{4\pi} \times \text{vol}(F)$; e $\mathbb{H}^m(F) = c_m \times \text{vol}(F)$ se F é uma subvariedade m -dimensional de \mathbb{R}^n .

Proposição 2.1.1 : *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$. Então*

$$\mathbb{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathbb{H}^s(F)$$

onde $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$.

Demonstração: Seja $\{U_i\}$ uma δ -cobertura de F . Então $\{\lambda U_i\}$ é uma $\lambda\delta$ -cobertura de λF . Logo:

$$\mathbb{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \leq \lambda^s \mathbb{H}_{\delta}^s(F)$$

pois isto é verdade para qualquer δ -cobertura $\{U_i\}$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$ temos que $\mathbb{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathbb{H}^s(F)$. Substituindo λ por $1/\lambda$ e F por λF temos $\mathbb{H}^s(\lambda F) \geq \lambda^s \mathbb{H}^s(F)$. Por tanto, $\mathbb{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathbb{H}^s(F)$. \square

Proposição 2.1.2 : *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (x, y \in F)$$

onde $c > 0$ e $\alpha > 0$ são constantes. Então para cada $s \geq 0$

$$\mathbb{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathbb{H}^s(F).$$

Demonstração: Seja $\{U_i\}$ uma δ -cobertura de F . Como $|f(F \cap U_i)| \leq c(|U_i|^\alpha)$, temos que $\{f(F \cap U_i)\}$ é uma ε -cobertura de $f(F)$, onde $\varepsilon = c\delta^\alpha$.

Assim, $\sum_{i=1}^{\infty} |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$, de modo que $\mathbb{H}_{\varepsilon}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathbb{H}_{\delta}^s(F)$. Quando $\delta \rightarrow 0$, então $\varepsilon \rightarrow 0$, e portanto $\mathbb{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathbb{H}^s(F)$. \square

Observação 2.1.2 : *Se f é uma função lipschitziana, i.é.*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \quad (x, y \in F)$$

então

$$\mathbb{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathbb{H}^s(F).$$

Se f é uma isometria, i.é

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|,$$

então

$$\mathbb{H}^s(f(F)) = \mathbb{H}^s(F).$$

Em particular, a medida de Hausdorff é invariante por translações (i.é. $\mathbb{H}^s(F + z) = \mathbb{H}^s(F)$, onde $F + z = \{x + z : x \in F\}$).

2.2 Dimensão de Hausdorff

Na definição da medida de Hausdorff, podemos tomar $\delta < 1$. Assim, para qualquer conjunto F , $\mathbb{H}_\delta^s(F)$ é decrescente em relação a s , logo, $\mathbb{H}^s(F)$ é também decrescente. Na verdade, temos que se $t > s$ e $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F , então

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

tomando ínfimo, $\mathbb{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathbb{H}_\delta^s(F)$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$ temos que se $\mathbb{H}^s(F) < \infty$, então $\mathbb{H}^t(F) = 0$, para $t > s$.

O gráfico a seguir mostra que existe um valor crítico de s no qual $\mathbb{H}^s(F)$ ‘pula’ de ∞ para 0. Este valor crítico é chamado *dimensão de Hausdorff de F* e denotado por $\dim_H F$.

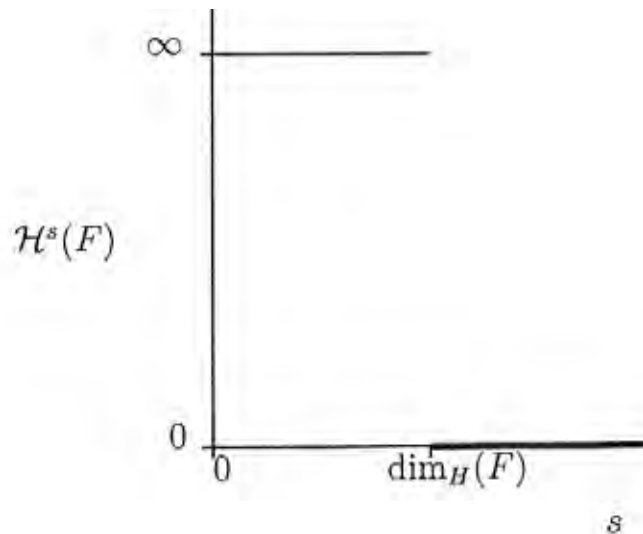


Fig. 4: Gráfico de $\mathbb{H}^s(F)$ versus s para um conjunto F

Formalmente,

$$\dim_H F = \inf\{s : \mathbb{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathbb{H}^s(F) = \infty\}$$

de modo que

$$\mathbb{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } s < \dim_H F \\ 0 & \text{se } s > \dim_H F \end{cases}$$

Se $s = \dim_H F$, então $\mathbb{H}^s(F)$ pode assumir o valor zero ou infinito, ou pode satisfazer $0 < \mathbb{H}^s(F) < \infty$.

Exemplo 2.2.1 : *Seja F um disco plano de raio 1 em \mathbb{R}^3 . Então $\mathbb{H}^1(F) = \text{comprimento}(F) = \infty$, $0 < \mathbb{H}^2(F) = \frac{1}{4}\pi \times \text{área}(F) < \infty$ e $\mathbb{H}^3(F) = \frac{4}{3}\pi \times \text{vol}(F) = 0$. Assim, $\dim_H F = 2$, e $\mathbb{H}^s(F) = \infty$ se $s < 2$ e $\mathbb{H}^s(F) = 0$ se $s > 2$.*

2.2.1 Propriedades da dimensão de Hausdorff

A dimensão de Hausdorff satisfaz as seguintes propriedades elementares:

- Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $\dim_H F = n$, pois F contém uma bola de volume n -dimensional positivo;
- Se F é uma subvariedade m -dimensional suave de \mathbb{R}^n , então $\dim_H F = m$. Em particular as curvas suaves têm dimensão 1 e as superfícies suaves têm dimensão 2;
- Se $E \subset F$, então $\dim_H E \leq \dim_H F$. Isto segue da propriedade da medida de Hausdorff, $\mathbb{H}^s(E) \leq \mathbb{H}^s(F)$;
- Se F_1, F_2, \dots é uma seqüência (enumerável) de conjuntos, então $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$. Com efeito, pela propriedade anterior, $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_j$, para cada j . Por outro lado, se $s > \dim_H F_i$ para todo i , então $\mathbb{H}^s(F_i) = 0$, de modo que $\mathbb{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = 0$ e temos a outra desigualdade;
- Se F é um conjunto enumerável, então $\dim_H F = 0$, pois se F_i é um conjunto unitário, então $\mathbb{H}^0(F_i) = 1$ e $\dim_H F_i = 0$, logo, pela propriedade anterior, $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$.

As propriedades da dimensão de Hausdorff a seguir são conseqüência das propriedades da medida de Hausdorff.

Proposição 2.2.1 : Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ e suponha que $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaz

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (x, y \in F).$$

Então $\dim_H f(F) \leq (1/\alpha)\dim_H F$.

Demonstração: Se $s > \dim_H F$, então pela proposição 2.1.2, $\mathbb{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathbb{H}^s(F) = 0$. Logo, $\dim_H f(F) \leq s/\alpha$ para todo $s > \dim_H F$. \square

Corolário 2.2.1

a) Se $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação de Lipschitz, então $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$.

b) Se $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação bi-Lipschitz, i.é.

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| \quad (x, y \in F)$$

onde $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, então $\dim_H f(F) = \dim_H F$.

Demonstração: A parte (a) segue da proposição 2.2.1 tomando $\alpha = 1$. Para mostrar a parte (b) aplicamos novamente a proposição 2.2.1 para f e $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$ e temos assim a igualdade. \square

Exemplo 2.2.2 : Seja F a poeira de Cantor construída do quadrado unitário como na figura 5. Em cada etapa da construção os quadrados são divididos em 16 quadrados de lado um quarto dos anteriores, dos quais retém-se o mesmo padrão de quatro quadrados. Então $1 \leq \mathbb{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$, e $\dim_H F = 1$.

Demonstração: Tomemos uma cobertura de F composta de 4^k quadrados de lado 4^{-k} e diâmetro $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$, em E_k , a k -ésima etapa da construção. Assim, temos que $\mathbb{H}_\delta^1(F) \leq 4^k 4^{-k}\sqrt{2}$. Quando $k \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$. Então $\mathbb{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$.

Por outro lado, seja $proj : F \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção ortogonal sobre o eixo x . Temos $|projx - projy| \leq |x - y|, x, y \in \mathbb{R}^2$, logo a projeção é uma aplicação de Lipschitz. Em virtude da construção de F , $projF$ é o intervalo unitário $[0, 1]$.

Assim, $1 = \text{comprimento}[0, 1] = \mathbb{H}^1([0, 1]) = \mathbb{H}^1(projF) \leq \mathbb{H}^1(F)$. \square

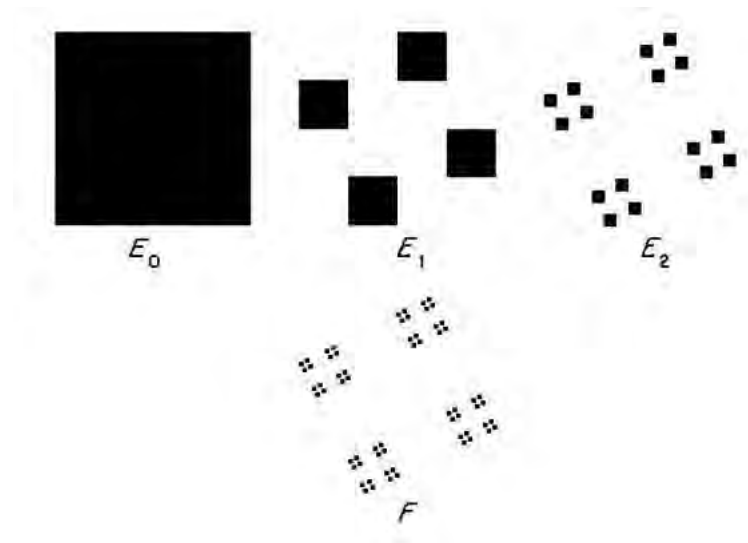


Fig. 5: Construção da poeira de Cantor

Exemplo 2.2.3 : Seja F o conjunto de Cantor. Então $\dim_{\mathbb{H}} F = s = \log 2 / \log 3$ e $\frac{1}{2} \leq \mathbb{H}^s(F) \leq 1$.

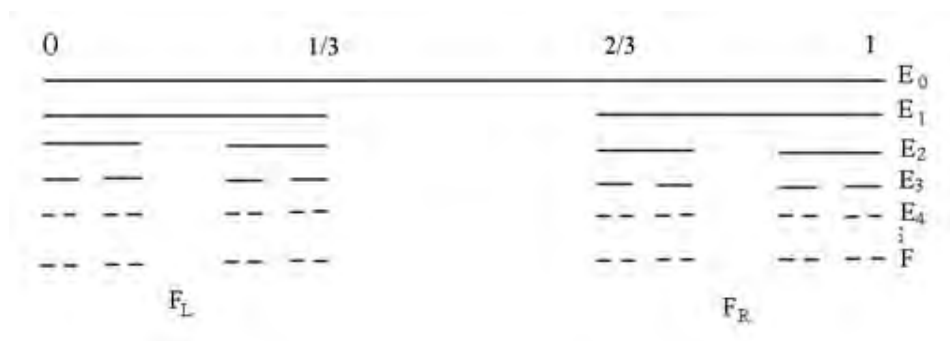


Fig. 6: O conjunto de Cantor

Demonstração:

Cálculo Heurístico. O conjunto de Cantor divide-se em uma parte esquerda $F_L = F \cap [0, \frac{1}{3}]$ e uma parte direita $F_R = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Temos $F = F_L \cup F_R$ e a união

é disjunta. Logo, para qualquer s

$$\mathbb{H}^s(F) = \mathbb{H}^s(F_L) + \mathbb{H}^s(F_R) = \frac{1}{3} \mathbb{H}^s(F) + \frac{1}{3} \mathbb{H}^s(F)$$

. Supondo que no valor crítico $s = \dim_H F$ temos $0 < \mathbb{H}^s(F) < \infty$. Dividindo por $\mathbb{H}^s(F)$, obtemos $1 = 2(\frac{1}{3})^s$ ou $s = \log 2 / \log 3$.

Cálculo Rigoroso. Chamamos os intervalos de comprimento 3^{-k} ($k = 0, 1, 2, \dots$) que formaram os conjuntos E_k na construção de F de intervalos básicos. Seja $\{U_i\}$ a cobertura de F formada pelos 2^k intervalos de E_k de comprimento 3^{-k} . Logo, $\mathbb{H}_{3^{-k}}^s(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = 2^k 3^{-ks} = 1$, se $s = \log 2 / \log 3$. Fazendo $k \rightarrow \infty$ temos $\mathbb{H}^s(F) \leq 1$.

Para mostrar que $\mathbb{H}^s(F) \geq \frac{1}{2}$, mostraremos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}$$

para qualquer cobertura $\{U_i\}$ de F . Podemos supor que os $\{U_i\}$ são intervalos para depois expandir eles ligeiramente e usar a compacidade de F para verificar a desigualdade acima quando $\{U_i\}$ é uma coleção finita de subintervalos fechados de $[0, 1]$. Para cada U_i , seja k o inteiro tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}.$$

Logo, U_i pode interceptar no máximo um intervalo básico de E_k pois a separação desses intervalos básicos é pelo menos 3^{-k} . Se $j \geq k$ então, por construção, U_i intercepta no máximo $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$ intervalos básicos de E_j , pela desigualdade acima. Se escolhermos j suficientemente grande de modo que $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$, para todo U_i , então, como os $\{U_i\}$ interceptam todos os 2^j intervalos básicos de comprimento 3^{-j} , contando intervalos, temos $2^j \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^j 3^s |U_i|^s$, e portanto, $\bigcup_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}$. \square

2.2.2 Definições Equivalentes de Dimensão de Hausdorff

Podemos tomar outra classe conjuntos que cobrem $F \subset \mathbb{R}^n$. Por exemplo, podemos tomar uma cobertura por bolas esféricas fazendo

$$\mathbb{B}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s : \{B_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \text{ por bolas} \right\}$$

obtemos uma medida $\mathbb{B}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{B}_\delta^s(F)$ e uma ‘dimensão’ na qual $\mathbb{B}^s(F)$ pula de ∞ para 0. Temos, $\mathbb{H}_\delta^s(F) \leq \mathbb{B}_\delta^s(F)$ pois qualquer δ -cobertura de F por bolas é uma cobertura permissível na definição de \mathbb{H}_δ^s . Além disso, se $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F , então, podemos obter outra cobertura $\{B_i\}$ tomando B_i uma bola contendo U_i de raio $|U_i| \leq \delta$, para cada i . Assim, $\bigcup_{i=1}^{\infty} |B_i|^s \leq \bigcup_{i=1}^{\infty} (2|U_i|)^s = 2^s \bigcup_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$, e tomando ínfimo, temos $\mathbb{B}_{2\delta}^s(F) \leq 2^s \mathbb{H}_\delta^s(F)$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$ segue que $\mathbb{H}^s(F) \leq \mathbb{B}^s(F) \leq 2^s \mathbb{H}^s(F)$. Isto implica que os valores de s nos quais \mathbb{H}^s e \mathbb{B}^s pulam de ∞ para 0 são iguais, de modo que as dimensões definidas pelas duas medidas são iguais.

Observação 2.2.1 *Podemos usar também δ -coberturas formadas por conjuntos abertos ou fechados para obtermos os mesmos valores da medida e dimensão de Hausdorff. Além disso, se F é compacto, então podemos expandir ligeiramente os conjuntos que cobrem F para conjuntos abertos e tomar uma subcobertura finita para obter o mesmo valor de $\mathbb{H}^s(F)$ considerando simplesmente δ -coberturas por coleções finitas de conjuntos.*

2.2.3 Definições mais finas de Dimensão

Seja $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função crescente e contínua, que chamaremos de *função dimensão*. Definimos

$$\mathbb{H}_\delta^h(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h(|U_i|) : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}$$

onde F é um subconjunto de \mathbb{R}^n . Isto conduz-nos a uma medida, $\mathbb{H}^h(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{H}_\delta^h(F)$. (Se $h(t) = t^s$ temos a definição usual da medida de Hausdorff s -dimensional.)

Observação 2.2.2 *Se h e g são funções dimensão tais que $h(t)/g(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$ então, para $\varepsilon > 0$, $h(|U_i|) \leq \varepsilon g(|U_i|)$. Logo $\mathbb{H}_\delta^h(F) \leq \varepsilon \mathbb{H}_\delta^g(F)$. Assim, temos que $\mathbb{H}^h(F) = 0$ sempre que $\mathbb{H}^g(F) < \infty$.*

2.3 Dimensão Fractal

Seja F um subconjunto limitado de \mathbb{R}^n e seja $N_\delta(F)$ o menor número de conjuntos de diâmetro, no máximo, δ que podem cobrir F . Definimos as dimensões fractais superior e inferior de F respectivamente por

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Se esses números são iguais, chamamos o valor comum de dimensão fractal de F

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

2.3.1 Definições Equivalentes de Dimensão Fractal

As dimensões fractais superior e inferior de um subconjunto F de \mathbb{R}^n estão dadas por

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

e a dimensão fractal de F está dada por F

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

(se o limite existir), onde $N_\delta(F)$ está definido por um dos seguintes casos:

- a) o menor número de bolas fechadas de raio δ que cobrem F ;

- b) o menor número de cubos de lado δ que cobrem F ;
- c) o menor número de cubos δ -malha que interceptam F ;
- d) o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo δ que cobrem F ;
- e) O maior número de bolas disjuntas de raio δ com centro em F .

A figura seguinte ilustra as diferentes definições da dimensão box-counting.

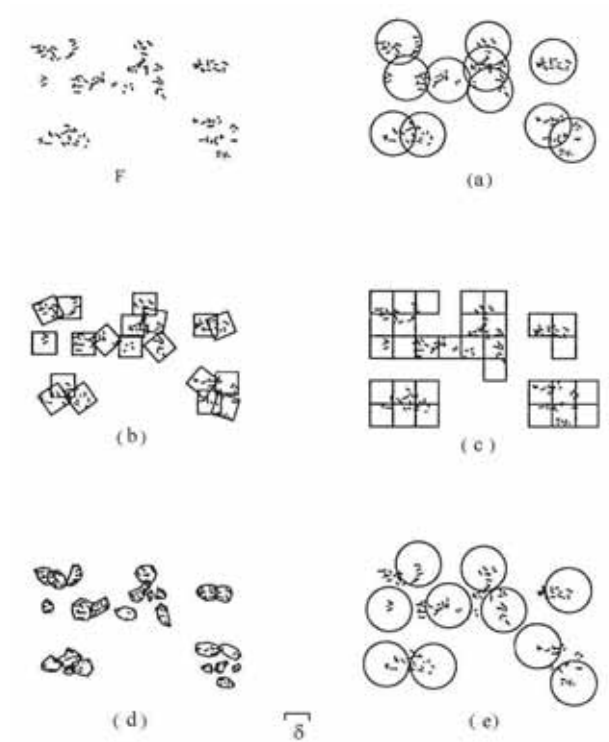


Fig. 7: definições equivalentes de Dimensão Fractal

Observação 2.3.1 Na definição de dimensão fractal, podemos considerar o limite quando $\delta \rightarrow 0$ usando alguma seqüência decrescente δ_k tal que $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ para alguma constante $0 < c < 1$; em particular para $\delta_k = c^k$. De fato: se $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$, então

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log(\delta_{k+1}/\delta_k)} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log c}$$

e portanto

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}.$$

A desigualdade oposta é imediata. O caso do limite inferior trabalha-se da mesma forma.

Definição 2.3.1 Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. Definimos o corpo δ -paralelo, F_δ , de F como o conjunto dos pontos a uma distância δ de F , i. é.

$$F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \delta \text{ para algum } y \in F\}.$$

Em \mathbb{R}^3 , se F consiste de um único ponto, então F_δ é uma bola e $\text{vol}(F_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$, Se F é um segmento de comprimento l então F_δ tem forma de 'salsicha' e $\text{vol}(F_\delta) \sim \pi l\delta^2$ e F for um conjunto plano de área a , então F_δ é essencialmente um engrossamento de F e $\text{vol}(F_\delta) = 2a\delta$. Em cada caso, $\text{vol}(F_\delta) = c\delta^{3-s}$ onde s é a dimensão de F , de modo que o expoente de δ é um indicativo da dimensão.

Proposição 2.3.1 : Seja F um subconjunto de \mathbb{R}^n . Então

$$\underline{\dim}_B F = n - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = n - \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

onde F_δ é corpo δ -paralelo de F .

Demonstração: Se F pode ser coberto por $N_\delta(F)$ bolas de raio δ , então F_δ pode ser coberto por as bolas concêntricas de raio 2δ . Logo

$$\text{vol}^n(F_\delta) \leq N_\delta(F)c_n(2\delta)^n$$

onde c_n é o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n . Tomando logaritmos,

$$\frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^n c_n + n \log \delta + \log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

e temos

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(f_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \underline{\dim}_B F.$$

Assim,

$$\underline{\dim}_B F \geq n - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}.$$

Obtemos uma desigualdade similar ao tomarmos limite superior,

$$\overline{\dim}_B F \geq n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(f_\delta)}{\log \delta}$$

Por outro lado, se existirem $N_\delta(F)$ bolas disjuntas de raio δ com centro em F , então

$$N_\delta(F) c_n (2\delta)^n \leq \text{vol}^n(F_\delta).$$

Tomando logaritmos temos as desigualdades opostas

$$\underline{\dim}_B F \leq n - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}.$$

$$\overline{\dim}_B F \leq n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(f_\delta)}{\log \delta}$$

□

Observação 2.3.2 : *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. Então $\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$. De fato: Se F é coberto por $N_\delta(F)$ conjuntos de diâmetro δ , então $\mathbb{H}_\delta^s \leq N_\delta(F) \delta^s$.*

Se $1 < \mathbb{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{H}_\delta^s$ então $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$ para δ suficientemente pequeno. Assim, $s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(F) / -\log \delta$ e portanto

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

Em geral não temos a igualdade.

Devido a que a dimensão fractal é determinada por coberturas de conjuntos de igual tamanho, esta pode ser mais fácil de calcular do que a dimensão de Hausdorff

Exemplo 2.3.1 *Seja F o conjunto de Cantor. Então $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \log 2 / \log 3$.*

Cálculo Considere a cobertura dada por os 2^k intervalos de E_k de comprimento 3^{-k} . Logo, $N_\delta(F) \leq 2^k$ se $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$. Tomando logaritmos e limite,

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Por outro lado, qualquer intervalo de comprimento δ tal que $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ intercepta no máximo um dos intervalos básicos de comprimento 3^{-k} usados na construção de F . Como existem 2^k desses intervalos, então precisamos de pelo menos 2^k intervalos de comprimento δ para cobrir F . Logo $N_\delta(F) \geq 2^k$ e por tanto $\underline{\dim}_B F \geq \log 2 / \log 3$.

Assim, para o conjunto de Cantor, $\dim_H F = \dim_B F$.

2.3.2 Propriedades da dimensão fractal

As seguintes propriedades elementares da dimensão fractal seguem das propriedades da dimensão de Hausdorff e verificam-se da mesma maneira.

- a) Uma subvariedade m -dimensional suave de \mathbb{R}^n tem $\dim_B F = m$.
- b) $\overline{\dim}_B$ e $\underline{\dim}_B$ são monótonas
- c) $\overline{\dim}_B$ é finitamente estável, i.é., $\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$, mas $\underline{\dim}_B$ não o é.
- d) $\underline{\dim}_B$ e $\overline{\dim}_B$ são Lipschitz invariantes. De fato, suponha que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ e que F poder ser coberto por $N_\delta(F)$ conjuntos de diâmetro no máximo δ . Então as $N_\delta(F)$ imagens desses conjuntos por f formam uma cobertura de F por conjuntos de diâmetro no máximo $c\delta$. Assim, $\dim_B f(F) \leq \dim_B F$. Se f for uma transformação bi-Lipschitz, então, igual que na dimensão de Hausdorff, $\dim_B f(F) = \dim_B F$

Vamos ver algumas desvantagens da dimensão fractal. A proposição a seguir é interessante mas tem conseqüências indesejáveis.

Proposição 2.3.2 : Seja \overline{F} o fecho de F . Então

$$\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F$$

e

$$\overline{\dim}_B \overline{F} = \overline{\dim}_B F$$

Demonstração: : Seja B_1, \dots, B_k uma coleção finita de bolas fechadas de raio δ . Se o conjunto fechado $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ contém F , então contém também \overline{F} . Logo o menor número de bolas fechadas de raio δ que cobrem F cobrem também o conjunto \overline{F} . Logo temos o resultado desejado. \square

Uma conseqüência imediata da proposição anterior é a seguinte: Se F for um subconjunto denso de uma região aberta de \mathbb{R}^n , então $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = n$. Se F for, por exemplo, o conjunto (enumerável) dos números racionais entre 0 e 1, então \overline{F} é o intervalo $[0, 1]$. Logo $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = 1$. Assim, os conjuntos enumeráveis podem ter dimensão fractal não zero. Além disso, a dimensão fractal de cada número racional, considerado como conjunto unitário, é zero, mas a união enumerável desses conjuntos unitários tem dimensão 1. Em conseqüência, não sempre é verdade que $\underline{\dim}_B \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_i \underline{\dim}_B F_i$.

Exemplo 2.3.2 :

$$F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \text{ é um conjunto compacto tal que } \underline{\dim}_B F = \frac{1}{2}.$$

Demonstração: Se $|U| = \delta < \frac{1}{2}$ e k é o inteiro satisfazendo $1/(k-1)k > \delta \geq 1/k(k+1)$, então U pode cobrir, no máximo, um dos pontos $\{1, \frac{1}{2}, \dots, 1/k\}$. Assim, precisamos de pelo menos k conjuntos de diâmetro δ para cobrir F . Logo

$$\frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)}.$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos $\underline{\dim}_B F \geq \frac{1}{2}$. Por outro lado, se $\frac{1}{2} > \delta > 0$, tomamos k tal que $1/(k-1)k > \delta \geq 1/k(k+1)$. Então $k+1$ intervalos de comprimento δ cobrem

$[0, 1/k]$, deixando $k - 1$ pontos de F , os quais podem ser cobertos por outros $k - 1$ intervalos. Assim,

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{\log k(k-1)}$$

e temos

$$\overline{\dim}_B F \leq \frac{1}{2}.$$

□

Capítulo 3

Funções Iteradas e Dimensão de Hausdorff

Definição 3.0.2 *Seja D um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n . Dizemos que uma aplicação $S : D \rightarrow D$ é uma contração em D se existe um número $c, 0 < c < 1$, e $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$ para todo $x, y \in D$. Se $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$ dizemos que S é uma similaridade.*

Definição 3.0.3 *Sejam S_1, S_2, \dots, S_m contrações. Dizemos que o conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é invariante pelas transformações S_i se*

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Exemplo 3.0.3 *Seja F o conjunto de Cantor. Sejam $S_1, S_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $S_1(x) = \frac{1}{3}x$; $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Então $F = S_1(F) \cup S_2(F)$. Assim, F é invariante pelas aplicações S_1 e S_2 as quais representam as auto-similaridades fundamentais do conjunto de Cantor.*

Definição 3.0.4 : *Seja $\mathcal{G} = \{K \subset D : K \text{ é compacto e não vazio}\}$. Dados $A, B \in \mathcal{G}$, define-se a distância de Hausdorff d sobre \mathcal{G} como*

$$d(A, B) := \min\{\delta \geq 0 : A \subset B + \delta\bar{B}, B \subset A + \delta\bar{B}\},$$

onde \bar{B} é a bola fechado de centro 0 e raio 1 .

A métrica de Hausdorff generaliza a métrica Euclideana: Se $A = \{p\}, B = \{q\}$, então $d(A, B) = d(p, q)$.

Observação 3.0.3

$$A + \delta\bar{B} = \bigcup_{p \in A} p + \delta\bar{B} = \bigcup_{p \in A} \bar{B}(p, \delta) = \{x \in D : d(x, A) \leq \delta\}.$$

Logo, a inclusão $B \subset A + \delta\bar{B}$ é equivalente a que B esteja contido no corpo δ -paralelo de A . Temos assim uma definição equivalente para a métrica de Hausdorff:

$$d(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \text{ e } B \subset A_\delta\}$$

Lema 3.0.1 $d : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma métrica, i.é.:

- a) $d(A, B) = d(B, A)$
- b) $d(A, B) = 0 \iff A = B$
- c) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

onde $A, B, C \in \mathcal{G}$

Demonstração: As partes a) e b) são consequência imediata da definição. Vamos mostrar a parte c). Suponhamos que $d(A, C) = \alpha$ e $d(C, B) = \beta$. Então, temos que $A \subset C + \alpha\bar{B}, C \subset B + \beta\bar{B}$. Por tanto $A \subset C + \alpha\bar{B} \subset B + \beta\bar{B} \subset B + (\alpha + \beta)\bar{B}$. Igualmente obtemos que $B \subset A + (\alpha + \beta)\bar{B}$. Temos assim que $d(A, B) \leq \alpha + \beta = d(A, C) + d(C, B)$.

□

Teorema 3.0.1 : Sejam S_1, \dots, S_m contrações em $D \subset \mathbb{R}^n$ tais que

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y| \quad (x, y \in D)$$

$c_i < 1$ para cada i . Então existe um único conjunto compacto não vazio F invariante pelas transformações S_i , i.é.

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Além disso, se definimos uma transformação S na classe \mathcal{G} de conjuntos compactos não vazios por

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$$

e escrevemos S^k para o k -ésimo iterado de S dado por $S^0(E) = E, S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$ para $k \geq 1$, então

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$$

para qualquer conjunto $E \in \mathcal{G}$ tal que $S_i(E) \subset E$ para cada i .

Demonstração: Note que os conjuntos de \mathcal{G} são transformados por S em outros conjuntos de \mathcal{G} . Seja $E \in \mathcal{G}$ tal que $S_i(E) \subset E$ para todo i ; por exemplo $D \cap B_r(0)$ para r suficientemente grande. Então $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$ de modo que $S^k(E)$ é uma seqüência decrescente de conjuntos compactos não vazios. Logo, a intersecção $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$ é compacta e não vazia. Como $S^k(E)$ é uma seqüência decrescente, temos que

$$S(F) = S\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)\right) = \bigcup_{i=1}^m S_i\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^m S_i(S^k(E)) = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E) = F.$$

Logo, F é invariante.

Vamos mostrar que o conjunto invariante é único. Sejam $A, B \in \mathcal{G}$, então

$$d(S(A), S(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B)),$$

pois se δ é tal que o corpo paralelo $(S_i(A))_\delta$ contém $S_i(B)$ para cada i , então $(\bigcup_{i=1}^m S_i(A))_\delta$ contém $\bigcup_{i=1}^m S_i(B)$. Assim

$$d(S(A), S(B)) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} c_i\right) d(A, B).$$

Segue que se $S(A) = A$ e $S(B) = B$, então $d(A, B) = 0$. Portanto $A = B$. \square

Observação 3.0.4 A seqüência de iterados $S^k(E)$ converge para F para qualquer conjunto inicial $E \in \mathcal{G}$, i.é. $d(S^k(E), F) \rightarrow 0$. De fato: pela desigualdade acima, temos, $d(S(E), F) = d(S(E), S(F)) \leq cd(E, F)$, de modo que $d(S^k(E), F) \leq c^k d(E, F)$, onde $c = \max_{1 \leq i \leq m} c_i < 1$.

Para cada k ,

$$S^k(E) = \bigcup_{J_k} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E) = \bigcup_{J_k} S_{i_1}(S_{i_2}(\dots(S_{i_k}(E))))$$

onde a união é sobre o conjunto J_k de todas as k -seqüências (i_1, \dots, i_k) tal que $1 \leq i_j \leq m$. Se $S_i(E) \subset E$ para cada i e x é um ponto de F , segue que existe uma seqüência (não necessariamente única) (i_1, i_2, \dots) tal que $x \in S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$ para todo k . Assim,

$$F = \bigcup \{x_{i_1, i_2, \dots}\}$$

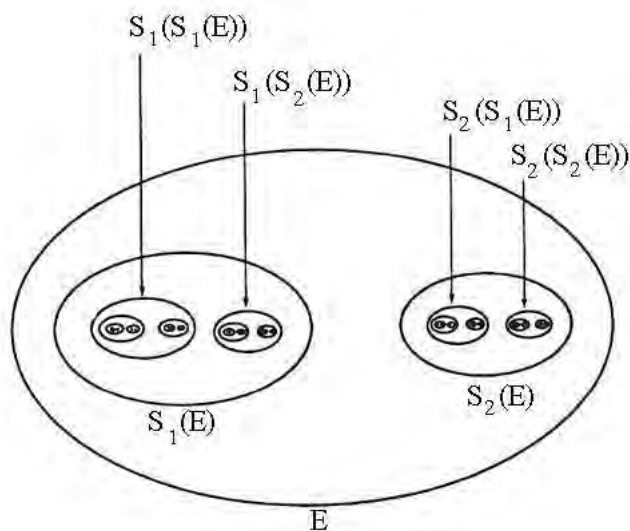


Fig. 8: Construção do conjunto invariante F pelas transformações S_1 e S_2

onde

$$\{x_{i_1, i_2, \dots}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E).$$

Esta expressão para $x_{i_1, i_2, \dots}$ independe de E sempre que $S_i(E)$ esteja contido em E , para todo i .

Exemplo 3.0.4 *Sejam $S_1(x) = \frac{1}{3}x$, $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ e F o conjunto de Cantor. Se $E = [0, 1]$ então $S^k(E) = E_k$, o conjunto dos 2^k intervalos básicos de comprimento 3^{-k} obtidos na k -ésima etapa da construção do conjunto de Cantor.*

3.1 Dimensões de conjuntos auto-similares

Uma das vantagens de usar funções iteradas é que a dimensão do conjunto invariante é relativamente mais fácil de calcular em termos das contrações definidas. Nesta seção discutimos o caso no qual $S_1, \dots, S_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são similaridades, i.é.

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n),$$

onde $0 < c_i < 1$ (c_i é chamado a proporção de S_i). Um conjunto invariante por este tipo de transformações é chamado de estritamente auto-similar. Vamos mostrar, sob certas condições, que um conjunto auto-similar F tem dimensão Hausdorff e box iguais ao valor de s satisfazendo

$$\sum_{i=1}^k c_i^s = 1$$

e além disso, que F tem \mathbb{H}^s -medida positiva e finita.

Definição 3.1.1 : Dizemos que as similaridades $S_i, i = 1, \dots, m$ satisfazem a condição do conjunto aberto se existe um conjunto aberto limitado não vazio V tal que

$$\bigcup_{i=1}^m S_i(V) \subset V$$

e a união é disjunta.

Teorema 3.1.1 : Suponha que as similaridades $S_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m$ com proporções $c_i (1 \leq i \leq m)$ satisfazem a condição do conjunto aberto. Se F é o conjunto invariante satisfazendo

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$$

então $\dim_H F = \dim_B F = s$, onde s está dado por

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

Além disso, para esse valor de $s, 0 < \mathbb{H}^s(F) < \infty$.

Demonstração: Seja s tal que $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$. Dado o conjunto A escrevemos $A_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$. Denotemos J_k o conjunto das k -seqüências (i_1, \dots, i_k) tal que $1 \leq i_j \leq m$. Segue, usando repetidamente a definição de F , que

$$F = \bigcup_{J_k} F_{i_1, \dots, i_k}.$$

Como a aplicação $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$ é uma similaridade com proporção $c_{i_1} \dots c_{i_k}$, então

$$\sum_{J_k} |F_{i_1, \dots, i_k}|^s = \sum_{J_k} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s |F|^s = \left(\sum_{i_1} c_{i_1}^s \right) \dots \left(\sum_{i_k} c_{i_k}^s \right) |F|^s = |F|^s$$

pela definição de s . Para qualquer $\delta > 0$, podemos escolher k tal que $|F_{i_1, \dots, i_k}| \leq (\max_i c_i)^k \leq \delta$, logo $\mathbb{H}_\delta^s(F) \leq |F|^s$ e portanto $\mathbb{H}^s(F) \leq |F|^s$.

Por outro lado, seja I o conjunto de todas as seqüências infinitas $I = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\}$ e seja $I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq m\}$ o ‘cilindro’ consistindo de aquelas seqüências em I com termos iniciais (i_1, \dots, i_k) . Vamos colocar uma distribuição de massa μ em I tal que $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s$. Como $(c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \dots c_{i_k} c_i)^s$, i.é. $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1, \dots, i_k, i})$, segue que μ é uma distribuição de massa em subconjuntos de I tal que $\mu(I) = 1$. Podemos transferir μ a uma distribuição de massa $\tilde{\mu}$ em F numa forma natural definindo $\tilde{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}$ para subconjuntos A de F . Verifica-se facilmente que $\tilde{\mu}(F) = 1$.

$\tilde{\mu}$ satisfaz o princípio de distribuição de massa, isto é, existe $q > 0$ e $\delta > 0$ tais que $\tilde{\mu}(U) \leq q|U|^s$ para todo conjunto U tal que $|U| \leq \delta$. Com efeito: Seja V o conjunto aberto da condição do conjunto aberto. Como $\bar{V} \supset S(\bar{V}) = \bigcup_{i=1}^m S_i(\bar{V})$, a seqüência decrescente de iterados $S^k(\bar{V})$ converge para F ; pois $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$. Em particular $\bar{V} \supset F$ e $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k} \supset F_{i_1, \dots, i_k}$ para cada seqüência infinita (i_1, \dots, i_k) . Seja B uma bola arbitrária de raio $r < 1$. Estimamos $\tilde{\mu}(B)$ considerando os conjuntos V_{i_1, \dots, i_k} com diâmetros comparáveis com o de B e com fechos que interceptam $F \cap B$.

Reduzimos cada seqüência infinita $(i_1, i_2, \dots) \in I$ logo após o primeiro termo i_k para o qual

$$\left(\min_i c_i \right) r \leq c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \leq r$$

e denotemos Q o conjunto finito de todas as seqüências (finitas) obtidas desta maneira. Então, para cada seqüência infinita $(i_1, i_2, \dots) \in I$ existe exatamente um valor de k tal que $(i_1, \dots, i_k) \in Q$. Como V_1, \dots, V_m são disjuntos, então também o são $V_{i_1, \dots, i_k}, 1, \dots, V_{i_1, \dots, i_k, m}$ para cada (i_1, \dots, i_k) . Usando isto em forma encaixada, segue que a coleção de conjuntos abertos $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$ é disjunta. Similarmente $F \subset \bigcup_Q F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_Q \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$.

Escolhemos a_1 e a_2 de modo que V contém uma bola de raio a_1 e está contido numa bola de raio a_2 . Então para $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ o conjunto V_{i_1, \dots, i_k} contém uma bola de raio $c_{i_1} \dots c_{i_k} a_1$ e portanto contém uma bola de raio $(\min_i c_i) a_1 r$, e está contido numa bola de raio $c_{i_1} \dots c_{i_k} a_2$ e logo está contido numa bola de raio $a_2 r$. Denotemos Q_1 as seqüências (i_1, \dots, i_k) em Q tal que B intercepta $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$. Pelo lema 3.1.1 existem no máximo $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$ seqüências em Q_1 . Então

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \cap B) \leq \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B\} \leq \mu\left\{\bigcup_{Q_1} I_{i_1, \dots, i_k}\right\}$$

pois, se $x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \subset \bigcup_{Q_1} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$, então existe um inteiro k tal que $(i_1, \dots, i_k) \in Q_1$. Assim

$$\tilde{\mu}(B) \leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{Q_1} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s q.$$

Como qualquer conjunto U está contido numa bola de raio $|U|$, temos que $\tilde{\mu}(U) \leq |U|^s q$, logo, se $\{U_i\}$ é uma cobertura de F , então $0 < \tilde{\mu}(F) \leq \tilde{\mu}(\bigcup_i U_i) \leq \sum_i \tilde{\mu}(U_i) \leq q \sum_i |U_i|^s$, logo $H^s(F) \geq \tilde{\mu}(F) q^{-1} = q^{-1}$ e $\dim_H F = s$.

Se Q é um conjunto arbitrário de seqüências finitas tal que para cada $(i_1, i_2, \dots) \in I$ existe exatamente um inteiro k e $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, temos, por indução da definição de s , que $\sum_Q (c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k})^s = 1$. Assim, se escolhemos Q como em (*), Q contém no máximo $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ seqüências. Para cada seqüência $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ temos $|\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}| = c_{i_1} \dots c_{i_k} |\bar{V}| \leq r |\bar{V}|$, logo podemos cobrir F com $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ conjuntos de diâmetro $r |\bar{V}|$ para cada $r < 1$. Segue da definição equivalente da dimensão box que $\overline{\dim}_B F \leq s$; como a dimensão de Hausdorff é também s , isto completa a prova

□

Lema 3.1.1 *Seja $\{V_i\}$ uma coleção de subconjuntos abertos disjuntos de \mathbb{R}^n tal que cada V_i contem uma bola de raio $a_1 r$ e está contido numa bola de raio $a_2 r$. Então qualquer bola B de raio r intercepta no máximo $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ dos fechos \bar{V}_i .*

Demonstração: Se \bar{V}_i encontra-se com B , então \bar{V}_i está contido na bola concêntrica com B de raio $(1 + 2a_2)r$. Suponha que q destes conjuntos \bar{V}_i interceptam B , então, somando os volumes das correspondentes bolas interiores de raio $a_1 r$, segue que $q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n$, obtendo a cota desejada para q . \square

Observação 3.1.1 : *Se não supormos a condição do conjunto aberto no teorema anterior, poderia-se mostrar ainda que $\dim_H F = \dim_B F$ embora esse valor pode ser menos do que s .*

Exemplo 3.1.1 (Triângulo de Sierpinski) : *O triângulo de Sierpinski, F , construe-se de um triângulo equilátero tirando triângulos equiláteros invertidos repetidamente (veja figura abaixo). Então $\dim_H F = \dim_B F = \log 3 / \log 2$.*

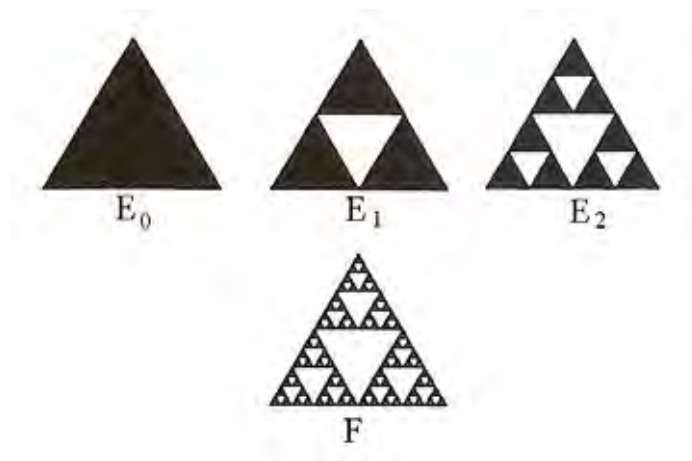


Fig. 9: O triângulo de Sierpinski

Cálculo: O triângulo F é invariante pelas similaridades $S_1, S_2, S_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dadas por

$$S_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \bar{x}, \quad S_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_3(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

com proporções $\frac{1}{2}$, que aplicam o triângulo E_0 nos triângulos de E_1 . Cumpre-se a condição do conjunto aberto, tomando V como o interior de E_0 . Assim, pelo teorema 3.1.1, $\dim_H F = \dim_B F = \log 3 / \log 2$, o qual é a solução de $\sum_{i=1}^3 (\frac{1}{2})^s = 1$.

3.2 Algumas Variantes

Os cálculos do Teorema 3.1.1 podem adaptar-se para estimar a dimensão do conjunto invariante F de uma coleção de contrações que não são similaridades.

Proposição 3.2.1 : *Sejam S_1, \dots, S_m contrações num subconjunto fechado D de \mathbb{R}^n tal que*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad (x, y \in D)$$

com $c_i < 1$ para cada i . Então $\dim_H F \leq s$ e $\overline{\dim}_B F \leq s$, onde $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$.

Demonstração: É consequência imediata do Teorema 3.1.1. □

Proposição 3.2.2 : *Sejam S_1, \dots, S_m contrações num conjunto fechado D de \mathbb{R}^n tal que*

$$b_i |x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \quad (x, y \in D)$$

e $0 < b_i < 1$ para cada i . Suponha que F é invariante pelas S_i ,

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F),$$

com a união disjunta. Então $\dim_H F \geq s$, onde

$$\sum_{i=1}^m b_i^s = 1.$$

Demonstração: Seja $d > 0$ a distância mínima entre qualquer par dos conjuntos compactos disjuntos $S_1(F), \dots, S_m(F)$, i.é. $d = \min_{i \neq j} \inf\{|x - y| : x \in S_i(F), y \in S_j(F)\}$. Seja $F_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$ e defina μ por $\mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s$. Como

$$\sum_{i=1}^m \mu(F_{i_1, \dots, i_k, i}) = \sum_{i=1}^m (b_{i_1} \dots b_{i_k} b_i)^s = (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s = \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F_{i_1, \dots, i_k, i}\right)$$

segue que μ é uma distribuição de massa em F tal que $\mu(F) = 1$.

Se $x \in F$, então existe uma única seqüência infinita i_1, i_2, \dots tal que $x \in F_{i_1, \dots, i_k}$ para cada k . Para $0 < r < d$ seja k o menor inteiro tal que

$$b_{i_1} \dots b_{i_k} d \leq r \leq b_{i_1} \dots b_{i_{k-1}} d.$$

Se i'_1, \dots, i'_k é distinto de i_1, \dots, i_k , os conjuntos F_{i_1, \dots, i_k} e $F_{i'_1, \dots, i'_k}$ são disjuntos e separados por uma distância de pelo menos $b_{i_1} \dots b_{i_{k-1}} d > r$, pois se j é o menor inteiro tal que $i_j \neq i'_j$ então $F_{i_j, \dots, i_k} \subset F_{i_j}$ e $F_{i'_j, \dots, i'_k} \subset F_{i'_j}$ estão separados por d , logo F_{i_1, \dots, i_k} e $F_{i'_1, \dots, i'_k}$ estão separados por pelo menos $b_{i_1} \dots b_{i_{j-1}} d$. Segue que $F \cap B_r(x) \subset F_{i_1, \dots, i_k}$, logo

$$\mu(F \cap B_r(x)) \leq \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s \leq d^{-s} r^s.$$

Se U intercepta F , então $U \subset B_r(x)$ para algum $x \in F$ com $r = |U|$. Assim, $\mu(U) \leq d^{-s} |U|^s$, logo pelo principio de distribuição de Massa, $\mathbb{H}^s(F) > 0$ e $\dim_H F \geq s$. \square

Exemplo 3.2.1 (O Conjunto de Cantor não linear) *Sejam $D = [\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}), (1+\sqrt{3})]$ e $S_1, S_2 : D \rightarrow D$ dadas por $S_1(x) = 1 + 1/x, S_2(x) = 2 + 1/x$. Então $0.44 < \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F < 0.66$ onde F é o conjunto invariante por S_1 e S_2 .*

Cálculo: Notamos que $S_1(D) = [\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}), \sqrt{3}]$ e $S_2(D) = [\frac{1}{2}(3+\sqrt{3}), 1+\sqrt{3}]$ logo, podemos usar as proposições 3.2.1 e 3.2.2 para estimar $\dim_H(F)$. Pelo Teorema do Valor Médio, se $x \neq y \in D$, então $(S_i(x) - S_i(y))/(x - y) = S'_i(c_i)$ para algum $c_i \in D, i = 1, 2$. Assim, para $i = 1, 2$.

$$\inf_{x \in D} |S'_i(x)| \leq \frac{|S_i(x) - S_i(y)|}{|x - y|} \leq \sup_{x \in D} |S'_i(x)|.$$

Como $S'_1(x) = S'_2(x) = -1/x^2$ segue que

$$\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})|x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \leq 2(2 - \sqrt{3})|x - y|$$

para $i = 1$ e $i = 2$. Pelas proposições 3.2.1 e 3.2.2 os limites superior e inferior para as dimensões estão dados pelas soluções de $2(\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}))^s = 1$ e $2(2(2 - \sqrt{3}))^s = 1$, os quais são $s = \log 2 / (\log 2(2 + \sqrt{3})) = 0.34$ e $s = \log 2 / (\log \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})) = 1.11$ respectivamente.

Para um subconjunto da reta real, um limite superior maior que um não é muito útil. Uma forma de obter uma melhor estimativa é a seguinte: F também é um conjunto invariante pelas quatro aplicações em $[0, 1]$

$$S_i \circ S_j = i + 1/(j + 1/x) = i + x/(jx + 1) \quad (i, j = 1, 2).$$

Calculando derivadas e usando o teorema do valor médio como antes, obtemos

$$(S_i \circ S_j)'(x) = (jx + 1)^{-2}$$

logo

$$(j(1 + \sqrt{3}) + 1)^{-2}|x - y| \leq |S_i \circ S_j(x) - S_i \circ S_j(y)| \leq (\frac{1}{2}j(1 + \sqrt{3}) + 1)^{-2}|x - y|.$$

Os limites superior e inferior para as dimensões estão dados pelas soluções de $2(2 + \sqrt{3})^{-2s} + 2(3 + 2\sqrt{3})^{-2s} = 1$ e $2(\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}))^{-2s} + 2(2 + \sqrt{3})^{-2s} = 1$, e obtemos $0.44 < \dim_H F < 0.66$.

Capítulo 4

Conjuntos de Julia de Funções Quadráticas

Nesta seção estudamos a variação da estrutura do Conjunto de Julia $J(f_c)$ ao variarmos o parâmetro c . Em particular, usaremos os resultados obtidos no capítulo 3 para estimar as dimensões fractal e de Hausdorff de $J(f_c)$ quando $|c|$ é grande.

Teorema 4.0.1 : *Suponha $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$. Então $J(f_c)$ é totalmente desconexo e é o conjunto invariante das contrações dadas pelos dois ramos de $f_c^{-1}(z)$ para z próximo de $J(f_c)$. Quando $|c|$ é grande*

$$\dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c) \sim 2 \log 2 / \log |c|.$$

Demonstração: Seja C o círculo $|z| = |c|$ e D o seu interior $|z| < |c|$. Então

$$f_c^{-1}(C) = \{(ce^{i\theta} - c)^{1/2} : 0 \leq \theta \leq 4\pi\}$$

é uma figura de oito com um ponto auto-intersecção em 0. (figura 10). Como $|c| > 2$, temos que $f_c^{-1}(C) \subset D$. O interior de cada um dos laços de $f_c^{-1}(C)$ é aplicado bijectivamente por f_c em D . Definamos $S_1, S_2 : D \rightarrow D$ como os ramos de $f_c^{-1}(z)$ dentro de cada laço. Então $S_1(D)$ e $S_2(D)$ são os interiores dos dois laços.

Seja $V = \{z : |z| < |2c|^{1/2}\}$. O raio de V é tal que \bar{V} contém $f_c^{-1}(C)$, logo $S_1(D), S_2(D) \subset V \subset D$. Assim, $S_1(V), S_2(V) \subset V$ e $S_1(\bar{V}), S_2(\bar{V})$ são disjuntos.

Temos

$$|S'_1(z)| = |S'_2(z)| = (f_c^{-1})'(z) = \frac{1}{2}(z - c)^{-1/2}.$$

Logo, se $z \in \bar{V}$,

$$\frac{1}{2}(|c| + |2c|^{1/2})^{-1/2} \leq |S'_i(z)| \leq \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2}. \quad (*)$$

O limite superior é menor que 1 se $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$ e temos que S_1 e S_2 são contrações no disco \bar{V} . Pelo Teorema 3.0.1 existe um único conjunto compacto não vazio invariante $F \subset \bar{V}$ tal que

$$S_1(F) \cup S_2(F) = F.$$

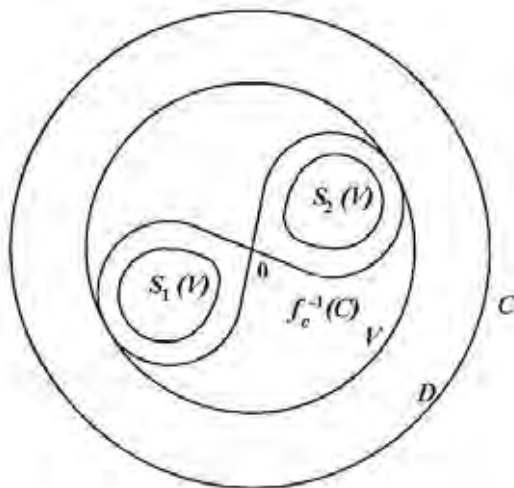


Fig. 10: Prova do Teorema 4.0.1

Como $S_1(\bar{V})$ e $S_2(\bar{V})$ são disjuntos, então $S_1(F)$ e $S_2(F)$ também são, logo F é totalmente desconexo.

Temos que $F = J(f_c)$. De fato, como \bar{V} contém um ponto fixo repulsor de f_c , i.é., um ponto de $J(f_c)$, então $J = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f_c^{-k}(z)} \subset \bar{V}$, pois $f_c^{-k}(\bar{V}) \subset \bar{V}$. Assim, J é um subconjunto compacto não vazio de \bar{V} que satisfaz $J = f_c^{-1}(J)$, i.é., $J = S_1(J) \cup S_2(J)$. Logo, $J = F$.

Para calcular a dimensão usamos (*) e o Teorema do Valor Médio e temos

$$\frac{1}{2}(|c| + |2c|^{1/2})^{-1/2} \leq \frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2}$$

se z_1 e z_2 são pontos distintos de \bar{V} . Pelas proposições 3.2.1 e 3.2.2 os limites superior e inferior para $\dim_H J(f_c)$ estão dados pelas soluções de $2(\frac{1}{2}(|c| \pm |2c|^{1/2})^{-1/2})^s = 1$. Quando $|c| \rightarrow \infty$, as duas soluções são equivalentes, então $\dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c) \sim 2 \log 2 / \log |c|$. \square

Teorema 4.0.2 : Se $|c| < \frac{1}{4}$, então $J(f_c)$ é uma curva fechada simples.

Demonstração: Seja C_0 a curva $|z| = \frac{1}{2}$. Temos que C_0 envolve c e também o ponto fixo atrator w de f_c (o produto dos pontos fixos de f_c é igual a c , logo um deles tem módulo $< \frac{1}{2}$, portanto ele é atrator). Então $f_c^{-1}(C_0)$ é um laço C_1 envolvendo C_0 . Podemos encher a região anular A_1 compreendida entre C_0 e C_1 por uma seqüência continua de curvas, que chamaremos de ‘trajetórias’ que deixam C_0 e chegam a C_1 perpendicularmente; (figura 11(a)). Para cada θ , seja $\psi_1(\theta)$ o ponto em C_1 no final da trajetória que deixa C_0 em $\psi_0(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta}$. A imagem inversa $f_c^{-1}(A_1)$ é uma região anular A_2 compreendida entre os laços $C_2 = f_c^{-1}(C_1)$ e C_1 tal que f_c aplica A_2 em A_1 na forma 2 - 1 (isto é, cada elemento em A_1 tem no máximo dois antecedentes). A imagem inversa das trajetórias ligando C_0 com C_1 fornecem uma família de trajetórias ligando C_1 com C_2 . Seja $\psi_2(\theta)$ o ponto em C_2 no final da trajetória que deixa C_1 em $\psi_1(\theta)$. Continuando desta maneira obtemos uma seqüência de laços C_k envolvendo cada um seu predecessor e obtemos também famílias de trajetórias ligando os pontos $\psi_k(\theta)$ em C_k com $\psi_{k+1}(\theta)$ em C_{k+1} , para cada k .

Quando $k \rightarrow \infty$ as curvas C_k aproximam-se à fronteira da bacia de atração de ω a qual é o conjunto de Julia $J(f_c)$. Como $|f'_c(z)| > 2\sqrt{\frac{1}{2} - |c|} > 1$, segue que f_c^{-1} contrai-se próximo de J (usando o teorema de valor médio). Assim, o comprimento da trajetória que liga $\psi_k(\theta)$ com $\psi_{k+1}(\theta)$ converge para 0 numa proporção geométrica quando $k \rightarrow \infty$. Logo, $\psi_k(\theta)$ converge uniformemente para uma função continua $\psi(\theta)$ quando $k \rightarrow \infty$, e J é a curva fechada dada por $\psi(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Vamos mostrar agora que ψ é uma curva simples. Suponha que $\psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$. Seja D a região limitada por C_0 e as duas trajetórias que ligam $\psi_0(\theta_1)$ e $\psi_0(\theta_2)$ a

esse ponto comum. A fronteira de D está limitada pelos iterados de f_c . Logo, pelo teorema do módulo máximo (o módulo de uma função analítica assume seu máximo no ponto fronteira da região), D fica limitado pela iteração de f . Pela proposição 1.1.5, o interior de D não pode conter pontos de J . Assim, não acontece a situação da figura 11(b) e portanto, $\psi(\theta) = \psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$ para todo θ entre θ_1 e θ_2 . Segue que $\psi(\theta)$ não tem ponto de auto-intersecção. \square

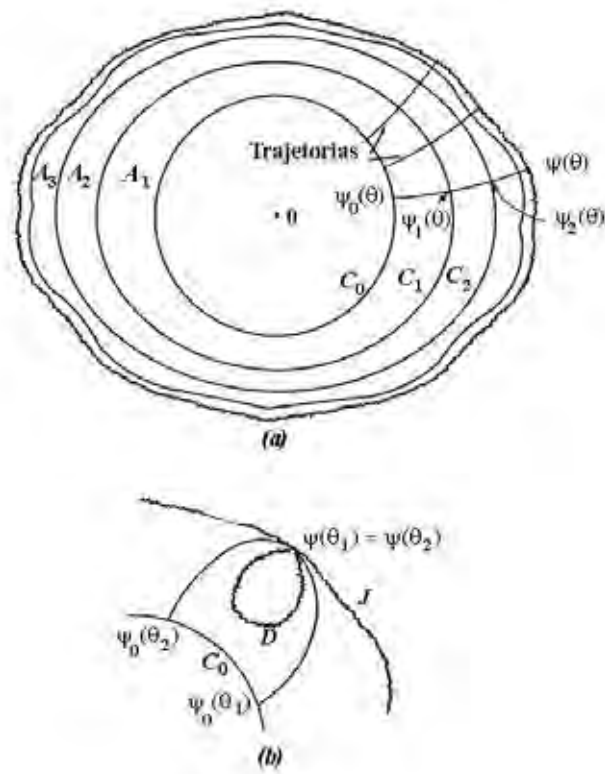
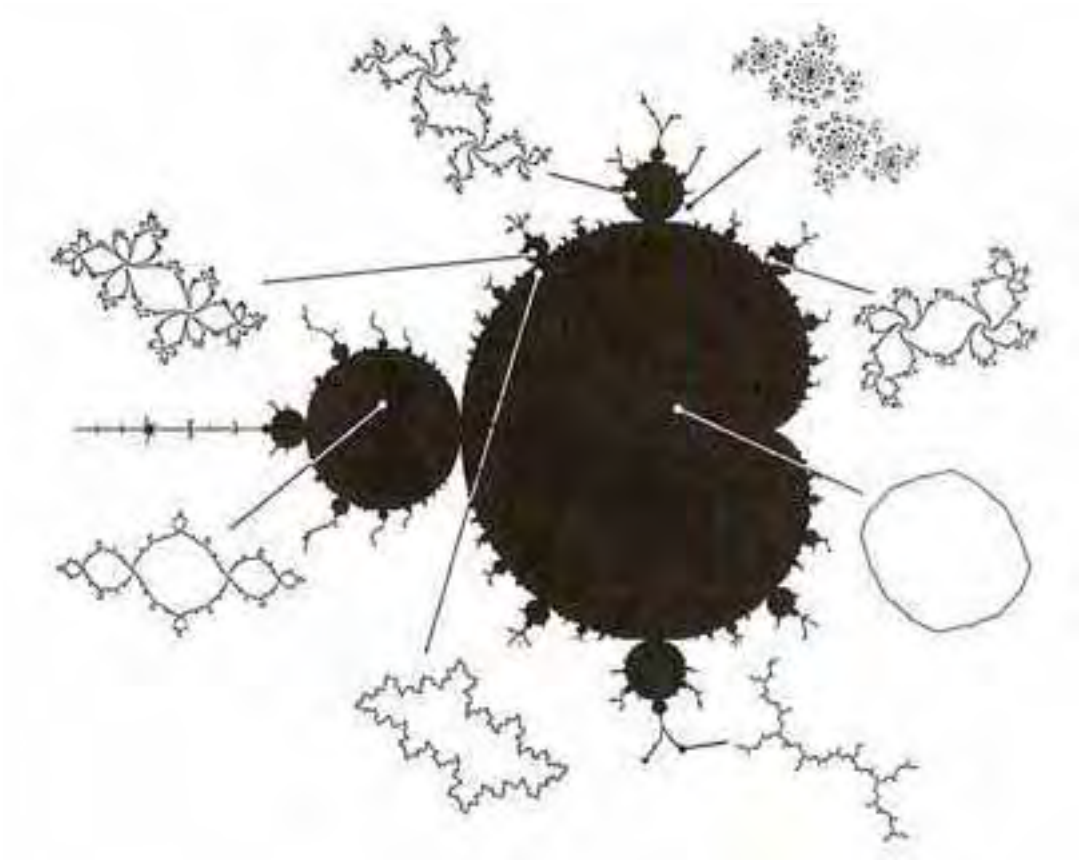


Fig. 11: Prova do Teorema 4.0.2

O gráfico a seguir mostra os diferentes conjuntos de Julia, para distintos pontos c em M .

Fig 12: Os conjuntos de Julia, $J(f_c)$, para c em distintos pontos no conjunto de Mandelbrot



4.1 Propriedades do conjunto de Mandelbrot

Vimos na seção anterior que o conjunto de Mandelbrot é o conjunto dos parâmetros c tal que $|f_c^m(0)| = 2 + \delta$ é limitado. Assim, $c \in M$ se e somente se 0 não pertence a bacia de atração do ponto fixo superatrator ∞ .

Teorema 4.1.1 *O conjunto de Mandelbrot M é um subconjunto fechado, simplesmente conexo do disco $\{|c| \leq 2\}$, e intercepta o eixo real no intervalo $[-2, 1/4]$. Além disso, M consiste exatamente dos pontos c tais que $|f_c^n(0)| \leq 2$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Seja $c \in M$ e suponha que $|c| > 2$, então, por indução temos

$$|f_c^n(0)| \geq [|c|(|c| - 1)]^{2^{n-1}}, \quad n \geq 1$$

logo, $|f_c^n(0)| \rightarrow \infty$ e portanto $c \notin M$. Assim, $|c| \leq 2$ para $c \in M$.

Vamos mostrar agora que $M = \{c : |f_c^n(0)| \leq 2\}$. Seja $c \in M$ e suponha $|f_c^n(0)| = 2 + \delta$ para algum $m \geq 1$. Se $|c| = |f_c(0)| > 2$, então $c \notin M$. Se $|c| \leq 2$, então $|f_c^{m+1}(0)| = |f_c(f_c^m(0))| = |(2 + \delta)^2 + c| \geq (2 + \delta)^2 - 2 \geq 2 + 4\delta$. Logo, por indução, obtemos $|f_c^{m+k}(0)| \geq 2 + 4^k\delta \rightarrow \infty$, e novamente $c \notin M$. A outra inclusão é imediata. Além disso, M é um conjunto fechado, pois $\{c : |f_c^n(0)| \leq 2\}$ é fechado. Finalmente, usando o princípio do máximo, temos que $\mathbb{C} \setminus M$ não tem componentes limitadas, logo $\mathbb{C} \setminus M$ é conexo e portanto M é simplesmente conexo. \square

Agora vamos enunciar e provar o Teorema de Douady-Hubard.

Teorema 4.1.2 (Douady-Hubbard) *O conjunto de Mandelbrot, M , é conexo*

Lema 4.1.1 (Boettcher-Fatou) *Suponha que $f(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + a_{k-2}z^{k-2} + \dots$, com $k \geq 2$, tem um ponto superatratador em $z = \infty$. Então existe uma aplicação conforme $\zeta = \varphi(z)$ de uma vizinhança do infinito numa vizinhança do infinito que conjuga $f(z)$ com ζ^k . Esta aplicação de conjugação é única, exceto a multiplicação por uma $(p-1)$ -ésima raiz da unidade.*

Demonstração: Se $|z|$ for grande, existe uma constante $C > 1$ tal que $|f(z)| \geq C|z|^k$. Por indução, para $k \geq 2$, temos que

$$|f^n(z)| \geq (C|z|)^{k^n}, \quad |z| \geq \delta,$$

logo, $f^n(z) \rightarrow \infty$ super-exponencialmente.

Queremos achar uma aplicação de conjugação $\varphi(z) = z + \dots$ tal que $\varphi(f(z)) = \varphi(z)^k$, ou equivalentemente, $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(\zeta) = \zeta^k$. Defina

$$\varphi_n(z) = f^n(z)^{k^{-n}} = (z^{k^n} + \dots)^{k^{-n}} = z(1 + \dots)^{k^{-n}},$$

a qual é bem definida numa vizinhança do infinito. Temos que

$$\varphi_{n-1} \circ f = (f^{n-1} \circ f)^{k^{-n+1}} = \varphi_n^k,$$

logo, se $\varphi_n \rightarrow \varphi$ então φ satisfaz $\varphi \circ f = \varphi^k$. Vamos mostrar que a seqüência $\{\varphi_n\}$ converge. Note que

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}(z) &= \left(\frac{\varphi_1 \circ f^n}{f^n} \right)^{k^{-n}}(z) = (1 + \mathcal{O}(|f^n(z)|^{-1}))^{k^{-n}} = 1 + \mathcal{O}(k^{-n})\mathcal{O}((C|z|^{k^n})^{k^n}) = \\ &= 1 + \mathcal{O}(k^{-n}) \end{aligned}$$

se $|z| > 1/k$. Assim, o produto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$$

converge uniformemente para $|z| > 1/C$, e isto implica que $\{\varphi_n\}$ converge.

Para mostrar a unicidade é suficiente provar que qualquer conjugação de $f(z) = az^k$ a si mesma é única exceto a multiplicação por uma $(k-1)$ -ésima raiz da unidade. Suponha que $\varphi(z) = a_1z + a_0 + a_{-1}z^{-1} + \dots$ é uma conjugação. Então $\varphi(az^k) = a\varphi(z)^k$, isto é,

$$a_1az^k + a_0 + a_{-1}a^{-1}z^{-k} + \dots = a(a_1z + a_0 + a_{-1}z^{-1} + \dots)^k.$$

Logo $a_m a^m = a_m^k a$, $a \neq 0$ isto implica $a_m = 0$, $m \leq 2$. Portanto, $a_1 a = a_1^k a$ e assim, $1 = a_1^{k-1}$. Logo, $\varphi(z) = a_1 z$. \square

Definição 4.1.1 *Uma função continua $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **função de Green** potencial teórica de um conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, se*

- a) G é uma função harmônica em $\mathbb{C} \setminus K$;
- b) $G(z) = 0$ para $z \in K$
- c) $G(z) - \log(z)$ é limitada perto de $z = \infty$.

Definição 4.1.2 *Definimos o conjunto de Julia cheio de f e denotamos por \mathcal{K} como a união do conjunto de Julia, $J(f)$, e as componentes limitadas do conjunto de Fatou, \mathcal{F} . Assim, $z \in \mathcal{K}$ se e somente se os iterados $f^n(z)$ são limitados.*

O Teorema de Boettcher-Fatou garante a existência da função de conjugação φ_c para $f_c(z) = z^2 + c$ numa vizinhança do infinito, $U_c = \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(0)}$, para algum r . Neste caso, a equação funcional

$$\varphi_c(f_c(z)) = \varphi_c(z)^2$$

é unicamente determinada e tem a forma $\varphi_c(z) = z + o(1)$ em ∞ .

A equação funcional para φ_c permite-nos estender $\log|\varphi_c(z)|$ de forma harmônica para $A_c(\infty)$, a bacia de atração de ∞ , onde coincide com a função de Green $G_c(z)$ de \mathcal{K}_c para $A_c(\infty)$ com polo em ∞ . Na verdade, definimos

$$G_c(z) = \log|\varphi_c(z)|.$$

Esta função é harmônica em U_c e crescente como $\log|z|$, pois pelo Teorema de Boettcher-Fatou satisfaz $|f_c^n(z)| \geq K|z|^{2^n}$ para alguma constante K e assim

$$G_c(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log|f_c^n(z)|.$$

Embora G_c esteja definida só em U_c , existe uma única extensão contínua para \mathbb{C} e satisfaz

$$G_c(z) = G_c(f_c(z))/2.$$

Proposição 4.1.1 *A aplicação $(c, z) \rightarrow \varphi_c(z)$ é analítica.*

Demonstração: Pelo teorema de Boettcher-Fatou, as aplicações $(c, z) \mapsto \varphi_n(z)$ são analíticas e o produto infinito converge absolutamente e uniformemente numa vizinhança U_c de infinito. \square

Teorema 4.1.3 *Para todo $A > 0$, existe $\alpha = \alpha(A) > 0$ tal que a função de Green G_c é uniformemente α -Hölder contínua para $|c| \leq A$.*

Demonstração: Suponha $A \geq 10$. Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_c$ e seja $\delta(z) = \text{dist}(z, \mathcal{K}_c)$. Seja $z_0 \in \mathcal{K}_c$ o ponto mais próximo a z e seja S o segmento de reta de z_0 até z . Tome $N = N(z)$ que satisfaz $|f^n(w)| < A$, para todo $w \in S$ e todo $n < N$, enquanto $|f^N(z_1)| \geq A$, para algum $z_1 \in S$. Usando a regra da cadeia, temos

$$|(f^n)'(w)| = |f'(f^{n-1}(w))| |(f^{n-1})'(w)| = |2f^{n-1}(w)| |2f^{n-2}(w)| \dots |2f(w)| |2w| \leq (2A)^n.$$

Também. $|f^n(z_0)| < 2\sqrt{A}$ para todo n pois caso contrário os iterados vão para ∞ . Usando o Teorema do Valor Médio

$$|f^n(z_1)| \leq 2\sqrt{A} + 2^N A^N \delta(z_1).$$

Mas $|f^N(z_1)| \geq A$, logo $2^N A^N \delta(z_1) \geq 1$ e $2^N A^N \delta(z) \geq 1$. Para $\alpha = \log 2 / (\log 2 + \log A)$ temos $\delta(z)^\alpha > 2^{-N}$, de modo que

$$G_c(z) = G(f^N(c))2^{-N} \leq M\delta(z)^\alpha,$$

onde M depende só de A .

Considere dois pontos z_1 e z_2 e suponha que $\delta(z_1) \geq \delta(z_2)$. Queremos mostrar que

$$|G(z_1) - G(z_2)| \leq K|z_1 - z_2|^\alpha.$$

Se $|z_1 - z_2| > \frac{1}{2}\delta(z_1)$ temos $G(z_1) \leq M\delta(z_1)^\alpha < 2M|z_1 - z_2|^\alpha$ e $G(z_2) \leq M\delta(z_2)^\alpha \leq M\delta(z_1)^\alpha < 2M|z_1 - z_2|^\alpha$. Logo

$$|G(z_1) - G(z_2)| \leq |G(z_1)| + |G(z_2)| \leq 4M|z_1 - z_2|^\alpha.$$

Se $|z_1 - z_2| \leq \frac{1}{2}\delta(z_1)$, usamos o fato de $G(z)$ ser uma função harmônica positiva no disco $\Delta(z_1, \delta(z_1))$ e concluímos

$$|G(z_1) - G(z_2)| \leq K_0 M \delta(z_1)^\alpha |z_1 - z_2| / \delta(z_1) \leq K |z_1 - z_2|^\alpha.$$

□

Teorema 4.1.4 *Se $c_n \rightarrow c$, então as correspondentes funções de Green, G_{c_n} , convergem uniformemente em \mathbb{C} para $G_c(z)$. Assim, $G_c(z)$ é contínua em c e z .*

Demonstração: Pelo teorema anterior, temos que a seqüência de funções G_{c_n} é equicontínua em conjuntos compactos. Seja H uma função limite em compactos de uma subseqüência. Então H é contínua e harmônica no conjunto $\{H > 0\}$. Pelo princípio do máximo, não existem componente limitadas do conjunto $\{H > 0\}$ senão

só uma componente ilimitada. Já que as funções de conjugação φ_c dependem analiticamente de c , $G_{c_n} = \log|\varphi_{c_n}(z)|$ converge uniformemente para $G_c(z) = \log|\varphi_c(z)|$ para $|z|$ grande. Segue que $H = G_c$ em $A_c(\infty)$, e portanto em toda parte. Como o limite H é único, temos a convergência uniforme da seqüência original. \square

Demonstração do Teorema de Douady-Hubbard: Seja

$$\begin{aligned} \Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus M &\rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} \\ c &\mapsto \Phi(c) = \varphi_c(c) \end{aligned}$$

onde $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é a esfera de Riemann e $\overline{D} = \{|z| \leq 1\}$ é o disco unitário fechado. Esta função é bem definida e vamos mostrar que é um difeomorfismo analítico. Isto implica que o complementar de M é simplesmente conexo em $\overline{\mathbb{C}}$ e portanto, M é conexo. Com efeito:

- a) Φ é analítica. Isto segue da proposição 4.1.1.
- b) Temos que $\log|\Phi(c)| = G_c(c) = 2G_c(0)$. Pelo teorema 4.1.4, $G_{c_n}(c_n) \rightarrow 0$ quando $d(c, M) \rightarrow 0$ e em conseqüência $|\Phi(c)| \rightarrow 1$ quando $c \rightarrow M$.
- c) A aplicação Φ é própria, isto é, a imagem inversa de um conjunto compacto é um conjunto compacto. De fato: seja $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$. Os dois conjuntos compactos \overline{D} e K têm distância positiva. Suponha que $\Phi^{-1}(K)$ não é compacto. Então, existe uma seqüência $c_n \in \Phi^{-1}(K)$ tal que $c_n \rightarrow c_0 \in M$ e portanto $|\Phi(c_n)| \rightarrow 1$. Isto não é possível pois $\Phi(c_n) \in K$ é limitada longe de \overline{D} . Logo, a função Φ é própria.
- d) A aplicação Φ é aberta. Isto segue do fato de Φ ser analítica.
- e) A aplicação Φ é fechada. Toda aplicação contínua própria $\Phi : X \rightarrow Y$ entre dois espaços métricos localmente compactos X, Y tem esta propriedade. De fato: Seja $A \subset X$ um conjunto fechado e tome uma seqüência $\Phi(a_n)$ em $\Phi(A)$ que converge para $b \in Y$. Já que Y é localmente compacto, podemos tomar uma vizinhança compacta K de b . Então $\Phi^{-1}(K \cap \overline{\Phi(A)})$ é compacto e contém

quase todos os a_n . A seqüência a_n contem portanto um ponto de acumulação $a \in X$. Pela continuidade temos $\Phi(a_n) \rightarrow \Phi(a) = b$ para uma subseqüência, de modo que $b \in \Phi(K)$. Portanto, $\Phi(K)$ é fechado.

- f) Φ é sobrejetiva. A imagem de $\Phi(\overline{\mathbb{C}} \setminus M)$ é um subconjunto aberto de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ pois Φ é uma aplicação aberta. A imagem da fronteira de M é um subconjunto fechado de $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ que coincide com a fronteira de D pois a função de Green cumpre $G_c(c) \rightarrow 0$ quando $c \rightarrow M$.
- g) Φ é injetora. Já que a função Φ é própria, a imagem inversa $\Phi^{-1}(s)$ de um ponto s é finita. Existe portanto uma curva Γ que rodeia todos os pontos de $\Phi^{-1}(s)$. Denotemos por $\sharp A$ o número de elementos de A . Pelo **princípio do argumento**, temos

$$\sharp(\Phi^{-1}(s)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z) - s} dz$$

e este número é localmente constante. Dado $M > 0$, podemos achar uma curva Γ que funciona simultaneamente para todos os $|s| \leq M$. Como Φ é sobrejetiva e $\sharp(\Phi^{-1}(\infty)) = 1$, temos que $\sharp(\Phi^{-1}(s)) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ e assim, Φ é injetiva.

- h) A aplicação Φ^{-1} existe em $\mathbb{C} \setminus D$ e é analítica, pois Φ é injetiva, diferenciável e aberta.

□

Apêndice

Neste apêndice vamos enunciar e provar o Teorema de Montel. Este teorema está referido a famílias normais no espaço das funções analíticas. Resumidamente, o teorema afirma que se uma família de funções analíticas não assume os valores 0 e 1, então ela é normal.

4.1.1 O espaço das funções contínuas $\mathcal{C}(G, \Omega)$

Definição 4.1.3 *Seja G um aberto em \mathbb{C} e (Ω, d) um espaço métrico completo. Definimos $\mathcal{C}(G, \Omega)$ o conjunto de todas as funções contínuas de G em Ω .*

Se $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, onde cada K_n é um compacto e $K_n \subset \text{int}K_{n+1}$. Definimos

$$\rho_n(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K_n\}$$

para toda função f e g em $\mathcal{C}(G, \Omega)$. Definimos também

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)};$$

temos que $t(1+t)^{-1} \leq 1$ para todo $t \geq 0$, então a serie anterior está dominada por $\sum (\frac{1}{2})^n$ e portanto converge.

O seguinte lema mostra que ρ é uma métrica para $\mathcal{C}(G, \Omega)$.

Lema 4.1.2 : *Se (S, d) é um espaço métrico, então*

$$\mu(s, t) = \frac{d(s, t)}{1 + d(s, t)}$$

é também uma métrica em (S, d)

Proposição 4.1.2 $(\mathcal{C}(G, \Omega), \rho)$ é um espaço métrico.

Demonstração: É claro que $\rho(f, g) = \rho(g, f)$. Também, como cada ρ_n satisfaz a desigualdade triangular, pelo lema anterior temos que ρ satisfaz a desigualdade triangular. Além disso, temos que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, logo $f = g$ sempre que $\rho(f, g) = 0$.
□

Lema 4.1.3 Seja ρ a métrica definida anteriormente. Dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ e um compacto $K \subset G$ tal que para toda f e g em $\mathcal{C}(G, \Omega)$,

$$\sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta \Rightarrow \rho(f, g) < \varepsilon.$$

Reciprocamente, dados $\delta > 0$ e um compacto K , existe um $\varepsilon > 0$ tal que para f e g em $\mathcal{C}(G, \Omega)$,

$$\rho(f, g) < \varepsilon \Rightarrow \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta.$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ fixo e p um inteiro positivo tal que $\sum_{n=p+1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{2}\varepsilon$ e denote $K = K_p$. Escolhamos $\delta > 0$ tal que $0 \leq t \leq \delta$ implique $\frac{t}{1+t} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Suponha que f e g em $\mathcal{C}(G, \Omega)$ satisfazem $\sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta$. Como $K_n \subset K_p$ para $1 \leq n \leq p$, $\rho_n(f, g) < \delta$ para $1 \leq n \leq p$. Assim, temos

$$\frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

para $1 \leq n \leq p$. Portanto

$$\rho(f, g) < \sum_{n=1}^p (\frac{1}{2})^n (\frac{1}{2}\varepsilon) + \sum_{n=p+1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n < \varepsilon$$

Sejam agora K e δ dados. Como $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{int}K_n$ e K é compacto, existe um inteiro $p \geq 1$ tal que $K \subset K_p$; isto implica

$$\rho_p(f, g) \geq \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\}.$$

Escolhamos $\varepsilon > 0$ de modo que $0 \leq s \leq 2^p\varepsilon$ implique $\frac{s}{1-s} < \delta$; então $\frac{t}{1+t} < 2^p\varepsilon$ implica $t < \delta$. Logo, se $\rho(f, g) < \varepsilon$, então $\frac{\rho_p(f, g)}{1 + \rho_p(f, g)} < 2^p\varepsilon$ e temos $\rho_p(f, g) < \delta$. □

Vamos à demonstração do Teorema de Perron Frobenius.

Proposição 4.1.3

a) Um conjunto $\mathcal{O} \subset (\mathcal{C}(G, \Omega), \rho)$ é aberto se e somente se para cada f em \mathcal{O} existe um compacto K e um $\delta > 0$ tal que

$$\mathcal{O} \supset \{g : d(f(z), g(z)) < \delta, z \in K\}$$

b) Uma seqüência $\{f_n\}$ em $(\mathcal{C}(G, \Omega), \rho)$ converge para f se e somente se $\{f_n\}$ converge para f uniformemente em todo subconjunto compacto de G .

Demonstração: Se \mathcal{O} é aberto e $f \in \mathcal{O}$, então para algum $\epsilon > 0$, $\mathcal{O} \supset \{g : \rho(f, g) < \epsilon\}$. Pela primeira parte do lema anterior, existe um $\delta > 0$ e um compacto K tal que \mathcal{O} cumpre a condição requerida. Reciprocamente, se \mathcal{O} tem a propriedade estabelecida e $f \in \mathcal{O}$, então pela segunda parte do lema anterior, temos um $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{O} \supset \{g : \rho(f, g) < \epsilon\}$; isto é \mathcal{O} é aberto. \square

Proposição 4.1.4 Um conjunto \mathcal{F} é normal se e somente se tem fecho compacto.

Proposição 4.1.5 um conjunto \mathcal{F} é normal se e somente se para todo compacto $K \subset G$ e $\delta > 0$ existem funções f_1, f_2, \dots, f_n em \mathcal{F} tal que para f em \mathcal{C} existe pelo menos um $k, 1 \leq k \leq n$, com

$$\sup\{d(f(z), f_k(z)) : z \in K\} < \delta.$$

Demonstração: Suponha que \mathcal{F} é normal e sejam K e $\delta > 0$ dados. Pelo lema 6.1.2 existe um $\epsilon > 0$ tal que $\rho(f, g) < \delta \Rightarrow \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta$. Mas, como $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto, \mathcal{F} é totalmente limitado. Logo, existem f_1, \dots, f_n em \mathcal{F} tal que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^n \{f; \rho(f, f_k) < \epsilon\}.$$

Mas, pela escolha de ϵ temos

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^n \{f; d(f(z), f_k(z)) < \delta, z \in K\};$$

isto é, \mathcal{F} satisfaz a condição da proposição.

Para o recíproco, suponha que \mathcal{F} cumpre a propriedade estabelecida. Temos que $\overline{\mathcal{F}}$ também satisfaz a condição, portanto podemos supor que \mathcal{F} é fechado. Mas, como $\mathcal{C}(G, \Omega)$ é completo, então \mathcal{F} é completo. Logo, usando novamente o Lema 6.1.2, temos que \mathcal{F} é localmente limitado. Assim, \mathcal{F} é compacto e portanto, normal. \square

Para cada $n \geq 1$ sejam (X_n, d_n) um espaço métrico e $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ seu produto cartesiano. Isto é, $X = \{\xi = \{x_n\} : x_n \in X_n \text{ para cada } n \geq 1\}$. Para $\xi = \{x_n\}$ e $\eta = \{y_n\}$ em X definimos

$$d(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Proposição 4.1.6 $\left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, d\right)$ com d definida anteriormente, é um espaço métrico.

Se $\xi^k = \{x_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ é um elemento de $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, então $\xi^k \rightarrow \xi = \{x_n\}$ se e somente se $x_n^k \rightarrow x_n$ para cada n .

Demonstração: Claramente, d é uma métrica. Suponha $d(\xi^k, \xi) \rightarrow 0$; como

$$\frac{d_n(x_n^k, x_n)}{1 + d_n(x_n^k, x_n)} \leq 2^n d(\xi^k, \xi)$$

temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_n(x_n^k, x_n)}{1 + d_n(x_n^k, x_n)} = 0.$$

Então $x_n^k \rightarrow x_n$ para cada $n \geq 1$.

Suponha agora que $d_n(x_n^k, x_n) \rightarrow 0$. Então $\lim_{k \rightarrow \infty} d_n(x_n^k, x_n) = 0$. Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{d_n(x_n^k, x_n)}{1 + d_n(x_n^k, x_n)} = 0$, e assim $d(\xi^k, \xi) \rightarrow 0$ e portanto, $\xi^k \rightarrow \xi$. \square

Proposição 4.1.7 Suponha que $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, \Omega)$ é equicontínua em cada ponto de G ; então \mathcal{F} é equicontínua em cada subconjunto compacto de G .

Demonstração: Seja $K \subset G$ compacto e $\epsilon > 0$ fixo. Então para cada w em K existe um $\delta_w > 0$ tal que

$$d(f(w'), f(w)) < \frac{1}{2}\epsilon$$

para toda f em \mathcal{F} sempre que $|w - w'| < \delta_w$. O conjunto $\{B(w, \delta_w) : w \in K\}$ forma uma cobertura aberta de K . Pelo Lema da Cobertura de Lebesgue, existe um $\delta > 0$ tal que para cada z em K , $B(z, \delta)$ está contida em um dos conjuntos desta cobertura. Logo se z e z' estão em K e $|z - z'| < \delta$ existe um w em K tal que $z' \in B(z, \delta) \subset B(w, \delta_w)$. Isto é, $|z - w| < \delta_w$ e $|z' - w| < \delta_w$. Isto implica $d(f(z), f(w)) < \frac{1}{2}\epsilon$ e $d(f(z'), f(w)) < \frac{1}{2}\epsilon$; portanto $d(f(z), f(z')) < \epsilon$ e \mathcal{F} é equicontínuo sobre K . \square

Teorema 4.1.5 (Arzela-Ascoli) *Um conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, \Omega)$ é normal se e somente se satisfaz a seguintes condições:*

- a) *Para cada z em G , $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ tem fecho compacto em Ω ;*
- b) *\mathcal{F} é equicontínuo em cada ponto de G .*

Demonstração: Suponha que \mathcal{F} é normal. Temos que para cada z em G a aplicação $\mathcal{C}(G, \Omega) \rightarrow \Omega$ definida por $f \rightarrow f(z)$ é contínua. Como $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto, sua imagem é compacta em Ω e temos provada a parte (a). Para mostrar (b) fixe um ponto z_0 em G e seja $\epsilon > 0$. Escolhamos $R > 0$ tal que $K = \overline{B}(z_0, R) \subset G$; logo K é compacto e pela proposição 6.1.8 temos que existem funções f_1, \dots, f_n em \mathcal{F} tal que para cada f em \mathcal{F} existe pelo menos um f_k tal que

$$\sup\{d(f(z), f_k(z)) : z \in K\} < \frac{\epsilon}{3}. \quad (*)$$

Mas, desde que cada f_k é contínua, existe um $\delta, 0 < \delta < R$, tal que $|z - z_0| < \delta$ implica que

$$d(f_k(z), f_k(z_0)) < \frac{\epsilon}{3}$$

para $1 \leq k \leq n$. Portanto, se $|z - z_0| < \delta$, $f \in \mathcal{F}$ e escolhemos k de modo que cumpra-se (*), então

$$d(f(z), f(z_0)) \leq d(f(z), f_k(z)) + d(f_k(z), f_k(z_0)) + d(f_k(z_0), f(z_0)) < \epsilon$$

Isto é, \mathcal{F} é equicontínuo em z_0 .

Suponha agora que \mathcal{F} satisfaz as condições (a) e (b); devemos mostrar que \mathcal{F} é normal. Seja $\{z_n\}$ a seqüência de todos os pontos em G com partes real e imaginária reais (logo, para z em G e $\delta > 0$ existe um z_n tal que $|z - z_n| < \delta$). Para cada $n \geq 1$, seja

$$X_n = \overline{\{f(z_n) : f \in \mathcal{F}\}} \subset \Omega;$$

pela parte (a), (X_n, d) é um espaço métrico compacto. Logo, pela proposição 6.1.9, $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ é um espaço métrico compacto. Seja f em \mathcal{F} e defina \tilde{f} por

$$\tilde{f} = \{f(z_1), f(z_2), \dots\}.$$

Seja $\{f_k\}$ uma seqüência em \mathcal{F} , então $\{\tilde{f}_k\}$ é uma seqüência em X . Logo, existe um ξ em X e uma subseqüência de $\{\tilde{f}_k\}$ que converge para ξ . Por conveniência, denote $\xi = \lim \tilde{f}_k$. Usando novamente a proposição 6.1.9 temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z_n) = w_n \quad (**)$$

onde $\xi = \{w_n\}$.

Vamos mostrar que $\{f_k\}$ converge para uma função f em $\mathcal{C}(G, \Omega)$. Logo, por (***) esta função f terá de satisfazer $f(z_n) = w_n$.

Para achar a função f e mostrar que $\{f_k\}$ converge para f , é suficiente mostrar que $\{f_k\}$ é uma seqüência de Cauchy. Seja K um compacto em G e $\epsilon > 0$; pela proposição 6.1.6(b) é suficiente achar um inteiro J tal que para $k, j \geq J$,

$$\sup\{d(f_k(z), f_j(z)) : z \in K\} < \epsilon.$$

Como K é compacto, $R = d(K, \partial G) > 0$. Seja $K_1 = \{z : d(z, K) \leq \frac{1}{2}R\}$; então K_1 é compacto e $K \subset \text{int}K_1 \subset K_1 \subset G$. \mathcal{F} é equicontínuo em cada ponto de G , então pela 6.1.10, \mathcal{F} é equicontínuo em K_1 . Escolhamos $\delta, 0 < \delta < \frac{1}{2}R$ tal que

$$d(f(z), f(z')) < \frac{\epsilon}{3} \quad (1)$$

para toda f em \mathcal{F} , sempre que z e z' estejam em K_1 e $|z - z'| < \delta$. Seja agora D a coleção de pontos em $\{z_n\}$ que também são pontos em K_1 ; isto é,

$$D = \{z_n : z_n \in K_1\}.$$

Se $z \in K$, então existe um z_n tal que $|z - z_n| < \delta$; mas $\delta < \frac{1}{2}R$, então $d(z_n, K) < \frac{1}{2}R$ ou $z_n \in K_1$. Logo $\{B(w, \delta) : w \in D\}$ é uma cobertura aberta de K . Sejam $w_1, \dots, w_n \in D$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B(w_i, \delta).$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(w_i)$ existe para $1 \leq i \leq n$ (por (**)) existe um inteiro J tal que, para $k \geq J$,

$$d(f_k(w_i), f_j(w_i)) < \frac{\epsilon}{3} \quad (2)$$

para $i = 1, \dots, n$.

Seja z um ponto arbitrário em K e w_i tal que $|w_i - z| < \delta$. Para k e j maiores que J , (1) e (2) implicam

$$d(f_k(z), f_j(z)) \leq d(f_k(z), f_k(w_i)) + d(f_k(w_i), f_j(w_i)) + d(f_j(w_i), f_j(z)) < \epsilon.$$

Como z é arbitrário, o teorema está mostrado. \square

4.1.2 O espaço das funções analíticas

Seja G um subconjunto aberto do plano complexo. Denotamos $H(G)$ a coleção de funções analíticas em G . Podemos considerar $H(G)$ como um subconjunto de $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$

Teorema 4.1.6 : *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência em $H(G)$ e f em $\mathcal{C}(G, \Omega)$ tal que $f_n \rightarrow f$. Então f é analítica e $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ para cada inteiro $k \geq 1$.*

Demonstração: Mostraremos que f é analítica aplicando o teorema de Morera. Seja T o triângulo contido dentro de um disco $D \subset G$. Temos que T é compacto, então $\{f_n\}$ converge para f uniformemente em T . Logo, $\int_T f = \lim \int_T f_n = 0$ pois cada f_n é analítica. Assim, f é analítica em cada disco $D \subset G$; isto implica que f é analítica em G .

Para mostrar que $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$, seja $D = \overline{B}(a, r) \subset G$; então existe um número $R > r$ tal que $\overline{B}(a, R) \subset G$. Se γ é o círculo $|z - a| = R$, então pela formula integral

de Cauchy,

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw.$$

para z em D . Usando a estimativa de Cauchy,

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!M_n R}{(R-r)^{k+1}} \text{ para } |z-a| \leq r, \quad (*)$$

onde $M_n = \sup\{|f_n(w) - f(w)| : |w-a| = R\}$. Mas, $f_n \rightarrow f$, então $\lim M_n = 0$. Logo, segue de (*) que $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ uniformemente em $\overline{B}(a, r)$. Logo, se K é uma subconjunto compacto arbitrário de G e $0 < r < d(K, \partial G)$ então existem a_1, \dots, a_n em K tal que $K \subset \bigcup_{j=1}^n B(a_j, r)$. Como $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ uniformemente em cada $B(a_j, r)$, então a convergência é uniforme em K . \square

Definição 4.1.4 *Um conjunto $\mathcal{F} \subset H(G)$ é localmente limitado se para cada ponto a em G , existem constantes M e $r > 0$ tal que para toda f em \mathcal{F} ,*

$$|f(z)| \leq M, \text{ para } |z-a| < r.$$

Equivalentemente, \mathcal{F} é localmente limitada se existe um $r > 0$ tal que

$$\sup\{|f(z)| : |z-a| < r, f \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Lema 4.1.4 *Um conjunto \mathcal{F} em $H(G)$ é localmente limitado se e somente se para cada compacto $K \subset G$, existe uma constante M tal que*

$$|f(z)| \leq M$$

para toda f em \mathcal{F} e z em K .

Teorema 4.1.7 *Uma família \mathcal{F} em $H(G)$ é normal se e somente se \mathcal{F} é localmente limitada.*

Demonstração: Suponha que \mathcal{F} é normal mas não é localmente limitado; então existe um conjunto compacto $K \subset G$ tal que $\sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \mathcal{F}\} = \infty$. Isto é, existe uma seqüência $\{f_n\}$ em \mathcal{F} tal que $\sup\{|f_n(z)| : z \in K\} \geq n$. Como \mathcal{F} é

normal, existe uma função analítica f e uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que $f_{n_k} \rightarrow f$. Mas, isto implica que $\sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Se $|f(z)| \leq M$, para z em K ,

$$n_k \leq \sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} + M;$$

o qual é absurdo, pois o lado direito converge para M .

Suponha agora que \mathcal{F} é localmente limitada; vamos usar o Teorema de Arzela-Ascoli para mostrar que \mathcal{F} é normal. Temos satisfeita a condição (a) do Teorema de Arzela-Ascoli, pois $\overline{\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}}$ é limitado e fechado. Vamos mostrar então que \mathcal{F} é equicontínua em cada ponto de G . Fixe um ponto a em G e $\epsilon > 0$; pela hipótese, existe um $r > 0$ e $M > 0$ tal que $\overline{B}(a, r) \subset G$ e $|f(z)| \leq M$, para todo z em $\overline{B}(a, r)$ e toda f em \mathcal{F} . Temos $|z - a| < \frac{1}{2}r$ e $f \in \mathcal{F}$; então usando a Fórmula de Cauchy para $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

$$|f(a) - f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)(a - z)}{(w - a)(w - z)} dw \right| \leq \frac{2M}{r} |a - z|$$

Fazendo $\delta < \min\{\frac{1}{2}r, \frac{r}{4M}\epsilon\}$ segue que $|a - z| < \delta$ implica $|f(a) - f(z)| < \epsilon$ para toda f em \mathcal{F} □

Definição 4.1.5 *Seja \mathcal{F} uma família de funções analíticas em uma região contendo o fecho do disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e satisfazendo que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Definimos $\lambda(f) = \sup\{r : f(D)$ contém um disco de raio $r\}$. A constante de Landau é definida por $L = \inf\{\lambda(f) : f \in \mathcal{F}\}$.*

Proposição 4.1.8 *Seja $f \in \mathcal{F}$. Então $f(D)$ contém um disco de raio L .*

Demonstração: Basta mostrarmos que $f(D)$ contém um disco de raio $\lambda = \lambda(f)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_n \in f(D)$ tal que $B(\alpha_n, \lambda - \frac{1}{n}) \subset f(D)$, isto é, tal que se $|\alpha - \alpha_n| < \lambda - \frac{1}{n}$ então $\alpha \in f(D)$. Como $\alpha_n \in f(D) \subset f(\overline{D})$, então existe um ponto $\alpha \in f(\overline{D})$ e uma subsequência $\{\alpha_{n_k}\}$ tal que $\alpha_{n_k} \rightarrow \alpha$, pois $f(\overline{D})$ é compacto. Sem perda de generalidade assumimos que $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

Se $|w - \alpha| < \lambda$, escolhemos n_0 tal que $|w - \alpha| < \lambda - \frac{1}{n_0}$. Assim, existe $n_1 > n_0$ tal que $|\alpha_n - \alpha| < \lambda - \frac{1}{n_0} - |w - \alpha|$, para $n \geq n_1$. Portanto, $|w - \alpha_n| < |w - \alpha| + |\alpha - \alpha_n| < \lambda - \frac{1}{n_0} < \lambda - \frac{1}{n}$, se $n \geq n_1$. Logo, $w \in B(\alpha_n, \lambda - \frac{1}{n}) \subset f(D)$. como w era arbitrário, segue que $B(\alpha, \lambda) \subset f(D)$. \square

Corolário 4.1.1 *Se f é analítica em uma região que contém $\overline{B}(0, R)$, então $f(B(0, r))$ contém um disco de raio $R|f'(0)|L$.*

Lema 4.1.5 *Seja $G \subset \mathbb{C}$ uma região simplesmente conexa e f uma função analítica em G que não assume os valores 0 e 1. Então existe uma função analítica g em G tal que $f(z) = -\exp(i\pi \cosh 2g(z))$.*

Demonstração: Já que f não assume 0, existe l , ramo de $\log f$, definido em G , isto é, $\exp l = f$. Seja $F(z) = (2\pi i)^{-1} l(z)$. Como $f(a) \neq 1$, para todo $a \in G$ temos que $F(a) \neq n$, n inteiro qualquer. Definimos $H(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z) - 1}$ e $H(z) \neq 0$. Assim, é possível definir g , um ramo de $\log H$ em G .

Assim, temos: $\cosh(2g) + 1 = \frac{1}{2}(e^{2g} + e^{-2g}) + 1 = \frac{1}{2}(e^g + e^{-g})^2 = \frac{1}{2}(H + \frac{1}{H})^2 = \frac{1}{2}(2\sqrt{f})^2 = 2F = \frac{1}{\pi i} l$. Logo

$$f = e^l = \exp(2\pi i \cosh(2g)) = -\exp(\pi i \cosh(2g)).$$

\square

Lema 4.1.6 *Sejam G, f e g como no lema anterior. então $g(G)$ não contém discos de raio 1.*

Demonstração: Sejam n um inteiro positivo e m um inteiro qualquer. suponhamos que exista $a \in G$ tal que $g(a) = \pm \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2}im\pi$. Assim temos

$$2\cosh(2g(a)) = e^{2g(a)} + e^{-2g(a)} = e^{im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} + e^{-im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} = (-1)^m [(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2 + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2] = (-1)^m [2(2n-1)].$$

Logo, $\cos[2g(a)] = (-1)^m(2n-1)$ e $2n-1$ é ímpar. Portanto, $f(a) = 1$ e g não pode assumir os valores

$$\{\pm \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2}im\pi; n \geq 1, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Os pontos acima formam os vértices de um reticulado do plano.

A largura é $\log(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-\log(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) > 0$. Como $\varphi(x) = \log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) - \log(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$ é uma função decrescente, a largura de um retângulo é menos que $\varphi(1) = \log(1+\sqrt{2}) < \log e = 1$. Assim, a diagonal de um retângulo qualquer é menor que $\sqrt{2}$. \square

Seja f definida numa região simplesmente conexa contendo $\overline{B}(0, 1)$. Suponhamos que f não assume os valores 0 e 1. Sejam l , um ramo de $\log f$, $F = \frac{1}{2\pi i}l$, $H = \sqrt{F} - \sqrt{F-1}$ e g um ramo de $\log H$. Na escolha dos ramos l e g , exigimos $0 \leq \text{Im}l(0) < 2\pi$ e $0 \leq \text{Im}g(0) < 2\pi$.

Teorema 4.1.8 (Teorema de Schottky) *Dados α e β , $0 < \alpha < \infty$ e $0 \leq \beta \leq 1$, existe $C(\alpha, \beta)$ tal que se f é analítica em uma região simplesmente conexa contendo $\overline{B}(0, 1)$ a qual omite os valores 0 e 1 e tal que $|f(0)| \leq \alpha$, então $|f(z)| \leq C(\alpha, \beta)$ para $2 \leq \alpha < \infty$ e $|z| \leq \beta$.*

Demonstração:

1º Caso

Suponhamos que $\frac{1}{2} \leq |f(0)| \leq \alpha$. Seja l um ramo de $\log f$. Temos que $0 \leq \text{Im} l(0) < 2\pi$. Assim

$$|F(0)| = \frac{1}{2\pi} |\log|f(0)| + i\text{Im}l(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \log \alpha + 1$$

pois

$$e^l = f \Rightarrow e^{\text{Re}(l)+i\text{Im}(l)} = |f|e^{i\arg f} \Rightarrow e^{\text{Re}(l)} \cdot e^{i\text{Im}(l)} = |f|e^{i\arg f} \Rightarrow \text{Im}(l) = \arg(f)$$

e

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2\pi i}l &\Rightarrow F(0) = \frac{1}{2\pi i}l(0) \Rightarrow |F(0)| = \frac{1}{2\pi}|l(0)| = \frac{1}{2\pi}|\log f(0)| \\ &= \frac{1}{2\pi}|\log(|f(0)|e^{i\arg f(0)})| = \frac{1}{2\pi}|\log|f(0)| + \\ &+ i \arg f(0)| = \frac{1}{2\pi}|\log|f(0)| + i \text{Im} l(0)| \leq \frac{1}{2}\log \alpha + 1. \end{aligned}$$

Seja $C_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \log \alpha + 1$. Assim temos

$$|\sqrt{F(0)} \pm \sqrt{F(0) - 1}| \leq |\sqrt{F(0)}| + |\sqrt{F(0) - 1}|.$$

Como $|\sqrt{F(0)}| = |\exp \frac{1}{2} \log F(0)| = |\exp (\frac{1}{2} \log(|F(0)|e^{i\theta}))| = |\exp (\frac{1}{2} \log|F(0)| + \frac{i\theta}{2})| = |\exp (\frac{1}{2} \log|F(0)|)|$, temos

$$\begin{aligned} |\sqrt{F(0)} \pm \sqrt{F(0) - 1}| &\leq \exp \left(\frac{1}{2} \log|F(0)| \right) + \exp \left(\frac{1}{2} \log|F(0) - 1| \right) = \\ &= |F(0)|^{\frac{1}{2}} + |F(0) - 1|^{\frac{1}{2}} \leq C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + (C_0(\alpha) + 1)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Seja $C_1(\alpha) = C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + (C_0(\alpha) + 1)^{\frac{1}{2}}$. Assim

$$|g(0)| = |\log|H(0)| + i \operatorname{Im}g(0)| \leq \log|H(0)| + 2\pi \leq \log C_1(\alpha) + 2\pi.$$

Se

$$\begin{aligned} |H(0)| < 1, |g(0)| &\leq -\log|H(0)| + 2\pi = \log \left(\frac{1}{|H(0)|} \right) + 2\pi = \\ &= \log |\sqrt{F(0)} + \sqrt{F(0) - 1}| + 2\pi \leq \log C_1(\alpha) + 2\pi. \end{aligned}$$

Seja $C_2(\alpha) = \log C_1(\alpha) + 2\pi$.

Se $|a| < 1$ então $g(B(a, 1 - |a|))$ contém um disco de raio $L(1 - |a|)|g'(a)|$. Pelo lema 3.5.5, $g(B(0, 1))$ não contém discos de raio 1. Portanto $|g'(a)| < [L(1 - |a|)]^{-1}$ para $|a| < 1$.

Para $|a| < 1$ seja $\gamma = [0, a]$. Então

$$\begin{aligned} |g(a)| &\leq |g(0)| + |g(a) - g(0)| \leq C_2(\alpha) + \left| \int_{\gamma} g'(z) dz \right| \leq \\ &\leq C_2(\alpha) + |a| \max\{|g'(z)| : z \in [0, a]\} \leq C_2(\alpha) + \frac{|a|}{L(1 - |a|)}. \end{aligned}$$

Seja

$$C_s(\alpha, \beta) = C_2(\alpha) + \beta[L(1 - \beta)]^{-1}.$$

Assim $|g(z)| \leq C_s(\alpha, \beta)$ se $|z| \leq \beta$. Portanto

$$\begin{aligned} |z| \leq \beta &\Rightarrow |f(z)| = |\exp[\pi i \cosh 2g(z)]| \leq \\ &\leq \exp[\pi |\cosh 2g(z)|] \leq [\pi e^{2|g(z)|}] \leq \exp[\pi e^{2C_s(\alpha, \beta)}]. \end{aligned}$$

Definimos

$$C_4(\alpha, \beta) = \exp\{\pi[\exp[2C_s(\alpha, \beta)]]\}.$$

2º Caso

Suponhamos $0 < |f(0)| < \frac{1}{2}$. Então $1 - f$ satisfaz as condições do caso 1. De fato:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} < 1 - |f(0)| < |1 - f(0)| \leq 1 + |f(0)| \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < \alpha$$

pois $\alpha \geq 2$.

Por tanto $|1 - f(z)| \leq C_4(2, \beta)$ se $|z| \leq \beta$ e assim $|f(z)| \leq 1 + C_4(2, \beta)$. Logo basta definirmos

$$C(\alpha, \beta) = \max\{C_4(\alpha, \beta), 1 + C_4(2, \beta)\}.$$

□

Corolário 4.1.2 *Seja f analítica numa região simplesmente conexa contendo $\overline{B}(0, R)$ e suponhamos que f omite 0 e 1. Se $C(\alpha, \beta)$ é a constante do Teorema de Schottky e $|f(0)| \leq \alpha$ então $|f(z)| \leq C(\alpha, \beta)$ para $|z| \leq \beta R$.*

Teorema 4.1.9 (Teorema de Montel) *Se \mathcal{F} é uma família de funções analíticas em uma região G na qual $f \in \mathcal{F}$ não assume os valores 0 e 1 então \mathcal{F} é normal.*

Demonstração: Fixemos $z_0 \in G$ e consideremos

$$\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| < 1\}, \quad \mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \geq 1\}$$

e $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$.

Mostremos que \mathcal{G} é normal no conjunto das analíticas e \mathcal{H} é normal em $C(G, \overline{\mathbb{C}})$.

Para obtermos a normalidades de \mathcal{G} é suficiente mostrarmos que \mathcal{G} é localmente uniformemente limitada.

Sejam $a \in G$ e γ uma curva em G de z_0 até a . Sejam D_0, D_1, \dots, D_n discos em G com centros $z_0, z_1, \dots, z_n = a$ em γ e tais que z_{k-1} e z_k estão em $D_{k-1} \cap D_k$ para $1 \leq k \leq n$ e $\overline{D_k} \subset G$.

Aplicamos o teorema de Schottky para D_0 e f em \mathcal{G} ($D_0 = B(z_0, r)$ e $R > r$ é tal que $\overline{B}(z_0, R) \subset G$ então $|f(z)| \leq C(1, \beta)$ para z em D_0 e f em G quando β é escolhido com $r < \beta R$). Segue que existe C_0 tal que $|f(z)| \leq C_0$ para z em D_0 e f em G . Assim \mathcal{G} é uniformemente limitada por uma constante C_1 em D_1 . Continuando nós temos que \mathcal{G} é uniformemente limitada em D_n . Já que a era arbitrário isto dá que \mathcal{G} é localmente limitada e portanto \mathcal{G} é normal no conjunto das analíticas.

Agora consideremos $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \geq 1\}$. Se $f \in \mathcal{H}$ então $\frac{1}{f}$ é analítica em G pois f não se anula. Já que f não assume 1, $\frac{1}{f}$ também não assume. Além disso $\left| \left(\frac{1}{f} \right) (z_0) \right| \leq 1$, portanto $\tilde{\mathcal{H}} = \{ \frac{1}{f} : f \in \mathcal{H} \} \subset \mathcal{G}$ e $\tilde{\mathcal{H}}$ é normal. Assim, se $(f_n)_n$ é uma seqüência em \mathcal{H} então existe $(f_{n_k})_k$ tal que $\left(\frac{1}{f_{n_k}} \right)_k$ converge para uma aplicação analítica h . De acordo com o Teorema de Hurwitz $h \equiv 0$ ou h nunca se anula. Se $h \equiv 0$ então $\lim_k f_{n_k}(z) = \infty$ uniformemente em compactos de G . Se h nunca se anula então $\frac{1}{h}$ é analítica e segue que $\lim_k f_{n_k}(z) = \frac{1}{h(z)}$ uniformemente em compactos de G . \square

Índice Remissivo

- δ -cobertura, 27, 35
- aplicação
 - aberta, 63
 - fechada, 63
 - própria, 63
- bacia de atração, 20
- condição do conjunto aberto, 47, 50
- conjugação, 21
- conjunto
 - aberto, 67
 - auto-similar, 47
 - de Cantor, 33, 39, 43
 - de Cantor não linear, 52
 - de Fatou, 14, 21
 - de Julia, 13
 - de Mandelbrot, 22, 24, 57, 58
 - invariante, 43, 45, 54
 - perfeito, 19
- constante de Landau, 73
- contração, 43
- corpo δ -paralelo , 38
- diâmetro, 27
- dimensão
 - box counting, 36, 37
 - de Hausdorff, 30, 31, 35
 - fractal inferior, 36
 - fractal superior, 36
- distribuição de massa, 48, 52
- esfera de Riemann, 63
- família normal, 15, 16, 67
- fractal, 14
- função
 - de Green, 60
 - lipschitziana, 29
 - uniformemente α -Hölder Contínua, 61
- isometria, 29
- laço, 23
- métrica
 - de Hausdorff, 44
 - euclideana, 44
- medida de Hausdorff, 28, 31
- poeira de Cantor, 32
- ponto
 - atrator, 13, 20
 - crítico, 26

excepcional, 17

fixo, 13, 19

indiferente, 13

isolado, 19, 20

periódico, 13, 19, 20

repulsor, 13, 19

superatrator, 13

princípio

de distribuição de massa, 48

do máximo, 62

similaridade, 43

teorema

Arzela-Ascoli, 69

Boettcher-Fatou, 59

de Montel, 15, 17, 20, 77

de Perron Frobenius, 67

de Schottky, 75, 77, 78

do módulo máximo, 56

do valor médio, 52, 55

Douady-Hubard, 59

trajetórias, 56

Triângulo de Sierpinski, 50

Referências Bibliográficas

- [1] CONWAY, J. B., **Functions of one Complex Variable**, second edition, Springer Verlag, 1978
- [2] CARLESON, L., GAMELIN T. W., **Complex Dynamics**, Springer-Verlag, 1993.
- [3] DA SILVA, P. R., **Regularidade dos Conjuntos de Julia**, Tese de Mestrado, UFRGS, 1990.
- [4] DEVANEY, R. L., **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**, ABP, 2003.
- [5] ESSAY S. Y., **Fractals and The Julia Set**, 0407950, 2006.
- [6] FALCONER, K., **Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications**, 1990
- [7] KNILL O., **The Mandelbrot Set**, paper Math118
- [8] PLANETMATH C., **Periodic Point**, PlanetMath, 2006, <http://planetmath.org/encyclopedia/AttractivePeriodicPoint.html>