Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Cálculo de Grupos de Homotopia dos Grupos Clássicos

Paulo Henrique Galão

Orientador: João Peres Vieira

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto
Abril - 2008

Galão, Paulo Henrique.
Cálculo de grupos de homotopia dos grupos clássicos / Paulo Henrique Galão. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2008.
74 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: João Peres Vieira
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Seqüências (Matemática). 2. Grupos de homotopia. 3. Fibrados. 4. Grupos clássicos. 5. Sequências exatas (Matemática). I. Vieira, João Peres. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.52

Comissão Julgadora

Membros Titulares

Prof. Dr. João Peres Vieira
Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Profa. Dra. Denise de Mattos

Membros Suplentes

Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade
Prof. Dr. Dirceu Penteado

"Comece por fazer o necessário,
depois o possível, e de repente
estará por fazer o impossível."

(São Francisco de Assis)

Aos meus pais,
Galão e Cidinha,
dedico.

Agradecimentos

O meu maior agradecimento é Àquele a quem devo tudo, que estará ao meu lado sempre e por toda vida: Deus. Tão bondoso e generoso Ele é, que colocou em meu caminho pessoas imprescindíveis para que eu pudesse atingir esse objetivo e, por isso, quero ao menos tentar agradecer a todos que me ajudaram:

• meus pais Luiz e Cidinha, que sempre me deram ótimos exemplos e nunca deixaram que eu desistisse de estudar, mesmo que isso lhes custassem sacrifícios;

• meu irmão Luiz Carlos, minha cunhada Nágila e meu extraordinário sobrinho e afilhado, Gustavo, que veio para somar alegrias em minha vida;

• minha tia Lena, a primeira pessoa que me fez gostar de matemática, sempre presente, de prontidão a tudo que eu precisasse;

• meus avós, Alcides e Deira, os quais amo muito, e também os que já não estão mais aqui, Antônia, Luiz e Thereza, sei que fizeram muito por mim;

• o Prof. Dr. João Peres Vieira, por toda dedicação, paciência, atenção e compreensão para comigo, pela orientação, pela ajuda no meu crescimento pessoal e por enriquecer meus conhecimentos;

• o Prof. Dr. João Carlos F. Costa, pela disponibilidade em preparar e desenvolver o estágio de docência.

• a Profa. Dra. Ermínia de Lourdes C. Fanti, pela orientação durante a graduação, por despertar em mim o gosto pela Topologia Algébrica, além de toda colaboração no mestrado e por ter aceito fazer parte da banca de defesa da desta dissertãção;

• a Profa. Dra. Denise de Mattos, pela atenção e dicas para melhorar este trabalho e por também ter aceito estar presente na banca;

• a Profa. Dra. Maria Gorete C. Andrade, sou muito grato pela cooperação, sempre disposta a ajudar;

• a Profa. Dra. Rita de Cássia P. Lamas, minha primeira orientadora da graduação, nunca deixou de me apoiar e aconselhar, até mesmo durante a pós-graduação;

• o Prof. Dr. Pedro Paulo Scandiuzzi, por ajudar na minha formação, pela carona a Rio Claro e pela conversa que, talvez mesmo sem saber, me ajudou em decisões importantes;

• todos os professores que colaboraram com minha formação durante esses anos;

• os meus amigos de mestrado, alguns com os quais tive pouco contato, mas são grandes pessoas e admiro-os demais: Pedro, Rafael, Marcos, Aline, Cibele, Durval e Valdir;

• Eduardo e Alessandra, amigos da matemática aplicada que são extraordinários;

• Juliana, Andréia e Liliane. Sem elas minha graduação não teria sido a mesma. Formidáveis e inesquecíveis;

• os meus amigos de Mirassol, aqueles que ajudaram em todos os momentos, principalmente nos pessoais, Flávia Manzano, Ana, Fernandinha, Flávia Zonta, Sílvia, Eduardo e Felipe. Podem não saber, mas têm grande importância em minha vida;

• minha amiga Luana, pelo auxílio nas figuras desse trabalho.

• Carlos e Lindsay, amigos que estão longe, mas nem por isso perdemos o contato, ao contrário, são amizades que se fortalecem cada vez mais. Adoro-os.

• meus amigos do Handebol. Família Handebol Rio Preto, em especial, Lara, Luciane, Leda, Ariadine, Aline, Mafê e Elton com os quais tenho mais contato. Muitas foram as viagens e os momentos de alegria, sempre unidos, e mesmo quando eu precisava estudar todos compreendiam. Responsáveis por grande parte dos meus bons momentos de descontração. Nesses amigos também incluo o Handebol IBLCE/Unesp, Handebol FAMERP, Handebol Catanduva;

• os meus amigos do mestrado, com os quais caminhei parte da graduação e esses dois anos. Foram os pilares que me sustentaram. Obrigado Carol e Agnaldo, por toda ajuda e companheirismo, até mesmo nos momentos críticos que passamos. Grasiele, valeu pela disponibilidade, pela alegria que contagia e pelo carinho. Vinicius, por todo auxílio, até mesmo em várias caronas, pelos momentos de risadas e divertimento, meu muito obrigado. E sou eternamente grato à Ligia, que me incentivou a fazer o verão para o mestrado, nunca deixou que eu desistisse, me auxiliou em tudo e, até mesmo quando eu estava chateado, encontrava palavras para me por para cima. Por mais que eu tente, não tenho palavras para agradecê-los.

• a CAPES, pelo financiamento desses estudos.

Obrigado a todos, de coração.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal o cálculo do grupo de homotopia de alguns grupos clássicos, como o grupo das rotações do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, $SO(n)$, o grupo unitário $U(n)$, seu subgrupo especial unitário $SU(n)$ e o grupo simplético $Sp(n)$. Para esses cálculos usaremos seqüências exatas e propriedades relacionadas à fibrados.

Palavras-chave: Seqüências Exatas, Fibrados, Grupos Clássicos, Grupos de Homotopia.

Abstract

The main purpose of this work is to calculate homotopy groups of some classical groups as the rotation groups of the euclidean space $\mathbb{R}^n$, $SO(n)$, the unitary group $U(n)$, your special unitary subgroup $SU(n)$ and the symplectic group $Sp(n)$. For these calculus we will use exact sequences and properties relacionated to the fibre bundle.

Keywords: Exact Sequences, Fibre Bundle, Classical Groups, Homotopy Groups.

Sumário

Introdução

A noção de grupo fundamental de um espaço X com ponto base x_0 em X, $\pi_1(X, x_0)$, deve-se ao matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) e é o invariante topológico mais simples associado ao conceito de homotopia, que por sua vez é a idéia mais importante da topologia algébrica. O grupo de homotopia de ordem superior do espaço X, usualmente denotado por $\pi_n(X, x_0)$ $n \geq 2$, é, de certo modo, uma extensão natural do conceito de grupo fundamental e sua definição foi dada nos anos 1932-1935 por Eduard Cech (1893-1960) e Witold Hurewicz (1904-1956). Foi Hurewicz quem deu a definição mais satisfatória para os grupos de homotopia de ordem superior e provou as propriedades fundamentais. Já o conceito de fibrados ganhou espaço na matemática no período de 1935-1940 e sua primeira definição geral foi dada por H. Whitney.

Neste trabalho, mostraremos que a todo fibrado pode ser associado uma seqüência exata e, através de tal seqüência, pode-se calcular o grupo fundamental e o grupo de homotopia de ordem superior de um espaço topológico X. Aqui, trabalharemos especificamente com os grupos clássicos, isto é, o grupo das rotações do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, o grupo unitário e seu subgrupo especial unitário, além do grupo simplético.

No capítulo 1 apresentaremos os pré-requisitos básicos para o desenvolvimento deste trabalho. Dentre eles destacam-se a definição de álgebra dos quatérnios, necessária para definir o grupo simplético, bem como para mostrar algumas propriedades dos grupos clássicos, e o conceito de homotopia, em especial, homotopia de caminhos fechados (laços), de onde se define o grupo fundamental.

No capítulo 2 definiremos o grupo fundamental e o grupo de homotopia de ordem superior. Relacionado ao grupo fundamental, definiremos o importante conceito de espaços simplesmente conexos. Em relação ao grupo de homotopia de ordem superior, daremos ênfase ao grupo de homotopia relativa e, através do operador bordo e do homomorfismo induzido, definiremos a seqüência de homotopia de uma tripa (X, A, x_0), sendo X um espaço topológico, A um subespaço de X e x_0 o ponto base de X. Mostraremos ainda que tal seqüência é exata.

O capítulo 3 é inteiramente dedicado a fibrados. Nele, além da definição, mostraremos que a todo fibrado está relacionado uma seqüência exata de homotopia. O principal resultado deste capítulo é o Corolário 3.1.1 que nos permite definir a seqüência de homotopia de um fibrado e em seguida provarmos que ela é exata.

No capítulo 4 estudaremos os grupos clássicos, que são eles: grupo das rotações do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, grupo unitário, grupo especial unitário e o grupo simplético, denotados respectivamente por $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ e $Sp(n)$; e veremos várias propriedades relacionadas a tais grupos, como por exemplo a existência de um homeomorfismo entre o grupo $U(n)$ e o produto cartesiano de seu subgrupo $SU(n)$ e a esfera S^1. Também definiremos fibrações localmente triviais e daremos alguns exemplos.

Por fim, no capítulo 5 calcularemos o grupo fundamental e o grupo de homotopia de ordem superior dos grupos clássicos. Para o grupo de homotopia de ordem superior até o nível 3 faremos os cálculos para todo n. Porém, quando o nível varia de 4 a 6, os cálculos são específicos para alguns grupos. Terminamos exibindo uma tabela contendo todos os resultados obtidos neste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Seqüências Exatas de R-Módulos

Seja R um anel comutativo com unidade.

Definição 1.1.1 *Uma seqüência finita ou infinita*

$$\ldots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \ldots$$

de homomorfismos de R-módulos, é dita uma seqüência exata no R-módulo Y se a imagem do homomorfismo f coincide com o Kernel do homomorfismo g ($Im(f) = Ker(g)$). A sequência é dita simplesmente exata se isso acontece em todo R-módulo.

Uma seqüência exata do tipo

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

é dita uma seqüência exata curta.

Definição 1.1.2 *Seja A um submódulo de um R-módulo X. Diz-se que um submódulo $A_1 \subset X$ é um suplementar de A se $X = A \oplus A_1$.*

Um submódulo que admite um suplementar diz-se um *somando direto de X*.

Definição 1.1.3 *Uma sequência exata curta de R-módulos*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

cinde se $X \cong Im(f) = Ker(g)$ é um somando direto de Y. Daí, $Y \cong X \oplus Z$.

Definição 1.1.4 *Um R-módulo M é livre se existe um subconjunto $X \subset M$ tal que*

(1) Dado $m \in M$, existe $x_1, ..., x_r \in X$ e $\lambda_1, ..., \lambda_r \in R$ tal que

$$m = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_r x_r;$$

(2) Se $x_1, ..., x_r \in X$ e $\lambda_1, ..., \lambda_r \in R$ são tais que

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_r x_r = 0 \in M \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = 0 \in R.$$

Em outras palavras, dizemos que, M é um R-módulo livre se ele admite uma base.

Definição 1.1.5 *Uma família $\{x_i\}_{i \in I}$ de elementos de um R-módulo X diz-se livre se para todo $(\lambda_i)_{i \in I} \in R^{(I)}$ tem-se*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i \in I.$$

Exemplo 1.1.1 *anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é um $\mathbb{Z}$-módulo livre.*

Proposição 1.1.1 *Dada uma seqüência exata curta de R-módulos*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0,$$

se Z é livre, a seqüência cinde. Então $Y \cong X \oplus Z$.

Demonstração: ([6], Corolário 1, p. 65). ■

1.2 Espaços Sólidos

Definição 1.2.1 *Um espaço Y é chamado sólido se, para quaisquer espaço normal X, subconjunto fechado A de X e aplicação $f : A \longrightarrow Y$, existe uma aplicação $f' : X \longrightarrow Y$ tal que a restrição $f' |_A = f$.*

Observação 1.2.1 *O Teorema da Extensão de Tietze (veja [8], p. 212) afirma que qualquer intervalo de números reais (aberto ou fechado) é um espaço sólido. Dessa forma, o produto topológico de uma família de espaços sólidos também é um espaço sólido, basta estender cada componente da função. Daí segue-se que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e o cubo fechado n-dimensional são sólidos. Assim, as n-células abertas e fechadas também são sólidos, por serem homeomorfas ao $\mathbb{R}^n$ e ao cubo fechado n-dimensional, respectivamente, e pelo fato que ser sólido é propriedade topológica.*

Várias propriedades estão intimamente relacionadas ao conceito de espaços sólidos. Para enunciarmos a propriedade que nos interessa usaremos a seguinte

Definição 1.2.2 *Sejam Z um espaço topológico e Y um subespaço de Z. Uma aplicação contínua $r : Z \longrightarrow Y$ chama-se uma retração quando se tem $r(y) = y$ para todo $y \in Y$, ou seja, quando $r|_Y = id_Y$.*

Quando existe uma retração $r : Z \longrightarrow Y$ o subespaço Y chama-se um retrato do espaço Z.

Um espaço métrico compacto Y é chamado um retrato absoluto se for retrato de qualquer espaço métrico separável que contém Y.

Propriedade 1.2.1 *Para um espaço métrico compacto Y, ser retrato absoluto é equivalente a ser sólido.*

Demonstração: (Ver [9], p. 55). ■

1.3 Posto de uma Aplicação

Definição 1.3.1 *O posto de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a dimensão de sua imagem $T(\mathbb{R}^m)$, isto é, o número máximo de vetores linearmente independentes entre $T(e_1), ..., T(e_m)$, onde $\{e_1, ..., e_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$, ou, equivalentemente, o número máximo de colunas linearmente independentes da matriz de T.*

Definição 1.3.2 *O posto de uma aplicação diferenciável $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ num ponto $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ é o posto de sua derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*

Quando o posto de uma aplicação f é o mesmo, para qualquer ponto do aberto U a qual está definida, dizemos que f possui posto constante.

Definição 1.3.3 *Uma imersão do aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para cada $x \in U$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear injetiva.*

Definição 1.3.4 *Uma aplicação diferenciável $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, chama-se uma submersão quando, para cada $x \in U$, sua derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear sobrejetiva.*

Uma imersão $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, tem posto m em todos os pontos $x \in U$ e uma submersão tem posto n em qualquer ponto

Definição 1.3.5 *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dita localmente injetiva se todo ponto $x \in U$ possui uma vizinhança V tal que $f|_V$ é injetiva.*

Proposição 1.3.1 *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1, com posto constante no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Então:*

i) f é localmente injetiva se, e somente se, é uma imersão;

ii) f é aberta se, e somente se, é uma submersão.

Demonstração: Vide [2], Corolário, p.301.

1.4 Espaço Projetivo Real

O espaço projetivo real n-dimensional é o espaço quociente da esfera unitária S^n pela relação de equivalência $\sim$ segundo a qual, para cada ponto $x \in S^n$, $x \sim x$ ou $x \sim -x$, onde $-x$ denota o antípoda de x. Cada ponto $a \in P^n$ é portanto uma classe de equivalência $a = [x] = \{x, -x\}$, $x \in S^n$. Logo,

$$P^n = \frac{S^n}{\sim},$$

isto é, $P^n = \{[x] = \{x, -x\}; x \in S^n\}$.

Indicaremos por $p : S^n \longrightarrow P^n$ a projeção natural, que associa a cada ponto $x \in S^n$ sua classe de equivalência $p(x) = \{x, -x\}$.

A topologia de P^n é a topologia quociente, isto é, um conjunto $A \subset P^n$ é aberto se, e somente se, sua imagem inversa $p^{-1}(A)$ é um subconjunto aberto da esfera S^n.

Esta topologia torna a aplicação quociente p contínua. Ainda, o espaço P^n é um espaço de Hausdorff, o qual é compacto, por ser imagem do compacto S^n pela aplicação contínua p.

A propriedade fundamental da topologia quociente, neste caso, é a seguinte: se $f : S^n \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua tal que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in S^n$, então existe uma única aplicação contínua $\overline{f} : P^n \longrightarrow Y$ tal que $\overline{f} \circ p = f$. A aplicação $\overline{f}$ diz-se obtida de f por passagem ao quociente. Em outras palavras, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & Y \\
P^n \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

1.5 Álgebra dos Quatérnios

Nesse trabalho usaremos a Álgebra dos Quatérnios, criada pelo matemático irlândes W. Hamilton, com o objetivo de definir o Grupo Simplético $Sp(n)$, bem como relacionar o Grupo $SO(3)$ com o plano projetivo real P^3.

O conjunto dos quatérnios é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$, munido da adição usual e de uma multiplicação com propriedades interessantes.

Um quatérnio ($w \in \mathbb{R}^4$) será denotado da seguinte forma

$$w = t + x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k.$$

Os vetores básicos 1, i, j, k são chamados unidades. A unidade real é $1 = 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$ e as unidades imaginárias são i, j, k. As operações de espaço vetoriais são as usuais do $\mathbb{R}^4$.

No espaço $\mathbb{R}^4$ dos quatérnios destacam-se dois subespaços especiais:

• $\mathbb{R}$: conjunto dos quatérinos reais $t = t + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$ (também visto como o conjunto dos escalares);

• $\mathbb{R}^3$: conjunto dos quatérnios imaginários puros $x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k$ (também visto como o conjunto dos vetores).

Observação 1.5.1 *$\mathbb{R}^3$ é o complemento ortogonal de $\mathbb{R}$ em relação ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^4$.*

A multiplicação de quatérnios fica definida, por bilinearidade, a partir do produto dos elementos básicos, da seguinte maneira:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$i \cdot j = -j \cdot i = k,$$

$$j \cdot k = -k \cdot j = i,$$

$$k \cdot i = -i \cdot k = j,$$

$$1 \cdot i = i \cdot 1 = i,$$

$$1 \cdot j = j \cdot 1 = j,$$

$$1 \cdot k = k \cdot 1 = k.$$

Em relação a esta multiplicação valem a distributividade, a associatividade, porém não vale a comutatividade, conforme tabela anterior.

O conjugado de um quatérnio $w = t+x \cdot i+y \cdot j+z \cdot k$ é definido por $\overline{w} = t-x \cdot i-y \cdot j-z \cdot k$. Daí, se $w \neq 0$, tem-se:

$$w \cdot \overline{w} = (t + x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k) \cdot (t - x \cdot i - y \cdot j - z \cdot k) = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = ||w||^2.$$

Então,

$$w \cdot \overline{w} = ||w||^2 \Rightarrow w \cdot \frac{\overline{w}}{||w||^2} = 1 \Rightarrow w^{-1} = \frac{\overline{w}}{||w||^2}.$$

Portanto, todo quatérnio não nulo w possui um inverso multiplicativo $w^{-1} = \frac{\overline{w}}{||w||^2}$.

O módulo de um quatérnio satisfaz $||w \cdot w'|| = ||w|| \cdot ||w'||$. Assim, a esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ (conjunto dos quatérnios de módulo 1) é um grupo relativamente à multiplicação de quatérnios.

Neste caso, como $||w|| = 1$, $w^{-1} = \overline{w}$.

Denotamos o corpo dos quatérnios por $\mathcal{H}$ e, no espaço vetorial $\mathcal{H}^n$, os elementos são vetores

$v = (v_1, ..., v_n)$ e $w = (w_1, ..., w_n)$ de n quatérnios, cujo produto interno é

$$\langle v, w \rangle = \sum_{r=1}^{n} v_r \cdot \overline{w}_r.$$

Diz-se que os vetores v e w são ortogonais quando $\langle v, w \rangle = 0$.

Lema 1.5.1 *Se um quatérnio w comuta com todo imaginário puro então w é real. Se, além disso, $w \in S^3$, então $w = \pm 1$.*

Demonstração: Seja $w = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$. Por hipótese, $w \cdot i = i \cdot w$. Daí,

$$\begin{cases} w \cdot i = (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot i = a \cdot i - b - c \cdot k + d \cdot j \\ i \cdot w = i \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) = a \cdot i - b + c \cdot k - d \cdot j \end{cases} \Rightarrow c = d = 0.$$

Logo, $w = a + b \cdot i$.
Mas, $w \cdot j = j \cdot w$. Então

$$\begin{cases} w \cdot j = (a + b \cdot i) \cdot j = a \cdot j + b \cdot k \\ j \cdot w = j \cdot (a + b \cdot i) = a \cdot j - b \cdot k \end{cases} \Rightarrow b = 0.$$

Portanto, $w = a$ é real.
Agora, se $w \in S^3$, $||w|| = 1$, de onde se conclui que $w = \pm 1$. ■

1.6 Homotopia

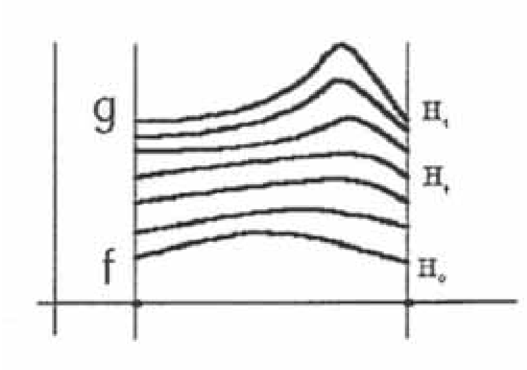
Aplicações Homotópicas: Sejam X e Y espaços topológicos. Duas aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow Y$ dizem-se homotópicas quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I \longrightarrow Y$, onde $I = [0, 1]$, tal que

$$H(x, 0) = f(x) \;\; e \;\; H(x, 1) = g(x), \forall x \in X.$$

A aplicação H chama-se uma homotopia entre f e g.
Notação: $f \simeq g$ ou $H : f \simeq g$.

Observação 1.6.1 *Dar uma homotopia $H : f \simeq g$, é equivalente a dar uma aplicação contínua $H_t : X \longrightarrow Y$, para todo $t \in I$, definida por $H_t(x) = H(x, t)$. Logo, dada uma homotopia H, conseguimos uma "família contínua a um parâmetro" $(H_t)_{t \in I}$ de aplicações de X em Y. Note que, para $t = 0$ e $t = 1$ temos, respectivamente, $H_0(x) = H(x, 0) = f(x)$ e $H_1(x) = H(x, 1) = g(x)$, ou seja, $H_0 = f$ e $H_1 = g$.*

Em outras palavras, a homotopia H deforma a aplicação f continuamente na aplicação g.



Para a prova da proposição a seguir, usaremos o

Lema 1.6.1 (Lema da Colagem) *Sejam X e Y espaços topológicos e A e B subconjuntos fechados de X tais que $A \cup B = X$. Sejam $f : A \longrightarrow Y$ e $g : B \longrightarrow Y$ aplicações contínuas satisfazendo a condição: $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cap B$. Então a aplicação $h : X \longrightarrow Y$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \in A \\ g(x) & se \quad x \in B \end{cases}$$

é contínua.

Proposição 1.6.1 *Sejam X e Y espaços topológicos. A relação de homotopia, $f \simeq g$, é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas de X em Y.*

Demonstração: Sejam $f, g, h : X \longrightarrow Y$ contínuas.

Reflexiva: Definamos $H : X \times I \longrightarrow Y$ por $H(x,t) = f(x)$. Por f ser contínua, H também o é. Além disso,

$$H(x,0) = f(x) \quad e \quad H(x,1) = f(x), \forall x \in X.$$

Portanto,

$$f \simeq f.$$

Simétrica: Seja $H : X \times I \longrightarrow Y$ uma homotopia entre f e g. Então

$$H(x,0) = f(x) \quad e \quad H(x,1) = g(x), \forall x \in X.$$

Definamos $K : X \times I \longrightarrow Y$ por $K(x,t) = H(x, 1-t)$. K é contínua pois H é contínua. Ainda,

$$K(x,0) = H(x,1) = g(x) \quad e \quad K(x,1) = H(x,0) = f(x), \forall x \in X.$$

Assim, $K : g \simeq f$.

Portanto,

$$f \simeq g \Rightarrow g \simeq f.$$

Transitiva: Sejam $H : f \simeq g$ e $K : g \simeq h$. Então, para todo $x \in X$,

$$H(x,0) = f(x) \quad e \quad H(x,1) = g(x)$$

$$K(x,0) = g(x) \quad e \quad K(x,1) = h(x).$$

Definamos $L : X \times I \longrightarrow Y$ por:

$$L(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & se\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x,2t-1), & se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se $t = \frac{1}{2}$,

$$H(x, 2\frac{1}{2}) = H(x,1) = g(x) \quad e \quad K(x, 2\frac{1}{2} - 1) = K(x,0) = g(x).$$

Assim, pelo fato de H e K serem contínuas, segue pelo Lema 1.6.1 (Lema da Colagem) que L é contínua.

Como

$$L(x,0) = H(x,0) = f(x) \quad e \quad L(x,1) = K(x,1) = h(x),$$

$L : f \simeq h$.

Portanto,

$$f \simeq g \quad e \quad g \simeq h \Rightarrow f \simeq h.$$

■

As classes de equivalência segundo a relação de homotopia $\simeq$ são chamadas classes de homotopia. A classe de homotopia de uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ é indicada por $[f]$.

Homotopia de Caminhos

Vamos considerar um caso particular do conceito de geral de homotopia. Definiremos homotopias de caminhos, isto é, de aplicações contínuas $a : I \longrightarrow X$, definidas no intervalo compacto $I = [0,1]$.

Na definição de homotopia de caminhos exigiremos que, durante a homotopia, os extremos dos caminhos sejam mantidos fixos. Assim, é necessário que os caminhos possuam as mesmas extremidades.

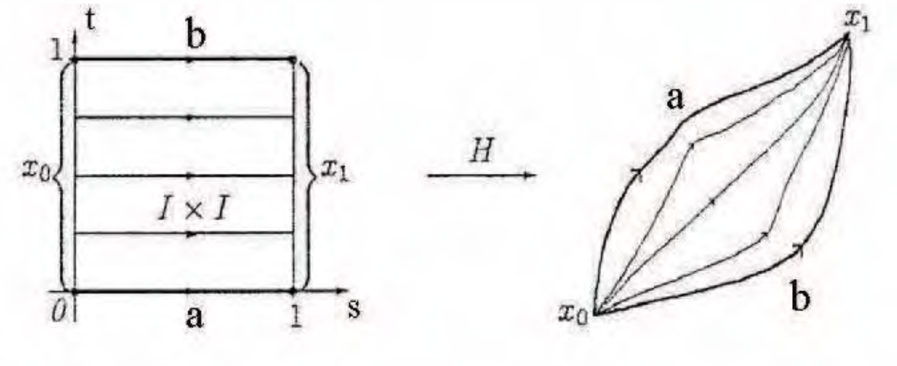
Definição 1.6.1 *Dizemos que $a, b : I \longrightarrow X$ são caminhos homotópicos quando existir uma aplicação $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que, para todo $s, t \in I$,*

$$H(s,0) = a(s)$$

$$H(s,1) = b(s)$$

$$H_t(0) = H(0,t) = a(0) = b(0) = x_0$$

$$H_t(1) = H(1,t) = a(1) = b(1) = x_1.$$



Neste trabalho, consideraremos os caminhos fechados: aqueles em que $a(0) = a(1)$, também chamados de laços.

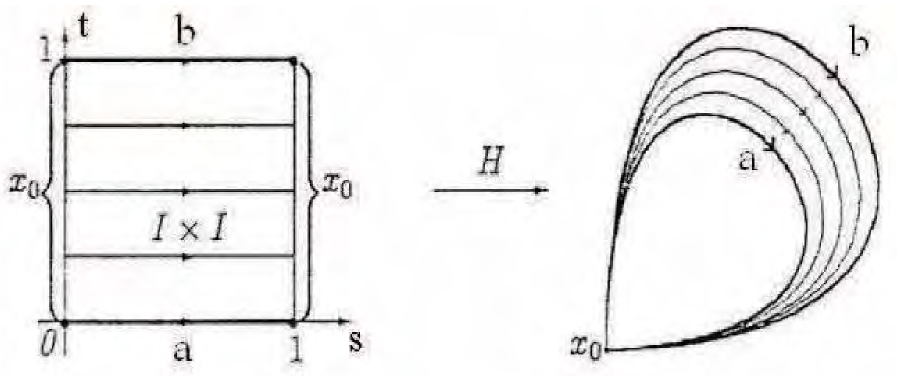
Definição 1.6.2 *Dois caminhos fechados $a, b : I \longrightarrow X$ são homotópicos quando existe uma aplicação contínua $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que, colocando $a(0) = a(1) = b(0) = b(1) = x_0 \in X$, tem-se*

$$H(s,0) = a(s)$$

$$H(s,1) = b(s)$$

$$H_t(0) = H_t(1) = x_0$$

para quaisquer $s, t \in I$.



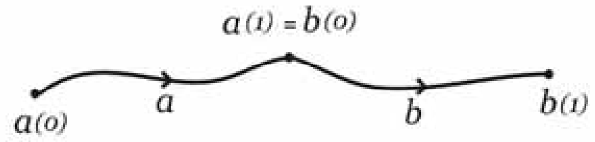
Indicaremos por $\alpha = [a]$ a classe de homotopia do caminho $a : I \longrightarrow X$, isto é, o conjunto de todos os caminhos em X que possuem as mesmas estremidades que a e que são homotópicos a a, com extremos fixos durante a homotopia.

E indicaremos por e_x o caminho constante, tal que $e_x(s) = x$ para todo $s \in I$. Para sua classe de homotopia, usaremos a notação $\varepsilon_x = [e_x]$.

Definição 1.6.3 *Sejam $a, b : I \longrightarrow X$ caminhos tais que o ponto final de a coincide com o ponto inicial de b. Definimos a justaposição dos caminhos a e b como sendo a aplicação $ab : I \longrightarrow X$ dada por:*

$$ab(t) = \begin{cases} a(2t), & se\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ b(2t-1), & se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Como $a(1) = b(0)$, a aplicação $ab : I \longrightarrow X$ é bem definida e contínua. Portanto, ab é um caminho que começa em $a(0)$ e termina em $b(1)$.



Capítulo

2

Grupo de Homotopia

2.1 Grupo Fundamental

Nesta seção, consideraremos pares do tipo (X, x_0), onde $x_0 \in X$ será chamado o ponto base do espaço topológico X. Os caminhos fechados $a : (I, \dot{I}) \longrightarrow (X, x_0)$ serão chamados laços baseados em x_0. O conjunto $\dot{I}$ é a fronteira de I, ou seja, $\dot{I} = \{0, 1\}$.

Definição 2.1.1 *O Grupo Fundamental do espaço X com ponto base em x_0, denotado por $\pi_1(X, x_0)$, é o conjunto formado pelas classes de homotopia de laços baseados em x_0, munido da operação "$*$" definida por $[a]*[b] = [ab]$, sendo a e b laços baseados em x_0, e ab a justaposição desses caminhos .*

O elemento neutro é a classe de homotopia $\varepsilon = \varepsilon_{x_0} = [e_{x_0}]$ do caminho constante no ponto x_0.

O elemento inverso de uma classe de homotopia $\alpha = [a]$ é definido por $\alpha^{-1} = [a^{-1}]$, onde a^{-1} é o caminho inverso do caminho a.

Exemplo 2.1.1 *O grupo fundamental da circunferência S^1 é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos inteiros.*

A demonstração pode ser encontrada em [3], proposição 4, p. 57.

Exemplo 2.1.2 *Para $n \geq 2$, o grupo fundamental do espaço projetivo P^n possui dois elementos, portanto é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.*

A demonstração pode ser encontrada em [3], Corolário, p. 78.

<u>*Espaços Simplesmente Conexos*</u>

Definição 2.1.2 *Um espaço topológico X é simplesmente conexo quando é conexo por caminhos e $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ para todo $x_0 \in X$.*

Isto significa que, para todo laço $a : I \longrightarrow X$, baseado em x_0, tem-se $a \simeq e_{x_0}$.

Exemplo 2.1.3 *Se $n > 1$, a esfera S^n é simplesmente conexa.*

Veja [3], Proposição 7, p. 44.

Observamos que, no caso em que $n = 1$, a círcunferência não é simplesmente conexa, visto que seu grupo fundamental não é o trivial.

2.2 Grupos de Homotopia de Ordem Superior

A definição do n-ésimo Grupo de Homotopia de um espaço X, $\pi_n(X, x_0)$, é estritamente análoga a do Grupo Fundamental. Substituímos o intervalo $I = [0, 1]$ pelo cubo n-dimensional I^n constituído dos pontos $t = (t_1, ..., t_n)$ pertencentes ao espaço $\mathbb{R}^n$ tais que $0 \leq t_i \leq 1$ $(i = 1, ..., n)$.

Uma (n-1)-face do cubo I^n é obtida fazendo-se um ou mais $t_i = 0$ ou $t_i = 1$. A união das (n-1)-faces forma o bordo $\dot{I^n}$ de I^n.

Considerando as aplicações de I^n em X que levam $\dot{I^n}$ em x_0, os elementos de $\pi_n(X, x_0)$ são as classes de homotopia de tais aplicações.

Definamos a operação " + " entre duas aplicações f_1 e f_2 por

$$(f_1 + f_2)(t) = \begin{cases} f_1(2t_1, t_2, ..., t_n); & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n); & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

e assim temos a seguinte definição:

Definição 2.2.1 *Sejam X um espaço topológico e $x_0 \in X$. $\pi_n(X, x_0)$ é o conjunto das classes de homotopias de aplicações $f : I^n \longrightarrow X$, tais que $f(\dot{I^n}) = \{x_0\}$. Esse conjunto, munido da operação " + " definida por $[f] + [g] = [f + g]$, é um grupo, chamado o n-ésimo Grupo de Homotopia do espaço X.*

Um elemento de $\pi_n(X, x_0)$ será denotado por $[f]$.

Observação 2.2.1 *Se o bordo de um cubo n-dimensional é identificado a um ponto, obtemos uma configuração topologicamente equivalente a da esfera S^n e um ponto referencial s_0 em S^n. Daí segue-se que um elemento de $\pi_n(X, x_0)$ pode ser visto como uma classe de homotopia de uma aplicação de S^n em X, com s_0 sendo levado em x_0.*

A (n-1)-face inicial do cubo I^n, denotada por I^{n-1}, é definida fazendo-se $t_n = 0$.

A união de todas as (n-1)-faces restantes de I^n é denotada por J^{n-1}.

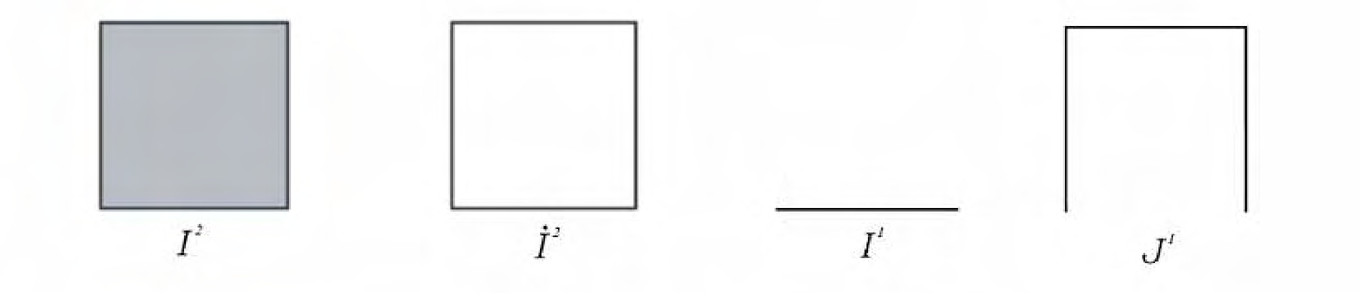
Então,

$$\dot{I}^n = I^{n-1} \cup J^{n-1}$$

e

$$\dot{I}^{n-1} = I^{n-1} \cap J^{n-1}.$$

Quando $n = 2$,



Vamos definir o Grupo de Homotopia Relativa de X módulo A.

Sejam X um espaço, A um subespaço de X e x_0 um ponto pertencente a A.

Uma aplicação

$$f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0) \tag{2.2}$$

é uma aplicação contínua de I^n em X, que leva I^{n-1} em A e J^{n-1} em x_0.

Em particular, f leva $\dot{I}^n$ em A e $\dot{I}^{n-1}$ em x_0.

Denotaremos por $F^n(X, A, x_0)$ o conjunto de todas as aplicações $f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$. Quando não houver dúvidas sobre o espaço, subespaço e ponto básico que estamos trabalhando, denotaremos $F^n(X, A, x_0)$ apenas por F^n.

Quando f_1 e f_2 pertencerem à F^n, a soma $f_1 + f_2$ será definida de acordo com a equação 2.1.

Assim, se $n \geq 2$ e $t_1 = \frac{1}{2}$, ambas funções se reduzem a x_0. Daí, $f_1 + f_2$ pertence à F^n quando $n \geq 2$. Quando $n = 1$, $f_1 + f_2$ pertence à F^n se $A = \{x_0\}$.

Com isso, podemos definir:

Definição 2.2.2 *Duas aplicações f_1, f_2 pertencentes à $F^n(X, A, x_0)$ são homotópicas em $F^n(X, A, x_0)$ (e denota-se $f_1 \simeq f_2$) se existir uma aplicação $H : I^n \times I \longrightarrow X$ tal que, para todo t pertencente à I^n,*

$$H(t, 0) = f_1(t), \qquad H(t, 1) = f_2(t)$$

e para cada τ pertencente à I, a aplicação $H_\tau : I^n \longrightarrow X$ definida por

$$H_\tau(t) = H(t, \tau)$$

pertence à $F^n(X, A, x_0)$.

Com uma adequada Topologia de Espaços de Funções em F^n, podemos dizer que f_1 e f_2 são ligadas por uma curva em F^n.

Sejam $f, g \in F^n(X, A, x_0)$. A relação de homotopia $\simeq$ é:

Reflexiva: Defina $H : I^n \times I \longrightarrow X$ por $H(t, \tau) = f(t)$. H é contínua pois f é contínua. Além disso, para todo $t \in I^n$ e todo $\tau \in I$,

$$H(t, 0) = H(t, 1) = f(t),$$

$$H_\tau(I^{n-1}) = f(I^{n-1}) \subset A,$$

$$H_\tau(J^{n-1}) = f(J^{n-1}) = \{x_0\}.$$

Logo,

$$f \simeq f.$$

Simétrica: Seja $H : f \simeq g$. Então, $H(t, 0) = f(t)$, $H(t, 1) = g(t)$, $H_\tau(I^{n-1}) \subset A$ e $H_\tau(J^{n-1}) = \{x_0\}$, para todo $t \in I^n$ e todo $\tau \in I$.

Consideremos $K : I^n \times I \longrightarrow X$, $K(t, \tau) = H(t, 1 - \tau)$. Temos que K é contínua e, para todo $t \in I^n$ e todo $\tau \in I$,

$$K(t, 0) = H(t, 1) = g(t),$$

$$K(t, 1) = H(t, 0) = f(t),$$

$$K_\tau(I^{n-1}) = H_{1-\tau}(I^{n-1}) \subset A,$$

$$K_\tau(J^{n-1}) = H_{1-\tau}(J^{n-1}) = \{x_0\}.$$

Daí,

$$f \simeq g \Rightarrow g \simeq f.$$

Transitiva: Sejam $H : f \simeq g$ e $K : g \simeq h$. Daí,

$$H(t, 0) = f(t), \quad H(t, 1) = g(t), \quad H_\tau(I^{n-1}) \subset A, \quad H_\tau(J^{n-1}) = \{x_0\}$$

e

$$K(t, 0) = g(t), \quad K(t, 1) = h(t), \quad K_\tau(I^{n-1}) \subset A, \quad K_\tau(J^{n-1}) = \{x_0\},$$

para todo $t \in I^n$ e todo $\tau \in I$.

Definamos $L : I^n \times I \longrightarrow X$ por $L(t, \tau) = \begin{cases} H(t, 2\tau), & se\ 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ K(t, 2\tau - 1), & se\ \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1 \end{cases}$.

Pelo Lema da Colagem 1.6.1, a aplicação H é contínua e está bem definida pois, se $\tau = \frac{1}{2}$, $H(t,1) = K(t,0) = g(t)$, para todo $t \in I^n$.

Além disso, para todo $t \in I^n$ e todo $\tau \in I$,

$$L(t,0) = H(t,0) = f(t),$$

$$L(t,1) = K(t,1) = h(t),$$

$$L_\tau(I^{n-1}) = \begin{cases} H_\tau(I^{n-1}), & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ K_\tau(I^{n-1}), & \frac{1}{2} \leq 0 \leq \tau \end{cases} \Rightarrow L_\tau(I^{n-1}) \subset A,$$

$$L_\tau(J^{n-1}) = \begin{cases} H_\tau(J^{n-1}), & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ K_\tau(J^{n-1}), & \frac{1}{2} \leq 0 \leq \tau \end{cases} \Rightarrow L_\tau(J^{n-1}) = \{x_0\}.$$

Portanto,

$$f \simeq g \ e \ g \simeq h \Rightarrow f \simeq h.$$

Desse modo, definimos

$$\pi_n(X, A, x_0) = \frac{F^n}{\simeq}.$$

Se $f_i \simeq f_i'$ $(i = 1,2)$ em F^n, podemos combinar as duas homotopias para obter uma homotopia $f_1 + f_2 \simeq f_1' + f_2'$. Sendo assim, se α, β são elementos em π_n com $f_1 \in \alpha$ e $f_2 \in \beta$, todaa as somas $f_1 + f_2$ pertencem à uma única classe de homotopia γ de π_n. Desta forma, definimos a adição em π_n por $\alpha + \beta = \gamma$.

Com relação à essa adição, π_n é um grupo. A lei associativa é demonstrada exibindo uma homotopia $(f_1 + f_2) + f_3 \simeq f_1 + (f_2 + f_3)$. Tal homotopia é baseada na homotopia do eixo t_1, onde alongamos o intervalo $[0, \frac{1}{4}]$ em $[0, \frac{1}{2}]$, transladamos $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ em $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e contraímos $[\frac{1}{2}, 1]$ em $[\frac{3}{4}, 1]$.

O <u>*zero*</u> do grupo é a classe de homotopia da aplicação constante: $f_0(I^n) = \{x_0\}$. A relação $f_0 + f \simeq f$ para toda f é provada deformando-se o intervalo I do eixo t_1 de forma que $[0, \frac{1}{2}]$ reduza a 0 e $[\frac{1}{2}, 1]$ dilate para $[0,1]$.

Além do mais, uma aplicação $f \in F^n$ com imagem contida em A representa o zero.

Isso pode ser visto do seguinte modo: seja H a homotopia de I^n sobre si mesmo, a qual contrai I^n na face onde $t_n = 1$. Tal homotopia é dada por

$$H(t,\tau) = (t_1, ..., t_{n-1}, (1-\tau)t_n + \tau).$$

Tomando $t = (t_1, ..., t_n) \in I^n$,

$$H(t,0) = (t_1, ..., t_{n-1}, t_n) = t,$$

e

$$H(t,1) = (t_1, ..., t_{n-1}, 1) \in J^{n-1}.$$

Então, $H'(t,\tau) = f(H(t,\tau))$ é uma homotopia em F^n de f em f_0, pois

$$H'(t,0) = f(t),$$

$$H'(t,1) = f(t_1, ..., t_{n-1}, 1) = x_0 = f_0(t),$$

$$H'_\tau(I^{n-1}) = f(H_\tau(I^{n-1})) \subset f(I^n) \subset A,$$

$$H'_\tau(J^{n-1}) = f(H_\tau(J^{n-1})) \subset f(J^{n-1}) = \{x_0\},$$

para quaisquer $t \in I^n$ e $\tau \in I$.

Se $f \in F^n$, então

$$\overline{f}(t) = f(1 - t_1, t_2, ..., t_n)$$

também está em F^n. E $f + \overline{f}$, $\overline{f} + f$ são ambas homotópicas a uma aplicação constante. Desde que $\overline{\overline{f}} = f$, para ver isto é suficiente considerar $f + \overline{f}$.

Temos

$$(f + \overline{f})(t) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, ..., t_n); & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \overline{f}(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n); & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Considerando $H(t_1, ..., t_n, \tau) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, ..., t_n); & 0 \leq t_1 \leq \frac{\tau}{2} \\ f(\tau, t_2, ..., t_n); & \frac{\tau}{2} \leq t_1 \leq 1 - \frac{\tau}{2} \\ \overline{f}(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n); & 1 - \frac{\tau}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$, tem-se

$$H(t_1, ..., t_n, 0) = \begin{cases} f(0, t_2, ..., t_n); & se\ t_1 = 0 \\ f(0, t_2, ..., t_n); & se\ 0 \leq t_1 \leq 1 \\ \overline{f}(0, t_2, ..., t_n); & se\ t_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow H(t,0) = x_0,$$

$$H(t_1, ..., t_n, 1) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, ..., t_n); & se\ 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ f(1, t_2, ..., t_n); & se\ t_1 = \frac{1}{2} \\ \overline{f}(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n); & se\ \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow H(t,1) = (f + \overline{f})(t),$$

pois, se $t_1 = \frac{1}{2}$, $\overline{f}(2.\frac{1}{2} - 1, t_2, .., t_n) = f(1, t_2, ..., t_n)$.

Além disso,

$$H_\tau(I^{n-1}) \subset A$$

e

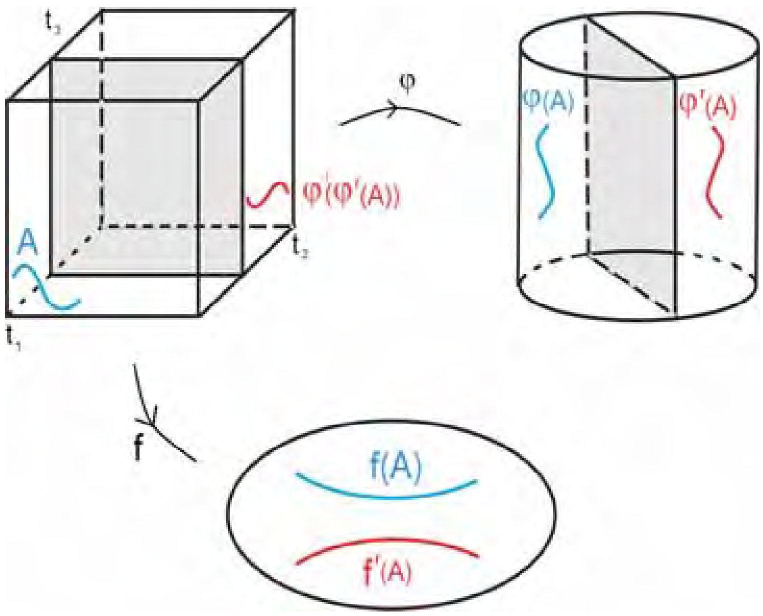
$$H_\tau(J^{n-1}) = \{x_0\}.$$

Dessa forma, tomando $G(t_1, ..., t_n, \tau) = H(t_1, ..., t_n, 1-\tau)$, obtemos uma homotopia entre $f + \overline{f}$ e uma constante.

Definição 2.2.3 *O conjunto $\pi_n(X, A, x_0)$, formado pelas classes de homotopias das aplicações $f \in F^n(X, A, x_0)$ e com a operação "$+$", é um grupo chamado o Grupo de Homotopia Relativa n-dimensional de X mod A com ponto base x_0.*

Tal grupo é definido para $n \geq 2$. No caso em que $A = \{x_0\}$, o grupo também é definido para $n = 1$ e coincide com o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$. Em geral, quando $A = \{x_0\}$, escrevemos $\pi_n(X, x_0)$.

A notação aditiva tem sido usada porque $\pi_n(X, x_0)$ é abeliano para $n > 1$, e $\pi_n(X, A, x_0)$ é abeliano para $n > 2$. A idéia da demonstração para o caso $n = 3$ está apresentada abaixo e pode ser visualizada na figura seguinte:



Escolhemos um homeomorfismo φ entre o cubo de dimensão 3 e um cilindro, cujo plano $t_1 = \frac{1}{2}$ é um plano diametral. Uma rotação do cilindro em 180º permutará suas duas metades. A menos de homeomorfismo, a rotação anterior corresponde a "rotação" do cubo. Se f é uma aplicação do cubo, a composição de f e a rotação do cilindro é uma homotopia de f na aplicação f^r. Como a rotação permuta as duas metades do cilindro, obtemos, para $f_1, f_2 \in F^n$,

$$f_1 + f_2 \simeq (f_1 + f_2)^r = f_2^r + f_1^r \simeq f_2 + f_1$$

que é o resultado desejado.

Quando $n = 2$, a homotopia de rotação não mantém o conjunto J^{n-1} em x_0. No entanto, a homotopia de rotação se move em A. Mas se $A = \{x_0\}$, o mesmo argumento mostra que $\pi_2(X, x_0)$ é abeliano. A demosntração para $n > 3$ é a mesma; visto que a rotação será no plano (t_1, t_2) e as variáveis restantes não entram na construção.

Observação 2.2.2 *Observe que* $f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$ *satisfaz* $f(I^{n-1}) \subset A$ *e* $f(J^{n-1}) = \{x_0\}$. *Mas,* $\dot{I}^n = I^{n-1} \cup J^{n-1}$ *e* $x_0 \in A$. *Logo,* $f(\dot{I}^n) \subset A$.

Desse modo, a aplicação f também pode ser vista da seguinte maneira:

$$f : (I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0).$$

Desde que

$$(\frac{I^n}{J^{n-1}}, \frac{\dot{I}}{J^{n-1}}, \frac{J^{n-1}}{J^{n-1}}) \approx (D^n, S^{n-1}, s_0),$$

uma definição alternativa para os elementos do grupo $\pi_n(X, A, x_0)$ *é a classe de homotopia de aplicações* $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$, *onde* D^n *é o disco n-dimensional e* s_0 *um ponto em* S^{n-1}.

Observação 2.2.3 *Para os cálculos do capítulo* 5 *necessitaremos do conhecimento dos grupos de homotopia da esfera* S^n, $1 \leq n \leq 6$, *para os níveis de homotopia de* 1 *a* 6. *(Os resultados abaixo podem ser vistos em [1], p.339 e [7], p.215).*

- $\pi_k(S^n)$

	k					
n	1	2	3	4	5	6
1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$
3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$
4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$

- $\pi_k(S^n) = 0, \ \forall k < n;$
- $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}, \ \forall n;$
- $\pi_k(S^1) = 0, \ \forall k > 1.$

O Operador Bordo: é um homomorfismo

$$\delta : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A, x_0) \tag{2.3}$$

definido escolhendo uma aplicação f representando α em $\pi_n(X, A, x_0)$ e restringindo f à face inicial I^{n-1} de I^n.

Temos $f(J^{n-1}) = \{x_0\}$. Mas $\dot{I}^{n-1} = I^{n-1} \cap J^{n-1}$, então $f(\dot{I}^{n-1}) = \{x_0\}$.

Como $\dot{I}^{n-1} = I^{n-2} \cup J^{n-2}$, f restrita à face I^{n-1} é uma aplicação

$$\delta f : (I^{n-1}, I^{n-2}, J^{n-2}) \longrightarrow (A, x_0, x_0).$$

A homotopia de f_0 em f_1, em F^n, restrita à $I^{n-1} \times I$ fornece uma homotopia de δf_0 em δf_1, em $F^{n-1}(A, x_0)$. Portanto, $f \longrightarrow \delta f$ induz uma aplicação de classes de homotopia. E,

$$\delta(f_1 + f_2) = \delta f_1 + \delta f_2.$$

A aplicação 2.3 está bem definida e é um homomorfismo.

Desse modo, $\delta([f]) = [\delta f]$.

<u>O Homomorfismo Induzido:</u> Seja $h : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$ uma aplicação contínua.

Para toda f pertencente a $F^n(X, A, x_0)$ a composição $h \circ f$ pertence a $F^n(Y, B, y_0)$.

Desse modo, h define uma aplicação

$$h_* : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$$

por $h_*([f]) = [h \circ f]$, que é um homomorfismo, chamado *homomorfismo induzido por h.*

Proposição 2.2.1 *O grupo de homotopia de um produto cartesiano $X \times Y$ é isomorfo ao produto cartesiano dos grupos de homotopia de X e Y.*

Demonstração: Consideremos os espaços X, Y e x_0, y_0 seus respectivos pontos base. Consideremos também as aplicações projeções $q_1 : X \times Y \longrightarrow X$ e $q_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ dadas respectivamente por $q_1(x, y) = x$ e $q_2(x, y) = y$.

Definimos $\eta : \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$ por $\eta([f]) = (q_{1*}([f]), q_{2*}([f]))$.

Sendo $[f], [g] \in \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$, a aplicação η está bem definida pois

$$[f] = [g] \Rightarrow f \simeq g \Rightarrow \begin{cases} q_1 \circ f \simeq q_1 \circ g \\ q_2 \circ f \simeq q_2 \circ g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [q_1 \circ f] = [q_1 \circ g] \\ [q_2 \circ f] = [q_2 \circ g] \end{cases} \Rightarrow \eta([f]) = \eta([g]).$$

Além disso,

$$\eta([f] + [g]) = (q_{1*}([f] + [g]), q_{2*}([f] + [g])) = (q_{1*}([f]) + q_{1*}([g]), q_{2*}([f]) + q_{2*}([g])) =$$

$$= (q_{1*}([f]), q_{2*}([f])) + (q_{1*}([g]), q_{2*}([g])) = \eta([f]) + \eta([g]),$$

o que torna η um homomorfirsmo.

Tem-se também

$$\eta([f]) = \eta([g]) \Rightarrow (q_{1*}([f]), q_{2*}([f])) = (q_{1*}([g]), q_{2*}([g])) \Rightarrow \begin{cases} q_{1*}([f]) = q_{1*}([g]) \\ q_{2*}([f]) = q_{2*}([g]) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [q_1 \circ f] = [q_1 \circ g] \\ [q_2 \circ f]) = [q_2 \circ g] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 \circ f \simeq q_1 \circ g \\ q_2 \circ f \simeq q_2 \circ g \end{cases} \Rightarrow f \simeq g \Rightarrow [f] = [g].$$

Desse modo, η é injetiva.

Tomando $([f], [g]) \in \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$, temos $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ e $[g] \in \pi_n(Y, y_0)$. Então $f : I^n \longrightarrow X$ é tal que $f(\dot{I^n}) = \{x_0\}$ e $g : I^n \longrightarrow Y$ é tal que $g(\dot{I^n}) = \{y_0\}$.

Com isso, definimos $h : I^n \longrightarrow X \times Y$ por $h(t) = (f(t), g(t))$, onde $h(\dot{I^n}) = \{(x_0, y_0)\}$.

Logo, $[h] \in \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$ e

$$\eta([h]) = (q_{1*}([h]), q_{2*}([h])) = ([q_1 \circ h], [q_2 \circ h]) = ([f], [g]),$$

pois $q_1 \circ h(t) = f(t)$ e $q_2 \circ h(t) = g(t)$, para todo $t \in I^n$.

Então η é sobrejetiva.

Nessas condições, η é isomorfismo. ■

2.3 Propriedades Elementares

O grupo π_n e os dois tipos de homomorfismos δ e h_*, possuem algumas propriedades básicas. Para enunciarmos uma das propriedades que necessitamos, precisamos da seguinte definição:

Definição 2.3.1 *Sejam $i : (A, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ e $j : (X, x_0, x_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ as aplicações inclusões.*

A seqüência infinita de grupos e homomorfismos

$$\ldots \xrightarrow{\delta} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\delta}$$

$$\pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots \xrightarrow{j_*} \pi_2(X, A, x_0) \xrightarrow{\delta} \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0)$$

é chamada **a seqüência de homotopia da tripla** (X, A, x_0).

Para mostrar que a seqüência acima é exata, necessitaremos da seguinte:

Proposição 2.3.1 (Critério da Compressão) *Uma aplicação $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ representa o zero em $\pi_n(X, A, x_0)$ se, e somente se, f é homotópica relativamente a S^{n-1} à uma aplicação que possui imagem contida em A.*

Demonstração:($\Longrightarrow$) Suponhamos que $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ representa o zero em $\pi_n(X, A, x_0)$, ou seja, $[f] = 0$. Então existe uma homotopia entre a aplicação f e uma aplicação constante em x_0.

Seja $F : D^n \times I \longrightarrow X$ tal homotopia. Daí, para todo $x \in D^n$,

$$F(x, 0) = f(x) \;\; e \;\; F(x, 1) = x_0,$$

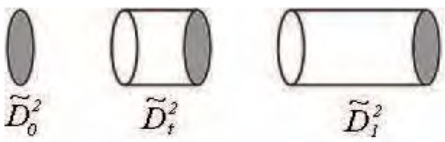
e para todo $t \in I$ e todo $u \in S^{n-1}$,

$$F_t(u) \in A \;\; e \;\; F_t(s_0) = x_0.$$

Observe que existe uma família de n-discos (a menos de homeomorfismos) em $D^n \times I$, iniciando em $D^n \times \{0\}$ e terminando em $D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times I$, a saber, $\mathcal{F} = (\widetilde{D}_t^n)_{t \in I}$, dados por

$$\widetilde{D}_t^n = D^n \times \{t\} \cup S^{n-1} \times [0, t].$$

Ilustrando para o caso $n = 2$.



Note que $\partial \widetilde{D}_t^n = S^{n-1} \times \{0\} \subset D^n \times I$, para todo $t \in I$, ou seja, todos os discos dessa família possuem o mesmo bordo e $D^n \times I = \bigcup_{t \in I} \widetilde{D}_t^n$.

Definamos uma homotopia $\tilde{F} : D^n \times I \longrightarrow X$, onde $\tilde{F} = F \mid_{\mathcal{F}}$.

$$\tilde{F}(x, 0) = F \mid_{\mathcal{F}} (x, 0) = F(x, 0) = f(x), \forall x \in D^n.$$

Definamos $g(x) := \tilde{F}(x, 1)$.

$$g(D^n) = \tilde{F}(D^n \times \{1\}) = F \mid_{\mathcal{F}} (D^n \times \{1\}) = F(D^n \times \{1\}) = \{x_0\} \subset A.$$

Então

$$g(D^n) \subset A.$$

Além disso, para todo $t \in I$ e para todo $u \in S^{n-1}$,

$$\tilde{F}(u, t) = F \mid_{\mathcal{F}} (u, t) \in A$$

e

$$\tilde{F}(s_0, t) = F \mid_{\mathcal{F}} (s_0, t) = x_0.$$

Nessas condições, f é homotópica a uma aplicação g em $F^n(X, A, x_0)$, onde g possui imagem contida em A.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ seja homotópica à uma aplicação $g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ em $F^n(X, A, x_0)$ e tal que $g(D^n) \subset A$.

Sendo $H : D^n \times I \longrightarrow X$ tal homotopia, temos

$$H(x, 0) = f(x) \ \ e \ \ H(x, 1) = g(x), \forall x \in D^n,$$

e para todo $t \in I$,

$$H_t(S^{n-1}) = H(S^{n-1} \times I) \subset A \ \ e \ \ H_t(s_0) = H(\{s_0\} \times I) = \{x_0\}.$$

Afirmação 2.3.1 $[g] = 0$ *em* $\pi_n(X, A, x_0)$.

De fato, como D^n é convexo, então definamos uma aplicação contínua $F : D^n \times I \longrightarrow D^n$ por $F(x, t) = (1 - t)s_0 + tx$ (segmento ligando s_0 à x).

$$F(x, 0) = (1 - 0)s_0 + 0s_0 = s_0 \ \ e \ \ F(x, 1) = (1 - 1)s_0 + 1x = x = id_{D^n}(x),$$

para qualquer $x \in D^n$.

Tomemos a aplicação $F' : D^n \times I \longrightarrow X$ dada por $F'(x, t) = g \circ F(x, t)$.

$$F'(x, 0) = g \circ F(x, 0) = g(s_0) = x_0 \ \ e \ \ F'(x, 1) = g \circ F(x, 1) = g(x),$$

para qualquer $x \in D^n$. E para todo $t \in I$,

$$F'_t(S^{n-1}) = F'(S^{n-1} \times I) = g \circ F(S^{n-1} \times I) \subset g(D^n) \subset A$$

e

$$F'_t(s_0) = g \circ F(s_0) = g((1 - t)s_0 + ts_0) = g(s_0 - ts_0 + ts_0) = g(s_0) = x_0.$$

Portanto,

$$g \simeq cte(x_0) \Rightarrow [g] = 0.$$

Nessas condições,

$$[f] = [g] \ \ e \ \ [g] = 0 \ \ em \ \ \pi_n(X, A, x_0).$$

Logo,

$$[f] = 0 \ \ em \ \ \pi_n(X, A, x_0).$$

■

A propriedade que necessitamos é a seguinte:

Propriedade 2.3.1 *A sequência de homotopia da tripla* (X, A, x_0) *é exata.*

Demonstração: Mostremos que $Im(j_*) = Ker(\delta)$ em $\pi_n(X, A, x_0)$.

$$\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(A, x_0)$$

Sejam $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$ e $f \in F^n(X, x_0)$ tal que $\alpha = [f]$. Daí,

$$f : I^n \longrightarrow X$$

$$f(I^{n-1}) = \{x_0\}$$

$$f(J^{n-1}) = \{x_0\}$$

Como $j : (X, x_0, x_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$, tem-se

$$j \circ f : I^n \longrightarrow X$$

$$j \circ f(I^{n-1}) = \{x_0\} \subset A$$

$$j \circ f(J^{n-1}) = \{x_0\}$$

Então

$$j_*(\alpha) = [j \circ f].$$

Assim,

$$\delta(j_*(\alpha)) = \delta([j \circ f]).$$

Mas, pela definição de δ,

$$\delta([j \circ f]) = [(j \circ f) \mid_{I^{n-1}}] = [x_0] = 0.$$

Logo,

$$\delta(j_*(\alpha)) = 0 \Rightarrow j_*(\alpha) \in Ker(\delta).$$

Portanto,

$$Im(j_*) \subset Ker(\delta).$$

Sejam agora $f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$ tal que $\delta([f]) = 0 \in \pi_{n-1}(A, x_0)$.
Então, $f \mid_{I^{n-1}} \simeq g$, $g : (I^{n-1}, I^{n-2}, J^{n-2}) \longrightarrow (A, x_0)$ e $g(I^{n-1}) = \{x_0\}$.
Seja $H : I^{n-1} \times I \longrightarrow A$ tal homotopia. Então,

$$H(x, 0) = f \mid_{I^{n-1}} (x),$$

$$H(x,1) = g(x) = x_0,$$

$$H_t(I^{n-2}) = \{x_0\},$$

$$H_t(J^{n-2}) = \{x_0\}.$$

Estenderemos H a uma aplicação H' da seguinte forma:

$$H'(x,t) = \begin{cases} H(x,t), & se\ (x,t) \in I^{n-1} \times I \\ f(x), & se\ (x,t) \in I^n \times \{0\} \\ x_0, & se\ (x,t) \in J^{n-1} \times I \end{cases}.$$

Dessa forma, H' passa a ser definida em $E = (I^n \times \{0\}) \cup (\dot{I}^n \times I)$ e é contínua.

O conjunto E é exatamente uma n-célula sobre o bordo da $(n+1)$-célula $I^n \times I$. Dessa forma, pela observação 1.2.1, E é um sólido.

Além disso, E é um espaço métrico compacto. Então, pela propriedade 1.2.1, E é um retrato absoluto. Dessa forma, existe uma retração $r : I^n \times I \longrightarrow E$.

$$I^n \times I \xrightarrow{r} E \xrightarrow{H'} X$$

Da composição entre a homotopia H' e a retração r resulta uma homotopia $H' \circ r : I^n \times I \longrightarrow X$.

Consideremos uma aplicação $f' : I^n \longrightarrow X$, de forma que $f'(\dot{I}^n) = \{x_0\}$. Como $\dot{I}^n = I^{n-1} \cup J^{n-1}$, tem-se

$$f'(I^{n-1}) = \{x_0\} \qquad e \qquad f'(J^{n-1}) = \{x_0\},$$

ou seja,

$$f' \in F^n(X, x_0).$$

Compondo j com f', obtemos a aplicação $j \circ f' : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$, e vamos defini-la por $j \circ f'(x) = H' \circ r(x, 1)$. Então,

$$H' \circ r(x,0) = H'(x,0) = f(x),$$

$$H' \circ r(x,1) = j \circ f'(x),$$

$$H' \circ r \in F^n(X, A, x_0),\ pois \begin{cases} H' \circ r(I^{n-1} \times I) \subset A \\ H' \circ r(J^{n-1} \times I) = \{x_0\} \end{cases}.$$

Logo,

$$[j \circ f'] = [f] \Rightarrow j_*([f]) = [f] \Rightarrow [f] \in Im(j_*).$$

Portanto, $Ker(\delta) \subset Im(j_*)$.

Nessas condições,

$$Ker(\delta) = Im(j_*).$$

Exatidão em $\pi_n(X, x_0)$.

Seja $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (A, x_0)$ uma aplicação de forma que $[f]$ é um elemento em $\pi_n(A, x_0)$. Compondo as aplicações j, i e f, obtemos a aplicação

$$j \circ i \circ f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0).$$

Mas,

$$f(D^n) \subset A \Rightarrow j \circ i \circ f(D^n) \subset A,$$

ou seja, $j \circ i \circ f \simeq j \circ i \circ f$ em $F^n(X, A, x_0)$ e $j \circ i \circ f(D^n) \subset A$. Logo, pelo Critério da Compressão, $[j \circ i \circ f]$ representa o zero em $\pi_n(X, A, x_0)$. Assim,

$$[j \circ i \circ f] = 0 \Rightarrow j_* \circ i_*([f]) = 0.$$

Portanto,

$$Im(i_*) \subset Ker(j_*).$$

De maneira análoga, seja $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$ tal que $j_*([f]) = 0$ em $\pi_n(X, A, x_0)$, ou seja, $[j \circ f] = 0$. Pelo Critério da Compressão, $j \circ f \simeq g$, $g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ e $g(D^n) \subset A$. Então, existe $H : D^n \times I \longrightarrow X$ de forma que

$$H(x, 0) = j \circ f(x)$$

$$H(x, 1) = g(x)$$

$$H_\tau(S^{n-1}) \subset A$$

$$H_\tau(s_0) = x_0.$$

Consideremos $h : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (A, x_0)$ definida por $\begin{cases} h(x) = g(x), & se\ x \in Int(D^n), \\ h(x) = x_0, & se\ x \in \dot{D}^n = S^{n-1}. \end{cases}$

Compondo h com a aplicação i, obtemos $i \circ h : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$.

Observe que, se $x \in Int(D^n)$,

$$i \circ h(x) = i \circ g(x) = g(x).$$

E se $x \in S^{n-1}$,

$$i \circ h(x) = f(x) = g(x) = x_0.$$

Vamos definir $K : D^n \times I \longrightarrow X$ por $K(x,t) = \begin{cases} H(x,t), & se\ x \in Int(D^n), \\ x_0, & se\ x \in S^{n-1}. \end{cases}$

Dessa forma,

$$K(x,0) = \begin{cases} H(x,0) = j \circ f(x) = f(x), & se\ x \in Int(D^n), \\ x_0 = f(x), & se\ x \in S^{n-1}. \end{cases}$$

$$K(x,1) = \begin{cases} H(x,1) = g(x) = i \circ h(x), & se\ x \in Int(D^n), \\ x_0 = i \circ h(x), & se\ x \in S^{n-1}. \end{cases}$$

$$K_\tau(S^{n-1}) = \{x_0\}$$

$$K_\tau(s_0) = \{x_0\}.$$

Assim, f é homotópica à $i \circ h$, de onde resulta que

$$[i \circ h] = [f] \Rightarrow i_*[h] = [f],$$

ou seja,

$$Ker(j_*) \subset Im(i_*).$$

Logo,

$$Ker(j_*) = Im(i_*).$$

Exatidão em $\pi_n(A, x_0)$.

Seja $[f] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$, onde $f : (I^{n+1}, I^n, J^n) \longrightarrow (X, A, x_0)$.

Temos que $\delta([f]) = [f\ |_{I^n}]$, e $f\ |_{I^n}: (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (A, x_0)$. Compondo com a aplicação i, $i \circ f\ |_{I^n}: (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, x_0)$.

Consideremos $g : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, x_0)$ a aplicação constante em x_0 $(g(x) = x_0, \forall x \in I^n)$.

Definimos $H : I^n \times I \longrightarrow X$ por

$$H(x,\tau) = H(t_1, ..., t_n, \tau) = i \circ f\ |_{I^n}\ ((1-\tau)t_1 + \tau, (1-\tau)t_2, ..., (1-\tau)t_n),$$

sendo $x = (t_1, ..., t_n)$.

Com isso,

$$H(x,0) = H(t_1, ..., t_n, 0) = i \circ f\ |_{I^n}\ (t_1, t_2, ..., t_n) = i \circ f\ |_{I^n}\ (x)$$

$$H(x,1) = H(t_1, ..., t_n, 1) = i \circ f\ |_{I^n}\ (1, 0, ..., 0) = x_0 = g(x)$$

$$H_\tau(I^{n-1}) = i \circ f\ |_{I^n}\ (I^{n-1}) = \{x_0\}$$

$$H_\tau(J^{n-1}) = i \circ f\mid_{I^n}(J^{n-1}) = \{x_0\}.$$

Dessa forma, $i \circ f\mid_{I^n} \simeq g$. Então, $[i \circ f\mid_{I^n}] = 0$.

Daí,

$$i_* \circ \delta([f]) = i_*([f\mid_{I^n}]) = [i \circ f\mid_{I^n}] = 0.$$

Portanto,

$$Ker(i_*) \subset Im(\delta).$$

Tomemos agora, $[f] \in Ker(i_*)$, $f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (A, x_0)$. Daí, $i_*([f]) = [i \circ f] = 0$ em $\pi_n(X, x_0)$. Pelo critério da compressão, $i \circ f \simeq g$, onde $g : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, x_0)$ e $g(I^n) = \{x_0\}$.

Sendo $F : I^n \times I \longrightarrow X$ a homotopia entre $i \circ f$ e g, temos

$$F(x, 0) = g(x) = x_0$$

$$F(x, 1) = i \circ f(x)$$

$$F_\tau(I^{n-1}) = \{x_0\}$$

$$F_\tau(J^{n-1}) = \{x_0\}$$

quaisquer que sejam $x \in I^n$ e $\tau \in I$.

Consideremos as aplicações $h : (I^{n+1}, I^n, J^n) \longrightarrow (X, A, x_0)$ definida por $h(x, t_{n+1}) = h(t_1, ..., t_n, t_{n+1}) = F((t_1, ..., t_n), 1 - t_{n+1})$, e $g' : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (A, x_0)$ definida por $g'(x) = g(x)$.

Note que $h(I^n) \subset A$ e $h(J^n) = \{x_0\}$. Além disso, $Im(g) = \{x_0\}$ então $Im(g') \subset A$. Desse modo, h e g são bem definidas.

De acordo com as definições de h e g, temos que $h\mid_{I^n} = g'$, de onde resulta que $\delta([h]) = [h\mid_{I^n}] = [g']$.

Assim, definimos a aplicação $H : I^n \times I \longrightarrow A$ por $H(x,t) = \begin{cases} f(tx), & se\ x \in Int(I^n), \\ x_0, & se\ x \in \dot{I^n}. \end{cases}$

Daí,

$$H(x, 0) = \begin{cases} f(0) = x_0 = g'(x), & se\ x \in Int(I^n), \\ x_0 = g'(x), & se\ x \in \dot{I^n}. \end{cases}$$

$$H(x, 1) = \begin{cases} f(x), & se\ x \in Int(I^n), \\ x_0 = f(x), & se\ x \in \dot{I^n}. \end{cases}$$

$$H_\tau(I^{n-1}) = \{x_0\}$$

$$H_\tau(J^{n-1}) = \{x_0\}.$$

Logo,

$$f \simeq g' \Rightarrow [f] = [g'],$$

e assim

$$\delta([h]) = [f].$$

Portanto,

$$Ker(i_*) \subset Im(\delta).$$

Nessas condições,

$$Ker(i_*) = Im(\delta).$$

■

Capítulo 3

Fibrados

Definição 3.0.2 *Um fibrado $\mathbb{B}$ consiste do seguinte:*

i) Um espaço topológico B chamado de espaço fibrado;

ii)Um espaço topológico X chamado de espaço base;

iii)Uma aplicação contínua $p : B \longrightarrow X$ chamada de projeção;

iv)Um espaço Y chamado de fibra.

O conjunto $Y_x = p^{-1}(x)$ é chamado de fibra sobre o ponto x de X. É exigido que Y_x seja homeomorfo a Y, para qualquer $x \in X$.

E mais, que para todo $x \in X$, existe uma vizinhança V de x e um homeomorfismo $\phi_V : V \times Y \longrightarrow p^{-1}(V)$ tal que

$$p \circ \phi_V = p_V$$

onde $p_V : V \times Y \longrightarrow V$ é a projeção na primeira coordenada. Nestas condições dizemos que p é uma fibração localmente trivial com fibra típica Y, ϕ_V é uma trivialização local e $\mathbb{B} = \{B, p, X, Y\}$ é um fibrado sobre X.

Para a demonstração do corolário 3.0.1 abaixo necessitamos do

Lema 3.0.1 *Sejam $p : B \to X$ uma fibração localmente trivial, $a : J \to X$ um caminho, com $J = [s_0, s_1]$ e $z_0 \in B$ um ponto tal que $p(z_0) = a(s_0)$. Então existe um caminho $\tilde{a} : J \to B$ tal que $p \circ \tilde{a} = a$ e $\tilde{a}(s_0) = z_0$.*

Demonstração: Vide [3], p.82 ■

Corolário 3.0.1 *Seja $p : B \longrightarrow X$ uma fibração localmente trivial. Se a base X e a fibra típica Y são conexas por caminhos então o espaço total B também é conexo por caminhos.*

Demonstração: De fato, dados $x, y \in B$, existe um caminho em X ligando $p(x)$ a $p(y)$. O levantamento desse caminho a partir de x liga este ponto a um ponto $z \in p^{-1}(p(y))$. Como a fibra típica é conexa por caminhos o mesmo ocorre com $p^{-1}(p(y))$, logo z pode ser ligado a y por um caminho nesta fibra sobre $p(y)$. Justapondo estes caminhos, obtemos um caminho em B ligando x a y. ■

Definição 3.0.3 *Um espaço X é um C_σ-espaço se X for normal, localmente compacto e qualquer cobertura de X por abertos admite uma subcobertura enumerável.*

Definição 3.0.4 *Uma homotopia $H' : X \times I \longrightarrow Y$ é estacionária com $H : X \times I \longrightarrow Z$ se, para cada $t \in X$ e para cada $\tau \in I$ tal que $H(t, \tau)$ é constante, então $H'(t, \tau)$ também é constante.*

Teorema 3.0.1 (Teorema de Convergência de Homotopia)

Seja $\mathbb{B} = \{B, p, X, Y\}$ um fibrado sobre X.

Sejam X' um C_σ-espaço, $f_0 : X' \longrightarrow B$ uma aplicação e $H : X' \times I \longrightarrow X$ uma homotopia iniciando em $p \circ f_0$. Então existe uma homotopia $H' : X' \times I \longrightarrow B$ de f_0 revestindo $p \circ f_0$ (isto é, $p \circ H' = H$), ou seja, H' é um levantamento da homotopia H. Além disso, H' é estacionária com H.

Demonstração:([9], Teorema 11.7, p. 54). ■

3.1 Seqüência de Homotopia de um Fibrado

Teorema 3.1.1 Teorema Fundamental

Seja $\mathbb{B}$ um fibrado sobre X, $A \subset X$, $B_0 = p^{-1}(A)$, $y_0 \in B_0$ e $x_0 = p(y_0)$. Então

$$p_* : \pi_n(B, B_0, y_0) \cong \pi_n(X, A, x_0), \quad n \geq 2.$$

Demonstração: Desde que $p : (B, B_0, y_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ é contínua, então $p_* : \pi_n(B, B_0, y_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0)$ é um homomorfismo.

Suponhamos $p_*(\alpha) = 0$, onde $\alpha \in \pi_n(B, B_0, y_0)$ e seja $f \in F^n(B, B_0, y_0)$ o seu representante. Então,

$$f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (B, B_0, y_0)$$

$$f(I^{n-1}) \subset B_0 \;\; e \;\; f(J^{n-1}) = \{y_0\}.$$

Compondo a aplicação p com f temos $p \circ f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$

$$p \circ f(I^{n-1}) = p(f(I^{n-1})) \subset p(B_0) \subset A \Rightarrow p \circ f(I^{n-1}) \subset A$$

$$p \circ f(J^{n-1}) = p(f(J^{n-1})) = p(\{y_0\}) = \{x_0\} \Rightarrow p \circ f(J^{n-1}) = \{x_0\}.$$

Então, $p \circ f \in F^n(X, A, x_0)$.

Mas,

$$p_*(\alpha) = p_*([f]) = [p \circ f] = 0.$$

Logo, existe uma homotopia $H : I^n \times I \longrightarrow X$ entre $p \circ f$ e a contante x_0, tal que, para todo $t \in I^n$,

$$H(t, 0) = p \circ f(t), \quad H(t, 1) = x_0$$

$$H_\tau(t) = H(t, \tau) \in F^n(X, A, x_0), \forall \tau \in I,$$

ou seja,

$$H_\tau : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$$

$$H_\tau(I^{n-1}) \subset A, \forall \tau \in I \Rightarrow H(I^{n-1} \times I) \subset A$$

$$H_\tau(J^{n-1}) = \{x_0\}, \forall \tau \in I \Rightarrow H(J^{n-1} \times I) = \{x_0\}.$$

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p \circ f"'] & B \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Pelo Teorema 3.0.1 de Convergência de Homotopia, existe uma homotopia $H' : I^n \times I \longrightarrow B$ que é um levantamento da homotopia H (isto é, $p \circ H' = H$), onde $H'(t, 0) = f(t)$ e H' é estacionária com H.

Temos,

$$p(H'(I^{n-1} \times I)) = p \circ H'(I^{n-1} \times I) \overset{p \circ H' = H}{=} H(I^{n-1} \times I) \subset A,$$

ou seja,

$$H'(I^{n-1} \times I) \subset B_0.$$

Ainda, como $H(J^{n-1} \times I) = \{x_0\}$ e H' é estacionária com H, temos que $H'(J^{n-1} \times I)$ é constante, ou seja,

$$H'(t, \tau) = k, \forall (t, \tau) \in J^{n-1} \times I,$$

onde k é a constante.

Mas, em particular, para todo t em J^{n-1}, $H'(t, 0) = f(t) = k$ e, como $f(J^{n-1}) = \{y_0\}$, temos $f(t) = y_0$.

Logo,

$$k = y_0 \Rightarrow H'(J^{n-1} \times I) = \{y_0\}.$$

Assim, H' é uma homotopia em $F^n(B, B_0, y_0)$.

Consideremos a aplicação $f' : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (B, B_0, y_0)$, definida por $f'(t) = H'_1(t)$.

Então, H' é uma homotopia entre f e f' pois, para todo $t \in I^n$,

$$H'(t, 0) = f(t) \;\; e \;\; H'(t, 1) = H'_1(t) = f'(t).$$

Portanto,

$$f \simeq f'.$$

Agora, vamos definir $K : I^n \times I \longrightarrow I^n$ por

$$K(t, \tau) = K(t_1, ..., t_n, \tau) = (t_1, ..., t_{n-1}, (1 - \tau)t_n + \tau).$$

$$K(t, 0) = K(t_1, ..., t_n, 0) = (t_1, ..., t_{n-1}, (1 - 0)t_n + 0) = (t_1, ..., t_{n-1}, t_n) = t.$$

$$K(t, 1) = K(t_1, ..., t_n, 1) = (t_1, ..., t_{n-1}, (1 - 1)t_n + 1) = (t_1, ..., t_{n-1}, 1).$$

Então, K é uma homotopia de I^n sobre a sua própria face $(t_n = 1)$. Tal face está contida em J^{n-1} visto que $t_n \neq 0$.

Definimos então a homotopia $K' : I^n \times I \xrightarrow{K} I^n \xrightarrow{f'} B$ por $K'(t, \tau) = f' \circ K(t, \tau)$.

Então,

$$K'(t, 0) = f'(K(t, 0)) = f'(t).$$

$$K'(t, 1) = f'(K(t, 1)) = y_0, \text{ pois } K(t, 1) \in J^{n-1} \; e \; f'(J^{n-1}) = \{y_0\}.$$

Ainda, para todo $\tau \in I$,

$$K'_\tau(I^{n-1}) = K'(I^{n-1} \times \{\tau\}) \subset K'(I^{n-1} \times I) = f'(K(I^{n-1} \times I)) \subset f'(I^n) \subset B_0$$

pois $p \circ f'(I^n) = p \circ H'_1(I^n) = p \circ H'(I^n \times \{1\}) = H(I^n \times \{1\}) = \{x_0\} \subset A$, e

$$K'_\tau(J^{n-1}) = K'(J^{n-1} \times I) = f'(K(J^{n-1} \times I)) \subset f'(J^{n-1}) = \{y_0\}.$$

Logo, K' é uma homotopia em $F^n(B, B_0, y_0)$ entre f' e a constante em y_0.

Mas,

$$f \simeq f' \;\; e \;\; f' \simeq cte(y_0) \Rightarrow f \simeq cte(y_0).$$

Portanto, $\alpha = 0$, ou seja, $Ker(p_*) = \{0\}$.

Assim, p_* é um monomorfismo.

Agora, sejam $\beta \in \pi_n(X, A, x_0)$ e f seu representante em $F^n(X, A, x_0)$. Então, $f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$, onde

$$f(I^{n-1}) \subset A \ \ e \ \ f(J^{n-1}) = \{x_0\}.$$

Seja K a mesma homotopia definida anteriormente e consideremos a aplicação $H : I^n \times I \longrightarrow X$ dada por

$$H(t, \tau) = f(K(t, \tau)).$$

Então

$$H(t, 0) = f(K(t, 0)) = f(t)$$

e

$$H(t, 1) = f(K(t, 1)) = f(t_1, ..., t_{n-1}, 1) = x_0,$$

pois $K(t, 1) \in J^{n-1}$ *e* $f(J^{n-1}) = \{x_0\}$.

Assim, H é uma homotopia entre f e a aplicação constante em x_0.

Note que, em geral, H não é uma homotopia em $F^n(X, A, x_0)$ pois, tomando $\bar{t} = (t_1, ..., t_{n-1}, 0) \in I^{n-1}$,

$$H_\tau(\bar{t}) = H(\bar{t}, \tau) = f(K(\bar{t}, \tau)) = f(t_1, ..., t_{n-1}, \tau)$$

e pode acontecer de $(t_1, ..., t_{n-1}, \tau)$ não pertencer à I^{n-1}.

Mas, mesmo assim, para todo $\tau \in I$,

$$H_\tau(J^{n-1}) = H(J^{n-1} \times \{\tau\}) = f(K(J^{n-1} \times \{\tau\})) \subset f(J^{n-1}) = \{x_0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_\tau(J^{n-1}) = \{x_0\}.$$

Consideremos a aplicação $f' : I^n \longrightarrow \{y_0\}$.

Então

$$p \circ f'(t) = p(f'(t)) = p(y_0) = x_0, \forall t \in I^n.$$

Logo, $p \circ f'(t) = H(t, 1) = H_1(t)$, para todo t em I^n.

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "p \circ f'"'] & & \{y_0\} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Como H é uma homotopia entre f e $p \circ f'$, pelo Teorema 3.0.1 de Convergência de Homotopia, existe uma homotopia $H' : I^n \times I \longrightarrow \{y_0\}$ de f' revestindo H (isto é, $p \circ H' = H$), de forma que $H'(t, 1) = f'(t)$, e que seja estacionária com H.

Seja $f'' : I^n \longrightarrow B$ tal que $f''(t) = H'(t, 0)$.

Para qualquer t em I^n,

$$p \circ f''(t) = p \circ H'(t, 0) = H(t, 0) = f(t) \Rightarrow p \circ f'' = f.$$

Tomando $t \in I^{n-1}$,

$$p \circ f''(t) = f(t) \in A \Rightarrow f''(t) \in p^{-1}(A) = B_0.$$

Logo, $f''(I^{n-1}) \subset B_0$.

Além disso,

$$f''(J^{n-1}) = H'_0(J^{n-1}) = \{y_0\} \Rightarrow f''(J^{n-1}) = \{y_0\}.$$

Nessas condições, $f'' \in F^n(B, B_0, y_0)$ e é o representante de α em $\pi_n(B, B_0, y_0)$. A saber, $\alpha = [f'']$.

Daí,

$$p_*(\alpha) = p_*([f'']) = [p \circ f''] = [f] = \beta.$$

Portanto, p_* é um epimorfismo.

Logo, p_* é um isomorfismo. ■

Tomando $A = \{x_0\}$, como $B_0 = p^{-1}(A)$ e $Y_0 = p^{-1}(\{x_0\})$, obtemos $B_0 = Y_0$.

Então, do Teorema Fundamental segue o seguinte Corolário.

Corolário 3.1.1 $p_* : \pi_n(B, Y_0, y_0) \cong \pi_n(X, x_0)$, $n \geq 2$.

Sequência de Homotopia de um Fibrado.

Sejam $\mathbb{B} = \{B, p, X, Y\}$ um fibrado, Y_0 a fibra sobre x_0 em X e y_0 pertencente à Y_0.

Sejam $i : (Y_0, y_0) \longrightarrow (B, y_0)$ e $j : (B, y_0) \longrightarrow (B, Y_0, y_0)$ as aplicações de inclusão.

Então, a seqüência de homotopia de (B, Y_0, y_0) é:

$$\begin{aligned} ... \longrightarrow \pi_n(Y_0, y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(B, y_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(B, Y_0, y_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(Y_0, y_0) \\ \longrightarrow ... \longrightarrow \pi_1(B, y_0). \end{aligned}$$

Como y_0 é o ponto base dos espaços B e Y_0, podemos escrever a seqüência da seguinte forma:

$$... \longrightarrow \pi_n(Y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(B) \xrightarrow{j_*} \pi_n(B, Y_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(Y_0) \longrightarrow ... \longrightarrow \pi_1(B).$$

Na seqüência acima, δ é o operador bordo que restringe a aplicação f à face inicial I^{n-1}, sendo $[f] = \alpha \in \pi_n(B, Y_0)$.

Consideremos a aplicação $p_1 : (B, Y_0, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ a restrição da aplicação $p : (B, B_0, y_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$.

Pelo Corolário 3.1.1, $p_{1*} : \pi_n(B, Y_0, y_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$ é um isomorfismo, para $n \geq 2$. Consideremos então

$$p_{1*}^{-1} : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(B, Y_0, y_0).$$

Daí, obtemos

$$\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{p_{1*}^{-1}} \pi_n(B, Y_0, y_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(Y_0, y_0).$$

Denotaremos por Δ a aplicação $\delta \circ p_{1*}^{-1} : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(Y_0, y_0)$.

Consideraremos sempre y_0 e x_0 os pontos bases dos espaços B e X, respectivamente. Portanto, vamos omitir tais pontos das notações de seqüências exatas.

Assim, temos a seguinte definição.

Definição 3.1.1 *A sequência*

$$... \longrightarrow \pi_n(Y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(B) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(Y_0) \longrightarrow ... \longrightarrow \pi_2(X) \xrightarrow{\Delta} \pi_1(Y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B)$$

$$\xrightarrow{p_*} \pi_1(X)$$

é chamada sequência de homotopia do fibrado $\mathbb{B}$ com base em y_0.

Teorema 3.1.2 *A sequência de Homotopia de um fibrado é exata.*

Demonstração: De fato, pela propriedade 2.3.1, a sequência de homotopia de (B, Y_0, y_o) é exata.

Substituímos os termos $\pi_n(B, y_0)$ da seqüência de homotopia de (B, Y_0, y_0) pelos termos $\pi_n(X)$ e acrescentamos $\pi_1(X)$ ao final da seqüência. Substituímos também os homomorfirmos correspondentes aos grupos substituídos, e incluímos o homomorfismo que corresponde ao termo novo da seqüência. Dessa forma, obtemos a seqüência exata de homotopia de um fibrado $\mathbb{B}$.

Então, tinhamos a seqüência:

$$... \longrightarrow \pi_n(B) \xrightarrow{j_*} \pi_n(B, Y_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(Y_0) \longrightarrow ...$$

onde $Ker(\delta) = Im(j_*)$ e, após as substituições, passamos a ter:

$$... \longrightarrow \pi_n(B) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(Y_0) \longrightarrow ...$$

Note que o homomorfismo p_* pode ser obtido pela seguinte composição:

$$\pi_n(B) \xrightarrow{j_*} \pi_n(B, Y_0) \xrightarrow{p_{1*}} \pi_n(X),$$

ou seja, $p_{1*} \circ j_* = p_*$.

Lembremos que o homomorfismo Δ foi construído através da composição

$$\pi_n(X) \xrightarrow{p_{1*}^{-1}} \pi_n(B, Y_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(Y_0).$$

Vamos então verificar a exatidão em $\pi_n(X)$, $n \geq 2$,

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(B) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(Y_0) \longrightarrow \ldots$$

Seja $\alpha \in Im(p_*)$. Então, existe $\beta \in \pi_n(B)$ tal que $p_*(\beta) = \alpha$.

Mas,

$$\Delta(\alpha) = \delta(p_{1*}^{-1}(\alpha)) = \delta(\beta)$$

visto que

$$p_{1*}^{-1}(\alpha) = p_*^{-1}(\alpha) = \beta$$

pois p_1 é a restrição da aplicação p.

Como

$$\beta \in \pi_n(B) \quad e \quad j_*(\beta) = \beta \in \pi_n(B, Y_0),$$

então

$$\beta \in Im(j_*) = Ker(\delta).$$

Logo,

$$\Delta(\alpha) = \delta(\beta) = 0.$$

Portanto,

$$\alpha \in Ker(\Delta).$$

Assim,

$$Im(p_*) \subset Ker(\Delta).$$

Agora, seja $\alpha \in Ker(\Delta)$.

Temos, usando a definição de Δ, que

$$\Delta(\alpha) = \delta(p_{1*}^{-1}(\alpha)) = 0,$$

onde $p_{1*}^{-1}(\alpha) \in \pi_n(B, Y_0)$.

Seja $\beta = p_{1*}^{-1}(\alpha)$.

Daí,

$$p_{1*}(\beta) = \alpha.$$

Mas,

$$p_{1*}(\beta) = p_*(\beta) = \alpha.$$

Então, $\alpha \in Im(p_*)$.

Logo,

$$Ker(\Delta) \subset Im(p_*).$$

Assim, temos $Ker(\Delta) = Im(p_*)$.

A exatidão em $\pi_n(B)$, $n \geq 2$.

A seqüência

$$... \longrightarrow \pi_n(Y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(B) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X) \longrightarrow ...$$

pode ser vista como

$$... \longrightarrow \pi_n(Y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(B) \xrightarrow{j_*} \pi_n(B, Y_0) \xrightarrow{p_{1*}} \pi_n(X) \longrightarrow ...$$

Se $\alpha \in \pi_n(Y_0)$, então

$$i_*(\alpha) \in Ker(j_*), \ pois \ Im(i_*) = Ker(j_*).$$

Daí,

$$j_*(i_*(\alpha)) = 0.$$

Agora,

$$p_{1*}(j_*(i_*(\alpha))) = 0 \Rightarrow p_{1*} \circ j_* \circ i_*(\alpha) = 0 \Rightarrow p_* \circ i_*(\alpha) = 0.$$

Portanto, $Im(i_*) \subset Ker(p_*)$.

Seja agora $\beta \in Ker(p_*)$.

Então, como p_{1*} é isomorfismo,

$$p_*(\beta) = 0 \Rightarrow p_{1*} \circ j_*(\beta) = 0 \Rightarrow j_*(\beta) = p_{1*}^{-1}(0) = 0.$$

Assim, $\beta \in Ker(j_*) = Im(i_*)$.

Portanto, $Ker(p_*) \subset Im(i_*)$.

Nessas condições, $Ker(p_*) = Im(i_*)$.

Vejamos então a exatidão no termo $\pi_n(Y_0)$, $n \geq 1$.

A seqüência

$$... \longrightarrow \pi_{n+1}(X) \xrightarrow{\Delta} \pi_n(Y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(B) \longrightarrow ...$$

pode ser vista como

$$... \longrightarrow \pi_{n+1}(X) \xrightarrow{p_{1*}^{-1}} \pi_{n+1}(B, Y_0) \xrightarrow{\delta} \pi_n(Y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(B) \longrightarrow ...$$

Tomando $\alpha \in \pi_{n+1}(X)$, temos

$$i_* \circ \Delta(\alpha) = i_* \circ \delta \circ p_{1*}^{-1}(\alpha).$$

Mas, $\delta \circ p_{1*}^{-1}(\alpha) \in Im(\delta) = Ker(i_*)$.
Então,

$$i_* \circ \delta \circ p_{1*}^{-1}(\alpha) = 0.$$

Logo, $Im(\Delta) \subset Ker(i_*)$.
Seja $\beta \in Ker(i_*) = Im(\delta)$.
Então existe $\alpha \in \pi_{n+1}(B, Y_0)$ tal que $\delta(\alpha) = \beta$.
Como p_{1*}^{-1} é isomorfismo, portanto sobrejetora, existe $\gamma \in \pi_{n+1}(X)$ de forma que $p_{1*}^{-1}(\gamma) = \alpha$.
Daí,

$$\delta \circ p_{1*}^{-1}(\gamma) = \beta \Rightarrow \Delta(\gamma) = \beta \Rightarrow \beta \in Im(\Delta).$$

Assim, $Ker(i_*) \subset Im(\Delta)$.
Logo, $Ker(i_*) = Im(\Delta)$.
Portanto, a parte da seqüência de homotopia do fibrado $\mathbb{B}$

$$... \longrightarrow \pi_n(Y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(B) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(Y_0) \longrightarrow ...$$
$$... \longrightarrow \pi_2(X) \xrightarrow{\Delta} \pi_1(Y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B)$$

é exata.
Verifiquemos então a exatidão no termo $\pi_1(B)$ devido à inclusão do termo $\pi_1(X)$.

$$... \longrightarrow \pi_1(Y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X).$$

Para o acréscimo de tal termo, utilizamos o homomorfismo p_* que, como já vimos, pode ser obtido pela composição $p_{1*} \circ j_* = p_*$.

$$...\pi_1(Y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B) \xrightarrow{j_*} \pi_1(B, Y_0) \xrightarrow{p_{1*}} \pi_1(X)$$

Seja $f : I \longrightarrow Y_0$ um laço baseado em y_0. Então, $[f] \in \pi_1(Y_0)$.
Daí,

$$p_* \circ i_*([f]) = p_*([i \circ f]) = p_{1*} \circ j_*([i \circ f]) = p_{1*}([j \circ i \circ f]) = [p_1 \circ j \circ i \circ f].$$

Mas, como $Im(f) \subset Y_0$,

$$i \circ f(I) \subset Y_0 \Rightarrow j \circ i \circ f(I) \subset Y_0 \Rightarrow p_1 \circ j \circ i \circ f(I) = \{x_0\},$$

pois $p_1 : (B, Y_0, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$.

Assim,

$$[p_1 \circ j \circ i \circ f] = [x_0] = 0.$$

Portanto, $p_* \circ i_*([f]) = 0$, ou seja, $Im(i_*) \subset Ker(p_*)$.

Consideremos agora C um laço em B baseado em y_0, de forma que $[C] \in Ker(p_*)$. Então,

$$p_*([C]) = 0 \Rightarrow [p \circ C] = [x_0] \Rightarrow p \circ C \simeq x_0.$$

Existe então uma homotopia $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$H(t, 0) = p \circ C(t), \;\; H(t, 1) = x_0 \;\; e \;\; H(0, \tau) = H(1, \tau) = x_0,$$

para todo t, τ em I.

Pelo Teorema 3.0.1 de Convergência de Homotopia, existe uma homotopia $H' : I \times I \longrightarrow B$ tal que $p \circ H' = H$, $H'(t, 0) = C(t)$ para todo t em I e H' é estacionária com H.

Vamos definir $f : I \longrightarrow B$ por $f(t) = H'(t, 1)$.

Consideremos agora a aplicação $\overline{f} : I \longrightarrow Y_0$ ($Y_0 = p^{-1}(\{x_0\})$), onde $\overline{f}(t) = f(t)$, para todo t em I.

Temos que, para qualquer t pertencente a I,

$$p \circ \overline{f}(t) = p \circ f(t) = p \circ H'(t, 1) = H(t, 1) = x_0,$$

o que nos mostra que $\overline{f}$ está bem definida.

Além disso,

$$\overline{f}(0) = f(0) = H'(0, 1) \;\; e \;\; \overline{f}(1) = f(1) = H'(1, 1).$$

Mas, como H' é estacionária com H, tem-se que, para todo τ em I,

$$H'(0, \tau) = H'(1, \tau) = y_0.$$

Logo,

$$\overline{f}(0) = \overline{f}(1) = y_0 \Rightarrow [\overline{f}] \in \pi_1(Y_0).$$

Note que $f : I \longrightarrow B$, $\overline{f} : I \longrightarrow Y_0$ e $i : Y_0 \longrightarrow B$, ou seja, $f = i \circ \overline{f}$.

Daí,

$$i_*([\overline{f}]) = [i \circ \overline{f}] = [f] = [C].$$

Portanto, $Ker(p_*) \subset Im(i_*)$.

Nessas condições,

$$Ker(p_*) = Im(i_*).$$

Com isso, concluímos que a seqüência de homotopia de um fibrado $\mathbb{B}$ é exata. $\blacksquare$

Proposição 3.1.1 *Seja $\mathbb{B} = \{B, p, X, Y\}$ um fibrado. Se a fibra típica Y é conexa por caminhos, se a base X é simplesmente conexa e se, além disso, $\pi_2(X) = 0$ então o grupo fundamental de B é isomorfo ao grupo fundamental de Y.*

Demonstração: Dada a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_2(X) \xrightarrow{\Delta} \pi_1(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X)$$

e sendo X simplesmente conexa, temos, por hipótese, $\pi_2(X) = \pi_1(X) = 0$.

Então,

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_1(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B) \longrightarrow 0$$

o que torna i_* um isomorfismo.

Logo,

$$\pi_1(B) \cong \pi_1(Y).$$

■

Proposição 3.1.2 *Seja $\mathbb{B} = \{B, p, X, Y\}$ um fibrado. Se a base X é simplesmente conexa e a fibra típica Y é conexa por caminhos, então o grupo fundamental de B é isomorfo a um grupo quociente do grupo fundamental de Y.*

Demonstração: Consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_1(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X).$$

Como a base X é simplesmente conexa, então $\pi_1(X) = 0$.

Daí, temos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_1(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B) \xrightarrow{p_*} 0.$$

Logo, $Im(i_*) = Ker(p_*) = \pi_1(B)$, ou seja, i_* é um epimorfismo. Pelo Teorema do isomorfismo,

$$\pi_1(B) \cong \frac{\pi_1(Y)}{Ker(i_*)}.$$

■

Capítulo

4

Grupos Clássicos

4.1 Grupo das Rotações do $\mathbb{R}^n$ ($SO(n)$)

Definição 4.1.1 *O grupo das rotações do espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$*, denotado por* $SO(n)$*, é formado pelas transformações lineares* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *que preservam produto interno, ou seja,*

$$\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e, além disso,* $\det(T) = 1$.

A multiplicação (composição) de transformações lineares faz de $SO(n)$ um grupo.

Os elementos do $SO(n)$ também podem ser vistos como matrizes reais ortogonais $n \times n$, com determinante 1.

Observação 4.1.1 *Analisando tais matrizes como soluções do sistema de equações quadráticas* $X \cdot X^T = I$*, podemos provar, com o Teorema das Funções Implícitas, que* $SO(n)$ *é uma superfície compacta de dimensão* $n(n-1)/2$ *no espaço* $\mathbb{R}^{n^2}$ *das matrizes* $n \times n$*. (Veja [2], p. 313).*

4.2 Grupos Unitários ($U(n)$ e $SU(n)$)

Definição 4.2.1 *O Grupo Unitário, denotado por* $U(n)$*, é o conjunto de todas as tansformações lineares* $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *que preservam produto interno, ou seja, que cumprem a condição* $\langle T(z), T(w)\rangle = \langle z, w\rangle$*, para quaisquer* $z, w \in \mathbb{C}^n$*.*

Identificando T com sua matriz relativa à base canônica de $\mathbb{C}^n$, podemos considerar $U(n)$ como o conjunto das matrizes complexas $n \times n$ cujas colunas (e linhas) têm comprimento (ou norma) 1 e são duas a duas perpendiculares (matrizes unitárias).

A descrição por meio de matrizes mostra que $U(n)$ é um subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{C}^{n^2}$ (ou $\mathbb{R}^{2n^2}$), logo é compacto.

Definição 4.2.2 *O grupo especial unitário, $SU(n)$, é o subgrupo de $U(n)$ formado pelas matrizes unitárias que têm determinante igual a 1.*

Como subconjunto fechado de $U(n)$, o grupo $SU(n)$ é compacto.

4.3 Grupo Simplético ($Sp(n)$)

Definição 4.3.1 *O grupo simplético $Sp(n)$ é o grupo cujos elementos são matrizes $n \times n$ cujas colunas (e linhas) são vetores em $\mathcal{H}^n$, unitários e dois a dois ortogonais.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $Sp(n)$ é um conjunto limitado e fechado em $\mathcal{H}^n = \mathbb{R}^{4n}$, logo é compacto.

4.4 Exemplos de Fibrados

Exemplo 4.4.1 $\mathbb{B} = \{SO(n), p, S^{n-1}, SO(n-1)\}$ *é um fibrado sobre S^{n-1}, onde $p : SO(n) \longrightarrow S^{n-1}, n \geq 2$, é definida por $p(T) = T(e_1)$, para toda $T \in SO(n)$, sendo e_1 o primeiro vetor da base canônica $\mathcal{B}$ do $\mathbb{R}^n$.*

Observemos que, identificando T como a matriz da transformação linear relativa à base canônica $\mathcal{B}$, $p(T)$ é a primeira coluna da matriz T.

Consideremos o aberto $V \subset S^{n-1}$, formado pelos vetores unitários $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, com $x_1 > 0$.

Sendo $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$, consideremos a matriz

$$[x, e_2, ..., e_n] = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando seu determinante, obtemos:

$$\det[x, e_2, ..., e_n] = x_1 > 0,$$

ou seja, determinante de $[x, e_2, ..., e_n] > 0$, para todo $x \in V$.

Como $x_1 > 0$, o conjunto $\{x, e_2, ..., e_n\}$ é linearmente independente e assim, podemos aplicar o Processo de Gramm-Schmidt para obtermos uma base ortonormal $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$.

De acordo com o Processo de Gramm-Schmidt,

$$w_1 = \frac{x}{\parallel x \parallel} = x, \ pois \parallel x \parallel = 1.$$

Assim, $\mathcal{B}' = \{x, w_2, ..., w_n\}$, onde $w_i = \dfrac{f_i}{||f_i||}$ com $f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle e_i, w_j \rangle w_j, i = 2, \ldots, n.$

Dessa forma, a matriz $[x, w_2, \ldots, w_n]$ é uma matriz ortogonal tendo como primeira coluna o vetor x e mais, $\det[x, w_2, \ldots, w_n] = \dfrac{x_1}{\prod_{i=2}^{n} ||f_i||} > 0$ e portanto deve ser igual a 1.

Logo,

$$[x, w_2, \ldots, w_n] \in SO(n).$$

Denotaremos $[x, w_2, \ldots, w_n]$ por $\sigma(x)$. Assim, podemos definir uma aplicação que depende continuamente do vetor x, $\sigma : V \longrightarrow SO(n)$, onde para cada x em V associamos à sua matriz $\sigma(x)$ construída da forma anterior.

Mas,

$$p(\sigma(x)) = x \in V \Rightarrow \sigma(x) \in p^{-1}(V).$$

Então podemos definir $\sigma : V \longrightarrow p^{-1}(V)$.

A partir de σ, definimos uma aplicação contínua

$$\varphi_V : V \times SO(n-1) \longrightarrow p^{-1}(V)$$

pondo $\varphi_V(x, M) = \sigma(x).M$, onde a matriz $M \in SO(n-1)$ é vista em $SO(n)$ acrescentando à sua primeira linha e primeira coluna o vetor $(1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$.

As matrizes $\sigma(x)$ e M são ortogonais, então $[\sigma(x)]^{-1} = [\sigma(x)]^t$ e $M^{-1} = M^t$.

Daí,

$$[\sigma(x).M]^{-1} = M^{-1}.[\sigma(x)]^{-1} = M^t.[\sigma(x)]^t = [\sigma(x).M]^t$$

e

$$\det[\sigma(x).M] = \det[\sigma(x)]. \det M = 1.1 = 1.$$

Além disso,

$$p(\sigma(x).M) = x.$$

Logo, $\sigma(x).M \in p^{-1}(V)$, o que nos mostra que φ_V está bem definido.

Observemos que sendo $p_V : V \times SO(n-1) \longrightarrow V$ a projeção da primeira coordenada, temos:

$$p_V(x, M) = x = p \circ \varphi_V(x, M),$$

ou seja

$$p \circ \varphi_V = p_V.$$

Portanto, φ_V é uma trivialização local cujo homeomorfismo inverso é $\psi_V : p^{-1}(V) \longrightarrow V \times SO(n-1)$, dado por $\psi_V(T) = (x, \sigma(x)^{-1} \cdot T)$, onde $x = p(T)$.

O aberto V é uma vizinhança de e_1 em S^{n-1}. A fim de obter trivializações locais sobre vizinhanças dos demais pontos, tomamos, para todo $y \in S^{n-1}$, uma transformação $T \in SO(n)$ de forma que $T(e_1) = y$. Então, sendo $W = T(V)$ a vizinhança aberta de y, definimos a trivialização local

$$\varphi_W : W \times SO(n-1) \longrightarrow p^{-1}(W)$$

pondo $\varphi_W(w, M) = T.\sigma(T^{-1}(w)).M$, visto que $p(T.\sigma(T^{-1}(w)).M) = w \in W$.

Temos, portanto, que p é uma fibração localmente trivial com fibra típica $SO(n-1)$ e $\mathbb{B} = \{SO(n), p, S^{n-1}, SO(n-1)\}$ é um fibrado sobre S^{n-1}.

Exemplo 4.4.2 $\mathbb{B} = \{SU(n), p, S^{2n-1}, SU(n-1)\}$ *é um fibrado sobre* S^{2n-1}*, onde* $p : SU(n) \longrightarrow S^{2n-1}, n \geq 2$*, é definida por* $p(T) = T(e_1)$*, para toda* $T \in SU(n)$*, sendo* e_1 *o primeiro vetor da base canônica* $\mathcal{B}$ *do* $\mathbb{C}^n$*.*

Considere o aberto $V \subset S^{2n-1}$ formado pelos vetores unitários $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, com $z_1 \neq 0$.

Daí, $\mathcal{B} = \{z, e_2, ..., e_n\} \subset \mathbb{C}^n$ é uma base.

Aplicando o Processo de Gramm-Schmidt, obtemos uma base ortonormal $\mathcal{B}' = \{z, v_2, ..., v_n\}$, pois

$$v_1 = \frac{z}{\| z \|} = z \quad (\text{pois } \| z \| = 1).$$

Consideremos a matriz $[z, v_2, ..., v_n]$ e suponhamos que seu determinante seja Δ. Então a matriz $[z, \frac{v_2}{\Delta}, ..., v_n]$ é tal que

$$\det[z, \frac{v_2}{\Delta}, ..., v_n] = \frac{1}{\Delta}.\det[z, v_2, ..., v_n] = \frac{1}{\Delta}.\Delta = 1.$$

Seja $\sigma(z)$ a matriz $[z, \frac{v_2}{\Delta}, ..., v_n]$. Então tal matriz é unitária (pois suas colunas são duas a duas ortogonais) e possui determinante igual a 1.

Daí, podemos definir uma aplicação contínua $\sigma : V \longrightarrow SU(n)$ (σ dependendo continuamente do vetor z) onde para cada z em V associamos a sua matriz $\sigma(z)$ construída da forma anterior.

Mas, como $\sigma(z)$ possui o vetor z como primeira coluna,

$$p(\sigma(z)) = z \in V \Rightarrow \sigma(z) \in p^{-1}(V).$$

Assim podemos definir $\sigma : V \longrightarrow p^{-1}(V)$ dada por $z \to \sigma(z)$.

A partir daí, definamos

$$\varphi_V : V \times SU(n-1) \longrightarrow p^{-1}(V)$$

pondo $\varphi_V(z, M) = \sigma(z).M$, onde a matriz $M \in SU(n-1)$ é vista em $SU(n)$ acrescentando à sua primeira linha e primeira coluna o vetor $(1, 0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n$.

As matrizes $\sigma(z)$ e M são unitárias, então $[\sigma(x)]^{-1} = \overline{[\sigma(z)]^t}$ e $M^{-1} = \overline{M^t}$.

Daí,

$$[\sigma(z).M]^{-1} = M^{-1}.[\sigma(z)]^{-1} = \overline{M^t}.\overline{[\sigma(z)]^t} = \overline{M^t.[\sigma(z)]^t} = \overline{[\sigma(z).M]^t}$$

e

$$\det[\sigma(z).M] = \det[\sigma(z)].\det M = 1.1 = 1.$$

Além disso,

$$p(\sigma(z).M) = z.$$

Logo, $\sigma(z).M \in \pi^{-1}(V)$, o que nos mostra que φ_V está bem definida.

A aplicação contínua

$$\psi_V : p^{-1}(V) \longrightarrow V \times SU(n-1),$$

definida por

$$\psi_V(T) = (z, \sigma(z)^{-1} \cdot T),$$

onde $z = T(e_1)$, é a inversa de φ_V, logo φ_V é um homeomorfismo.

Sendo $p_V : V \times SU(n-1) \longrightarrow V$ a projeção da primeira coordenada, temos:

$$p_V(z, M) = z = p \circ \varphi_V(z, M),$$

ou seja

$$p \circ \varphi_V = p_V$$

e portanto φ_V é uma trivialização local.

Como no caso de $SO(n)$, para cada $y \in S^{2n-1}$, consideramos uma transformação $T \in SU(n)$ tal que $T(e_1) = y$. Então, $W = T(V)$ é uma vizinhança de y em S^{2n-1}, sobre a qual definimos a trivialização local

$$\varphi_W : W \times SU(n-1) \longrightarrow p^{-1}(W)$$

pondo $\varphi_W(w, M) = T.\sigma(T^{-1}(w)).M$.

Portanto p é uma fibração localmente trivial com fibra típica $SU(n-1)$ e $\mathbb{B} = \{SU(n), p, S^{2n-1}, SU(n-1)\}$ é um fibrado sobre S^{2n-1}.

Exemplo 4.4.3 *Analogamente aos exemplos anteriores, $\mathbb{B} = \{Sp(n), p, S^{4n-1}, Sp(n-1)\}$ é um fibrado sobre S^{4n-1}, onde $p : Sp(n) \longrightarrow S^{4n-1}, n \geq 2$, é definida por $p(T) = T(e_1)$, para toda $T \in Sp(n)$, sendo e_1 o primeiro vetor da base canônica $\mathcal{B}$ do $\mathbb{R}^{4n}$ $(\mathcal{H}^n)$.*

Observação 4.4.1 *A definição das fibrações localmente triviais dos exemplos anteriores são dadas aplicando-se a transformação linear no primeiro vetor da base canônica do respectivo espaço. Porém, tais aplicações também poderiam ter sido definidas aplicando-se as tranformações lineares em qualquer outro vetor da base canônica.*

4.5 Algumas Propriedades dos Grupos Clássicos

Propriedades do Grupo $SO(n)$

Proposição 4.5.1 *O grupo $SO(2)$ é isomorfo a S^1 (grupo multiplicativo dos números complexos de módulo 1).*

Demonstração: Inicialmente observemos que se $M \in SO(2)$ então $M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$. De fato, se $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$, temos que

$$\det(M) = 1 \Rightarrow ad - bc = 1.$$

Além disso,

$$\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle$$

para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, ou equivalentemente,

$$(a^2 + c^2)x_1x_2 + (ab + cd)x_1y_2 + (ab + cd)y_1x_2 + (b^2 + d^2)y_1y_2 = x_1x_2 + y_1y_2$$

para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Daí,

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Considerando as três primeiras equações do sistema acima obtemos $b = -c$ e $d = a$ como queríamos.

Agora, definamos uma aplicação $\phi : SO(2) \rightarrow S^1$ que associa a cada matriz $M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \in SO(2)$ o número complexo $z = a + ci \in S^1$.

Então, sendo $M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} a' & -c' \\ c' & a' \end{pmatrix} \in SO(2)$,

$$\phi(M.M') = \phi(\begin{pmatrix} aa' - cc' & -ac' - a'c \\ ca' + ac' & aa' - cc' \end{pmatrix}) = (aa' - cc') + (ca' + ac')i = (a + ci).(a' + c'i) = \phi(M).\phi(M').$$

Dessa forma, ϕ é um homomorfismo.

Também $Ker(\phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ pois $\phi(\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}) = 1 \Rightarrow a = 1$ e $c = 0$ e portanto ϕ é injetor.

Ainda, dado $z = a + ci \in S^1$ tome $M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \in SO(2)$. Então $\phi(M) = z$ e ϕ é sobrejetor. Assim ϕ define um isomorfismo entre SO(2) e S^1. De fato, ϕ define um homeomorfismo entre SO(2) e S^1. ∎

Proposição 4.5.2 *$SO(n)$ é conexo por caminhos, para todo n.*

Demonstração: Provemos por indução.

Para $n = 1$,

$$SO(1) = \{1\},$$

que é conexo por caminhos.

Para $n = 2$,

$$SO(2) \cong S^1,$$

que também é conexo por caminhos.

Suponhamos o resultado verdadeiro para $n - 1$, isto é, $SO(n - 1)$ é conexo por caminhos.

Então para n, consideremos a aplicação

$$p : SO(n) \longrightarrow S^{n-1}.$$

Pelo Exemplo 4.4.1, p é uma fibração localmente trivial com base $B = S^{n-1}$ conexa por caminhos e fibra típica $F = SO(n - 1)$ conexa por caminhos pela hipótese de indução. Assim, pelo Corolário 3.0.1, temos que $E = SO(n)$ é conexo por caminhos. ∎

Para o que segue, $\mathbb{R}^4$ denota o conjunto dos quatérnios, $\mathbb{R}^3$ denota o conjunto dos quatérnios imaginários puros, $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos quatérnios reais, S^3 denota o conjunto dos quatérnios de módulo 1 e " $\cdot$ " denota a multiplicação de quatérnios.

Proposição 4.5.3 *Existe um homomorfismo contínuo sobrejetivo $\varphi : S^3 \longrightarrow SO(3)$, cujo núcleo é $\{1, -1\}$.*

Demonstração: Seja $u \in S^3$. Consideremos a aplicação $\varphi'_u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $\varphi'_u(w) = u \cdot w \cdot u^{-1}$, $w \in \mathbb{R}^4$.

Então φ'_u é um operador linear. De fato, sejam $w, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\diamond$ $\varphi'_u(w_1 + w_2) = u \cdot (w_1 + w_2) \cdot u^{-1} = (u \cdot w_1 + u \cdot w_2) \cdot u^{-1} = u \cdot w_1 \cdot u^{-1} + u \cdot w_2 \cdot u^{-1} = \varphi'_u(w_1) + \varphi'_u(w_2)$.

$\diamond$ $\varphi'_u(\lambda w) = u \cdot \lambda w \cdot u^{-1} \overset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \lambda(u \cdot w \cdot u^{-1}) = \lambda \varphi'_u(w)$.

Além disso,

$$||\varphi'_u(w)|| = ||u \cdot w \cdot u^{-1}|| = ||u|| \cdot ||w|| \cdot ||u^{-1}|| = ||w||$$

pois $u, u^{-1} \in S^3$.

Desse modo, o operador φ'_u é um operador ortogonal.

Ainda, $\varphi'_u(1) = u \cdot 1 \cdot u^{-1} = u \cdot u^{-1} = 1$. Assim, para qualquer $w \in \mathbb{R}$

$$\varphi'_u(w) = \varphi'_u(w1) = w \cdot \varphi'_u(1) = w \cdot 1 = w.$$

Portanto $\varphi'_u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Logo, φ'_u torna o subespaço $\mathbb{R}$ invariante.

Como $\mathbb{R}^3$ é o complemento ortogonal de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^4$, φ'_u também deixa $\mathbb{R}^3$ invariante.

Restringindo φ'_u ao subespaço $\mathbb{R}^3$, obtemos um operador ortogonal $\varphi_u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $\varphi_u(w) = \varphi'_u(w) = u \cdot w \cdot u^{-1}$, $\forall w \in \mathbb{R}^3$, o qual está bem definido pois $\varphi_u(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$.

A matriz de φ_u em relação à base $\{i, j, k\}$ de $\mathbb{R}^3$ tem como colunas os vetores $u.i.u^{-1}$, $u.j.u^{-1}$ e $u.k.u^{-1}$, que dependem continuamente de $u \in S^3$. Temos $\det(\varphi_u) = \pm 1$ para todo $u \in S^3$. Como S^3 é conexa, e para $u_1 = 1$, vale $\det(\varphi_{u_1}) = 1$, segue-se que $\det(\varphi_u) = 1$ para todo $u \in S^3$, pois se existesse $u_0 \in S^3$ tal que $\det(\varphi_{u_0}) = -1$ então a aplicação $g : S^3 \longrightarrow \{-1, 1\}$ dada por $g(u) = \det(\varphi_u)$ seria uma aplicação contínua e sobrejetora de S^3 em $\{-1, 1\}$, o que acarretaria S^3 desconexa (absurdo).

Logo $\varphi_u \in SO(3)$, qualquer que seja $u \in S^3$, o que nos dá uma função contínua $\varphi : S^3 \longrightarrow SO(3)$, onde a cada $u \in S^3$ associamos o operador ortogonal $\varphi_u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido acima.

Desde que para todo $w \in \mathbb{R}^3$ e $u, v \in S^3$,

$$\varphi_{u \cdot v}(w) = (u \cdot v) \cdot w \cdot (u \cdot v)^{-1} = u \cdot (v \cdot w \cdot v^{-1}) \cdot u^{-1} = u \cdot (\varphi_v(w)) \cdot u^{-1} = \varphi_u(\varphi_v(w)) = \varphi_u \circ \varphi_v(w),$$

temos $\varphi_{u \cdot v} = \varphi_u \circ \varphi_v$ e portanto φ é um homomorfismo de grupos.

Calculando o $Ker(\varphi)$, temos

$$Ker(\varphi) = \{u \in S^3; \varphi(u) = id_{\mathbb{R}^3}\} = \{u \in S^3; u \cdot w \cdot u^{-1} = w, \forall w \in \mathbb{R}^3\}.$$

Assim,

$$Ker(\varphi) = \{u \in S^3; u \cdot w = w \cdot u, \forall w \in \mathbb{R}^3\},$$

ou seja, u comuta com todo $w \in \mathbb{R}^3$, em particular, comuta com todo imaginário puro e além disso $u \in S^3$. Então, pelo Lema 1.5.1, $u = \pm 1$. Logo,

$$Ker(\varphi) = \{-1, 1\}.$$

Em outras palavras, dados $x, y \in S^3$,

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow \varphi(x)\circ(\varphi(y))^{-1} = id_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \varphi(x)\circ\varphi(y^{-1}) = id_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \varphi(x\cdot y^{-1}) = id_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow x\cdot y^{-1} = \pm 1$$

$\Leftrightarrow y = \pm x$.

Em particular, φ é localmente injetiva. Para concluir a demonstração, resta-nos apenas provar que φ é sobrejetiva. Como S^3 é compacta e $SO(3)$ é conexo, basta mostrar que φ é uma aplicação aberta. De fato, como S^3 é compacta e φ é contínua, $\varphi(S^3)$ é compacto em $SO(3)$. Como $SO(3)$ é um espaço Hausdorff, segue que $\varphi(S^3)$ é fechado em $SO(3)$. Por outro lado, se φ é uma aplicação aberta, $\varphi(S^3)$ é um subconjunto aberto de $SO(3)$. Logo $\varphi(S^3)$ é um subconjunto não vazio, aberto e fechado de $SO(3)$. Como $SO(3)$ é conexo então $\varphi(S^3) = SO(3)$ e φ é sobrejetiva.

Mostremos agora que φ é uma aplicação aberta. Começamos observando que φ é uma aplicação de classe C^∞ pois para cada $u \in S^3$, os elementos da matriz de φ_u são funções infinitamente diferenciáveis de u. Como φ é um homomorfismo de grupos, seu posto é constante.

Pela Proposição 1.3.1, φ é uma imersão (visto que φ é localmente injetiva), logo seu posto é máximo, isto é, igual a 3, visto que pela observação 4.1.1, $SO(3)$ é uma superfície compacta de dimensão 3. Em particular φ é uma submersão e portanto pela Proposição 1.3.1, φ é uma aplicação aberta. ■

Do fato que $\text{Ker}\varphi = \{-1, 1\}$ e portanto dados $w, w' \in S^3$,

$$\varphi(w) = \varphi(w') \Leftrightarrow w = \pm w',$$

e ainda φ é sobrejetiva, obtemos uma bem definida bijeção contínua

$$\overline{\varphi} : P^3 = S^3/\{-1, 1\} \longrightarrow SO(3)$$

dada por $\overline{\varphi}([x]) = \varphi(x)$.

Como P^3 é compacto e $SO(3)$ é Hausdorff, então $\overline{\varphi}$ é um homeomorfismo. Daí resulta o

Corolário 4.5.1 *O espaço topológico $SO(3)$ é homeomorfo ao espaço projetivo P^3.* ■

Proposição 4.5.4 *O espaço topológico $SO(4)$ é homeomorfo ao espaço topológico $SO(3) \times S^3$.*

Demonstração: Seja $h : SO(4) \longrightarrow SO(3) \times S^3$ a aplicação contínua que associa a cada operador ortogonal $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ em $SO(4)$ o par $(T', w) \in SO(3) \times S^3$, onde $w = T(1)$ é o quatérnio de módulo 1 (imagem do quatérnio 1 por T), e $T' : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $T'(v) = T(v) \cdot w^{-1}$(multiplicação de quatérnios) para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Como $T'(1) = 1$, então $T'(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Logo, $T'(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$.

Além disso, $w = T(1) \in \mathbb{R}^4$ e $||T(1)|| = 1$, ou seja, $w \in S^3$.

$$||T'(v)|| = ||T(v) \cdot w^{-1}|| = ||T(v)||.||w^{-1}|| = ||v||$$

e portanto T' é uma isometria de $\mathbb{R}^3$. Como $T'(0) = T(0) \cdot w^{-1} = 0$ então T' é um operador ortogonal do $\mathbb{R}^3$. Ainda, desde que $\det T = 1$ segue que $\det[w, T(i), T(j), T(k)] = 1$ e portanto $\det[1, T(i) \cdot w^{-1}, T(j) \cdot w^{-1}, T(k) \cdot w^{-1}] = 1$, ou equivalentemente, $\det[1, T'(i), T'(j), T'(k)] = 1$. Logo $\det[T'(i), T'(j), T'(k)] = 1$ e portanto $T' \in SO(3)$.

Assim h está bem definida.

Dados $T, U \in SO(4)$,

$$h(T) = h(U) \Rightarrow (T', w) = (U', z) \Rightarrow \begin{cases} T' = U' \\ T(1) = w = z = U(1) \end{cases}.$$

Mas, para qualquer $v \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} T'(v) = T(v) \cdot w^{-1} \\ U'(v) = U(v) \cdot z^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T'(v) \cdot w = T(v) \\ U'(v) \cdot z = U(v) \end{cases} \Rightarrow T(v) = U(v).$$

Como $T(1) = U(1)$, tem-se $T = U$. Logo, h é injetora.

Agora, dado $(T', w) \in SO(3) \times S^3$, definamos $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ por

$$T(1) = w,\ T(i) = T'(i) \cdot w,\ T(j) = T'(j) \cdot w \text{ e } T(k) = T'(k) \cdot w$$

e estendamos por linearidade para todo $\mathbb{R}^4$. Assim, é fácil verificar que para todo $x \in \mathbb{R}^4$,

$$||T(x)|| = ||x||,$$

pois $T' \in SO(3)$ e $w \in S^3$.

Como $T(0) = 0$ então T é um operador ortogonal do $\mathbb{R}^4$. Por outro lado temos $\det T = \det[w, T'(i) \cdot w, T'(j) \cdot w, T'(k) \cdot w] = \det[1, T'(i), T'(j), T'(k)] = \det[T'(i), T'(j), T'(k)] = 1$ e assim $T \in SO(4)$.

Como $h(T) = (T', w)$, h é sobrejetora.

Ainda, $h^{-1} : SO(3) \times S^3 \to SO(4)$ dada por $h^{-1}(T', w) = T$ onde $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é definida como acima, é a inversa contínua de h. Portanto h é um homeomorfismo. ■

Grau de uma Aplicação

Para a definição seguinte usaremos a homologia da esfera S^n(veja [4], p.38).

Definição 4.5.1 *Para uma aplicação $g : S^n \to S^n$ com $n > 0$, a aplicação induzida g_* :*

$H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ é um homomorfismo de um grupo cíclico infinito nele próprio e assim deve ser da forma $g_*(\alpha) = d\alpha$ para algum inteiro d dependendo somente de g. Este inteiro d é chamado o grau de g, e será denotado por $deg(g)$.

Alguns resultados do grau de uma aplicação de $S^n \to S^n$ são:

a) $deg(f \circ g) = deg(f).deg(g)$;

b) a aplicação antípoda $a : S^n \longrightarrow S^n$, definida por $a(x) = -x$ para todo $x \in S^n$, tem grau $(-1)^{n+1}$;

c) Se i_n denota a identidade de S^n, $deg(i_n) = 1$;

d) $f, g : S^n \to S^n$ são homotópicas se, e somente se, $deg(f) = deg(g)$.

Observação 4.5.1 *Para cada $x \in S^n$, seja $f(x)$ a reflexão de R^{n+1} sobre o hiperplano ortogonal a x. Então $f : S^n \to O(n+1)$ é contínua e, considerada como uma aplicação de S^n no espaço das funções $F(S^n, S^n)$, f tem uma adjunta $\widetilde{f} : S^n \times S^n \longrightarrow S^n$, dada por $\widetilde{f}(x, y) = f(x)(y)$.*

Lema 4.5.1 *A aplicação $\widetilde{f} : S^n \times S^n \longrightarrow S^n$ é do tipo $(1-(-1)^n, -1)$; isto é, $\widetilde{f}\,|_{S^n \times y}$ tem grau $1-(-1)^n$ e $\widetilde{f}\,|_{x \times S^n}$ tem grau -1, para cada $x, y \in S^n$.*

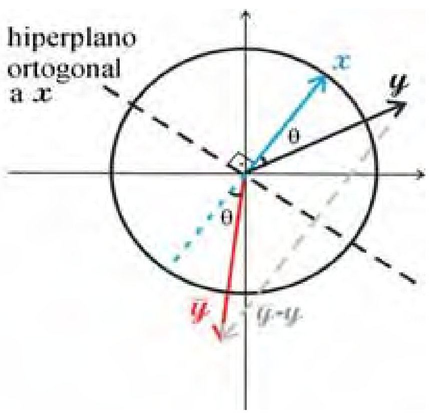
Demonstração: Veja [10], p. 197. ■

Se $f(x)$ denota a reflexão de $\mathbb{R}^{n+1}$ sobre o hiperplano ortogonal à x, considere $f_{n-1} = f_n|S^{n-1} : S^{n-1} \longrightarrow SO(n)$, onde $f_n : S^n \longrightarrow SO(n+1)$ é definida por $f_n(x) = f(x) \circ f(e_0)$, onde e_0 é o primeiro vetor da base canônica do $\mathbb{R}^{n+1}$ e S^{n-1} é visto como o conjunto de pontos $(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, 0) \in S^n$.

Teorema 4.5.1 *A aplicação $f_{n-1} : S^{n-1} \longrightarrow SO(n)$ representa o elemento $(-1)^{n+1} w_{n-1} \in \pi_{n-1}(SO(n))$.*

Demonstração: Para cada $x \in S^n$, seja $f(x)$ a reflexão de $\mathbb{R}^{n+1}$ sobre o hiperplano ortogonal a x.

Vamos ilustrar para o caso $n = 1$:



Os vetores x e $\overline{y}-y$ são paralelos, então $\overline{y}-y=\lambda x$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Daí,

$$\langle\overline{y}-y,x\rangle=\langle\lambda x,x\rangle\Rightarrow\langle\overline{y},x\rangle-\langle y,x\rangle=\lambda||x||^2\overset{x\in S^n}{\Rightarrow}\langle\overline{y},x\rangle-\langle y,x\rangle=\lambda.$$

Seja θ o ângulo entre os vetores x e y. Então $(\pi-\theta)$ é o ângulo entre x e $\overline{y}$.

Observe que

$$\langle y,x\rangle=||y||.||x||cos\theta=||y||cos\theta,$$

e

$$\langle\overline{y},x\rangle=||\overline{y}||.||x||cos(\pi-\theta)=||\overline{y}||cos(\pi-\theta).$$

Mas, $||y||=||\overline{y}||$ e $cos(\pi-\theta)=-cos\theta$. Logo,

$$\langle\overline{y},x\rangle=||y||(-cos\theta)=-||y||cos\theta=-\langle y,x\rangle.$$

Assim,

$$\lambda=\langle\overline{y},x\rangle-\langle y,x\rangle=-\langle y,x\rangle-\langle y,x\rangle=-2\langle x,y\rangle.$$

Como $\overline{y}-y=\lambda x$,

$$\overline{y}-y=-2\langle x,y\rangle x\Rightarrow\overline{y}=y-2\langle x,y\rangle x.$$

Desse modo, para qualquer $y\in\mathbb{R}^{n+1}$,

$$f(x)(y)=\overline{y}\Rightarrow f(x)(y)=y-2\langle x,y\rangle x.$$

Com isso, dados $y,z\in\mathbb{R}^{n+1}$, $x\in S^n$ e $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$f(x)(y+z)=y+z-2\langle x,y+z\rangle x=(y-2\langle x,y\rangle x)+(z-2\langle x,z\rangle x)=f(x)(y)+f(x)(z),$$

$$f(x)(\lambda y)=\lambda y-2\langle x,\lambda y\rangle x=\lambda(y-2\langle x,y\rangle x)=\lambda f(x)(y),$$

e, além disso,

$$\begin{aligned}\langle f(x)(y),f(x)(z)\rangle &= \langle(y-2\langle x,y\rangle x),(z-2\langle x,z\rangle x)\rangle\\ &= \langle y,z\rangle-2\langle x,z\rangle\langle y,x\rangle-2\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle+4\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle x,x\rangle\ ,\\ &= \langle y,z\rangle\end{aligned}$$

ou seja, obtemos uma aplicação contínua $f:S^n\longrightarrow O(n+1)$ ($O(n+1)$ é o grupo ortogonal constituído de todas as transformações lineares $T:\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ que preservam produto interno), onde a cada $x\in S^n$ associamos a reflexão $f(x)$.

Como, para cada $x \in S^n$, $f(x)$ preserva produto interno, a aplicação está bem definida. Considerando $f : S^n \longrightarrow F(S^n, S^n)$ definida por

$$f(x) = f(x)\mid_{S^n},$$

pela Observação 4.5.1, f possui uma adjunta $\widetilde{f} : S^n \times S^n \longrightarrow S^n$, dada por $\widetilde{f}(x, y) = f(x)(y)$.

Então, dados $x = (x_0, x_1, ..., x_n) \in S^n$ e $\{e_0, e_1, ..., e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$f(x)(e_i) = e_i - 2\langle x, e_i\rangle x = e_i - 2x_i x = e_i - 2x_i \sum_{j=0}^{n} x_j e_j = e_i + \sum_{j=0}^{n}(-2x_i x_j e_j) = \sum_{j=0}^{n}(\delta_{ij} - 2x_i x_j)e_j,$$

$i = 0, ..., n$, onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}$.

Desse modo, a matriz de $f(x)$ é

$$[f(x)] = \begin{pmatrix} 1 - 2x_0^2 & -2x_1x_0 & \dots & -2x_nx_0 \\ -2x_0x_1 & 1 - 2x_1^2 & \dots & -2x_nx_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_0x_n & -2x_1x_n & \dots & 1 - 2x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Definamos $f_n : S^n \longrightarrow SO(n+1)$ pondo $f_n(x) = f(x) \circ f(e_0)$, sendo e_0 o primeiro vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Observemos que $\det[f(x)] = 1 - 2||x||^2 = -1$ para todo $x \in S^n$.

Calculando o determinante da matriz $[f(e_0)]$:

$$f(e_0)(e_i) = e_i - 2(e_0 \cdot e_i)e_0 = \begin{cases} -e_0, & se\ i = 0 \\ e_i, & se\ i \neq 0 \end{cases} .$$

Assim,

$$[f(e_0)] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

e $\det[f(e_0)] = -1$.

Desse modo,

$$\det([f(x) \circ f(e_0)]) = \det([f(x)]). \det([f(e_0)]) = (-1)(-1) = 1,$$

ou seja,

$$f(x) \circ f(e_0) \in SO(n+1).$$

Sejam E^n_+ o hemisfério norte da esfera S^n e S^{n-1} o seu bordo, fazendo $x_n = 0$. A aplicação $f_n \mid_{E^n_+}$ envia (E^n_+, S^{n-1}) em $(SO(n+1), SO(n)))$.

De fato: $f_n(S^n) \subset SO(n+1)$ então $f_n(E^n_+) \subset SO(n+1)$.

Ainda, se $x \in S^{n-1}$, $x = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, 0)$,

$$[f_n](x) = [f(x) \circ f(e_0)] = \begin{pmatrix} 1-2x_0^2 & -2x_1x_0 & \dots & -2x_{n-1}x_0 & 0 \\ -2x_0x_1 & 1-2x_1^2 & \dots & -2x_{n-1}x_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2x_0x_{n-1} & -2x_1x_{n-1} & \dots & 1-2x_{n-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1+2x_0^2 & -2x_1x_0 & \dots & -2x_{n-1}x_0 & 0 \\ 2x_0x_1 & 1-2x_1^2 & \dots & -2x_{n-1}x_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2x_0x_{n-1} & -2x_1x_{n-1} & \dots & 1-2x_{n-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, $f_n(S^{n-1}) \subset SO(n)$.

Obtemos então $E^n_+ \xrightarrow{f_n|_{E^n_+}} SO(n+1) \xrightarrow{p} S^n$, de forma que, dado $x \in E^n_+$, $p \circ f_n \mid_{E^n_+} (x) = (f(x) \circ f(e_0))(e_n)$(vide Observação 4.4.1).

Tem-se que

$$f(e_0)(e_n) = e_n - 2\langle e_0, e_n \rangle e_0 = e_n.$$

Logo,

$$p \circ f_n \mid_{E^n_+} (x) = f(x)(e_n) = e_n - 2\langle x, e_n \rangle x.$$

Definamos $g : S^n \longrightarrow S^n$ por

$$g(x) = f(x)(-e_n) = -e_n + 2\langle x, e_n \rangle x.$$

Daí, $g \mid_{S^{n-1}}: S^{n-1} \longrightarrow \{-e_n\}$.

De fato, se $x \in S^{n-1}$,

$$g(x) = -e_n + 2\langle x, e_n \rangle x = -e_n + 2\langle (x_0, ..., x_{n-1}, 0), (0, ..., 0, 1) \rangle x = -e_n.$$

Considere $g_+ \mid_{E^n_+} = g \mid_{E^n_+}$ e $g_+(E^n_-) = \{-e_n\}$, sendo E^n_- o hemisfério sul de S^n.

Desde que $g_+(x) \neq -x$ para todo $x \in S^n$, $g_+ : S^n \longrightarrow S^n$ é homotópica a identidade via a homotopia $G : S^n \times I \to S^n$ definida por $G(x,t) = \dfrac{tx + (1-t)g_+(x)}{||tx + (1-t)g_+(x)||}$ e portanto $deg(g_+) = 1$.

Estenda $p \circ f_n$ sobre toda S^n pondo $p \circ f_n(E^n_-) = \{e_n\}$.

Assim, $p \circ f_n = -g_+ = a \circ g_+$, onde $a : S^n \longrightarrow S^n$ é a aplicação antípoda.

Daí, $p \circ f_n : S^n \longrightarrow S^n$ é tal que

$$deg(p \circ f_n) = deg(a \circ g_+) = deg(a)deg(g_+) = (-1)^{n+1}1 = (-1)^{n+1}.$$

Seja $i_n : S^n \longrightarrow S^n$ a aplicação identidade. Então, $[i_n]$ é um gerador de $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

Logo, $\langle [i_n] \rangle = \pi_n(S^n)$.

Na seqüência de homotopia do fibrado $\mathbb{B} = (SO(n+1), p, S^n, SO(n))$ considere o homomorfismo $\pi_n(S^n) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(SO(n))$ e faça $\Delta([i_n]) = w_{n-1} \in \pi_{n-1}(SO(n))$.

Observe que $f_{n-1} = f_n \mid_{S^{n-1}}$ e $[p \circ f_n] = [p \circ f_n \circ i_n] = (p \circ f_n)_*([i_n]) = deg(p \circ f_n)[i_n] = (-1)^{n+1}[i_n]$.

Daí,

$$w_{n-1} = \Delta([i_n]) \Rightarrow (-1)^{n+1} w_{n-1} = (-1)^{n+1}\Delta([i_n]) \overset{\Delta:hom.}{=} \Delta((-1)^{n+1}[i_n]) = \Delta([p \circ f_n]) =$$

$$\overset{\Delta = \delta \circ p_*^{-1}}{=} \delta \circ p_*^{-1} \circ p_*([f_n]) = \delta([f_n]) = [f_n \mid_{S^{n-1}}] = [f_{n-1}].$$

Portanto, $f_{n-1} : S^{n-1} \longrightarrow SO(n)$ representa o elemento $(-1)^{n+1} w_{n-1} \in \pi_{n-1}(SO(n))$. ■

Segue do Lema 4.5.1 que a aplicação $p \circ f_{n-1} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ tem grau 2 se n é par. Isto é equivalente a dizer que $[p \circ f_{n-1}] = 2[i_{n-1}]$. Logo $p_*([f_{n-1}]) = 2[i_{n-1}]$. Pelo Teorema 4.5.1, $[f_{n-1}] = -w_{n-1} \in \pi_{n-1}(SO(n))$. Assim, $p_*(w_{n-1}) = -2[i_{n-1}]$ onde $[i_{n-1}]$ é um gerador de $\pi_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$.

Portanto, se n é par, $\langle w_{n-1} \rangle \cong p_*^{-1}(\langle -2[i_{n-1}] \rangle)$ e daí temos o

Corolário 4.5.2 *Se n é par então w_{n-1} gera um subgrupo cíclico infinito de $\pi_{n-1}(SO(n))$.* ■

Propriedades dos Grupos $U(n)$ e $SU(n)$

Proposição 4.5.5 *Para todo n, o espaço topológico $U(n)$ é homeomorfo ao espaço topológico $S^1 \times SU(n)$*

Demonstração: Definamos a aplicação contínua

$$f : S^1 \times SU(n) \longrightarrow U(n)$$

por $f(u,T) = R$, onde R é a matriz obtida multiplicando-se a primeira coluna de T por u e mantendo fixa as demais.

Sejam $u \in S^1$ e $T \in SU(n)$.

Identificando a matriz T por $[v_1, v_2, ..., v_n]$, temos que $\det(T) = 1$ e

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases} .$$

Assim,

$$f(u,T) = R = [uv_1, v_2, ..., v_n].$$

Como

$$\langle uv_1, v_j \rangle = u\langle v_1, v_j \rangle = 0,$$

para todo $j = 2, ..., n$, e

$$||u.v_1|| = |u|^2||v_1|| = 1,$$

temos que R é uma matriz unitária. Logo f é bem definida.

Agora definamos a aplicação contínua

$$g : U(n) \longrightarrow S^1 \times SU(n)$$

dada por $g(R) = (\det(R), T)$, onde T é obtida de R dividindo-se a primeira coluna de R por $\det(R)$.

Assim, sendo $R = [w_1, w_2, ..., w_n]$, então $T = [\frac{w_1}{\det(R)}, w_2, ..., w_n]$.

Uma vez que

$$\langle \frac{w_1}{\det(R)}, w_j \rangle = \frac{1}{\det(R)}\langle w_1, w_j \rangle = 0,$$

para todo $j = 2, ..., n$, e

$$||\frac{w_1}{\det(R)}|| = \frac{||w_1||}{|\det(R)|^2} = 1,$$

temos que T é uma matriz unitária. Além disso,

$$\det(T) = \frac{1}{\det(R)}\det(R) = 1.$$

ou seja, $T \in SU(n)$.

Por outro lado, como R é unitária, sendo I_n é a matriz identidade de ordem n, temos

$$R.\overline{R^t} = I_n \Rightarrow \det(R).\det(\overline{R^t}) = 1 \Rightarrow \det(R).\overline{\det(R^t)} = 1 \Rightarrow \det(R).\overline{\det(R)} = 1 \Rightarrow$$

$$|\det(R)| = 1 \Rightarrow \det(R) \in S^1.$$

Assim g é bem definida.

Verifiquemos agora que g é a inversa de f.

De fato, dados $T = [v_1, v_2, ..., v_n] \in SU(n)$ e $u \in S^1$, temos:

$$\begin{aligned} g \circ f(u, T) &= g(f(u, [v_1, v_2, ..., v_n])) \\ &= g([uv_1, v_2, ..., v_n]) \\ &= (\det[uv_1, v_2, ..., v_n], [\tfrac{uv_1}{\det[uv_1, v_2, ..., v_n]}, v_2, ..., v_n]) \end{aligned}$$

Como $\det[uv_1, v_2, ..., v_n] = u \ \det[v_1, v_2, ..., v_n]) = u \ \det(T) = u$, pois $\det(T) = 1$, segue que

$$g \circ f(u, T) = (u, [v_1, v_2, ..., v_n]) = (u, T).$$

Analogamente, sendo $R = [w_1, w_2, ..., w_n] \in U(n)$,

$$f \circ g(R) = f(\det(R), [\frac{w_1}{\det(R)}, w_2, ..., w_n]) = [\det(R)\frac{w_1}{\det(R)}, w_2, ..., w_n] = [w_1, w_2, ..., w_n] = R.$$

Nessas condições, temos que f é um homeomorfismo. ■

Proposição 4.5.6 *$SU(n)$ é conexo por caminhos, para todo n.*

Demonstração: Provemos por indução sobre n.

Para $n = 1$,

$$SU(1) = \{1\}$$

que é conexo por caminhos.

Para $n = 2$, consideremos a fibração localmente trivial

$$\overline{p} : SU(2) \longrightarrow S^3,$$

que possui base S^3 e fibra típica $SU(1)$ ambas conexas por caminhos. Pelo Corolário 3.0.1, tem-se que $SU(2)$ é conexo por caminhos.

Suponhamos que o resultado seja válido para $n-1$, ou seja, $SU(n-1)$ é conexo por caminhos.

Então, para n consideremos a fibração localmente trivial

$$p : SU(n) \longrightarrow S^{2n-1}.$$

Como a base $B = S^{2n-1}$ é conexa por caminhos e a fibra típica $F = SU(n-1)$ é conexa por caminhos pela hipótese de indução, de acordo com o Corolário 3.0.1, $SU(n)$ é conexo por caminhos. ■

Proposição 4.5.7 *O espaço topológico $SU(2)$ é homeomorfo a esfera S^3.*

Demonstração: Consideremos a fibração localmente trivial $p : SU(2) \to S^3$ dada no Exemplo 4.4.2. Observemos que $T \in SU(2)$ pode ser vista como uma matriz do tipo $\begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ c & d \end{pmatrix}$ com $c, d \in \mathbb{C}$ e $|c|^2 + |d|^2 = 1$. Então $p(T) = T(1,0) = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ c \end{pmatrix}$. Logo, $p^{-1} : S^3 \to SU(2)$ definida por $p^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$ é a inversa contínua de p.

De fato, dado $(x,y) \in S^3$, temos

$$p \circ p^{-1}(x,y) = p(\begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x,y).$$

Além disso, dada $T = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$,

$$p^{-1} \circ p(\begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ c & d \end{pmatrix}) = p^{-1}(\bar{d}, c) = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Portanto p é um homeomorfismo. ■

Capítulo

5

Cálculo de Grupos de Homotopia dos Grupos Clássicos

5.1 Grupo $SO(n)$

Grupo Fundamental

O grupo $SO(1) = \{1\}$ é formado por um único elemento. Logo

$$\pi_1(SO(1)) = 0.$$

Pela Proposição 4.5.1, $SO(2) \cong S^1$, então $\pi_1(SO(2)) = \pi_1(S^1)$ o que implica

$$\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}.$$

Pelo Corolário 4.5.1, $SO(3)$ é homeomorfo ao espaço projetivo P^3. Portanto, segue do Exemplo 2.1.2 que

$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2.$$

Como conseqüência da Proposição 3.1.1 temos o

Corolário 5.1.1 *Para $n \geq 4$, tem-se $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre n.

Para $n = 4$, consideremos a aplicação

$$\overline{p} : SO(4) \longrightarrow S^3$$

dada no Exemplo 4.4.1.

A aplicação $\overline{p}$ é uma fibração localmente trivial com espaço total $SO(4)$, base S^3 e fibra típica $SO(3)$.

Como $SO(3)$ é conexo por caminhos, S^3 é simplesmente conexa e $\pi_2(S^3) = 0$ (vide Observação 2.2.3), então, pela Proposição 3.1.1,

$$\pi_1(SO(4)) \cong \pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2.$$

Suponhamos o resultado válido para $n-1 \geq 4$, isto é, $\pi_1(SO(n-1)) = \mathbb{Z}_2$.

Provemos para $n \geq 5$. Temos a fibração localmente trivial

$$p : SO(n) \longrightarrow S^{n-1}$$

dada no Exemplo 4.4.1. Esta fibração possui espaço total $SO(n)$, base S^{n-1} simplesmente conexa e fibra típica $SO(n-1)$ conexa por caminhos, com $\pi_2(S^{n-1}) = 0$ (vide Observação 2.2.3). Então

$$\pi_1(SO(n)) \cong \pi_1(SO(n-1)) = \mathbb{Z}_2.$$

Portanto,

$$\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2, \;\; n \geq 4.$$

$\blacksquare$

Grupos de Homotopia de Ordem Superior

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(n)$ no nível $k = 2$:

• O grupo $SO(1)$ possui somente o elemento neutro. Logo,

$$\pi_2(SO(1)) = 0.$$

• Pela Proposição 4.5.1, tem-se que $SO(2) \cong S^1$. Daí, $\pi_2(SO(2)) = \pi_2(S^1)$. Então, de acordo com a Observação 2.2.3,

$$\pi_2(SO(2)) = 0.$$

• Para o grupo $SO(3)$, usaremos a seqüência exata do fibrado dado no exemplo 4.4.1

$$... \longrightarrow \pi_2(SO(2)) \xrightarrow{i_*} \pi_2(SO(3)) \xrightarrow{p_*} \pi_2(S^2) \xrightarrow{\Delta} \pi_1(SO(2)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(SO(3)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(S^2).$$

Como $\pi_1(S^2) = 0$, então p_* é o homomorfismo nulo, de onde resulta que i_* é epimorfismo. Logo, $Im(i_*) = \pi_1(SO(3))$.

Pelo Teorema do Isomorfismo,

$$\frac{\pi_1(SO(2))}{Ker(i_*)} \cong \pi_1(SO(3)).$$

Mas $\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ e $Ker(i_*) = Im(\Delta)$. Assim,

$$\frac{\mathbb{Z}}{Im(\Delta)} = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow Im(\Delta) = 2\mathbb{Z}.$$

Desse modo, $\Delta : \pi_2(S^2) \longrightarrow \pi_1(SO(2))$ ($\Delta : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$) é monomorfismo. Logo, $Ker(\Delta) = \{0\}$. Então $Im(p_*) = \{0\}$. Portanto p_* é o homomorfismo nulo.

Então temos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_2(SO(2)) \xrightarrow{i_*} \pi_2(SO(3)) \xrightarrow{p_*} 0 \longrightarrow ...$$

Como $\pi_2(SO(2)) = 0$,

$$\pi_2(SO(3)) = 0.$$

• Para $n = 4$ temos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_2(SO(3)) \xrightarrow{i_*} \pi_2(SO(4)) \xrightarrow{p_*} \pi_2(S^3) \longrightarrow ...$$

Como $\pi_2(SO(3)) = 0$ e $\pi_2(S^3) = 0$ segue que

$$\pi_2(SO(4)) = 0.$$

• Para $n \geq 5$, consideraremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_3(S^{n-1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_2(SO(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_2(SO(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_2(S^{n-1}) \longrightarrow ...$$

Pela Observação 2.2.3, $\pi_2(S^{n-1}) = \pi_3(S^{n-1}) = 0$ sempre que $n \geq 5$.

Assim,

$$... \longrightarrow 0 \xrightarrow{\Delta} \pi_2(SO(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_2(SO(n)) \longrightarrow 0 \longrightarrow ...$$

o que nos fornece $\pi_2(SO(n-1)) \cong \pi_2(SO(n))$, $n \geq 5$, ou seja,

$$0 = \pi_2(SO(4)) \cong \pi_2(SO(5)) \cong \pi_2(SO(6)) \cong ...$$

Desse modo,

$$\pi_2(SO(n)) = 0, \ n \geq 5.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(n)$ no nível $k = 3$:

• Grupo $SO(1) = \{1\}$:

$$\pi_3(SO(1)) = 0.$$

• Grupo $SO(2)$: Pela Proposição 4.5.1, $\pi_3(SO(2)) = \pi_3(S^1)$. Portanto, pela Observação 2.2.3:

$$\pi_3(SO(2)) = 0.$$

• Para o grupo $SO(3)$, consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_3(SO(2)) \xrightarrow{i_*} \pi_3(SO(3)) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^2) \xrightarrow{\Delta} \pi_2(SO(2)) \longrightarrow ...$$

Como $\pi_3(SO(2)) = \pi_2(SO(2)) = 0$, resulta que $\pi_3(SO(3)) \cong \pi_3(S^2)$.
Mas pela Observação 2.2.3, $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$. Logo,

$$\pi_3(SO(3)) = \mathbb{Z}.$$

• Grupo $SO(4)$: Consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_4(S^3) \xrightarrow{\Delta} \pi_3(SO(3)) \xrightarrow{i_*} \pi_3(SO(4)) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^3) \xrightarrow{\Delta} \pi_2(SO(3)) \longrightarrow ...$$

Temos $\pi_2(SO(3)) = 0$ e $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ (vide Observação 2.2.3).

Além disso, por $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$ (vide Observação 2.2.3) e $\pi_3(SO(3)) = \mathbb{Z}$, temos a aplicação $\Delta : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Mas, $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ e por Δ ser homomorfismo, $\Delta(\overline{0}) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Seja $\Delta(\overline{1}) = x$, para algum $x \in \mathbb{Z}$. Daí,

$$\overline{1} + \overline{1} = \overline{0} \Rightarrow \Delta(\overline{1} + \overline{1}) = \Delta(\overline{0}) \overset{\Delta:\ hom.}{\Rightarrow} \Delta(\overline{1}) + \Delta(\overline{1}) = 0 \Rightarrow x + x = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Portanto Δ é o homomorfismo nulo.

Desse modo, a seqüência exata passa a ser

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \pi_3(SO(4)) \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow ...$$

e sendo $\mathbb{Z}$ livre (Exemplo 1.1.1), a seqüência cinde. Então

$$\pi_3(SO(4)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

• Para o grupo $SO(5)$, consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_4(S^4) \xrightarrow{\Delta} \pi_3(SO(4)) \xrightarrow{i_*} \pi_3(SO(5)) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^4) \longrightarrow ...$$

Como $\pi_3(S^4) = 0$, p_* é o homomorfismo nulo. Portanto, $Ker(p_*) = \pi_3(SO(5)) = Im(i_*)$.

Aplicando o Teorema do Isomorfismo,

$$\pi_3(SO(5)) \cong \frac{\pi_3(SO(4))}{Ker(i_*)}.$$

Mas, $\pi_3(SO(4)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $Ker(i_*) = Im(\Delta)$. Logo

$$\pi_3(SO(5)) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{Im(\Delta)}.$$

Agora, pelo Corolário 4.5.2, temos $Im(\Delta) = \langle w_3 \rangle$ e $w_3 = \Delta([i_4])$, sendo $i_4 : S^4 \longrightarrow S^4$ a aplicação identidade.

Mas, $\langle [i_4] \rangle = \pi_4(S^4) = \mathbb{Z}$, então $Im(\Delta) = \langle w_3 \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Daí,

$$\pi_3(SO(5)) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \Rightarrow \pi_3(SO(5)) \cong \mathbb{Z}.$$

• Para o grupo $SO(n)$, $n \geq 6$, consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_4(S^{n-1})) \xrightarrow{\Delta} \pi_3(SO(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_3(SO(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^{n-1})) \longrightarrow ...$$

Da Observação 2.2.3, $\pi_3(S^{n-1}) = \pi_4(S^{n-1}) = 0$ se $n-1 \geq 5$. Então temos a seqüência exata

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_3(SO(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_3(SO(n)) \longrightarrow 0 \longrightarrow ...$$

de onde se conclui que $\pi_3(SO(n-1)) \cong \pi_3(SO(n))$, sempre que $n \geq 6$.

Logo, $\mathbb{Z} = \pi_3(SO(5)) \cong \pi_3(SO(6)) \cong \pi_3(SO(7)) \cong ...$

Portanto,

$$\pi_3(SO(n)) = \mathbb{Z},\ n \geq 6.$$

5.2 Grupo $U(n)$ e $SU(n)$

Grupo Fundamental

Segue da definição do grupo $SU(1)$ que ele só possui o elemento neutro, assim, $SU(1) = \{1\}$. Então

$$\pi_1(SU(1)) = 0.$$

Como conseqüência da Proposição 3.1.2 temos o

Corolário 5.2.1 *Para todo n, $SU(n)$ é simplesmente conexo e $\pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Inicialmente, observemos que para todo n, $SU(n)$ é conexo por caminhos (vide Proposição 4.5.6).

Temos que $SU(1) = \{1\}$ é simplesmente conexo, pois $SU(1)$ é conexo por caminhos e $\pi_1(SU(1)) = 0$.

Para $n = 2$, consideremos a fibração localmente trivial

$$\overline{p} : SU(2) \longrightarrow S^3,$$

dada no Exemplo 4.4.2, que possui base S^3 simplesmente conexa e fibra típica $SU(1)$ conexa por caminhos. Pela Proposição 3.1.2 tem-se que o grupo fundamental de $SU(2)$ é isomorfo a um grupo quociente do grupo fundamental de $SU(1)$. Mas $\pi_1(SU(1)) = 0$. Logo

$$\pi_1(SU(2)) = 0.$$

Suponhamos agora que $SU(n-1)$ é um espaço simplesmente conexo para $n-1 \geq 2$, isto é, $SU(n-1)$ é conexo por caminhos e $\pi_1(SU(n-1)) = 0$.

Provemos para $n \geq 3$. Para isto basta mostra que $\pi_1(SU(n)) = 0$. De fato, consideremos a fibração localmente trivial

$$p : SU(n) \longrightarrow S^{2n-1}$$

com base S^{2n-1} e fibra típica $SU(n-1)$, dada no Exemplo 4.4.2.

Como S^{2n-1} é simplesmente conexa (vide Exemplo 2.1.3) e $SU(n-1)$ é conexo por caminhos, segue pela Proposição 3.1.2 que $\pi_1(SU(n))$ é isomorfo a um grupo quociente do grupo fundamental $\pi_1(SU(n-1)) = 0$ (hipótese de indução).

Portanto

$$\pi_1(SU(n)) = 0, \forall n.$$

Como, pela Proposição 4.5.5, para todo n, temos

$$U(n) \approx S^1 \times SU(n)$$

então

$$\pi_1(U(n)) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(SU(n)) \Rightarrow \pi_1(U(n)) = \mathbb{Z} \times \{0\}.$$

Portanto,

$$\pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}.$$

■

Grupos de Homotopia de Ordem Superior

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SU(n)$ no nível $k = 2$:

• Como o grupo $SU(1)$ possui somente o elemento neutro,

$$\pi_2(SU(1)) = 0.$$

• Pela Proposição 4.5.7, $SU(2)$ é homeomorfo a S^3, assim $\pi_2(SU(2)) \cong \pi_2(S^3)$. Como, pela Observação 2.2.3, $\pi_2(S^3) = 0$ segue que

$$\pi_2(SU(2)) = 0.$$

• Para o grupo $SU(n)$, $n \geq 3$, consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_3(S^{2n-1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_2(SU(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_2(SU(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_2(S^{2n-1}) \longrightarrow ...$$

Como $2n - 1 \geq 5$, $\pi_3(S^{2n-1}) = \pi_2(S^{2n-1}) = 0$ (vide Observação 2.2.3), e portanto obtemos a seqüência exata

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_2(SU(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_2(SU(n)) \longrightarrow 0 \longrightarrow ...$$

de onde resulta que

$$\pi_2(SU(n-1)) \cong \pi_2(SU(n)),\ n \geq 3.$$

Logo,

$$0 = \pi_2(SU(2)) \cong \pi_2(SU(3)) \cong \pi_2(SU(4)) \cong ...$$

Portanto,

$$\pi_2(SU(n)) = 0,\ \forall n.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SU(n)$ no nível $k = 3$:

• Como $SU(1) = \{1\}$:

$$\pi_3(SU(1)) = 0.$$

• Pela Proposição 4.5.7, $SU(2) \approx S^3$ e, pela Observação 2.2.3, $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Logo

$$\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}.$$

• Para o grupo $SU(n)$, $n \geq 3$, consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_4(S^{2n-1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_3(SU(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_3(SU(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^{2n-1}) \longrightarrow ...$$

Como $2n-1 > 4$, sempre que $n \geq 3$, pela Observação 2.2.3 tem-se $\pi_4(S^{2n-1}) = \pi_3(S^{2n-1}) = 0$.

Sendo assim, obtemos a seqüência exata

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_3(SU(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_3(SU(n)) \longrightarrow 0 \longrightarrow ...$$

Dessa forma, $\pi_3(SU(n)) \cong \pi_3(SU(n-1))$, $n \geq 3$.
Portanto,

$$\pi_3(SU(n)) = \mathbb{Z}, \ n \geq 3.$$

Para o cálculo do Grupo de Homotopia de $U(n)$, lembramos que, conforme Proposição 4.5.5, $U(n) \approx S^1 \times SU(n)$, para todo n. Logo, $\pi_k(U(n)) \cong \pi_k(S^1) \times \pi_k(SU(n))$, para todo k.

Cálculo do Grupo de Homotopia de $U(n)$ no nível $k = 2$:

• Como $\pi_2(SU(n)) = 0$ para todo n e $\pi_2(S^1) = 0$,

$$\pi_2(U(n)) = 0, \ \forall n.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $U(n)$ no nível $k = 3$:

• Tem-se que $\pi_3(SU(1)) = 0$ e $\pi_3(S^1) = 0$ (vide Observação 2.2.3). Logo,

$$\pi_3(U(1)) = 0.$$

• Agora, $\pi_3(SU(n)) = \mathbb{Z}$ para todo $n \geq 2$ e $\pi_3(S^1) = 0$ (vide Observação 2.2.3). Portanto,

$$\pi_3(U(n)) = \mathbb{Z}, \ \forall n \geq 2.$$

5.3 Grupo $Sp(n)$

Grupo Fundamental

• Inicialmente observemos que o grupo $Sp(1)$ pode ser identificado com a esfera S^3 pois, se $M \in Sp(1)$, $M = [w]$, com $w \in \mathbb{R}^4$ e $||w|| = 1$. Então $Sp(1) = S^3$. Como $\pi_1(S^3) = 0$ (vide Observação 2.2.3), então

$$\pi_1(Sp(1)) = 0.$$

• Para o grupo $Sp(n)$, $n \geq 2$, consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_2(S^{4n-1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_1(Sp(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(Sp(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(S^{4n-1}).$$

Sempre que $n \geq 2$, tem-se $4n - 1 > 2$. Logo, da Observação 2.2.3, $\pi_1(S^{4n-1}) = \pi_2(S^{4n-1}) =$

0.

Portanto,

$$\pi_1(Sp(n)) \cong \pi_1(Sp(n-1)) = 0, \forall n \geq 2.$$

Assim

$$0 = \pi_1(Sp(1)) \cong \pi_1(Sp(2)) \cong \pi_1(Sp(3)) \cong \cdots$$

Portanto,

$$\pi_1(Sp(n)) = 0, \forall n.$$

Grupos de Homotopia de Ordem Superior

Cálculo do Grupo de Homotopia de $Sp(n)$ no nível $k = 2$:

• Desde que $Sp(1) = S^3$ e $\pi_2(S^3) = 0$ (vide Observação 2.2.3), então

$$\pi_2(Sp(1)) = 0.$$

• Para o grupo $Sp(n)$, $n \geq 2$, consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_3(S^{4n-1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_2(Sp(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_2(Sp(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_2(S^{4n-1}) \longrightarrow ...$$

Temos que $4n - 1 > 3$, sempre que $n \geq 2$. Assim, $\pi_3(S^{4n-1}) = \pi_2(S^{4n-1}) = 0$ (vide Observação 2.2.3). Logo,

$$\pi_2(Sp(n)) \cong \pi_2(Sp(n-1)), \ \forall n \geq 2.$$

Portanto,

$$\pi_2(Sp(n)) = 0, \ \forall n \geq 2.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $Sp(n)$ no nível $k = 3$:

• Desde que $Sp(1) = S^3$, segue que $\pi_3(Sp(1)) \cong \pi_3(S^3)$. Então, conforme Observação 2.2.3,

$$\pi_3(Sp(1)) = \mathbb{Z}.$$

• Para o grupo $Sp(n)$, $n \geq 2$, consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_4(S^{4n-1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_3(Sp(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_3(Sp(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^{4n-1}) \longrightarrow ...$$

Como, para todo $n \geq 2$, $4n - 1 > 4$, $\pi_4(S^{4n-1}) = \pi_3(S^{4n-1}) = 0$ e portanto,

$$\pi_3(Sp(n-1)) \cong \pi_3(Sp(n)), \ n \geq 2.$$

Logo,

$$\pi_3(Sp(n)) = \mathbb{Z}, \ \forall n \geq 2.$$

5.4 Mais cálculos de Grupos de Homotopia dos Grupos Clássicos

Nesta seção faremos mais alguns cálculos de grupos de homotopia dos grupos clássicos $SO(n)$, $SU(n)$, $U(n)$ e $Sp(n)$ para alguns valores de n.

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(1)$ no nível $k = 4$:
Como $SO(1) = \{1\}$, então

$$\pi_4(SO(1)) = 0.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(2)$ no nível $k = 4$:
Como $SO(2) \cong S^1$ (vide Proposição 4.5.1), $\pi_4(SO(2)) \cong \pi_4(S^1)$. Logo,

$$\pi_4(SO(2)) = 0.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(3)$ no nível $k = 4$:
Considerando a seqüência exata

$$\ldots \longrightarrow \pi_4(SO(2)) \xrightarrow{i_*} \pi_4(SO(3)) \xrightarrow{p_*} \pi_4(S^2) \xrightarrow{\Delta} \pi_3(SO(2)) \longrightarrow \ldots$$

Como $\pi_4(SO(2)) = \pi_3(SO(2)) = 0$, obtemos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow \pi_4(SO(3)) \xrightarrow{p_*} \pi_4(S^2) \longrightarrow 0$$

de onde se conclui que p_* é isomorfismo. Mas, pela Observação 2.2.3, $\pi_4(S^2) = \mathbb{Z}_2$, portanto

$$\pi_4(SO(3)) = \mathbb{Z}_2.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(4)$ no nível $k = 4$:
O grupo $SO(4)$ é homeomorfo a $SO(3) \times S^3$ (vide Proposição 4.5.4). Como $\pi_4(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ e $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$ (vide Observação 2.2.3), então

$$\pi_4(SO(4)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(1)$ no nível $k = 5$:
Como $SO(1) = \{1\}$, então

$$\pi_5(SO(1)) = 0.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(2)$ no nível $k = 5$:

Pela Proposição 4.5.1, $SO(2) \cong S^1$ e $\pi_5(S^1) = 0$ (vide Observação 2.2.3). Então

$$\pi_5(SO(2)) = 0.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(3)$ no nível $k = 5$:

Consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_5(SO(2)) \xrightarrow{i_*} \pi_5(SO(3)) \xrightarrow{p_*} \pi_5(S^2) \xrightarrow{\Delta} \pi_4(SO(2)) \longrightarrow ...$$

Como $\pi_5(SO(2)) = \pi_4(SO(2)) = 0$, obtemos a seqüência exata

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_5(SO(3)) \xrightarrow{p_*} \pi_5(S^2) \longrightarrow 0 \longrightarrow ...$$

Pela Observação 2.2.3, $\pi_5(S^2) = \mathbb{Z}_2$, e como p_* é isomorfismo, segue que

$$\pi_5(SO(3)) = \mathbb{Z}_2.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(4)$ no nível $k = 5$:

Temos que $SO(4) \approx SO(3) \times S^3$ (vide Proposição 4.5.4).

Pela Observação 2.2.3, $\pi_5(S^3) = \mathbb{Z}_2$, então

$$\pi_5(SO(4)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(1)$ no nível $k = 6$:

Como $SO(1) = \{1\}$, então

$$\pi_6(SO(1)) = 0.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(2)$ no nível $k = 6$:

Pela Proposição 4.5.1, $SO(2) \cong S^1$ e $\pi_6(S^1) = 0$ (vide Observação 2.2.3). Então

$$\pi_6(SO(2)) = 0.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(3)$ no nível $k = 6$:

Consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_6(SO(2)) \xrightarrow{i_*} \pi_6(SO(3)) \xrightarrow{p_*} \pi_6(S^2) \xrightarrow{\Delta} \pi_5(SO(2)) \longrightarrow ...$$

Como $\pi_6(SO(2)) = \pi_5(SO(2)) = 0$, obtemos a seqüência exata

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_6(SO(3)) \xrightarrow{p_*} \pi_6(S^2) \longrightarrow 0 \longrightarrow ...$$

Além disso, $\pi_6(S^2) = \mathbb{Z}_{12}$ (vide Observação 2.2.3), então

$$\pi_6(SO(3)) = \mathbb{Z}_{12}.$$

<u>Cálculo do Grupo de Homotopia de $SO(4)$ no nível $k = 6$:</u>
Temos que $SO(4) \approx SO(3) \times S^3$ (vide Proposição 4.5.4).
Pela Observação 2.2.3, $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}_{12}$, então

$$\pi_6(SO(4)) = \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{12}.$$

<u>Cálculo do Grupo de Homotopia de $SU(1)$ e $U(1)$ no nível $k = 4$:</u>
Temos $SU(1) = \{1\}$. Portanto,

$$\pi_4(SU(1)) = 0.$$

Como $U(1) \approx S^1 \times SU(1)$ (vide Proposição 4.5.5) e $\pi_4(S^1) = 0$ (vide Observação 2.2.3), então

$$\pi_4(U(1)) = 0.$$

<u>Cálculo do Grupo de Homotopia de $SU(2)$ e $U(2)$ no nível $k = 4$:</u>
Temos que $SU(2) \approx S^3$ (vide Proposição 4.5.7) e $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$ (vide Observação 2.2.3). Portanto,

$$\pi_4(SU(2)) = \mathbb{Z}_2.$$

Como $\pi_4(S^1) = 0$, segue da Proposição 4.5.5 que

$$\pi_4(U(2)) = \mathbb{Z}_2.$$

<u>Cálculo do Grupo de Homotopia de $SU(1)$ e $U(1)$ no nível $k = 5$:</u>
Temos $SU(1) = \{1\}$. Portanto,

$$\pi_5(SU(1)) = 0.$$

Como $U(1) \approx S^1 \times SU(1)$ (vide Proposição 4.5.5) e $\pi_5(S^1) = 0$ (vide Observação 2.2.3), então

$$\pi_5(U(1)) = 0.$$

<u>Cálculo do Grupo de Homotopia de $SU(2)$ e $U(2)$ no nível $k = 5$:</u>
Temos que $SU(2) \approx S^3$ (vide Proposição 4.5.7) e $\pi_5(S^3) = \mathbb{Z}_2$ (vide Observação 2.2.3). Portanto,

$$\pi_5(SU(2)) = \mathbb{Z}_2.$$

Como $\pi_5(S^1) = 0$, segue da Proposição 4.5.5 que

$$\pi_5(U(2)) = \mathbb{Z}_2.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SU(1)$ e $U(1)$ no nível $k = 6$:

Temos $SU(1) = \{1\}$. Portanto,

$$\pi_6(SU(1)) = 0.$$

Como $U(1) \approx S^1 \times SU(1)$ (vide Proposição 4.5.5) e $\pi_6(S^1) = 0$ (vide Observação 2.2.3), então

$$\pi_6(U(1)) = 0.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $SU(2)$ e $U(2)$ no nível $k = 6$:

Temos que $SU(2) \approx S^3$ (vide Proposição 4.5.7) e $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}_{12}$ (vide observação 2.2.3). Portanto,

$$\pi_6(SU(2)) = \mathbb{Z}_{12}.$$

Como $\pi_6(S^1) = 0$, segue da Proposição 4.5.5 que

$$\pi_6(U(2)) = \mathbb{Z}_{12}.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $Sp(1)$ no nível $k = 4$:

Como $Sp(1) = S^3$ e $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$ (vide Observação 2.2.3), tem-se que

$$\pi_4(Sp(1)) = \mathbb{Z}_2.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $Sp(n)$, $n \geq 2$, no nível $k = 4$:

Consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_5(S^{4n-1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_4(Sp(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_4(Sp(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_4(S^{4n-1}) \longrightarrow ...$$

Como $n \geq 2$, então $4n - 1 > 5$, de onde resulta que $\pi_5(S^{4n-1}) = \pi_4(S^{4n-1}) = 0$. Dessa forma,

$$\pi_4(Sp(n)) \cong \pi_4(Sp(n-1)),\ n \geq 2.$$

Portanto,

$$\pi_4(Sp(n)) = \mathbb{Z}_2,\ n \geq 2.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $Sp(1)$ no nível $k = 5$:

Como $\pi_5(S^3) = \mathbb{Z}_2$ (vide Observação 2.2.3) e $Sp(1) = S^3$ segue que

$$\pi_5(Sp(1)) = \mathbb{Z}_2.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $Sp(n)$, $n \geq 2$, no nível $k = 5$:

Consideremos a seqüência exata

$$... \longrightarrow \pi_6(S^{4n-1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_5(Sp(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_5(Sp(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_5(S^{4n-1}) \longrightarrow ...$$

Como $n \geq 2$, então $4n - 1 > 6$, e assim concluímos que $\pi_6(S^{4n-1}) = \pi_5(S^{4n-1}) = 0$ (vide Observação 2.2.3). Logo,

$$\pi_5(Sp(n-1)) = \pi_5(Sp(n)), \ n \geq 2.$$

Portanto,

$$\pi_5(Sp(n)) = \mathbb{Z}_2, \ n \geq 2.$$

Cálculo do Grupo de Homotopia de $Sp(1)$ no nível $k = 6$:

Desde que $Sp(1) = S^3$, $\pi_6(Sp(1)) \cong \pi_6(S^3)$. Como $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}_{12}$ (vide Observação 2.2.3) segue que

$$\pi_6(Sp(1)) = \mathbb{Z}_{12}.$$

5.5 Resultados obtidos

Finalmente, apresentamos uma tabela com os resultados obtidos :

X	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
$SO(1)$	0	0	0	0	0	0
$SO(2)$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
$SO(3)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$
$SO(4)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{12}$
$SO(n)$, $n \geq 5$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$			
$SU(1)$	0	0	0	0	0	0
$SU(2)$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$
$SU(n)$, $n \geq 3$	0	0	$\mathbb{Z}$			
$U(1)$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
$U(2)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$
$U(n)$, $n \geq 3$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$			
$Sp(1)$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$
$Sp(n)$, $n \geq 1$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	

Referências Bibliográficas

[1] HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[2] LIMA, E.L. **Curso de Análise**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, vol. 2, Rio de Janeiro, 2000.

[3] LIMA, E.L. **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1998.

[4] MASSEY, W. S. **Singular Homology Theory**. Springer-Verlag, New York, 1980.

[5] MENEGUESSO, E. **Algumas Considerações sobre Espaços de Eilenberg-MacLane**. Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, 2007.

[6] MILIES, F.C.P. **Anéis e Módulos**. Universidade de São Paulo, 1972.

[7] MIMURA, M.; TODA, H. **Topology of Lie Groups, I and II**. Copyright, vol. 1, 1978.

[8] MUNKRES, J. R. **Topology: A First Course**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

[9] STEENROD, N. **The Topology of Fibre Bundles**. Princeton University Press, 1951.

[10] WHITEHEAD, G.W. **Elements of Homotopy Theory**. G.T.M. 61, Springer-Verlag, New York, 1978.

Índice Remissivo