

Teoria de Singularidades e Classificação de Problemas de Bifurcação \mathbb{Z}_2 -Equivariantes de Corank 2

Miriam da Silva Pereira

Orientadora: Profa. Dra. Angela Maria Sitta

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto - SP

Fevereiro - 2006

“A maior necessidade do mundo hoje é a de homens — homens que se não comprem nem se vendam, homens que no íntimo da alma sejam verdadeiros e honestos, homens que não temam chamar o pecado pelo nome exato; homens cuja a consciência seja tão fiel como a bússola o é ao pólo; homens que permaneçam firmes no que é certo ainda que caiam os céus”.

Ellen G. White (1903)

À minha mãe,
Celia.
dedico.

Agradecimentos

Ao término deste trabalho, gostaria de deixar meus sinceros agradecimentos:

À professora Angela Maria Sitta, pela valiosa orientação, dedicação e por todo o empenho.

Aos professores Claudio Aguinaldo Buzzi, Luciana de Fátima Martins Brito e Maria Aparecida Soares Ruas por suas dicas e sugestões.

Aos professores José Roberto Nogueira e Marco Antonio Piteri da FCT\Unesp, por todo apoio e incentivo durante a graduação.

À minha mãe Celia, por acreditar mesmo quando eu duvidava, pelo seu exemplo de fé, amor e compreensão.

À minha irmã Katia, por estar sempre pronta a ajudar (apesar dos “pequenos” protestos).

Ao meu irmão Davi, por não me deixar esquecer que eu era sempre bem vinda em São Paulo, mas estava somente de visita!

À toda minha família de São Paulo, tios, primos e amigos por toda confiança e pela ajuda que me deram durante estes anos.

Às minhas companheiras de república Aline e Michele, por todas as conversas e brincadeiras que deixaram os dias mais alegres. Aline (♡), foi um privilégio conhecer você. Michele, obrigada pelo companherismo durante as noites de estudo, pela amizade e por todas as frases memoráveis que só você consegue elaborar e falar nos momentos mais inesperados.

Aos meus colegas da pós-graduação pelo agradável convívio, em especial Anderson (Super) e Júlio, vocês são incríveis!

À Capes, pelo auxílio financeiro.

À Deus pela vida, porque sem Ele nada teria sido possível.

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	11
1.1 Germes de Aplicações Diferenciáveis	11
1.2 Codimensão de um Ideal	13
1.3 Problemas de Bifurcação	13
1.4 Grupos de Lie	14
1.5 Γ -Invariância e Γ -Equivariância	17
1.6 Subgrupo de Isotropia e seus Subespaços de Pontos Fixos	20
1.7 Lema dos Ramos Equivariantes	21
2 Bifurcação na Interação de Modos Hopf-Ponto de Equilíbrio	23
2.1 A Forma Normal de Birkhoff	23
2.2 Interação Hopf-Ponto de Equilíbrio	33
2.3 Estabilidade das Soluções de Bifurcação	37
2.4 Preliminares	37
2.5 A Aplicação de Poincaré de uma Órbita Periódica	37
2.6 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio	42
2.7 Estabilidade de Órbitas Periódicas	42
2.8 Estabilidade das Soluções de (2.34)	45
2.9 Função de Poincaré e Estabilidade	46
2.10 Invariância da Estabilidade sob Equivalência de Contato	48
3 Problemas de Bifurcação \mathbb{Z}_2-Equivariantes de Corank 2	50
3.1 Preliminares	50
3.2 Problemas de Bifurcação \mathbb{Z}_2 -Invariantes e \mathbb{Z}_2 -Equivariantes	51

3.3	\mathbb{Z}_2 - Equivalências	52
3.4	Os Espaços Tangentes à Germes \mathbb{Z}_2 - Equivariantes	54
3.5	Determinação Finita e o Problema do Reconhecimento	58
3.6	Submódulos Intrínsecos e Termos de Ordem Alta	58
3.7	Teoria do Desdobramento \mathbb{Z}_2 -Equivariante	61
3.8	O Teorema de Classificação	62
4	Diagramas de Bifurcação	83
4.1	Bifurcações Genéricas	83
4.2	Variedades de Transição	84
4.3	Diagramas de Bifurcação	86
4.4	Diagramas de Bifurcação da Primeira Forma Normal	87
4.5	Diagramas de Bifurcação da Segunda Forma Normal	93
4.6	Diagramas de Bifurcação da Terceira Forma Normal	100
4.7	Diagramas de Bifurcação da Quarta Forma Normal	107
4.8	Diagramas de Bifurcação da Quinta Forma Normal	115

Resumo

Neste trabalho classificamos problemas de bifurcação \mathbb{Z}_2 -equivariantes de corank 2 até co-dimensão 3 via técnicas da Teoria de Singularidades.

A abordagem para classificar tais problemas é baseada no processo de redução à forma normal de Birkhoff para estudar a interação de modos Hopf-Pontos de Equilíbrio.

O comportamento geométrico das soluções dos desdobramentos das formas normais obtidas é descrito pelos diagramas de bifurcação e estudamos a estabilidade assintótica desses ramos.

Palavras-chave: Problemas de Bifurcação \mathbb{Z}_2 -Equivariantes de Corank 2, Interação de Modos Hopf-Ponto de Equilíbrio, Forma Normal de Birkhoff.

Abstract

In this work we classify the \mathbb{Z}_2 -equivariant corank 2 bifurcation problems up to codimension 3 via Singularity Theory techniques.

The approach to classify such problems is based on the Birkhoff normal form to study Hopf-Steady-State mode interaction.

The geometrical behavior of the solutions of the unfolding of the normal forms is described by the bifurcation diagrams and we study the asymptotic stability of such branches.

Keywords : \mathbb{Z}_2 -Equivariante Corank 2 Bifurcation Problems, Hopf Steady-State Mode Interaction, Birkhoff Normal Form.

Introdução

O objetivo deste trabalho é classificar problemas de bifurcação de corank 2 com \mathbb{Z}_2 -simetria usando técnicas de Teoria de Singularidades. Este estudo foi motivado pelo processo de redução à forma normal de Birkhoff e estudo da interação de modos Hopf - Ponto de Equilíbrio.

A referência principal é o livro *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. II de Martin Golubitsky, Ian Stewart and David G. Schaeffer [2].

O Capítulo 1 trata dos conceitos básicos de Teoria de Singularidades e da Teoria de Bifurcação que serão utilizados.

No capítulo 2 apresentamos o processo de redução à forma normal de Birkhoff, que é um processo para simplificar sistemas de equações diferenciais ordinárias através de mudanças de coordenadas polinomiais e fazemos um exemplo desse processo de redução. Além disso, definimos interação de modos e caracterizamos a interação de modos Hopf-ponto de equilíbrio. O principal resultado nosso é a Proposição (2.5.1) que estabelece uma correspondência biunívoca entre pontos de equilíbrio hiperbólicos e órbitas periódicas hiperbólicas do sistema original e da forma normal de Birkhoff módulo termos de ordem suficientemente alta. Para finalizar este capítulo, estudamos a estabilidade de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas e associamos esses conceitos com a estabilidade dos ramos de soluções dos desdobramentos das formas normais obtidas no *Teorema de Classificação*.

O capítulo 3 trata da classificação dos problemas de bifurcação \mathbb{Z}_2 -equivariantes de corank 2. Definimos as \mathbb{Z}_2 -equivalências, os \mathbb{Z}_2 -espaços tangentes e apresentamos resultados sobre determinação finita, problema do reconhecimento envolvendo os termos de ordem alta e teoria de desdobramentos. O resultado central deste capítulo é o *Teorema de Classificação* que estabelece formas normais para tais problemas de bifurcação até codimensão 3. Para a demonstração desse teorema utilizamos mudanças de coordenadas explícitas e técnicas da Teoria de Singularidades.

Para finalizar, no Capítulo 4 fazemos a descrição geométrica, com detalhes, dos desdobramentos das formas normais obtidas através dos diagramas de bifurcação, determinamos as variedades de transição e estudamos a estabilidade dos ramos de soluções através dos sinais dos

autovalores da matriz Jacobiana desses desdobramentos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos fundamentais da Teoria de Singularidades e Teoria de Bifurcação que usaremos no decorrer deste texto, como é o caso de germes de aplicações diferenciáveis e os pré-requisitos para estudo dos problemas de bifurcação equivariantes.

1.1 Germes de Aplicações Diferenciáveis

Sejam $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \mid f \text{ é de classe } C^\infty\}$ e $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Dizemos que $f_1 \sim f_2$ se existir um aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem, tal que $f_1|_W = f_2|_W$. Esta é uma relação de equivalência em \mathcal{F} e podemos definir o conjunto quociente

$$\mathcal{E}_{n,p} = \frac{\mathcal{F}}{\sim} = \{[f] \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Quando $p = 1$, escrevemos simplesmente \mathcal{E}_n . Cada classe de equivalência desta relação é chamada *germe* na origem. Para simplificar, omitimos a classe de equivalência e denotamos

$$\mathcal{E}_{n,p} = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p\} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Definindo naturalmente em \mathcal{E}_n as operações de adição, produto por escalar e produto, segue que \mathcal{E}_n tem estrutura de *álgebra real comutativa*.

O conjunto $\mathcal{E}_{n,p}$ é um \mathcal{E}_n -módulo e o conjunto \mathcal{E}_n é um anel local sendo

$$\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(0) = 0\}$$

o seu ideal maximal.

Quando conveniente, denotamos \mathcal{E}_n por \mathcal{E}_x e \mathcal{M}_n por \mathcal{M}_x , $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Notações:

i) Denotamos um ideal de \mathcal{E}_n gerado por $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{E}_n$ por

$$\langle p_1, \dots, p_k \rangle_{\mathcal{E}_n} \quad \text{ou, simplesmente, por} \quad \langle p_1, \dots, p_k \rangle .$$

ii) Denotamos um subespaço vetorial real de \mathcal{E}_n gerado por p_1, \dots, p_k por

$$\mathbb{R} \cdot \{p_1, \dots, p_k\}.$$

iii) Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação diferenciável, com $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$. Denotamos por $(D_x f)(x_0, y_0)$ a matriz jacobiana $p \times n$ dada pelas derivadas parciais de f com relação a x_1, \dots, x_n , calculadas em (x_0, y_0) .

Lema 1.1.1 (Hadamard). Se $f \in \mathcal{M}_n$, então existem germes a_1, a_2, \dots, a_n em \mathcal{E}_n tais que

$$f(x) = a_1(x)x_1 + \dots + a_n(x)x_n,$$

onde $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Ver [10], pág. 100. ■

Pelo Lema de Hadamard segue que

$$\mathcal{M}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_{\mathcal{E}_n} .$$

isto é, \mathcal{M}_n é o ideal gerado pelas projeções $p_i : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$, $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $i = 1, \dots, n$.

A k -ésima potência de \mathcal{M}_n é dada por

$$\mathcal{M}_n^k = \langle x^\alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ e } |\alpha| = k \rangle ,$$

sendo $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Lema 1.1.2 (Nakayama). Sejam I, J ideais em \mathcal{E}_n , com I finitamente gerado. Então,

$$I \subset J \iff I \subset J + \mathcal{M}_n I .$$

Demonstração. Ver [1], pág. 71. ■

1.2 Codimensão de um Ideal

Nesta seção definimos codimensão de ideais e apresentamos um resultado que caracteriza os ideais de codimensão finita.

Definição 1.2.1. Um subespaço vetorial $I \subset \mathcal{E}_n$ tem *codimensão finita* se existe um subespaço vetorial de dimensão finita $V \subset \mathcal{E}_n$ tal que $I + V = \mathcal{E}_n$. Caso contrário, I tem *codimensão infinita*. Denotamos que I tem codimensão finita por $\text{cod } I < \infty$.

Todo ideal $I \subset \mathcal{E}_n$ é subespaço vetorial real em \mathcal{E}_n .

Proposição 1.2.1. Um ideal $I \subset \mathcal{E}_n$ tem codimensão finita se, e somente se, existe um inteiro k tal que $\mathcal{M}_n^k \subset I$.

Demonstração. Ver [1], pág. 75. ■

Definição 1.2.2. Seja $I \subset \mathcal{E}_n$ um ideal de codimensão finita. O *espaço vetorial normal* a I é o subespaço vetorial de dimensão finita I^\perp gerado pelos monômios que não pertencem a I .

Proposição 1.2.2. Se $I \subset \mathcal{E}_n$ é um ideal de codimensão finita, então $I + I^\perp = \mathcal{E}_n$.

Demonstração. Ver [1], pág. 83. ■

Em geral, $I \cap I^\perp \neq 0$ pois considerando em \mathcal{E}_2 , por exemplo, o ideal $I = \langle x^2 + y^2, xy \rangle$ temos que

$$I^\perp = \mathbb{R} \cdot \{1, x, y, x^2, y^2\} \text{ e } I \cap I^\perp = \mathbb{R} \cdot \{x^2 + y^2\}.$$

1.3 Problemas de Bifurcação

Seja $g : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} + g(x, \lambda) = 0 \tag{1.1}$$

Os *pontos de equilíbrio* são as soluções da equação

$$g(x, \lambda) = 0. \tag{1.2}$$

Uma *solução* de g é um par (x_0, λ_0) tal que $g(x_0, \lambda_0) = 0$.

Para cada λ , seja $n(\lambda)$ o número de x 's para o qual (x, λ) é uma solução de (1.2).

O par (x_0, λ_0) é ponto de bifurcação se $n(\lambda)$ muda quando λ varia em uma vizinhança suficientemente pequena de λ_0 . Se o Teorema da Função Implícita é válido para g , então em uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 temos que $g(x, \lambda) = 0$ pode ser resolvida em função de λ de maneira única. Assim, não ocorre bifurcação.

Logo, (x_0, λ_0) é ponto de bifurcação se

$$g(x_0, \lambda_0) = 0 \quad e \quad (D_x g)(x_0, \lambda_0) \equiv 0. \quad (1.3)$$

Por translação, podemos tomar $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$.

O conjunto solução de g dado por

$$S = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid g(x, \lambda) = 0\} \quad (1.4)$$

é chamado de *diagrama de bifurcação* de g e $g(x, \lambda) = 0$ é chamado de *problema de bifurcação*.

Exemplo 1.3.1. Consideremos o problema de bifurcação $g : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$g(x, \lambda) = x^3 - \lambda x = 0 \quad (1.5)$$

Observamos que $(0, 0)$ é um ponto de bifurcação, pois em uma vizinhança da origem passamos de uma solução de (1.5) para três soluções. Neste caso, o diagrama de bifurcação de g é dado por

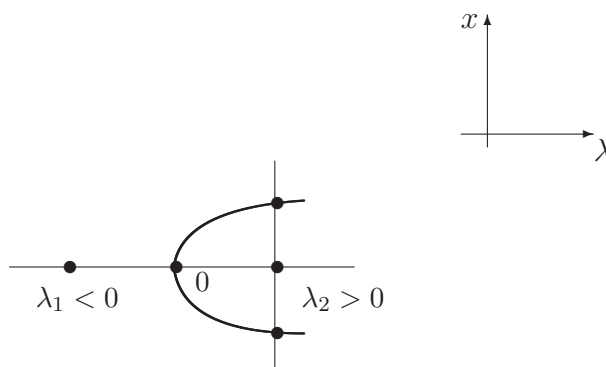


Figura 1.1: Pitchfork.

1.4 Grupos de Lie

Consideremos $GL(n)$, o grupo de todas as transformações lineares invertíveis de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n ou, equivalentemente, o grupo das matrizes $n \times n$ sobre \mathbb{R} não singulares. Se $M_n(\mathbb{R})$ denota o conjunto das matrizes $n \times n$ sobre \mathbb{R} , então $GL(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ é aberto em $M_n(\mathbb{R})$ onde em $M_n(\mathbb{R})$ estamos considerando a topologia induzida pelo isomorfismo entre $M_n(\mathbb{R})$ e \mathbb{R}^{n^2} . Desta forma, $GL(n)$ é um espaço topológico e podemos dar a seguinte definição.

Definição 1.4.1. Um *grupo de Lie* é um subgrupo fechado de $GL(n)$.

Muitas vezes grupos de Lie são definidos de maneira mais geral, sendo estes chamados de grupos de Lie lineares. Entretanto, como trabalhamos com grupos de Lie compactos, esta definição é suficiente devido à propriedade de que todo grupo de Lie compacto no sentido mais geral é homeomorfo a um grupo de Lie linear.

Apesar de termos definido grupo de Lie como subgrupos fechados de matrizes, às vezes, trabalhamos com conjuntos que, desde que sejam isomorfos a algum conjunto satisfazendo a Definição (1.4.1), também serão chamados de grupos de Lie.

Exemplo 1.4.1. O grupo ortogonal $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = I_n\}$ é um grupo de Lie.

De fato.

i) Temos que $O(n) \subset GL(n)$ é subgrupo, pois

$$A, B \in O(n) \implies (AB)(AB)^t = A(BB^t)A^t = AA^t = I_n \implies AB \in O(n).$$

ii) $O(n) \subset GL(n)$ é fechado, pois tomando a aplicação contínua $\phi : GL(n) \longrightarrow GL(n)$ dada por $\phi(A) = AA^t$ temos que $O(n) = \phi^{-1}(I_n)$. Dessa forma, $O(n) \subset GL(n)$ é fechado.

Portanto, $O(n)$ é um grupo de Lie.

Exemplo 1.4.2. O grupo especial ortogonal $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ é grupo de Lie.

De fato.

i) Temos que $SO(n) \subset GL(n)$ é subgrupo, pois

$$A, B \in SO(n) \implies A, B \in O(n) \text{ e } \det A = \det B = 1 \implies \det(AB) = 1 \implies AB \in SO(n) \text{ e}$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \cdot 1 = 1 \implies AB \in SO(n).$$

ii) $SO(n) \subset GL(n)$ é fechado, pois considerando a aplicação contínua $\det : O(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $A \longmapsto \det(A)$, temos que $SO(n) = \det^{-1}(\{1\})$. Logo, $SO(n) \subset GL(n)$ é fechado.

Portanto, $SO(n)$ é um grupo de Lie.

Observação.

No caso $n = 2$,

$$SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid 0 \leq \theta < 2\pi \right\}.$$

Podemos verificar esta igualdade impondo a uma matriz genérica $A_{2 \times 2}$ as condições $AA^t = I_2$ e $\det(A) = 1$. Observamos ainda que a aplicação $\phi : SO(2) \rightarrow S^1$ dada por $\phi(R_\theta) = \theta$ é um isomorfismo. Logo, S^1 é um grupo de Lie.

Exemplo 1.4.3. O grupo cíclico $\mathbb{Z}_n = \{a^i; i = 0, \dots, n-1 \text{ e } a^n = 1\}$ é um grupo de Lie.

De fato.

Tomando $\langle R_{\frac{2\pi k}{n}} \rangle = \left\{ R_{\frac{2\pi k}{n}}, k = 1, \dots, n-1 \right\}$, temos que \mathbb{Z}_n e $\langle R_{\frac{2\pi k}{n}} \rangle$ são isomorfos. Além disso, $\langle R_{\frac{2\pi k}{n}} \rangle \in GL(n)$ é finito e, portanto, fechado. Segue que \mathbb{Z}_n é um grupo de Lie.

Exemplo 1.4.4. O grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ é isomorfo a $\{I_n, -I_n\} \subset GL(n)$, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$, $n \geq 1$.

Definição 1.4.2. Um grupo de Lie é compacto se for *compacto* como subconjunto do \mathbb{R}^{n^2} (devido ao isomorfismo entre $M_n(\mathbb{R})$ e \mathbb{R}^{n^2}).

Definição 1.4.3. Seja Γ um grupo de Lie e V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma aplicação

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma \times V &\longrightarrow V \\ (\gamma, v) &\longmapsto \gamma \cdot v \end{aligned}$$

é uma *ação* de Γ em V se

- ρ é contínua,
- para cada $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \cdot (v_1 + v_2) = \gamma \cdot v_1 + \gamma \cdot v_2$, e $\gamma \cdot (\alpha v) = \alpha(\gamma \cdot v)$, para quaisquer $v_1, v_2, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,
- dados $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 v) = (\gamma_1 \gamma_2) \cdot v$, para qualquer $v \in V$.

Exemplo 1.4.5. A ação de $S^1 \equiv SO(2)$ em \mathbb{C} dada por

$$(\theta, z) \longmapsto e^{i\theta} z.$$

Definição 1.4.4. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita n e Γ um grupo de Lie atuando em ambos os espaços. Dizemos que V e W são Γ -*isomorfos* se existe um isomorfismo $\Phi : V \rightarrow W$ tal que

$$\Phi(\gamma \cdot v) = \gamma * \Phi(v),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v \in V$.

Definição 1.4.5. Seja Γ um grupo de Lie atuando em um espaço vetorial V . Um subespaço $W \subset V$ é Γ -invariante se para todo $w \in W$ e $\gamma \in \Gamma$, temos $\gamma \cdot w \in W$.

Definição 1.4.6. Seja Γ um grupo de Lie. Uma ação de Γ em V é *irredutível* se os únicos subespaços Γ -invariantes são $\{0\}$ e V . Dizemos ainda que um subespaço W é *irredutível* se é Γ -invariante e a ação de Γ sobre W é irredutível.

1.5 Γ -Invariância e Γ -Equivariância

Definição 1.5.1. Seja Γ um grupo de Lie compacto atuando em um espaço vetorial V .

1. Uma aplicação $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada Γ -invariante se

$$f(\gamma \cdot x) = f(x),$$

para todo $x \in V$ e $\gamma \in \Gamma$.

2. Uma aplicação $g : V \rightarrow V$ é chamada Γ -equivariante se

$$g(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot g(x),$$

para todo $x \in V$ e $\gamma \in \Gamma$.

Exemplo 1.5.1. Sejam $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ e $V = \mathbb{R}$. Uma ação de \mathbb{Z}_2 em \mathbb{R} é dada por

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &\longmapsto x, \\ -1 \cdot x &\longmapsto -x. \end{aligned}$$

- Se $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio \mathbb{Z}_2 -invariante, então p possui apenas parcelas com potências pares em x . Logo, $p(x) = h(x^2)$, para algum polinômio h .
- Se $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio \mathbb{Z}_2 -equivariante, então $q(-x) = -q(x)$, isto é, q possui apenas parcelas com potências ímpares de x . Logo, $q(x) = h(x^2)x$, para algum polinômio h .

Exemplo 1.5.2. Seja $S^1 = \{\theta \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ agindo em $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ da maneira usual

$$\theta \cdot z = e^{i\theta} z, \quad \text{para } \theta \in S^1.$$

Se f é um polinômio S^1 -invariante em \mathbb{C} , mostramos que existe um polinômio $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = h(z\bar{z}). \quad (1.6)$$

De fato.

Tomando $z = x + iy$, temos $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = -i\frac{z - \bar{z}}{2}$. Supondo que f é um polinômio, podemos escrever $f(z) = \sum a_\gamma z^\gamma$, então

$$f(z) = \sum a_\gamma (x + iy)^\gamma = \sum a_\gamma \left[\frac{z + \bar{z}}{2} + i\frac{z - \bar{z}}{2} \right]^\gamma = \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta.$$

Dessa forma, escrevemos f como um polinômio nas coordenadas z e \bar{z} , isto é,

$$f(z) = \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta \quad (1.7)$$

com $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$. Supondo que f assume valores reais, $f = \bar{f}$ e obtemos $\bar{a}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$.

De (1.7),

$$f(e^{i\theta} z) = \sum a_{\alpha\beta} (e^{i\theta})^\alpha (e^{-i\theta})^\beta z^\alpha \bar{z}^\beta = \sum a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} z^\alpha \bar{z}^\beta. \quad (1.8)$$

Como $f(e^{i\theta} z) = f(z)$ como polinômios, seus coeficientes devem ser idênticos, ou seja, devemos ter

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)}. \quad (1.9)$$

Note que (1.9) é válida para todo $\theta \in S^1$ se, e somente se, $\alpha = \beta$ ou $a_{\alpha\beta} = 0$.

Assim, se um polinômio f é S^1 -invariante segue que

$$f(z) = \sum a_{\alpha\alpha} (z\bar{z})^\alpha,$$

com $a_{\alpha\alpha} \in \mathbb{R}$.

Se $h(x) = \sum a_{\alpha\alpha} x^\alpha$, então (1.6) está satisfeita.

Definição 1.5.2. A ação de Γ em V é *absolutamente irredutível* se as únicas aplicações lineares sobre V Γ -equivariantes são múltiplas da identidade.

Denotamos por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Gamma) &= \{p : V \rightarrow \mathbb{R} \mid p \text{ é polinômio } \Gamma\text{-invariante}\}; \\ \vec{\mathcal{P}}(\Gamma) &= \{q : V \rightarrow V \mid q \text{ é aplicação polinomial } \Gamma\text{-equivariante}\}; \\ \mathcal{E}(\Gamma) &= \{f : (V, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é } \Gamma\text{-invariante}\}; \\ \vec{\mathcal{E}}(\Gamma) &= \{g : (V, 0) \rightarrow V \mid g \text{ é } \Gamma\text{-equivariante}\}. \end{aligned}$$

Temos que $\mathcal{P}(\Gamma)$ e $\mathcal{E}(\Gamma)$ são anéis, $\overrightarrow{\mathcal{P}}(\Gamma)$ é um módulo sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ e $\overrightarrow{\mathcal{E}}(\Gamma)$ é um módulo sobre o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$.

Definição 1.5.3. Um subconjunto finito $B = \{u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)\}$ de $\mathcal{P}(\Gamma)$ é uma *base de Hilbert* de $\mathcal{P}(\Gamma)$ se para todo $p \in \mathcal{P}(\Gamma)$, existe $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$p(x) = h(u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)).$$

Definição 1.5.4. Dizemos que os polinômios $\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_r(x)\}$ geram o módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}(\Gamma)$ se para todo $g \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(\Gamma)$ existem $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)$ tais que

$$g(x) = f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \dots + f_r(x)g_r(x).$$

Exemplo 1.5.3. Uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ é $u = x^2$. Um gerador do módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2)$ sob o anel $\rho(\mathbb{Z}_2)$ é $g(x) = x$.

Teorema 1.5.1 (Hilbert-Weyl). Se Γ é um grupo de Lie compacto atuando em V , então existe uma base de Hilbert finita para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Demonstração. Ver [2], pág. 46. ■

Teorema 1.5.2 (Schwarz). Sejam Γ um grupo de Lie compacto atuando em V e u_1, \dots, u_s uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$. Então, para toda $f \in \mathcal{E}(\Gamma)$ existe $h \in \mathcal{E}_s$ tal que

$$f(x) = h(u_1(x), u_2(x), \dots, u_s(x)).$$

Demonstração. Ver [2], pág. 46. ■

Teorema 1.5.3 (Poénaru). Sejam Γ um grupo de Lie compacto atuando em V e $g_1(x), g_2(x), \dots, g_r(x)$ geradores do módulo dos polinômios Γ -equivariantes $\overrightarrow{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$. Então, estes também geram o módulo $\overrightarrow{\mathcal{E}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$.

Demonstração. Ver [2], pág. 51. ■

Exemplo 1.5.4. Consideremos S^1 agindo em $V = \mathbb{C}$ como no exemplo (1.5.2). Vamos mostrar que toda aplicação S^1 -equivariante g tem a forma

$$g(z) = p(z\bar{z})z + q(z\bar{z})iz \tag{1.10}$$

onde p e q são funções reais S^1 -invariantes.

Seja $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio S^1 -equivariante. Podemos escrever g como

$$g(z) = \sum b_{jk} z^j \bar{z}^k,$$

onde $b_{jk} \in \mathbb{C}$. A condição de Γ -equivariância pode ser reescrita como

$$g(x) = \gamma^{-1} g(\gamma x),$$

a qual, às vezes, é mais conveniente usar. Neste caso $\Gamma = S^1$, então

$$g(z) = e^{-i\theta} \sum b_{jk} e^{(j-k)i\theta} z^j \bar{z}^k = \sum b_{jk} e^{(j-k-1)i\theta} z^j \bar{z}^k.$$

Consequentemente, $b_{jk} = 0$ a menos que $j = k + 1$. Assim,

$$g(z) = \sum b_{k+1,k} (z\bar{z})^k z$$

e g tem a forma (1.10), onde

$$\begin{aligned} p(y) &= \sum \operatorname{Re}(b_{k+1,k}) y^k \\ q(y) &= \sum \operatorname{Im}(b_{k+1,k}) y^k. \end{aligned}$$

Agora, basta aplicar o Teorema de Poénaru para obter o resultado desejado.

1.6 Subgrupo de Isotropia e seus Subespaços de Pontos Fixos

Definição 1.6.1. Definimos um *problema de bifurcação* Γ -equivariante como um germe $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow V$ Γ -equivariante satisfazendo as condições:

- i) $g(0, \lambda) = 0$,
- ii) $(D_x g)(0, 0) \equiv 0$,
- iii) $g(\gamma x, \lambda) = \gamma \cdot g(x, \lambda)$.

Denotamos o conjunto de tais problemas por $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}$.

Seja Γ um grupo de Lie atuando em um espaço vetorial em V .

Definição 1.6.2. O *subgrupo de isotropia* de Γ de um ponto $x \in V$ é o subgrupo

$$\Sigma_x = \{\sigma \in \Gamma \mid \sigma \cdot x = x\}.$$

Definição 1.6.3. Dado $\Sigma \subset \Gamma$ subgrupo, o *subespaço de pontos fixos* de Σ é o subespaço vetorial de V

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in V \mid \sigma \cdot x = x, \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

A *órbita* de uma ação de Γ em $x \in V$ é o conjunto

$$\Gamma_x = \{\gamma \cdot x \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

Seja $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ Γ -invariante. Se f anula-se em x , então

$$f(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot f(x) = \gamma \cdot 0 = 0.$$

isto é, f anula-se em toda órbita Γ_x . Este cálculo mostra que não podemos distinguir equações simétricas (Γ -equivariantes) por pontos de uma mesma órbita. Dessa forma, conjunto de soluções da equação $g(x, \lambda) = 0$ é preservado pela simetria.

Estabelecemos uma relação entre os subgrupos de isotropia de pontos em uma mesma órbita da seguinte forma: dados dois ponto x e $\gamma \cdot x$ numa mesma órbita, $\Sigma_{\gamma \cdot x} = \gamma \Sigma_x \gamma^{-1}$.

Definição 1.6.4. Seja $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo e $\gamma \in \Gamma$, então

$$\gamma \Sigma \gamma^{-1} = \{\gamma \sigma \gamma^{-1} \mid \sigma \in \Sigma\}$$

é um subgrupo de Γ chamado *subgrupo conjugado* de Σ .

Se $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow V$ é um problema de bifurcação Γ -equivariante para cada λ , $(0, \lambda)$ é sempre solução de $g(x, \lambda) = 0$. Neste caso, o subgrupo de isotropia de 0 é Γ . Em geral, em um problema de bifurcação pode ocorrer o aparecimento de outras soluções $x \neq 0$ satisfazendo $\Sigma_x < \Gamma$. Denominamos este fenômeno de quebra de simetria espontânea, onde o termo espontânea quer dizer que g continua Γ -equivariante. Dessa forma, obtemos uma órbita de soluções com subgrupos de isotropia conjugados menores que Γ .

1.7 Lema dos Ramos Equivariantes

Definição 1.7.1. Um conjunto S de germes é *genérico* para uma propriedade P se existir um número finito de desigualdades Q envolvendo um número finito de derivadas de g na origem tal que $g \in S$ se, e somente se, g tem a propriedade P e g satisfaz as desigualdades em Q .

O Lema que enunciamos a seguir estabelece um critério para a ocorrência de quebra de simetria para determinados problemas de bifurcação. Este teorema afirma que, genericamente, problemas de bifurcação com Γ -simetria admitem soluções correspondentes a todos os subgrupos de isotropia Σ com $\dim \text{Fix}(\Sigma) = 1$.

Teorema 1.7.1 (Lema dos Ramos Equivariantes). Seja Γ um grupo de Lie atuando em um espaço vetorial V . Suponhamos que:

- i) a ação de Γ em V seja absolutamente irredutível;
- ii) $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}$ um problema de bifurcação satisfazendo $(D_x g)(0, \lambda) = c(\lambda)I_d$, onde $c'(0) \neq 0$;
- iii) Seja $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo de isotropia tal que $\dim \text{Fix}(\Sigma) = 1$.

Então, existe um único ramo de soluções para a equação $g(x, \lambda) = 0$ tal que o subgrupo de isotropia de cada solução neste ramo é Σ .

Demonstração. Ver [2], pág. 82. ■

Capítulo 2

Bifurcação na Interação de Modos Hopf-Ponto de Equilíbrio

2.1 A Forma Normal de Birkhoff

A idéia principal da forma normal de Birkhoff é simplificar um sistema de equações diferenciais ordinárias da forma

$$\dot{x} - f(x) = 0, \quad f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

usando sucessivas mudanças de coordenadas polinomiais para zerar vários termos na expansão de Taylor de f de ordem k . Mais precisamente, seja

$$f(x) = \tilde{f}_k(x) + h_k(x) + g_{k+1}(x), \quad (2.2)$$

onde $\tilde{f}_k(x)$ é uma aplicação polinomial de grau menor que k , h_k é um aplicação polinomial homogênea de grau k e g_{k+1} indica os termos de ordem alta de grau $k+1$ ou maior.

A principal questão é como simplificar h_k através de mudança de coordenadas feitas em (2.1) deixando $\tilde{f}_k(x)$ inalterado. Como os termos de grau maior que k não impõem vínculos, o processo é recursivo, ou seja, o processo é feito termo a termo mas, em cada etapa, os termos de ordem alta são mudados. Assim, não podemos fazer a n -ésima etapa sem ter feito a anterior.

Consideremos a mudança de coordenadas da forma

$$x = y + P_k(y), \quad (2.3)$$

onde P_k é uma aplicação polinomial homogênea de grau k .

Então, $\dot{x} = \dot{y} + (D_y P_k)\dot{y} = (I + D_y P_k)\dot{y}$.

Nas novas coordenadas, (2.1) torna-se

$$(I + D_y P_k) \dot{y} - f(y + P_k(y)) = 0,$$

$$(I + (D_y P_k)) \dot{y} = f(y + P_k(y)).$$

Logo,

$$\dot{y} = (I + (D_y P_k))^{-1} f(y + P_k(y)). \quad (2.4)$$

Temos que (2.4) pode ser reescrito, módulo os termos de ordem alta, como

$$\dot{y} = (I - (D_y P_k)) f(y + P_k(y)) + \tilde{f}(y) \quad (2.5)$$

Nosso objetivo é colocar o membro direito de (2.5) na forma (2.2), calculando (2.5) módulo termos de ordem alta. Fazemos

$$\tilde{f}_k(x) = L(x) + f_k(x) \quad (2.6)$$

onde L é a parte linear de f e f_k consiste dos termos de grau entre 2 e $k - 1$.

Como P_k contém somente termos de grau k , segue da expansão de Taylor que

$$\begin{aligned} f_k(y + P_k(y)) &= f_k(y) + \tilde{f}_k(y), \\ h_k(y + P_k(y)) &= h_k(y) + \tilde{h}_k(y). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo (2.6) e (2.7) em (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (I - (D_y P_k)) [L(y + P_k(y)) + f_k(y + P_k(y)) + h_k(y + P_k(y))] + \tilde{g}_k(y), \\ \dot{y} &= L(y) + f_k(y) + h_k(y) + L(P_k(y)) - (D_y P_k)L(y) + \tilde{g}_k(y). \end{aligned}$$

O que fizemos acima foi mudar $h_k(x)$ da equação antiga para $h_k(y) + L(P_k(y)) - (D_y P_k)L(y)$. Assim, qualquer termo homogêneo de grau k em f da forma

$$L(P_k(y)) - (D_y P_k)L(y)$$

pode ser eliminado de (2.1) por mudança de coordenadas do tipo (2.3). Além disso, esta mudança de coordenadas não perturba os termos de grau menor do que k .

Seja \mathcal{P}_k o espaço das aplicações polinomiais homogêneas de grau k . Definimos a *aplicação adjunta* ad_L por

$$\begin{aligned} ad_L : \mathcal{P}_k &\longrightarrow \mathcal{P}_k \\ P_k &\longmapsto L(P_k(y)) - (D_y P_k)L(y). \end{aligned}$$

Esta aplicação é uma transformação linear. Assim, os termos na expansão de Taylor de f que podem ser eliminados por este processo são precisamente aqueles que estão no subespaço $ad_L(\mathcal{P}_k) \subset \mathcal{P}_k$. Para cada k , escolhemos um subespaço complementar $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{P}_k$ tal que

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{G}_k \oplus \text{Im}(ad_L). \quad (2.8)$$

Dessa forma, provamos o seguinte teorema:

Teorema 2.1.1 (Poincaré- Birkhoff). Seja $L = (D_x f)(0)$ e escolhemos um valor para k . Então, existe uma mudança de coordenadas polinomial de grau k tal que, nas novas coordenadas, o sistema (2.1) tem a forma

$$\dot{y} = L(y) + g_2(y) + \dots + g_k(y) + \bar{g}_k(y)$$

onde $g_j \in \mathcal{G}_j$ e $\bar{g}_k(y)$ indica os termos de grau maior ou igual a $k+1$.

■

Denominamos o sistema

$$\dot{x} = L(x) + g_2(x) + \dots + g_k(x) \quad (2.9)$$

de *forma normal de Birkhoff truncada* de ordem k de (2.1).

A dinâmica da forma normal de Birkhoff truncada está relacionada, mas não é idêntica à dinâmica local do sistema (2.1) em torno do ponto de equilíbrio $x = 0$. A questão de determinar precisamente o tipo de dinâmica, por exemplo, soluções de equilíbrio, órbitas periódicas, toros, chaos e outras mais complexas que são preservadas na k -ésima ordem de truncamento para algum k é ainda aberta.

No nosso estudo mostramos que pontos de equilíbrio e órbitas periódicas estão em correspondência biunívoca.

Outro problema que surge é o do resto nas expansões efetuadas, mas na nossa análise utilizamos técnicas da Teoria de Singularidades e nossos problemas são de codimensão finita, ou seja, os germes podem ser representados pelo seu polinômio de Taylor de alguma ordem. Mais detalhes sobre germes finitamente determinados estão no Capítulo 3.

Observamos que o processo de redução à forma normal de Birkhoff é um tipo especial de equivalência de Contato (ver(2.4)).

Exemplo 2.1.1. Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{x} = y + f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.10)$$

onde $f, g \in \mathcal{M}_{(x,y)}^2$.

Neste caso, a linearização é $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para encontrar a Forma Normal de Birkhoff para o sistema (2.10), o primeiro passo será eliminar todos os termos quadráticos de f e g . Para isso, consideramos a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(u, v) \\ q(u, v) \end{pmatrix}$$

onde $p, q \in \mathcal{M}_{(u,v)}^2$. Fazemos $P = (p, q)$ e $(DP) = (D_{(u,v)}P)$.

Logo,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} + (DP) \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = (I + DP) \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}.$$

Substituindo em (2.10), temos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= (I + DP) \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + q \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u + p, v + q) \\ g(u + p, v + q) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= (I + DP)^{-1} \begin{pmatrix} v + q \\ 0 \end{pmatrix} + (I + DP)^{-1} \begin{pmatrix} f(u + p, v + q) \\ g(u + p, v + q) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= (I - DP) \left[L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u + p, v + q) \\ g(u + p, v + q) \end{pmatrix} \right] + \tilde{P}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - (DP)L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \mathcal{M}_{(u,v)}^3.$$

$$ad_L(P) = L \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - (DP)L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_u & p_v \\ q_u & q_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q - vp_u \\ -vq_u \end{pmatrix}.$$

Precisamos determinar quais termos quadráticos podem ser removidos por escolhas apropriadas de p, q . Como $p, q \in \mathcal{M}_{(u,v)}^2$, podemos escrever

$$\begin{aligned} p(u, v) &= au^2 + buv + cv^2, \\ q(u, v) &= du^2 + euv + fv^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} q - vp_u &= du^2 + (e - 2a)uv + (f - b)v^2, \\ -vq_u &= -2duv - ev^2. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$ad_L \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} u^2 \\ -2uv \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} uv \\ -v^2 \end{pmatrix} + (f - b) \begin{pmatrix} v^2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2a \begin{pmatrix} uv \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\text{Im } ad_L = \left\langle \begin{pmatrix} u^2 \\ -2uv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} uv \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Portanto, $\text{Im } ad_L$ tem dimensão 4 e seu complemento tem dimensão 2, formado por duas aplicações quadráticas linearmente independentes das que pertencem a $\text{Im}(ad_L)$. Uma escolha simples para seu complemento ortogonal é $\begin{pmatrix} 0 \\ u^2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} u^2 \\ \alpha uv \end{pmatrix}$ com $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \neq 0$. Escolhemos $\alpha = 1$. Qualquer outra escolha com $\alpha \neq -2$ é possível.

Procedendo de maneira análoga, para determinar quais os termos cúbicos podem ser eliminados, obtemos nesse caso que $(\text{Im } ad_L)^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ u^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2v \end{pmatrix} \right\rangle$.

De maneira geral, podemos tomar $p, q \in \mathcal{M}_{(u,v)}^n$ e tratar os termos de grau maior que três da mesma forma.

Recordamos que

$$ad_L \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q - vp_u \\ -vq_u \end{pmatrix}.$$

Assim, $\begin{pmatrix} -vp_u \\ 0 \end{pmatrix}$ elimina $\begin{pmatrix} \langle v \rangle \\ 0 \end{pmatrix}$. Como $-vq_u \in \langle v \rangle$, $\begin{pmatrix} 0 \\ u^n \end{pmatrix}$ está sempre no complemento ortogonal de $\text{Im } ad_L \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Para $q = u^n$, obtemos $\begin{pmatrix} u^n \\ -nvu^{n-1} \end{pmatrix}$. Segue que $\begin{pmatrix} u^n \\ u^{n-1}v \end{pmatrix}$ é linearmente independente com este gerador porque $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -n \end{pmatrix} = -(n+1) \neq 0$.

Finalmente, o restante dos termos $\begin{pmatrix} 0 \\ v^2u^{n-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v^3u^{n-3} \end{pmatrix}$, etc. podem ser obtidos usando $q = \frac{1}{n-l+1}v^{l-1}u^{n-l+1}$, para $n-l \geq 2$. Então, $\begin{pmatrix} q \\ -vq_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ v^l u^{n-l} \end{pmatrix}$ e $q \in \langle v \rangle$ que podem ser eliminados usando $\begin{pmatrix} vp_u \\ 0 \end{pmatrix}$.

Então, em qualquer ordem existem duas aplicações polinomiais linearmente independentes no complemento ortogonal da imagem de ad_L , que são

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u^n \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} u^n \\ vu^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Portanto, para qualquer ordem N , o campo de vetores inicial pode ser colocado na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^N \alpha_n \begin{pmatrix} u^n \\ vu^{n-1} \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^N \beta_n \begin{pmatrix} 0 \\ u^n \end{pmatrix} + \mathcal{M}_{(u,v)}^{N+1}.$$

Podemos reescrever o sistema como

$$\begin{cases} \dot{u} = v + \sum_{n=2}^N \alpha_n u^n + \mathcal{M}_{(u,v)}^{N+1} \\ \dot{v} = v \sum_{n=2}^N \alpha_n u^{n-1} + \sum_{n=2}^N \beta_n u^n + \mathcal{M}_{(u,v)}^{N+1} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \dot{u} = v + u^2 p_{N-2}(u) + \mathcal{M}_{(u,v)}^{N+1} \\ \dot{v} = u^2 q_{N-2}(u) + uvr_{N-2}(u) + \mathcal{M}_{(u,v)}^{N+1} \end{cases} \quad (2.11)$$

onde p_j , q_j e r_j são polinômiais de grau j em u . Podemos simplificar mais um pouco, para obter $p_{N-2} = r_{N-2}$. Para cada ordem $k \geq 2$, acrescentamos $\begin{pmatrix} \alpha_k u^k \\ \beta_k u^k + \alpha_k v u^{k-1} \end{pmatrix}$.

Concluindo, até ordem N podemos reescrever

$$\begin{cases} u^2 p_{N-2}(u) = u^2 \sum_{k=0}^{N-2} \alpha_{(k+2)} u^k, \\ u^2 q_{N-2}(u) = u^2 \sum_{k=0}^{N-2} \beta_{(k+2)} u^k. \end{cases}$$

Simplificando, (2.11) torna-se

$$\begin{cases} \dot{u} = v + u^2 p_{N-2}(u) + \mathcal{M}_{(u,v)}^{N+1} \\ \dot{v} = u^2 q_{N-2}(u) + uvp_{N-2}(u) + \mathcal{M}_{(u,v)}^{N+1}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Esses cálculos em casos mais complexos são feitos usando álgebra computacional (ver [17]).

Há várias escolhas possíveis para o complemento \mathcal{G}_k em (2.8). Entretanto foi provado por Elphick et al. (ver [15]) que existe uma escolha canônica, em nosso caso, na qual os elementos de \mathcal{G}_k comutam com um grupo a um parâmetro S de aplicações definidas em termos da parte linear L de f .

Definimos, agora, o grupo S . A parte linear $L = (D_x f)(0)$ age em \mathbb{R}^n e temos um conjunto de transformações a um parâmetro

$$R = \{\exp(sL^t) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

O conjunto R é um grupo, pois

$$\exp(s_1 L^t) \cdot \exp(s_2 L^t) = \exp((s_1 + s_2)L^t),$$

mas não é necessariamente um subgrupo de Lie, pois este pode não ser fechado (ver [2], pág. 286).

Seja S o fecho deste grupo em $GL(n)$, ou seja,

$$\mathbf{S} = \bar{R} = \overline{\{\exp(sL^t)\}}.$$

Então, \mathbf{S} sendo subgrupo fechado de $GL(n)$ é um subgrupo de Lie.

Denotamos $\mathcal{P}_k(\mathbf{S})$ como o conjunto dos $p \in \mathcal{P}_k$ tais que p comuta com \mathbf{S} .

Teorema 2.1.2 (Elphick et al). Para $k \geq 2$,

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k(\mathbf{S}) \oplus \text{Im}(ad_L). \quad (2.13)$$

Este teorema diz que os termos que não podem ser eliminados pelo processo de Birkhoff são exatamente os termos \mathbf{S} -equivariantes. Para provar o teorema (2.1.2) precisamos de dois lemas.

Lema 2.1.1. *i)* $ad_L(p(x)) = -\frac{d}{ds}e^{-sL}p(e^{sL}x)|_{s=0}$.

ii) $ad_L(p) = 0$ se, e somente se, p comuta com S . Isto é, $\mathcal{P}_k(\mathbf{S}) = \text{Ker}(ad_L)$.

Demonstração.

$$i) \frac{d}{ds}e^{-sL}p(e^{sL}x) = -e^{-sL}[L(p(e^{sL}x)) - (D_x p)(e^{sL}x)L(e^{sL}x)] = -e^{-sL}[ad_L(p)(e^{sL}x)].$$

Calculando em $s = 0$,

$$ad_L(p(x)) = -\frac{d}{ds}e^{-sL}p(e^{sL}x)|_{s=0}. \quad (2.14)$$

ii) Pelo item (i), se p comuta com \mathbf{S} , então $ad_L(p) = 0$. Reciprocamente, (2.14) implica que se $ad_L(p) \equiv 0$, então $e^{-sL}p(e^{sL}x)$ é uma função constante de s . Consequentemente, igual ao seu valor quando $s = 0$ que é $p(x)$. Portanto, p comuta com \mathbf{S} . ■

Vamos agora definir um produto interno em \mathcal{P}_k que é o conjunto das aplicações polinomiais $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de grau k .

Primeiro, definimos o produto escalar a ser usado. Sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ multi-índices e $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ e $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$ os monômios associados. Definimos

$$\langle x^\alpha, x^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \alpha! \quad (2.15)$$

Usamos (2.15) e linearidade para definir um produto interno em \mathcal{P}_k . Sejam $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $q = (q_1, \dots, q_n)$ em \mathcal{P}_k . Definimos

$$\langle\langle p, q \rangle\rangle = \sum_{j=1}^n \langle p_j, q_j \rangle. \quad (2.16)$$

Temos que para $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle ax^\alpha, bx^\beta \rangle &= 0, \text{ se } \alpha \neq \beta \text{ e} \\ \langle ax^\alpha, bx^\beta \rangle &= ab \alpha_1! \dots \alpha_n! \text{ se } \alpha = \beta. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.2. Sejam $x_1 = x$, $x_2 = y$, $k = 3$ e

$$\begin{aligned} p(x, y) &= (x^2y + 3y^3, 2x^3 - 3xy^2), \\ q(x, y) &= (-3x^3 + y^3, 2x^3 - x^2y + xy^2). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle\langle p, q \rangle\rangle &= \langle x^2y + 3y^3, -3x^3 + y^3 \rangle + \langle 2x^3 - 3xy^2, 2x^3 - x^2y + xy^2 \rangle. \\ \langle\langle p, q \rangle\rangle &= \langle 3y^3, y^3 \rangle + \langle 2x^3, 2x^3 \rangle - \langle 3xy^2, xy^2 \rangle = 3 \cdot 3! + 4 \cdot 3! - 3 \cdot 2! = 36. \end{aligned}$$

Podemos definir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de uma maneira um pouco diferente e, conseqüentemente, $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

Reescrevemos (2.15) como

$$\langle x^\alpha, x^\beta \rangle = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} x^\beta \Big|_{x=0}.$$

Segue da linearidade que

$$\langle x^\alpha, q(x) \rangle = \left[\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} q \right] (0)$$

e

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) q(0).$$

Exemplo 2.1.3. Sejam $p_1(x, y) = x^2y + 3y^3$ e $q_1(x, y) = -3x^3 + y^3$ e $\underline{x} = (x, y)$. Então,

$$p_1 \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + 3 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^3.$$

Assim,

$$p_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (-3x^3 + y^3) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) (-3x^3) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) (y^3) + 3 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^3 (-3x^3) + 3 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^3 y^3 = 3 \cdot 3! = 18.$$

Agora, se $p_2(x, y) = 2x^3 - 3xy^2$ e $q_2(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2$, temos

$$p_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^3 - 3 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (2x^3 - 3x^2y + xy^2) &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^3 (2x^3) - 3 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 (xy^2) \\ &= 4 \cdot 3! - 3 \cdot 2! = 18. \end{aligned}$$

Lema 2.1.2. *Existe um produto interno $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ em \mathcal{P}_k tal que*

$$\langle \langle ad_L(p), q \rangle \rangle = \langle \langle p, ad_{L^t}(q) \rangle \rangle \quad (2.17)$$

para todo $p, q \in \mathcal{P}_k$.

Demonstração.

Sejam $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ o produto interno definido em (2.16) e $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear invertível. Afirmamos que

$$i) \quad \langle \langle Ap(x), q(x) \rangle \rangle = \langle \langle p(x), A^t q(x) \rangle \rangle \quad (2.18)$$

$$ii) \quad \langle \langle p(Ax), q(x) \rangle \rangle = \langle \langle p(x), q(A^t x) \rangle \rangle \quad (2.19)$$

para todo $p, q \in \mathcal{P}_k$. Segue que

$$iii) \quad \langle \langle e^{-sL} p(e^{sL} x), q(x) \rangle \rangle = \langle \langle p(x), e^{-sL^t} q(e^{sL^t} x) \rangle \rangle.$$

Para verificar (2.18), como p, q são somas de monômios do tipo $(0, \dots, 0, x^\alpha, 0, \dots, 0) = x^\alpha e_j$ é suficiente provar o resultado para $p(x) = x^\alpha e_j$ e $q(x) = x^\beta e_m$, onde $|\alpha| = |\beta| = k$ e e_i é o vetor unitário na i -ésima direção.

Seja $A = (a_{ij})$ e usando (2.16), temos

$$\langle \langle A(x^\alpha e_j), x^\beta e_m \rangle \rangle = \langle \langle x^\alpha \sum_l a_{lj} e_l, x^\beta e_m \rangle \rangle = \sum_m a_{lj} \langle x^\alpha, x^\beta \rangle \delta_{lm} = a_{mj} \langle x^\alpha, x^\beta \rangle.$$

Analogamente,

$$\langle \langle x^\alpha e_j, A^t(x^\beta e_m) \rangle \rangle = a_{jm}^t \langle x^\beta, x^\alpha \rangle = a_{mj} \langle x^\alpha, x^\beta \rangle.$$

Logo, (2.18) é verdadeira.

Para provar (2.19), fazemos a seguinte mudança de coordenadas $x = x(y) = A^t y$. Assim, se $g(y) = f(x(y)) = f(A^t y)$ então, $\nabla_y g(y) = \nabla_x f(A^t y) A^t$. A linearização de $g(y)$ é $\langle \nabla_y g(y), v \rangle$.

Logo,

$$\langle \nabla_x f(A^t y), A^t v \rangle = \langle A \nabla_x f(A^t y), v \rangle.$$

Consequentemente, $\nabla_y g(y) = A \nabla_x f(x)$. Formalmente, $\nabla_y = A \nabla_x$ e, portanto, $\nabla_x = A^{-1} \nabla_y$, ou ainda, $\frac{\partial}{\partial x} = A^{-1} \frac{\partial}{\partial y}$.

Então,

$$\begin{aligned} \langle p(Ax), q(x) \rangle &= \left[p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) q(x) \right] \Big|_{x=0} \\ &= p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) q(x) \Big|_{x=0} = p \left(A A^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) q(A^t y) \Big|_{y=0} \\ &= p \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) q(A^t y) \Big|_{y=0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle p(Ax), q(x) \rangle = \left[p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) q(x) \right] \Big|_{x=0} = \left[p \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) q(A^t y) \right] \Big|_{y=0} \quad (2.20)$$

$$= \left[p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) q(A^t x) \right] \Big|_{x=0} = \langle p(x), q(A^t x) \rangle. \quad (2.21)$$

Agora, segue de (2.18) e (2.19) que

$$\langle \langle e^{-sL} P(e^{sL} x), Q(x) \rangle \rangle = \langle \langle p(e^{sL} x), e^{-sL^t} q(x) \rangle \rangle = \langle \langle P(x), e^{-sL^t} Q(e^{sL^t} x) \rangle \rangle. \quad (2.22)$$

Derivando (2.22) com relação a s , calculando em $s = 0$ e usando o Lema (2.1.1), obtemos

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \langle \langle e^{-sL} P(e^{sL} x), q(x) \rangle \rangle = \langle \langle -ad_L(P(x)), q(x) \rangle \rangle$$

e

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \langle \langle P(x), e^{-sL^t} q(e^{sL^t} x) \rangle \rangle = \langle \langle P(x), -ad_{L^t}(q(x)L^t) \rangle \rangle.$$

Portanto, (2.17) é verdadeira. ■

Usando os dois lemas anteriores, podemos demonstrar o Teorema (2.1.2).

Demonstração do Teorema (2.1.2).

Pela Fórmula Alternativa de Fredholm,

$$\text{Im}(A) = (\ker A^t)^\perp$$

para qualquer transformação linear de um espaço vetorial V nele mesmo. Portanto,

$$\text{Im}(ad_L) = (\ker(ad_L)^t)^\perp = [\ker(ad_L^t)]^\perp$$

A segunda igualdade segue do lema (2.1.2). Consequentemente,

$$\mathcal{P}_k = \text{Im} ad_L \oplus \ker(ad_L^t)$$

Agora, pelo Lema (2.1.1), $\ker(ad_L^t) = \mathcal{P}_k(\mathbf{S})$. ■

2.2 Interação Hopf-Ponto de Equilíbrio

Definição 2.2.1. *Um modo é uma autofunção da equação linearizada $\dot{x} + (D_x f)(0,0)x = 0$ que tem autovalor com parte real nula, isto é, qualquer autovalor ou é zero ou imaginário puro.*

Uma interação de modos ocorre quando, no mínimo, dois modos linearmente independentes existem para o mesmo valor do parâmetro de bifurcação.

Vamos estudar a interação de um modo com autovalores imaginários puros $\pm\omega i$, chamado bifurcação de Hopf e outro com autovalor nulo, chamado solução de equilíbrio. Denominamos este fenômeno como interação Hopf-ponto-de-equilíbrio.

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{v} + g(v, \lambda) = 0, \quad v \in \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.23)$$

tal que $g(0,0) = 0$ e $(D_v g)(0,0)$ é uma matriz 3×3 que tem autovalores 0 e $\pm\omega i$, onde ω é um número real positivo. Observamos que para $\lambda = 0$, $v = 0$ é solução para o sistema (2.23).

Da álgebra linear, existe uma matriz invertível A tal que $Ag_v(0,0)A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}$.

Seja $u(t) = Av \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix}$. Então,

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{\omega} A \dot{v} \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix} = -\frac{1}{\omega} Ag \left(v \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix}, \lambda \right) = -\frac{1}{\omega} Ag(A^{-1}u(t), \lambda).$$

Fazendo $f(u, \lambda) = -\frac{1}{\omega} Ag(A^{-1}u, \lambda)$, temos

$$\dot{u}(t) + f(u, \lambda) = 0 \quad (2.24)$$

onde $(D_u f)(0,0) = \frac{1}{\omega} A(D_v g)(0,0)A^{-1} = L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pelo processo da forma normal de Birkhoff vamos definir o grupo

$$\mathbf{S} = \overline{\{exp(sL^t) \mid s \in \mathbb{R}\}}.$$

Temos que,

$$exp(sL^t) = I + (sL^t) + \frac{1}{2!}(sL^t)^2 + \frac{1}{3!}(sL^t)^3 + \frac{1}{4!}(sL^t)^4 + \frac{1}{5!}(sL^t)^5 + \frac{1}{6!}(sL^t)^6 + \text{h.o.t}$$

e

$$(L^t)^3 = -L^t \quad \text{e} \quad (L^t)^4 = -(L^t)^2,$$

segue que

$$\begin{aligned} exp(sL^t) &= I + (sL^t) + \frac{1}{2!}(sL^t)^2 - \frac{1}{3!}(sL^t) - \frac{1}{4!}(sL^t)^2 + \frac{1}{5!}(sL^t) + \frac{1}{6!}(sL^t)^2 + \text{h.o.t} \\ &= I + \left(-\frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{4!}s^4 - \frac{1}{6!}s^6 + \dots \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(s - \frac{1}{3!}s^3 + \frac{1}{5!}s^5 + \dots \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & \cos s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen } s \\ 0 & -\text{sen } s & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & \text{sen } s \\ 0 & -\text{sen } s & \cos s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.25)$$

Lema 2.2.1. *O grupo \mathbf{S} é isomorfo a $S^1 = \left\{ R_s = \begin{pmatrix} \cos s & \text{sen } s \\ -\text{sen } s & \cos s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$.*

Demonstração.

Consideremos a aplicação $\varphi : S^1 \longrightarrow \mathbf{S}$ dada por, $\varphi(R_s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_s \end{pmatrix}$. Vamos mostrar que φ é um isomorfismo de grupos. De fato,

(i) φ é um homomorfismo, pois dados R_{s_1} e R_{s_2} em S^1 temos

$$\varphi(R_{s_1})\varphi(R_{s_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{s_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{s_1}R_{s_2} \end{pmatrix} = \varphi(R_{s_1}R_{s_2}).$$

(ii) É fácil ver que φ é bijetora e, portanto, invertível.

Segue de (i) e (ii) que φ é isomorfismo de grupos. ■

Pelo Teorema (2.1.2), a forma normal de Birkhoff para o sistema (2.23) pode ser escolhida comutando com o grupo S^1 , onde a ação deste grupo no \mathbb{R}^3 é a rotação no plano u_1u_2 deixando u_0 fixo.

Se $u = u_1 + iu_2$, segue do exemplo (1.5.2) que as funções S^1 -invariantes são geradas por u_0 e $u\bar{u} = u_1^2 + u_2^2$. Do exemplo (1.5.4), segue que as aplicações S^1 -equivariantes são geradas sobre o anel dos invariantes por $(1, 0, 0)$, $(0, u_1, u_2)$ e $(0, -u_2, u_1)$.

Logo, a equação da forma normal é dada por

$$\dot{z} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.26)$$

onde p, q e r são funções de $u_0, u_1^2 + u_2^2, \lambda$. Como $f(0, 0) = 0$, segue que

$$p(0) = p_{u_0}(0) = q(0) = 0, \text{ e } r(0) = 1. \quad (2.27)$$

O sistema (2.26) é válido para qualquer ordem finita.

Os sistemas (2.24) e (2.26) são equivalentes como Equações Diferenciais Ordinárias, mas existem termos de ordem alta que não podem, em geral, ser removidos mesmo que o processo possa ser efetuado até qualquer ordem. No nosso caso, para pontos de equilíbrio e órbitas periódicas isto não é importante como mostraremos na seção sobre estabilidade de soluções. Os termos de ordem alta não podem ser ignorados para dinâmicas mais complexas. Além disso, como já observado, nossos problemas são de codimensão finita.

Para estudar o sistema (2.26) vamos introduzir a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= u_0, \\ u_1 + iu_2 &= ye^{i\theta}. \end{aligned}$$

Então, $y^2 = u_1^2 + u_2^2$. Segue que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{u}_0(t) = -p(u_0, u_1^2 + u_2^2, \lambda) = -p(x, y^2, \lambda), \\ 2y\dot{y} &= 2(u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2) = 2u_1(-u_1q + u_2r) + 2u_2(-u_2q - u_1r) = -2y^2q. \end{aligned}$$

Logo, $\dot{y} + yq(x, y^2, \lambda) = 0$.

Para θ , temos

$$\begin{aligned} i\dot{\theta}e^{i\theta} &= \frac{1}{y}(\dot{u}_1 + i\dot{u}_2) - (u_1 + iu_2)\frac{\dot{y}}{y^2} \\ &= \frac{1}{y}[-u_1q + u_2r + i(-u_2q - u_1r)] + \frac{1}{y}(u_1 + iu_2)q \\ &= \frac{1}{y}(u_2r - iu_1r) = \frac{1}{y}(u_2 - iu_1)r. \end{aligned}$$

Assim, $\dot{\theta} + r(x, y^2, \lambda) = 0$.

Podemos reescrever as equações do sistema em termos de x, y, λ como

$$\begin{cases} \dot{x} + p(x, y^2, \lambda) = 0 \\ \dot{y} + q(x, y^2, \lambda)y = 0 \\ \dot{\theta} + r(x, y^2, \lambda) = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Como as variáveis x, y independem de θ , podemos resolver separadamente o sistema

$$\dot{x} + p(x, y^2, \lambda) = 0 \quad (2.29)$$

$$\dot{y} + q(x, y^2, \lambda)y = 0 \quad (2.30)$$

e em seguida determinar θ . A solução do problema original é $Y(t) = (x(t), y(t)e^{i\theta(t)})$. Quando $y = 0$, a solução envolve apenas x , que é u_0 , isto é, se x é um ponto de equilíbrio de (2.29), então $(x, 0)$ é um ponto de equilíbrio do sistema original. Quando $y \neq 0$, devido à $r(0) = 1$, $\dot{\theta} \neq 0$, assim θ varia com o tempo e $ye^{i\theta}$ contribui com uma solução periódica não constante.

Como uma função as equações em (2.29) e (2.30), tem a forma

$$g(x, y, \lambda) = (p(x, y^2, \lambda), q(x, y^2, \lambda)y), \quad (2.31)$$

onde, usando (2.27),

$$p(0) = p_x(0) = q(0) = 0. \quad (2.32)$$

Agora (2.31) e (2.32) tem a forma geral de um problema de bifurcação em \mathbb{R}^2 de corank 2 com \mathbb{Z}_2 -simetria, onde a ação é dada por

$$(x, y) \longmapsto (x, -y).$$

Escrevemos, as equações para pontos de equilíbrio e soluções periódicas mais explicitamente:

$$y = 0, \quad p(x, 0, \lambda) = 0 \quad (\text{pontos de equilíbrio}),$$

$$y \neq 0, \quad p(x, y^2, \lambda) = q(x, y^2, \lambda) = 0 \quad (\text{soluções periódicas}).$$

2.3 Estabilidade das Soluções de Bifurcação

2.4 Preliminares

A existência de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas para a equação original

$$\dot{u} + f(u, \lambda) = 0, \quad u = (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.33)$$

é baseada na forma normal de Birkhoff obtida

$$\dot{z} + p(u_0, u_1^2 + u_2^2, \lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q(u_0, u_1^2 + u_2^2, \lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + r(u_0, u_1^2 + u_2^2, \lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.34)$$

Por mudanças de coordenadas, próximas da Identidade, descritas no processo de redução, a equação (2.33) é transformada na equação (2.34) até qualquer ordem finita.

2.5 A Aplicação de Poincaré de uma Órbita Periódica

Seja \bar{u}_0 pertencente a uma órbita periódica M de (2.33) para algum valor λ_0 de λ . Consideramos uma secção plana Σ interceptando M transversalmente em \bar{u}_0 . Observamos que devido ao fato de que Σ deve ser uma superfície pequena transversal à M e sendo $f(\bar{u}_0, \lambda_0)$ tangente a M , podemos tomar o plano ortogonal a $f(\bar{u}_0, \lambda_0)$ passando por \bar{u}_0 . Por exemplo, tomamos Σ como a intersecção de uma pequena bola centrada em \bar{u}_0 com o plano de equação $(u - \bar{u}_0) \cdot f(\bar{u}_0, \lambda_0) = 0$.

Queremos soluções muito próximas de \bar{u}_0 , por isso consideramos pontos em uma vizinhança pequena ao redor de \bar{u}_0 . A intersecção é um disco pequeno centrado em \bar{u}_0 e perpendicular ao vetor $f(\bar{u}_0, \lambda_0)$. Desta forma, existe uma vizinhança U de \bar{u}_0 em Σ tal que qualquer $v_0 \in U$ está numa órbita de (2.33) que encontrará Σ novamente em v_1 , pela primeira vez. Isto segue da continuidade do fluxo Φ de (2.33) com relação às condições iniciais.

Recordamos que o *fluxo* de (2.33) é uma aplicação $(t, \bar{u}_0, \lambda) \mapsto \Phi(t, \bar{u}_0, \lambda)$ definida em t tal que $\Phi(t, \bar{u}_0, \lambda)$ é uma solução de (2.33) com condição inicial $\Phi(0, \bar{u}_0, \lambda_0) = \bar{u}_0$. Observamos que para equações autônomas, como (2.33), o tempo inicial pode ser escolhido como $t = 0$. Como M é periódica, digamos de período T , temos $\Phi(T, \bar{u}_0, \lambda_0) = \bar{u}_0$.

Portanto, qualquer v suficientemente próximo de \bar{u}_0 será encontrado por alguma órbita em algum tempo t próximo de T . Explicitamente, para cada v suficientemente próximo de \bar{u}_0 , existe uma única condição inicial $v_0(v)$ e um tempo $t(v)$ tal que $\Phi(t(v), v_0(v), \lambda_0) = v$. Isto é

verdadeiro para todo $v \in \Sigma$. Assim, definimos uma aplicação

$$\Pi : U \subset \Sigma \longrightarrow \Sigma \text{ por}$$

$$\Pi(v_0) = v_1.$$

Esta aplicação é chamada *aplicação de Poincaré* para M . Como $\Phi(T, \bar{u}_0, \lambda) = \bar{u}_0$, então \bar{u}_0 é um ponto fixo de Π .

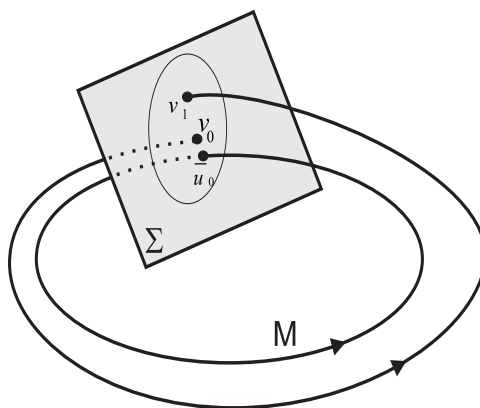


Figura 2.1: A Aplicação de Poincaré

A aplicação de Poincaré de uma órbita periódica discretiza o tempo contínuo da dinâmica de (2.33). Dado v_0 próximo da órbita periódica M , $v_0 \in \Sigma$, $v_1 = \Pi(v_0)$ é o valor de u na órbita começando em v_0 após interceptar Σ pela primeira vez. Temos que $v_2 = \Pi(v_1)$ é o valor após duas voltas, etc. Dessa forma, podemos entender o comportamento de órbitas próximas à órbita periódica analisando a dinâmica discreta da aplicação $\Pi : U \longrightarrow \Sigma$. Pontos fixos correspondem à órbitas periódicas do campo vetorial dado por (2.33).

Exemplo 2.5.1. Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (2.35)$$

Como pode ser verificado, o círculo M de equação $x^2 + y^2 = 1$ é uma órbita periódica de (2.35). Escolhemos o ponto $\bar{u}_0 = (1, 0)$ em M e tomamos a intersecção transversal

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 0\}.$$

Ficará claro a partir dos cálculos a seguir, porque neste exemplo podemos tomar Σ tão grande como a secção plana.

Se $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, então

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever (2.35) em coordenadas polares como

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases}$$

com $r(0) = r_0$ e $\theta(0) = \theta_0$.

A primeira equação pode ser resolvida e a solução do sistema é dada por

$$\begin{aligned} r(t) &= \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \theta(t) &= t + \theta_0. \end{aligned}$$

Neste caso, a aplicação de Poincaré $\Pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é dada por

$$\Pi(r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Observamos que para $r_0 = 1$, obtemos $\Pi(1) = 1$, correspondendo a órbita periódica Γ (ver Figura 2.2).

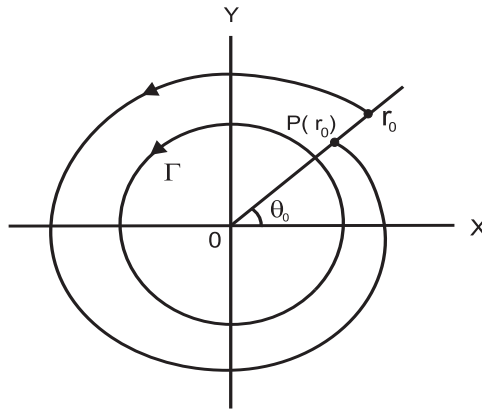


Figura 2.2: A Aplicação de Poincaré

Definição 2.5.1. Um ponto de equilíbrio u é *hiperbólico* se os autovalores da diferencial $(D_u f)$ têm parte real não nula.

Um órbita periódica é *hiperbólica* se para todo ponto \bar{u} ao longo da órbita, os autovalores de $(D_{\bar{u}} \Pi)$ não estão no círculo unitário, isto é, se α é autovalor de $(D_{\bar{u}} \Pi)$, então $\|\alpha\| \neq 1$.

Observamos que as dinâmicas de (2.33) e (2.34) não são, necessariamente, topologicamente equivalentes (ver [16] e [17]) mas, existe uma correspondência biunívoca (bijeção) entre pontos de equilíbrio hiperbólicos e soluções periódicas hiperbólicas de (2.33) e (2.34).

É muito difícil achar uma prova geral para a correspondência entre as soluções. Na literatura, isto é feito, caso a caso, usando ramos de soluções e mostrando que existe uma bijeção entre eles, módulo perturbações de ordem alta.

A idéia da Proposição (2.5.1) é a seguinte: temos dois sistemas de equações diferenciais (2.33) e (2.34) que são equivalentes por contato, portanto, soluções de equilíbrio estão em bijeção. Queremos explorar a estrutura de (2.34) e sua forma truncada até uma ordem arbitrária, porém, finita. Queremos mostrar que pontos de equilíbrio hiperbólicos e órbitas periódicas hiperbólicas de (2.33) e (2.34) estão em correspondência biunívoca.

A estabilidade da respectivas soluções coincidem.

Proposição 2.5.1. Existe uma correspondência biunívoca entre pontos de equilíbrio hiperbólicos e órbitas periódicas hiperbólicas de (2.33) e a forma (2.34) módulo os termos de ordem suficientemente alta. Além disso, a estabilidade das soluções coincidem.

Demonstração.

Vamos analisar o caso dos pontos de equilíbrio. Seja $g(u, \lambda) + h(u, \lambda)$ a forma normal de Birkhoff correspondente ao campo vetorial f de (2.33), onde g representa a parte S^1 -equivariante em (2.34) e h os termos de ordem arbitrariamente alta, digamos de ordem n .

Podemos escrever h como $h(u, \lambda) = |u|^n \bar{h}_n(u, \lambda)$, onde $|u|$ é a norma de u e \bar{h}_n é uma função de classe C^∞ que depende da escolha arbitrária de n .

Suponhamos que $(u(s), \lambda(s))$ seja um ramo de soluções hiperbólicas de g próximo ao ramo original, isto é, $g(u(s), \lambda(s)) = 0$ com $(u(0), \lambda(0)) = 0$. Vamos mostrar que obtemos um ramo de soluções para $g(u, \lambda) + h(u, \lambda) = 0$, perturbando $(u(s), \lambda(s))$.

Consideremos $G(u, \lambda, \epsilon) = g(u, \lambda) + \epsilon \bar{h}_n(u, \lambda)$. Como $g(u(s), \lambda(s)) = 0$ e $(D_u g)(u(s), \lambda(s))$ é invertível, pois estamos considerando $(u(s), \lambda(s))$ um ramo de soluções não degeneradas de g , pelo Teorema da Função Implícita, podemos encontrar um ramo

$$(\bar{u}(s, \epsilon), \bar{\lambda}(s))$$

tal que $G(\bar{u}(s, \epsilon), \bar{\lambda}(s)) = 0$, para $|\epsilon| < \epsilon_0$ e $(\bar{u}(s, 0), \bar{\lambda}(s)) = (u(s), \lambda(s))$.

Se encontrarmos $\epsilon(s)$ tal que

$$|\bar{u}(s, \epsilon)|^n = \epsilon(s),$$

substituindo em G obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= G(\bar{u}(s, \epsilon(s)), \bar{\lambda}(s), \epsilon(s)) = g(\bar{u}(s, \epsilon(s)), \bar{\lambda}(s)) + |\bar{u}(s, \epsilon(s))|^n \bar{h}_n(\bar{u}(s, \epsilon(s)), \bar{\lambda}(s)) \\ &= g(\bar{u}(s), \bar{\lambda}(s)) + h(\bar{u}(s), \bar{\lambda}(s)), \end{aligned}$$

tal que $s \mapsto (\bar{u}(s, \epsilon(s)), \bar{\lambda}(s))$ é o ramo perturbado.

Para encontrarmos $\epsilon(s)$ tal que $|\bar{u}(s, \epsilon)|^n = \epsilon(s)$, notamos que como s é pequeno $(u(s), \lambda(s))$ está próximo do ramo original de soluções e, assim, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita à

$$H(\epsilon, s) = |\bar{u}(s, \epsilon)|^n - \epsilon = 0,$$

calculando a derivada em ϵ .

Para órbitas periódicas, temos que utilizar a aplicação de Poincaré. Seja $g(u, \lambda)$ o campo vetorial de (2.34) truncado até certa ordem.

Pelo processo de redução à forma normal de Birkhoff, os campos $g + h$ e g coincidem até qualquer ordem finita. Como esses campos são de classe C^∞ , por continuidade, os campos e suas derivadas estão próximos para pequenos valores de u (a origem é o ponto de equilíbrio).

Sejam M uma órbita periódica hiperbólica do campo vetorial truncado g e $\bar{u}_0 \in M$ o ponto correspondente a $t = 0$. Construímos a aplicação de Poincaré em torno de \bar{u}_0 .

O ponto \bar{u}_0 é ponto fixo de Π , pois M é uma órbita periódica. O ponto fixo \bar{u}_0 é solução da equação $H(\bar{u}) = \bar{u} - \Pi(\bar{u}) = 0$. Esta raiz é isolada, pois M é hiperbólica e a derivada $D_{\bar{u}} H(\bar{u}_0) = (I - D_{\bar{u}} \Pi(\bar{u}_0))$ é invertível.

De fato, se M é hiperbólica, os autovalores de $D_{\bar{u}} \Pi(\bar{u}_0)$ não estão no círculo unitário. Suponhamos que $(I - D_{\bar{u}} \Pi(\bar{u}_0))$ não seja invertível. Então, o sistema $(I - D_{\bar{u}} \Pi(\bar{u}_0))v = 0$ tem uma solução não trivial v . Dessa forma, v é um autovetor com autovalor 1, o que é impossível.

A aplicação de Poincaré Π_μ para o campo vetorial não truncado é uma perturbação pequena de Π e, assim, a equação para o ponto fixo de Π_μ , $H_\mu(\bar{u}) = \bar{u} - \Pi_\mu(\bar{u}) = 0$, é uma pequena perturbação de $H(\bar{u}) = 0$.

Agora, estamos no mesmo caso anterior para pontos de equilíbrio. Temos duas equações $H(\bar{u}) = 0$ e $H_\mu(\bar{u}) = 0$ com H e H_μ próximas, bem como suas derivadas. Pelo Teorema da Função Implícita, existe um zero x_μ para g_μ e conseqüentemente, um ponto fixo para Π_μ .

O resultado sobre estabilidade segue, pois conjuntos hiperbólicos tem estabilidades invariáveis sob pequenas perturbações.

Lembramos que podemos transformar o campo vetorial (2.33) no campo vetorial (2.34) até qualquer ordem suficientemente alta necessária para obter uma bijeção entre o conjunto de zeros e os autovalores hiperbólicos da linearização. ■

2.6 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio

Definição 2.6.1. Seja \bar{u}_0 um ponto de equilíbrio de (2.33). Dizemos que \bar{u}_0 é *assintoticamente estável* se

- a) existe uma pequena bola $B(\bar{u}_0, r)$, $r > 0$, de raio r em torno de \bar{u}_0 tal que toda solução começando na bola converge para \bar{u}_0 quando o tempo tende para o infinito;
- b) para toda bola $B(\bar{u}_0, r)$, $r > 0$, existe uma bola $B(\bar{u}_0, \hat{r})$, onde $0 < \hat{r} < r$, tal que toda solução começando em $B(\bar{u}_0, \hat{r})$ permanece em $B(\bar{u}_0, r)$ para todo tempo $t > 0$.

Definição 2.6.2. Um ponto de equilíbrio de (2.33) é *estável* se ele satisfaz somente a condição (b) de estabilidade assintótica. Dizemos que o ponto de equilíbrio é *instável* se não é estável.

No próximo teorema enunciamos um critério importante para verificar estabilidade assintótica.

Teorema 2.6.1. Seja u um ponto de equilíbrio de (2.33).

- a) Se todos os autovalores da matriz Jacobiana $(D_u f)$ tem parte real positiva, então u é assintoticamente estável.
- b) Se um autovalor da Jacobiana $(D_u f)$ tem parte real negativa, então u é instável.

Demonstração. Este é um resultado clássico. Mas, na literatura, por exemplo ver ([20], pág. 267), as condições para estabilidade assintótica e instabilidade são dadas em termos dos autovalores da matriz Jacobiana do campo vetorial para Equações Diferenciais Ordinárias do tipo $\dot{u} = g(u)$. No nosso caso, $g(u) = -f(u, \lambda)$ e, conseqüentemente, a mudança nos sinais para as condições sobre os autovalores. ■

2.7 Estabilidade de Órbitas Periódicas

No próximo exemplo, mostramos o item (a) de Definição 2.6.1 pode não ser satisfeito, ou seja, quaisquer duas órbitas começando arbitrariamente próximas dos pontos iniciais, podemos encontrar uma sequência de tempos (t_n) tendendo ao infinito quando n cresce, tal que a distância entre os pontos, no mesmo tempo t_n , nas duas órbitas é maior que qualquer número positivo.

Exemplo 2.7.1. Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x^2 + y^2)y, \\ \dot{y} = (x^2 + y^2)x. \end{cases} \quad (2.36)$$

Vamos reescrever o sistema (2.36) em coordenadas polares

$$\begin{cases} \dot{r} = R(r, \theta), \\ \dot{\theta} = Q(r, \theta). \end{cases}$$

Se $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, segue que

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

então

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = R(r, \theta) \cos \theta - Q(r, \theta) r \cos \theta r \sin \theta, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = R(r, \theta) \sin \theta + Q(r, \theta) r \cos \theta r \sin \theta. \end{cases}$$

Como

$$\begin{cases} x\dot{x} = rR(r, \theta) \cos^2 \theta - Q(r, \theta) xy, \\ y\dot{y} = rR(r, \theta) \sin^2 \theta + Q(r, \theta) xy. \end{cases}$$

temos que $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$.

Além disso,

$$\dot{\theta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} = \frac{1}{r^2} (\dot{y}x - \dot{x}y).$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{cases} \dot{r} = 0, \\ \dot{\theta} = r^2. \end{cases} \quad (2.37)$$

As soluções de (2.37) iniciando em (r_0, θ_0) podem ser escritas, explicitamente, como

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0, \\ \theta(t) &= \theta_0 + r_0^2 t. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Assim, o espaço de fase é constituído de órbitas periódicas circulares que dependem do raio. O período de cada solução representadas pelos círculos de raio $r = r_0$ é $T = \frac{2\pi}{r_0^2}$.

A distância cartesiana d entre dois pontos (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2) é dada por

$$d^2 = (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + 2r_1 r_2 [1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (2.39)$$

Assim, podemos avaliar a distância entre duas soluções iniciando em (r_1^0, θ_1^0) e (r_2^0, θ_2^0) usando (2.38) e substituindo em (2.39). Logo,

$$d^2(t) = (r_1^0 - r_2^0)^2 + 2r_1^0 r_2^0 [1 - \cos((\theta_1^0 - \theta_2^0) + (r_1^0 - r_2^0)t)].$$

Como $r_1^0 \neq r_2^0$, o termo $1 - \cos[(\theta_1^0 - \theta_2^0) + (r_1^0 - r_2^0)t]$ oscila indeterminadamente entre 1 e -1 . Dessa forma, $d(t)$ assume todos os valores entre $|r_1^0 - r_2^0|$ e $r_1^0 + r_2^0$. Portanto, a distância entre dois pontos de cada uma das duas órbitas no mesmo tempo t alcançará indefinidamente $r_1^0 + r_2^0$.

Definição 2.7.1. Uma órbita periódica M de (2.33) é *assintoticamente estável* se ela satisfaz as seguintes condições

- a) existe uma vizinhança pequena aberta U de M tal que toda solução começando em U converge para M quando o tempo tende ao infinito,
- b) para toda vizinhança pequena aberta U de M existe uma vizinhança menor aberta V de M tal que toda solução começando em V permanece em U para todo tempo positivo.

Definição 2.7.2. Uma órbita periódica M de (2.33) é *instável* se não satisfaz a condição b) de estabilidade assintótica.

Como para pontos de equilíbrio, existe um critério para verificar estabilidade assintótica e instabilidade de órbitas periódicas usando autovalores da aplicação de Poincaré em torno de uma órbita periódica. Esta aplicação, em geral, é impossível de ser calculada explicitamente.

Teorema 2.7.1. Seja M uma órbita periódica de (2.33) e Π uma Aplicação de Poincaré para M .

- a) A órbita periódica M é hiperbólica se os autovalores da jacobiana $(D_{\bar{u}}\Pi)$ não estão no círculo unitário.
- b) Se todos os autovalores de $(D_{\bar{u}}\Pi)$ estão estritamente no interior do círculo unitário, então M é assintoticamente estável.
- c) Se um autovalor de $(D_{\bar{u}}\Pi)$ está fora do disco unitário, então M é instável.
- d) Os resultados anteriores independem da escolha da Aplicação de Poincaré para M .

Demonstração. Ver [20], pág. 376.

■

2.8 Estabilidade das Soluções de (2.34)

Vamos analisar a estabilidade das órbitas de (2.34). Por mudanças de coordenadas

$$\begin{aligned}x &= u_0 \\ u_1 + iu_2 &= ye^{i\theta}\end{aligned}\tag{2.40}$$

podemos transformar o sistema (2.34) em

$$\begin{cases} \dot{x} + p(x, y^2, \lambda) = 0 \\ \dot{y} + yq(x, y^2, \lambda) = 0 \\ \dot{\theta} + r(x, y^2, \lambda) = 0 \\ r(0) = 1. \end{cases}\tag{2.41}$$

A dinâmica de (2.41) é determinada pela do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} + p(x, y^2, \lambda) = 0 \\ \dot{y} + yq(x, y^2, \lambda) = 0 \\ p(0) = p_x(0) = q(0) = 0. \end{cases}\tag{2.42}$$

Observamos que

- a) As bifurcações dos pontos de equilíbrio de (2.34) próximos ao ponto de bifurcação estão em correspondência biunívoca com as bifurcações dos pontos de equilíbrio próximos ao ponto de bifurcação do tipo $(x_0, 0)$ de (2.42).
- b) As bifurcações das órbitas periódicas de (2.34) próximas ao ponto de bifurcação estão em correspondência biunívoca com as bifurcações das órbitas periódicas próximas ao ponto de bifurcação do tipo (x_0, y_0) de (2.42).

Vamos analisar, então, a estabilidade das soluções de (2.34). O teorema a seguir, afirma que a estabilidade dessas soluções segue da estabilidade correspondente ao ponto de equilíbrio (x_0, y_0) de (2.42).

Teorema 2.8.1. a) Um ponto de equilíbrio (x_0, y_0) do sistema reduzido (2.42) é assintoticamente estável se, e somente se, a órbita correspondente de (2.34) é assintoticamente estável.

- b) Um ponto de equilíbrio (x_0, y_0) do sistema reduzido (2.42) é instável se, e somente se, a órbita correspondente em (2.34) é instável.

Demonstração.

a) Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (2.42) e M a correspondente órbita periódica de (2.41), conseqüentemente de (2.34). Recordamos que via (2.40) e (2.41), as soluções de (2.42) dão origem às soluções de (2.34). Precisamos verificar que as condições a) e b) para pontos de equilíbrio (x_0, y_0) implicam nas condições a) e b) das soluções correspondentes de (2.34). A segunda parte da definição de estabilidade assintótica significa que todas as órbitas começando suficientemente próximas de (x_0, y_0) permanecem próximas de (x_0, y_0) . Isto implica na segunda condição de estabilidade de órbitas periódicas para M , pois x e y representam a amplitude dos dois modos de \bar{u} . A amplitude total $\sqrt{x^2 + y^2}$ permanece limitada em torno de M .

A outra condição é sobre a convergência para (x_0, y_0) e M quando o tempo tende ao infinito. Existe uma vizinhança U de (x_0, y_0) tal que todas as soluções iniciando em U convergem para (x_0, y_0) . Novamente, isto significa que as amplitudes de (2.41) convergem para (x_0, y_0) , conseqüentemente, M atrai qualquer órbita de (2.41) começando em U .

Reciprocamente, podemos inverter o argumento tomando a intersecção das vizinhanças de M mencionadas na Definição (2.7.1) de estabilidade assintótica de M em \mathbb{R}^3 com o plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Essas intersecções dão as vizinhanças de (x_0, y_0) necessárias na definição (2.6.1) de estabilidade assintótica de (x_0, y_0) . Assim, a estabilidade assintótica de M implica na estabilidade assintótica de (x_0, y_0) provando a implicação inversa.

b) Com argumentos análogos, obtemos a conclusão. ■

2.9 Função de Poincaré e Estabilidade

Nesta seção, estabelecemos uma relação entre a linearização de um ponto de equilíbrio de (2.42) e a linearização da aplicação de Poincaré das correspondentes órbitas periódicas de (2.41).

Primeiro, construímos a aplicação de Poincaré. Denotamos

$$v = (x, y) \text{ e}$$

$$F(v, \lambda) = (p(x, y^2, \lambda), q(x, y^2, \lambda)).$$

Seja $\phi(t, v)$ o fluxo de (2.42) tal que $\phi(0, v) = v$. Notemos que

$$\phi_t + F(\phi, \lambda) = 0 \tag{2.43}$$

para todo tempo t .

Devido ao fato de λ manter-se fixo, podemos ignorar, a partir de agora, a dependência de ϕ em λ . Assim, a solução da última equação de (2.41) é dada por

$$\theta(t) = \theta_0 - \int_0^t r(\phi_1(s, v), \phi_2^2(s, v), \lambda) ds.$$

Vamos considerar θ_0 de 0 até -2π , para a órbita toda. Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ uma pequena secção em torno da origem. Como $r(0) = 1$, Σ pode ser escolhido de modo que r seja estritamente positivo (e até mesmo limitado fora de 0) para $(v, 0) \in \Sigma$.

Assim, podemos definir $\widehat{t}(v)$ como sendo o primeiro valor de t tal que

$$\int_0^{\widehat{t}(v)} r(\phi_1(s, v), \phi_2^2(s, v), \lambda) ds = 2\pi.$$

Então, $\Phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ definida como

$$\Phi(v) = \phi(\widehat{t}(v), v), \tag{2.44}$$

é a *aplicação de Poincaré* ao longo de qualquer órbita periódica pequena de (2.41) com condição inicial $(v_0, 0) \in \Sigma$, onde v_0 é um ponto de equilíbrio de Φ .

Teorema 2.9.1. Seja v_0 um ponto de equilíbrio de (2.42), a linearização de Φ em v_0 é igual a exponencial da linearização de (2.42) em v_0 para o tempo $\widehat{t}(v_0)$.

Demonstração.

Para calcular a derivada de Φ em v_0 , usamos a Regra da Cadeia para derivar (2.44). Para a primeira componente, obtemos

$$(D_v \Phi_1)(v_0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\widehat{t}(v_0), v_0) \widehat{t}_v(v_0) + (D_v \phi_1)(\widehat{t}(v), v_0)(v_0).$$

Uma relação análoga vale para a segunda componente. Como $\phi_t = -F(\phi, \lambda)$ e F anula-se no ponto de equilíbrio $(\widehat{t}(v_0), v_0)$, temos

$$\begin{aligned} (D_v \Phi_1)(v_0) &= (D_v \phi_1)(\widehat{t}(v), v_0), \\ (D_v \Phi_2)(v_0) &= (D_v \phi_2)(\widehat{t}(v), v_0). \end{aligned}$$

Usando (2.43), derivando em relação a v e calculando em v_0 , obtemos

$$(\phi_v(v_0))_t + (DF)(\phi) D_v \phi(v_0) = 0 \tag{2.45}$$

para todo t . Observamos que

$$\phi_0(v) = v \implies \frac{\partial}{\partial v} \phi_0(v_0) = v_0.$$

Estas igualdades continuam verdadeiras para o tempo fixo $\hat{t}(v)$. Dessa forma, a equação (2.45) representa a equação linear com coeficientes constantes

$$v_t + (DF(v_0))v = 0.$$

Esta equação tem como solução a exponencial de $-(DF)(v_0)$ até o tempo $\hat{t}(v_0)$.

Este resultado mostra que a estabilidade assintótica de M para (2.41) é a mesma de v_0 para (2.42). ■

2.10 Invariância da Estabilidade sob Equivalência de Contato

Mostramos que a estabilidade de pontos de equilíbrio de (2.42) correspondem à estabilidade de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas de (2.33). De fato, estudamos as formas normais de (2.42) sob equivalência de contato. Justificamos, agora, que tal estabilidade é invariante sob essa equivalência.

Proposição 2.10.1. (a) O determinante da matriz Jacobiana de (2.42) é invariante sob equivalência de contato. Em particular, pontos de equilíbrio instáveis com determinante negativo são invariantes sob equivalência de contato.

(b) Os autovalores das soluções de (2.42) no plano $y = 0$ são reais e seus sinais são invariantes sob equivalência de contato.

Demonstração. Estes resultados independem do parâmetro de bifurcação λ , pois envolvem as derivadas em $z = (x, y)$.

Sejam $g(z) = T(z)f(X(z))$ dois germes equivalentes por contato. Usando a Regra da Cadeia, a derivada de g é dada por

$$(D_z g)(z) = (D_z T)(z)f(X(z)) + T(z)(D_z f)(X(z))(D_z X)(z).$$

Como estamos analisando a estabilidade de pontos de equilíbrios de (2.42), temos que nesses pontos $g(z) = 0 = f(X(z))$. Logo, as derivadas estão relacionadas por

$$(D_z g)(z) = T(z)(D_z f)(X(z))(D_z X)(z). \quad (2.46)$$

(a) O resultado segue direto de (2.46). Temos que o determinante de $D_z g$ é o produto do determinante de $D_z f$ com os determinantes de T e $D_z X$ que são positivos.

(b) Quando $y = 0$, todas as matrizes em (2.46) são diagonais. Portanto, o resultado segue porque T e $D_z X$ têm entradas positivas nas suas diagonais.



Capítulo 3

Problemas de Bifurcação

\mathbb{Z}_2 -Equivariantes de Corank 2

3.1 Preliminares

Sejam

$$\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)} = \{f : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^2\} \quad (3.1)$$

o conjunto dos germes em duas variáveis padrão e um parâmetro de bifurcação e

$$\mathcal{E}_\lambda = \{\Lambda : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

o conjunto dos germes na variável λ .

A simetria em nosso problema é dada pelo grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$. A seguir definimos uma ação de \mathbb{Z}_2 sobre \mathbb{R}^2 .

Definição 3.1.1. Seja

$$\theta : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por

$$\begin{aligned} \theta(1, (x, y)) &= 1 \cdot (x, y) = (x, y), \\ \theta(-1, (x, y)) &= -1 \cdot (x, y) = (x, -y), \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

A *órbita* de um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é dada por

$$\mathbb{Z}_2 \cdot (x, y) = \{(x, y), (x, -y)\}.$$

Temos três tipos de órbitas:

- a) $\mathbb{Z}_2 \cdot (0, 0) = \{(0, 0)\}$,
- b) Para $x \neq 0$, $\mathbb{Z}_2 \cdot (x, 0) = \{(x, 0)\}$,
- c) Para $xy \neq 0$, $\mathbb{Z}_2 \cdot (x, y) = \{(x, y), (x, -y)\}$.

Logo, as órbitas têm um ou dois pontos.

3.2 Problemas de Bifurcação \mathbb{Z}_2 -Invariantes e \mathbb{Z}_2 -Equivariantes

Definição 3.2.1. Denotamos

$$\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) = \{f : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x, -y, \lambda) = f(x, y, \lambda)\}$$

o conjunto dos germes \mathbb{Z}_2 -invariantes. Este conjunto tem estrutura de anel.

Consideremos

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) = \{g : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid g(x, -y, \lambda) = -1 \cdot g(x, y, \lambda)\}$$

o conjunto dos germes \mathbb{Z}_2 -equivariantes que tem estrutura de módulo sobre o anel $\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$.

Temos que $u = x$ e $v = y^2$ é uma base de Hilbert para $\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ e, pelo Teorema de Schwarz, $f(x, y, \lambda) = p(u, v, \lambda)$, onde $p \in \mathcal{E}_{(u,v,\lambda)}$, isto é, $\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) = \mathcal{E}_{(u,v,\lambda)}$.

Seja g um germe \mathbb{Z}_2 -equivariante, $g(x, y, \lambda) = (g_1(x, y, \lambda), g_2(x, y, \lambda))$, satisfazendo

$$g(x, -y, \lambda) = (g_1(x, -y, \lambda), g_2(x, -y, \lambda)) = (g_1(x, y, \lambda), -g_2(x, y, \lambda)) \quad (3.2)$$

desta forma $g_1(x, y, \lambda) = p(u, v, \lambda)$ e $g_2(x, y, \lambda) = q(u, v, \lambda)y$. Logo,

$$g(x, y, \lambda) = (p(u, v, \lambda), q(u, v, \lambda)y) \quad (3.3)$$

que denotamos por $g = [p, q]$.

Observação: É importante notar que não existe ação na variável padrão x e no parâmetro de bifurcação λ . Os problemas de bifurcação são de corank 2 porque a equação reduzida (3.3) tem duas variáveis padrão.

Definição 3.2.2. Definimos

$$\mathcal{M}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) = \{p \in \mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) \mid p(0, 0, 0) = 0\},$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) = \{g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) \mid g(0, 0, 0) = (0, 0)\}.$$

Pelo Lema de Hadamard, $\mathcal{M}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) = \langle u, v, \lambda \rangle_{\mathcal{E}_{(u,v,\lambda)}}$.

Se $g \in \vec{\mathcal{M}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$, segue que $g(x, y, \lambda) = (p(u, v, \lambda), q(u, v, \lambda)y)$ onde $p(0, 0, 0) = 0$. Podemos escrever

$$g = (uf_1 + vf_2 + \lambda f_3, qy)$$

com $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$.

Portanto,

$$\vec{\mathcal{M}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) = \langle (u, 0), (v, 0), (\lambda, 0)(0, y) \rangle_{\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)}.$$

3.3 \mathbb{Z}_2 -Equivalências

Sejam $f, g : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ problemas de bifurcação \mathbb{Z}_2 -equivariantes. Dentro do estudo do problema de bifurcação queremos classificar os germes segundo a \mathbb{Z}_2 -equivalência, que definimos a seguir.

Definição 3.3.1. Dizemos que f é \mathbb{Z}_2 -equivalente a g , denotamos por $f \sim g$, se existem uma matriz invertível $S = S(x, y, \lambda)$ e um difeomorfismo $Z(x, y, \lambda) = (X(x, y, \lambda), \Lambda(\lambda))$ tal que

$$g(x, y, \lambda) = S(x, y, \lambda)f(X(x, y, \lambda), \Lambda(\lambda))$$

onde

$$X(0, 0, 0) = (0, 0), \quad \Lambda(0) = 0, \quad \Lambda'(0) > 0,$$

$$X(x, -y, \lambda) = -X(x, y, \lambda), \tag{3.4}$$

$$S(x, -y, \lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S(x, y, \lambda), \tag{3.5}$$

$\Lambda \in \mathcal{E}_\lambda$.

Além disso, impomos que $S(0, 0, 0)$ e $(D_{(x,y)}X)(0, 0, 0)$ sejam matrizes diagonais com entradas positivas.

No caso em que o difeomorfismo Λ é a função identidade, dizemos que f e g são \mathbb{Z}_2 -fortemente equivalentes e denotamos por $f \sim_f g$.

A restrição (3.4) implica que X comuta com o grupo \mathbb{Z}_2 , ou seja, $X \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$. A restrição (3.5) impõe a S uma condição que possibilita que a equivalência definida acima tenha a seguinte propriedade: “Se f é um problema de bifurcação comutando com o grupo \mathbb{Z}_2 e se g é \mathbb{Z}_2 -equivalente a f , então g comuta com \mathbb{Z}_2 .” As outras restrições tem a ver com a orientação das soluções do problema de bifurcação.

Denotamos por $\vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ o conjunto das matrizes 2×2 que satisfazem a condição (3.5). Consideremos $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ o conjunto de todas as \mathbb{Z}_2 -equivalências, ou seja,

$$\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2} = \{(S, X, \Lambda) \mid S \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2), X \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) \text{ e } \Lambda \in \mathcal{E}_\lambda\}.$$

Dados $(S_1, \Phi_1), (S_2, \Phi_2) \in \mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$, onde $\Phi_1 = (X_1, \Lambda_1)$ e $\Phi_2 = (X_2, \Lambda_2)$, definimos

$$(S_1, \Phi_1) * (S_2, \Phi_2) = (S_1(S_2 \circ \Phi_1), \Phi_2 \circ \Phi_1).$$

Com essa operação $(\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}, *)$ tem estrutura de grupo.

A ação do grupo $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ em $\vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ é dada por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2} \times \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) \\ \varphi((S, X, \Lambda), g) &\longmapsto Sg \circ (X, \Lambda). \end{aligned}$$

Para simplificar, denotamos uma \mathbb{Z}_2 -equivalência por $\phi = (S, X, \Lambda)$.

A partir dessa ação, podemos definir uma relação de equivalência em $\vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ da seguinte maneira: f está relacionada com g se existe $\phi \in \mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ tal que $g = \phi \cdot f$, ou seja, $g = Sf \circ (X, \Lambda)$.

As classes de equivalências são denominadas $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ -órbitas. Assim, dizemos que f e g são $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ -equivalentes se eles pertencem à mesma $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ -órbita.

Definimos um subgrupo especial de $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$. Consideremos a aplicação projeção π

$$\pi : \vec{\mathcal{M}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) \times \vec{\mathcal{M}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) \times \mathcal{M}_\lambda \longrightarrow \mathcal{L}_2^o(\mathbb{Z}_2) \times \mathcal{L}_2^o(\mathbb{Z}_2) \times \mathcal{L}_\lambda^o, \quad (3.6)$$

onde $\mathcal{L}_n^o(\mathbb{Z}_2)$ é a componente conexa do grupo das transformações lineares invertíveis de \mathbb{R}^n contendo a aplicação identidade e que comutam com a ação de \mathbb{Z}_2 .

Esta aplicação é definida por

$$\pi(S, X, \Lambda) = (S(0, 0, 0), (D_{(x,y)}X)(0, 0, 0), \Lambda'(0)), \quad \forall (S, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}.$$

Temos que π é um epimorfismo e seu kernel

$$\mathcal{U}_\lambda^{\mathbb{Z}_2} = \{(S, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2} \mid S(0, 0, 0) = I_2, (D_2X)(0, 0, 0) = I_2, \Lambda'(0) = 1\}$$

é um subgrupo normal de $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ formado de difeomorfismos unipotentes e é chamado de *subgrupo das \mathbb{Z}_2 -equivalências unipotentes*.

3.4 Os Espaços Tangentes à Germes \mathbb{Z}_2 -Equivariantes

Nesta seção, inicialmente, caracterizamos o espaço tangente restrito a um germe g \mathbb{Z}_2 -equivariante, através da ação de uma \mathbb{Z}_2 -equivalência forte, determinando seus geradores.

Consideramos uma família a um parâmetro de germes \mathbb{Z}_2 -fortemente equivalentes a g , ou seja,

$$G(x, y, \lambda, t) = S(x, y, \lambda, t)g(X(x, y, \lambda, t), \lambda) \quad (3.7)$$

onde $S(x, y, \lambda, 0) = I_2$, $X(0, 0, 0, t) \equiv 0$ e $X(x, y, \lambda, 0) = (x, y)$. Derivando (3.7) em relação a t e calculando em $t = 0$, obtemos

$$\dot{G}(x, y, \lambda, 0) = \dot{S}(x, y, \lambda, 0)g(x, y, \lambda) + (D_{(x,y)}g(x, y, \lambda, 0))\dot{X}(x, y, \lambda, 0). \quad (3.8)$$

Como $X(x, y, \lambda, t)$ e $S(x, y, \lambda, t)$ satisfazem às condições equivariantes, o mesmo ocorre com $\dot{X}(x, y, \lambda, 0)$ e $\dot{S}(x, y, \lambda, 0)$, pois a derivada em questão é na variável t . Além disso, X anula-se na origem, segue que $X(0, 0, 0, t) \equiv 0$.

Dessa maneira, definimos o *espaço tangente restrito* ao germe g por

$$RT(g, \mathbb{Z}_2) = \{Sg + (D_{(x,y)}gX \mid S \in \overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) \text{ e } X \in \vec{\mathcal{M}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)\}, \quad (3.9)$$

onde $X^0 = X(0, 0, 0)$.

O uso da palavra restrito indica a construção relacionada à equivalência forte. Nosso objetivo agora é determinar a estrutura algébrica de $RT(g, \mathbb{Z}_2)$ e quem são os seus geradores.

Quanto à estrutura algébrica temos que $RT(g, \mathbb{Z}_2)$ é um módulo finitamente gerado sobre o anel $\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$. Os geradores de $RT(g, \mathbb{Z}_2)$ são obtidos de (3.9). Primeiro, determinamos os geradores do módulo $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$. Seja

$$S(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} s_1(x, y, \lambda) & s_2(x, y, \lambda) \\ s_3(x, y, \lambda) & s_4(x, y, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Usando a condições (3.5), concluímos que as funções s_1 e s_4 são pares em y , enquanto s_2 e s_3 são funções ímpares em y . Podemos reescrever a matriz S na forma

$$S(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x, y^2, \lambda) & c_2(x, y^2, \lambda)y \\ c_3(x, y^2, \lambda)y & c_4(x^2, y^2, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$S(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} c_1(0, 0, 0) & 0 \\ 0 & c_4(0, 0, 0) \end{pmatrix},$$

ou seja, $S(0, 0, 0)$ é diagonal e de acordo com o que foi requerido na definição da \mathbb{Z}_2 -equivalência, $c_1(0, 0, 0) > 0$ e $c_4(0, 0, 0) > 0$.

Por (3.11), podemos escrever

$$S = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com c_1, c_2, c_3 e $c_4 \in \mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$.

Portanto as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

geram o módulo $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ sobre o anel $\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$.

Assim, dado $g = (p, qy)$ obtemos os seguintes geradores do espaço tangente restrito:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ qy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = [p, 0], \\ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ qy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} qv \\ 0 \end{pmatrix} = [qv, 0], \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ qy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ py \end{pmatrix} = [0, p], \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ qy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ qy \end{pmatrix} = [0, q]. \end{aligned}$$

Os demais geradores de $RT(g, \mathbb{Z}_2)$ são obtidos da expressão $(D_{(x,y)}g)X$.

Temos que se $(D_{(x,y)}g)$ é a matriz jacobiana de $g(x, y, \lambda) = (p(u, v, \lambda), q(u, v, \lambda)y)$ nas variáveis x e y . Logo,

$$(D_{(x,y)}g)(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} p_u(u, v, \lambda) & 2p_v(u, v, \lambda) \\ q_u(u, v, \lambda)y & q(u, v, \lambda) + 2vq_v(u, v, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Observamos que X é um germe \mathbb{Z}_2 -equivariante e $X(0, 0, 0) = (0, 0)$. Assim, segue X pertence a $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$.

De $(D_{(x,y)}g)X$, obtemos os seguintes geradores:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_u(u, v, \lambda) & 2p_v(u, v, \lambda) \\ q_u(u, v, \lambda)y & q(u, v, \lambda) + 2vq_v(u, v, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} up_u \\ uq_u y \end{pmatrix} = [up_u, uq_u], \\ \begin{pmatrix} p_u(u, v, \lambda) & 2p_v(u, v, \lambda) \\ q_u(u, v, \lambda)y & q(u, v, \lambda) + 2vq_v(u, v, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} vp_u \\ vq_u y \end{pmatrix} = [vp_u, vq_u], \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} p_u(u, v, \lambda) & 2p_v(u, v, \lambda) \\ q_u(u, v, \lambda)y & q(u, v, \lambda) + 2vq_v(u, v, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p_u \\ \lambda q_u y \end{pmatrix} = [\lambda p_u, \lambda q_u],$$

$$\begin{pmatrix} p_u(u, v, \lambda) & 2p_v(u, v, \lambda) \\ q_u(u, v, \lambda)y & q(u, v, \lambda) + 2vq_v(u, v, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2vp_v \\ (q + 2vq_v)y \end{pmatrix} = [vp_v, vq_v].$$

Portanto, os geradores do espaço tangente restrito são

$$[p, 0], [vq, 0], [0, p], [0, q], [up_u, uq_u], [vp_u, vq_u], [\lambda p_u, \lambda q_u], [vp_v, vq_v]. \quad (3.13)$$

Teorema 3.4.1. Sejam $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ um problema de bifurcação e h um germe qualquer em $\vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$. Suponhamos que

$$RT(g + th, \mathbb{Z}_2) = RT(g, \mathbb{Z}_2) \quad (3.14)$$

para todo $t \in [0, 1]$. Então $g + th$ é fortemente \mathbb{Z}_2 -equivalente a g para todo $t \in [0, 1]$.

Demonstração. Ver [2], pág. 172. ■

No caso em que não há equivalência forte, ou seja, existe o difeomorfismo Λ atuando no parâmetro de bifurcação λ , o \mathbb{Z}_2 -espaço tangente de g , denotado por $T(g, \mathbb{Z}_2)$, é dado por

$$T(g, \mathbb{Z}_2) = \{Sg + (D_{(x,y)}g)X + g_\lambda \Lambda \mid S \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2), X \in \vec{\mathcal{M}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) \text{ e } \Lambda \in \mathcal{E}_\lambda\}, \quad (3.15)$$

e é um módulo sobre o sistema de anéis $\{\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2), \mathcal{E}_\lambda\}$.

Usando (3.9) e lembrando que Λ é um difeomorfismo em λ , podemos reescrever a expressão (3.15) da seguinte forma:

$$T(g, \mathbb{Z}_2) = RT(g, \mathbb{Z}_2) + \mathcal{E}_\lambda \langle g_\lambda \rangle = RT(g, \mathbb{Z}_2) + \mathcal{E}_\lambda \{[p_\lambda, q_\lambda]\}.$$

Quando a origem não é fixada, definimos o espaço tangente estendido

$$T_e(g, \mathbb{Z}_2) = \{Sg + (D_{(x,y)}g)X + g_\lambda \Lambda \mid S \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2), X \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) \text{ e } \Lambda \in \mathcal{E}_\lambda\}$$

que é um módulo sobre o sistema de anéis $\{\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2), \mathcal{E}_\lambda\}$ gerado por

$$[p, 0], [qv, 0], [0, p], [0, q], [p_u, q_u], [vp_v, vq_v], [p_\lambda, q_\lambda].$$

Definição 3.4.1. O espaço normal estendido é definido por

$$N_e(g, \mathbb{Z}_2) = \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) / T_e(g, \mathbb{Z}_2).$$

A \mathbb{Z}_2 -codimensão de um germe $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ é definida por

$$\text{cod}(g, \mathbb{Z}_2) = \dim_{\mathbb{R}} N_e(g, \mathbb{Z}_2).$$

O espaço tangente a $\mathcal{U}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ no seu elemento identidade, denominado espaço tangente unipotente, é definido por

$$T(\mathcal{U}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}) = \left\{ \frac{d}{dt} \mathcal{U}_t \Big|_{t=0} \mid \mathcal{U}_t \in \mathcal{U}_\lambda^{\mathbb{Z}_2} \text{ e } \mathcal{U}_0 = 1 \right\}, \quad (3.16)$$

onde

$$\mathcal{U}_t(x, y, \lambda) = (\tilde{S}_t(x, y, \lambda), \tilde{X}_t(x, y, \lambda), \tilde{\Lambda}_t(\lambda))$$

satisfaz

- i) $\tilde{S}_t(0, 0, 0)$ é unipotente, isto é, $\tilde{S}_t(0, 0, 0) = I + \hat{T}$, $(\hat{T})^n = 0$ e $\tilde{S}_0(x, y, \lambda) = I_2$.
- ii) $(D_{(x,y)} \tilde{X}_t)(0, 0, 0) = I + \hat{M}$, $(\hat{M})^m = 0$, $\tilde{X}_0(x, y, \lambda) = (x, y)$ e $\tilde{X}_t(0, 0, 0) = 0$.
- iii) $\tilde{\Lambda}_0(\lambda) = \lambda$, $(D_\lambda(\tilde{\Lambda}_t))(0) = 1$, $\tilde{\Lambda}_t(0) = 0$.

Fazemos $\hat{T} = \hat{M} = 0$.

Segue que

1. $\tilde{S}_t(x, y, \lambda) = I_2 + tS(x, y, \lambda) + o(t)$ onde $S(x, y, \lambda) = \frac{d}{dt} \tilde{S}_t(x, y, \lambda) \Big|_{t=0}$.
2. $\tilde{X}_t(x, y, \lambda) = (x, y) + tX(x, y, \lambda) + o(t)$ onde $X(x, y, \lambda) = \frac{d}{dt} \tilde{X}_t(x, y, \lambda) \Big|_{t=0}$.
3. $\tilde{\Lambda}_t(\lambda) = \lambda + t\Lambda(\lambda) + o(t)$ onde $\Lambda(\lambda) = \frac{d}{dt} \tilde{\Lambda}_t(\lambda) \Big|_{t=0}$.

Usando as condições (3.17), temos que $S \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$, $S(0, 0, 0) = 0$, $X \in \vec{\mathcal{M}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$, $(D_{(x,y)} X)(0, 0, 0) = 0$, $\Lambda \in \mathcal{M}_\lambda$ e $(D_\lambda \Lambda)(0) = 0$.

Portanto,

$$T(\mathcal{U}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}) = \{(S, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2} \mid S(0, 0, 0) = 0, X \in \vec{\mathcal{M}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2), (D_{(x,y)} X)(0, 0, 0) = 0, \Lambda'(0) = 0, \Lambda \in \mathcal{M}_\lambda\}. \quad (3.18)$$

Para $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$, o \mathbb{Z}_2 -espaço tangente unipotente à g , denotado $TU(g, \mathbb{Z}_2)$ é análogo ao descrito em (3.7) e, portanto, dado por

$$TU(g, \mathbb{Z}_2) = \{Sg + (D_{(x,y)} g)X + g_\lambda \Lambda \mid (S, X, \Lambda) \in T(\mathcal{U}_\lambda^{\mathbb{Z}_2})\}$$

Nosso objetivo agora é encontrar os geradores de $TU(g, \mathbb{Z}_2)$, onde $g = [p, q] \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$.

De (3.18) e fazendo os cálculos semelhantes ao que foi feito para o \mathbb{Z}_2 -espaço tangente restrito, segue que os geradores de $TU(g, \mathbb{Z}_2)$ são

$$\begin{aligned} & [up, 0], [vp, 0], [\lambda p, 0], [qv, 0], [0, p], [0, uq], [0, qv], [0, q\lambda], [u^2 p_u, u^2 q_u], [vp_u, vq_u], [\lambda^2 p_\lambda, \lambda^2 q_\lambda], \\ & [vup_v, vuq_v], [v^2 p_v, v^2 q_v], [\lambda v p_v, \lambda v q_v], [\lambda^2 p_\lambda, \lambda^2 q_\lambda]. \end{aligned}$$

3.5 Determinação Finita e o Problema do Reconhecimento

Para qualquer germe f , denotamos por $j^k f$ o polinômio de Taylor de f de ordem k ou k -jato de f .

Um germe $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ é $k - \mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ -determinado se para todo germe $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ com $j^k g = j^k f$ é $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ -equivalente a f .

Um germe é *finitamente* $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ -determinado se é $k - \mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ -determinado para algum inteiro k .

Existe uma relação entre um germe ser finitamente determinado e ter codimensão finita como mostra o teorema a seguir.

Teorema 3.5.1 (Teorema de Determinação Finita). Um germe $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ é finitamente $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ -determinado se, e somente se, tem $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbb{Z}_2}$ -codimensão finita.

Demonstração. Ver [12]. ■

O problema do reconhecimento trata de estabelecer quando um germe $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ é \mathbb{Z}_2 -equivalente a uma forma normal dada. Resolver o problema do reconhecimento significa estabelecer explicitamente um número finito de igualdades e desigualdades polinomiais a serem satisfeitas pelos coeficientes de Taylor dos elementos da classe das \mathbb{Z}_2 -equivalências. O Teorema (3.8.1) resolve o problema do reconhecimento para problemas de bifurcação \mathbb{Z}_2 -equivariantes em duas variáveis padrão e um parâmetro de bifurcação de codimensão menor ou igual a três.

3.6 Submódulos Intrínsecos e Termos de Ordem Alta

Definição 3.6.1. (a) Um ideal $I \subset \mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ é intrínseco se $f(X(x, y, \lambda)) \in I$ para todo $f \in I$ e toda mudança de coordenadas \mathbb{Z}_2 -equivariante $X(x, y, \lambda)$.

(b) Um submódulo $\vec{J} \subset \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ é *intrínseco* se ele é invariante por \mathbb{Z}_2 -equivalência, isto é, se $\phi(g) \in \vec{J}$, para todo $g \in \vec{J}$ e para toda \mathbb{Z}_2 -equivalência $\phi = (S, X, \Lambda)$.

Definição 3.6.2. Seja $V \subset \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$. Definimos a *parte intrínseca* de V , a qual denotamos por $\text{itr}(V)$, como sendo o maior submódulo intrínseco de $\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(\mathbb{Z}_2)$ contido em V .

Lema 3.6.1. 1. Somas e produtos dos $\mathcal{M}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$, $\langle \lambda \rangle_{\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)}$ e $\langle v \rangle_{\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)}$ em $\vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ são intrínsecos.

2. Para todo ideal intrínseco $I \subset \mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$, os submódulos $[I, I]$ e $[vI, I]$ são intrínsecos.

3. O submódulo $[I_1, I_2]$ é intrínseco se

- (a) I_1 e I_2 são ideais intrínsecos,
- (b) $I_1 \subset I_2$
- (c) $\langle v \rangle I_2 \subset I_1$.

Demonstração.

Seja $X = (A(u, v, \lambda), B(u, v, \lambda)y)$ com $A(0) > 0$, $A_u(0) > 0$ e $B(0) > 0$.

1. a) Mostremos que $\mathcal{M}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ é intrínseco. Para toda $f \in \mathcal{M}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$, seja $g(x, y, \lambda) = f(X(x, y, \lambda), \lambda)$. Temos $g(0, 0, 0) = f(0, 0, 0) = 0$ e

$$\begin{aligned} g(x, -y, \lambda) &= f(X(x, -y, \lambda), \lambda) = f(A(u, -v, \lambda), -B(u, v, \lambda), \lambda) \\ &= f(X(x, y, \lambda), \lambda) = g(x, y, \lambda). \end{aligned}$$

Portanto, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ é intrínseco.

- b) Mostremos que $\langle \lambda \rangle_{\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)}$. Seja $f \in \langle \lambda \rangle_{\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)}$. Então, $f(x, y, \lambda) = h(x, y, \lambda)\lambda$, onde $h \in \mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$.

Como não há simetrias em λ segue que $f(X(x, y, \lambda)) \in \mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ e pertence ao ideal $\langle \lambda \rangle_{\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)}$.

Portanto, $\langle \lambda \rangle_{\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)}$ é intrínseco.

- c) Mostremos que o ideal $\langle v \rangle_{\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)}$ é intrínseco.

Como $v = y^2$, temos que se $g(x, y, \lambda) = h(x, y, \lambda)v$, então

$$\begin{aligned} u \circ X &= A(u, v, \lambda) \\ u \circ X &= B(u, v, \lambda)^2 v \end{aligned}$$

Seja $f \in \langle v \rangle_{\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)}$. Então, $f(x, y, \lambda)h(x, y, \lambda)v$, $h \in \mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$. Assim,

$$f(X(x, y, \lambda), \lambda) = h(A(u, v, \lambda), B(u, v, \lambda)y, \lambda)B(u, v, \lambda)^2 v$$

Dessa forma, $f(X(x, y, \lambda), \lambda) \in \langle v \rangle_{\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)}$ e $f(X(x, -y, \lambda), \lambda) = f(X(x, y, \lambda), \lambda)$ e, portanto, $f(X, \lambda) \in \mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$.

Portanto, o ideal $\langle v \rangle$ é intrínseco.

2. Toda \mathbb{Z}_2 -equivalência tem a forma $g \longrightarrow S \circ (X, \lambda)$. Então, para mostrar que J é intrínseco, basta mostrar que ele é invariante pelas transformações,

$$\begin{aligned} (a) \quad g &\longmapsto g \circ (X, \lambda) \\ (b) \quad g &\longmapsto Sg. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Seja $g = (p, qy) = [p, q]$ e $X = [a, b]$, então

$$g \circ (X, \Lambda) = (p(X, \Lambda), q(X, \Lambda)b) \quad (3.20)$$

A forma geral de uma matriz $S \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ é

$$S = C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $C, D, E, F \in \mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$, $C(0) > 0$ e $F(0) > 0$.

Assim,

$$S[p, q] = \begin{pmatrix} C & Dy \\ Ey & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ qy \end{pmatrix} = [Cp + Dqv, Ep + Fq].$$

Mostremos que $[I, I]$ é invariante pelas transformações (3.19) e, portanto, intrínseco quando I é intrínseco.

De fato, se $g \in [I, I]$, então $p \in I$ e $q \in I$. Então, $p \sim p(X, \Lambda)$ e como I é intrínseco segue que $p(X, \Lambda) \in I$. Analogamente, temos que $yq(X, \Lambda) \in I$. Logo, $[p(X, \Lambda), q(X, \Lambda)] \in [I, I]$.

Resta mostrar que $[I, I]$, é invariante pela transformação (3.19-b). De fato, como $p \in I$ e $C(0) > 0$, temos que $Cp \in I$. Da mesma forma, podemos concluir que $Fq \in I$. Observemos que I é ideal sobre $\mathcal{E}_{x,y,\lambda}(\mathbb{Z}_2)$ e $D, E, v \in \mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$. Logo, Dqv e Ep pertencem a I . Segue que $[Cp + Dqv, Fq + Ep] \in [I, I]$. Portanto, $[I, I]$ é intrínseco.

De maneira análoga, podemos mostrar que $[vI, I]$ é intrínseco.

3. Seja $\mathcal{J} = [I_1, I_2]$ um submódulo intrínseco de $\vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$.

a) Se $p \in I_1$, então $[p, 0] \in \mathcal{J}$. Como \mathcal{J} é intrínseco, então $[p(X, \Lambda), 0] \in \mathcal{J}$, logo $p(X, \Lambda) \in I_1$. Portanto, I_1 é intrínseco. De forma similar, mostramos que I_2 é intrínseco.

b) Seja $p \in I_1$ e suponhamos $[p, q] \in I$. Então,

$$S[p, q] = [Cp + Dqv, Ep + Fq] \in [I_1, I_2].$$

Logo, $Ep + Fq \in I_2$ e como $Fq \in I_2$, segue que $Ep \in I_2$, para todo $E \in \mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$.

Em particular, para $E = I_d$, $p \in I_2$. Portanto, $I_1 \subset I_2$.

- c) Seja $[p, q] \in [I_1, I_2]$, então $S[p, q] = [Cp + Dqv, Ep + Fq] \in [I_1, I_2]$. Logo, $Cp + Dqv \in I_1, Dqv \in I_1$. Como D é um germe qualquer \mathbb{Z}_2 -invariante, segue que $\langle v \rangle I_2 \subset I_1$. ■

O conjunto *dos termos de ordem alta* de um germe é dado por

$$\wp(g, \mathbb{Z}_2) = \{p \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) \mid h \pm p \sim g, \forall h \sim g\} \quad (3.21)$$

onde \sim denota \mathbb{Z}_2 -equivalência.

Proposição 3.6.1. Para cada $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$, o conjunto $\wp(g, \mathbb{Z}_2)$ é um submódulo intrínscico de $\vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$.

Demonstração. Ver [2], pág. 205. ■

Teorema 3.6.1. Seja $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ de \mathbb{Z}_2 -codimensão finita. Então,

$$itrTU(g, \mathbb{Z}_2) \subset \wp(g, \mathbb{Z}_2)$$

Demonstração. Ver [8], pág. 108. ■

Corolário 3.6.1. Seja $p \in itrTU(g, \mathbb{Z}_2)$. Então, $g + p$ é \mathbb{Z}_2 -equivalente a g . ■

3.7 Teoria do Desdobramento \mathbb{Z}_2 -Equivariante

Seja $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ um problema de bifurcação. A aplicação $G : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é um \mathbb{Z}_2 -desdobramento com k parâmetros $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ se $G(x, y, \lambda, 0) = g(x, y, \lambda)$ e $G(x, -y, \lambda, 0) = -G(x, y, \lambda)$.

Definição 3.7.1. *i)* Sejam $H(x, y, \lambda, \beta)$ e $G(x, y, \lambda, \alpha)$ desdobramentos \mathbb{Z}_2 -equivariantes de g com l e k parâmetros, respectivamente. Dizemos que H fatora-se através de G se

$$H(x, y, \lambda, \beta) = S(x, y, \lambda, \beta) G(X(x, y, \lambda, \beta), \Lambda(\lambda, \beta), A(\beta)) \quad (3.22)$$

onde $S(x, y, \lambda, 0) = I$, $X(x, y, \lambda, 0) = (x, y)$, $S \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$, $\Lambda(\lambda, 0) = \lambda$, $A(0) = 0$ e $X \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$.

- ii)* Um \mathbb{Z}_2 -desdobramento G de g é versal se todo \mathbb{Z}_2 -desdobramento H de g fatora-se através de G .

iii) Um \mathbb{Z}_2 -desdobramento versal G de g é miniversal se G possui um número mínimo de parâmetros.

Teorema 3.7.1 (Teorema do Desdobramento Miniversal \mathbb{Z}_2 -equivariante). Seja $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ um problema de bifurcação e $G \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda,\alpha)}(\mathbb{Z}_2)$ um desdobramento com k parâmetros de g . Então G é versal se, e somente se,

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) = T_e(g, \mathbb{Z}_2) + \mathbb{R} \cdot \{G_{\alpha_1}(x, y, \lambda, 0), \dots, G_{\alpha_k}(x, y, \lambda, 0)\}.$$

Demonstração. Ver [2], pág. 233. ■

Corolário 3.7.1. Sejam $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ e $W \subset \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$ um subespaço vetorial real tal que

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) = T_e(g, \mathbb{Z}_2) \oplus W.$$

Sejam $p_1(x, y, \lambda), \dots, p_k(x, y, \lambda)$ uma base para W . Então,

$$G(x, y, \lambda, \alpha) = g(x, y, \lambda) + \sum_{j=1}^k \alpha_j p_j(x, y, \lambda) \quad (3.23)$$

é um desdobramento miniversal de g .

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 3.7.1. ■

Observamos que o número mínimo de parâmetros no desdobramento (3.23) é a \mathbb{Z}_2 -codimensão de um germe \mathbb{Z}_2 -equivariante definida anteriormente.

3.8 O Teorema de Classificação

No Teorema de classificação a seguir, todas as derivadas são calculadas na origem e $\epsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, 4$, são os sinais das respectivas derivadas citadas na tabela.

Teorema 3.8.1. (Teorema de Classificação) *Seja $g(x, y) = (p(u, v, \lambda), q(u, v, \lambda)y)$ um problema de bifurcação \mathbb{Z}_2 -equivariante. Se a \mathbb{Z}_2 -codimensão de g é menor ou igual a três, então g é \mathbb{Z}_2 -equivalente a uma das formas normais dadas na tabela abaixo se, e somente se, g satisfaz as respectivas condições das tabelas (3.1) e (3.2).*

Forma Normal	Condições de Definição
$h_1 = [\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda, \epsilon_4 u]$	—
$h_2 = [\epsilon_1 u^3 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda, \epsilon_4 u]$	$p_{uu} = 0$
$h_3 = [\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v^2 + \epsilon_3 \lambda, \epsilon_4 u]$	$p_v = 0$
$h_4 = [\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + m\lambda^2, \epsilon_3 u + \epsilon_4 \lambda], m \neq 0, -\epsilon_1$	$p_\lambda = 0$
$h_5 = [\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda, mu^2 + \epsilon_4 v], m \neq 0, \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_4$	$q_u = 0$

Tabela 3.1: Condições de Definição

Forma Normal	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	Parâmetro Modal
h_1	p_{uu}	p_v	p_λ	q_u	—
h_2	p_{uuu}	p_v	p_λ	q_u	—
h_3	p_{uu}	$p_{vv}q_u^2 - 2p_{uv}q_uq_v + p_{uu}q_v^2$	p_λ	q_u	—
h_4	p_{uu}	p_v	q_u	$\epsilon_1 \text{ sinal}(q_\lambda p_{uu} - q_u p_{u\lambda})$	$m = \epsilon_1 \frac{[p_{uu}p_{\lambda\lambda} - p_{u\lambda}^2]q_u^2}{[q_\lambda p_{uu} - q_u p_{u\lambda}]^2}$
h_5	p_{uu}	p_v	p_λ	$\epsilon_3 \text{ sinal}(q_v p_\lambda - q_\lambda p_v)$	$m = \epsilon_3 \frac{ p_v (q_{uu}p_\lambda - q_\lambda p_{uu})}{ p_{uu} q_v p_\lambda - q_\lambda p_v }$

Tabela 3.2: Condições de Definição

A \mathbb{Z}_2 -codimensão de cada germe e seu respectivo desdobramento miniversal estão na tabela (3.3).

Forma Normal	Desdobramento	Codimensão
h_1	$[\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda, \epsilon_4 u + \alpha]$	1
h_2	$[\epsilon_1 u^3 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda + \beta u, \epsilon_4 u + \alpha]$	2
h_3	$[\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v^2 + \epsilon_3 \lambda + \beta v, \epsilon_4 u + \alpha]$	2
h_4	$[\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \mu\lambda^2 + \beta, \epsilon_3 u + \epsilon_4 \lambda + \alpha]$	3
h_5	$[\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda, mu^2 + \beta u + \epsilon_4 v + \alpha]$	3

Tabela 3.3: Desdobramentos Miniversais

Demonstração.

Seja $g(x, y) = (p(u, v, \lambda), q(u, v, \lambda)y)$ um problema de bifurcação \mathbb{Z}_2 -equivariante, isto é, g é \mathbb{Z}_2 -equivariante, $g(0, 0, 0) = (0, 0)$ e $(D_x g)(0, 0, 0) = 0$. Da condição $(D_x g)(0, 0, 0) = 0$, segue que $p_u(0, 0, 0) = 0$. Para encontrar um germe f \mathbb{Z}_2 -equivalente a g consideramos uma

\mathbb{Z}_2 -equivalência genérica $f = Sg \circ (X, \Lambda)$.

Podemos estudar a \mathbb{Z}_2 -equivalência em duas etapas

$$f' = g \circ (X, \Lambda) \quad (3.24)$$

e, em seguida,

$$f = Sf' \quad (3.25)$$

onde S , X , Λ são dadas de acordo com a definição de \mathbb{Z}_2 -equivalência.

Segue de (3.24) que se $f' = [p', q']$ e $X(x, y, \lambda) = (a(u, v, \lambda), b(u, v, \lambda)y)$, temos

$$\begin{aligned} p'(u, v, \lambda) &= p(a(u, v, \lambda), b^2(u, v, \lambda)v, \Lambda(\lambda)) \\ q'(u, v, \lambda) &= q(a(u, v, \lambda), b^2(u, v, \lambda)v, \Lambda(\lambda))b(u, v, \lambda). \end{aligned}$$

Para facilitar as nossas contas, podemos escrever

$$\begin{aligned} p' &= \tilde{p}, & \text{com } \tilde{p}(u, v, \lambda) &= p(a(u, v, \lambda), b^2(u, v, \lambda)v, \Lambda(\lambda)) \\ q' &= \tilde{q}b, & \text{com } \tilde{q}(u, v, \lambda) &= q(a(u, v, \lambda), b^2(u, v, \lambda)v, \Lambda(\lambda)). \end{aligned}$$

Fazendo o desenvolvimento de Taylor até a terceira ordem de p' em torno da origem e igualando ao desenvolvimento de Taylor de \tilde{p} , obtemos:

- $p'_0 = 0$;
- $p'_u = 0$;
- $p'_v = p_v b_0^2$;
- $p'_\lambda = p_\lambda \Lambda'$;
- $p'_{uu} = a_u^2 p_{uu}$;
- $p'_{vv} = b_0^4 p_{vv} + 4p_v b_0 b_v + 2a_v p_{uv} b_0^2 + a_v^2 p_{uu}$;
- $p'_{\lambda\lambda} = \Lambda'^2 p_{\lambda\lambda} + p_\lambda \Lambda'' + 2a_\lambda p_{u\lambda} \Lambda' + a_\lambda^2 p_{uu}$;
- $p'_{uv} = a_u p_{uu} a_v + a_u p_{uv} b_0^2 + 2p_v b_0 b_u$;
- $p'_{u\lambda} = a_u p_{u\lambda} \Lambda' + a_u p_{uu} a_\lambda$;

- $p'_{v\lambda} = 2p_v b_0 b_\lambda + a_\lambda p_{uv} b_0^2 + a_v p_{u\lambda} \Lambda' + a_v p_{uu} a_\lambda + b_0^2 p_{v\lambda} \Lambda'$
- $p'_{uuu} = 3a_{uu} p_{uu} a_u + a_u^3 p_{uuu};$
- $p'_{vvv} = 12a_v p_{uv} b_0 b_v + 6p_v b_0 b_{vv} + 3b_0^4 p_{uvv} a_v + 6p_v b_v^2 + b_0^6 p_{vvv} + a_v^3 p_{uuu} + 3p_{uv} b_0^2 a_{vv} + 12b_0^3 b_v p_{vv} + 3a_v^2 p_{uuv} b_0^2 + 3a_{vv} p_{uu} a_v;$
- $p'_{\lambda\lambda\lambda} = \Lambda'^3 p_{\lambda\lambda\lambda} + 3\Lambda' p_{\lambda\lambda} \Lambda'' + 3a_{\lambda\lambda} p_{u\lambda} \Lambda' + 3a_\lambda p_{u\lambda} \Lambda'' + 3a_{\lambda\lambda} p_{uu} a_\lambda + p_\lambda \Lambda''' + 3\Lambda'^2 p_{u\lambda\lambda} a_\lambda + 3a_\lambda^2 p_{uu\lambda} \Lambda' + a_\lambda^3 p_{uuu};$
- $p'_{uuv} = a_u^2 p_{uuv} b_0^2 + a_u^2 p_{uuu} a_v + 2p_v b_u^2 + a_{uu} p_{uv} b_0^2 + 2p_v b_0 b_{uu} + 4a_u p_{uv} b_0 b_u + 2a_{uv} p_{uu} a_u + a_{uu} p_{uu} a_v;$
- $p'_{uu\lambda} = 2a_{u\lambda} p_{uu} a_u + a_{uu} p_{uu} a_\lambda + a_u^2 p_{uu\lambda} \Lambda' + a_u^2 p_{uuu} a_\lambda + a_{uu} p_{u\lambda} \Lambda';$
- $p'_{uv\lambda} = 2p_v b_u b_\lambda + 2a_u p_{uv} b_0 b_\lambda + a_u p_{uu} a_{v\lambda} + 2p_v b^0 b_{u\lambda} + a_u \Lambda' p_{uv\lambda} b_0^2 + a_u a_v p_{uuu} a_\lambda + 2a_\lambda p_{uv} b_0 b_u + a_u a_v p_{uu\lambda} \Lambda' + p_{uu} a_v a_{u\lambda} + a_{u\lambda} p_{uv} b_0^2 + p_{u\lambda} \Lambda' a_{uv} + a_\lambda b_0^2 p_{uuu} a_u + 2b_0 b_u p_{v\lambda} \Lambda' + p_{uu} a_\lambda a_{uv};$
- $p'_{uvv} = 4a_v p_{uv} b_0 b_u + 4a_u p_{uv} b_0 b_v + 4b_0^3 b_u p_{vv} + b_0^4 p_{uvv} a_u + 2a_u a_v p_{uuu} b_0^2 + 2p_{uv} b_0^2 a_{vv} + a_{vv} p_{uu} a_u + a_u a_v^2 p_{uuu} + 4p_v b_0 b_{uv} + 4p_v b_u b_v + 2p_{uu} a_v a_{uv};$
- $p'_{u\lambda\lambda} = a_u p_{u\lambda} \Lambda'' + \Lambda'^2 p_{u\lambda\lambda} a_u + 2a_u \Lambda' p_{uu\lambda} a_\lambda + 2p_{u\lambda} \Lambda' a_{u\lambda} + 2a_{u\lambda} p_{uu} a_\lambda + a_{\lambda\lambda} p_{uu} a_u + a_\lambda^2 p_{uuu} a_u;$
- $p'_{vv\lambda} = 4a_\lambda p_{uv} b_0 b_v + b_0^4 p_{vv\lambda} \Lambda' + 4b_0^3 b_\lambda p_{vv} + 2a_v p_{uu} a_{v\lambda} + 4a_v p_{uv} b_0 b_\lambda + 4p_v b_v b_\lambda + a_v^2 p_{uuu} a_\lambda + a_v^2 p_{uu\lambda} \Lambda' + 2a_v b_0^2 p_{uuv} a_\lambda + a_{vv} p_{uu} a_\lambda + 2p_{uv} b_0^2 a_{v\lambda} + b_0^4 p_{uvv} a_l + 4p_v b_0 b_{v\lambda} + 4b_0 b_v p_{v\lambda} \Lambda' + a_{vv} p_{u\lambda} \Lambda' + 2b_0^2 \Lambda' p_{uv\lambda} a_v;$
- $p'_{v\lambda\lambda} = a_v p_{u\lambda} \Lambda'' + 2p_v b_\lambda^2 + b_0^2 p_{v\lambda} \Lambda'' + \Lambda'^2 p_{u\lambda\lambda} a_v + a_{\lambda\lambda} p_{uu} a_v + 2p_{u\lambda} \Lambda' a_{v\lambda} + a_\lambda^2 p_{uuu} b_0^2 + 2b_0^2 \Lambda' p_{uv\lambda} a_\lambda + 4b_0 b_\lambda p_{v\lambda} \Lambda' + 2p_v b_0 b_{\lambda\lambda} + a_\lambda^2 p_{uuu} a_v + \Lambda'^2 p_{v\lambda\lambda} b_0^2 + 4a_\lambda p_{uv} b_0 b_\lambda + 2a_v a_\lambda p_{uu\lambda} \Lambda' + 2p_{uu} a_\lambda a_{v\lambda} + a_{\lambda\lambda} p_{uv} b_0^2;$

Analogamente para q'

- $q'_0 = 0;$
- $q'_u = q_u a_u b_0;$
- $q'_v = b_0 q_u a_v + b_0^3 q_v;$
- $q'_\lambda = b_0 q_\lambda \Lambda' + b_0 q_u a_\lambda;$
- $q'_{uu} = 2q_u a_u b_u + b_0 a_u^2 q_{uu} + b_0 q_u a_{uu};$
- $q'_{vv} = b_0 a_v^2 q_{uu} + b_0 q_u a_{vv} + 2a_v q_{uv} b_0^3 + b_0^5 q_{vv} + 6q_v b_0^2 b_v + 2b_v q_u a_v;$

- $q'_{\lambda\lambda} = 2b_{\lambda}q_{\lambda}\Lambda' + 2b_{\lambda}q_u a_{\lambda} + b_0 a_{\lambda}^2 q_{uu} + b_0 q_u a_{\lambda\lambda} + 2b_0 a_{\lambda} q_{u\lambda}\Lambda' + b_0 \Lambda'^2 q_{\lambda\lambda} + b_0 q_{\lambda}\Lambda'';$
- $q'_{uv} = b_u q_u a_v + 3b_u q_v b_0^2 + q_u a_u b_v + b_0 a_u q_{uu} a_v + a_u q_{uv} b_0^3 + b_0 q_u a_{uv};$
- $q'_{u\lambda} = b_u q_{\lambda}\Lambda' + b_u q_u a_{\lambda} + q_u a_u b_{\lambda} + b_0 a_u q_{uu} a_{\lambda} + b_0 q_u a_{u\lambda} + b_0 a_u q_{u\lambda}\Lambda';$
- $q'_{v\lambda} = a_{\lambda} q_{uv} b_0^3 + b_0 a_v q_{uu} a_{\lambda} + b_0 q_u a_{v\lambda} + 3q_v b_0^2 b_{\lambda} + b_0 a_v q_{u\lambda}\Lambda' + b_0^3 q_{v\lambda}\Lambda' + b_v q_{\lambda}\Lambda' + b_v q_u a_{\lambda} + b_{\lambda} q_u a_v;$
- $q'_{uuu} = b_0 q_u a_{uuu} + b_0 a_u^3 q_{uuu} + 3b_0 a_{uu} q_{uu} a_u + 3q_u a_u b_{uu} + 3b_u a_u^2 q_{uu} + 3b_u q_u a_{uu};$
- $q'_{vvv} = 3b_0^5 q_{uvv} a_v + 3a_{vv} q_{uv} b_0^3 + 3b_0 a_{vv} q_{uu} a_v + b_0^7 q_{vvv} + 18a_v q_{uv} b_0^2 b_v + 15b_0^4 b_v q_{vv} + 3a_v^2 q_{uuu} b_0^3 + b_0 q_u a_{vvv} + b_0 a_v^3 q_{uuu} + 9q_v b_0^2 b_{vv} + 18b_0 q_v b_v^2 + 3b_{vv} q_u a_v + 3b_v a_v^2 q_{uu} + 3b_v q_u a_{vv};$
- $q'_{\lambda\lambda\lambda} = 3b_0 a_{\lambda\lambda} q_{uu} a_{\lambda} + b_0 q_u a_{\lambda\lambda\lambda} + b_0 \Lambda'^3 q_{\lambda\lambda\lambda} + 3b_0 a_{\lambda} q_{u\lambda}\Lambda'' + 3b_0 a_{\lambda}^2 \Lambda' q_{uu\lambda} + 3b_0 \Lambda^2 q_{u\lambda\lambda} a_{\lambda} + 3b_0 a_{\lambda\lambda} q_{u\lambda}\Lambda' + 3b_0 \Lambda' q_{\lambda\lambda}\Lambda'' + b_0 a_{\lambda}^3 q_{uuu} + b_0 q_{\lambda}\Lambda''' + 3b_{\lambda\lambda} q_{\lambda}\Lambda' + 3b_{\lambda\lambda} q_u a_{\lambda} + 3b_{\lambda} a_{\lambda}^2 q_{uu} + 3b_{\lambda} q_u a_{\lambda\lambda} + 6b_{\lambda} a_{\lambda} q_{u\lambda}\Lambda' + 3b_{\lambda}\Lambda''^2 q_{\lambda\lambda} + 3b_{\lambda} q_{\lambda}\Lambda'';$
- $q'_{uuu} = b_0 a_{uu} q_{uu} a_v + y b_0 a_u^2 q_{uuu} a_v + 2b_0 a_u q_{uu} a_{uv} + 6b_0 q_v b_u^2 + a_{uu} q_{uv} b_0^3 + b_0 q_u a_{uuu} + a_u^2 q_{uuu} b_0^3 + 6a_u q_{uv} b_0^2 b_u + 3q_v b_0^2 b_{uu} + b_{uu} q_u a_v + 2q_u a_u b_{uv} + 2b_u a_u q_{uu} a_v + 2b_u q_u a_{uv} + b_v a_u^2 q_{uu} + b_v q_u a_{uu};$
- $q'_{uu\lambda} = b_0 a_u^2 q_{uuu} a_{\lambda} + b_0 a_{uu} q_{u\lambda}\Lambda' + 2b_0 a_u q_{uu} a_{u\lambda} + b_0 a_{uu} q_{uu} a_{\lambda} + b_0 a_u^2 q_{uu\lambda}\Lambda' + b_0 q_u a_{uu\lambda} + b_{uu} q_{\lambda}\Lambda' + y b_{uu} q_u a_{\lambda} + 2q_u a_u b_{u\lambda} + 2b_u a_u q_{uu} a_{\lambda} + 2b_u q_u a_{u\lambda} + 2b_u a_u q_{u\lambda}\Lambda' + b_{\lambda} a_u^2 q_{uu} + b_{\lambda} q_u a_{uu};$
- $q'_{uv\lambda} = b_{uv} q_{\lambda}\Lambda' + q_u a_u b_{v\lambda} + b_{u\lambda} q_u a_v + b_{uv} q_u a_{\lambda} + q_{uv} b_0^3 a_{u\lambda} + b_0 q_u a_{uv\lambda} + b_u q_u a_{v\lambda} + b_v q_u a_{u\lambda} + y b_{\lambda} q_u a_{uv} + 3b_{u\lambda} q_v b_0^2 + 6b_0 q_v b_u b_{\lambda} + 3a_u q_{uv} b_0^2 b_{\lambda} + 3b_0^2 b_u q_{v\lambda}\Lambda' + 3a_{\lambda} q_{uv} b_0^2 b_u + a_u b_0^3 q_{uuu} a_{\lambda} + a_u \Lambda' q_{uv\lambda} b_0^3 + q_{uu} a_v a_{u\lambda} + b_0 q_{u\lambda}\Lambda' a_{uv} + b_0 q_{uu} a_{\lambda} a_{uv} + b_v a_u q_{uu} a_{\lambda} + b_v a_u q_{u\lambda}\Lambda' + b_{\lambda} a_u q_{uu} a_v + b_0 a_u a_v q_{uuu} a_{\lambda} + b_0 a_u \Lambda' q_{uu\lambda} a_v + b_0 a_u q_{uu} a_{v\lambda} + b_u a_v q_{uu} a_{\lambda} + b_u a_v q_{u\lambda}\Lambda';$
- $q'_{uvv} = q_u a_u b_{vv} + 6a_v q_{uv} b_0^2 b_u + 6a_u q_{uv} b_0^2 b_v + 2q_{uv} b_0^3 a_{uv} + b_0 q_u a_{uvv} + b_0^5 q_{uvv} a_u + 2b_0 q_{uu} a_v a_{uv} + 6q_v b_0^2 b_{vv} + 12b_0 q_v b_u b_v + b_0 a_u a_v^2 q_{uuu} + 2a_u b_0^3 q_{uuu} a_v + 5b_0^4 b_u q_{vv} + b_0 a_{vv} q_{uu} a_u + b_u a_v^2 q_{uu} + b_u q_u a_{vv} + 2b_{uv} q_u a_v + 2b_v a_u q_{uu} a_v + 2b_v q_u a_{uv};$
- $q'_{u\lambda\lambda} = q_u a_u b_{\lambda\lambda} + 2b_{\lambda} a_u q_{uu} a_{\lambda} + 2b_{\lambda} q_u a_{u\lambda} + 2b_{\lambda} a_u q_{u\lambda}\Lambda' + b_0 a_{\lambda\lambda} q_{uu} a_u + b_0 a_u a_{\lambda}^2 q_{uuu} + 2b_0 a_u \Lambda' q_{uu\lambda} a_{\lambda} + b_0 a_u q_{u\lambda}\Lambda'' + b_0 q_u a_{u\lambda\lambda} + b_0 \Lambda'^2 q_{u\lambda\lambda} a_u + 2b_0 q_{u\lambda}\Lambda' a_{u\lambda} + 2b_0 q_{uu} a_{\lambda} a_{u\lambda} + b_u a_{\lambda}^2 q_{uu} + b_u q_u a_{\lambda\lambda} + 2b_u a_{\lambda} q_{u\lambda}\Lambda' + b_u \Lambda'^2 q_{\lambda\lambda} + b_u q_{\lambda}\Lambda'' + 2b_{u\lambda} q_{\lambda}\Lambda' + 2b_{u\lambda} q_u a_{\lambda};$
- $q'_{vv\lambda} = 6b_0^2 b_v q_{v\lambda}\Lambda' + b_0^5 q_{vv\lambda}\Lambda' + b_{\lambda} q_u a_{vv} + b_0 q_u a_{vv\lambda} + b_{vv} q_u a_{\lambda} + b_{\lambda} a_v^2 q_{uu} + b_0^5 q_{uvv} a_{\lambda} + b_{vv} q_{\lambda}\Lambda' + 2b_{v\lambda} q_u a_v + 2b_v q_u a_{v\lambda} + 2q_{uv} b_0^3 a_{v\lambda} + 6q_v b_0^2 b_{v\lambda} + 5b_0^4 b_{\lambda} q_{vv} + 2a_v a_{\lambda} q_{uuu} b_0^3 + b_0 a_v^2 a_{\lambda} q_{uuu} + b_0 a_{vv} q_{uu} a_{\lambda} + b_0 a_v^2 \Lambda' q_{uu\lambda} + b_0 a_{vv} q_{u\lambda}\Lambda' + 6a_v q_{uv} b_0^2 b_{\lambda} + 2b_0^3 \Lambda' q_{vv\lambda} a_v + 2b_0 a_{v\lambda} q_{uu} a_v + 6a_{\lambda} q_{uv} b_0^2 b_v + 2b_v a_v q_{uu} a_{\lambda} + 2b_v a_v q_{u\lambda}\Lambda' + 12b_0 q_v b_v b_{\lambda};$

- $q'_{v\lambda\lambda} = a_{\lambda\lambda}q_{uv}b_0^3 + b_0q_u a_{v\lambda\lambda} + b_v q_\lambda \Lambda'' + b_v a_\lambda^2 q_{uu} + b_v q_u a_{\lambda\lambda} + b_v \Lambda'^2 q_{\lambda\lambda} + b_0^3 q_{v\lambda} \Lambda'' + a_\lambda^2 b_0^3 q_{uu} + \Lambda'^2 q_{v\lambda\lambda} b_0^3 + b_{\lambda\lambda} q_u a_v + 2b_\lambda q_u a_{v\lambda} + 6b_0 q_v b_\lambda^2 + 2b_{v\lambda} q_u a_\lambda + 2b_{v\lambda} q_\lambda \Lambda' + 3q_v b_0^2 b_{\lambda\lambda} + 6a_\lambda q_{uv} b_0^2 b_\lambda + 6b_0^2 b_\lambda q_{v\lambda} \Lambda' + 2b_0 a_v a_\lambda q_{uu\lambda} \Lambda' + 2b_0 q_{u\lambda} \Lambda' a_{v\lambda} + 2b_0 q_{uu} a_\lambda a_{v\lambda} + 2b_\lambda a_v q_{uu} a_\lambda + 2b_0^3 \Lambda' q_{uv\lambda} a_\lambda + b_0 a_v a_\lambda^2 q_{uuu} + b_0 a_v q_{u\lambda} \Lambda'' + b_0 \Lambda'^2 q_{u\lambda\lambda} a_v + b_0 a_{\lambda\lambda} q_{uu} a_v + 2b_v a_\lambda q_{u\lambda} \Lambda' + 2b_\lambda a_v q_{u\lambda} \Lambda'$;

Assim, para obtermos o produto final se $f = [p'', q'']$, equivalente a g resta multiplicar a expressão $f' = [p', q']$ por $\begin{pmatrix} s_1 & s_2 y \\ s_3 y & s_4 \end{pmatrix}$, com s_1, s_2, s_3, s_4 pertencentes a $\mathcal{E}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2)$, ou seja,

$$f = S f' = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 y \\ s_3 y & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ q' y \end{pmatrix} = s_1 [p', 0] + s_2 [q' v, 0] + s_3 [0, p'] + s_4 [0, q']$$

Logo, $f = [p'', q'']$ onde

$$p'' = s_1 p' + s_2 q' v \quad (3.26)$$

e

$$q'' = s_3 p' + s_4 q'. \quad (3.27)$$

Podemos escrever o desenvolvimento de Taylor das funções s_i , $i = 1, \dots, 4$ do seguinte modo

$$s_i = s_i^0 + s_{iu} u + s_{iv} v + s_{i\lambda} \lambda + \dots, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Novamente fazendo o desenvolvimento de Taylor até a terceira ordem, em torno da origem, em ambos os membros das expressões(3.26) e (3.27), obtemos

- $p_0 = 0$;
- $p''_u = s_1^0 p'_u$;
- $p''_v = s_1^0 p'_v$;
- $p''_\lambda = s_1^0 p'_\lambda$;
- $p''_{uu} = 2s_{1u} p'_u + s_1^0 p'_{uu}$;
- $p''_{vv} = s_1^0 p'_{vv} + 2s_2^0 q'_v + 2s_{1v} p'_v$;
- $p''_{\lambda\lambda} = s_1^0 p'_{\lambda\lambda} + 2s_{1\lambda} p'_\lambda$;
- $q''_{uuu} = 3s_{1u} p'_{uu} + 3s_{1uu} p'_u + s_1^0 p'_{uuu}$;
- $p''_{vvv} = s_1^0 p'_{vv} + 2s_2^0 q'_v + 2s_{1v} p'_v$;

- $p''_{\lambda\lambda\lambda} = s_1^0 p'_{\lambda\lambda\lambda} + 3s_{1\lambda\lambda} p'_\lambda + 3s_{1\lambda} p'_{\lambda\lambda}$;
- $p''_{uuu} = s_1^0 p'_{uuu} + s_{1u} p'_{uu} + 2s_{1u} p'_{uv} + 2s_{1uv} p'_u + s_{1uu} p'_v + 2s_{2u} q'_u + s_2^0 q'_{uu}$;
- $p''_{uu\lambda} = s_1^0 p'_{uu\lambda} + s_{1\lambda} p'_{uu} + 2s_{1u} p'_{u\lambda} + 2s_{1u\lambda} p'_u + s_{1uu} p'_\lambda$;
- $p''_{uv\lambda} = s_1^0 p'_{uv\lambda} + s_{1\lambda} p'_{uv} + s_{1v} p'_{u\lambda} + s_2^0 q'_{u\lambda} + s_{2\lambda} q'_u + s_{2u} q'_\lambda + s_{1u} p'_{v\lambda} + s_{1u\lambda} p'_v + s_{1uv} p'_\lambda + s_{1v\lambda} p'_u$;
- $p''_{uvv} = s_{1u} p'_{vv} + s_{1v} p'_u + s_1^0 p'_{uvv} + 2s_{1v} p'_{uv} + 2s_{1uv} p'_v + 2s_2^0 q'_{uv} + 2s_{2v} q'_u + 2s_{2u} q'_v$;
- $p''_{u\lambda\lambda} = s_1^0 p'_{u\lambda\lambda} + s_{1u} p'_{\lambda\lambda} + 2s_{1\lambda} p'_\lambda + s_{1\lambda\lambda} p'_u + 2s_{1\lambda} p'_{u\lambda}$;
- $p''_{vv\lambda} = 2s_2^0 q'_{v\lambda} + 2s_{2\lambda} q'_v + 2s_{2v} q'_\lambda + s_{1\lambda} p'_{vv} + 2s_{1v} p'_{v\lambda} + s_1^0 p'_{vv\lambda} + 2s_{1v\lambda} p'_v + s_{1vv} p'_\lambda$;
- $p''_{v\lambda\lambda} = s_1^0 p'_{v\lambda\lambda} + s_2^0 q'_{\lambda\lambda} + 2s_{2\lambda} q'_\lambda + s_{1\lambda\lambda} p'_v + 2s_{1v\lambda} p'_\lambda + 2s_{1\lambda} p'_{v\lambda} + s_{1v} p'_{\lambda\lambda}$;
- $p''_{uv} = s_{1v} p'_u + s_1^0 p'_{uv} + s_2^0 q'_u + s_{1u} p'_v$;
- $p''_{u\lambda} = s_{1\lambda} p'_u + s_{1u} p'_\lambda + s_1^0 p'_{u\lambda}$;
- $p''_{v\lambda} = s_2^0 q'_\lambda + s_1^0 p'_{v\lambda} + s_{1\lambda} p'_v + s_{1v} p'_\lambda$;
- $q''_0 = 0$;
- $q''_u = s_4^0 q'_u + s_3^0 p'_u$;
- $q''_v = s_4^0 q'_v + s_3^0 p'_v$;
- $q''_\lambda = s_4^0 q'_\lambda + s_3^0 p'_\lambda$;
- $q''_{uu} = s_3^0 p'_{uu} + 2s_{4u} q'_u + 2s_{3u} p'_u + s_4^0 q'_{uu}$;
- $q''_{vv} = 2s_{4v} q'_v + s_3^0 p'_{vv} + 2s_{3v} p'_v + s_4^0 q'_{vv}$;
- $q''_{\lambda\lambda} = s_4^0 q'_{\lambda\lambda} + 2s_{4\lambda} q'_\lambda + s_3^0 p'_{\lambda\lambda} + 2s_{3\lambda} p'_\lambda$;
- $q''_{uuu} = s_3^0 p'_{uuu} + 3s_{4u} q'_{uu} + 3s_{3u} p'_{uu} + 3s_{4uu} q'_u + s_4^0 q'_{uuu} + 3s_{3uu} p'_u$;
- $q''_{vvv} = 3s_{3vv} p'_v + 3s_{4v} q'_{vv} + s_3^0 p'_{vvv} + 3s_{3v} p'_{vv} + s_4^0 q'_{vvv} + 3s_{4vv} q'_v$;
- $q''_{\lambda\lambda\lambda} = s_4^0 q'_{\lambda\lambda\lambda} + 3s_{4\lambda\lambda} q'_\lambda + 3s_{3\lambda\lambda} p'_\lambda + 3s_{4\lambda} q'_{\lambda\lambda} + s_3^0 p'_{\lambda\lambda\lambda} + 3s_{3\lambda} p'_{\lambda\lambda}$;
- $q''_{uuu} = s_4^0 q'_{uuu} + s_3^0 p'_{uuu} + s_{4u} q'_{uu} + s_{3u} p'_{uu} + 2s_{4u} q'_{uv} + 2s_{3u} p'_{uv} + 2s_{4uv} q'_u + 2s_{3uv} p'_u + s_{4uu} q'_v + s_{3uu} p'_v$;

- $q''_{uu\lambda} = s_{4\lambda}q'_{uu} + s_{3\lambda}p'_{uu} + 2s_{4u}q'_{u\lambda} + 2s_{3u}p'_{u\lambda} + 2s_{4u\lambda}q'_u + 2s_{3u\lambda}p'_u + s_{4uu}q'_\lambda + s_{3uu}p'_\lambda + s_4^0q'_{uu\lambda} + s_3^0p'_{uu\lambda}$;
- $q''_{uv\lambda} = s_{4u}q'_{v\lambda} + s_{4v\lambda}q'_u + s_4^0q'_{uv\lambda} + s_{4u\lambda}q'_v + s_{4uv}q'_\lambda + s_{3\lambda}p'_{uv} + s_{3v}p'_{u\lambda} + s_{3v\lambda}p'_u + s_{4\lambda}q'_{uv} + s_{4v}q'_{u\lambda} + s_{3u}p'_{v\lambda} + s_{3u\lambda}p'_v + s_{3uv}p'_\lambda + s_3^0p'_{uv\lambda}$;
- $q''_{uvv} = 2s_{3uv}p'_v + s_{4u}q'_{vv} + s_3^0p'_{uvv} + s_{4vv}q'_u + s_4^0q'_{uvv} + 2s_{4uv}q'_v + 2s_{3v}p'_{uv} + s_{3vv}p'_u + 2s_{4v}q'_{uv} + s_{3u}p'_{vv}$;
- $q''_{u\lambda\lambda} = s_4^0q_{u\lambda\lambda} + 2s_{4u\lambda}q'_\lambda + 2s_{3\lambda}p'_{u\lambda} + s_{3\lambda\lambda}p'_u + 2s_{4\lambda}q'_{u\lambda} + s_{3u}p'_{\lambda\lambda} + 2s_{3u\lambda}p'_\lambda + s_{4u}q'_{\lambda\lambda} + s_3^0p'_{u\lambda\lambda} + s_{4\lambda\lambda}q'_u$
- $q''_{vv\lambda} = 2s_{3v\lambda}p'_v + s_{3vv}p'_\lambda + s_3^0p'_{vv\lambda} + s_4^0q'_{vv\lambda} + s_{4\lambda}q'_{vv} + 2s_{4v}q'_{v\lambda} + s_{3\lambda}p'_{vv} + 2s_{3v}p'_{v\lambda} + 2s_{4v\lambda}q'_v + s_{4vv}q'_\lambda$;
- $q''_{v\lambda\lambda} = s_4^0q'_{v\lambda\lambda} + s_{3\lambda\lambda}p'_v + 2s_{3v\lambda}p'_\lambda + s_3^0p'_{v\lambda\lambda} + s_{4\lambda\lambda}q'_v + 2s_{4v\lambda}q'_\lambda + 2s_{4\lambda}q'_{v\lambda} + s_{4v}q'_{\lambda\lambda} + 2s_{3\lambda}p'_{v\lambda} + s_{3v}p'_{\lambda\lambda}$
- $q''_{uv} = s_{4v}q'_u + s_{4u}q'_v + s_{3v}p'_u + s_{3u}p'_v + s_3^0p_{uv} + s_4^0q'_{uv}$
- $q''_{u\lambda} = s_4^0q'_{u\lambda} + s_{4\lambda}q'_u + s_{4u}q'_\lambda + s_{3\lambda}p'_u + s_{3u}p'_\lambda + s_3^0p'_{u\lambda}$;
- $q''_{v\lambda} = s_4^0q'_{v\lambda} + s_3^0p'_{v\lambda} + s_{3\lambda}p'_v + s_{3v}p'_\lambda + s_{4\lambda}q'_v + s_{4v}q'_\lambda$

Agora, substituindo os valores dos p 's e q 's nas expressões acima obtemos

- $p''_u = 0$;
- $p''_v = s_1^0p_v b_0^2$;
- $p''_\lambda = s_1^0p_\lambda \Lambda'$;
- $p''_{uu} = s_1^0a_u^2p_{uu}$;
- $p''_{vv} = s_1^0a_v^2p_{vv} + 4s_1^0p_v b_0 b_v + s_1^0b_0^4p_{vv} + 2s_1^0a_v p_{uv} b_0^2 + 2s_2^0b_0 q_u a_v + 2s_2^0b_0^3 q_v + 2s_{1v} p_v b_0^2$;
- $p''_{\lambda\lambda} = s_1^0a_\lambda^2p_{\lambda\lambda} + s_1^0\Lambda'^2 p_{\lambda\lambda} + 2s_1^0a_\lambda p_{u\lambda} \Lambda' + s_1^0p_\lambda \Lambda'' + 2s_1^\lambda p_\lambda \Lambda'$;
- $p''_{uv} = s_1^0a_u p_{uu} a_v + 2s_1^0p_v b_0 b_u + s_1^0a_u p_{uv} b_0^2 + s_2^0q_u a_u b_0 + s_{1u} p_v b_0^2$;
- $p''_{u\lambda} = s_{1u} p_\lambda \Lambda' + s_1^0a_u p_{u\lambda} \Lambda' + s_1^0a_u p_{uu} a_\lambda$;

- $p''_{v\lambda} = s_2^0 b_0 q_\lambda \Lambda' + s_2^0 b_0 q_u a_\lambda + s_1^0 a_\lambda p_{uv} b_0^2 + s_1^0 a_v p_{u\lambda} \Lambda' + 2s_1^0 p_v b_0 b_\lambda + s_1^0 b_0^2 p_{v\lambda} \Lambda' + s_1^0 a_v p_{uu} a_\lambda + s_{1\lambda} p_v b_0^2 + s_{1v} p_\lambda \Lambda'$;
- $p''_{uuu} = 3s_{1u} a_u^2 p_{uu} + s_{10} a_u^3 p_{uuu} + 3s_1^0 a_u p_{uu} a_{uu}$;
- $p''_{vvv} = 3s_2^0 b_0^5 q_{vv} + 3b_0 s_2^0 a_v^2 q_{uu} + 6s_2^0 a_v q_{uv} b_0^3 + 18s_2^0 q_v b_0^2 b_v + 3b_0 s_2^0 q_u a_{vv} + 6b_0 s_{2v} q_u a_v + 6s_{2v} q_v b_0^3 + 6s_2^0 b_v q_u a_v + 3s_{1v} a_v^2 p_{uu} + 12s_{1v} p_v b_0 b_v + 3s_{1v} b_0^4 p_{vv} + 6s_{1v} a_v p_{uv} b_0^2 + 12s_1^0 a_v p_{uv} b_0 b_v + 3s_1^0 a_v^2 b_0^2 p_{uu} + s_1^0 b_0^6 p_{vvv} + 3s_1^0 a_v p_{uu} a_{vv} + 12s_1^0 b_0^3 b_v p_{vv} + 6s_1^0 p_v b_0 b_{vv} + 3s_1^0 p_{uv} b_0^2 a_{vv} + 3s_1^0 b_0^4 p_{uvv} a_v + 6s_1^0 p_v b_v^2 + s_1^0 a_v^3 p_{uuu} + 3s_{1vv} p_v b_0^2$;
- $p''_{\lambda\lambda\lambda} = s_1^0 a_\lambda^3 p_{uuu} + s_1^0 \Lambda^3 p_{\lambda\lambda\lambda} + 3s_1^0 a_\lambda p_{uu} a_{\lambda\lambda} + s_1^0 p_\lambda \Lambda''' + 3s_1^0 a_\lambda p_{u\lambda} \Lambda'' + 3s_1^0 \Lambda' p_{\lambda\lambda} \Lambda'' + 3s_1^0 p_{u\lambda} \Lambda' a_{\lambda\lambda} + 3s_1^0 a_\lambda^2 \Lambda' p_{uu\lambda} + 3s_1^0 \Lambda'^2 p_{u\lambda\lambda} a_\lambda + 3s_{1\lambda\lambda} p_\lambda \Lambda' + 3s_{1\lambda} a_\lambda^2 p_{uu} + 3s_{1\lambda}^2 p_{\lambda\lambda} + 6s_{1\lambda} a_\lambda p_{u\lambda} \Lambda' + 3s_{1\lambda} p_\lambda \Lambda''$;
- $p''_{uuu} = 2s_1^0 p_v b_u^2 + s_1^0 a_u^2 p_{uuu} a_v + 2s_1^0 a_u p_{uu} a_{uv} + 2s_1^0 p_v b_0 b_{uu} + s_1^0 p_{uu} a_v a_{uu} + s_1^0 p_{uv} b_0^2 a_{uu} + s_1^0 a_u^2 p_{uuu} b_0^2 + 4s_1^0 a_u p_{uv} b_0 b_u + s_{1v} a_u^2 p_{uu} + 2s_{1u} a_u p_{uu} a_v + 4s_{1u} p_v b_0 b_u + 2s_{1u} a_u p_{uv} b_0^2 + s_{1uu} p_v b_0^2 + 2s_2^0 q_u a_u b_u + 2b_0 s_{2u} q_u a_u + b_0 s_2^0 q_u a_{uu} + b_0 s_2^0 a_u^2 q_{uu}$;
- $p''_{uu\lambda} = s_1^0 p_{uu} a_\lambda a_{uu} + 2s_1^0 a_u p_{uu} a_{u\lambda} + s_1^0 a_u^2 p_{uu\lambda} \Lambda' + s_1^0 p_{u\lambda} \Lambda' a_{uu} + s_1^0 a_u^2 p_{uuu} a_\lambda + s_{1\lambda} a_u^2 p_{uu} + 2s_{1u} a_u p_{u\lambda} \Lambda' + 2s_{1u} a_u p_{uu} a_\lambda + s_{1uu} p_\lambda \Lambda'$;
- $p''_{uv\lambda} = b_0 s_{2u} q_u a_\lambda + s_{1u} a_\lambda p_{uv} b_0^2 + s_{1u} a_v p_{u\lambda} \Lambda' + s_{1u} b_0^2 p_{v\lambda} \Lambda' + s_{1u} a_v p_{uu} a_\lambda + s_1^0 a_u p_{uu} a_{v\lambda} + s_1^0 p_{uv} b_0^2 a_{u\lambda} + s_1^0 p_{uu} a_\lambda a_{uv} + s_1^0 p_{u\lambda} \Lambda' a_{uv} + s_1^0 a_v p_{uu} a_{u\lambda} + s_{1\lambda} a_u p_{uu} a_v + s_{1\lambda} a_u p_{uv} b_0^2 + s_{1v} a_u p_{u\lambda} \Lambda' + s_{1v} a_u p_{uu} a_\lambda + s_2^0 b_u q_\lambda \Lambda' + s_2^0 b_u q_u a_\lambda + b_0 s_2^0 q_u a_{u\lambda} + b_0 s_{2\lambda} q_u a_u + b_0 s_{2u} q_\lambda \Lambda' + s_2^0 q_u a_u b_\lambda + 2s_{1u} p_v b_0 b_\lambda + 2s_1^0 p_v b_u b_\lambda + 2s_1^0 p_v b_0 b_{u\lambda} + 2s_{1\lambda} p_v b_0 b_u + s_{1u\lambda} p_v b_0^2 + s_{1uv} p_\lambda \Lambda' + b_0 s_2^0 a_u q_{uu} a_\lambda + b_0 s_2^0 a_u q_{u\lambda} \Lambda' + s_1^0 a_v a_\lambda p_{uuu} a_u + s_1^0 b_0^2 \Lambda' p_{uv\lambda} a_u + s_1^0 a_u a_v p_{uu\lambda} \Lambda' + s_1^0 a_\lambda b_0^2 p_{uuu} a_u + 2s_1^0 b_0 b_u p_{v\lambda} \Lambda' + 2s_1^0 a_u p_{uv} b_0 b_\lambda + 2s_1^0 a_\lambda p_{uv} b_0 b_u$;
- $p''_{uvv} = s_1^0 a_u p_{uu} a_{vv} + s_1^0 a_u a_v^2 p_{uuu} + s_1^0 b_0^4 p_{uvv} a_u + 2b_0 s_2^0 q_u a_{uv} + 2b_0 s_{2v} q_u a_u + 2b_0 s_{2u} q_u a_v + 2s_2^0 a_u q_{uv} b_0^3 + 4s_{1u} p_v b_0 b_v + 2s_{1u} a_v p_{uv} b_0^2 + 4s_1^0 p_v b_u b_v + 2s_1^0 p_{uv} b_0^2 a_{uv} + 2s_1^0 p_{uu} a_v a_{uv} + 4s_1^0 p_v b_0 b_{uv} + 4s_1^0 b_0^3 b_u p_{vv} + 2s_{1v} a_u p_{uu} a_v + 4s_{1v} p_v b_0 b_u + 2s_{1v} a_u p_{uv} b_0^2 + 2s_2^0 b_u q_u a_v + 6s_2^0 b_u q_v b_0^2 + 2s_2^0 q_u a_u b_v + s_{1u} b_0^4 p_{vv} + s_{1u} a_v^2 p_{uu} + 2s_{2u} q_v b_0^3 + 2s_{1uv} p_v b_0^2 + 4s_{10} a_v p_{uv} b_0 b_u + 4s_1^0 a_u p_{uv} b_0 b_v + 2b_0 s_2^0 a_u q_{uu} a_v + 2s_1^0 a_u a_v p_{uvv} b_0^2$;
- $p''_{u\lambda\lambda} = 2s_1^0 p_{u\lambda} \Lambda' a_{u\lambda} + 2s_1^0 a_u a_\lambda p_{uu\lambda} \Lambda' + s_1^0 a_u a_\lambda^2 p_{uuu} + s_1^0 \Lambda'^2 p_{u\lambda\lambda} a_u + s_1^0 a_u p_{uu} a_{\lambda\lambda} + s_1^0 a_u p_{u\lambda} \Lambda'' + 2s_1^0 p_{uu} a_\lambda a_{u\lambda} + s_{1u} a_\lambda^2 p_{uu} + s_{1u} \Lambda'^2 p_{\lambda\lambda} + 2s_{1u} a_\lambda p_{u\lambda} \Lambda' + s_{1u} p_\lambda \Lambda'' + 2s_{1u\lambda} p_\lambda \Lambda' + 2s_{1\lambda} a_u p_{u\lambda} \Lambda' + 2s_{1\lambda} a_u p_{uu} a_\lambda$;

- $p''_{vv\lambda} = s_1^0 a_v^2 \Lambda' p_{uu\lambda} + s_1^0 a_v^2 a_\lambda p_{uuu} + s_1^0 b_0^4 p_{uvv} a_\lambda + s_1^0 b_0^4 p_{vv\lambda} \Lambda' + s_1^0 p_{u\lambda} \Lambda' a_{vv} + s_1^0 p_{uu} a_\lambda a_{vv} + 4s_1^0 b_0^3 b_\lambda p_{vv} + 2s_1^0 a_v p_{uu} a_{v\lambda} + 2s_1^0 p_{uv} b_0^2 a_{v\lambda} + 4s_1^0 p_v b_0 b_{v\lambda} + 2s_2^0 b_v q_\lambda \Lambda' + 2s_2^0 b_v q_u a_\lambda + 2s_2^0 b_\lambda q_u a_v + 4s_1 \lambda p_v b_0 b_v + 2s_1 \lambda a_v p_{uv} b_0^2 + 2s_1 v a_\lambda p_{uv} b_0^2 + 2s_1 v a_v p_{u\lambda} \Lambda' + 4s_1 v p_v b_0 b_\lambda + 2s_1 v b_0^2 p_{v\lambda} \Lambda' + 2s_1 v a_v p_{uu} a_\lambda + 4s_1^0 p_v b_v b_\lambda + 2s_2^0 b_0^3 q_{v\lambda} \Lambda' + 6s_2^0 q_v b_0^2 b_\lambda + 2s_2^0 a_\lambda q_{uv} b_0^3 + 2b_0 s_2^0 q_u a_{v\lambda} + 2b_0 s_2 \lambda q_u a_v + 2b_0 s_2 v q_\lambda \Lambda' + 2b_0 s_2 v q_u a_\lambda + s_1 \lambda a_v^2 p_{uu} + s_1 \lambda b_0^4 p_{vv} + s_1 v v p_\lambda \Lambda' + 2s_2 \lambda q_v b_0^3 + 2s_1 v \lambda p_v b_0^2 + 4s_1^0 b_0 b_v p_{v\lambda} \Lambda' + 2s_1^0 b_0^2 \Lambda' p_{uv\lambda} a_v + 4s_1^0 a_v p_{uv} b_0 b_\lambda + 2s_1^0 a_v a_\lambda p_{uu} b_0^2 + 2b_0 s_2^0 a_v q_{u\lambda} \Lambda' + 2b_0 s_2^0 a_v q_{uu} a_\lambda + 4s_1^0 a_\lambda p_{uv} b_0 b_v;$
- $p''_{v\lambda\lambda} = s_1 v p_\lambda \Lambda'' + s_1 v a_\lambda^2 p_{uu} + s_1 v \Lambda'^2 p_{\lambda\lambda} + s_1 \lambda \lambda p_v b_0^2 + 2s_1 v \lambda p_\lambda \Lambda' + 2s_1^0 p_v b_\lambda^2 + s_1^0 a_v a_\lambda^2 p_{uuu} + s_1^0 a_\lambda^2 b_0^2 p_{uuv} + s_1 \Lambda'^2 p_{v\lambda\lambda} b_0^2 + s_1^0 a_v p_{u\lambda} \Lambda'' + s_1^0 b_0^2 p_{v\lambda} \Lambda'' + s_1^0 \Lambda'^2 p_{u\lambda\lambda} a_v + s_1^0 a_v p_{uu} a_{\lambda\lambda} + b_0 s_2^0 a_\lambda^2 q_{uu} + b_0 s_2^0 q_\lambda \Lambda'' + b_0 s_2^0 \Lambda'^2 q_{\lambda\lambda} + b_0 s_2^0 q_u a_{\lambda\lambda} + s_1^0 p_{uv} b_0^2 a_{\lambda\lambda} + 2s_1^0 p_{uu} a_\lambda a_{v\lambda} + 2s_1^0 p_v b_0 b_{\lambda\lambda} + 2s_1 \lambda a_v p_{u\lambda} \Lambda' + 4s_1 \lambda p_v b_0 b_\lambda + 2s_1 \lambda b_0^2 p_{v\lambda} \Lambda' + 2s_1 \lambda a_v p_{uu} a_\lambda + 2s_1 v a_\lambda p_{u\lambda} \Lambda' + 2b_0 s_2 \lambda q'_\lambda \Lambda + 2b_0 s_2 \lambda q_u a_\lambda + 2s_1 \lambda a_\lambda p_{uv} b_0^2 + 2s_2^0 b_\lambda q_\lambda \Lambda' + 2s_2^0 b_\lambda q_u a_\lambda + 2s_1^0 a_v \lambda p_{u\lambda} \Lambda' + 2s_1^0 a_\lambda b_0^2 p_{uv\lambda} \Lambda' + 2b_0 s_2 \lambda a_\lambda q_{u\lambda} \Lambda' + 4s_1^0 b_0 b_\lambda p_{v\lambda} \Lambda' + 2s_1^0 a_v a_\lambda p'_{uu\lambda} \Lambda + 4s_1^0 a_\lambda p_{uv} b_0 b_\lambda;$
- $q''_0 = 0;$
- $q''_u = s_4^0 q_u a_u b_0;$
- $q''_v = s_4^0 b_0 q_u a_v + s_4^0 b_0^3 q_v + s_3^0 p_v b_0^2;$
- $q''_{uu} = s_3^0 a_u^2 p_{uu} + 2s_4^0 q_u a_u b_u + 2b_0 s_{4u} q_u a_u + b_0 s_4^0 q_u a_{uu} + b_0 s_4^0 a_u^2 q_{uu};$
- $q''_{uu} = s_3^0 a_u^2 p_{uu} + 2s_4^0 q_u a_u b_u + 2b_0 s_{4u} q_u a_u + b_0 s_4^0 q_u a_{uu} + b_0 s_4^0 a_u^2 q_{uu};$
- $q''_{vv} = 2s_{3v} p_v b_0^2 + b_0 s_4^0 a_v^2 q_{uu} + s_4^0 b_0^5 q_{vv} + b_0 s_4^0 q_u a_{vv} + 2s_4^0 a_v q_{uv} b_0^3 + 6s_4^0 q_v b_0^2 b_v + 2b_0 s_{4v} q_u a_v + 2s_{4v} q_v b_0^3 + 2s_4^0 b_v q_u a_v + s_3^0 a_v^2 p_{uu} + 2s_3^0 a_v p_{uv} b_0^2 + s_3^0 b_0^4 p_{vv} + 4s_3^0 p_v b_0 b_v;$
- $q''_{\lambda\lambda} = 2s_4^0 b_\lambda q_\lambda \Lambda' + 2s_4^0 b_\lambda q_u a_\lambda + b_0 s_4^0 a_\lambda^2 q_{uu} + b_0 s_4^0 \Lambda'^2 q_{\lambda\lambda} + b_0 s_4^0 q_\lambda \Lambda'' + 2b_0 s_4^0 a_\lambda q_{u\lambda} \Lambda' + b_0 s_4^0 q_u a_{\lambda\lambda} + 2b_0 s_{4\lambda} q_\lambda \Lambda' + 2b_0 s_{4\lambda} q_u a_\lambda + s_3^0 \Lambda'^2 p_{\lambda\lambda} + s_3^0 a_\lambda^2 p_{uu} + 2s_3^0 a_\lambda p_{u\lambda} \Lambda' + s_3^0 p_\lambda \Lambda'' + 2s_{3\lambda} p_\lambda \Lambda';$
- $q''_{uv} = s_3^0 a_u p_{uu} a_v + s_3^0 a_u p_{uv} b_0^2 + 2s_3^0 p_v b_0 b_u + s_4^0 b_u q_u a_v + 3s_4^0 b_u q_v b_0^2 + s_4^0 q_u a_u b_v + b_0 s_4^0 q_u a_{uv} + b_0 s_4^0 a_u q_{uu} a_v + s_4^0 a_u q_{uv} b_0^3 + b_0 s_{4v} q_u a_u + b_0 s_{4u} q_u a_v + s_{4u} q_v b_0^3 + s_{3u} p_v b_0^2;$
- $q''_{u\lambda} = s_3^0 a_u p_{uu} a_\lambda + s_3^0 a_u p_{u\lambda} \Lambda' + s_4^0 b_u q_\lambda \Lambda' + s_4^0 b_u q_u a_\lambda + s_4^0 q_u a_u b_\lambda + b_0 s_4^0 a_u q_{uu} a_\lambda + b_0 s_4^0 a_u q_{u\lambda} \Lambda' + b_0 s_4^0 q_u a_{u\lambda} + b_0 s_{4\lambda} q_u a_u + b_0 s_{4u} q_\lambda \Lambda' + b_0 s_{4u} q_u a_\lambda + s_{3u} p_\lambda \Lambda';$

- $q''_{v\lambda} = b_0 s_4^0 a_v q_{uu} a_\lambda + s_4^0 a_\lambda q_{uv} b_0^3 + b_0 s_4^0 a_v q_{u\lambda} \Lambda' + 3s_4^0 q_v b_0^2 b_\lambda + b_0 s_4^0 q_u a_{v\lambda} + s_4^0 b_0^3 q_{v\lambda} \Lambda' + b_0 s_{4\lambda} q_u a_v + s_{4\lambda} q_v b_0^3 + b_0 s_{4v} q_\lambda \Lambda' + b_0 s_{4v} q_u a_\lambda + s_4^0 b_v q_\lambda \Lambda' + s_4^0 b_v q_u a_\lambda + s_4^0 b_\lambda q_u a_v + s_3^0 a_v p_{u\lambda} \Lambda' + s_3^0 b_0^2 p_{v\lambda} \Lambda' + s_3^0 a_v p_{uu} a_\lambda + 2s_3^0 p_v b_0 b_\lambda + s_3^0 a_\lambda p_{uv} b_0^2 + s_{3\lambda} p_v b_0^2 + s_{3v} p_\lambda \Lambda';$
- $q''_{uuu} = 3s_3^0 a_{uu} p_{uu} a_u + s_3^0 a_u^3 p_{uuu} + 3s_{3u} a_u^2 p_{uu} + 3b_0 s_4^0 a_{uu} q_{uu} a_u + b_0 s_4^0 q_u a_{uuu} + b_0 s_4^0 a_u^3 q_{uuu} + 3b_0 s_{4u} q_u a_{uu} + 3b_0 s_{4u} a_u^2 q_{uu} + 3b_0 s_{4uu} q_u a_u + 3s_4^0 q_u a_u b_{uu} + 6b_u s_{4u} q_u a_u + 3b_u s_4^0 q_u a_{uu} + 3b_u s_4^0 a_u^2 q_{uu};$
- $q''_{vvv} = s_4^0 b_0^7 q_{vvv} + 3s_3^0 a_{vv} p_{uu} a_v + 3s_3^0 b_0^4 p_{uvv} a_v + 3s_3^0 a_v^2 p_{uu} b_0^2 + 3s_3^0 a_{vv} p_{uv} b_0^2 + 6s_3^0 p_v b_0 b_{vv} + 12s_3^0 b_0^3 b_v p_{vv} + 3s_{4vv} q_v b_0^3 + 3s_{4v} b_0^5 q_{vv} + 6s_{3v} a_v p_{uv} b_0^2 + 12s_{3v} p_v b_0 b_v + s_3^0 b_0^6 p_{vvv} + s_3^0 a_v^3 p_{uuu} + 3s_{3v} a_v^2 p_{uu} + 6s_3^0 p_v b_v^2 + 3s_{3v} b_0^4 p_{vv} + 3s_{3vv} p_v b_0^2 + b_0 s_4^0 a_v^3 q_{uuu} + b_0 s_4^0 q_u a_{vvv} + 12s_3^0 a_v p_{uv} b_0 b_v + 9s_4^0 q_v b_0^2 b_{vv} + 3s_4^0 b_0^5 q_{uvv} a_v + 15s_4^0 b_0^4 b_v q_{vv} + 3b_0 s_{4vv} q_u a_v + 3s_4^0 b_{vv} q_u a_v + 6s_{4v} a_v q_{uv} b_0^3 + 3b_0 s_{4v} q_u a_{vv} + 18s_{4v} q_v b_0^2 b_v + 3s_4^0 q_{uv} b_0^3 a_{vv} + 18s_4^0 a_v q_{uv} b_0^2 b_v + 3s_4^0 a_v^2 q_{uuu} b_0^3 + 3b_v s_4^0 a_v^2 q_{uu} + 3b_v s_4^0 q_u a_{vv} + 6b_v s_{4v} q_u a_v + 3b_0 s_4^0 a_v q_{uu} a_{vv} + 18b_0 s_4^0 q_v b_v^2 + 3b_0 s_{4v} a_v^2 q_{uu};$
- $q''_{\lambda\lambda\lambda} = 3s_3^0 a_{\lambda\lambda} p_{uu} a_\lambda + 6s_{3\lambda} a_\lambda p_{u\lambda} \Lambda' + 3s_3^0 a_{\lambda\lambda} p_{u\lambda} \Lambda' + 3s_3^0 a_\lambda p_{u\lambda} \Lambda'' + 3s_3^0 \Lambda' p_{\lambda\lambda} \Lambda'' + 3s_3^0 a_\lambda^2 p_{uu\lambda} \Lambda' + 3s_3^0 \Lambda'^2 p_{u\lambda\lambda} a_\lambda + s_3^0 a_\lambda^3 p_{uuu} + s_3^0 p_\lambda \Lambda''' + s_3^0 \Lambda'^3 p_{\lambda\lambda\lambda} + 3s_{3\lambda} a_\lambda^2 p_{uu} + 3s_{3\lambda} p_\lambda \Lambda'' + 3s_{3\lambda} \Lambda'^2 p_{\lambda\lambda} + 3s_{3\lambda\lambda} p_\lambda \Lambda' + b_0 s_4^0 q_u a_{\lambda\lambda\lambda} + b_0 s_4^0 \Lambda'^3 q_{\lambda\lambda\lambda} + b_0 s_4^0 q_\lambda \Lambda''' + b_0 s_4^0 a_\lambda^3 q_{uuu} + 3b_0 s_4^0 \Lambda' q_{\lambda\lambda} \Lambda'' + 3b_0 s_{4\lambda} a_\lambda^2 q_{uu} + 3b_0 s_{4\lambda} \Lambda'^2 q_{\lambda\lambda} + 3b_0 s_{4\lambda} q_\lambda \Lambda'' + 3b_0 s_{4\lambda} q_u a_{\lambda\lambda} + 3b_0 s_4^0 a_\lambda^2 q_{uu\lambda} \Lambda' + 3b_0 s_4^0 a_{\lambda\lambda} q_{u\lambda} \Lambda' + 3b_\lambda s_4^0 q_u a_{\lambda\lambda} + 3b_\lambda s_4^0 \Lambda'^2 q_{\lambda\lambda} + 3b_\lambda s_4^0 q_\lambda \Lambda'' + 6b_0 s_{4\lambda} a_\lambda q_{u\lambda} \Lambda' + 3s_4^0 b_{\lambda\lambda} q_u a_\lambda + 3b_0 s_{4\lambda\lambda} q_\lambda \Lambda' + 3b_0 s_{4\lambda\lambda} q_u a_\lambda + 3s_4^0 b_{\lambda\lambda} q_\lambda \Lambda' + 6b_\lambda s_{4\lambda} q_\lambda \Lambda' + 6b_\lambda s_{4\lambda} q_u a_\lambda + 3b_\lambda s_4^0 a_\lambda^2 q_{uu} + 3b_0 s_4^0 a_{\lambda\lambda} q_{uu} a_\lambda + 6b_\lambda s_4^0 a_\lambda q_{u\lambda} \Lambda' + 3b_0 s_4^0 \Lambda'^2 q_{u\lambda\lambda} a_\lambda + 3b_0 s_4^0 a_\lambda q_{u\lambda} \Lambda'';$
- $q''_{uuu} = s_3^0 p_{uu} a_v a_{uu} + s_{4uu} q_v b_0^3 + s_3^0 p_{uv} b_0 a_{uu} + s_3^0 a_u^2 b_0^2 p_{uu} + s_3^0 a_u^2 a_v p_{uuu} + 2s_3^0 a_u p_{uu} a_{uv} + 2s_{3u} a_u p_{uu} a_v + 2s_{3u} a_u p_{uv} b_0^2 + 4s_{3u} p_v b_0 b_u + 2s_3^0 p_v b_0 b_{uu} + s_{3v} a_u^2 p_{uu} + s_{3uu} p_v b_0^2 + 2s_3^0 p_v b_u^2 + b_0 s_{4v} a_u^2 q_{uu} + b_0 s_{4uu} q_u a_v + s_4^0 b_{uu} q_u a_v + b_0 s_4^0 q_u a_{uu} + s_4^0 a_u^2 q_{uu} b_0^3 + b_v s_4^0 q_u a_{uu} + s_4^0 a_{uu} q_{uv} b_0^3 + b_v s_4^0 a_u^2 q_{uu} + b_0 s_{4v} q_u a_{uu} + b_0 s_4^0 a_u u q_{uu} a_v + b_0 s_4^0 a_u^2 q_{uuu} a_v + 4s_3^0 a_u p_{uv} b_0 b_u + 2b_0 s_{4u} q_u a_{uv} + 2b_0 s_{4uv} q_u a_u + 2b_u s_{4v} q_u a_u + 2b_u s_{4u} q_u a_v + 2b_v s_{4u} q_u a_u + 2b_0 s_{4u} a_u q_{uu} a_v + 6b_0 s_4^0 q_v b_u^2 + 2b_u s_4^0 a_u q_{uu} a_v + 3s_4^0 q_v b_0^2 b_{uu} + 2s_{4u} a_u q_{uv} b_0 + 6s_4^0 a_u q_u v b_0 b_u + 6s_{4u} q_v b_0 b_u + 2b_u s_4^0 q_u a_{uv} + 2s_4^0 q_u a_u b_{uv} + 2b_0 s_4^0 a_{uv} q_{uu} a_u;$
- $q''_{uu\lambda} = s_3^0 p_{uu} a_\lambda a_{uu} + s_3^0 p_{u\lambda} \Lambda' a_{uu} + s_3^0 a_u^2 \Lambda' p_{uu\lambda} + s_3^0 a_u^2 a_\lambda p_{uuu} + 2s_3^0 a_u p_{uu} a_{u\lambda} + 2s_{3u} a_u p_{uu} a_\lambda + 2s_{3u} a_u p_{u\lambda} \Lambda' + s_{3uu} p_\lambda \Lambda' + s_{3\lambda} a_u p_{uu} + b_0 s_4^0 a_{uu} q_{u\lambda} \Lambda' + b_\lambda s_4^0 q_u a_{uu} + b_\lambda s_4^0 a_u^2 q_{uu} + b_0 s_{4uu} q_u a_\lambda + s_4^0 b_{uu} q_\lambda \Lambda' + s_4^0 b_{uu} q_u a_\lambda + b_0 s_4^0 q_u a_{uu\lambda} + b_0 s_{4\lambda} q_u a_{uu} + b_0 s_{4\lambda} a_u q_{uu} + b_0 s_{4uu} q_\lambda \Lambda' + b_0 s_4^0 a_u^2 q_{uuu} a_\lambda + b_0 s_4^0 a_u u q_{uu} a_\lambda + b_0 s_4^0 a_u^2 q_{uu\lambda} \Lambda' + 2b_0 s_4^0 a_u q_u u a_\lambda + 2b_0 s_{4u} \lambda q_u a_u + 2b_u s_4^0 a_u q_{u\lambda} \Lambda' + 2b_u s_{4\lambda} q_u a_u + 2b_u s_{4u} q_\lambda \Lambda' + 2b_u s_{4u} q_u a_\lambda + 2b_0 s_{4u} q_u a_{u\lambda} + 2s_4^0 q_u a_u b_{u\lambda} + 2b_u s_4^0 a_u q_{uu} a_\lambda + 2b_u s_4^0 q_u a_{u\lambda} + 2b_\lambda s_{4u} q_u a_u + 2b_0 s_{4u} a_u q_{uu} a_\lambda + 2b_0 s_{4u} a_u q_{u\lambda} \Lambda';$

- $$\begin{aligned}
q''_{uv\lambda} = & s_3^0 a_u p_{uu} a_{v\lambda} + s_3^0 p_{uu} a_\lambda a_{uv} + s_3^0 p_{uu} a_v a_{u\lambda} + s_{3\lambda} a_u p_{uu} a_v + s_{3v} a_u p_{uu} a_\lambda + s_{3u} a_v p_{uu} a_\lambda + \\
& s_{3v} a_u p_{u\lambda} \Lambda' + s_3^0 p_{u\lambda} \Lambda' a_{uv} + s_3^0 p_{uv} b_0^2 a_{u\lambda} + s_{4u\lambda} q_v b_0^3 + s_{3\lambda} a_u p_{uv} b_0^2 + s_{3u\lambda} p_v b_0^2 + s_{3uv} p_\lambda \Lambda' + \\
& s_{3u} a_v p_{u\lambda} \Lambda' + s_{3u} b_0^2 p_{v\lambda} \Lambda' + s_{3u} a_\lambda p_{uv} b_0^2 + 2s_3^0 p_v b_0 b_{u\lambda} + 2s_3^0 p_v b_u b_\lambda + 2s_{3\lambda} p_v b_0 b_u + 2s_{3u} p_v b_0 b_\lambda + \\
& s_3^0 a_u a_v p_{uu} \Lambda' + s_3^0 a_\lambda b_0^2 p_{uu} a_u + s_3^0 a_u \Lambda' p_{uv} b_0^2 + s_3^0 a_u a_\lambda p_{uu} a_v + b_v s_{4\lambda} q_u a_u + b_u s_{4v} q_\lambda \Lambda' + \\
& b_u s_{4v} q_u a_\lambda + b_v s_4^0 q_u a_{u\lambda} + b_v s_4^0 a_u q_{uu} a_\lambda + b_v s_{4u} q_\lambda \Lambda' + b_v s_{4u} q_u a_\lambda + b_\lambda s_4^0 q_u a_{uv} + b_0 s_4^0 q_u a_{uv\lambda} + \\
& b_0 s_{4u} q_u a_{v\lambda} + b_0 s_{4v} q_u a_{u\lambda} + b_0 s_{4u\lambda} q_u a_v + b_0 s_{4u} a_v q_{u\lambda} \Lambda' + b_0 s_4^0 a_u q_{uu} a_{v\lambda} + b_0 s_4^0 a_{uv} q_{u\lambda} \Lambda' + \\
& b_0 s_{4\lambda} a_u q_{uu} a_v + b_u s_{4\lambda} q_u a_v + b_0 s_{4uv} q_\lambda \Lambda' + b_0 s_{4uv} q_u a_\lambda + b_0 s_4^0 q_{uu} a_v a_{u\lambda} + s_{4u} a_\lambda q_{uv} b_0^3 + \\
& b_0 s_4^0 a_v a_\lambda q_{uu} a_u + b_0 s_4^0 a_{uv} q_{uu} a_\lambda + b_0 s_4^0 a_v \Lambda' q_{uu} a_u + b_\lambda s_4^0 a_u q_{uu} a_v + b_\lambda s_{4v} q_u a_u + b_\lambda s_{4u} q_u a_v + \\
& b_v s_4^0 a_u q_{u\lambda} \Lambda' + b_0 s_{4\lambda} q_u a_{uv} + s_4^0 q_{uv} b_0^3 a_{u\lambda} + s_{4\lambda} a_u q_{uv} b_0^3 + s_4^0 a_u b_0^3 q_{uv} \Lambda' + b_0 s_{4v} a_u q_{u\lambda} \Lambda' + \\
& b_0 s_{4u} a_v q_{uu} a_\lambda + s_{4u} b_0^3 q_{v\lambda} \Lambda' + b_0 s_{4v\lambda} q_u a_u + s_4^0 b_{uv} q_\lambda \Lambda' + s_4^0 a_\lambda b_0^3 q_{uu} a_u + b_0 s_{4v} a_u q_{uu} a_\lambda + s_4^0 q_u a_u b_{v\lambda} + \\
& s_4^0 b_{uv} q_u a_\lambda + s_4^0 b_{u\lambda} q_u a_v + b_u s_4^0 a_v q_{u\lambda} \Lambda' + b_u s_4^0 q_u a_{v\lambda} + b_u s_4^0 a_v q_{uu} a_\lambda + 2s_3^0 a_u p_{uv} b_0 b_\lambda + 2s_3^0 b_0 b_u p_{v\lambda} \Lambda' + \\
& 2s_3^0 a_\lambda p_{uv} b_0 b_u + 6b_0 s_4^0 q_v b_u b_\lambda + 3s_{4u} q_v b_0^2 b_\lambda + 3s_4^0 a_u q_{uv} b_0^2 b_\lambda + 3s_4^0 b_0^2 b_u q_{v\lambda} \Lambda' + 3s_4^0 a_\lambda q_u v b_0 b_u + \\
& 3s_{4\lambda} q_v b_0^2 b_u + 3s_4^0 b_{u\lambda} q_v b_0^2;
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
q''_{uvv} = & s_3^0 a_u p_{uu} a_{vv} + s_3^0 a_u b_0^4 p_{uvv} + s_3^0 a_u a_v^2 p_{uuu} + s_{4u} b_0^5 q_{vv} + 2s_{3v} a_u p_{uu} a_v + 2s_3^0 p_{uu} a_v a_{uv} + \\
& 2s_{3u} a_v p_{uv} b_0^2 + 4s_{3u} p_v b_0 b_v + 2s_{3v} a_u p_{uv} b_0^2 + 4s_{3v} p_v b_0 b_u + 2s_3^0 p_{uv} b_0^2 a_{uv} + 4s_3^0 p_v b_u b_v + 4s_3^0 b_0^3 b_u p_{vv} + \\
& 4s_3^0 p_v b_0 b_{uv} + 2s_{4uv} q_v b_0^3 + s_{3u} b_0^4 p_{vv} + s_{3u} a_v^2 p_{uu} + 2s_{3uv} p_v b_0^2 + b_0 s_{4u} a_v^2 q_{uu} + b_0 s_{4u} q_u a_{vv} + s_4^0 q_u a_u b_{vv} + \\
& b_0 s_4^0 a_v^2 q_{uuu} a_u + b_0 s_4^0 q_u a_{uvv} + b_u s_4^0 a_v^2 q_{uu} + b_0 s_4^0 a_u q_{uu} a_{vv} + b_0 s_{4vv} q_u a_u + b_u s_4^0 q_u a_{vv} + s_4^0 b_0^5 q_{uvv} a_u + \\
& 2s_{4v} a_u q_{uv} b_0^3 + 6s_{4v} q_v b_0^2 b_u + 2b_v s_4^0 a_u q_{uu} a_v + 2s_3^0 a_u a_v p_{uu} b_0^2 + 4s_3^0 a_v p_{uv} b_0 b_u + 4s_3^0 a_u p_{uv} b_0 b_v + \\
& 2b_u s_{4v} q_u a_v + 2s_4^0 b_{uv} q_u a_v + 12b_0 s_4^0 q_v b_u b_v + 6s_4^0 a_u q_{uv} b_0^2 b_v + 2s_4^0 a_u b_0^3 q_{uu} a_v + 2s_{4u} a_v q_{uv} b_0^3 + \\
& 2b_0 s_4^0 a_{uv} q_{uu} a_v + 2b_v s_4^0 q_u a_{uv} + 2b_0 s_{4v} q_u a_{uv} + 2b_0 s_{4uv} q_u a_v + 2b_v s_{4u} q_u a_v + 2b_v s_{4v} q_u a_u + \\
& 2b_0 s_{4v} a_u q_{uu} a_v + 6s_4^0 a_v q_{uv} b_0^2 b_u + 6s_{4u} q_v b_0^2 b_v + 2s_4^0 a_{uv} q_{uv} b_0^3 + 6s_4^0 q_v b_0^2 b_{uv} + 5s_4^0 b_0^4 b_u q_{vv};
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
q''_{u\lambda\lambda} = & s_3^0 a_u p_{u\lambda} \Lambda'' + s_3^0 a_u a_\lambda^2 p_{uuu} + s_3^0 a_u \Lambda'^2 p_{u\lambda\lambda} + s_3^0 a_u p_{uu} a_{\lambda\lambda} + 2s_3^0 p_{u\lambda} \Lambda' a_{u\lambda} + 2s_{3u} a_\lambda p_{u\lambda} \Lambda' + \\
& 2s_3^0 p_{uu} a_\lambda a_{u\lambda} + 2s_{3\lambda} a_u p_{uu} a_\lambda + 2s_{3\lambda} a_u p_{u\lambda} \Lambda' + s_{3u} p_\lambda \Lambda'' + s_{3u} a_\lambda^2 p_{uu} + s_{3u} \Lambda'^2 p_{\lambda\lambda} + 2s_{3u\lambda} p_\lambda \Lambda' + \\
& b_0 s_{4u} q_\lambda \Lambda'' + b_0 s_{4u} q_u a_{\lambda\lambda} + b_0 s_{4\lambda\lambda} q_u a_u + b_u s_4^0 a_\lambda^2 q_{uu} + b_u s_4^0 \Lambda'^2 q_{\lambda\lambda} + b_u s_4^0 q_\lambda \Lambda'' + b_u s_4^0 q_u a_{\lambda\lambda} + \\
& s_4^0 q_u a_u b_{\lambda\lambda} + b_0 s_4^0 \Lambda'^2 q_{u\lambda\lambda} a_u + b_0 s_4^0 a_u q_{u\lambda} \Lambda'' + b_0 s_4^0 a_{\lambda\lambda} q_{uu} a_u + b_0 s_4^0 a_\lambda^2 q_{uuu} a_u + b_0 s_4^0 q_u a_{u\lambda\lambda} + \\
& b_0 s_{4u} a_\lambda^2 q_{uu} + b_0 s_{4u} \Lambda'^2 q_{\lambda\lambda} + 2s_3^0 a_u a_\lambda p_{uu} \Lambda' + 2b_0 s_{4u\lambda} q_\lambda \Lambda' + 2b_0 s_{4u\lambda} q_u a_\lambda + 2b_0 s_{4\lambda} q_u a_{u\lambda} + \\
& 2b_u s_{4\lambda} q_\lambda \Lambda' + 2b_u s_{4\lambda} q_u a_\lambda + 2s_4^0 b_{u\lambda} q_\lambda \Lambda' + 2s_4^0 b_{u\lambda} q_u a_\lambda + 2b_\lambda s_{4\lambda} q_u a_u + 2b_\lambda s_{4u} q_\lambda \Lambda' + 2b_\lambda s_{4u} q_u a_\lambda + \\
& 2b_\lambda s_4^0 q_u a_{u\lambda} + 2b_0 s_4^0 q_{u\lambda} \Lambda' a_{u\lambda} + 2b_0 s_4^0 a_\lambda q_{uu} a_{u\lambda} + 2b_0 s_4^0 a_\lambda \Lambda' q_{uu} a_u + 2b_0 s_{4u} a_\lambda q_{u\lambda} \Lambda' + \\
& + 2b_0 s_{4\lambda} a_u q_{uu} a_\lambda + 2b_0 s_{4\lambda} a_u q_{u\lambda} \Lambda' + 2b_\lambda s_4^0 a_u q_{uu} a_\lambda + 2b_\lambda s_4^0 a_u q_{u\lambda} \Lambda' + 2b_u s_4^0 a_\lambda q_{u\lambda} \Lambda';
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
q''_{vv\lambda} = & s_{4\lambda} b_0^5 q_{vv} + s_3^0 a_\lambda b_0^4 p_{uvv} + s_3^0 a_v^2 \Lambda' p_{uu\lambda} + s_3^0 a_v^2 a_\lambda p_{uuu} + s_3^0 p_{u\lambda} \Lambda' a_{vv} + s_3^0 b_0^4 \Lambda' p_{vv\lambda} + s_3^0 p_{uu} a_\lambda a_{vv} + \\
& 2s_{4v\lambda} q_v b_0^3 + 4s_3^0 p_v b_0 b_{v\lambda} + 4s_3^0 b_0^3 b_\lambda p_{vv} + 2s_3^0 p_{uv} b_0^2 a_{v\lambda} + 4s_3^0 p_v b_v b_\lambda + 2s_{3\lambda} a_v p_{uv} b_0^2 + 4s_{3\lambda} p_v b_0 b_v + \\
& 2s_{3v} a_v p_{u\lambda} \Lambda' + 2s_{3v} b_0^2 p_{v\lambda} \Lambda' + 4s_{3v} p_v b_0 b_\lambda + 2s_{3v} a_\lambda p_{uv} b_0^2 + 2s_3^0 a_v p_{uu} a_{v\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2s_{3v}a_v p_{uu}a_\lambda + s_{3\lambda}b_0^4 p_{vv} + s_{3\lambda}a_v^2 p_{uu} + s_{3vv}p_\lambda \Lambda' + 2s_{3v\lambda}p_v b_0^2 + s_4^0 b_0^5 q_{uvv}a_\lambda + s_4^0 b_0^5 q_{v\lambda} \Lambda' + \\
& b_0 s_4^0 q_{u\lambda} \Lambda' a_{vv} + b_0 s_4^0 a_v^2 q_{uu\lambda} \Lambda' + b_0 s_4^0 q_{uu} a_\lambda a_{vv} + b_0 s_{4vv} q_u a_\lambda + b_0 s_{4vv} q_\lambda \Lambda' + s_4^0 b_{vv} q_\lambda \Lambda' \\
& + s_4^0 b_{vv} q_u a_\lambda + b_\lambda s_4^0 a_v^2 q_{uu} + b_\lambda s_4^0 q_u a_{vv} + b_0 s_4^0 a_v^2 q_{uuu} a_\lambda + b_0 s_{4\lambda} a_v^2 q_{uu} + b_0 s_4^0 q_u a_{vv\lambda} + b_0 s_{4\lambda} q_u a_{vv} + \\
& 2s_3^0 a_\lambda b_0^2 p_{uuu} a_v + 2b_v s_4^0 a_v q_{uu} a_\lambda + 2b_v s_4^0 a_v q_{u\lambda} \Lambda' + 4s_3^0 b_0 b_v p_{v\lambda} \Lambda' + 4s_3^0 a_\lambda p_{uv} b_0 b_v + 4s_3^0 a_v p_{uv} b_0 b_\lambda \\
& + 2s_3^0 a_v \Lambda' p_{uv\lambda} b_0^2 + 2b_\lambda s_{4v} q_u a_v + 2s_4^0 q_{uv} b_0^3 a_{v\lambda} + 6s_4^0 q_v b_0 b_{v\lambda} + 5s_4^0 b_0^4 b_\lambda q_{vv} + 2s_{4\lambda} a_v q_{uv} b_0^3 + \\
& 12b_0 s_4^0 q_v b_v b_\lambda + 2b_0 s_4^0 a_v q_{uu} a_{v\lambda} + 2b_0 s_{4v} a_v q_{uu} a_\lambda + 2b_0 s_{4v} a_v q_{u\lambda} \Lambda' + 2b_0 s_{4v} q_u a_{v\lambda} + 2b_0 s_{4v\lambda} q_u a_v + \\
& 2s_4^0 b_{v\lambda} q_u a_v + 2b_v s_4^0 q_u a_{v\lambda} + 2b_v s_{4\lambda} q_u a_v + 2b_v s_{4v} q_\lambda \Lambda' + 2b_v s_{4v} q_u a_\lambda + 2s_4^0 a_v \Lambda' q_{uv\lambda} b_0^3 + 6s_4^0 a_v q_{uv} b_0^2 b_\lambda + \\
& 2s_4^0 a_v a_\lambda q_{uvv} b_0^3 + 6s_4^0 a_\lambda q_{uv} b_0^2 b_v + 6s_4^0 b_0^2 b_v q_{v\lambda} \Lambda' + 6s_{4\lambda} q_v b_0^2 b_v + 2s_{4v} a_\lambda q_{uv} b_0 + 6s_{4v} q_v b_0^2 b_\lambda + \\
& 2s_{4v} b_0 q_{v\lambda} \Lambda'; \\
\bullet \quad q''_{v\lambda\lambda} = & s_{4\lambda\lambda} q_v b_0^3 + s_3^0 a_v \Lambda'^2 p_{u\lambda\lambda} + s_3^0 a_v a_\lambda^2 p_{uuu} + s_3^0 b_0^2 p_{v\lambda} \Lambda'' + s_3^0 a_\lambda^2 b_0^2 p_{uuu} + s_3^0 a_v p_{u\lambda} \Lambda'' + s_3^0 b_0^2 \Lambda'^2 p_{v\lambda\lambda} + \\
& s_3^0 p_{uv} b_0 a_{\lambda\lambda} + s_3^0 a_v p_{uu} a_{\lambda\lambda} + 2s_{3\lambda} a_v p_{u\lambda} \Lambda' + 2s_3^0 p_{u\lambda} \Lambda' a_{v\lambda} + 2s_{3\lambda} b_0^2 p_{v\lambda} \Lambda' + s_{3v} p_\lambda \Lambda'' + 4s_{3\lambda} p_v b_0 b_\lambda + \\
& 2s_{3\lambda} a_\lambda p_{uv} b_0^2 + 2s_{3v} a_\lambda p_{u\lambda} \Lambda' + 2s_3^0 p_v b_0 b_{\lambda\lambda} + 2s_{3\lambda} a_v p_{uu} a_\lambda + 2s_3^0 p_{uu} a_\lambda a_{v\lambda} + s_{3v} \Lambda'^2 p_{\lambda\lambda} + s_{3v} a_\lambda^2 p_{uu} + \\
& s_{3\lambda\lambda} p_v b_0^2 + 2s_3^0 p_v b_\lambda^2 + 2s_{3v\lambda} p_\lambda \Lambda' + b_0 s_4^0 a_v q_{u\lambda} \Lambda'' + b_0 s_4^0 a_{\lambda\lambda} q_{uu} a_v + s_4^0 b_0^3 q_{v\lambda} \Lambda'' + s_4^0 a_\lambda^2 q_{uuu} b_0^3 + \\
& s_4^0 a_{\lambda\lambda} q_{uv} b_0^3 + s_4^0 \Lambda'^2 q_{v\lambda\lambda} b_0^3 + b_0 s_4^0 q_u a_{v\lambda\lambda} + b_0 s_{4v} a_\lambda^2 q_{uu} + b_0 s_{4v} \Lambda'^2 q_{\lambda\lambda} + b_0 s_{4v} q_\lambda \Lambda'' + b_0 s_{4v} q_u a_{\lambda\lambda} + \\
& b_0 s_{4\lambda\lambda} q_u a_v + s_4^0 b_{\lambda\lambda} q_u a_v + b_v s_4^0 a_\lambda^2 q_{uu} + b_v s_4^0 \Lambda'^2 q_{\lambda\lambda} + b_v s_4^0 q_\lambda \Lambda'' + b_v s_4^0 q_u a_{\lambda\lambda} + b_0 s_4^0 \Lambda'^2 q_{u\lambda\lambda} a_v + \\
& b_0 s_4^0 a_\lambda^2 q_{uuu} a_v + 2b_0 s_{4\lambda} a_v q_{uu} a_\lambda + 2s_3^0 a_\lambda b_0^2 p_{uv\lambda} \Lambda' + 2s_3^0 a_v \Lambda' p_{uu\lambda} a_\lambda + 4s_3^0 a_\lambda p_{uv} b_0 b_\lambda + 4s_3^0 b_0 b_\lambda p_{v\lambda} \Lambda' + \\
& 2b_\lambda s_4^0 a_v q_{uu} a_\lambda + 2b_\lambda s_4^0 a_v q_{u\lambda} \Lambda' + 3s_4^0 q_v b_0^2 b_{\lambda\lambda} + 2s_{4\lambda} a_\lambda q_{uv} b_0^3 + 6s_{4\lambda} q_v b_0^2 b_\lambda + 2s_{4\lambda} b_0^3 q_{v\lambda} \Lambda' + 6b_0 s_4^0 q_v b_\lambda^2 + \\
& 2b_0 s_{4\lambda} q_u a_{v\lambda} + 2b_0 s_{4v\lambda} q_\lambda \Lambda' + 2b_0 s_{4v\lambda} q_u a_\lambda + 2s_4^0 b_{v\lambda} q_\lambda \Lambda' + 2s_4^0 b_{v\lambda} q_u a_\lambda + 2b_0 s_{4v} a_\lambda q_{u\lambda} \Lambda' + \\
& 2b_0 s_4^0 a_\lambda q_{uu} a_{v\lambda} + 2b_0 s_4^0 q_{u\lambda} \Lambda' a_{v\lambda} + 2b_v s_4^0 a_\lambda q_{u\lambda} \Lambda' + 2b_v s_{4\lambda} q_\lambda \Lambda' + 2b_v s_{4\lambda} q_u a_\lambda + 2b_\lambda s_4^0 q_u a_{v\lambda} + \\
& 2b_\lambda s_{4\lambda} q_u a_v + 2b_\lambda s_{4v} q_\lambda \Lambda' + 2b_\lambda s_{4v} q_u a_\lambda + 2s_4^0 a_\lambda \Lambda' q_{uv\lambda} b_0^3 + 6s_4^0 b_0^2 b_\lambda q_{v\lambda} \Lambda' + 6s_4^0 a_\lambda q_{uv} b_0^2 b_\lambda + \\
& 2b_0 s_4^0 a_\lambda \Lambda' q_{uu\lambda} a_v + 2b_0 s_{4\lambda} a_v q_{u\lambda} \Lambda';
\end{aligned}$$

As expressões acima, do desenvolvimento de p'' e q'' , nos dão o germe equivalente a g de forma genérica. Pela \mathbb{Z}_2 -equivalência temos algumas condições sobre os coeficientes que aparecem nas expressões acima, ou seja, temos $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $p_0 = q_0 = 0$, $s_1^0 > 0$, $s_4^0 > 0$ e $\Lambda'(0) > 0$.

i) Forma normal h_1

Para obter a forma normal h_1 , zermos os coeficientes do desenvolvimento de Taylor acima, restando p''_v , p''_λ , p''_{uu} , q''_{uu} . Mostramos a seguir que os termos zerados são de ordem alta. Igualando os coeficientes restantes a ± 1 , obtemos

$$a) \quad p''_v = s_1^0 p_v b_0^2 = \pm 1 \quad \implies \quad |p_v| b_0^2 s_1^0 = 1,$$

$$b) \quad p''_\lambda = s_1^0 p_\lambda \Lambda'(0) = \pm 1 \quad \implies \quad s_1^0 |p_\lambda| \Lambda'(0) = 1,$$

$$c) p''_{uu} = s_1^0 a_u^2 p_{uu} = \pm 1 \quad \implies \quad s_1^0 a_u^2 |p_{uu}| = 1,$$

$$d) q''_{uu} = s_4^0 q_u a_u b_0 = \pm 1 \quad \implies \quad s_4^0 |q_u| a_u b_0 = 1.$$

Resolvendo estas equações obtemos

$$a) s_1^0 = \frac{1}{b_0^2} |p_v|.$$

$$b) \Lambda'(0) = \frac{1}{s_1^0 |p_\lambda|}.$$

$$c) a_u^2 = \frac{1}{s_1^0 |p_{uu}|}.$$

$$d) s_4^0 = \frac{1}{|q_u| a_u b_0}.$$

Substituindo os valores acima nas expressões p''_v , p''_λ , p''_{uu} e q''_{uu} , concluímos que

$$\varepsilon_1 = \text{ sinal}(p_{uu}), \varepsilon_2 = \text{ sinal}(p_v), \varepsilon_3 = \text{ sinal}(p_\lambda) \text{ e } \varepsilon_4 = \text{ sinal}(q_u).$$

Como já foi observado anteriormente, todas as derivadas são calculadas na origem.

Portanto,

$$h_1 = [\varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 v + \varepsilon_3 \lambda, \varepsilon_4 u].$$

Vamos agora determinar os termos de ordem alta para a forma normal h_1 obtendo os geradores do espaço tangente unipotente.

De (3.18), temos os seguintes geradores:

$$\begin{aligned}
c_1 &= [\epsilon_1 u^3 \epsilon_2 v u + \epsilon_3 u \lambda, 0], \\
c_2 &= [\epsilon_1 u^2 v + \epsilon_2 v^2 + \epsilon_3 v \lambda, 0], \\
c_3 &= [\epsilon_1 u^2 \lambda + \epsilon_2 v \lambda + \epsilon_3 \lambda^2, 0], \\
c_4 &= [\epsilon_4 u v, 0], \\
c_5 &= [0, \epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda], \\
c_6 &= [0, \epsilon_4 u^2], \\
c_7 &= [0, \epsilon_4 u v], \\
c_8 &= [0, \epsilon_4 u \lambda], \\
c_9 &= [2\epsilon_1 u^3, \epsilon_4 u^2], \\
c_{10} &= [2\epsilon_1 u v, \epsilon_4 v], \\
c_{11} &= [3\epsilon_1 u \lambda^2, \epsilon_4 \lambda^2], \\
c_{12} &= [\epsilon_2 v u, 0], \\
c_{13} &= [\epsilon_2 v^2, 0], \\
c_{14} &= [\epsilon_2 v \lambda, 0], \\
c_{15} &= [\epsilon_3 \lambda^2, 0].
\end{aligned}$$

Podemos reescrever estes geradores de forma mais simples. Fazemos as seguintes trocas

$$\begin{aligned}
c_{10} &\longleftrightarrow c_{10} \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2}, \\
c_9 &\longleftrightarrow c_9 - c_6, \\
c_{11} &\longleftrightarrow c_{11} - \frac{\epsilon_1 u}{\epsilon_3} c_{15}.
\end{aligned}$$

obtemos assim, os seguintes geradores

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}_{10} &= [0, \epsilon_4 v, 0], \\
\widetilde{c}_9 &= [2\epsilon_1 u^2, 0], \\
\widetilde{c}_{11} &= [0, \epsilon_4 \lambda^2].
\end{aligned}$$

Podemos ainda fazer as simplificações:

$$\begin{aligned} c_1 &\longleftrightarrow c_1 - \frac{u}{2}c_{12} - \frac{\epsilon_3}{\epsilon_2}c_{14} - c_{13}, \\ c_2 &\longleftrightarrow c_2 - uc_{12} - \frac{\epsilon_3}{\epsilon_2}c_{14} - c_{13}, \\ c_3 &\longleftrightarrow c_3 - \frac{\lambda}{2}\tilde{c}_9 - c_{14} - c_{15}, \\ c_5 &\longleftrightarrow c_5 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_4}c_6 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_4}\tilde{c}_{10}. \end{aligned}$$

Eliminando os geradores redundantes, ficamos com a seguinte lista:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= [\epsilon_3 u \lambda, 0], \\ \tilde{c}_4 &= [\epsilon_4 u v, 0], \\ \tilde{c}_5 &= [0, \epsilon_3 \lambda], \\ \tilde{c}_6 &= [0, \epsilon_1 u^3, 0], \\ \tilde{c}_{10} &= [0, \epsilon_4 v], \\ \tilde{c}_{13} &= [\epsilon_2 v^2, 0], \\ \tilde{c}_{14} &= [\epsilon_2 \lambda v, 0], \\ \tilde{c}_{15} &= [\epsilon_3 \lambda^2, 0]. \end{aligned}$$

Simplificando esses geradores, temos que

$$TU(h_1, \mathbb{Z}_2) = [\mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}^3 + \langle v, \lambda \rangle \mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}, \mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}^2],$$

que é um submódulo intrínseco de acordo com o Lema (3.6.1).

Assim, pelo Teorema (3.6.1),

$$\wp(h_1) \supset \text{itr}TU(h_1, \mathbb{Z}_2) = [\mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}^3 + \langle v, \lambda \rangle \mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}, \mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}^2],$$

ou seja,

$$[\mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}^3 + \langle v, \lambda \rangle \mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}, \mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}^2]$$

são de ordem alta para h_1 .

Observamos que $\mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}^3 \cdot \vec{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) \subset \text{itr}TU(h_1, \mathbb{Z}_2) \subset TU(h_1, \mathbb{Z}_2) \subset T_e(h_1, \mathbb{Z}_2)$, ou seja, o \mathbb{Z}_2 - espaço tangente estendido tem codimensão finita e, portanto, o germe h_1 é finitamente determinado.

Para determinar o desdobramento miniversal da forma normal h_1 , obtemos os geradores do espaço tangente estendido,

$$c_1 = [\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda, 0],$$

$$c_2 = [\epsilon_4 uv, 0],$$

$$c_3 = [0, \epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda],$$

$$c_4 = [0, \epsilon_4 u],$$

$$c_5 = [2\epsilon_1 u, \epsilon_4],$$

$$c_6 = [\epsilon_2 v, 0],$$

$$c_7 = [\epsilon_3, 0].$$

Simplificando esses geradores temos

$$T_e(h_1, \mathbb{Z}_2) = \langle [u^2, 0], [0, v], [0, \lambda], [0, u], [2\epsilon_1 u, \epsilon_4], [v, 0], \rangle_{\mathcal{E}_{x,y,\lambda}(\mathbb{Z}_2)} + \langle [\epsilon_3, 0] \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$$

Note que,

$$[2\epsilon_1 u, \epsilon_4] = [2\epsilon_1 u, 0] + [0, \epsilon_4].$$

Assim, se $[u, 0] \in T_e(h_1, \mathbb{Z}_2)$, então $[0, 1] \in N_e(h_1, \mathbb{Z}_2)$.

Pelo Teorema (3.7.1),

$$G_1 = [\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda, \epsilon_4 u + \alpha]$$

é um desdobramento miniversal para h_1 e $\text{cod}_{\mathbb{Z}_2} h_1 = 1$.

ii) Forma normal h_5

Do desenvolvimento de Taylor, obtemos

$$\begin{aligned} p''_{uu} &= s_1^0 a_u^2 p_{uu}, \\ p''_v &= s_1^0 p_v b_0^2, \\ p''_\lambda &= s_1^0 p_\lambda \Lambda', \\ q''_v &= s_4^0 b_0^3 q_v - \frac{s_4^0 q_\lambda b_0^3 p_v}{p_\lambda} \\ q''_{uu} &= \frac{-S_4^0 q_\lambda b_0 a_u^2 p_{uu}}{p_\lambda} + S_4^0 a_u^2 q_{uu} b_0. \end{aligned}$$

Para obter a forma normal h_5 , fazemos

- a) $p''_{uu} = s_1^0 a_u^2 p_{uu} = \pm 1 \quad \implies \quad |p_{uu}| a_u^2 s_1^0 = 1,$
- b) $p''_v = s_1^0 p_v b_0^2 = \pm 1 \quad \implies \quad s_1^0 |p_v| b_0^2 = 1,$
- c) $p''_\lambda = s_1^0 p_\lambda \Lambda' = \pm 1 \quad \implies \quad s_1^0 \Lambda' |p_\lambda| = 1,$
- d) $q''_v = s_4^0 b_0^3 q_v - \frac{s_4^0 q_\lambda b_0^3 p_v}{p_\lambda} = \pm 1 \quad \implies \quad |s_4^0 b_0^3 (q_v p_\lambda - q_\lambda p_v)| = |p_\lambda|.$

Resolvendo estas equações, obtemos

- a) $s_1^0 = \frac{1}{a_u^2 |p_{uu}|}.$
- b) $b_0^2 = \frac{1}{s_1^0 |p_v|}.$
- c) $\Lambda' = \frac{1}{s_1^0 |p_\lambda|}.$
- d) $s_4^0 = \frac{|p_\lambda|}{b_0^3 |q_v p_\lambda - q_\lambda p_v|}.$

Substituindo os valores acima nas expressões p''_v , p''_λ , p''_{uu} e q''_v , concluímos que

$$\varepsilon_1 = \text{sinal}(p_{uu}), \varepsilon_2 = \text{sinal}(p_v), \varepsilon_3 = \text{sinal}(p_\lambda) \text{ e } \varepsilon_4 = \text{sinal } \varepsilon_3 (q_v p_\lambda - q_\lambda p_v).$$

Temos ainda que

$$q''_{uu} = \frac{-s_4^0 q_\lambda b_0 a_u^2 p_{uu}}{p_\lambda} + s_4^0 a_u^2 q_{uu} b_0.$$

e substituindo as expressões obtidas acima, segue que $q_{uu} = \frac{b_0 a_u^2 (p_\lambda q_{uu} - q_\lambda p_{uu})}{p_\lambda b_0^3 |q_v p_\lambda - q_\lambda p_v|} |p_\lambda|$ e, portanto,

$$m = \frac{\epsilon_3 |p_v| (p_\lambda q_{uu} - q_\lambda p_{uu})}{|p_{uu}| |q_v p_\lambda - q_\lambda p_v|}$$

que é o parâmetro modal para a forma normal h_5 , onde $m \neq 0$, $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_4$.

Portanto,

$$h_5 = [\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda, mu^2 + \epsilon_4 v].$$

Para determinar os termos de ordem alta para a forma normal $h_5 = [\epsilon_1 u^2 \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda, mu^2 + \epsilon_4 v]$, obtemos os seguintes geradores para $TU(h_5, \mathbb{Z}_2)$

$$c_1 = [\epsilon_1 u^3 + \epsilon_2 v u + \epsilon_3 u \lambda, 0],$$

$$c_2 = [\epsilon_1 u^2 v + \epsilon_2 v^2 + \epsilon_3 v \lambda, 0],$$

$$c_3 = [\epsilon_1 u^2 \lambda + \epsilon_2 v \lambda + \epsilon_3 \lambda^2, 0],$$

$$c_4 = [mu^2 v + \epsilon_4 v^2 uv, 0],$$

$$c_5 = [0, \epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda],$$

$$c_6 = [0, mu^3 + \epsilon_4 uv],$$

$$c_7 = [0, mu^2 v + \epsilon_4 v^2],$$

$$c_8 = [0, mu^2 \lambda + \epsilon_4 v \lambda],$$

$$c_9 = [2\epsilon_1 u^3, 2mu^3],$$

$$c_{10} = [2\epsilon_1 uv, 2mu v],$$

$$c_{11} = [2\epsilon_1 u \lambda^2, 2m \lambda^2 u],$$

$$c_{12} = [\epsilon_2 v u, \epsilon_4 v u],$$

$$c_{13} = [\epsilon_2 v^2, \epsilon_4 v^2],$$

$$c_{14} = [\epsilon_2 v^2 \lambda, \epsilon_4 v \lambda],$$

$$c_{15} = [\lambda^2, 0].$$

Da mesma forma como fizemos para h_1 , podemos simplificar estes geradores e obter uma nova lista de geradores dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_1 &= [\epsilon_3 u \lambda, 0], \\
\tilde{c}_2 &= [\epsilon_3 \lambda v, 0], \\
\tilde{c}_5 &= [0, \epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda], \\
\tilde{c}_6 &= [0, m u^2], \\
\tilde{c}_7 &= [0, 2\epsilon_4 v^2], \\
\tilde{c}_8 &= [0, m u^2 \lambda], \\
\tilde{c}_9 &= [2\epsilon_1 u^3, 0], \\
\tilde{c}_{10} &= [0, k u v], \\
\tilde{c}_{12} &= [\epsilon_2 v u, 0], \\
\tilde{c}_{13} &= [\epsilon_2 v^2, 0] \\
\tilde{c}_{14} &= [0, \epsilon_3 \lambda^2], \\
\tilde{c}_{15} &= [\epsilon_3 \lambda^2, 0].
\end{aligned}$$

Segue desses geradores que

$$TU(h_5, \mathbb{Z}_2) = [\mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}^3 + \mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}\langle v, \lambda \rangle, \mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}^3 + \mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}\langle v, \lambda \rangle].$$

Assim, pelo Teorema (3.6.1) temos que $[\mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}^3 + \mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}\langle v, \lambda \rangle, \mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}^3 + \mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}\langle v, \lambda \rangle]$ são os termos de ordem alta para h_5 .

Observamos que $\mathcal{M}_{(u,v,\lambda)}^3 \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}}_{(x,y,\lambda)}(\mathbb{Z}_2) \subset \text{itr}TU(h_5, \mathbb{Z}_2) \subset TU(h_5, \mathbb{Z}_2) \subset T_e(h_5, \mathbb{Z}_2)$, ou seja, o \mathbb{Z}_2 -espaço tangente estendido tem codimensão finita e, portanto, o germe h_5 é finitamente determinado.

Vamos determinar um desdobramento miniversal para a forma normal h_5 . Os geradores do espaço tangente estendido nesse caso são

$$\begin{aligned}
c_1 &= [\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda, 0], \\
c_2 &= [mu^2 v + \epsilon_2 v^2, 0], \\
c_3 &= [0, \epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda], \\
c_4 &= [0, mu^2 + \epsilon_2 v], \\
c_5 &= [2\epsilon_1 u, 2mu], \\
c_6 &= [\epsilon_2 v, \epsilon_4 v], \\
c_7 &= [\epsilon_3, 0].
\end{aligned}$$

Simplificando esses geradores, obtemos

$$\begin{aligned}
c_1 &= [\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v, 0], \\
c_2 &= [mu^2 v + \epsilon_2 v^2, 0], \\
c_3 &= [0, \epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda], \\
c_4 &= \left[\frac{-\epsilon_2^2}{\epsilon_4} v, mu^2 \right], \\
c_5 &= [2\epsilon_1 u, 2mu], \\
c_6 &= [\epsilon_2 v, \epsilon_4 v], \\
c_7 &= [\epsilon_3, 0].
\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}
[2\epsilon_1 u, 2mu] &= [2\epsilon_1 u, 0] + [0, 2mu], \\
\left[\frac{-\epsilon_2^2}{\epsilon_4} v, mu^2 \right] &= \left[\frac{-\epsilon_2^2}{\epsilon_4} v, 0 \right] + [0, mu^2].
\end{aligned}$$

Se $[2\epsilon_1 u, 0], \left[\frac{-\epsilon_2^2}{\epsilon_4} v, 0 \right] \in T_e(h_5, \mathbb{Z}_2)$, então $[0, 2mu], [0, mu^2] \in N_e(h_5, \mathbb{Z}_2)$.

Finalmente, obtemos que $N_e(h_5, \mathbb{Z}_2) = \langle [0, u], [0, u^2], [0, 1] \rangle$. Logo, pelo teorema (3.7.1),

$$G_5 = [\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v + \epsilon_3 \lambda, mu^2 - \beta u + \epsilon_4 v - \alpha]$$

é um desdobramento miniversal de h_5 e $\text{cod}_{\mathbb{Z}_2} h_5 = 3$.

Para os demais casos, seguimos o método clássico descrito acima usando as respectivas condições de definição. Por isso, omitiremos os cálculos. Repetimos a construção no caso 5, para enfatizar a presença do parâmetro modal m . ■

Capítulo 4

Diagramas de Bifurcação

A descrição geométrica das formas normais obtidas no capítulo 3 e seus respectivos desdobramentos são feitos através dos diagramas de bifurcação. Dado um problema de bifurcação g , o diagrama de bifurcação associado é dado pelo conjunto de zeros de g .

Paralelamente, estudamos a estabilidade das soluções através dos sinais dos autovalores da matriz Jacobiana do desdobramento de cada forma normal. Os sinais ++ correspondem às soluções assintoticamente estáveis. Os demais sinais às instáveis (ver Proposição (2.10.1), Capítulo 2).

Recordamos que $u = x$ e $v = y^2$. Trabalhamos com x e y ou u e v conforme conveniência.

Seja $G(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = (p(x, v, \lambda, \alpha, \beta), q(x, v, \lambda, \alpha, \beta)y) = [p(x, v, \lambda, \alpha, \beta), q(x, v, \lambda, \alpha, \beta)]$ um desdobramento das formas normais nos parâmetros α e β .

Existem dois tipos de soluções da equação $G(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = 0$:

- $y = 0$ e $p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0$ com subgrupo de isotropia \mathbb{Z}_2 e correspondentes aos pontos de equilíbrio.
- $p(x, v, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, v, \lambda, \alpha, \beta) = 0$ com subgrupo de isotropia trivial e correspondentes às soluções periódicas.

4.1 Bifurcações Genéricas

Bifurcações genéricas são bifurcações que persistem sob pequenas perturbações. Há três tipos de bifurcações genéricas:

1. Uma dobra ao longo de $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2)$:

$$\mathcal{F}^o = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \},$$

2. Uma bifurcação do $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2)$ para $\text{Fix}(\mathbf{1})$:

$$\mathcal{P} = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \},$$

3. Uma dobra ao longo de $\text{Fix}(\mathbf{1})$:

$$\mathcal{F} = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, v, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, v, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_v \\ q_x & q_v \end{vmatrix} (x, v, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \}.$$

4.2 Variedades de Transição

Definição 4.2.1. Uma *variedade de transição* é uma variedade algébrica no espaço dos parâmetros de desdobramento onde existe uma singularidade de codimensão maior ou igual a 1.

Existem três tipos de variedades de transição. Primeiro, quando existe um germe de bifurcação \mathbb{Z}_2 -equivariante de corank um na origem, isto é,

$$S_I = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(0, 0, 0, \alpha, \beta) = 0 \}.$$

Segundo, quando a bifurcação genérica torna-se degenerada. Neste caso, temos

(i) um ponto de bifurcação em $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2)$:

$$\mathcal{B}^0 = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_\lambda(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \},$$

(ii) um ponto de hysteresis em $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2)$:

$$\mathcal{H}^0 = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_{xx}(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \},$$

(iii) a coincidência de uma dobra em $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2)$ e um ponto de bifurcação em $\text{Fix}(\mathbf{1})$:

$$\mathcal{I} = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \},$$

(iv) a coincidência de dois pontos de bifurcação em $\text{Fix}(\mathbf{1})$:

$$\mathcal{J} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0 = \begin{vmatrix} p_x & p_\lambda \\ q_x & q_\lambda \end{vmatrix} (x, 0, \lambda, \alpha, \beta) \right\},$$

(v) a coincidência de uma dobra em $\text{Fix}(\mathbf{1})$ e um ponto de bifurcação em $\text{Fix}(\mathbf{1})$:

$$\mathcal{Q} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_v \\ q_x & q_v \end{vmatrix} (x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \right\},$$

(vi) um ponto de bifurcação em $\text{Fix}(\mathbf{1})$:

$$\mathcal{B} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, v, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, v, \lambda, \alpha, \beta) = 0, \text{rank} \begin{pmatrix} p_x & p_v & p_\lambda \\ q_x & q_v & q_\lambda \end{pmatrix} (x, v, \lambda, \alpha, \beta) \leq 1, \right\},$$

(vii) uma hysteresis em $\text{Fix}(\mathbf{1})$:

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, v, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, v, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_v \\ q_x & q_v \end{vmatrix} (x, v, \lambda, \alpha, \beta) = 0, \right. \\ \left. d_2(p, q)(w, w) \in \text{Im}(d(p, q)) \right\},$$

onde $d(p, q)$ representa a Jacobiana em (x, y) da aplicação $(x, y) \mapsto (p, q)$, $w \neq 0$ está em seu núcleo e $d_2(p, q)$ representa sua derivada de segunda ordem.

Finalmente, quando duas bifurcações genéricas ocorrem para o mesmo valor de λ . Temos:

$$(a) \mathcal{D}(\mathcal{F}^o, \mathcal{F}^o) = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x_1 \neq x_2, p(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p(x_2, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x_2, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \},$$

$$(b) \mathcal{D}(\mathcal{F}^o, \mathcal{P}) = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x_1 \neq x_2, p(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p(x_2, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x_2, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \},$$

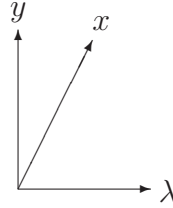
$$(c) \mathcal{D}(\mathcal{F}^o, \mathcal{F}) = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p(x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) = q(x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_v \\ q_x & q_v \end{vmatrix} (x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \},$$

$$(d) \mathcal{D}(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x_1 \neq x_2, p(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p(x_2, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x_2, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \},$$

$$(e) \mathcal{D}(\mathcal{P}, \mathcal{F}) = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p(x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) = q(x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_v \\ q_x & q_v \end{vmatrix} (x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \},$$

$$(f) \mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x_1, v_1) \neq (x_2, v_2), p(x_1, v, \lambda, \alpha, \beta) = q(x_1, v, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_v \\ q_x & q_v \end{vmatrix} (x_1, v, \lambda, \alpha, \beta) = p(x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) = q(x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_v \\ q_x & q_v \end{vmatrix} (x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) = 0 \}.$$

Os diagramas de bifurcação estão no espaço (λ, x, y) .



4.3 Diagramas de Bifurcação

- Cálculo dos autovalores de $(D_{(x,y)}G)(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = (DG)(x, y, \lambda, \alpha, \beta)$.

Temos

$$(DG)(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} p_x(x, v, \lambda, \alpha, \beta) & 2yp_v(x, v, \lambda, \alpha, \beta) \\ yq_x(x, v, \lambda, \alpha, \beta) & q(x, v, \lambda, \alpha, \beta) + 2vq_v(x, v, \lambda, \alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

Para soluções com \mathbb{Z}_2 -isotropia, temos

$$(DG)(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) & 0 \\ 0 & q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovalores de $(DG)(x, 0, \lambda, \alpha, \beta)$ são $p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta)$ e $q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta)$.

Para soluções com isotropia trivial,

$$(DG)(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} p_x(x, v, \lambda, \alpha, \beta) & 2yp_v(x, v, \lambda, \alpha, \beta) \\ yq_x(x, v, \lambda, \alpha, \beta) & 2vq_v(x, v, \lambda, \alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\text{tr}(DG)(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x, v, \lambda, \alpha, \beta) + 2vq_v(x, v, \lambda, \alpha, \beta)$$

$$\det(DG)(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = 2 [p_x(x, v, \lambda, \alpha, \beta)q_v(x, v, \lambda, \alpha, \beta) - q_x(x, v, \lambda, \alpha, \beta)p_v(x, v, \lambda, \alpha, \beta)] v.$$

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0$	$p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta); q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta)$
$\mathbf{1}$	$p(x, v, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, v, \lambda, \alpha, \beta) = 0$	$tr(DG) = p_x + 2vq_v$ $det(DG) = 2[p_xq_v - q_xp_v]v$

Tabela 4.1: Soluções e autovalores de $G \equiv 0$.

Para simplificar a notação nas tabelas, a matriz Jacobiana com derivadas nas variáveis x e y do desdobramento $G(x, y, \lambda, \alpha, \beta)$ será denotada por DG .

Podemos construir a seguinte tabela:

Os sinais dos parâmetros dos desdobramentos obtidos na Tabela (3.3) do capítulo 3 são alterados, por conveniência, para reduzir o número de possibilidades dos sinais que são analisados.

4.4 Diagramas de Bifurcação da Primeira Forma Normal

O desdobramento da primeira forma normal é uma aplicação $G_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$G_1(x, y, \lambda, \alpha) = (\epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y + \epsilon_3 \lambda, \epsilon_4(x - \alpha)y).$$

Vamos analisar o caso em que $\epsilon_1 = 1$ e $\epsilon_3 = -1$. Assim,

$$G_1(x, y, \lambda, \alpha) = [x^2 + \epsilon_2 y^2 - \lambda, \epsilon_4(x - \alpha)].$$

Quando $\alpha = 0$, temos

$$G_1(x, y, \lambda) = [x^2 + \epsilon_2 y^2 - \lambda, \epsilon_4 x]. \quad (4.1)$$

Na Tabela (4.2) estão as soluções do problema $G_1 \equiv 0$, e os resultados dos autovalores respectivos, quando $\epsilon_2 = 1$ e $\epsilon_4 = -1$.

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$2x$ $\epsilon_4 x$
$\mathbf{1}$	$x = 0$ $\lambda = y^2$	$\text{tr } DG_1 = 0$ $\det DG_1 = 4$

Tabela 4.2: Soluções e Autovalores.

Como a soma dos autovalores ao longo do ramo com isotropia trivial deve ser zero e produto positivo, segue que os autovalores ao longo deste ramo devem ser imaginários puros.

Tomando $\epsilon_2 = 1$ e $\epsilon_4 = -1$ obtemos os seguintes sinais para os autovalores ao longo da ramo de soluções com \mathbb{Z}_2 -isotropia:

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Intervalos de x	Sinais dos Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$x > 0$	$+-$
		$x < 0$	$-+$
$\mathbf{1}$	$x = 0$ $\lambda = y^2$		(ii) imaginários puros

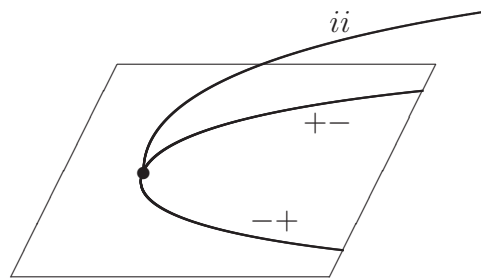


Figura 4.1: Diagrama de bifurcação.

Na Tabela (4.3) estão as soluções do problema $G_1 \equiv 0$ quando $\alpha \neq 0$ e os sinais resultados sobre os respectivos autovalores.

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Sinais dos Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$2x$ $\epsilon_4(x - \alpha)$
$\mathbf{1}$	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^2 + \epsilon_2 y^2$	$\text{tr } DG_1 = 2x$ $\det DG_1 = -4\epsilon_2\epsilon_4$

Tabela 4.3: Soluções e autovalores para G_1 .

Neste caso, temos a variedade de transição

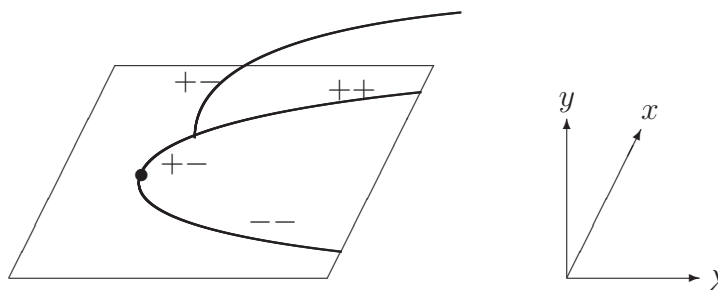
$$S_I = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid p(0, 0, 0, \alpha) = 0\} = \{\alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Suponhamos que $\alpha \neq 0$. Temos as seguintes possibilidades:

- (a) $\epsilon_2 = 1$ e $\epsilon_4 = 1$.

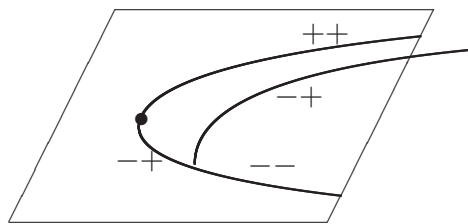
Para $\alpha > 0$, temos

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Intervalos de x	Sinais dos Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$\alpha < x$	++
		$0 < x < \alpha$	+-
		$x < 0$	--
$\mathbf{1}$	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^2 + y^2$		+-



Se $\alpha < 0$, então

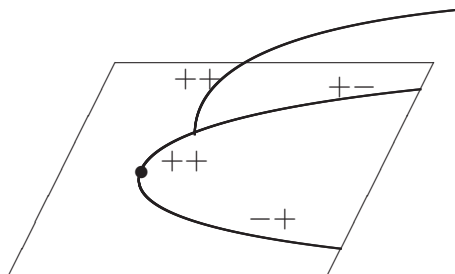
Subgrupo de Isotropia	Soluções	Intervalos de x	Sinais dos Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$x > 0$	++
		$\alpha < x < 0$	--+
		$x < \alpha$	--
1	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^2 + y^2$		--+



(b) $\epsilon_2 = 1$ e $\epsilon_4 = -1$.

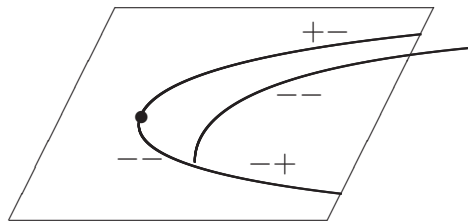
Para $\alpha > 0$, temos

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Intervalos de x	Sinais dos Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$\alpha < x$	+ -
		$0 < x < \alpha$	++
		$x < 0$	--+
1	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^2 + y^2$		++



Para $\alpha < 0$,

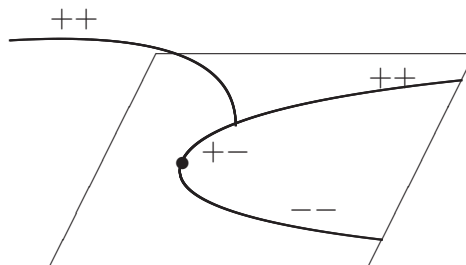
Subgrupo de Isotropia	Soluções	Intervalos de x	Sinais dos Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$x > 0$	$+-$
		$\alpha < x < 0$	$--$
		$x < \alpha$	$-+$
1	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^2 + y^2$		$--$



(c) $\epsilon_2 = -1$ e $\epsilon_4 = 1$.

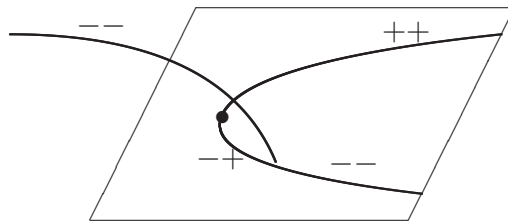
Quando $\alpha > 0$, temos

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Intervalos de x	Sinais dos Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$\alpha < x$	$++$
		$0 < x < \alpha$	$+-$
		$x < 0$	$--$
1	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^2 - y^2$		$++$



Para $\alpha < 0$,

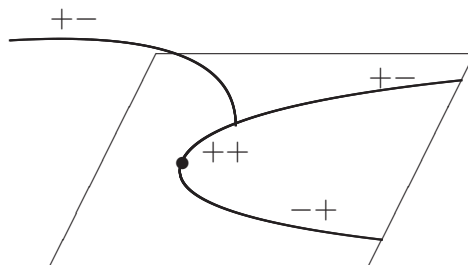
Subgrupo de Isotropia	Soluções	Intervalos de x	Sinais dos Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$x > 0$	++
		$\alpha < x < 0$	-+
		$x < \alpha$	--
1	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^2 - y^2$		--



(d) $\epsilon_2 = -1$ e $\epsilon_4 = -1$.

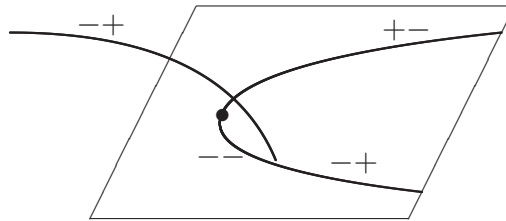
Quando $\alpha > 0$, temos

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Intervalos de x	Sinais dos Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$\alpha < x$	+ -
		$0 < x < \alpha$	++
		$x < 0$	-+
1	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^2 + y^2$		+ -



Para $\alpha < 0$,

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Intervalos de x	Sinais dos Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$x > 0$	$+-$
		$\alpha < x < 0$	$--$
		$x < \alpha$	$-+$
$\mathbf{1}$	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^2 + y^2$		$-+$



4.5 Diagramas de Bifurcação da Segunda Forma Normal

O desdobramento da segunda forma normal é uma aplicação $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$G_2(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = (\epsilon_1 x^3 + \epsilon_2 y^2 + \epsilon_3 \lambda + \beta u, \epsilon_4(x - \alpha)y).$$

Vamos analisar o caso em que $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 1$ e $\epsilon_3 = -1$. Assim,

$$G_2(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = (x^3 + v - \lambda - \beta x, \epsilon_4(x - \alpha)y).$$

Na Tabela (4.4) estão as soluções do problema $G_2 \equiv 0$ e os resultados sobre os autovalores respectivos.

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^3 - \beta x$	$3x^2 - \beta$ $\epsilon_4(x - \alpha)$
$\mathbf{1}$	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^3 - \beta\alpha + y^2$	$\text{tr}(DG_2) = 3x^2 - \beta$ $\det(DG_2) = -\epsilon_4$

Tabela 4.4: Soluções e autovalores.

Vamos analisar o caso em que $\epsilon_4 = 1$, isto é,

$$G_2(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = (x^3 + v - \lambda - \beta x, (x - \alpha)y).$$

Temos, neste caso, as seguintes variedades de transição:

- (a) $S_I = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(0, 0, 0, \alpha, \beta) = 0\} = \text{plano } \alpha\beta$.
- (b) $\mathcal{H}^0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_{xx}(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}$.

Resolvendo essas equações, obtemos

$$\begin{cases} \lambda = x^3 - \beta x, \\ x^3 - \beta = 0, \\ 6x = 0. \end{cases} \implies \lambda = \beta = x = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{H}^0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = 0\}.$$

- (c) $\mathcal{I} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}$.

Então,

$$\begin{cases} \lambda = x^3 - \beta x, \\ 3x^2 - \beta = 0, \\ x - \alpha = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} x = \alpha, \\ \beta = 3\alpha^2. \end{cases}$$

Portanto,

$$\mathcal{I} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = 3\alpha^2\}$$

(d) $\mathcal{D}(\mathcal{F}^0, \mathcal{P}) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x_1 \neq x_2, p(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p(x_2, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x_2, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}$. Assim,

$$\begin{cases} \lambda = x_1^3 - \beta x_1, \\ 3x_1^2 - \beta = 0, \\ \lambda = x_2^3 - \beta x_2, \\ x_2 = \alpha. \end{cases}$$

Da segunda equação obtemos que $x_1^2 = \frac{\beta}{3}$. Igualando a primeira e a terceira equação deste último sistema, obtemos

$$x_1^3 - x_2^3 - \beta(x_1 - x_2) = 0 \implies (x_1 - x_2)[(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) - \beta] = 0.$$

Substituindo $x_2 = \alpha$ e $x_1^2 = \frac{\beta}{3}$, na última expressão, obtemos

$$\frac{\beta}{3} + \alpha^2 + \alpha x_1 - \beta = 0 \implies \alpha x_1 = \frac{2}{3}\beta - \alpha^2.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$$\frac{4}{9}\beta^2 - \frac{5}{3}\beta\alpha^2 + \alpha^4 = 0. \quad (4.2)$$

Logo,

$$\beta = \frac{\frac{5}{3}\alpha^2 \pm \alpha^2}{\frac{8}{9}} \implies \begin{cases} \beta = 3\alpha^2 \\ \text{ou} \\ \beta = \frac{3}{4}\alpha^2. \end{cases}$$

Portanto,

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}^0, \mathcal{P}) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = 3\alpha^2 \text{ ou } \beta = \frac{3}{4}\alpha^2\}.$$

Na Figura (4.2) representamos as variedades de transição para este caso.

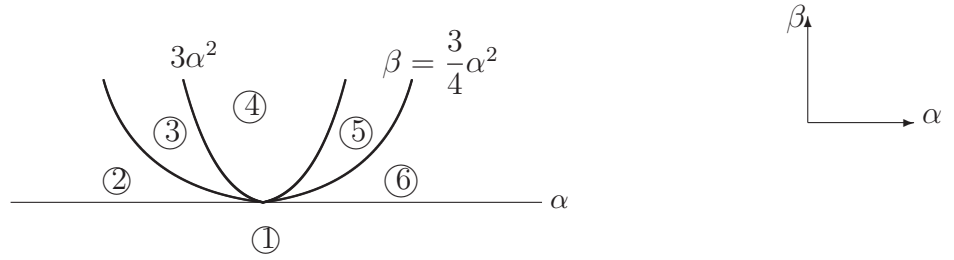
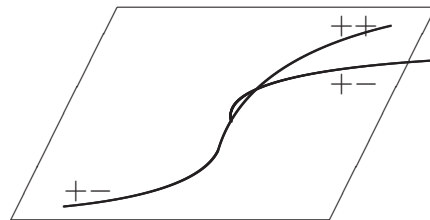


Figura 4.2: Variedades de transição.

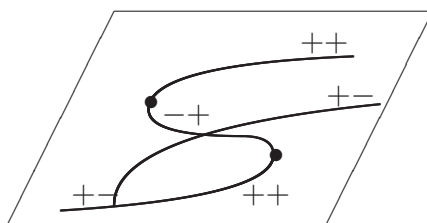
(1) Região (1): $\beta < 0$.

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Autovalores	Intervalos de x	Sinais
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^3 - \beta x$	$3x^2 - \beta$ $x - \alpha$	$x > \alpha$	++
			$x < \alpha$	+ -
1	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^3 - \beta\alpha + y^2$	$\text{tr}(DG_2) = 3x^2 - \beta$ $\det(DG_2) = -1$		+ -



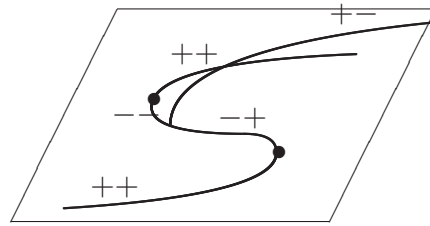
(2) Regiões (2) e (3): $\alpha < -\sqrt{\frac{\beta}{3}}$.

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Autovalores	Intervalos de x	Sinais
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^3 - \beta x$	$3x^2 - \beta$ $x - \alpha$	$x < \alpha$	$+-$
			$\alpha < x < -\sqrt{\frac{\beta}{3}}$	$++$
			$-\sqrt{\frac{\beta}{3}} < x < \sqrt{\frac{\beta}{3}}$	$--$
			$x > \sqrt{\frac{\beta}{3}}$	$++$
1	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^3 - \beta\alpha + y^2$	$\text{tr}(DG_2) = 3x^2 - \beta$ $\det(DG_2) = -1$		$+-$



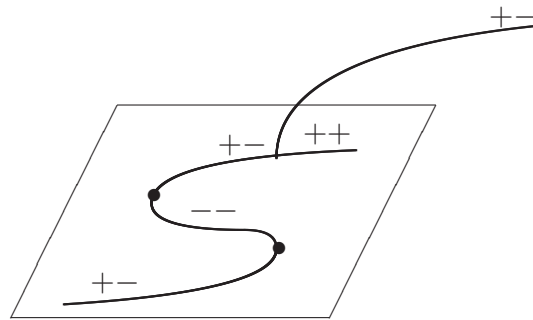
(3) Região (4): $-\sqrt{\frac{\beta}{3}} < \alpha < \sqrt{\frac{\beta}{3}}$.

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Autovalores	Intervalos de x	Sinais
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^3 - \beta x$	$3x^2 - \beta$ $x - \alpha$	$x < -\sqrt{\frac{\beta}{3}}$	$+-$
			$-\sqrt{\frac{\beta}{3}} < x < \alpha$	$--$
			$\alpha < x < \sqrt{\frac{\beta}{3}}$	$-+$
			$x > \sqrt{\frac{\beta}{3}}$	$++$
1	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^3 - \beta\alpha + y^2$	$\text{tr}(DG_2) = 3x^2 - \beta$ $\det(DG_2) = -1$		$+-$



(4) Regiões (5) e (6): $-\sqrt{\frac{\beta}{3}} < \sqrt{\frac{\beta}{3}} < \alpha$.

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Autovalores	Intervalos de x	Sinais
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^3 - \beta x$	$3x^2 - \beta$ $x - \alpha$	$x < -\sqrt{\frac{\beta}{3}}$	$+-$
			$-\sqrt{\frac{\beta}{3}} < x < \sqrt{\frac{\beta}{3}}$	$--$
			$\sqrt{\frac{\beta}{3}} < x < \alpha$	$+-$
			$x > \alpha$	$++$
1	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^3 - \beta\alpha + y^2$	$\text{tr}(DG_2) = 3x^2 - \beta$ $\det(DG_2) = -1$		$+-$



A análise dos sinais para $\epsilon_4 = -1$ é análoga, dessa forma omitimos as tabelas e exibimos apenas os diagrams de bifurcação.

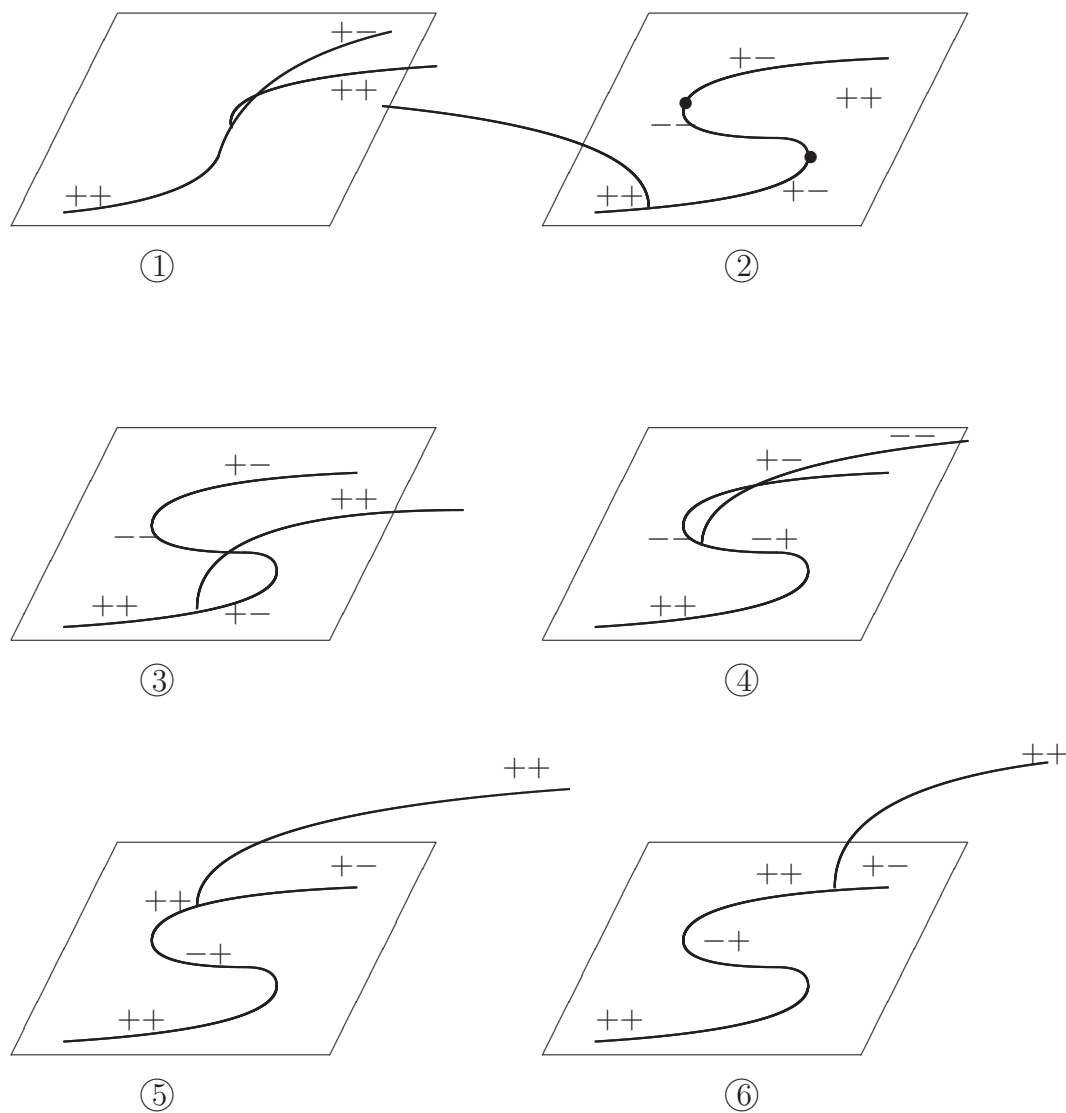


Figura 4.3: Diagramas de bifurcação para $\epsilon_4 = -1$.

4.6 Diagramas de Bifurcação da Terceira Forma Normal

Um desdobramento da terceira forma normal é uma aplicação $G_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$G_3(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = (\epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 v^2 + \epsilon_3 \lambda + \beta v, \epsilon_4(x - \alpha)y).$$

Vamos analisar o caso em que $\epsilon_1 = 1$ e $\epsilon_3 = -1$, assim

$$G_3(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = (x^2 + \epsilon_2(y^4 - \beta y^2) - \lambda, \epsilon_4(x - \alpha)y). \quad (4.3)$$

Na Tabela (4.10) estão as soluções do problema $G_3 \equiv 0$ e os resultados sobre os autovalores respectivos.

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$2x$ $\epsilon_4(x - \alpha)$
1	$x = \alpha$ $\lambda = \alpha^2 + \epsilon_2(y^4 - \beta y^2)$	$\text{tr}(DG_3) = 2x$ $\det(DG_3) = 2v\epsilon_2\epsilon_4(\beta - 2v)$

Tabela 4.5: Soluções e autovalores de (4.3).

O segundo ramo em $\text{Fix}(\mathbf{1})$ é simétrico em relação a y . Consideramos $y > 0$.

1. $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2)$. Os sinais dos autovalores são dados por x e $\epsilon_4(x - \alpha)$. Eles mudam de sinal em $x = 0$ e $x = \alpha$, respectivamente. Temos que considerar $\alpha > 0$ ou $\alpha < 0$. O sinal de ϵ_4 dobra o número de casos mas somente muda o sinal de um dos autovalores.

- Quando $\alpha > 0$:

	$\epsilon_4 = 1$	$\epsilon_4 = -1$
$x < 0$	--	--+
$0 < x < \alpha$	+-	++
$x > \alpha$	++	+-

Tabela 4.6: Intervalos de x e sinais dos autovalores.

- Quando $\alpha < 0$:

	$\epsilon_4 = 1$	$\epsilon_4 = -1$
$x < \alpha$	--	--+
$\alpha < x < 0$	--+	--
$x > 0$	++	+-

Tabela 4.7: Intervalos de x e sinais dos autovalores.

2. Fix(1). O sinal do traço da Jacobiana é dado por x e o sinal do determinante por $\epsilon_2\epsilon_4(\beta - 2y^2)$. Como em Fix(1), $x = \alpha$, o sinal de x depende de α . O determinante muda de sinal em $y^2 = \frac{\beta}{2}$. Temos que considerar se $\beta > 0$ ou se $\beta < 0$. O sinal de $\epsilon_2\epsilon_4$ dobra o número de casos, mas somente muda o sinal do determinante.

- $\beta > 0$. Recordamos que estamos considerando $y > 0$. Podemos construir a tabela:

	$0 < y < \sqrt{\frac{\beta}{3}}$	$y > \sqrt{\frac{\beta}{3}}$
$\epsilon_2\epsilon_4 > 0, 0 < \alpha$	++	+-
$\epsilon_2\epsilon_4 > 0, \alpha < 0$	--	+-
$\epsilon_2\epsilon_4 < 0, 0 < \alpha$	+-	++
$\epsilon_2\epsilon_4 < 0, \alpha < 0$	+-	--

Tabela 4.8: Intervalos de y e sinais dos autovalores.

- $\beta < 0$. Neste caso $\beta - 2y^2 < 0$. Os sinais dos autovalores dependem do sinal de $\epsilon_2\epsilon_4$ e α , conforme a Tabela (4.9).

$\epsilon_2\epsilon_4 > 0, \alpha \in \mathbb{R}$	+-
$\epsilon_2\epsilon_4 > 0, \alpha > 0$	++
$\epsilon_2\epsilon_4 < 0, 0 < \alpha$	--

Tabela 4.9: Sinais dos autovalores .

Os pontos de máximo e mínimo do ramo $\lambda = \alpha^2 + \epsilon_2(y^4 - \beta y^2)$ são determinados pela variedade de transição $\mathcal{D}(\mathcal{F}^0, \mathcal{F})$.

Quando $\epsilon_2 = 1$, as variedades de transição são dadas por:

- (a) $S_I = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \mid p(0, 0, 0, \alpha) = 0\} = \text{plano } \alpha\beta$.

$$(b) \mathcal{I} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}.$$

Assim,

$$\begin{cases} \lambda = x^2, \\ 2x = 0, \\ x = \alpha. \end{cases} \implies \epsilon_4 x = \alpha = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{I} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = 0\}.$$

$$(c) \mathcal{Q} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_v \\ q_x & q_v \end{vmatrix} (x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}.$$

Então,

$$\begin{cases} \lambda = x^2, \\ \epsilon_4 x = \alpha, \\ -\epsilon_4 \beta = 0. \end{cases} \implies \beta = 0.$$

Portanto,

$$\mathcal{Q} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = 0\}.$$

$$(d) \mathcal{D}(\mathcal{F}^0, \mathcal{F}) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x_1 \neq x_2, p(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p(x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) \\ = q(x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_v \\ q_x & q_v \end{vmatrix} (x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}.$$

Então,

$$\begin{cases} \lambda = x_1^2, \\ 2x_1 = 0, \\ \lambda = x_2^2 + y^4 - \beta y^2, \\ \epsilon_4 x_2 = -\alpha, \\ \beta = 2y^2. \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = x_1 = 0, \\ \beta \geq 0, \\ \alpha^2 + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{2} = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = x_1 = 0, \\ \beta \geq 0, \\ \beta = \pm 2\alpha. \end{cases}$$

Portanto,

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}^0, \mathcal{F}) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta \geq 0 \text{ e } \beta = \pm 2\alpha\}.$$

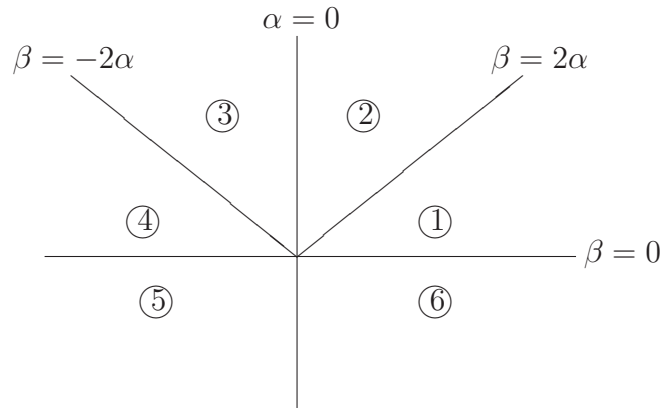


Figura 4.4: Variedades de transição.

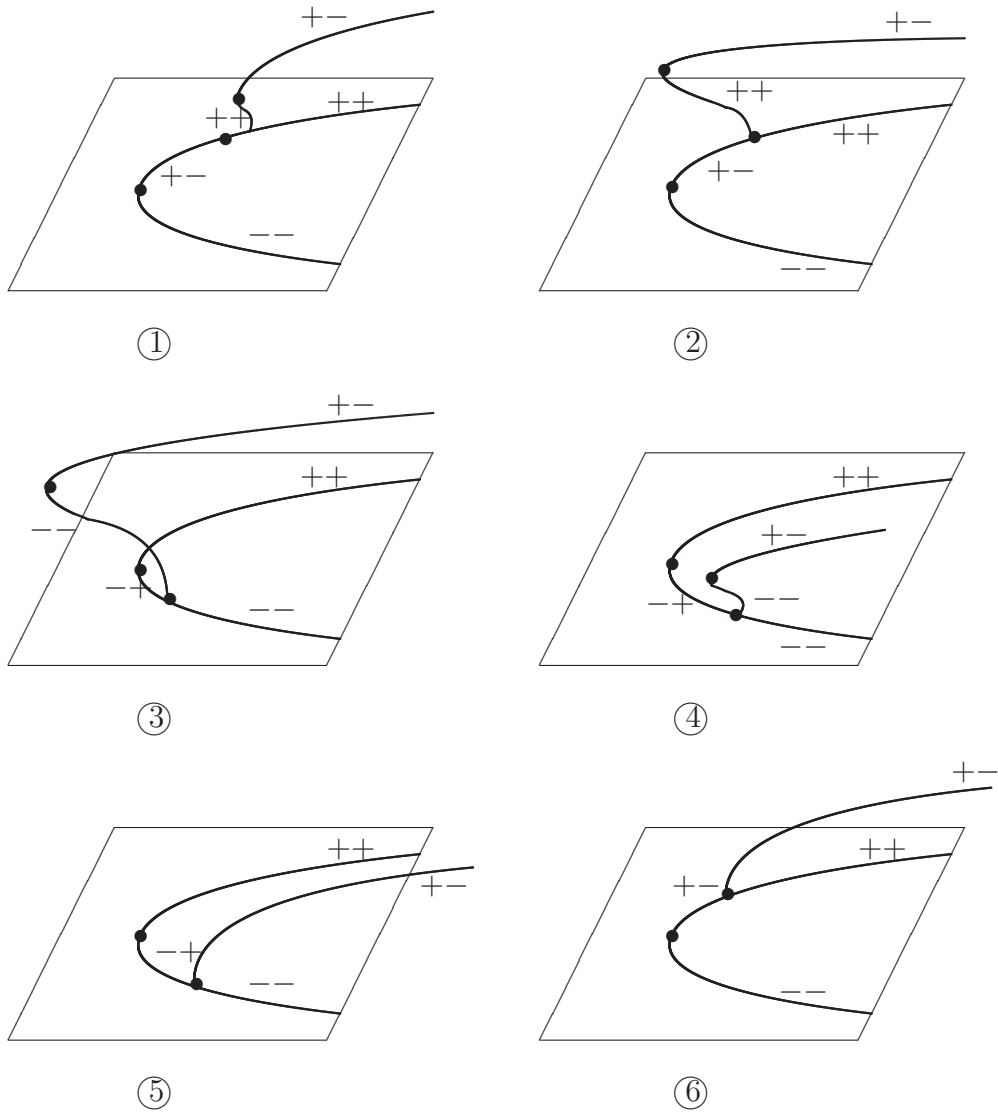


Figura 4.5: Diagramas de bifurcação para $\epsilon_4 = 1$.

A análise dos sinais para $\epsilon_4 = -1$ é análoga, dessa forma exibimos apenas os diagramas de bifurcação.

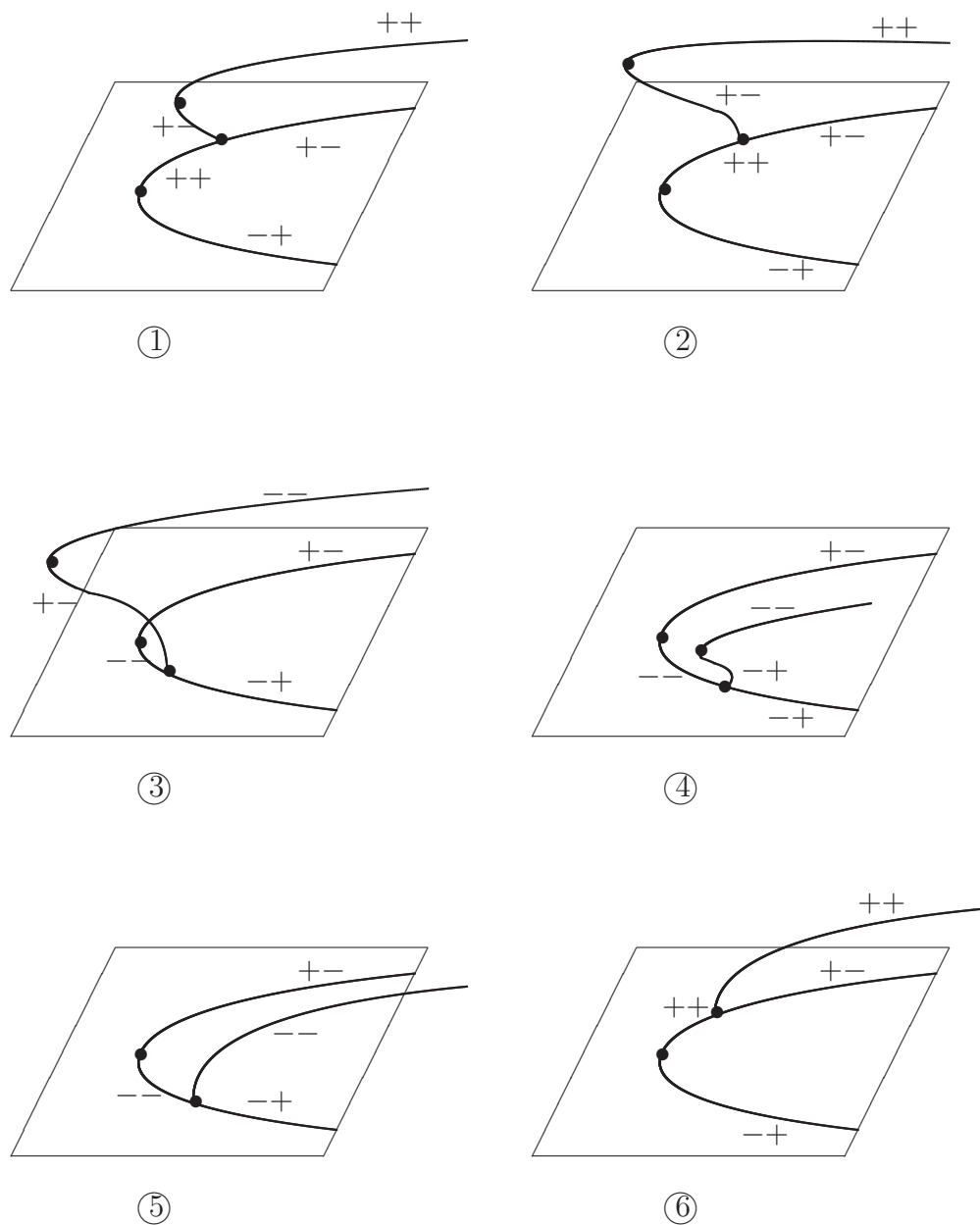


Figura 4.6: Diagramas de bifurcação para $\epsilon_4 = -1$.

A análise para $\epsilon_2 = -1$ é análoga, dessa forma omitimos as tabelas e exibimos os diagramas de bifurcação e as variedades de transição.

$$(a) \mathcal{I} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}.$$

Assim,

$$\begin{cases} \lambda = x^2, \\ 2x = 0, \implies x = \alpha = 0. \\ x = \alpha. \end{cases}$$

Portanto,

$$\mathcal{I} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = 0\}.$$

$$(b) \mathcal{Q} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_v \\ q_x & q_v \end{vmatrix} (x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}.$$

Então,

$$\begin{cases} \lambda = x^2, \\ x = \alpha, \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\mathcal{Q} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = 0\}.$$

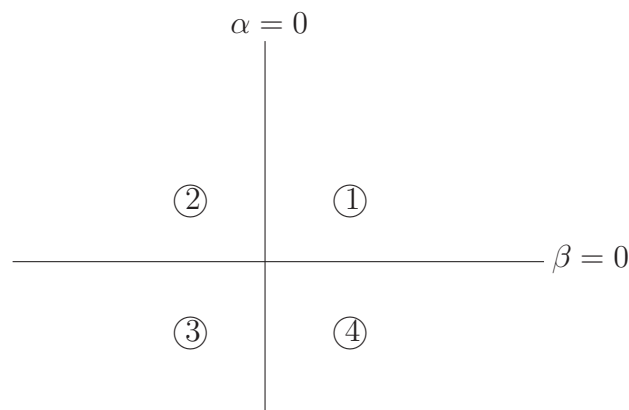


Figura 4.7: Variedades de transição.

Para cada região da Figura (4.7), obtemos os seguintes diagramas de bifurcação quando $\epsilon_4 = 1$:

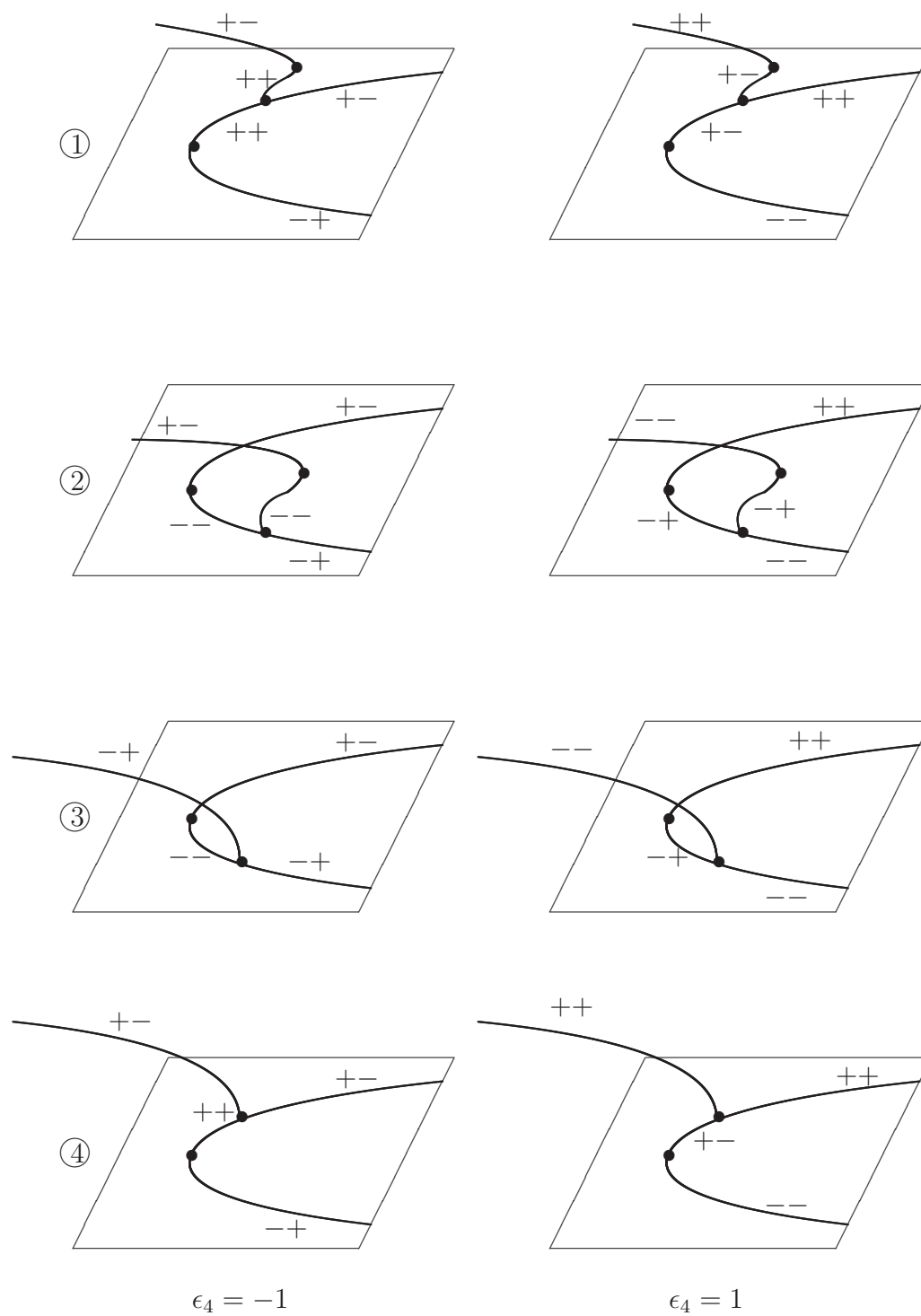


Figura 4.8: Diagramas de Bifurcação para $\epsilon_2 = -1$.

4.7 Diagramas de Bifurcação da Quarta Forma Normal

Agora, vamos considerar o caso em que o desdobramento da segunda quarta forma normal é dado por

$$G_4(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = (x^2 + \epsilon_2 y^2 + m\lambda^2 - \beta, (\epsilon_3 x - \lambda + \alpha)y), m > 0. \quad (4.4)$$

Na Tabela (4.10) estão as soluções do problema $G_4 \equiv 0$ e os resultados sobre os autovalores respectivos.

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $x^2 + m\lambda^2 = \beta, m > 0$	$2x$ $\epsilon_3 x + \alpha - \lambda$
1	$x^2 + \epsilon_2 y^2 + m\lambda^2 = \beta$ $\lambda = \epsilon_3 x + \alpha$	$\text{tr}(DG_4) = 2x$ $\det(DG_4) = -2\epsilon_3 \epsilon_2 y^2$

Tabela 4.10: Soluções e autovalores.

Vamos analisar o caso $\epsilon_2 = 1$.

As variedades de transição são dadas por:

(a) $S_I = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(0, 0, 0, \alpha) = 0\} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = 0\}$.

(b) $\mathcal{I} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}$.

Assim,

$$\begin{cases} x^2 + m\lambda^2 = \beta, \\ 2x = 0, \\ 2m\lambda = 0. \end{cases} \implies x = \lambda = \beta = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{I}^0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = 0\}.$$

(c) $\mathcal{H}^0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_{xx}(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}$.

Então,

$$\begin{cases} x^2 + m\lambda^2 = \beta, \\ 2x = 0, \\ \epsilon_3 x + \alpha = \lambda. \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = m\alpha^2 \\ x = 0 \\ \lambda = \alpha \end{cases}$$

Portanto,

$$\mathcal{H}^0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = m\alpha^2\}.$$

$$(d) \mathcal{J} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_\lambda \\ q_x & q_\lambda \end{vmatrix} (x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}.$$

Então,

$$\begin{cases} x^2 - m\lambda^2 = \beta, \\ \epsilon_3 x + \alpha = \lambda, \\ -2x - 2\epsilon_3 \lambda m = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon_3 x = -\lambda m, \\ \lambda = \frac{\alpha}{1+m}. \end{cases}$$

Substituindo λ e x na primeira equação, obtemos

$$m^2 \frac{\alpha^2}{(1+m)^2} + m \frac{\alpha^2}{(1+m)^2} = \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{m\alpha^2}{1+m}.$$

Portanto,

$$\mathcal{J} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = \frac{m\alpha^2}{1+m} \right\}.$$

Notamos que todas as variedades de transição foram obtidas quando $y = 0$. Portanto, independente do sinal de ϵ_2 as variedades de transição serão as mesmas.

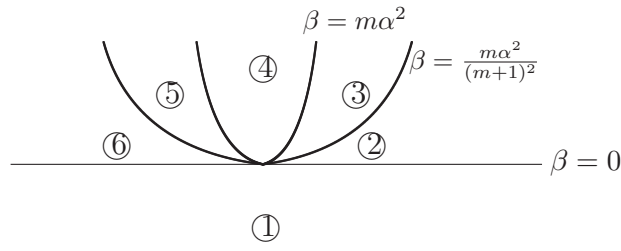


Figura 4.9: Variedades de transição para (4.4).

1. $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2)$. As equações são $y = 0$ e $x^2 + m\lambda^2 = \beta$, com sinais dos autovalores dados por x e $\epsilon_3 x - \lambda + \alpha$.

A equação $x^2 + m\lambda^2 = \beta$ é uma elipse se $\beta > 0$ e vazia se $\beta < 0$. Basta considerar o caso $\beta > 0$. Assim,

$$x_{\pm} = \pm\sqrt{\beta - m\lambda^2} \text{ para } \lambda \in \left[-\sqrt{\frac{\beta}{m}}, \sqrt{\frac{\beta}{m}}\right], \quad (4.5)$$

onde $\beta - m\lambda^2 > 0$.

Um dos autovalores muda de sinal em $x = 0$. As mudanças de sinais no outro autovalor ocorrem quando $\lambda = \lambda_{\pm}$ proveniente da equação $\epsilon_3(\pm\sqrt{\beta - m\lambda^2}) - \lambda + \alpha = 0$, ou seja,

$$\lambda_{\pm} = \frac{\alpha \pm \sqrt{(1+m)\beta - m\alpha^2}}{m+1}. \quad (4.6)$$

O cálculo complicado é para verificar quando λ_{\pm} existe e comparar com as fronteiras de $\pm\sqrt{\frac{\beta}{m}}$. Observamos que λ_{\pm} correspondem aos pontos onde $\text{Fix}(\mathbf{1})$ bifurca de $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2)$.

A existência de λ_{\pm} segue se $\beta > \frac{m}{m+1}\alpha^2$, isto é, nas regiões 3, 4 ou 5.

Mostremos que se λ_{\pm} existe, então $|\lambda_{\pm}|^2 < \frac{\beta}{m}$.

De fato.

Queremos mostrar que

$$\left(\frac{\alpha \pm \sqrt{(1+m)\beta - m\alpha^2}}{m+1}\right)^2 < \frac{\beta}{m}.$$

Expandindo, vemos que

$$(1+m)\beta + (1-m)\alpha^2 \pm 2\alpha\sqrt{(1+m)\beta - m\alpha^2} < \frac{(1+m)^2}{m}\beta$$

$$\pm 2\alpha\sqrt{(1+m)\beta - m\alpha^2} < (m-1)\alpha^2 + \frac{(1+m)}{m}\beta. \quad (4.7)$$

O lado direito de (4.6) é positivo, pois

$$\frac{(1+m)}{m}\beta + (m-1)\alpha^2 > \frac{(1+m)}{m} \frac{m}{(1+m)}\alpha^2 + (m-1)\alpha^2 = m\alpha^2 > 0.$$

Consequentemente, (4.7) é verdadeira se

$$4\alpha^2 \left((1+m)\beta - m\alpha^2 \right) < \left((m-1)\alpha^2 + \frac{(1+m)}{m}\beta \right)^2.$$

Logo, temos

$$0 < (1+m)^2\alpha^4 + \frac{(1+m)^2}{m^2}\beta - 2\alpha^2\beta\frac{(1+m)^2}{m}.$$

O resultado segue pois

$$0 < (1+m)^2 \left(\alpha^2 - \frac{\beta}{m} \right)^2.$$

1. Regiões 2 e 6. Neste caso, não há bifurcação secundária e a estabilidade dos dois ramos depende de x_+ ou x_- . O sinal do segundo autovalor $\epsilon_3x - \lambda + \alpha$ não muda e é igual a α , pois de (4.5), quando $\lambda = 0$, $x_{\pm}(0) = \pm\sqrt{\beta}$ e assim, os autovalores em $(x_{\pm}(0), 0)$ são $\epsilon_3x_{\pm}(0) + \alpha$. Agora, $|x_{\pm}(0)| = \sqrt{\beta}$ e nas regiões 2 e 6,

$$0 < \beta < \frac{m}{(1+m)}\alpha^2 < \alpha^2.$$

Portanto, $\epsilon_3x_{\pm}(0)$ não pode alterar o sinal de α .

Quando $\alpha > 0$ (região 2), os autovalores em x_+ são $(++)$ e em x_- são $(-+)$.

Quando $\alpha < 0$ (região 6), os autovalores em x_+ são $(+-)$ e em x_- são $(--)$.

2. Região 3. Neste caso $\alpha > 0$ e dependendo de ϵ_3 , a bifurcação secundária ocorre no ramo $x_{-\epsilon_3}$. Isto pode ser mostrado pois a mudança de sinal do segundo autovalor ocorre para

$$\hat{x}_{\pm} = \epsilon_3(\lambda_{\pm} - \alpha) = \epsilon_3 \left[\frac{\alpha \pm \sqrt{(1+m)\beta - m\alpha^2}}{m+1} - \alpha \right] = \frac{\epsilon_3}{m+1} \left[-m\alpha \pm \sqrt{(1+m)\beta - m\alpha^2} \right].$$

A expressão entre colchetes muda de sinal quando $\beta = m\alpha^2$ que é a fronteira das regiões 3 e 4. Este resultado segue dos cálculos:

$$\begin{aligned} -m\alpha \pm \sqrt{(1+m)\beta - m\alpha^2} &= 0, \\ m\alpha &= \pm \sqrt{(1+m)\beta - m\alpha^2}, \\ m^2\alpha^2 &= (1+m)\beta - m\alpha^2, \\ (m^2 + m)\alpha^2 &= \beta(1+m), \\ \beta &= m\alpha^2. \end{aligned}$$

Na região 3, $\sqrt{(1+m)\beta - m\alpha^2} < m\alpha$ porque $(1+m)\beta - m\alpha^2 < m^2\alpha^2$, o que implica que $\beta < m\alpha^2$. Assim, os pontos \hat{x}_{\pm} tem o mesmo sinal de $-\epsilon_3$ porque $m\alpha$ é positivo nesta região.

Portanto, os sinais dos autovalores são como se segue.

Quando $\epsilon_3 = 1$, sobre o ramo x_+ não temos mudança nos sinais dos autovalores. Um autovalor é x e, conseqüentemente, positivo e o outro é $\epsilon_3 x - \lambda + \alpha$. Tomando $\lambda = -\sqrt{\frac{\beta}{m}}$, temos $x_+ = \sqrt{\beta - m\lambda^2} = 0$ e o segundo autovalor é $\sqrt{\frac{\beta}{m}} - \alpha > 0$. No ramo x_+ , os sinais são $(++)$.

No ramo x_- , as mudanças ocorrem em λ_{\pm} . O primeiro autovalor x é negativo. Para o segundo, há três intervalos a considerar:

- $\lambda \in \left[-\sqrt{\frac{\beta}{m}}, \lambda_-\right]$, o segundo autovalor é positivo.
- $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$, o segundo autovalor é negativo.
- $\lambda \in \left[\lambda_+, \sqrt{\frac{\beta}{m}}\right]$, o segundo autovalor é positivo.

Então, os sinais sobre x_- são $(-+)$, $(--)$ e $(-+)$.

Em **Fix(1)**, temos que o sinal do determinante é negativo e, portanto, os autovalores tem sinal $(+-)$.

3. Região 5. Nesta região, $\alpha < 0$. Os diagramas comportam-se basicamente como na região 3 com curvas x_{\pm} mudando devido ao sinal de α . A bifurcação secundária ocorre no ramo x_{ϵ_3} . Como no caso anterior, $\hat{x}_{\pm} = \epsilon_3(\lambda_{\pm} - \alpha)$ e os ramos tem sinal igual a ϵ_3 porque $\lambda_{\pm} - \alpha > 0$.

Portanto, os autovalores são como segue:

Quando $\epsilon_3 = 1$, sobre x_- , os sinais dos autovalores são $(--)$. Sobre x_+ , os sinais dependem dos intervalos de λ :

- $\lambda \in \left(-\sqrt{\frac{\beta}{m}}, \lambda_-\right)$: $(+-)$.
- $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$: $(++)$.
- $\lambda \in \left(\lambda_+, \sqrt{\frac{\beta}{m}}\right)$: $(+-)$.

4. Região 4. Nesta região, os dois pontos da bifurcação secundária são $\hat{x}_{\pm} = \epsilon_3(\lambda_{\pm} - \alpha)$ e tem sinais opostos. Isto pode ser visto porque $\sqrt{(1+m)\beta - m\alpha^2}$ é maior em módulo que $|m\alpha|$. Conseqüentemente, \hat{x}_{\pm} terão os sinais $\pm\epsilon_3$. Os sinais dos autovalores são como se segue quando $\epsilon_3 = 1$.

Sobre x_+ , eles dependem dos intervalos de λ .

- $\lambda \in \left(-\sqrt{\frac{\beta}{m}}, \lambda_+\right): (++)$.
- $\lambda \in \left(\lambda_+, \sqrt{\frac{\beta}{m}}\right): (+-)$.

Sobre x_- :

- $\lambda \in \left(-\sqrt{\frac{\beta}{m}}, \lambda_-\right): (+-)$.
- $\lambda \in \left(\lambda_-, \sqrt{\frac{\beta}{m}}\right): (--)$.

Sobre $\text{Fix}(\mathbf{1})$, reorganizando as equações obtemos

$$\epsilon_2 y^2 = \beta - (1+m)\lambda^2 + 2\alpha\lambda - \alpha^2.$$

Esta equação é simétrica em y .

Dependendo de ϵ_2 temos uma elipse ou hipérbole. Analisamos $\epsilon_2 = 1$. Neste caso, $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ onde as fronteiras do intervalo são dadas por (4.6) e o ramo é uma elipse.

O sinal do determinante da Jacobiana é dado por $-\epsilon_2\epsilon_3 = \epsilon_3$. No caso em que $\epsilon_3 = 1$, os autovalores são $(+-)$.

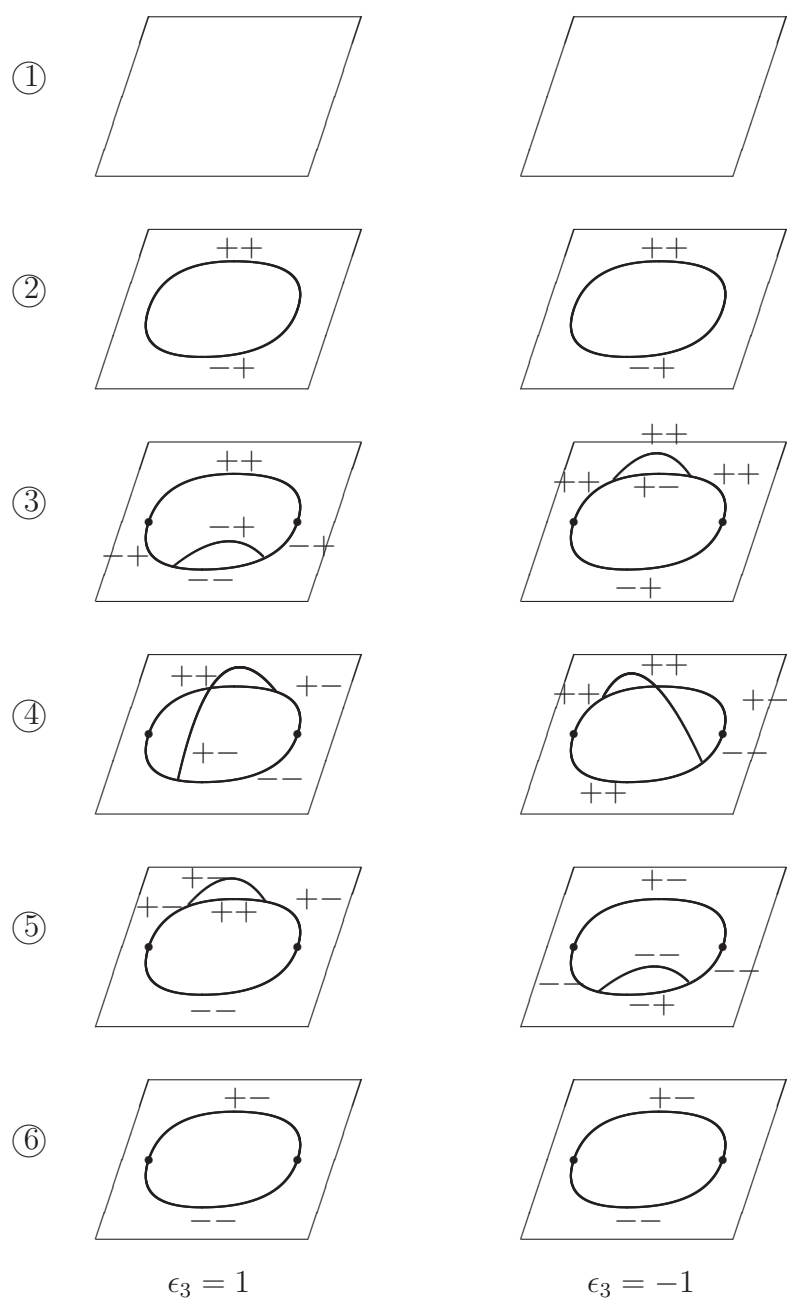


Figura 4.10: Diagramas de bifurcação para $\epsilon_2 = 1$.

A análise dos demais sinais de ϵ_2 e ϵ_3 é análoga e fazemos apenas os diagramas de bifurcação.

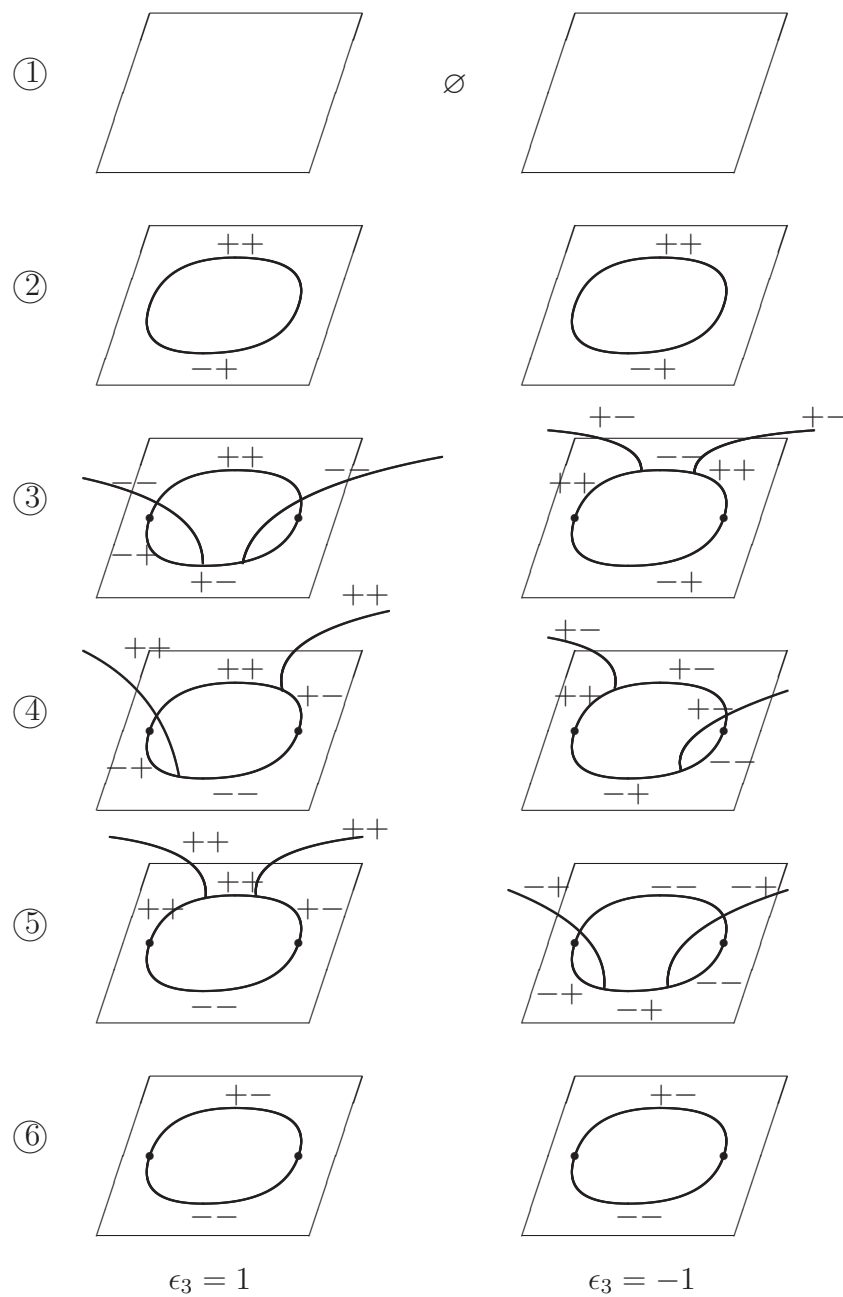


Figura 4.11: Diagramas de bifurcação para $(\epsilon_2 = -1): (x^2 - y^2 + m\lambda^2 - \beta, (\epsilon_3 x - \lambda + \alpha)y)$.

4.8 Diagramas de Bifurcação da Quinta Forma Normal

O desdobramento da quinta forma normal é uma aplicação $G_5 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$G_5(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = (x^2 + \epsilon_2 y^2 - \lambda, (mx^2 - \beta x + \epsilon_4 y^2 - \alpha)y), \quad (4.8)$$

com $m \neq 0, 1, 2$.

Analisamos o caso $\epsilon_2 = -1$, $\epsilon_4 = -1$, $m > 2$.

Dessa forma,

$$G_5(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = (x^2 - y^2 - \lambda, (mx^2 - \beta x - y^2 - \alpha)y).$$

Na tabela (4.11) estão as soluções de $G_5 \equiv 0$ e os resultados sobre os autovalores respectivos.

Subgrupo de Isotropia	Soluções	Autovalores
\mathbb{Z}_2	$y = 0$ $\lambda = x^2$	$2x$ $mx^2 - \beta x + \alpha$
1	$\lambda = x^2 - y^2$ $mx^2 - \beta x - y^2 - \alpha = 0$	$\text{tr}(DG_5) = 2x - 2y^2$ $\det(DG_5) = -[\beta + 2(1 - m)x]y^2$

Tabela 4.11: Soluções e autovalores.

As variedades de transição para este caso são:

(a) $S_I = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(0, 0, 0, \alpha) = 0\} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = 0\}$.

(b) $\mathcal{I} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}$.

Assim,

$$\begin{cases} \lambda = x^2, \\ 2x = 0, \\ mx^2 - \beta x = \alpha. \end{cases} \implies x = \lambda = \alpha = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{I} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = 0\}.$$

$$(c) \mathcal{J} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_\lambda \\ q_x & q_\lambda \end{vmatrix} (x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}.$$

Então,

$$\begin{cases} \lambda = x^2, \\ mx^2 - \beta x = \alpha, \\ 2mx - \beta = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{2m}.$$

Substituindo x na segunda equação, obtemos

$$\alpha = m \frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{\beta^2}{2m} \Leftrightarrow \alpha = \frac{-\beta^2}{4m}.$$

Portanto,

$$\mathcal{J} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = \frac{-\beta^2}{4m} \right\}.$$

$$(d) \mathcal{Q} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = q(x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_v \\ p_v & q_v \end{vmatrix} (x, 0, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}.$$

Então,

$$\begin{cases} \lambda = x^2, \\ mx^2 - \beta x = \alpha, \\ 2x(m-1) = \beta \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{2(m-1)}. \end{cases}$$

Substituindo na segunda equação obtemos

$$\frac{m\beta^2}{4(m-1)^2} - \frac{\beta^2}{2(m-1)} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{(m+2-2m)\beta^2}{4(m-1)^2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{-(m-2)\beta^2}{4(m-1)^2}.$$

Assim,

$$\mathcal{Q} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = \frac{-(m-2)\beta^2}{4(m-1)^2} \right\}.$$

$$(d) \mathcal{D}(\mathcal{F}^0, \mathcal{F}) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x_1 \neq x_2, p(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p_x(x_1, 0, \lambda, \alpha, \beta) = p(x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) \\ = q(x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_x & p_v \\ q_x & q_v \end{vmatrix} (x_2, v, \lambda, \alpha, \beta) = 0\}.$$

Então,

$$\begin{cases} \lambda = x_1^2, \\ 2x_1 = 0, \\ x_2^2 + \epsilon_2 y^2 = 0, \\ mx_2^2 - \beta x_2 + \epsilon_2 y^2 = \alpha, \\ \beta = 2y^2, \\ -2x_2 + 2mx_2 - \beta = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = x_1 = 0, \\ x_2 = \frac{\beta}{2(m-1)}. \end{cases}$$

Substituindo y^2 por $\epsilon_2 x_2^2$ na equação $mx_2^2 - \beta x_2 + \epsilon_2 y^2 = \alpha$, obtemos

$$\alpha = mx_2^2 - \beta x_2 + \epsilon_2 x_2^2 \iff \alpha = x_2^2(m - \epsilon_2) - \beta x_2.$$

Agora, temos duas possibilidades:

- (i) Se $\epsilon_2 = -1$ temos $y^2 = x_2^2$. Substituímos o valor de x_2 na última expressão, e obtemos

$$\alpha = \frac{\beta^2}{4(m-1)^2}(m-1) - \frac{\beta^2}{2(m-1)} \iff \alpha = \frac{-\beta^2}{4(m-1)}.$$

Portanto,

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}^0) = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = \frac{-\beta^2}{4(m-1)} \right\}.$$

- (ii) Se $\epsilon_2 = 1$, temos $y^2 = -x_2^2$. Logo, $x_2 = 0$. Portanto, $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}^0) = \emptyset$.

Na Figura (4.12) representamos as variedades de transição para o caso em que $m > 2$.

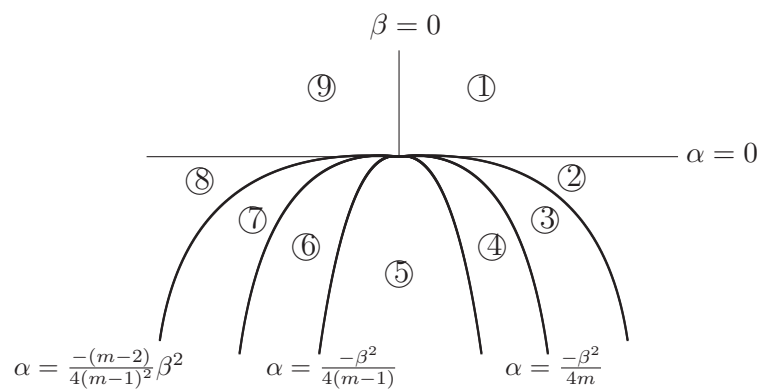


Figura 4.12: Variedade de transição.

Os ramos relativos a $\text{Fix}(1)$ podem ser escritos como

$$y^2 = mx^2 - \beta x - \alpha,$$

$$\lambda = (1 - m)x^2 + \beta x + \alpha.$$

O comportamento dos autovalores ao longo desses ramos dependem das regiões do plano (α, β) .

1. $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2)$. Os sinais dos autovalores são dados pelos sinais de x e $mx^2 - \beta x - \alpha$. Eles mudam de sinal em $x = 0$ e $x_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4m\alpha}}{2m}$, respectivamente. Para que x_{\pm} exista devemos ter $\beta^2 + 4m\alpha > 0$, ou seja, $\alpha > -\frac{\beta^2}{4m}$.

- Se $\alpha > 0$, $x_- < 0 < x_+$,
- Se $-\frac{\beta^2}{4m} < \alpha < 0$, $0 < x_- < x_+$, $\beta > 0$ ou
- $x_- < x_+ < 0$, $\beta < 0$.

Analisamos o caso $\alpha < -\frac{\beta^2}{4m}$ (regiões 4, 5 e 6). Os sinais dos autovalores são

- $x < 0$: $(-+)$,
- $x > 0$: $(++)$.

Quando $\alpha > 0$, temos as regiões 1 e 9. Os intervalos de x com os sinais dos autovalores são

- $x < x_-$: $(-+)$,
- $x_- < x < 0$: $(--)$,
- $0 < x < x_+$: $(+-)$,
- $x > x_+$: $(++)$.

Quando $-\frac{\beta^2}{4m} < \alpha < 0$, $\beta > 0$ (regiões 2 e 3). Os intervalos de x com os sinais dos autovalores são

- $x < 0$: $(-+)$,
- $0 < x < x_-$: $(++)$,
- $x_- < x < x_+$: $(+-)$,
- $x_+ < x$: $(++)$.

Para $-\frac{\beta^2}{4m} < \alpha < 0$ e $\beta < 0$ (regiões 7 e 8), temos

- $x < x_-$: $(-+)$,
- $x_- < x < x_+$: $(--)$,
- $x_+ < x < 0$: $(-+)$,
- $x > 0$: $(++)$.

2. **Fix(1)**. Se $\beta^2 + 4m\alpha > 0$, existem dois ramos bifurcando de $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2)$.

$$\lambda = x_+^2 \text{ onde } x_+ = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4m\alpha}}{2m}$$

e

$$\lambda = x_-^2 \text{ onde } x_- = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4m\alpha}}{2m}.$$

Estudamos, agora, a estabilidade dos ramos. Temos

$$\text{tr}(DG_5) = x - y^2 = x - mx^2 + \beta x - \alpha = -mx^2 + (1 + \beta)x - \alpha$$

$$\det(DG_5) = -[\beta + 2(1 - m)x].$$

Observamos que $\det(DG_5) = 0$ fornece a dobra (turning point) nesses ramos. Assim,

$$x_{TP} = \frac{\beta}{2(m-1)},$$

se ele existe no ramo.

Notemos que se $\beta^2 + 4m\alpha < 0$, o ramo é parametrizado por $x \in \mathbb{R}$.

Mostremos que $x_{TP} > x_+$ se $\alpha < -\beta^2 \frac{(m-2)}{4(m-1)^2}$, $\beta > 0$, isto é, nas regiões 3, 4 e metade da 5.

Temos

$$x_{TP} = \frac{\beta}{2(m-1)} > \frac{\beta}{2m} + \frac{1}{2m} \sqrt{\beta^2 + 4m\alpha},$$

$$\frac{\beta}{2(m-1)} - \frac{\beta}{2m} > \frac{1}{2m} \sqrt{\beta^2 + 4m\alpha},$$

$$\frac{\beta}{m-1} - \frac{\beta}{m} > \frac{1}{m} \sqrt{\beta^2 + 4m\alpha},$$

$$\frac{\beta}{m-1} > \sqrt{\beta^2 + 4m\alpha} \text{ e } \beta > 0,$$

$$\frac{\beta^2}{(m-1)^2} > \beta^2 + 4m\alpha,$$

$$\frac{\beta^2 m(2-m)}{(m-1)^2} > 4m\alpha.$$

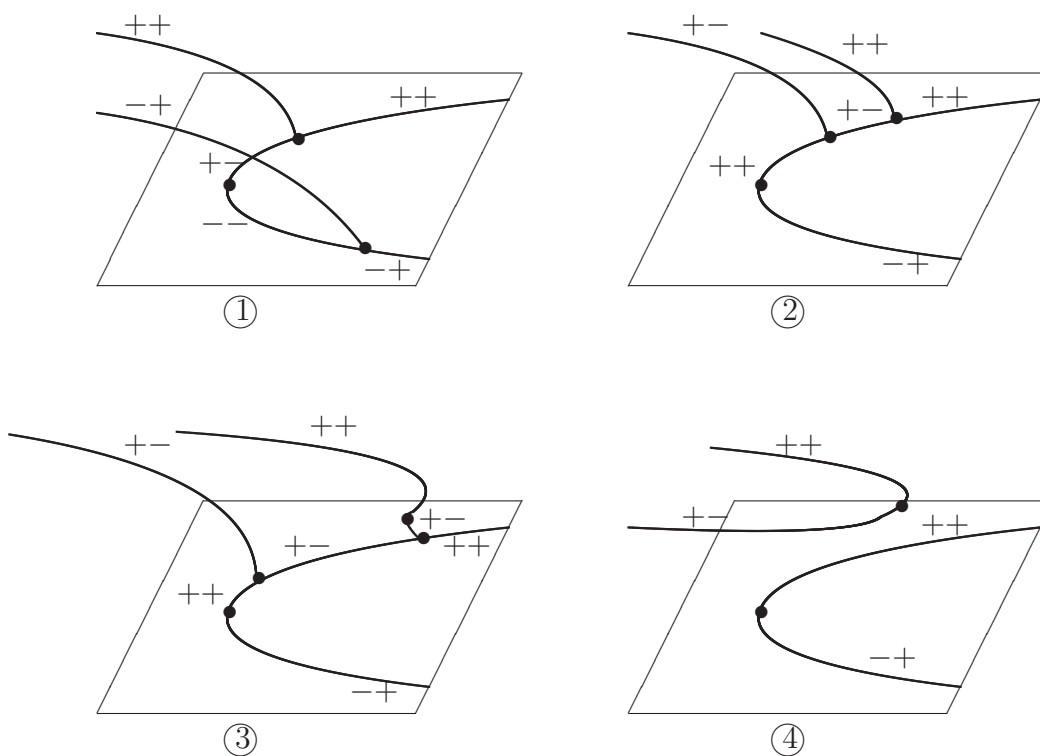
Consequentemente, $\alpha < -\beta^2 \frac{(m-2)}{4(m-1)^2}$.

Analogamente, $x_{TP} < x_-$ se $\alpha < -\beta^2 \frac{(m-2)}{4(m-1)^2}$, $\beta < 0$, isto é, nas regiões 6, 7 e a outra metade da região 5.

Analogamente, aos casos anteriores analisamos as soluções em cada região. Observamos que $\det(DG_5)$ nos ramos x_{\pm} é dado por

$$\det(DG_5) = -\beta + 2(m-1)x_{\pm} = \frac{1}{m}[-\beta \pm (m-1)\sqrt{\beta^2 + 4m\alpha}]$$

e o sinal do traço depende dos sinais de x_{\pm} em cada região.



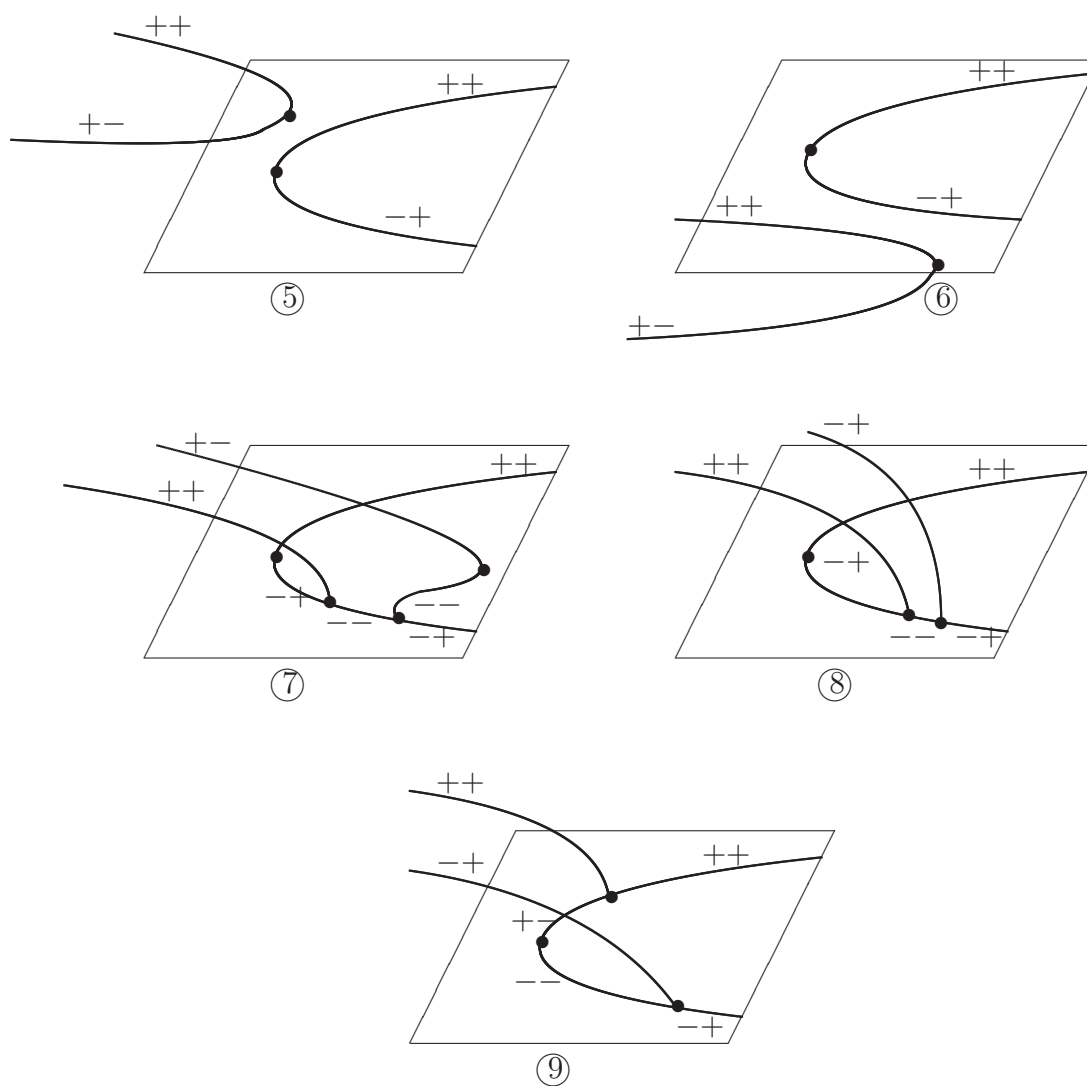


Figura 4.13: Diagramas de bifurcação.

A análise dos demais sinais é análoga, dessa forma omitimos os cálculos e exibimos as variedades de transição e os diagramas de bifurcação.

(a) $\epsilon_2 = -1$, $0 < m < 1$.

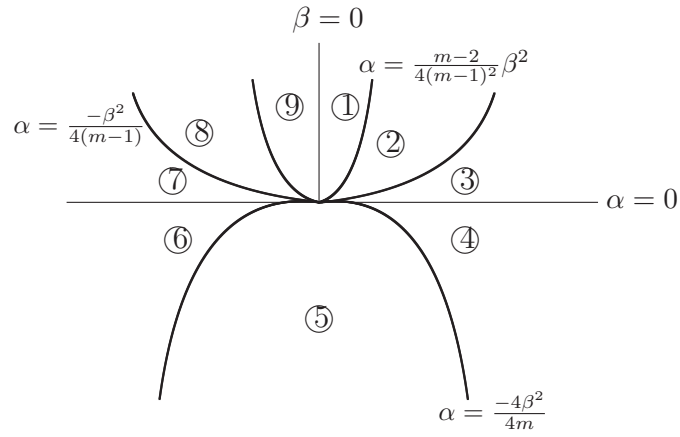
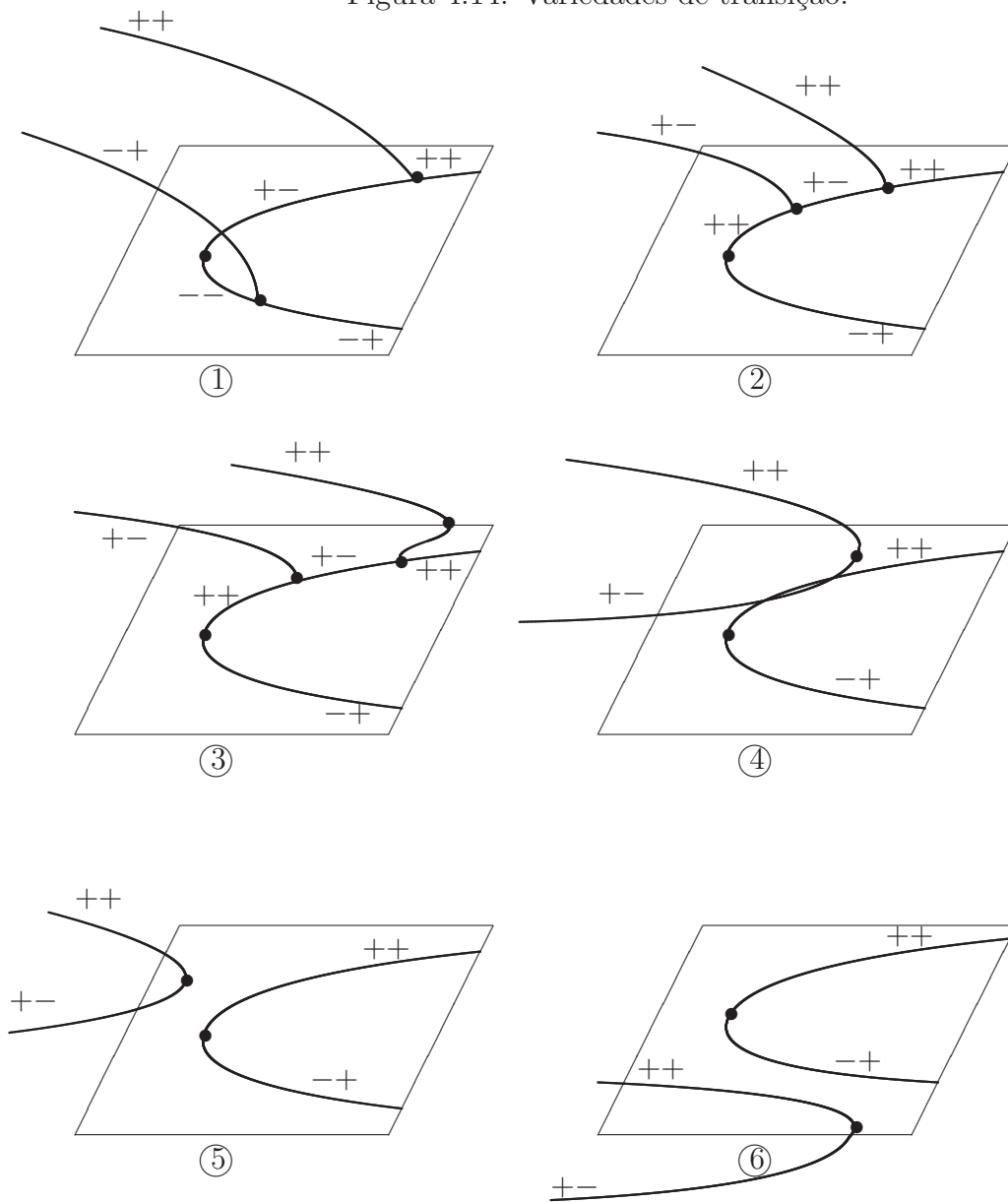
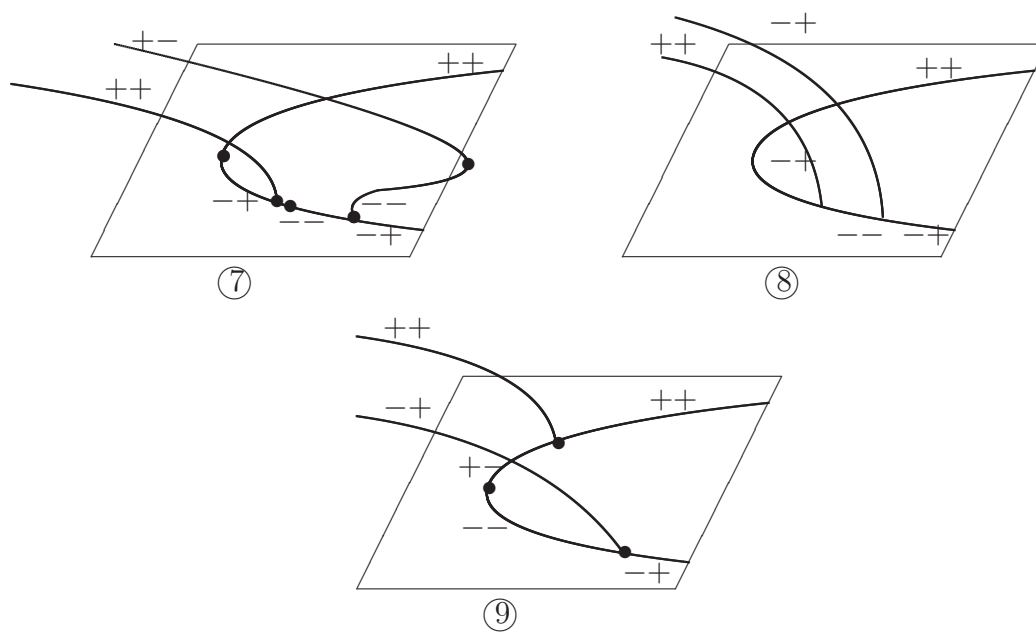


Figura 4.14: Variedades de transição.





(b) $\epsilon_2 = -1, m < 0$.

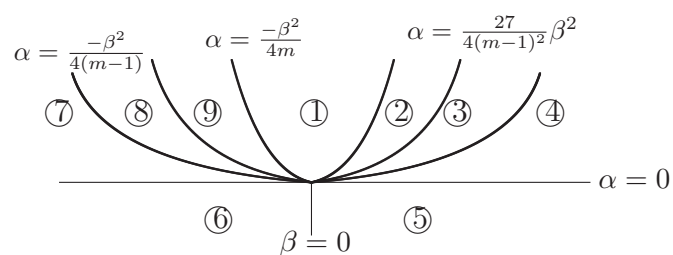
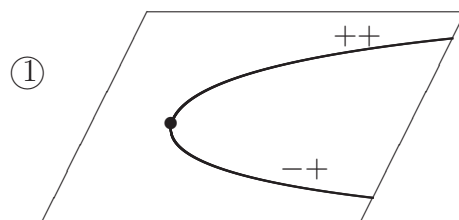
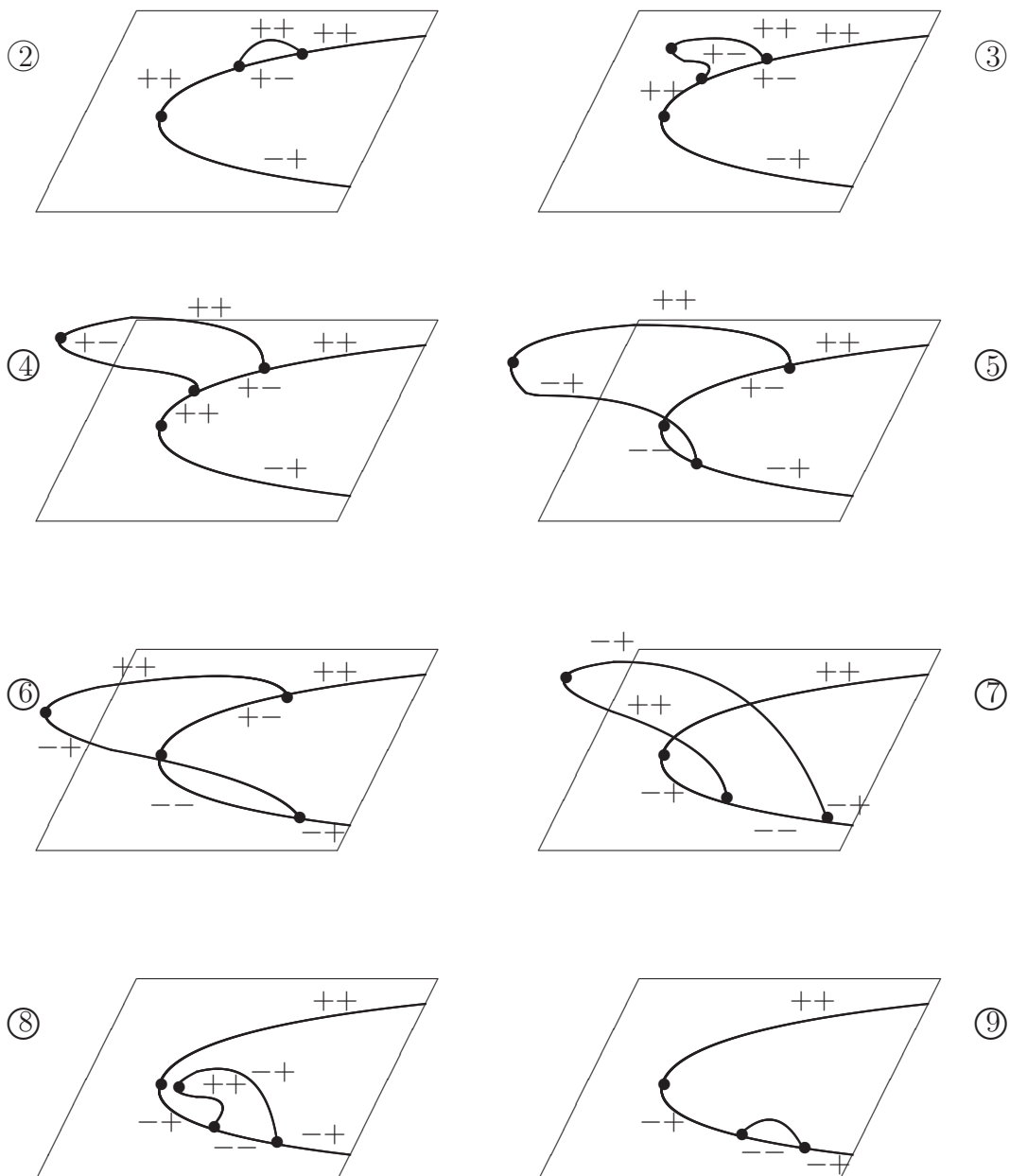


Figura 4.15: Variedades de transição.





(c) $\epsilon_2 = 1, m > 0$.

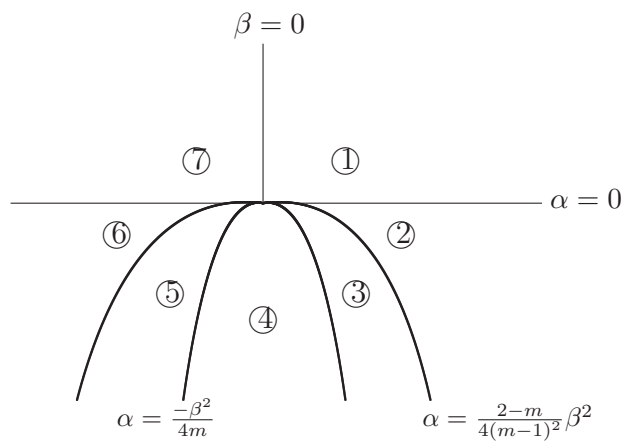


Figura 4.16: Variedade de transição para $m > 2$.

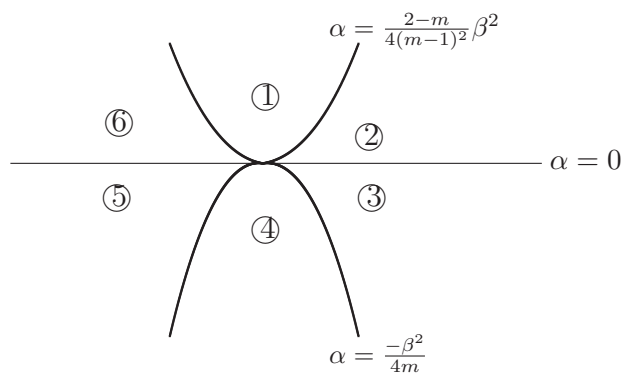
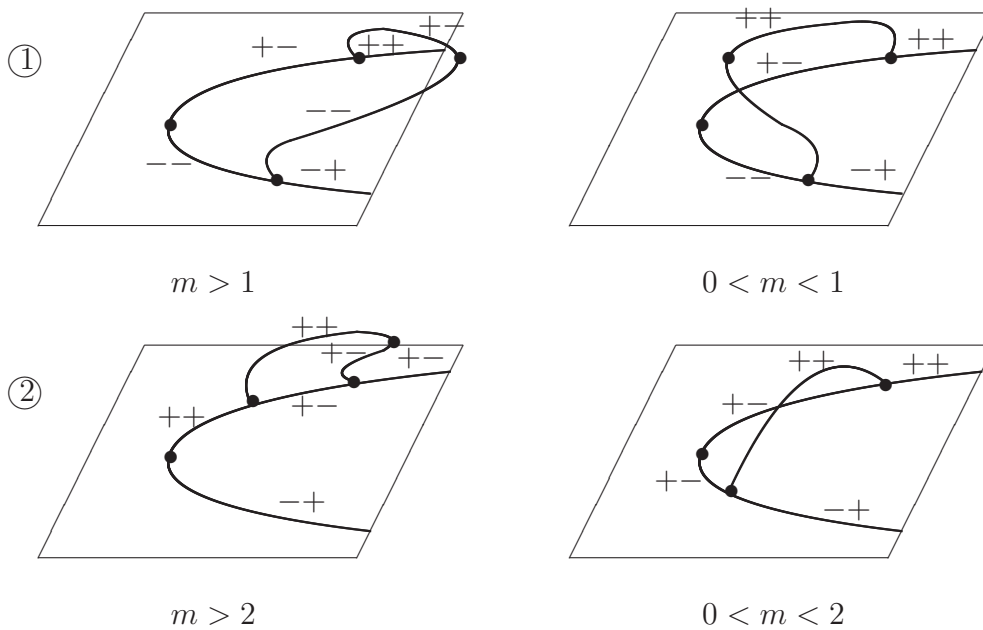
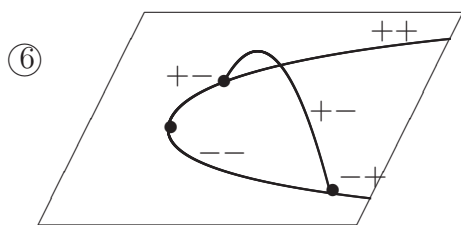
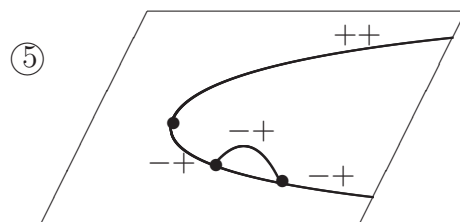
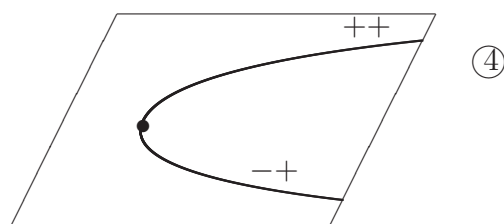
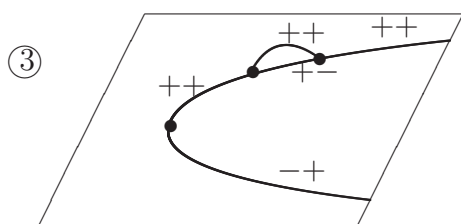
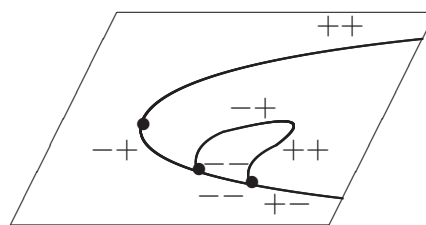


Figura 4.17: Variedade de Transição para $1 < m < 2$.

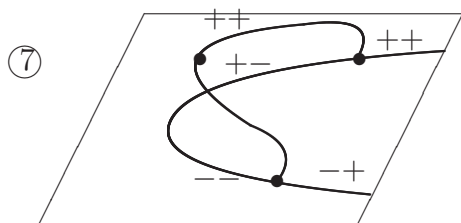




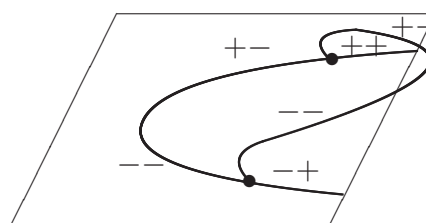
$0 < m < 2$



$m > 2$

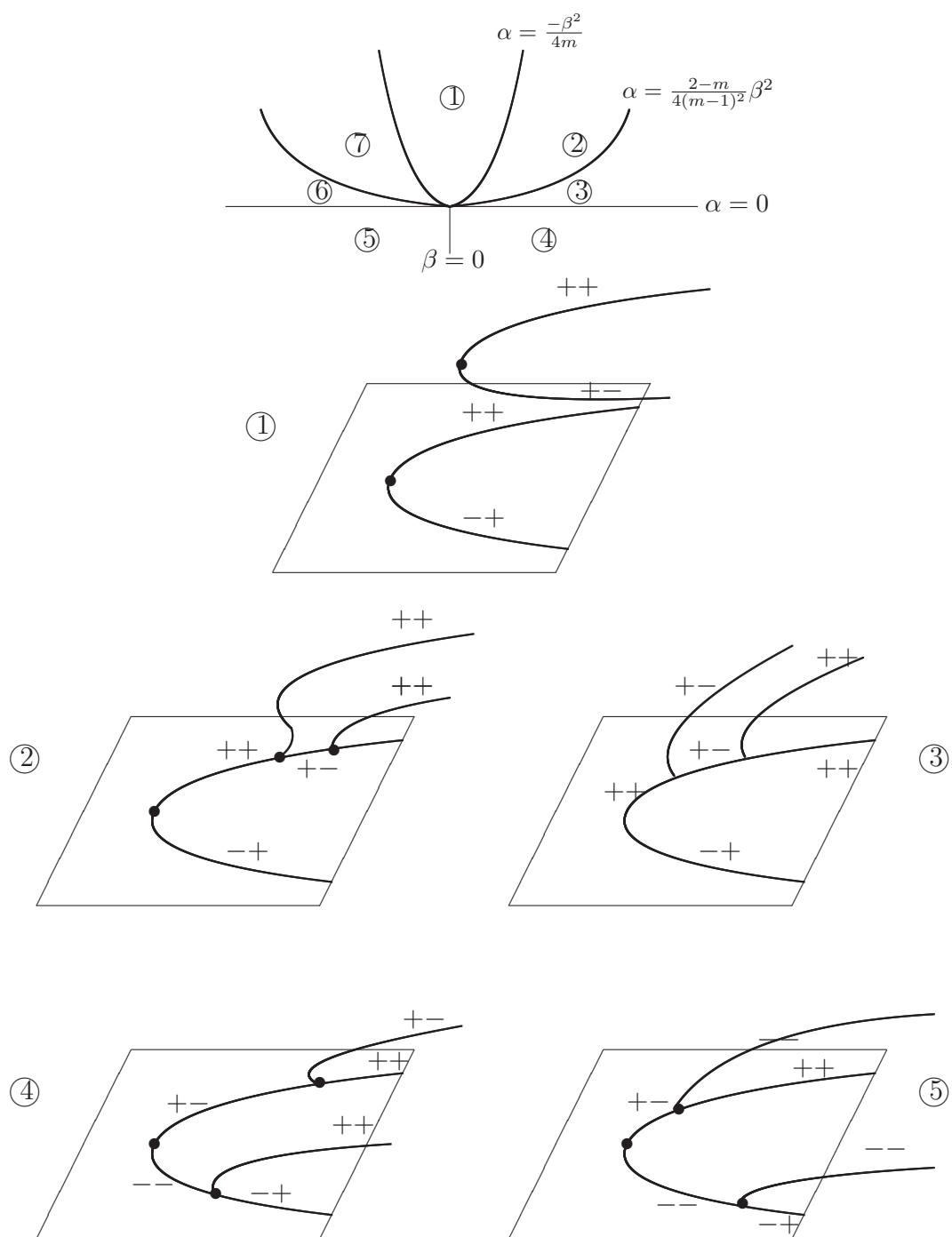


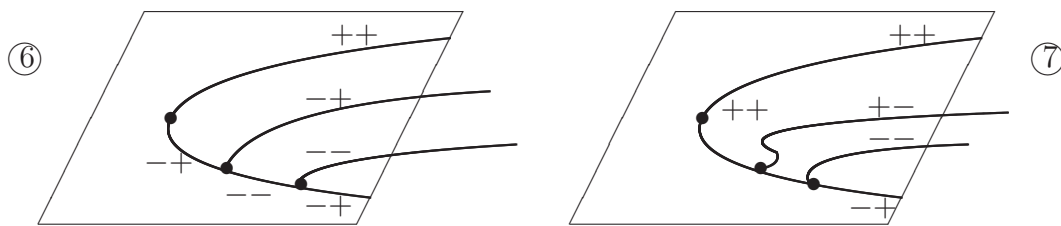
$0 < m < 1$



$m > 1$

(d) $\epsilon_2 = 1, m < 0$.





Referências Bibliográficas

- [1] Golubitsky, M. & Schaeffer, D. G. *Singularities and groups in bifurcation theory*, Applied Mathematical Sciences, **51**, Vol.I, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [2] Golubitsky, M. & Stewart, I. & Schaeffer, D. G. *Singularities and groups in bifurcation theory*, Vol. II, Applied Mathematics and Sciences, **69**, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [3] Bridges, T. and Furter, J. E., *Singularity theory and equivariant symplectic maps*, Springer Lecture Notes 1558, Heidelberg, 1993.
- [4] Dangelmayr, G. D., *Classification of \mathbb{Z}_2 -Equivariant imperfect bifurcations with corank 2*, Proc. London Math. Soc. (3) 46, 517 pp. 546, 1983.
- [5] Schwarz, G., *Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group*, Topology, 14, 63-68, 1975.
- [6] Melbourne, I., *The recognition problem for equivariant singularities, nonlinearity* 1, pp. 215-240, 1987.
- [7] Poénaru, V., *Singularités C^∞ en présence de symétrie*, Lecture Notes in Mathematics 510, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [8] Gaffney, T., *Some new results in the classification theory of bifurcation problems*, in *Multi-parameter; bifurcation theory* (eds. Golubitsky, M. and Guckenheimer, J.), Contemporary Mathematics 56, Amer. Math. Soc., Providence RI, pp. 97-116, 1986.
- [9] Furter, J. E., *Lectures notes on dynamical systems and their bifurcation*, Brunel University, England, 2004.
- [10] Gibson, C. G., *Singular points of smooth mappings*, Pitman, London, 1979.
- [11] Manoel, M. G. Stewart, I., *Degenerate bifurcations with $Z_2 \oplus Z_2$ -symmetry*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 9, No. 8, pp. 1653-1667, 1999.

-
- [12] Damon, J., *The unfolding and determinancy theorems for subgroups of \mathcal{A} and \mathcal{K}* , Memoirs of the American Mathematical Society, Providence RI, 1984.
- [13] Vanderbauwhede, A., *Local bifurcation and symmetry*, Research Notes in Math. 75, Pitman, Boston, 1982.
- [14] Chow, S. N. e Hale, J., *Methods of bifurcations theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [15] Elphick, C., Tirapegui, E., Brachet, M. E., Coulet, P., and Ioss, G. *A simple global characterization for normal forms of singular vector fields*, Physica **29D**, pp. 95-127, 1987.
- [16] Guckenheimer, J. and Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, dynamics systems, and bifurcations of vector fields*, Applied Mathematical Sciences, **42**, Springer- Verlag, New York, 1983.
- [17] Kuznetsov, Yuri A., *Elements of applied bifurcation theory*, Applied Mathematical Sciences, **112**. Springer- Verlag, New York, 1998.
- [18] Cushman, R. and Sanders, J. A., *Nilpotent normal forms and representation theory of $Sl(2, \mathbb{R})$* , In: Golubitsky and Guckeheimer, pp. 31-52, 1986.
- [19] Heirstein, I. N., *Topics in algebra*, Blaisdell Publishing Company, University of Chicago, 1964.
- [20] Hale, J. K. and Koçak, H. *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York, 1991.