

Júlio César do Espírito Santo

Estudo de uma Equação de Onda Não-linear

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos

Co-Orientador: Prof. Dr. German Jesus Lozada-Cruz

São José do Rio Preto

2006

COMISSÃO JULGADORA

Titulares

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos - Orientador

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha

Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio

Suplentes

Prof(a). Dr(a). Adélia Conceição Diniz

Prof. Dr. Maurilio Boaventura

À minha família,
dedico.

Agradecimentos

“É bom lembrar que junto a mim recebem este diploma todos aqueles que me acompanharam nesta trajetória.” Com esta frase, há alguns anos numa situação semelhante, resumi os meus agradecimentos aos que me apoiaram e, como o sentimento agora não é muito diferente e o espaço é maior, vou reutilizá-la detalhando-a melhor. Uma conquista como esta é algo que foi construído não só ao longo destes dois últimos anos e por uma única pessoa. Foram muitos os personagens que atuaram para fazer com que este texto fosse concluído, que esse título fosse conquistado e muito devo a esses que me ajudaram durante esse longo processo. Tal conquista é resultado de uma soma, uma *série* de opiniões e do apoio dos amigos e parentes, além, é claro, da ajuda Divina! A Esses que direta ou indiretamente auxiliaram durante a minha formação ‘básica’ no CEFET-MG, em Belo Horizonte, minha graduação na UFOP, em Ouro Preto, o período do mestrado no Ibilce, em São José do Rio Preto; obrigado pelo apoio e amizade.

Ao professor Dr. Waldemar Donizete Bastos, pelo apoio científico e pessoal, pelos valiosos ‘passeios’ a trabalho na região de Rio Preto, por tão bem ter recebido na pós-graduação a mim e aos meus colegas - principalmente os que vieram de fora, que ainda não estavam alojados e não conheciam bem a cidade - quando chegamos à Rio Preto para participarmos do programa de verão em Funções Analíticas; pelas palavras, idéias, paciência, dedicação e amizade, fortemente agradeço.

Ao professor Dr. German Jesus Lozada-Cruz, pelas valiosas dicas de L^AT_EX (pelo rico preâmbulo!), pelas dicas, correções e por ter me ouvido *pacientemente* por

bastante tempo, obrigado.

Também gostaria de registrar meu agradecimento e admiração pelos professores e funcionários do departamento de matemática do Ibilce pelas lições proferidas, pelo agradável ambiente de trabalho, pelas conversas que muito acrescentaram e pelas ‘reuniões’ sociais na Adunesp e similares; e também agradecer aos professores e funcionários do departamento de matemática do ICEB, em Ouro Preto, aos quais devo muito de minha formação.

Aos amigos (fisicamente) distantes em Belo Horizonte - pessoas importantíssimas para mim; em Contagem, Ouro Preto, Mariana etc; aos amigos próximos; meus amigos do mestrado (“pediram-me” que os explicitasse: Miriam, Gi, Michele, Tati, Anderson, Francielle, Rubens, Fernanda, Cátia, Elen), obrigado pela amizade e convivência. Às pessoas fantásticas com as quais convivi na moradia estudantil da Unesp: ali foi um lar para mim; valeu 2A! Aos colegas de república, Luiz, Marcus - amigo e companheiro de discussões matemáticas profundas ao qual não há palavras para agradecer o que ele e a Elba fizeram por mim, ao Durval - desejo-lhe sucesso em sua carreira e em sua vida, ao Eduardo (Canetas) - outro que também desejo muito sucesso, à Cidinha e família, agradeço a todos por suas contribuições.

Agradeço à minha mãe Zinha e à minha irmã Gabriela.

A Deus por tudo.

Sumário

0	Introdução	xi
1	Material Preliminar	14
1.1	Continuidade e Completamento	14
1.2	Os Espaços $C_b^k(\Omega)$ e $C_d^k(\Omega)$	17
1.3	O Lema de Grönwall	21
2	Existência e Unicidade para a Equação da Onda Unidimensional	24
2.1	A Equação da Onda	24
2.2	Algumas Ferramentas	25
2.3	Caso Linear	28
2.3.1	Fórmula de D'Alembert	29
2.3.2	Estimativas de Energia	32
2.3.3	Iterações	43
2.4	Caso Não-linear	52
2.4.1	A Unicidade	52
2.4.2	Existência Local	55
2.4.3	Existência Global	64
3	Não-Existência de Solução	68
3.1	A Não-Existência Global	68
3.1.1	Comparação de Soluções	68
3.1.2	Um Contra Exemplo Para a Existência Global	77
3.2	Um Contra Exemplo Para a Existência Local	79
4	Referências Bibliográficas	82

Lista de Figuras

1.1	Bola $\bar{B}_{ h }(x) \subset \Omega$	19
2.1	Localização de $\frac{b-a}{\delta}$	28
2.2	Intervalo I_{t_0, t_1}	32
2.3	Trapézio $\mathfrak{D}_{I_{t_0, t_1}}$ quando $t_0 \leq t_1$,	32
2.4	Trapézio $\mathfrak{D}_{I_{t_0, t_1}}$ quando $t_1 \leq t_0$	33
2.5	Trapézio $\mathfrak{D}_{I_{0, t_1}}$	53
3.1	Cone de Luz do Passado $C(t_0, x_0)$	69

Resumo

Neste trabalho examinaremos a unicidade, existência e não-existência local e global de solução clássica para a equação da onda não-linear $u_{tt} - u_{xx} = F(u, \partial u)$, $t, x \in \mathbb{R}$. Estudaremos a comparação entre as soluções de $u_{tt} - u_{xx} = F(u)$ e $w_{tt} - w_{xx} = G(w)$ a partir da comparação entre F e G .

Abstract

In this work we study uniqueness, existence and non-existence of local and global classical solutions for the nonlinear wave equation $u_{tt} - u_{xx} = F(u, \partial u)$, $t, x \in \mathbb{R}$. We also establish some comparison results for the solutions u and w for the equations $u_{tt} - u_{xx} = F(u)$ and $w_{tt} - w_{xx} = G(w)$ from the comparison of F and G .

Introdução

Aos que ainda têm dúvida de que 'aventurar-se' no estudo da Matemática é extremamente prazeroso e agradável gostaria de acrescentar que a experiência por ela proporcionada é indescritível. O prazer da descoberta, o sabor do conhecimento matemático, o poder da modelagem dos eventos da natureza (oscilação das cordas dos instrumentos musicais, dinâmica dos gases, condução de calor, entre outros), o gosto da resolução de problemas interessantes, o ensino e a pesquisa científica. De maneira saudável, a evolução é, através de uma constante maior que a unidade, proporcional à dedicação, e isto muito nos estimula, pois aprender é algo que, a menos de 'exceções extremas', só depende do estudante.

A modelagem de um problema real através da matemática é um sonho que a humanidade vem tentando alcançar desde os tempos mais remotos. Houve casos em que se desejava fazer com que a matemática, ainda bem restrita na época, fosse capaz de representar todas as coisas existentes na realidade conhecida. Pitágoras e alguns seguidores tinham essa ambição. Infelizmente frustraram-se com a não compreensão dos incomensuráveis irracionais e do significado de pensar no *infinito*. Há certa razão em estranhar que o simples fato de colocarmos uma calculadora de bolso ideal para somar - por exemplo - a série dos inversos dos quadrados indefinidamente, esgotaríamos toda a energia do universo destruindo-o. Felizmente os pitagóricos inauguraram um pensamento que persiste até

hoje. Já no século dezenove os matemáticos dessa época herdaram do século anterior difíceis problemas oriundos da Física e, talvez, o mais fascinante deles seja o problema relacionado aos movimentos ondulatórios. Com o desenvolvimento da teoria das equações diferenciais, tais problemas foram e têm sido incansavelmente estudados até os dias de hoje [4].

Neste trabalho estudaremos as questões de unicidade, existência local e existência global de solução clássica para a equação da onda não-linear

$$u_{tt} - u_{xx} = F(u, \partial u) \quad (1)$$

com dados iniciais e termo forçante suficientemente regulares. Essas três questões são discutidas nos capítulos 1 e 2, sendo o capítulo 1 destinado ao estudo de alguns conceitos básicos e à introdução dos espaços de funções adequados. O principal resultado relativo à equação (1) é o Teorema 2.9 que estabelece a existência de solução local única para (1) no intervalo de tempo $(-\epsilon_k, \epsilon_k)$ onde k é um inteiro positivo tal que

$$u(0, x) = f(x) \in C^{k+1}(\mathbb{R}),$$

$$u_t(0, x) = g(x) \in C^k(\mathbb{R}),$$

com f e g tendo todas as suas derivadas decaindo no infinito. A função F é suposta ser C^∞ e $F(0, 0, 0) = 0$. Ainda no capítulo 2 examinaremos a possibilidade do intervalo de tempo de existência da solução ser infinito (solução global) e a questão da ilimitação da solução.

Um exemplo de não-existência local para (1) com dados iniciais suaves é dado na seção 3.2 do capítulo 3. Os capítulos 1 e 2 baseiam-se fortemente em [1].

O capítulo 3 se ocupa principalmente de estabelecer comparação entre as soluções das equações semilineares

$$u_{tt} - u_{xx} = F(u)$$

$$w_{tt} - w_{xx} = G(w)$$

a partir da comparação entre seus termos forçantes F e G .

Os resultados lá apresentados são devidos à J. B. Keller [2] e constituem uma importante ferramenta para o estudo do fenômeno de *blow up*. Ainda no terceiro capítulo mostraremos que a solução de $u_{tt} - u_{xx} = u^p$, $p = 2, 3, \dots$, com dados iniciais positivos torna-se infinita em tempo finito.

Capítulo 1

Material Preliminar

Neste capítulo iremos nos ater ao estudo de certos espaços de funções contínuas apropriados para os nossos objetivos e ao seu completamento - uma importante propriedade desses espaços.

1.1 Continuidade e Completamento

Sejam (X, d) e (Y, ρ) espaços métricos, x_0 um ponto de X e f uma função definida em X tomando valores em Y .

Dizemos que f é uma *função contínua em x_0* se dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $d(x, x_0) < \delta$. Se f é contínua em todo ponto x_0 de X dizemos simplesmente que f é uma *função contínua*.

Equivalentemente, f é contínua em $x_0 \in X$ se dada uma seqüência $(x_n)_{n=0}^{+\infty} \subset X$ convergente para x_0 tivermos a seqüência $(f(x_n))_{n=0}^{+\infty} \subset Y$ convergindo para $f(x_0)$. Usaremos essa forma da definição repetidamente neste trabalho.

A seguir destacamos as definições de *Seqüência de Cauchy* e de *Espaço Métrico Completo*.

Definição 1.1 (Seqüência de Cauchy). Seja (X, d) um espaço métrico. Uma seqüência $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ em X é *seqüência de Cauchy* se dado $\epsilon > 0$ existe um inteiro positivo N_0 tal que para $m, n \geq N_0$ temos $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Definição 1.2 (Espaço Métrico Completo). Dizemos que um espaço métrico é *completo* se toda seqüência de Cauchy converge para um elemento desse espaço.

Finalmente damos o nome de *Espaço de Banach* a um espaço vetorial normado e completo com respeito à métrica definida pela norma da diferença.

Se $(Y, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado, o símbolo $C_b(X, Y)$ será usado para denotar o conjunto de todas as funções contínuas e limitadas, definidas em X tomando valores em Y .

Com as operações usuais de soma de funções e produto de uma função por um escalar e com a norma

$$\|f\|_C = \sup_{x \in X} \|f(x)\|,$$

o conjunto $C_b(X, Y)$ é um espaço vetorial normado.

Teorema 1.3. Seja (X, d) um espaço métrico e $(Y, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Então, $(C_b(X, Y), \|\cdot\|_C)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Considere $(f_n)_{n=0}^{+\infty} \subset C_b(X, Y)$ uma seqüência de Cauchy e x um ponto de X . Observe que $(f_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ é uma seqüência de Cauchy no espaço de Banach Y , logo $f_n(x)$ converge para um certo $f(x)$, que pela unicidade do limite é único. Isso define uma função f . Provaremos que essa função é contínua, limitada e que f_n converge para f na norma $\|\cdot\|_C$.

Essa função f é limitada, pois existe um inteiro positivo N_0 tal que para $m, n \geq N_0$,

$$\|f_n\|_C - \|f_m\|_C \leq \|f_n - f_m\|_C \leq 1.$$

Em particular, $\|f_n\|_C \leq 1 + \|f_{N_0}\|_C$ para todo $n \geq N_0$. Além disso, como $\{0, 1, 2, \dots, N_0\}$ é um conjunto finito, existe uma constante real $C > 0$ tal que

$$\|f_n\|_C \leq C$$

para todo $n \leq N_0$ e assim

$$\|f_n\|_C \leq 1 + C$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Como $\|f(x)\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n(x)\| \leq 1 + C$ para todo $x \in X$ concluímos que f é uma função limitada.

Provemos que f é contínua. Sejam $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$ arbitrários. Existe $N_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\|f_m - f_n\|_C < \frac{\epsilon}{3}$ para todos $m, n \geq N_0$. Segue então

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| < \frac{\epsilon}{3}$$

para todos $m, n \geq N_0$ e todo $x \in X$. Logo

$$\|f(x) - f_{N_0}(x)\| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_m(x) - f_{N_0}(x)\| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

para todo $x \in X$. Como f_{N_0} é contínua em x_0 , existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f_{N_0}(x) - f_{N_0}(x_0)\| < \frac{\epsilon}{3}$$

sempre que $d(x, x_0) < \delta$. Assim,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &\leq \|f(x) - f_{N_0}(x)\| + \|f_{N_0}(x) - f_{N_0}(x_0)\| + \|f_{N_0}(x_0) - f(x_0)\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

para todo $x \in X$ tal que $d(x, x_0) < \delta$. Assim, f é contínua em todo $x_0 \in X$. Logo $f \in C_b(X, Y)$. Temos também

$$\|f(x) - f_n(x)\| < \frac{\epsilon}{3}$$

para todo $x \in X$ e todo $n \geq N_0$, logo $\|f - f_n\|_C \leq \frac{\epsilon}{3}$ para todo $n \geq N_0$, ou seja,

$$f_n \rightarrow f \text{ em } C_b(X, Y).$$

■

1.2 Os Espaços $C_b^k(\Omega)$ e $C_d^k(\Omega)$

Nesta seção introduziremos os espaços de funções adequados, de acordo com nosso enfoque, ao estudo do Problema de Cauchy para a equação da onda não-linear.

Chamamos um elemento $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ de \mathbb{Z}_+^p de multi-índice e definimos

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^p \alpha_i.$$

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ é um aberto e k é um inteiro positivo, definimos

$$\begin{aligned} C(\Omega) &= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\} \\ C^k(\Omega) &= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \partial^\alpha f \in C(\Omega) \text{ para todo } \alpha; |\alpha| \leq k\} \end{aligned}$$

onde

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}.$$

Usaremos a seguinte notação

$$C_b^k(\Omega) = \left\{ f \in C^k(\Omega) \mid \partial^\alpha f \text{ é limitada em } \Omega, \forall \alpha, |\alpha| \leq k \right\}$$

e para $f \in C_b^k(\Omega)$ definimos a seguinte norma

$$\| f \|_{C_b^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)|.$$

Proposição 1.4. Se Ω é um aberto de \mathbb{R}^p e $k \in \mathbb{Z}_+$, então $(C_b^k(\Omega), \| \cdot \|_{C_b^k(\Omega)})$ é espaço de Banach.

Demonstração. Não há maiores dificuldades em provar que $C_b^k(\Omega)$ é espaço vetorial normado. Portanto provaremos apenas o seu o completamento.

Se $k = 0$ o resultado segue do Teorema 1.3. Assuma que $(C_b^{k-1}(\Omega), \| \cdot \|_{C_b^{k-1}(\Omega)})$ seja um espaço de Banach e considere uma seqüência de Cauchy $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ em $C_b^k(\Omega)$; isto é, dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo N_0 tal que se $m, n \geq N_0$ temos

$$\| f_m - f_n \|_{C_b^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f_m(x) - \partial^\alpha f_n(x)| < \epsilon.$$

Mas

$$\| f_m - f_n \|_{C_b^{k-1}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f_m(x) - \partial^\alpha f_n(x)| \leq \| f_m - f_n \|_{C_b^k(\Omega)}.$$

Se $i = 1, \dots, p$, temos para $\partial_i f_n = \frac{\partial f_n}{\partial x_i}$

$$\| \partial_i f_m - \partial_i f_n \|_{C_b^{k-1}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \partial_i f_m(x) - \partial^\alpha \partial_i f_n(x)| \leq \| f_m - f_n \|_{C_b^k(\Omega)}$$

mostrando que $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ e $(\partial_i f_n)_{n=0}^{+\infty}$ são seqüências de Cauchy em $C_b^{k-1}(\Omega)$. Da

hipótese de indução, existem funções $f, g_i \in C_b^{k-1}(\Omega)$ para $i = 1, 2, \dots, p$ tais que $f_n \rightarrow f$ e $\partial_i f_n \rightarrow g_i$ na norma $C_b^{k-1}(\Omega)$. Queremos provar que $f \in C_b^k(\Omega)$ e que $f_n \rightarrow f$ em $C_b^k(\Omega)$. Seja $x \in \Omega$ e $h \in \mathbb{R}^p$ tais que $\overline{B}_{|h|}(x) \subset \Omega$.

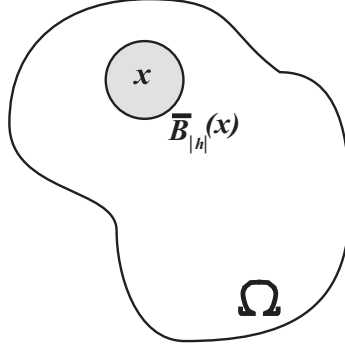


Figura 1.1: Bola $\overline{B}_{|h|}(x) \subset \Omega$

Temos

$$\begin{aligned}
 f(x+h) - f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [f_n(x+h) - f_n(x)] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \partial_t(f_n(x+th)) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x+th) \cdot h_i dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^p g_i(x+th) \cdot h_i dt
 \end{aligned}$$

e assim, fazendo $h_j = 0$ para todo $i \neq j$ e $h_i = h$ temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + th, \dots, x_p) - f(x_1, x_2, \dots, x_p)}{h} \\
 &= \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 g_i(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_p) h dt \\
 &= g_i(x).
 \end{aligned}$$

Como $g_i \in C_b^{k-1}(\Omega)$ temos finalmente $f \in C_b^k(\Omega)$.

Resta provar que $f_n \rightarrow f$ em $C_b^k(\Omega)$. Com efeito, já temos

$$\lim \| f_n - f \|_{C_b^{k-1}(\Omega)} = 0$$

e

$$\lim \| \partial_i f_n - g_i \|_{C_b^{k-1}(\Omega)} = 0$$

para todo $i = 1, 2, \dots, p$. Mas como

$$\begin{aligned} \| f_n - f \|_{C_b^k(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq k-1} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f(x)| \\ &= \| f_n - f \|_{C_b^{k-1}(\Omega)} + \sum_{i=1}^p \sum_{|\alpha|=k-1} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \partial_i f_n(x) - \partial^\alpha \partial_i f(x)| \\ &\leq \| f_n - f \|_{C_b^{k-1}(\Omega)} + \sum_{i=1}^p \| \partial_i f_n - g_i \|_{C_b^{k-1}(\Omega)} \end{aligned}$$

segue o resultado. ■

Seja $Y = C_b^k(\mathbb{R}^p)$ e $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{C_b^k(\mathbb{R}^p)}$. Então, pelo Teorema 1.3 o espaço $C([a, b], Y)$ é um espaço de Banach. Seja $F : \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função k vezes continuamente diferenciável com respeito às p últimas variáveis. Considere a aplicação $\alpha(t) := F(t, \cdot)$. Dizemos que $F \in C((-T, +T), Y)$ para algum $T > 0$ se $\alpha \in C((-T, +T), Y)$.

Definiremos agora uma classe de funções que nos serão úteis em se tratando de dados iniciais do Problema de Cauchy. Veremos mais adiante um exemplo de Problema de Cauchy onde os dados iniciais não pertencem a essa classe de funções e isto acarreta a não-existência local de solução.

Definição 1.5. Dizemos que uma função $f \in C_b^k(\mathbb{R}^p)$ *tende a zero quando x tende*

a infinito (ou funções que decaem no infinito) se para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^p$ tal que $|\alpha| \leq k$ tivermos

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \partial^\alpha f(x) = 0$$

e denotamos por $C_d^k(\mathbb{R}^p)$ o espaço de tais funções.

Proposição 1.6. O espaço $C_d^k(\mathbb{R}^p)$ com a norma $\|\cdot\|_{C_b^k(\mathbb{R}^p)}$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $(f_n)_{n=0}^{+\infty} \subset C_d^k(\mathbb{R}^p)$ uma seqüência de Cauchy. Logo existe uma função f em $C_b^k(\mathbb{R}^p)$ tal que $f_n \rightarrow f$. Precisamos mostrar apenas que f decai no infinito. Tome arbitrariamente $\epsilon > 0$ e note que existe um inteiro positivo N_0 tal que $\|f_{N_0} - f\|_{C_b^k(\mathbb{R}^p)} < \epsilon/2$. Como f_{N_0} decai, para todo $|\alpha| \leq k$ temos

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \partial^\alpha f_{N_0}(x) = 0,$$

isto é, existe uma constante $M > 0$ tal que para todo $|x| \geq M$ e todo multi-índice α tal que se $|\alpha| \leq k$ tem-se

$$|\partial^\alpha f_{N_0}(x)| < \epsilon/2.$$

Logo

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq |\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f_{N_0}(x)| + |\partial^\alpha f_{N_0}(x)| < \epsilon$$

para todo x tal que $|x| \geq M$. Assim, $f \in C_d^k(\mathbb{R}^p)$. ■

1.3 O Lema de Grönwall

Em 1919, o sueco Thomas Hakon Grönwall provou uma notável desigualdade que apesar de sua aparência inofensiva atraiu e continua atraindo considerável atenção na literatura e nos será muito útil na abordagem de alguns problemas como, por exemplo, a unicidade de solução da equação da onda não-linear. Agora

será feita uma demonstração para essa desigualdade pela qual, principalmente, Grönwall é recordado ainda hoje. [5]

Lema de Grönwall. Sejam $f, g : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, não-negativas e T um número positivo. Se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$f(t) \leq C + \int_{t_0}^t g(s)f(s)ds \quad (1.1)$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + T]$, então

$$f(t) \leq C \exp \int_{t_0}^t g(s)ds \quad (1.2)$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e defina

$$h(t) := C + \epsilon + \int_{t_0}^t g(s)f(s)ds.$$

Como f e g são funções contínuas, a função h é continuamente diferenciável e usando (1.1) juntamente com a definição de h podemos notar que

$$\frac{dh}{dt}(t) = g(t)f(t) \leq g(t)h(t).$$

A presença de ϵ nos garante que h é estritamente positiva e, assim, $\frac{1}{h(t)} \frac{dh}{dt} \leq g(t)$ por integração fornece

$$\ln \frac{h(t)}{h(t_0)} = \ln h(t) - \ln h(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{1}{h(t)} \frac{dh}{dt} \leq \int_{t_0}^t g(s)ds.$$

Tomando a exponencial e usando (1.1) novamente obtemos

$$f(t) \leq h(t) \leq h(t_0) \exp \int_{t_0}^t g(s) ds,$$

ou seja,

$$f(t) \leq (C + \epsilon) \exp \int_{t_0}^t g(s) ds,$$

onde tomamos o limite com $\epsilon \rightarrow 0$ para concluir o lema. ■

Capítulo 2

Existência e Unicidade para a Equação da Onda Unidimensional

Na primeira parte deste capítulo estudaremos algumas propriedades das soluções da equação da onda linear, as quais serão utilizadas na parte final para provar existência local de solução para uma equação de onda não-linear.

2.1 A Equação da Onda

A equação da onda não-linear considerada neste capítulo, é dada por

$$u_{tt} - u_{xx} = F(u, u_t, u_x) \quad (2.1)$$

onde $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e F é uma função apropriada.

O estudo de (2.1) a ser feito aqui, segundo [1] baseia-se fortemente em estimativas para soluções da equação linear

$$u_{tt} - u_{xx} = F(t, x). \quad (2.2)$$

Assim, estudaremos inicialmente o caso linear. A fim de simplificar a escrita usaremos a notação $\square u = u_{tt} - u_{xx}$.

2.2 Algumas Ferramentas

A proposição abaixo nos será útil no manuseio da fórmula explícita da solução de (2.2); a conhecida fórmula de D'Alembert.

Proposição 2.1. Seja f uma função em $C_d(\mathbb{R})$ e defina $\psi_{\pm}(t, x) = f(x \pm t)$. Então, $\psi_{\pm} \in C(\mathbb{R}, C_d(\mathbb{R}))$; isto é,

$$\begin{aligned} \psi_{\pm} : \mathbb{R} &\longrightarrow C_d(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto \psi_{\pm}(t, \cdot) \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração. Faremos a demonstração para ψ_+ dividindo a reta em duas partes. Uma parte onde $|f(x)|$ é pequeno e outra onde f é uniformemente contínua. Para ψ_- o raciocínio é similar.

Fixe $t \in \mathbb{R}$ e seja $(t_k)_{k=0}^{\infty}$ uma seqüência real convergindo para t . Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Como $f \in C_d(\mathbb{R})$, existe $M > 0$ tal que se $|x| \geq M$ temos $|f(x)| < \epsilon/2$. Seja $I = [-M-2, M+2]$. Como I é compacto f é uniformemente contínua em I . Então, existe $\delta > 0$, $\delta < 1$ tal que se $x, y \in I$ e $|x-y| < \delta$ temos $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Para este $\delta > 0$ existe um inteiro positivo N_0 tal que $k \geq N_0$ teremos $|t_k - t| < \delta$.

Seja $k \geq N_0$. Consideremos os casos.

1° Caso: Onde $|x+t| \leq M+1$.

Aqui temos $x+t_k \in I$, pois $|x+t_k| \leq |x+t| + |t-t_k| \leq M+2$. Usando a continuidade uniforme da função f concluímos que

$$|\psi_+(t_k, x) - \psi_+(t, x)| = |f(t_k + x) - f(t + x)| < \epsilon;$$

2° Caso: Onde $|x + t| \geq M + 1$.

Aqui temos $|x + t_k| \geq M$. Usando o decaimento da função f concluímos que

$$|\psi_+(t_k, x) - \psi_+(t, x)| = |f(t_k + x)| + |f(t + x)| < \epsilon/2 + \epsilon/2.$$

Desse modo foi provado que fixando arbitrariamente $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k \geq N_0$

$$|\psi_+(t_k, x) - \psi_+(t, x)| < \epsilon$$

para todo x real. Assim,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_+(t_k, x) - \psi_+(t, x)| = \|\psi_+(t_k, \cdot) - \psi_+(t, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} \leq \epsilon.$$

Ou melhor dizendo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\psi_+(t_k, \cdot) - \psi_+(t, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} = 0$$

e finalmente $\psi_+ \in C(\mathbb{R}, C_b(\mathbb{R}))$. ■

Corolário 2.2. Se $f \in C_d^k(\mathbb{R})$ e $\psi_\pm(t, x) = f(x \pm t)$, então $\psi_\pm \in C(\mathbb{R}, C_d^k(\mathbb{R}))$.

Demonstração. Vamos fazer um esboço da demonstração no caso $k = 1$. Para provar que $\psi_\pm \in C(\mathbb{R}, C_d^1(\mathbb{R}))$ precisamos mostrar que $\psi_\pm(t, \cdot) \in C_d^1(\mathbb{R})$ e, em seguida, que a aplicação $t \mapsto \psi_\pm(t, \cdot)$ é contínua; isto é, sendo $(t_j)_{j=0}^{+\infty}$ uma seqüência que converge para um certo real t , provar que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|\psi_\pm(t_j, \cdot) - \psi_\pm(t, \cdot)\|_{C_b^1(\mathbb{R})} = 0.$$

De fato, $f' \in C_d(\mathbb{R})$ e, da Proposição 2.1, a função Φ_{\pm}^1 definida por $\Phi_{\pm}^1(t, x) = f'(x \pm t)$ está em $C(\mathbb{R}, C_d(\mathbb{R}))$. Disto

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|\Phi_{\pm}^1(t_j, \cdot) - \Phi_{\pm}^1(t, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} = 0.$$

Como $f \in C_d(\mathbb{R})$, de maneira análoga obtemos que $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|\psi_{\pm}(t_j, \cdot) - \psi_{\pm}(t, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} = 0$ e que $\psi_{\pm}(t, \cdot) \in C(\mathbb{R}, C_d(\mathbb{R}))$. Assim concluímos este caso simples, pois $\psi_{\pm}(t, \cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow +\infty} \|\psi_{\pm}(t_j, \cdot) - \psi_{\pm}(t, \cdot)\|_{C_b^1(\mathbb{R})} = \\ & = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left(\|\psi_{\pm}(t_j, \cdot) - \psi_{\pm}(t, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} + \|\Phi_{\pm}^1(t_j, \cdot) - \Phi_{\pm}^1(t, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} \right) = 0. \end{aligned}$$

Assim obtemos $\psi_{\pm} \in C(\mathbb{R}, C_d^1(\mathbb{R}))$. Procedendo da mesma forma demonstra-se o caso geral. ■

O próximo lema desempenha um papel importante no cálculo de estimativas para as derivadas da solução de (2.2).

Lema 2.3. Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado da reta real. Se $F \in C(I, C_d^k(\mathbb{R}))$, então dado um $\epsilon > 0$, existe uma constante real positiva $M(\epsilon)$ tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{|x| \geq M(\epsilon)} |\partial_x^\alpha F(t, x)| \leq \epsilon$$

para todo $t \in I$. (Aqui estamos usando a notação $\partial_x^\alpha F = \frac{\partial^\alpha F}{\partial x^\alpha}$ onde α é um inteiro não-negativo.)

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Como I é compacto F é uniformemente contínua. Logo, existe $\delta > 0$ tal que se $t, s \in I$ são tais que $|t - s| < \delta$ acarreta

$$\|F(t, \cdot) - F(s, \cdot)\|_{C_b^k(\mathbb{R})} < \epsilon/2. \tag{2.3}$$

Seja l um inteiro não-negativo tal que $l\delta \leq b - a \leq (l + 1)\delta$. Faça $t_i = a + i\delta$ com $i = 0, 1, \dots, l$.



Figura 2.1: Localização de $\frac{b-a}{\delta}$

Notemos que $F(t_i, \cdot) \in C_d^k(\mathbb{R})$ implica que existe $M_i(\epsilon) > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{|x| \geq M_i(\epsilon)} \left| \partial_x^\alpha F(t_i, x) \right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, se $t \in I$ teremos que $|t - t_i| < \delta$ para algum $i \in \{0, 1, \dots, l\}$. Fazendo $M(\epsilon) = \max \{M_i(\epsilon)/i = 0, 1, \dots, l\}$ e usando a desigualdade triangular podemos concluir que

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{|x| \geq M(\epsilon)} \left| \partial_x^\alpha F(t, x) \right| \leq \\ & \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{|x| \geq M(\epsilon)} \left| \partial_x^\alpha F(t, x) - \partial_x^\alpha F(t_i, x) \right| + \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{|x| \geq M(\epsilon)} \left| \partial_x^\alpha F(t_i, x) \right| \\ & \leq \|F(t, \cdot) - F(t_i, \cdot)\|_{C_b^k(\mathbb{R})} + \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{|x| \geq M(\epsilon)} \left| \partial_x^\alpha F(t_i, x) \right| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

■

2.3 Caso Linear

Para estudar o caso não-linear $\square u = F(u, u_t, u_x)$ primeiro consideraremos o problema linear não-homogêneo

$$\begin{cases} \square u = F(t, x); \\ u(0, x) = f(x); \\ u_t(0, x) = g(x). \end{cases}$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e as funções F , f e g têm regularidade conveniente. O problema acima é conhecido como *Problema de Cauchy* ou *Problema de Valor Inicial* para a equação da onda linear não-homogênea. As funções f e g são os dados iniciais (posição inicial e velocidade inicial respectivamente) do problema e a função F é o termo forçante da equação.

A fórmula explícita para a solução deste problema é conhecida como *Fórmula de D'Alembert*. Tal expressão é uma importante ferramenta através da qual podemos extrair informações sobre o comportamento da solução da equação da onda. Em particular ela mostra que a solução da equação da onda homogênea num ponto do espaço-tempo só depende do valor dos dados iniciais num certo intervalo chamado intervalo de dependência da solução.

2.3.1 Fórmula de D'Alembert

Existem várias formas para se obter a Fórmula de D'Alembert. A maneira por nós apresentada na proposição a seguir explora a fatoração do operador \square em $(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})$ e difere daquela apresentada na maioria dos textos sobre o assunto [4].

Proposição 2.4 (Fórmula de D'Alembert). Sejam $f \in C_d^{k+1}(\mathbb{R})$, $g \in C_d^k(\mathbb{R})$ e F um termo forçante em $C^k((T_-, T_+) \times \mathbb{R})$ para algum $k \geq 1$ e algum intervalo real (T_-, T_+) contendo o zero. Então, existe uma única solução $u \in C^{k+1}((T_-, T_+) \times \mathbb{R})$ para

$$\begin{cases} \square u = F(t, x), & \text{em } (T_-, T_+) \times \mathbb{R}; \\ u(0, x) = f(x), & \text{em } \mathbb{R}; \\ u_t(0, x) = g(x), & \text{em } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Mais ainda, u é dada explicitamente por

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(s, \nu) d\nu ds \quad (2.5)$$

Demonstração. Suponhamos *a priori* que exista uma solução u de classe C^2 para (2.4) e definamos $h_-(s) := (u_t - u_x)(s, x_0 + s)$ onde x_0 é um parâmetro. Derivando essa função obtemos

$$\frac{dh_-(s)}{ds} = \square u(s, x_0 + s) = F(s, x_0 + s).$$

Integrando essa última igualdade e usando o Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\begin{aligned} h_-(t) &= h_-(0) + \int_0^t F(s, x_0 + s) ds \\ (u_t - u_x)(t, x_0 + t) &= (u_t - u_x)(0, x_0) + \int_0^t F(s, x_0 + s) ds \\ &= (g - f')(x_0) + \int_0^t F(s, x_0 + s) ds. \end{aligned}$$

Fazendo $x_0 = x - t$, a última igualdade torna-se

$$(u_t - u_x)(t, x) = (g - f')(x - t) + \int_0^t F(s, x - t + s) ds. \quad (2.6)$$

Analogamente definindo $h_+(s) := (u_t + u_x)(s, x_0 - s)$ e fazendo $x_0 = x + t$ obtém-se

$$(u_t + u_x)(t, x) = (g + f')(x + t) + \int_0^t F(s, x + t - s) ds. \quad (2.7)$$

Adicionando (2.6) à (2.7) obtemos a importante identidade a seguir

$$u_t(t, x) = \frac{1}{2} \left((g - f')(x - t) + (g + f')(x + t) + \int_0^t [F(s, x - t + s) + F(s, x + t - s)] ds \right) \quad (2.8)$$

que integrando mais uma vez em relação à t fornece

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u(0, x) + \frac{1}{2} \int_0^t [(g - f')(x - s) + (g + f')(x + s)] ds + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^\nu [F(s, x - \nu + s) + F(s, x + \nu - s)] ds d\nu \\ &= f(x) + \frac{1}{2} \int_0^t [f'(x + s) - f'(x - s)] ds + \frac{1}{2} \int_0^t [g(x - s) + g(x + s)] ds + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_s^t [F(s, x - \nu + s) + F(s, x + \nu - s)] d\nu ds \\ &= \frac{1}{2} [f(x + t) + f(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(s, \nu) d\nu ds. \end{aligned}$$

O Cálculo acima mostra que se tal solução existe, então ela é dada por (2.5). Como u dada por (2.5) satisfaz todas as condições de (2.4), então fica provado a existência e a fórmula explícita para a solução. A unicidade segue imediatamente de (2.5) e da linearidade da equação. Que $u \in C^{k+1}((T_-, T_+) \times \mathbb{R})$ segue de derivação direta em (2.5), o que é permitido em função da regularidade dos dados iniciais. ■

2.3.2 Estimativas de Energia

Sejam $I = [a, b]$ um intervalo fechado da reta, t_0 e t números reais tais que $|t_0 - t| \leq \frac{b-a}{2}$. Para cada par t_0, t nestas condições definimos

$$I_{t_0, t} := \left[a + |t - t_0|, b - |t - t_0| \right].$$

Para ilustrar temos

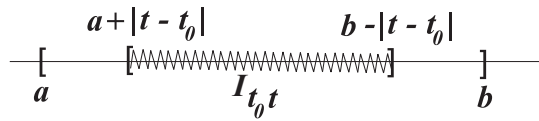


Figura 2.2: Intervalo $I_{t_0, t}$.

Se $t_0 \leq t_1$, então definimos o trapézio $\mathfrak{D}_{I_{t_0, t_1}}$ dado por

$$\mathfrak{D}_{I_{t_0, t_1}} := \{(s, x) : s \in [t_0, t_1], x \in I_{t_0, s}\}$$

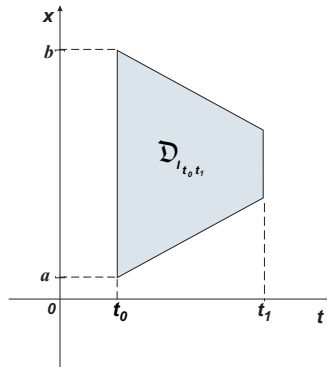


Figura 2.3: Trapézio $\mathfrak{D}_{I_{t_0, t_1}}$ quando $t_0 \leq t_1$,

e se $t_0 \geq t_1$, definimos o trapézio $\mathfrak{D}_{I_{t_0, t_1}}$ por

$$\mathfrak{D}_{I_{t_0, t_1}} := \{(s, x) : s \in [t_1, t_0], x \in I_{t_0, s}\}.$$

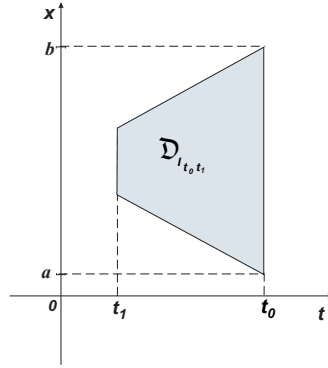


Figura 2.4: Trapézio $\mathfrak{D}_{I_{t_0, t_1}}$ quando $t_1 \leq t_0$.

Seja $u = u(t, x)$ uma função com derivadas parciais limitadas. Definimos a quantidade

$$\mathcal{E}[u](t) := \| (u_t - u_x)(t, \cdot) \|_{C_b(\mathbb{R})} + \| (u_t + u_x)(t, \cdot) \|_{C_b(\mathbb{R})}.$$

Se u satisfaz $\square u = 0$ então $\mathcal{E}[u]$ independe de t , isto é, dizemos que $\mathcal{E}[u]$ é uma quantidade conservada. De fato, usando (2.6) e (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[u](t) &= \| (g - f')(\cdot - t) \|_{C_b(\mathbb{R})} + \| (g + f')(\cdot + t) \|_{C_b(\mathbb{R})} \\ &= \| (g - f') \|_{C_b(\mathbb{R})} + \| (g + f') \|_{C_b(\mathbb{R})} = cte. \end{aligned}$$

Para u suficientemente regular definiremos também as quantidades

$$\mathcal{E}_j[u](t) := \| (\partial_x^j \partial_t u - \partial_x^{j+1} u)(t, \cdot) \|_{C_b(\mathbb{R})} + \| (\partial_x^j \partial_t u + \partial_x^{j+1} u)(t, \cdot) \|_{C_b(\mathbb{R})}$$

e

$$E_k[u](t) := \sum_{j=0}^k \mathcal{E}_j[u](t) + \|u(t, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})}, \quad \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}.$$

Quando não houver dúvida quanto à função u usaremos $\mathcal{E}(t)$, $\mathcal{E}_j(t)$ e $E_k(t)$ em vez de $\mathcal{E}[u](t)$, $\mathcal{E}_j[u](t)$ e $E_k[u](t)$ respectivamente.

Lema 2.5 (Estimativas). Sejam $f \in C_d^{k+1}(\mathbb{R})$, $g \in C_d^k(\mathbb{R})$, $F \in C^k((T_-, T_+) \times \mathbb{R})$ para algum $k \geq 1$, onde $T_-, T_+ \in \mathbb{R}$ e $t_0 \in (T_-, T_+)$. Assuma que $F \in C((T_-, T_+), C_d^k(\mathbb{R}))$. Se u é solução de

$$\begin{cases} \square u = F(t, x), & \text{em } (T_-, T_+) \times \mathbb{R}; \\ u(t_0, x) = f(x), & \text{em } \mathbb{R}; \\ u_t(t_0, x) = g(x), & \text{em } \mathbb{R}, \end{cases}$$

então valem

$$u \in C((T_-, T_+), C_d^{k+1}(\mathbb{R})) \text{ e } u_t \in C((T_-, T_+), C_d^k(\mathbb{R})). \quad (2.9)$$

Além disso,

$$\mathcal{E}_j(t) \leq \mathcal{E}_j(t_0) + 2 \left| \int_{t_0}^t \|\partial_x^j F(s, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} ds \right| \quad (2.10)$$

e

$$\begin{aligned} E_k(t) &\leq E_k(t_0) + 2 \sum_{j=0}^k \left| \int_{t_0}^t \|\partial_x^j F(s, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} ds \right| + \frac{1}{2} \mathcal{E}(t_0) |t - t_0| + \\ &+ \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^s \|F(\nu, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} d\nu \right] ds. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Demonstração. Vamos provar primeiro a segunda parte de (2.9).

Como $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, temos por uma identidade análoga a (2.8)

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= \frac{1}{2} \left[(g - f')(x - t + t_0) + (g + f')(x + t - t_0) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left[F(s, x + t - s) - F(s, x - t + s) \right] ds. \end{aligned}$$

A primeira parcela da soma no segundo membro da identidade acima claramente pertence ao espaço desejado por uma aplicação do Corolário 2.2. Definindo $\Phi(t, x) := \int_{t_0}^t F(s, x + t - s) ds$ e sendo $t_1 \in (T_-, T_+)$, devemos mostrar que $\Phi \in C((T_-, T_+), C_d^k(\mathbb{R}))$. Escolha $J \subset (T_-, T_+)$, intervalo fechado tal que $t_0, t_1 \in \text{int}(J)$, onde $\text{int}(J)$ denota o interior de J .

Assim, basta mostrar que,

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \Phi(t, \cdot) = \Phi(t_1, \cdot) \text{ em } C_d^k(\mathbb{R}).$$

Notemos que

$$\|v\|_{C_b^k(\mathbb{R})} = \|v\|_{C_b(\mathbb{R})} + \|v'\|_{C_b(\mathbb{R})} + \dots + \|v^{(k)}\|_{C_b(\mathbb{R})}$$

e mostremos inicialmente que $\lim_{t \rightarrow t_1} \|\Phi(t, \cdot) - \Phi(t_1, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} = 0$.

Seja $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente e seja x um real qualquer. Temos

$$\begin{aligned}
|\Phi(t, x) - \Phi(t_1, x)| &= \left| \int_{t_0}^t F(s, x + t - s) ds - \int_{t_0}^{t_1} F(s, x + t_1 - s) ds \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^t F(s, x + t - s) ds + \int_{t_0}^{t_1} F(s, x + t - s) ds - \right. \\
&\quad \left. - \int_{t_0}^{t_1} F(s, x + t - s) ds - \int_{t_0}^{t_1} F(s, x + t_1 - s) ds \right| \\
&\leq \left| \int_t^{t_1} F(s, x + t - s) ds \right| + \\
&\quad + \left| \int_{t_0}^{t_1} F(s, x + t - s) - F(s, x + t_1 - s) ds \right|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\Phi(t, x) - \Phi(t_1, x)| \leq \left| \int_t^{t_1} F(s, x + t - s) ds \right| + \left| \int_{t_0}^{t_1} F(s, x + t - s) - F(s, x + t_1 - s) ds \right|.$$

Estudaremos as duas parcelas no segundo membro da desigualdade acima separadamente.

Seja $\tilde{\delta} > 0$ tal que $[t_1 - \tilde{\delta}, t_1 + \tilde{\delta}] \subset \text{int}(J) \subset (T_-, T_+)$. Como $F \in C([t_1 - \tilde{\delta}, t_1 + \tilde{\delta}], C_d^k(\mathbb{R}))$, existe um $M = M(t_1, \tilde{\delta}) > 0$ tal que

$$|F(t, \xi)| \leq \|F(t, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} \leq \|F(t, \cdot)\|_{C_b^k(\mathbb{R})} \leq M,$$

para todo $t \in [t_1 - \tilde{\delta}, t_1 + \tilde{\delta}]$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Logo

$$\left| \int_t^{t_1} F(s, x + t - s) ds \right| \leq M|t - t_1|,$$

para todo $t \in [t_1 - \tilde{\delta}, t_1 + \tilde{\delta}]$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, para qualquer $t \in [t_1 - \tilde{\delta}, t_1 + \tilde{\delta}]$,

tal que $|t - t_1| < \frac{\epsilon}{2M}$ teremos

$$\left| \int_t^{t_1} F(s, x + t - s) ds \right| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

No outro caso, seja \widehat{I} o intervalo fechado de extremos t_0 e t_1 . Como $F \in C(\widehat{I}, C_b^k(\mathbb{R}))$, do Lema 2.3, existe $M(\epsilon) > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{|\xi| \geq M(\epsilon)} \left| \partial_\xi^\alpha F(s, \xi) \right| < \frac{\epsilon}{4|t_1 - t_0|}, \text{ para todo } s \in \widehat{I}.$$

Em particular,

$$|F(s, \xi)| < \frac{\epsilon}{4|t_1 - t_0|},$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$, tal que $|\xi| \geq M(\epsilon)$ e para todo $s \in \widehat{I}$.

Vejamos

$$\left| \int_{\widehat{I}} [F(s, x + t - s) - F(s, x - t + s)] ds \right|.$$

Seja x tal que $|x| \geq M(\epsilon) + |J|$, então $|x + t - s|, |x + t_1 - s| \geq M(\epsilon)$ para todo $t \in J$ e para todo $s \in \widehat{I}$. Portanto

$$|F(s, x + t - s)| \leq \frac{\epsilon}{4|T_+ - T_-|}, \forall s \in \widehat{I}, \forall t \in J$$

$$|F(s, x + t_1 - s)| \leq \frac{\epsilon}{4|T_+ - T_-|}, \forall s \in \widehat{I}, \forall t \in J$$

Portanto

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\widehat{I}} [F(s, x + t - s) - F(s, x - t + s)] ds \right| \\
& \leq \int_{\widehat{I}} |F(s, x + t - s)| + |F(s, x - t + s)| ds \\
& \leq \int_{T_-}^{T_+} \frac{\epsilon}{4|T_+ - T_-|} + \frac{\epsilon}{4|T_+ - T_-|} ds = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

Seja x tal que $|x| < M(\epsilon) + |J|$. Neste caso; para todo $s \in \widehat{I}$ e todo $t \in J$, temos

$$|x + t - s|, |x + t_1 - s| < M(\epsilon) + 2|J|.$$

Assim,

$$(s, x + t - s), (s, x + t_1 - s) \in K_\epsilon := J \times [-M(\epsilon) - 2|J|, M(\epsilon) + 2|J|]$$

para todo $s \in \widehat{I}, t \in J$. Como F é uniformemente contínua em K_ϵ , para o mesmo ϵ existe $\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0$ tal que

$$(s_1, \xi_1), (s_2, \xi_2) \in K_\epsilon, |(s_1, \xi_1) - (s_2, \xi_2)| < \delta_2 \Rightarrow |F(s_1, \xi_1) - F(s_2, \xi_2)| < \frac{\epsilon}{2|T_+ - T_-|}$$

Observe que

$$|(s, x + t - s) - (s, x + t_1 - s)| = |t - t_1|.$$

Assim, se $t \in [t_1 - \tilde{\delta}, t_1 + \tilde{\delta}]$ e $|t - t_1| < \delta_2$ temos

$$|F(s, x + t - s) - F(s, x + t_1 - s)| < \frac{\epsilon}{2|T_+ - T_-|}$$

para todo $s \in \hat{I}$. Logo se $|t - t_1| < \delta_2$ temos

$$\left| \int_{\hat{I}} [F(s, x + t - s) - F(s, x + t_1 - s)] ds \right| \leq \int_{\hat{I}} \frac{\epsilon}{2|T_+ - T_-|} ds = \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.14)$$

Combinando (2.13) e (2.14) concluimos que para $t \in [t_1 - \tilde{\delta}, t_1 + \tilde{\delta}]$ e $|t - t_1| < \delta_2$ temos

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} [F(s, x + t - s) - F(s, x + t_1 - s)] ds \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (2.15)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \tilde{\delta}\}$. Se $|t - t_1| < \delta$ valem (2.12) e (2.15).

Logo

$$\begin{aligned} |\Phi(t, x) - \Phi(t_1, x)| &\leq \left| \int_t^{t_1} F(s, x + t - s) ds \right| + \\ &+ \left| \int_{t_0}^{t_1} F(s, x + t - s) - F(s, x + t_1 - s) ds \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e t satisfazendo $|t - t_1| < \delta$. Logo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi(t, x) - \Phi(t_1, x)| < \epsilon,$$

para todo t tal que $|t - t_1| < \delta$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow t_1} \|\Phi(t, \cdot) - \Phi(t_1, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} = 0$ mostrando que

$$u_t \in C((T_-, T_+), C_d(\mathbb{R})).$$

Agora observemos que

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(t, x) = \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, x + t - s) ds := \int_{t_0}^t \tilde{F}(s, x + t - s) ds.$$

Como \tilde{F} satisfaz as condições do caso anterior temos

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \|\Phi(t, \cdot) - \Phi(t_1, \cdot)\|_{C_b^1(\mathbb{R})} = 0,$$

daí,

$$\Phi \in C((T_-, T_+), C_d^1(\mathbb{R})).$$

Assim,

$$u_t \in C((T_-, T_+), C_d^1(\mathbb{R})).$$

Repetindo o argumento concluímos que $u_t \in C((T_-, T_+), C_d^k(\mathbb{R}))$. Integrando em relação à t obtemos $u \in C((T_-, T_+), C_d^k(\mathbb{R}))$, pois

$$u(t, x) = u(t_0, x) + \int_{t_0}^t u_t(s, x) ds.$$

e tanto a função $u(t_0, x) = f(x)$ quanto a função u_t estão em $C_d^k(\mathbb{R})$.

Como são válidas

$$(u_t + u_x)(t, x) = (g + f')(x + t - t_0) + \int_{t_0}^t F(s, x + t - s) ds$$

e

$$(u_t - u_x)(t, x) = (g - f')(x - t + t_0) + \int_{t_0}^t F(s, x - t + s) ds.$$

A diferença entre elas fornece

$$\begin{aligned} u_x(t, x) &= \frac{1}{2} \left[(g - f')(x - t + t_0) - (g + f')(x + t - t_0) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left[F(s, x + t - s) + F(s, x - t + s) \right] ds. \end{aligned}$$

e o mesmo argumento prova que $t \mapsto u_x(t, \cdot)$ é contínua com valores em $C_d^k(\mathbb{R})$. Isto prova (2.9).

Para obter as desigualdades (2.10) e (2.11), vamos começar com a expressão (2.6)

$$(u_t - u_x)(t, x) = (g - f')(x - t) + \int_0^t F(s, x - t + s) ds.$$

Derivando a expressão acima $j \leq k$ vezes e tomando o supremo em x obtemos

$$\begin{aligned} \| (\partial_x^j \partial_t u - \partial_x^{j+1} u)(t, \cdot) \|_{C_b(\mathbb{R})} &\leq \| (\partial_x^j \partial_t u - \partial_x^{j+1} u)(t_0, \cdot) \|_{C_b(\mathbb{R})} + \\ &+ \left| \int_{t_0}^t \| \partial_x^j F(s, \cdot) \|_{C_b(\mathbb{R})} ds \right|. \end{aligned}$$

Analogamente usando (2.7)

$$(u_t + u_x)(t, x) = (g + f')(x + t) + \int_0^t F(s, x + t - s) ds,$$

obtemos uma estimativa similar que adicionadas fornecem (2.10).

Como

$$u(t, x) = u(t_0, x) + \int_{t_0}^t u_t(s, x) ds$$

e $2|u_t(s, x)| \leq \mathcal{E}(s)$, temos

$$\| u(t, \cdot) \|_{C_b(\mathbb{R})} \leq \| u(t_0, \cdot) \|_{C_b(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \left| \int_{t_0}^t \mathcal{E}(s) ds \right|.$$

Podemos lançar mão de (2.10) com $j = 0$ para estimarmos o segundo membro da desigualdade anterior e obtermos uma nova desigualdade que adicionada à soma de (2.10) com $j = 0, \dots, k$ fornece (2.11). ■

Versão Local das Estimativas

Definiremos de maneira análoga a anterior estimativas que serão usadas quando formos trabalhar com a unicidade do problema não-linear.

Consideremos $I = [a, b]$ um intervalo fechado de \mathbb{R} e façamos

$$\mathcal{E}_{I, t_0, j}[u](t) := \| (\partial_x^j \partial_t u - \partial^{j+1} u)(t, \cdot) \|_{C_b(I_{t_0, t})} + \| (\partial_x^j \partial_t u + \partial^{j+1} u)(t, \cdot) \|_{C_b(I_{t_0, t})}$$

e

$$E_{I, t_0, k}[u](t) := \sum_{j=0}^k \mathcal{E}_{I, t_0, j}[u](t) + \| u(t, \cdot) \|_{C_b(I_{t_0, t})}.$$

A título de economia, usaremos futuramente a notação \mathcal{E}_I ao invés de $\mathcal{E}_{I, 0, 0}$ e E_I no lugar de $E_{I, 0, 0}$.

Lema 2.6. Sejam $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C_d^{k+1}(I)$, $g \in C_d^k(I)$, $F \in C^k(\mathfrak{D}_{I, t_0, t_1})$ para algum $k \geq 1$. Se u é solução $C^{k+1}(\mathfrak{D}_{I, t_0, t_1})$ de

$$\begin{cases} \square u = F(t, x), & \text{em } \mathfrak{D}_{I, t_0, t_1}; \\ u(t_0, x) = f(x), & \text{em } I; \\ u_t(t_0, x) = g(x), & \text{em } I, \end{cases}$$

então valem

$$\mathcal{E}_{I,t_0,j}(t) \leq \mathcal{E}_{I,t_0,j}(t_0) + 2 \left| \int_{t_0}^t \|\partial_x^j F(s, \cdot)\|_{C_b(I_{t_0,s})} ds \right| \quad (2.16)$$

e

$$\begin{aligned} E_{I,t_0,k}(t) &\leq E_{I,t_0,k}(t_0) + 2 \sum_{j=0}^k \left| \int_{t_0}^t \|\partial_x^j F(s, \cdot)\|_{C_b(I_{t_0,s})} ds \right| + \\ &+ \frac{1}{2} \mathcal{E}_{I,t_0}(t_0) |t - t_0| + \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^s \|F(\nu, \cdot)\|_{C_b(I_{t_0,\nu})} d\nu \right] ds. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Comentário: No Lema 2.5 era necessário termos $F \in C((T_-, T_+), C_d^{k+1}(\mathbb{R}))$. Aqui, por estarmos tomando o supremo sobre um intervalo compacto não necessitamos de uma hipótese análoga.

A demonstração deste lema é muito parecida com a demonstração do lema anterior bastando apenas tomar o supremo sobre os intervalos corretos.

2.3.3 Iterações

Para mostrar a existência local de solução para o problema não-linear utilizaremos um argumento parecido com o Teorema de Picard das equações diferenciais ordinárias, ou seja, usaremos iterações. Antes porém, mostraremos que a seqüência assim construída está no espaço apropriado.

Lema 2.7. Sejam $f \in C_d^{k+1}(\mathbb{R})$ e $g \in C_d^k(\mathbb{R})$ para algum $k \geq 1$. Definamos uma

seqüência $(u_n)_{n=0}^{+\infty}$ onde; u_0 é a solução do problema

$$\begin{cases} \square u_0 = 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u_0(0, x) = f(x), & \text{em } \mathbb{R}; \\ \partial_t u_0(0, x) = g(x), & \text{em } \mathbb{R}; \end{cases} \quad (2.18)$$

e, para $n \geq 1$, u_n é a solução de

$$\begin{cases} \square u_n = F(u_{n-1}, \partial u_{n-1}), & \text{em } \mathbb{R}^2; \\ u_n(0, x) = f(x), & \text{em } \mathbb{R}; \\ \partial_t u_n(0, x) = g(x), & \text{em } \mathbb{R}; \end{cases} \quad (2.19)$$

onde $F \in C^k(\mathbb{R}^3)$, $F(0, \mathbf{0}) = F(0, 0, 0) = 0$ e $F(u, \partial u) = F(u, u_t, u_x)$. Então, $(u_n)_{n=0}^{+\infty} \subset C^{k+1}(\mathbb{R}^2)$ e, além disso, temos

$$u_n \in C(\mathbb{R}, C_d^{k+1}(\mathbb{R})) \text{ e } \partial_t u_n \in C(\mathbb{R}, C_d^k(\mathbb{R})). \quad (2.20)$$

Demonstração. Vamos começar provando que $u_n \in C^{k+1}(\mathbb{R}^2)$ para $n \geq 0$ usando indução sobre n . Se $n = 0$, da Proposição 2.4 segue o resultado.

Suponhamos $u_n \in C^{k+1}(\mathbb{R}^2)$ e provemos que $u_{n+1} \in C^{k+1}(\mathbb{R}^2)$. Notemos que $F(u_n, \partial u_n) \in C^k(\mathbb{R}^2)$, pois $\partial u_n \in C^k(\mathbb{R}^2)$ e F é suficientemente regular. Como u_{n+1} satisfaz $\square u_{n+1} = F(u_n, \partial u_n) \in C^k(\mathbb{R}^2)$ utilizando novamente a Proposição 2.4 temos

$$u_{n+1} \in C^{k+1}(\mathbb{R}^2).$$

Que a expressão (2.20) é válida para u_0 , é claro, devido ao Lema 2.5. Seja (2.20) válida para u_n . Para provar que (2.20) é válida para u_{n+1} , basta mostrar

$$F(u_n, \partial u_n) \in C(\mathbb{R}, C_d^k(\mathbb{R})) \quad (2.21)$$

e aplicar o Lema 2.5.

Fixe $t \in \mathbb{R}$ e vamos começar provando que $G_n(t, \cdot)$, definida por

$$G_n(t, \cdot) := F(u_n(t, \cdot), \partial u_n(t, \cdot)),$$

está em $C_d^k(\mathbb{R})$. Para tanto precisamos verificar que $\partial^j G_n(t, \cdot)$; $j = 0, \dots, k$ são contínuas em x e decaem a zero quando $|x|$ é suficientemente grande.

A regularidade de F , $u_n(t, \cdot)$ e $\partial u_n(t, \cdot)$ garante $G_n(t, \cdot) \in C^k(\mathbb{R})$.

Se $j = 0$ precisamos mostrar que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} G_n(t, x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} F(u_n(t, x), \partial u_n(t, x)) = 0.$$

Como F é contínua em $(0, 0, 0)$, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que $\| (x, y, z) - (0, 0, 0) \| < \delta$ acarreta $|F(x, y, z)| < \epsilon$. Do fato de $u_n \in C(\mathbb{R}, C_d^{k+1}(\mathbb{R}))$ e $\partial u_n \in C(\mathbb{R}, C_d^k(\mathbb{R}))$, existe $\eta > 0$ tal que se $|x| > \eta$ temos

$$\begin{aligned} |u_n(t, x)| &< \delta/3, \\ |\partial_t u_n(t, x)| &< \delta/3 \quad \text{e} \\ |\partial_x u_n(t, x)| &< \delta/3. \end{aligned}$$

Logo, sendo $\| \cdot \|_+$ a norma da soma em \mathbb{R}^3 , podemos escrever

$$\| (u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \|_+ = |u_n(t, x)| + |\partial_t u_n(t, x)| + |\partial_x u_n(t, x)| < \delta$$

para todo $|x| > \eta$.

Dessa maneira obtemos $|F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x))| < \epsilon$ e concluimos que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} G_n(t, x) = 0$$

e que

$$G_n(t, \cdot) \in C_d(\mathbb{R}).$$

Se $j = 1$, basta mostrar que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \partial_x G_n(t, x) = 0$ para provarmos que $G_n(t, \cdot) \in C_d^1(\mathbb{R})$. Observe que, para algum $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \partial_x G_n(t, x) &= \partial_x F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \\ &= \partial_{z_1} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \partial_x u_n(t, x) + \\ &+ \partial_{z_2} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \partial_x \partial_t u_n(t, x) + \\ &+ \partial_{z_3} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \partial_x^2 u_n(t, x). \end{aligned}$$

Se $|x| > \eta$ temos que tanto $u_n(t, x)$ quanto $\partial u_n(t, x)$ estão dentro da caixa fechada $[-\delta/3, \delta/3]^3$. Logo, $\partial_{z_i} F(u_n, \partial u_n)$ é limitada para $|x| > \eta$. Como $u_n(t, \cdot) \in C_d^{k+1}(\mathbb{R})$ e $\partial u_n(t, \cdot) \in C_d^k(\mathbb{R})$ temos

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \partial_x u_n(t, x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \partial_x \partial_t u_n(t, x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \partial_x^2 u_n(t, x) = 0;$$

e disto concluímos que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \partial_x G_n(t, x) = 0$$

o que prova que $G_n(t, \cdot) \in C_d^1(\mathbb{R})$.

Como k é pelo menos 1, estes dois passos devem sempre ser considerados na demonstração de que $G_n(t, \cdot) \in C_d^k(\mathbb{R})$. Se $k > 1$ consideraremos outros valores para j ; isto é, queremos mostrar que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \partial_x^j G_n(t, x) = 0$$

para $j = 2, \dots, k$.

Notemos que $\partial_x^j G_n(t, x)$ é soma finita de termos do tipo

$$\begin{aligned} & \partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \cdot \\ & \cdot \partial_x^{l_1} u_n(t, x) \dots \partial_x^{l_m} u_n(t, x) \cdot \partial_x^{p_1} \partial_t u_n(t, x) \dots \partial_x^{p_o} \partial_t u_n(t, x), \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $j_1 + j_2 + j_3 \leq j$, $l_i \leq k + 1$ e $p_i \leq k$. O raciocínio é análogo ao anterior, o termo

$$\partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x))$$

é limitado, para todo $|x| > \eta$, os termos

$$\partial_x^{l_i} u_n(t, x)$$

e

$$\partial_x^{p_i} \partial_t u_n(t, x)$$

vão a zero com $|x| \rightarrow +\infty$ e, finalmente, toda a expressão (2.22) vai a zero quando $|x| \rightarrow +\infty$.

Portanto

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \partial_x^j G_n(t, x) = 0$$

para todo $j = 0, \dots, k$ e $G_n(t, x) \in C_d^k(\mathbb{R})$, como queríamos.

Resta mostrar a continuidade em t ; isto é, precisamos provar que $G_n \in C(\mathbb{R}, C_d^k(\mathbb{R}))$. Para isto fixemos $t_0 \in \mathbb{R}$ e mostremos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \| G_n(t, \cdot) - G_n(t_0, \cdot) \|_{C_d^k(\mathbb{R})} = 0.$$

Com efeito, podemos escrever

$$\begin{aligned}
& \| G_n(t, \cdot) - G_n(t_0, \cdot) \|_{C_b^k(\mathbb{R})} = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_x^j G_n(t, x) - \partial_x^j G_n(t_0, x) \right| \\
& \leq \sum_{j=0}^k \sum_{<+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \cdot \right. \\
& \quad \cdot \partial_x^{l_1} u_n(t, x) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t, x) - \\
& \quad - \partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t_0, x), \partial_t u_n(t_0, x), \partial_x u_n(t_0, x)) \cdot \\
& \quad \left. \cdot \partial_x^{l_1} u_n(t_0, x) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t_0, x) \right|
\end{aligned}$$

onde os índices j_i , l_i e p_i são pertinentes e o símbolo $\sum_{<+\infty}$ significa que a soma é finita. Somando e subtraindo

$$\partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \partial_x^{l_1} u_n(t_0, x) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t_0, x)$$

à última expressão obtemos

$$\begin{aligned}
& \| G_n(t, \cdot) - G_n(t_0, \cdot) \|_{C_b^k(\mathbb{R})} = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_x^j G_n(t, x) - \partial_x^j G_n(t_0, x) \right| \\
& \leq \sum_{j=0}^k \sum_{<+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \cdot \right. \\
& \quad \cdot \partial_x^{l_1} u_n(t, x) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t, x) - \\
& \quad - \partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \partial_x^{l_1} u_n(t_0, x) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t_0, x) + \\
& \quad + \partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \partial_x^{l_1} u_n(t_0, x) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t_0, x) - \\
& \quad \left. - \partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t_0, x), \partial_t u_n(t_0, x), \partial_x u_n(t_0, x)) \partial_x^{l_1} u_n(t_0, x) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t_0, x) \right| \\
& \leq \sum_{j=0}^k \sum_{<+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \right| \cdot \\
& \quad \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_x^{l_1} u_n(t, x) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t, x) - \partial_x^{l_1} u_n(t_0, x) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t_0, x) \right| + \\
& \quad + \sum_{j=0}^k \sum_{<+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_x^{l_1} u_n(t_0, x) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t_0, x) \right| \cdot \\
& \quad \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) - \right. \\
& \quad \left. - \partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t_0, x), \partial_t u_n(t_0, x), \partial_x u_n(t_0, x)) \right|.
\end{aligned}$$

Fixemos $\eta > 0$ e considere $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$. Sabemos que

$$u_n \in C([t_0 - \eta, t_0 + \eta], C_d^{k+1}(\mathbb{R}))$$

e que

$$\partial u_n \in C([t_0 - \eta, t_0 + \eta], C_d^k(\mathbb{R})).$$

Com isto podemos afirmar que existe uma constante $M > 0$ tal que $\|u_n(t, \cdot)\|_{C_d^{k+1}(\mathbb{R})} \leq M$ e $\|\partial u_n(t, \cdot)\|_{C_d^k(\mathbb{R})} \leq M$ para todo t no intervalo $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$. Portanto podemos usar M para limitar qualquer uma das quantidades abaixo

$$\begin{aligned} & |u_n(t, x)|, |\partial_x u_n(t, x)|, \dots, |\partial_x^{k+1} u_n(t, x)|, \\ & |\partial_t u_n(t, x)|, |\partial_x \partial_t u_n(t, x)|, \dots, |\partial_x^k \partial_t u_n(t, x)| \end{aligned}$$

desde que $(t, x) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \mathbb{R}$. Ou melhor dizendo, para qualquer t em $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ e qualquer $x \in \mathbb{R}$, vale

$$(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \in [-M, M]^3.$$

Seja $L_1 > 0$ tal que $|\partial_{z_1}^a \partial_{z_2}^b \partial_{z_3}^c F(z_1, z_2, z_3)| < L_1$ para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ tais que $z_1, z_2, z_3 \in [-M, M]^3$ e $a + b + c \leq k$. Seja $L_2 > 0$ tal que possamos escrever $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x^{k_1} u_n(t_0, x) \dots \partial_x^{p_c} \partial_t u_n(t_0, x)| < L_2$. Seja

$L_3 > 0$ tal que, da Desigualdade do Valor Médio segue

$$\begin{aligned} & \left| \partial_{z_1}^a \partial_{z_2}^b \partial_{z_3}^c F(z_1, z_2, z_3) - \partial_{z_1}^a \partial_{z_2}^b \partial_{z_3}^c F(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3) \right| \\ & \leq L_3 \left\| (z_1, z_2, z_3) - (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3) \right\|_+ \\ & = L_3 |z_1 - \tilde{z}_1| + L_3 |z_2 - \tilde{z}_2| + L_3 |z_3 - \tilde{z}_3| \end{aligned}$$

para quaisquer a, b, c pertinentes e quaisquer $(z_1, z_2, z_3), (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3) \in [-M, M]^3$.

Assim,

$$\begin{aligned} & \left\| G_n(t, \cdot) - G_n(t_0, \cdot) \right\|_{C_d^k(\mathbb{R})} \\ & \leq \sum_{j=0}^k \sum_{<+\infty} L_1 \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_x^{l_1} u_n(t, x) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t, x) - \partial_x^{l_1} u_n(t_0, x) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t_0, x) \right| + \\ & + \sum_{j=0}^k \sum_{<+\infty} L_2 L_3 \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| u_n(t, x) - u_n(t_0, x) \right| + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_t u_n(t, x) - \partial_t u_n(t_0, x) \right| + \right. \\ & \quad \left. \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_x u_n(t, x) - \partial_x u_n(t_0, x) \right| \right) \end{aligned}$$

segue da continuidade em t de u_n , $\partial_t u_n$, $\partial_x u_n$ e de $\partial_x^{l_1} u_n(t, \cdot) \dots \partial_x^{p_0} \partial_t u_n(t, \cdot)$ que

$$G_n \in C(\mathbb{R}, C_d^k(\mathbb{R})). \quad (2.23)$$

Com a informação acima e munidos do Lema 2.5 concluímos a indução ficando demonstrada a relação (2.20) e, conseqüentemente, o Lema 2.7. ■

2.4 Caso Não-linear

Nesta seção iremos mostrar existência e unicidade de solução local para o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \square u = F(u, \partial u); \\ u(0, x) = f(x); \\ u_t(0, x) = g(x). \end{cases}$$

Apresentaremos também um critério para estudarmos a solução global do problema.

2.4.1 A Unicidade

A partir do resultado a seguir fará sentido falarmos de intervalo máximo de existência de solução C^{k+1} . Neste sentido observamos que tal intervalo depende de k pois podemos ter uma solução de classe C^3 num certo intervalo I_{C^3} e C^2 num intervalo maior I_{C^2} tal que $I_{C^3} \subset I_{C^2}$.

Teorema 2.8. Seja $I = [a, b]$ um intervalo compacto da reta. Assuma que $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e que $u_i \in C^2(\mathfrak{D}_{I_0, t_1})$; $i = 1, 2$ são soluções para a equação $\square u = F(u, \partial u)$. Então, se $u_1(0, x) = u_2(0, x)$ e $\partial_t u_1(0, x) = \partial_t u_2(0, x)$ para $x \in I$, temos $u_1(t, x) = u_2(t, x)$ em \mathfrak{D}_{I_0, t_1} .

Demonstração. Seja $u = u_1 - u_2$ e seja $\widehat{F}(u, \partial u) = F(u_1, \partial u_1) - F(u_2, \partial u_2)$. Por (2.17) temos, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} E_{I_0}[u](t) &\leq E_{I_0}[u](0) + 2 \int_0^t \|\widehat{F}(s, \cdot)\|_{C_b(I_0, s)} ds + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{I_0}[u](0)|t| + \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s \|\widehat{F}(\nu, \cdot)\|_{C_b(I_0, \nu)} d\nu ds \\ &\leq 2 \int_0^t \|\widehat{F}(s, \cdot)\|_{C_b(I_0, s)} ds + \int_0^t \int_0^s \|\widehat{F}(\nu, \cdot)\|_{C_b(I_0, \nu)} d\nu ds, \end{aligned}$$

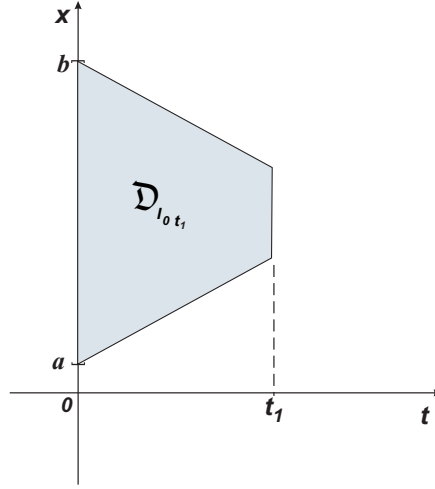


Figura 2.5: Trapézio \mathfrak{D}_{I_0, t_1} .

isto é,

$$E_{I_0}[u](t) \leq 2 \int_0^t \|\widehat{F}(s, \cdot)\|_{C_b(I_0, s)} ds + \int_0^t \int_0^s \|\widehat{F}(\nu, \cdot)\|_{C_b(I_0, \nu)} d\nu ds. \quad (2.24)$$

Notemos que $E_{I_0}[u](0) = \mathcal{E}_{I_0}[u](0) = 0$, pois $u(0, x) = u_t(0, x) = 0$ para todo $x \in I$ e observemos que existe $C > 0$ tal que

$$|F(u_1, \partial u_1) - F(u_2, \partial u_2)| \leq C \left[|u| + |\partial u| \right]$$

em \mathfrak{D}_{I_0, t_1} . De fato,

$$\begin{aligned} |F(u_1, \partial u_1) - F(u_2, \partial u_2)| &= \left| \int_0^1 \partial_\tau F(\tau u_1 + (1 - \tau)u_2, \tau \partial u_1 + (1 - \tau)\partial u_2) d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 \partial_{z_1} F(\tau u_1 + (1 - \tau)u_2, \tau \partial u_1 + (1 - \tau)\partial u_2) d\tau (u_1 - u_2) \right| + \\ &+ \left| \int_0^1 \partial_{z_2} F(\tau u_1 + (1 - \tau)u_2, \tau \partial u_1 + (1 - \tau)\partial u_2) d\tau (\partial_t u_1 - \partial_t u_2) \right| + \\ &+ \left| \int_0^1 \partial_{z_3} F(\tau u_1 + (1 - \tau)u_2, \tau \partial u_1 + (1 - \tau)\partial u_2) d\tau (\partial_x u_1 - \partial_x u_2) \right|. \end{aligned}$$

Considere \tilde{C} a constante positiva que limita uniformemente $\partial_{z_1} F$, $\partial_{z_2} F$ e $\partial_{z_3} F$ no compacto \mathfrak{D}_{I_0, t_1} . Então

$$\begin{aligned} |F(u_1, \partial u_1) - F(u_2, \partial u_2)| &\leq \tilde{C} \left[|u_1 - u_2| + |\partial_t u_1 - \partial_t u_2| + |\partial_x u_1 - \partial_x u_2| \right] \\ &\leq C \left[|u| + |\partial u| \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|\widehat{F}(u, \partial u)(s, \cdot)\|_{C_b(I_0, s)} \leq C \left[\|u(s, \cdot)\|_{C_b(I_0, s)} + \|\partial u(s, \cdot)\|_{C_b(I_0, s)} \right].$$

É interessante ver que $E_{I_0}[u](t)$ domina $\|u(s, \cdot)\|_{C_b(I_0, s)}$, $\|u_t(s, \cdot)\|_{C_b(I_0, s)}$ e $\|u_x(s, \cdot)\|_{C_b(I_0, s)}$. Com efeito, $E_{I_0}[u](t) \geq \|u(t, \cdot)\|_{C_b(I_0, t)}$ é imediato. Para a majoração de $\|u_t(t, \cdot)\|_{C_b(I_0, t)}$ veja que

$$\begin{aligned} E_{I_0}[u](t) &= \mathcal{E}_{I_0}[u](t) + \|u(t, \cdot)\|_{C_b(I_0, t)} \geq \mathcal{E}_{I_0}[u](t) \\ &\geq \|(u_t - u_x)(t, \cdot) + (u_t + u_x)(t, \cdot)\|_{C_b(I_0, t)} = 2\|u_t(t, \cdot)\|_{C_b(I_0, t)} \\ &\geq \|u_t(t, \cdot)\|_{C_b(I_0, t)}. \end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que $E_{I_0}[u](t)$ domina $\|u_x(t, \cdot)\|_{C_b(I_0, t)}$.

De posse de (2.24) e do afirmado acima segue

$$E_{I_0}[u](t) \leq C \int_0^t E_{I_0}[u](s) ds + C \int_0^t \int_0^s E_{I_0}[u](\nu) d\nu ds \quad (2.25)$$

a qual podemos simplificar fazendo

$$h(s) = \sup_{\eta \in [0, s]} E_{I_0}[u](\eta); s \in [0, t_1]$$

e finalmente obtendo

$$h(t) \leq C \int_0^t h(s) ds + C \int_0^t |t_1| h(s) ds.$$

Usando o *Lema de Grönwall* concluímos que $h(s) = 0$. Logo $E_{I_0}(\eta) = 0$ para todo $\eta \in [0, t_1]$ e obtemos $u \equiv 0$ em $[0, t_1]$. ■

2.4.2 Existência Local

Este é o resultado principal deste capítulo. Neste teorema provaremos a existência local de solução para a equação da onda não-linear $\square u = F(u, \partial u) = F(u, u_t, u_x)$.

Teorema 2.9. Sejam $f \in C_d^{k+1}(\mathbb{R})$, $g \in C_d^k(\mathbb{R})$ para algum $k \geq 1$ e $F \in C^{k+1}(\mathbb{R}^3)$ tal que $F(0, \mathbf{0}) = 0$. Então existe um $\epsilon_k > 0$ dependendo de $\|f\|_{C_d^{k+1}(\mathbb{R})}$, $\|g\|_{C_d^k(\mathbb{R})}$ e da função F tal que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \square u = F(u, \partial u); \\ u(0, x) = f(x); \\ \partial_t u(0, x) = g(x). \end{cases} \quad (2.26)$$

tem solução única em $C^{k+1}((-\epsilon_k, \epsilon_k) \times \mathbb{R})$. Além disso,

$$u \in C((-\epsilon_k, \epsilon_k), C_d^{k+1}(\mathbb{R})) \text{ e } \partial_t u \in C((-\epsilon_k, \epsilon_k), C_d^k(\mathbb{R})). \quad (2.27)$$

Demonstração. Unicidade, ver Teorema 2.8. Vamos à existência. Inicialmente definamos uma seqüência de funções $(u_n)_{n=0}^{+\infty}$ por u_0 a solução da equação $\square u_0 = 0$ com dados iniciais $u_0(0, x) = f(x)$ e $\partial_t u_0(0, x) = g(x)$ e, para $n \geq 1$, u_n é a solução

de

$$(*) \quad \begin{cases} \square u_n = F(u_{n-1}, \partial u_{n-1}), & \text{em } \mathbb{R}^2; \\ u_n(0, x) = f(x), & \text{em } \mathbb{R}; \\ \partial_t u_n(0, x) = g(x) & \text{em } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Temos, do Lema 2.7, $(u_n)_{n=0}^{+\infty} \subset C^{k+1}(\mathbb{R}^2)$ e

$$u_n \in C(\mathbb{R}, C_d^{k+1}(\mathbb{R})); \partial_t u_n \in C(\mathbb{R}, C_d^k(\mathbb{R})).$$

Procuraremos agora controlar u_n e todas as suas derivadas de ordem inferior ou igual a k através de uma estimativa para $E_k[u_n](t)$. Notemos que, para todo $n \geq 1$, $E_k[u_n](0) = E_k[u_0](0)$, pois dependem apenas de f e g . Definamos $c_k := E_k[u_0](0)$ e F_n tal que $F_0 := 0$ e $F_n := F(u_{n-1}, \partial u_{n-1})$ para $n \geq 1$.

Assumindo que $0 < \epsilon \leq 2$ e $t \in (-\epsilon, \epsilon)$; o Lema 2.5 fornece

$$\begin{aligned} E_k[u_n](t) &\leq c_k + 2 \sum_{j=0}^k \left| \int_0^t \|\partial_x^j F_n(s, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} ds \right| + \frac{1}{2} \mathcal{E}[u_n](0) |t| + \\ &+ \int_0^t \int_0^s \|F_n(\nu, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} d\nu ds. \end{aligned}$$

Como $|t| < 2$ e $\mathcal{E}[u_n](0) \leq c_k$ temos

$$E_k[u_n](t) \leq 2c_k + 2 \sum_{j=0}^k \left| \int_0^t \|\partial_x^j F_n(s, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} ds \right| + \int_0^t \int_0^s \|F_n(\nu, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} d\nu ds. \quad (2.28)$$

Provemos agora, por indução que, para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, a estimativa

$$E_k[u_n](t) \leq 2c_k + 1, \quad (2.29)$$

vale para todo t em alguma vizinhança $[-\epsilon, \epsilon]$ da origem com $\epsilon \in]0, 2]$.

Primeiro precisamos provar que isto é verdade para $n = 0$. Considere (2.28). Como $F_0 = 0$ segue (2.29). Seja válida a relação (2.29) para n . Queremos mostrar que $E_k[u_{n+1}](t) \leq 2c_k + 1$ para algum $\epsilon \in]0, 2]$ e todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Com efeito, por (2.28), temos

$$\begin{aligned} E_k[u_{n+1}](t) &\leq 2c_k + 2 \sum_{j=0}^k \left| \int_0^t \|\partial_x^j F_{n+1}(s, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} ds \right| + \\ &+ \int_0^t \int_0^s \|F_{n+1}(\nu, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} d\nu ds. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Notemos que para $j = 0, \dots, k$, a derivada $\partial_x^j F_{n+1}$ é uma soma de termos do tipo (2.22)

$$\begin{aligned} \partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \partial_x^{l_1} u_n(t, x) \dots \partial_x^{l_m} u_n(t, x) \cdot \\ \cdot \partial_x^{p_1} \partial_t u_n(t, x) \dots \partial_x^{p_o} \partial_t u_n(t, x) \end{aligned}$$

com j_i 's, l_i 's e p_i 's pertinentes.

De acordo com a hipótese de indução $\partial_x^j u_n$ com $j = 0, \dots, k+1$ e $\partial_x^j \partial_t u_n$ com $j = 0, \dots, k$ são valores majorados por $2c_k + 1$. Como F é regular, existe uma constante $\tilde{\alpha}_k > 0$ dependendo de c_k e de F tal que

$$\|\partial_x^j F_{n+1}(s, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} \leq \tilde{\alpha}_k$$

para todo $j = 0, \dots, k$ e todo t próximo da origem, digamos $|t| \leq \epsilon < 2$.

Assim,

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{j=0}^k \left| \int_0^t \|\partial_x^j F_{n+1}(s, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} ds \right| + \int_0^t \int_0^s \|F_{n+1}(\nu, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} d\nu ds \\
& \leq 2 \sum_{j=0}^k t \tilde{\alpha}_k + \int_0^t s \tilde{\alpha}_k ds = 2(k+1)t \tilde{\alpha}_k + \frac{t^2}{2} \tilde{\alpha}_k \\
& \leq 2(k+1)\epsilon \tilde{\alpha}_k + \epsilon \tilde{\alpha}_k = \epsilon \tilde{\alpha}_k (2(k+1) + 1) := \epsilon \alpha_k.
\end{aligned}$$

Daí, $E_k[u_{n+1}](t) \leq 2c_k + \epsilon \alpha_k$ para todo t no intervalo $[-\epsilon, \epsilon]$.

Reescolhendo ϵ (se necessário for) de tal forma a satisfazer

$$\epsilon \leq \min\left\{1, \frac{1}{\alpha_k + 1}\right\} \quad (2.31)$$

obtemos

$$E_k[u_{n+1}](t) \leq 2c_k + \frac{\alpha_k}{\alpha_k + 1} < 2c_k + 1$$

válida também em $|t| \leq \epsilon$, como queríamos mostrar.

Convergência.

Estamos interessados nas diferenças $\widehat{u}_n := u_{n+1} - u_n$. Notemos que $E_k[\widehat{u}_n](t)$ domina tanto $\|\widehat{u}_n(t, \cdot)\|_{C_b^{k+1}(\mathbb{R})}$ quanto $\|\partial_t \widehat{u}_n(t, \cdot)\|_{C_b^k(\mathbb{R})}$. Daí, se conseguirmos mostrar que existe um $\epsilon > 0$ e uma constante C_k - que pode depender de k mas não de n - tal que

$$\sup_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} E_k[\widehat{u}_n](t) \leq 2^{-n} C_k, \quad (2.32)$$

então as seqüências $(u_n)_{n=0}^{+\infty}$ e $(\partial_t u_n)_{n=0}^{+\infty}$ serão de Cauchy respectivamente nos espaços completos $C([-\epsilon, \epsilon], C_b^{k+1}(\mathbb{R}))$ e $C([-\epsilon, \epsilon], C_b^k(\mathbb{R}))$.

Como $E_k[\widehat{u}_n](0) = 0$, (2.11) acarreta

$$\begin{aligned} E_k[\widehat{u}_n](t) &\leq 2 \sum_{j=0}^k \left| \int_0^t \|\partial_x^j \widehat{F}_n(s, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} ds \right| + \\ &+ \int_0^t \int_0^s \|\widehat{F}_n(\nu, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} d\nu ds \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde $\widehat{F}_n := F(u_n, \partial u_n) - F(u_{n-1}, \partial u_{n-1})$.

Vamos considerar, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} &F(u_n, \partial u_n) - F(u_{n-1}, \partial u_{n-1}) = \\ &\int_0^1 \partial_\tau F(\tau u_n + (1 - \tau)u_{n-1}, \tau \partial_t u_n + (1 - \tau)\partial_t u_{n-1}, \\ &\quad \tau \partial_x u_n + (1 - \tau)\partial_x u_{n-1}) d\tau = \\ &= \int_0^1 \partial_{z_1} F(\tau u_n + (1 - \tau)u_{n-1}, \tau \partial_t u_n + (1 - \tau)\partial_t u_{n-1}, \\ &\quad \tau \partial_x u_n + (1 - \tau)\partial_x u_{n-1}) d\tau(\widehat{u_{n-1}}) + \\ &+ \int_0^1 \partial_{z_2} F(\tau u_n + (1 - \tau)u_{n-1}, \tau \partial_t u_n + (1 - \tau)\partial_t u_{n-1}, \\ &\quad \tau \partial_x u_n + (1 - \tau)\partial_x u_{n-1}) d\tau(\partial_t \widehat{u_{n-1}}) + \\ &+ \int_0^1 \partial_{z_3} F(\tau u_n + (1 - \tau)u_{n-1}, \tau \partial_t u_n + (1 - \tau)\partial_t u_{n-1}, \\ &\quad \tau \partial_x u_n + (1 - \tau)\partial_x u_{n-1}) d\tau(\partial_x \widehat{u_{n-1}}). \end{aligned}$$

Como F é regular e temos (2.29), obtemos

$$\left| \partial_x^j \int_0^1 \partial_{z_i} F(\tau u_n + (1-\tau)u_{n-1}, \tau \partial_t u_n + (1-\tau)\partial_t u_{n-1}, \partial_x u_n + (1-\tau)\partial_x u_{n-1}) d\tau \right| \leq \beta_{k,i}.$$

para certas constantes $\beta_{k,i} > 0$ que dependem apenas de c_k e F .

Já que $E_k[\widehat{u_{n-1}}]$ domina $\widehat{u_{n-1}}$, $\partial_t \widehat{u_{n-1}}$, $\partial_x \widehat{u_{n-1}}$ e todas as suas derivadas em x até a ordem k , existe β_k dependendo apenas de c_k e F tal que

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_x^j \widehat{F}_n(s, \cdot) \right\|_{C_b(\mathbb{R})} = \\ & \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_x^j F(u_n, \partial_t u_n, \partial_x u_n)(s, x) - \partial_x^j F(u_{n-1}, \partial_t u_{n-1}, \partial_x u_{n-1})(s, x) \right| \\ & \leq \beta_{k,1} E_k[\widehat{u_{n-1}}](s) + \beta_{k,2} E_k[\widehat{u_{n-1}}](s) + \beta_{k,3} E_k[\widehat{u_{n-1}}] \\ & := \frac{\beta_k}{2} E_k[\widehat{u_{n-1}}](s) \end{aligned}$$

para $j \leq k$ e $s \in]0, \epsilon]$.

Assim,

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=0}^k \left| \int_0^t \left\| \partial_x^j \widehat{F}_n(s, \cdot) \right\|_{C_b(\mathbb{R})} ds \right| + \int_0^t \int_0^s \left\| \widehat{F}_n(\nu, \cdot) \right\|_{C_b(\mathbb{R})} d\nu ds \\ & \leq \frac{\beta_k}{2} \left| \int_0^t E_k[\widehat{u_{n-1}}](s) ds \right| + \frac{\beta_k}{2} \int_0^t \int_0^s E_k[\widehat{u_{n-1}}](\nu) d\nu ds. \end{aligned}$$

Combinando isto com (2.33), obtemos (para $|t| \leq \epsilon \leq 1$),

$$\begin{aligned}
E_k[\widehat{u}_n](t) &\leq \frac{\beta_k}{2} \left(\left| \int_0^t E_k[\widehat{u}_{n-1}](s) ds \right| + \int_0^t \int_0^s E_k[\widehat{u}_{n-1}](\nu) d\nu ds \right) \\
&\leq \frac{\beta_k}{2} \left(\left| \int_0^t \sup_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} E_k[\widehat{u}_{n-1}](t) ds \right| + \int_0^t \int_0^s \sup_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} E_k[\widehat{u}_{n-1}](t) d\nu ds \right) \\
&\leq \frac{\beta_k}{2} \sup_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} E_k[\widehat{u}_{n-1}](t) \left(|t| + \frac{t^2}{2} \right) \\
&\leq \frac{\beta_k}{2} \sup_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} E_k[\widehat{u}_{n-1}](t) \frac{3}{2} \epsilon.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$E_k[\widehat{u}_n](t) \leq \beta_k \epsilon \sup_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} E_k[\widehat{u}_{n-1}](t)$$

para qualquer t tal que $|t| \leq \epsilon < 1$.

Definindo $\epsilon_k := \min\{1, (\alpha_k + 1)^{-1}, (2\beta_k + 1)^{-1}\}$ obtemos para $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [-\epsilon_k, \epsilon_k]} E_k[\widehat{u}_n](t) &\leq \beta_k \epsilon_k \sup_{t \in [-\epsilon_k, \epsilon_k]} E_k[\widehat{u}_{n-1}](t) \\
&< \frac{1}{2} \sup_{t \in [-\epsilon_k, \epsilon_k]} E_k[\widehat{u}_{n-1}](t) \\
&< \frac{1}{2^2} \sup_{t \in [-\epsilon_k, \epsilon_k]} E_k[\widehat{u}_{n-2}](t) \\
&\vdots \\
&< \frac{1}{2^n} \sup_{t \in [-\epsilon_k, \epsilon_k]} E_k[\widehat{u}_0](t) := 2^{-n} C_k.
\end{aligned}$$

Isto mostra (2.32) e portanto $(u_n)_{n=0}^\infty$ e $(\partial_t u_n)_{n=0}^\infty$ são seqüências de Cauchy em $C([-\epsilon_k, \epsilon_k], C_b^{k+1}(\mathbb{R}))$ e $C([-\epsilon_k, \epsilon_k], C_b^k(\mathbb{R}))$ respectivamente. Assim, existe uma

função $u \in C([- \epsilon_k, \epsilon_k], C_b^{k+1}(\mathbb{R}))$ tal que $\partial_t u \in C([- \epsilon_k, \epsilon_k], C_b^k(\mathbb{R}))$ com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \text{em} \quad C([- \epsilon_k, \epsilon_k], C_b^{k+1}(\mathbb{R}))$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_t u_n = \partial_t u \quad \text{em} \quad C([- \epsilon_k, \epsilon_k], C_b^k(\mathbb{R})).$$

Queremos mostrar que o limite u está em $C^{k+1}((- \epsilon_k, \epsilon_k) \times \mathbb{R})$. Para isto vamos provar que $(u_n)_{n=0}^{+\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $C^{k+1}((- \epsilon_k, \epsilon_k) \times \mathbb{R})$.

Note que $(\partial_x^j u_n)_{n=0}^{+\infty}$ é seqüência de Cauchy em $C((- \epsilon_k, \epsilon_k) \times \mathbb{R})$ para $j \leq k + 1$ e $(\partial_x^j \partial_t u_n)_{n=0}^{+\infty}$ é seqüência de Cauchy em $C((- \epsilon_k, \epsilon_k) \times \mathbb{R})$ para $j \leq k$.

Resta mostrar que $(\partial_x^j \partial_t^m u_n)_{n=0}^{+\infty}$ é seqüência de Cauchy em $C((- \epsilon_k, \epsilon_k) \times \mathbb{R})$ para $j + m \leq k + 1$. Vamos usar a equação. Assuma que $j + 2 \leq k + 1$ e que $m \geq n$.

Logo,

$$\begin{aligned} \partial_x^j \partial_t^2 (u_n - u_m) &= \partial_x^{j+2} (u_n - u_m) + \partial_x^j [F(u_{n-1}, \partial u_{n-1}) - F(u_{m-1}, \partial u_{m-1})] \\ &= \partial_x^{j+2} (u_n - u_m) + \sum_{i=n-1}^{m-2} \partial_x^j [F(u_i, \partial u_i) - F(u_{i+1}, \partial u_{i+1})]. \end{aligned}$$

Para todo $(t, x) \in (- \epsilon_k, \epsilon_k) \times \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^j \partial_t^2 (u_n - u_m)(t, x) \right| &\leq \left| \partial_x^{j+2} (u_n - u_m)(t, x) \right| + \\ &+ \sum_{i=n-1}^{m-2} \left| \partial_x^j [F(u_i, \partial u_i) - F(u_{i+1}, \partial u_{i+1})](t, x) \right|. \end{aligned}$$

Como anteriormente, para todo $j \leq k$, $|t| \leq \epsilon_k$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^j \widehat{F_{i+1}}(t, x) \right| &\leq \frac{\beta_k}{2} E_k[\widehat{u}_i](t) \\ &\leq \frac{\beta_k}{2} \sup_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} E_k[\widehat{u}_i](t) \\ &\quad \vdots \\ &\leq \frac{\beta_k}{2^{i+1}} C_k \end{aligned}$$

E, assim, $(\partial_x^j F_n)_{n=0}^{+\infty}$ é seqüência de Cauchy em $C((-\epsilon_k, \epsilon_k) \times \mathbb{R})$ o que nos leva a concluir que $(\partial_x^j \partial_t^2 u_n)_{n=0}^{+\infty}$ é de Cauchy neste espaço.

Derivando a equação com respeito à t , obtemos

$$\partial_x^j \partial_t^3 (u_n - u_m) = \partial_x^{j+2} \partial_t (u_n - u_m) + \partial_x^j \partial_t [F(u_{n-1}, \partial u_{n-1}) - F(u_{m-1}, \partial u_{m-1})].$$

De maneira análoga prova-se que a seqüência $(\partial_x^j \partial_t^3 u_n)_{n=0}^{+\infty}$ com $j + 3 \leq k + 1$ é de Cauchy no espaço requerido. E assim faz-se para as outras derivadas mistas. Agora, fazendo $n \rightarrow \infty$ no problema aproximado (*) vemos que u é a solução procurada de (2.26) ■

Observação. Suponhamos que todos os dados do Teorema 2.9 sejam de classe C^∞ . Não é imediato concluir que o Problema de Cauchy possua uma solução local de classe C^∞ . Se esse fosse o caso, para cada k , sua restrição ao intervalo $(-\epsilon_k, \epsilon_k)$ seria a solução de classe C^k do Teorema 2.9. Todavia, a seqüência $(\epsilon_k)_{k=0}^\infty$ pode convergir a zero quando $k \rightarrow \infty$ e assim a solução C^∞ não haveria de ser definida para $t \neq 0$. Um exemplo de não existência de solução local é dado no próximo capítulo.

2.4.3 Existência Global

Aqui serão vistos alguns resultados que garantirão a existência de soluções suaves para dados iniciais suaves e que fornecerão um passo para a continuação da solução local em toda a reta.

Teorema 2.10. Seja $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $F(0, \mathbf{0}) = 0$ e sejam $f \in C_d^{k+1}(\mathbb{R})$ e $g \in C_d^k(\mathbb{R})$ para algum $k \geq 1$. Seja u uma solução $C^{k+1}((T_-, T_+) \times \mathbb{R})$ para o problema

$$\begin{cases} \square u = F(u, \partial u), \\ u(0, x) = f(x); \\ u_t(0, x) = g(x) \end{cases}$$

para T_-, T_+ tais que $T_- < 0 < T_+$. Se existe uma constante real $C_0 > 0$ tal que

$$E_0[u](t) \leq C_0 \tag{2.34}$$

para todo $t \in [0, T_+)$, onde $T_+ < +\infty$, então existe uma constante real C_k dependendo apenas de F, C_0, T_+ e $E_k[u](0)$ tal que

$$E_k[u](t) \leq C_k \tag{2.35}$$

para todo $t \in [0, T_+)$. Analogamente enunciamos este teorema para T_- .

Demonstração. Vamos provar (2.35) por indução. Por hipótese, a inequação é válida para $k = 0$. Suponhamos que $E_j[u](t) \leq C_j$ para todo $j \leq k - 1$ seja válido

e provemos para $j + 1$. Devido à (2.11) temos

$$E_{j+1}(t) \leq \left(1 + \frac{T_+}{2}\right) E_{j+1}(0) + 2 \sum_{l=0}^{j+1} \left| \int_0^t \|\partial_x^l F(s, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} ds \right| + \quad (2.36)$$

$$+ \int_0^t \int_0^s \|F(\nu, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} d\nu ds, \quad (2.37)$$

onde $F(s, \cdot)$ foi escrito no lugar de $F(u(s, \cdot), \partial u(s, \cdot)) = F(u(s, \cdot), u_t(s, \cdot), u_x(s, \cdot))$ e E_{j+1} no lugar de $E_{j+1}[u]$. Por hipótese as normas de u e ∂u são majoradas por C_0 e F é suave. Logo, F é limitada e o termo em (2.37) também o é para todo $t \in [0, T_+)$. Definindo

$$\alpha_j := \left(1 + \frac{T_+}{2}\right) E_{j+1}(0) + \sup_{t \in [0, T_+)} \int_0^t \int_0^s \|F(\nu, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} d\nu ds,$$

obtemos

$$E_{j+1}(t) \leq \alpha_j + 2 \sum_{l=0}^{j+1} \left| \int_0^t \|\partial_x^l F(s, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} ds \right| \quad (2.38)$$

para todo $t \in [0, T_+)$. Observemos que α_j depende apenas das constantes mencionadas no teorema. Notemos também que $\partial_x^l F$ pode ser escrito como soma finita de expressões do tipo (2.22)

$$\begin{aligned} & \partial_{z_1}^{j_1} \partial_{z_2}^{j_2} \partial_{z_3}^{j_3} F(u_n(t, x), \partial_t u_n(t, x), \partial_x u_n(t, x)) \partial_x^{l_1} u_n(t, x) \dots \partial_x^{l_m} u_n(t, x) \cdot \\ & \cdot \partial_x^{p_1} \partial_t u_n(t, x) \dots \partial_x^{p_o} \partial_t u_n(t, x) \end{aligned}$$

onde $l_1 + \dots + l_m + p_1 + \dots + p_o = l$, $l_i \leq l + 1$ e $p_i \leq l$. Da hipótese de indução, para todo $j \leq k - 1$, existe C_j nas condições requeridas tal que $E_j[u](t) \leq C_j$. Mas $E_j[u](t)$ domina $\partial_x^{l_i} u(t, x)$ e $\partial_x^{p_i} \partial_t u(t, x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e quaisquer $l_i \leq j + 1$ e $p_i \leq j$.

Agora, se ou $l_i = j + 2$ ou $p_i = j + 1$, todos os outros l_i e p_i são zero e teremos que a parcela em questão reduz-se à $\partial_{z_2} F(u, \partial u) \partial_x^{j+1} \partial_t u$ ou $\partial_{z_3} F(u, \partial u) \partial_x^{j+2} u$. Nestes casos $\partial_{z_2} F(u, \partial u)$ e $\partial_{z_3} F(u, \partial u)$ são limitados por uma constante nas condições pedidas devido à hipótese de indução. Os fatores $\partial_x^{j+2} u$ e $\partial_x^{j+1} \partial_t u$ são limitados por $E_{j+1}[u](t)$. Assim, existem constantes convenientes $\beta_j^{(\iota)}$; $\iota = 1, \dots, 5$ tais que

$$\begin{aligned} E_{j+1}(t) &\leq \alpha_j + \beta_j^{(1)} + 2 \left| \int_0^t \|\partial_x^{j+1} F(s, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})} ds \right| \\ &\leq \beta_j^{(2)} + \left| \int_0^{T_+} \|\beta_j^{(3)} + \beta_j^{(4)} E_{j+1}(s)\| ds \right| \\ &\leq \beta_j^{(2)} + \beta_j^{(3)} T_+ + \left| \int_0^{T_+} \beta_j^{(4)} E_{j+1}(s) ds \right|. \end{aligned}$$

Ou melhor escrevendo,

$$E_{j+1}(t) \leq \beta_j^{(5)} + \int_0^{T_+} \beta_j^{(4)} E_{j+1}(s) ds.$$

Usando o *Lema de Grönwall* concluímos

$$E_{j+1}(t) \leq \beta_j^{(5)} e^{(T_+ \beta_j^{(4)})} := C_{j+1}.$$

■

O corolário a seguir fornece um critério para a continuação da solução em toda a reta.

Corolário 2.11. Seja $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $F(0, \mathbf{0}) = 0$ e sejam $f, g \in C_d^\infty(\mathbb{R})$.

Se u é uma solução $C^{k+1}((T_-, T_+) \times \mathbb{R})$ para o problema

$$\begin{cases} \square u = F(u, \partial u), \\ u(0, x) = f(x); \\ u_t(0, x) = g(x) \end{cases}$$

onde (T_-, T_+) é o intervalo máximo de existência da solução u . Então, $u \in C^\infty((T_-, T_+) \times \mathbb{R})$ e;

$$\text{ou } T_+ = \infty, \quad \text{ou } E_0[u](t) \text{ é ilimitado em } [0, T_+).$$

Uma afirmação semelhante vale para T_- .

Demonstração. Fixemos arbitrariamente $k \geq 1$. Assumamos que o intervalo máximo de existência para soluções C^{k+1} seja (T_-^k, T_+^k) e observemos que $(T_-^k, T_+^k) \subset (T_-, T_+)$. Queremos provar que $T_-^k = T_-$ e $T_+^k = T_+$. Faremos isto provando apenas que $T_+^k = T_+$. Então suponhamos que $T_+ > T_+^k$. No intervalo compacto $[0, T_+^k]$, a função contínua $E_0[u](t)$ é limitada. E, devido ao Teorema 2.10, $E_k[u](t)$ é limitada por uma constante pertinente em $[0, T_+^k)$. Como consequência do Teorema 2.9 concluímos que existe um $\epsilon_k > 0$ tal que para todo $t \in [0, T_+^k)$ podemos encontrar uma solução para a equação com dados iniciais $u(t, \cdot)$, $u_t(t, \cdot)$ e existência no tempo pelo menos ϵ_k . Assim, existe $t_0 \in [0, T_+^k)$ tal que $t_0 + \epsilon_k > T_+^k$ o que caracteriza uma contradição, pois $t_0 + \epsilon_k$ é um ponto final á direita de um intervalo de existência de uma solução de classe C^{k+1} e T_+^k é, por definição, o supremo de pontos como esse. Logo, $T_+^k = T_+$; análogo para T_- . Assim, o intervalo máximo de existência para uma solução de classe C^{k+1} é (T_-, T_+) para qualquer $k \geq 1$. Assim, u é suave neste intervalo. Para provar que ou $T_+ = +\infty$ ou $E_0[u]$ é ilimitado, suponha que $T_+ < +\infty$ e $E_0[u]$ é limitado para $t \in [0, T_+)$ e proceda com antes para mostrar que (T_-, T_+) não é o intervalo máximo de existência de u chegando a um absurdo. ■

Capítulo 3

Não-Existência de Solução

Neste capítulo estudaremos o Problema de Cauchy para a equação da onda $u_{tt} - u_{xx} = F(u)$ o qual pode não ter solução local para certos dados iniciais. Também enunciaremos e demonstraremos teoremas de comparação de soluções que servirão para entender o fenômeno chamado Blow up (isto é, a solução tornar-se infinita para t finito) e mostrar que para certos valores iniciais podemos não ter solução global para a equação da onda. Este capítulo além de [1] segue as idéias de [2].

3.1 A Não-Existência Global

3.1.1 Comparação de Soluções

Teorema 3.1 (Teorema de Comparação). Considere os seguintes problemas de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \square u = F(u); \\ u(0, x) = f_1(x); \\ \partial_t u(0, x) = g_1(x). \end{array} \right. \quad (3.1)$$

e

$$\begin{cases} \square v = G(v); \\ v(0, x) = f_2(x); \\ \partial_t v(0, x) = g_2(x). \end{cases} \quad (3.2)$$

onde F , f_1 e g_1 são funções em $C^2(\mathbb{R})$ assim como G , f_2 e g_2 . Considere o *cone de luz do passado* por

$$C(t_0, x_0) = \{(t, x) : |x - x_0| \leq t_0 - t \text{ para } t \geq 0\}.$$

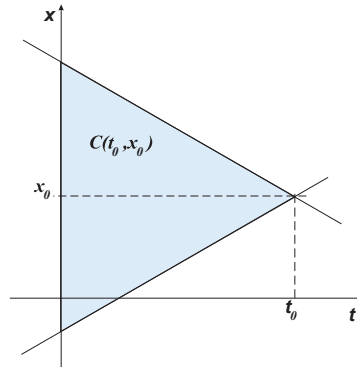


Figura 3.1: Cone de Luz do Passado $C(t_0, x_0)$.

Suponha que $F(u) \geq G(v)$ sempre que $u \geq v$. Considere u_0 a solução do problema de valor inicial (3.1) com $F \equiv 0$ e v_0 a solução do problema (3.2) com a mesma condição.

- Se $u_0 > v_0$ em $C(t_0, x_0)$, então $u(t, x) > v(t, x)$ em $C(t_0, x_0)$;
- Se $u_0 \geq v_0$ em $C(t_0, x_0)$ e G for Lipschitz contínua, então $u(t, x) \geq v(t, x)$ em $C(t_0, x_0)$.

Demonstração. Usando (2.5) os problemas (3.1) e (3.2) tornam-se respectiva-

mente

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [f_1(x+t) + f_1(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g_1(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} F(u(s, \nu)) d\nu ds$$

e

$$v(t, x) = \frac{1}{2} [f_2(x+t) + f_2(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g_2(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} G(v(s, \nu)) d\nu ds$$

onde as duas primeiras parcelas de cada caso representam a solução da equação homogênea e o último termo pode ser visto como um operador integral linear que chamaremos de L para reescrever as fórmulas acima como

$$u = u_0 + LF(u) \tag{3.3}$$

e

$$v = v_0 + LG(v). \tag{3.4}$$

Agora, suponhamos que $u_0 > v_0$ em $C(t_0, x_0)$. Seja $t_1 \in [0, t_0]$ o menor valor tal que $v(t_1, x_1) = u(t_1, x_1)$ para algum ponto (t_1, x_1) em $C(t_0, x_0)$. Assim, subtraindo (3.4) de (3.3) em (t_1, x_1) obtemos

$$0 = u_0(t_1, x_1) - v_0(t_1, x_1) + L[F(u(t_1, x_1)) - G(v(t_1, x_1))]. \tag{3.5}$$

Por hipótese, $u_0(t_1, x_1) - v_0(t_1, x_1) > 0$. Vamos mostrar que o termo

$L[F(u(t_1, x_1)) - G(v(t_1, x_1))]$ é não negativo. De fato, note que

$$L[F(u) - G(v)](t_1, x_1) = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \int_{x_1-t_1+s}^{x_1+t_1-s} [F(u(s, \nu)) - G(v(s, \nu))] d\nu ds$$

e que as integrais tem como domínio de integração o cone $C(t_1, x_1)$ contido na intersecção entre o cone $C(t_0, x_0)$ e o semi-espaço $s < t_1$. Mas nesta região $u > v$ devido a definição de t_1 e ao fato de que inicialmente $u_0 > v_0$. Assim $F(u) - G(v) \geq 0$ e finalmente obtivemos que o segundo membro de (3.5) é estritamente positivo; absurdo. Logo t_1 não pode existir e portanto $u > v$ em $C(t_0, x_0)$.

Para demonstrar a segunda parte do teorema vamos denotar por t_2 o ínfimo dos valores de t para os quais $u(t, x) < v(t, x)$ em $C(t_0, x_0)$. Seja $\epsilon > 0$ um número suficientemente pequeno para que $(t_2 + \epsilon, x_1) \in C(t_0, x_0)$ e que $u(t_2 + \epsilon, x_1) < v(t_2 + \epsilon, x_1)$. Assim, obtemos de (3.3) e (3.4),

$$u(t_2 + \epsilon, x_1) - v(t_2 + \epsilon, x_1) = u_0 - v_0 + L[F(u) - G(v)]. \quad (3.6)$$

O termo $u_0 - v_0$ é não negativo por hipótese; vamos estudar o que sobrou. A expressão

$$L[F(u) - G(v)](t_2 + \epsilon, x_1) = \frac{1}{2} \int_0^{t_2+\epsilon} \int_{x_1-t_2+\epsilon+s}^{x_1+t_2+\epsilon-s} [F(u(s, \nu)) - G(v(s, \nu))] d\nu ds$$

pode ser escrita como

$$\begin{aligned} L[F(u) - G(v)](t_2 + \epsilon, x_1) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_2} \int_{x_1-t_2+\epsilon+s}^{x_1+t_2+\epsilon-s} [F(u(s, \nu)) - G(v(s, \nu))] d\nu ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_2+\epsilon} \int_{x_1-t_2+\epsilon+s}^{x_1+t_2+\epsilon-s} [F(u(s, \nu)) - G(v(s, \nu))] d\nu ds. \end{aligned}$$

Devido à definição de t_2 , temos $u \geq v$ na região

$$\{(t, x) | (t, x) \in C(t_2 + \epsilon, x_1) \text{ e } 0 \leq t \leq t_2\}$$

e graças às propriedades de F e G concluímos que a primeira das integrais fornece um valor não negativo.

Agora analisemos a segunda integral da soma acima. Para isto consideremos os seguintes conjuntos

$$R_1 := \{(t, x) | u(t, x) \geq v(t, x) \text{ para todo } (t, x) \in C(t_2 + \epsilon, x_1) \text{ e } t_2 \leq t \leq t_2 + \epsilon\}$$

e

$$R_2 := \{(t, x) | u(t, x) < v(t, x) \text{ para todo } (t, x) \in C(t_2 + \epsilon, x_1), t_2 \leq t \leq t_2 + \epsilon\}.$$

É fácil ver que a integral sobre R_1 é não negativa. Sobre R_2 vamos fazer mais uma redução observando que

$$F(u) - G(v) = [F(u) - G(u)] + [G(u) - G(v)]$$

e que $[F(u) - G(u)]$ é também uma quantidade não negativa. Finalmente denote por $S \geq 0$ a soma dos quatro termos não negativos que consideramos no segundo membro de (3.6) e por

$$L_{t_2}^{t_2+\epsilon} [G(u) - G(v)] = \iint_{R_2} [G(u) - G(v)](s, \nu) d\nu ds$$

a integral sobre a região R_2 para reescrever (3.6) como

$$u(t_2 + \epsilon, x_1) - v_0(t_2 + \epsilon, x_1) = S + L_{t_2}^{t_2+\epsilon} [G(u) - G(v)]. \quad (3.7)$$

Como G é Lipschitz contínua e em R_2 sabemos que $u < v$ temos que existe uma constante de Lipschitz $c > 0$ tal que

$$G(u) - G(v) \geq -c |u - v|,$$

e assim,

$$\begin{aligned} L_{t_2}^{t_2+\epsilon} [G(u) - G(v)] &\geq \iint_{R_2} c(u - v)(s, \nu) d\nu ds \\ &\geq c \min\{(u - v)(s, \nu) | (s, \nu) \in R_2\} \iint_{R_2} d\nu ds \\ &\geq c\alpha\epsilon \min\{(u - v)(s, \nu) | (s, \nu) \in R_2\} \\ &\geq \epsilon K \min\{(u - v)(s, \nu) | (s, \nu) \in R_2\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L_{t_2}^{t_2+\epsilon} [G(u) - G(v)] \geq \epsilon K \min\{(u - v)(s, \nu) | (s, \nu) \in R_2\}.$$

Agora escolhemos ϵ suficientemente pequeno para que $\epsilon K < 1$ e aplicamos (3.7) ao ponto de $C(t_2 + \epsilon, x_1)$ onde $u - v$ tem mínimo para obter

$$\min(u - v) \geq S + \epsilon K \min(u - v) \tag{3.8}$$

o que acarreta

$$\min(u - v) \geq \frac{S}{1 - \epsilon K} \geq 0. \tag{3.9}$$

Absurdo! Deveríamos ter em $R_2 \subset C(t_2 + \epsilon, x_1)$ uma região em que $u - v < 0$. Logo t_2 não pode existir. ■

Corolário 3.2. Se $|x - x_0| \leq a$, G é Lipschitz e os dados iniciais satisfazem

$f_1(x) \geq f_2(x)$ e $g_1(x) \geq g_2(x)$, então $u(t, x) \geq v(t, x)$ em $C(a, x_0)$.

Demonstração. Primeiro notemos que $u_0 \geq v_0$. De fato, considere $\omega_0 = u_0 - v_0$ a solução do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \square \omega_0 = G(\omega_0); \\ \omega_0(0, x) = f_1(x) - f_2(x); \\ \partial_t \omega_0(0, x) = g_1(x) - g_2(x). \end{cases}$$

Pela fórmula de D'Alembert, temos

$$\omega_0(t, x) = \frac{1}{2}[f_1(x+t) - f_2(x+t) + f_1(x-t) - f_2(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} [g_1(\xi) - g_2(\xi)] d\xi$$

Disto e pelas hipóteses temos $\omega_0(t, x) \geq 0$ para todo $(t, x) \in C(a, x_0)$. Portanto $u_0 \geq v_0$ em $C(a, x_0)$. Sendo G Lipschitz concluímos pelo teorema de comparação que $u \geq v$ em $C(a, x_0)$. ■

Vamos usar o Corolário 3.2 para estudar o seguinte problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = G(y(t)); \\ y(0) = \alpha; \\ \dot{y}(0) = \beta; \end{cases} \quad (\text{EDO-PVI})$$

onde α e β são constantes e G é tal que

$$\beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds > 0.$$

A solução deste PVI é dada implicitamente por

$$t = \int_{\alpha}^{y(t)} \left[\beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds \right]^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Assim, $v(t, x) = y(t)$ é solução para o problema

$$\begin{cases} \square v = G(v); \\ v(0, x) = \alpha; \\ v_t(0, x) = \beta, \end{cases}$$

em $C(a, x_0)$, temos que a função $v(t, x)$ independe de x na região $C(a, x_0)$ e, pelo Corolário 3.2, podemos enunciar o seguinte resultado.

Corolário 3.3. Se para $|x - x_0| \leq a$ tivermos G Lipschitz, $f_1(x) \geq \alpha$ e $g_1(x) \geq \beta$, então $u(t, x) \geq v(t, x)$ em $C(a, x_0)$ onde $v(t, x)$ satisfaz o (EDO-PVI) e $u(t, x)$ satisfaz (3.1).

Demonstração. A demonstração já foi feita.

O teorema a seguir usa o Teorema da Comparação (Teorema 3.1) para verificar que para certas classes de funções forçantes F ocorre o *Blow up* da solução em tempo finito.

Teorema 3.4 (Blow up). Seja u a solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \square u = F(u); \\ u(0, x) = f_1(x), & x \in \mathbb{R}; \\ u_t(0, x) = g_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Suponha que exista uma função Lipschitz contínua $G(v)$ e duas constantes α e β tais que

$$F(u) \geq G(v) \text{ para } u \geq v,$$

$$f_1(x) \geq \alpha \text{ e}$$

$$g_1(x) \geq \beta$$

em $|x - x_0| \leq T$ satisfazendo

$$\beta \geq 0; \quad \beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds > 0 \text{ para } z > \alpha \text{ e} \quad (3.10)$$

$$T := \int_{\alpha}^{+\infty} \left[\beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds \right]^{-\frac{1}{2}} dz < +\infty \quad (3.11)$$

ou

$$\beta < 0; \quad \beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds > 0 \text{ para } z > v_m \quad (3.12)$$

onde v_m é a maior raiz menor que α de

$$\int_{\alpha}^{v_m} \left[\beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds \right]^{-\frac{1}{2}} dz = 0; \quad v_m < \alpha \quad (3.13)$$

e

$$T := \int_{v_m}^{\alpha} \left[\beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds \right]^{-\frac{1}{2}} dz + \int_{v_m}^{+\infty} \left[\beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds \right]^{-\frac{1}{2}} dz < +\infty. \quad (3.14)$$

Então, u *Blows up* em $C(T, x_0)$.

Demonstração. Seja (3.10) satisfeita. Então, a solução do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \square v = G(v); \\ v(0, x) = \alpha, \\ v_t(0, x) = \beta \end{cases}$$

é dada implicitamente por

$$t = \int_{\alpha}^{v(t)} \left[\beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds \right]^{-\frac{1}{2}} dz; t \geq 0.$$

Se

$$T := \int_{\alpha}^{+\infty} \left[\beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds \right]^{-\frac{1}{2}} dz \leq +\infty,$$

então $v(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow T$. Pelo Corolário 3.3, $u(t, x) \leq v(t)$ em $C(T, x_0)$ logo concluímos que u *blows-up* em algum $t \leq T$.

Considere agora (3.12) e (3.13). Defina $t_m = - \int_{\alpha}^{v_m} \left[\beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds \right]^{-\frac{1}{2}} dz$.

Para $t \in [0, t_m]$ a solução é dada por

$$t = - \int_{\alpha}^{v(t)} \left[\beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds \right]^{-\frac{1}{2}} dz$$

pois $v(t) \in [v_m, \alpha]$.

Para $t \geq t_m$ a solução é dada por

$$t = t_m + \int_{v_m}^{v(t)} \left[\beta^2 + 2 \int_{\alpha}^z G(s) ds \right]^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Se vale (3.14), temos $v(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow T$. Usando o Corolário 3.3 concluímos que u *blows-up* em $C(T, x_0)$. ■

3.1.2 Um Contra Exemplo Para a Existência Global

Nesta seção vamos estudar o problema

$$\begin{cases} \square u = u^p; \\ u(0, x) = f_2(x) \geq 0; \\ u_t(0, x) = g_2(x) > \beta > 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

para $x \in \mathbb{R}$ e $p = 2, 3, \dots$

Solução: Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = y^p; \\ y(0) = 0; \\ \dot{y}(0) = \beta. \end{cases} \quad (\text{EDO-PVI})$$

A solução é dada implicitamente por

$$t = \int_0^{y(t)} \left[\beta^2 + 2 \int_0^z s^p ds \right]^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Assim,

$$t = \sqrt{p+1} \int_0^{y(t)} \frac{dz}{\sqrt{2z^{p+1} + c}}$$

onde c é uma constante. Como $\frac{1}{\sqrt{2z^{p+1} + c}} \approx \frac{1}{\sqrt{z^{p+1}}}$ para z suficientemente grande e

$$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{dz}{z^{\frac{p+1}{2}}} = \frac{2}{1-p} \left(\frac{1}{\sqrt{z^{p-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a^{p-1}}} \right) \Big|_{z \rightarrow \infty} < \infty$$

se $y \rightarrow \infty$ definimos

$$T \triangleq \sqrt{p+1} \int_0^{y(t)} \frac{dz}{\sqrt{2z^{p+1} + c}} < \infty.$$

Logo, a solução y do (EDO-PVI) explode para T finito.

Como u^p é Lipschitz, crescente, $f_1(x) \geq 0$, $g_1(x) \geq \beta > 0$ em $|x - x_0| < T$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ e valem (3.10) e (3.11) podemos usar o Teorema 3.4 e concluir que a solução u de (3.15) *Blows up* em $C(T, x_0)$.

3.2 Um Contra Exemplo Para a Existência Local

Nesta seção daremos um exemplo de que se, *a priori*, os dados iniciais não tiverem decaimento podemos não ter existência local de solução para um Problema de Cauchy.

Proposição 3.5. Existem dados iniciais f e g em $C^\infty(\mathbb{R})$ tais que para qualquer $\epsilon > 0$, não existe $u \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R})$ solução para o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \square u = u_t^2; \\ u(0, x) = f(x); \\ u_t(0, x) = g(x). \end{cases} \quad (3.16)$$

Demonstração. Considere a equação $u_{tt} = u_t^2$ com $u_t(0, x) = k > 0$. Então,

$$u_t(t, x) = \frac{k}{1 - kt}.$$

Por integração obtemos

$$u(t, x) = u(0, x) - \ln(1 - kt);$$

ou seja, ocorre *Blow up* em $t = 1/k$. Devido ao Teorema 2.8 temos que para algum $a \in \mathbb{R}$, a função u definida no cone $C(\frac{1}{k}, a)$ por

$$u(t, x) = -\ln(1 - kt)$$

é solução para o problema

$$\begin{cases} \square u = u_t^2; \\ u(0, x) = 0; \\ u_t(0, x) = k, \end{cases} \quad (3.17)$$

para x em $[a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}]$.

Seja

$$\Phi(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 2, \end{cases} \quad (3.18)$$

tal que Φ seja uma função suave para todo x em \mathbb{R} . Para um inteiro $k \geq 1$ defina $g_k(x) := k\Phi(x - 4k)$. Dessa forma $g_k(x) = k$ para $x \in [4k - \frac{1}{k}, 4k + \frac{1}{k}]$. Observe que se $k_1 \neq k_2$ e $g_{k_1} \neq 0$, então $g_{k_2} = 0$. Assim, podemos definir

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x).$$

Claramente a função g é suave, $g(x) = k$ para $x \in [4k - \frac{1}{k}, 4k + \frac{1}{k}]$ e o problema

$$\begin{cases} \square u = u_t^2; \\ u(0, x) = 0; \\ u_t(0, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x), \end{cases} \quad (3.19)$$

não admite solução local de classe $C^\infty((-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R})$. ■

Índice Remissivo

- Blow up, 68, 75, 77
- Caixa fechada, 46
- Comparação de Soluções, 68
- Cone de luz do passado, 69
- Continuação da solução, 64
- Dados iniciais, 29
- Desigualdade do Valor Médio, 51
- EDO-PVI, 74
- Equação
 - da Onda, 24
 - Hiperbólica, 24
- Espaços
 - de Banach, 15
 - funcionais, 17
 - Métricos Completos, 15
- Fórmula
 - de D'Alembert, 25
- Funções
 - contínuas, 14
 - que decaem no infinito, 21
- Lema de Grönwall, 21, 55
- Multi-índice, 17
- Problema
 - de Cauchy, 29
 - de Valor Inicial, 29
 - não-homogêneo, 28
 - Não-linear, 52
- Seqüência de Cauchy, 14
- Soluções suaves, 64
- Teorema
 - de Comparação, 68
- Termo forçante, 29
- Unicidade de solução
 - para o problema não-linear, 52
- Versão
 - local das estimativas, 42

Referências Bibliográficas

- [1] RINGSTRÖM, H., *Non-linear Wave Equations(Lecture Notes)*, Department of Mathematics, KTH, Sweden, Spring 2005.
- [2] KELLER, J.B. *On Solutions of Non-linear Wave Equations*, Comm. on pure and appl. Math. Vol. X, 523-530 (1957)
- [3] HÖNIG, C. S. *Aplicações da topologia à Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, CNPq, Rio de Janeiro, 1976.
- [4] FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, CNPq, Rio de Janeiro, 1977.
- [5] SCHOOL OF MATHEMATICS AND STATISTICS - UNIVERSITY OF ST ANDREWS SCOTLAND *The MacTutor History of Mathematics archive* Website: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Gronwall.html> em 18/nov/2005 20:00