



---

**Universidade Estadual Paulista**

Júlio de Mesquita Filho  
Campus de São José do Rio Preto

---

Lucas Casanova Silva

Superfícies de impasse e bifurcações de sistemas forçados

LUCAS CASANOVA SILVA

## Superfícies de impasse e bifurcações de sistemas forçados

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva

São José do Rio Preto  
2009

LUCAS CASANOVA SILVA

## Superfícies de impasse e bifurcações de sistemas forçados

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

### BANCA EXAMINADORA

Primeiro Membro: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva  
Professor Assistente Doutor  
UNESP – São José do Rio Preto  
Orientador

Segundo Membro: Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado  
Professor Associado  
Universidade Federal de Goiás

Terceiro Membro: Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa  
Professor Assistente Doutor  
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 6 de março de 2009

Aos meus pais,  
Ana Laurinda e Antonio Carlos  
*dedico.*

# Agradecimentos

Gostaria de deixar meus sinceros agradecimentos:

Ao professor Paulo Ricardo da Silva por sua paciência mesmo em situações críticas e seu empenho como orientador.

À UNESP, câmpus de São José do Rio Preto pela excelente formação acadêmica. Em especial, aos professores Cláudio Aguinaldo Buzzi e José Roberto Ruggiero, o primeiro por suas aulas interessantes e dedicação plena aos alunos, o segundo por sua capacidade de transformar uma simples aula em uma fonte de conhecimentos com um certo aprofundamento filosófico.

Aos meus amigos do Laboratório de Sistemas Dinâmicos pelas conversas descontraídas e pela ajuda, obrigado Adimar Moretti Junior, Danilo Antonio Caprio, Érika Patrícia Dantas de Oliveira, Gustavo Antonio Pavani, Jairo Barbosa da Silva Junior, Leticia Thais Medeiros, Pedro Toniol Cardin, Rodrigo César Marini e Rodrigo Donizete Euzébio.

À todos os meus amigos, em especial à Guilherme Giovanini por conseguir aplicar todos os conhecimentos teóricos em assuntos cotidianos e também por conseguir transmití-los de uma forma muito didática e em qualquer situação. Agradeço também à Jairo Barbosa da Silva Junior pelas frutíferas conversas sobre vários assuntos, desde mestrado em Matemática até futebol, incluindo tudo que há entre estes dois extremos.

À minha mãe Ana Laurinda Casanova Silva que me ensinou a ter gosto pela Matemática e por ser um exemplo de uma pessoa incrivelmente trabalhadora.

À minha família que, sem dúvida alguma, é meu pilar central, sem o qual eu desabaria em um instante.

À Lilian Casanova Silva, por ser meu norte em momentos difíceis, engraçada, boba o suficiente para rir das minhas piadas e por fingir interesse quando eu me empolgava demais explicando minha dissertação.

À Angelita Capobianco por tudo que ela significa para mim, por me ajudar nesta dissertação e por possuir tantas qualidades que não me atrevo a enumerá-las, pois não caberia aqui. Amo você, Gel.

À principal Lei deste Universo por tudo!

“Tudo o que somos é resultado de  
nossos pensamentos”  
*Buda*

# Resumo

Neste trabalho, estudamos as famílias de sistemas forçados com superfície de impasse regular, as formas normais de seus pontos “típicos” bem como seus retratos de fase. Vemos ainda alguns resultados sobre a genericidade desses pontos e a estabilidade estrutural de um sistema forçado.

Abordamos o tema de uma forma simples: apresentamos o que é um sistema forçado e uma família de sistemas forçados para depois estudar as formas normais de seus pontos “típicos” através de dois campos de direções, os quais se tornam fundamentais para o assunto.

Utilizamos o Teorema de Peixoto (adaptado para este assunto) como norte para dar as características de um sistema forçado estruturalmente estável.

No capítulo 3, damos a estratificação da superfície de impasse e, como resultado final, vemos que esta estratificação é genérica (no conjunto de todas as famílias de sistemas forçados).

**Palavras-chave:** Sistemas Forçados, Superfície de Impasse, Teorema de Peixoto.

# *Abstract*

*In this work we study the families of constrained systems with regular impasse surface, the normal forms of its “typical” points and the respectively phase portrait. We see some results about the genericity of these points and the structural stability of a constrained system.*

*We broach the theme in a simple way: we introduce a constrained system and a family of a constrained systems, and so, we study the normal forms of its “typical” points through two line fields, which become essential for the subject.*

*We use the Peixoto’s Theorem (adapted for this subject) to characterize a structural stable of constrained systems.*

*In the chapter 3, we make a stratification of the impasse surface and, as a last result, we see that stratification is genericity (in the set of all families of constrained systems).*

***Key words: Constrained Systems, Impasse Surface, Peixoto’s Theorem.***



# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Famílias de Sistemas Forçados</b>   | <b>11</b> |
| 1.1      | Definições Preliminares . . . . .  | 11        |
| 1.2      | Formas Normais de Pontos de Codimensões 0 e 1 em $\mathcal{I}_{A,\lambda}$ . . . . . | 17        |
| <b>2</b> | <b>Demonstração do Teorema 1.2.2</b>   | <b>23</b> |
| <b>3</b> | <b>Bifurcações Estáveis de Sistemas Forçados</b>                                     | <b>32</b> |
| 3.1      | Formas Normais de Pontos de Codimensão 2 em $\mathcal{I}_A$ . . . . .                | 32        |
| 3.2      | Estratificação da Superfície de Impasse . . . . .                                    | 40        |
| <b>4</b> | <b>Estabilidade Estrutural de Sistemas Forçados</b>                                  | <b>43</b> |
| 4.1      | O Teorema de Peixoto . . . . .   | 43        |
| 4.2      | Teorema de Peixoto para Sistemas Forçados . . . . .                                  | 45        |
| <b>5</b> | <b>Apêndice</b>  | <b>54</b> |
| 5.1      | Alguns Requisitos Utilizados no Texto . . . . .                                      | 54        |
| 5.1.1    | Teorema de Sard . . . . .  | 54        |
| 5.1.2    | Teorema da Função Implícita . . . . .  | 56        |
| 5.1.3    | Derivada de Ordem 2 . . . . .  | 56        |
| 5.1.4    | Derivadas de Ordem Superior . . . . .  | 57        |
| 5.1.5    | Lema de Hadamard . . . . .   | 57        |
| 5.1.6    | A Topologia de Whitney . . . . .   | 57        |
| 5.1.7    | Sobre a Bifurcação de Andronov-Hopf . . . . .  | 58        |
| 5.1.8    | Espaço de Baire . . . . .  | 60        |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>  | <b>61</b> |

# Introdução

O foco desta dissertação é dado aos *Sistemas Forçados*, mais precisamente, vamos estudar algumas formas normais, a estabilidade estrutural e as bifurcações de Sistemas Forçados de classe  $C^r$ . Para o caso planar, uma família de Sistemas Forçados tem a seguinte forma

$$\begin{cases} a(x, y, \lambda)x' + b(x, y, \lambda)y' = f(x, y, \lambda) \\ c(x, y, \lambda)x' + d(x, y, \lambda)y' = g(x, y, \lambda) \end{cases}, \quad (1)$$

onde  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda$  é um parâmetro real e  $(.)' = \frac{d(.)}{dt}$ . Para cada  $\lambda$  fixado temos um Sistema Forçado. Vamos estudar o comportamento das órbitas destes sistemas nas proximidades da *Superfície de Impasse*, que é onde esse tipo de sistema difere das equações diferenciais ordinárias.

A relevância do estudo de *Sistemas Forçados* para a Teoria de Circuitos Elétricos é discutida em [8].

Este texto é, essencialmente, dividido em 3 partes, são elas:

- Estudo dos pontos de codimensões 0 e 1 na Superfície de Impasse;
- Estudo dos pontos de codimensão 2 na Superfície de Impasse que são bifurcações estáveis;
- Estudo da estabilidade estrutural de Sistemas Forçados através do Teorema de Peixoto.

# Capítulo 1

## Famílias de Sistemas Forçados

Neste capítulo vamos apresentar algumas ferramentas para o estudo de Sistemas Forçados, assim como alguns resultados importantes.

### 1.1 Definições Preliminares

**Definição 1.1.1.** Chamamos de *Superfície de Impasse* o conjunto

$$\mathcal{I}_A = \{(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : a(x, y, \lambda)d(x, y, \lambda) - b(x, y, \lambda)c(x, y, \lambda) = 0\}.$$

Para não carregarmos muita notação, podemos escrever o sistema (1) na forma matricial

$$A(\mathbf{x}, \lambda)\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}, \lambda), \quad (1.1)$$

onde

$$\mathbf{x} = (x, y), \quad A(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(\mathbf{x}, \lambda), \quad F(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(\mathbf{x}, \lambda)$$

Note que, se  $\det A(\mathbf{x}, \lambda) \neq 0$ , então estaremos lidando com equações diferenciais ordinárias pois, multiplicando a equação (1.1) pela inversa da matriz  $A$ , teremos

$$\mathbf{x}' = A^{-1}(\mathbf{x}, \lambda)F(\mathbf{x}, \lambda) \quad (1.2)$$

Quando fixarmos o parâmetro  $\lambda$ , denotaremos os sistemas (1), (1.1) e (1.2) por  $(1)_\lambda$ ,  $(1.1)_\lambda$  e  $(1.2)_\lambda$ , respectivamente. Com a notação matricial, a Superfície de Impasse de uma família de Sistemas Forçados (1.1) pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{I}_A = \{(\mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : \det A(\mathbf{x}, \lambda) = 0\}.$$

Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definimos o *retrato de fase* do Sistema Forçado  $(1.1)_\lambda$  como um par ordenado no qual o primeiro elemento é a curva impasse  $\mathcal{I}_{A,\lambda}$  e o segundo é o retrato de fase de  $(1.2)_\lambda$ , em  $\mathbb{R}^2 - \mathcal{I}_A$ .

Uma notação bem simples para a família de sistemas (1.1) é  $(A, F)$ .

À uma família de Sistemas Forçados  $(A, F)$  associamos uma família de campos de vetores  $A^*F$ , chamada *regularização* (ou *o regularizado*) de  $(A, F)$ . A matriz  $A^*$  é caracterizada por

$$A^*A = AA^* = \delta_A I_2,$$

onde  $I_2$  é a matriz identidade de ordem 2 e  $\delta_A = \det A = ad - bc$ . Assim, temos que

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Logo, o sistema (1.2) pode ser escrito da seguinte forma

$$\mathbf{x}' = \delta_A^{-1} A^*(\mathbf{x}, \lambda) F(\mathbf{x}, \lambda).$$

O retrato de fase de um Sistema Forçado  $(1)_\lambda$  é obtido através de seu campo de vetores regularizado  $A^*F$  removendo os pontos de impasse das órbitas e invertendo a orientação nas regiões onde  $\delta_A$  é negativo.

**Exemplo.** Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y' - x' = 1 \\ (y - x)y' = 2y \end{cases}, \quad (1.4)$$

cujos parâmetro  $\lambda$  igualaremos a zero para ter um retrato de fase. Primeiramente, vamos escrever o sistema em sua forma matricial

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & y - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \end{pmatrix}$$

e em seguida, o seu sistema regularizado

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Assim temos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases}, \quad (1.5)$$

o qual tem o retrato de fase dado na Figura 1.1.

Agora, temos que determinar a curva de impasse

$$\det A = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Seguindo o raciocínio acima,  $\det A < 0$  para  $y > x$ . Como vimos anteriormente, temos que inverter as órbitas nessa região. Assim, temos o retrato de fase para um certo  $\lambda$  fixado dado na Figura 1.2.

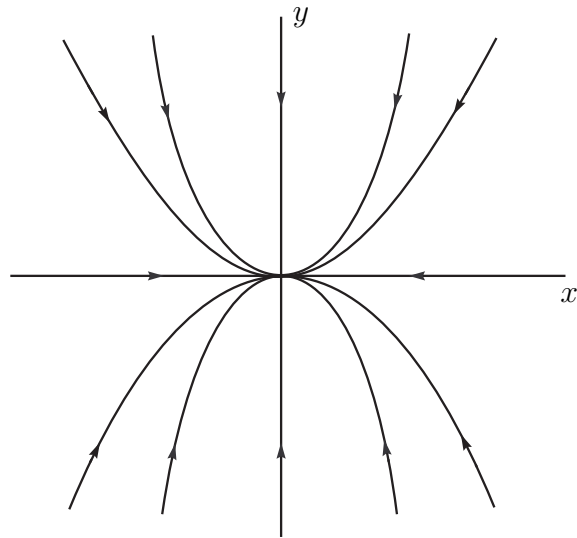


Figura 1.1: Retrato de fase do campo regularizado (1.5).

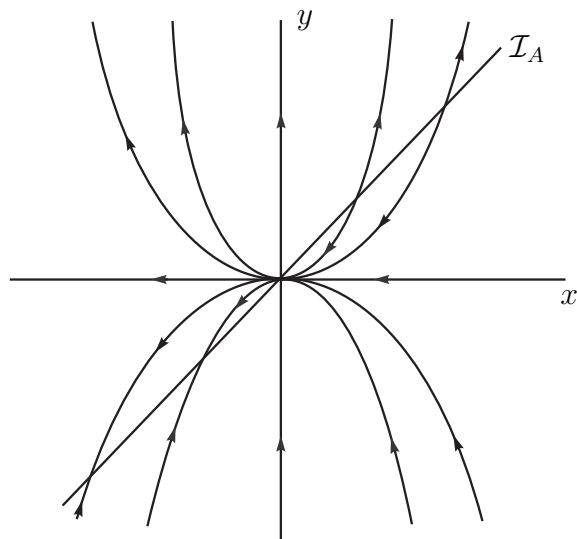


Figura 1.2: Retrato de fase do sistema forçado (1.4) com  $\lambda$  fixo.

**Definição 1.1.2.** Dizemos que uma família de Sistemas Forçados (1.1) tem *Superfície de Impasse regular* se a mesma for regular, isto é, o gradiente de  $\delta_A$  é diferente de zero nos pontos onde  $\delta_A = 0$ , ou seja

$$\nabla\delta_A(x, y, \lambda) = \left( \frac{\partial\delta_A}{\partial x}, \frac{\partial\delta_A}{\partial y}, \frac{\partial\delta_A}{\partial\lambda} \right) (x, y, \lambda) \neq 0, \forall (x, y, \lambda) \in \mathcal{I}_A.$$

Para uma família de Sistemas Forçados (1.1) com Superfície de Impasse regular, vamos considerar dois *campos de direções*:

- Campo de direções do núcleo, denotado por  $K_A$ , definido pelo núcleo do operador  $A$  em um ponto  $(x, y, \lambda) \in \mathcal{I}_A$ ;
- Campo de direções da imagem, denotado por  $I_A$ , definido pela imagem do operador  $A$  em um ponto  $(x, y, \lambda) \in \mathcal{I}_A$ .

**Observação:** O  $K_A$  mede o contato que o campo  $A^*F$  tem com  $\mathcal{I}_A$  no ponto  $(x, y, \lambda)$  e o  $I_A$  nos diz se o ponto  $(x, y, \lambda)$  é um ponto de equilíbrio para o campo  $A^*F$ . Outra observação a ser feita é que os campos de direções são considerados na horizontal, ou seja, estão na fatia  $\lambda = \lambda_0$  fixo.

A condição da Superfície de Impasse ser regular nos garante que  $A$  tem posto 1, para cada  $(x, y, \lambda) \in \mathcal{I}_A$  fixado, pois

- (a) Se o posto de  $A$  é nulo em  $(x, y, \lambda)$ , então

$$A(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla\delta_A(x, y, \lambda) = (0, 0, 0),$$

o que contradiz o fato da Superfície de Impasse ser regular.

- (b) Se o posto de  $A$  é 2 em  $(x, y, \lambda)$ , então o conjunto

$$\{(a(x, y, \lambda), c(x, y, \lambda)), (b(x, y, \lambda), d(x, y, \lambda))\}$$

é linearmente independente e portanto  $\delta_A(x, y, \lambda) \neq 0$ . O que significa que  $A$  não se anula em  $(x, y, \lambda) \in \mathcal{I}_A$  e isso contradiz a definição de  $\mathcal{I}_A$ .

Logo,  $A$  tem posto 1 para cada  $(x, y, \lambda) \in \mathcal{I}_A$ . Assim, a imagem de  $A(x, y, \lambda)$  é um espaço vetorial de dimensão 1 e, conseqüentemente, o núcleo também (pelo Teorema do Núcleo e da Imagem). Portanto, os campos de direções estão bem definidos e são espaços vetoriais de dimensão 1 para cada  $(x, y, \lambda) \in \mathcal{I}_A$ .

Como  $A$  tem posto 1, então pelo menos uma coluna de  $A$  é não nula. Suponha que a coluna  $(a, c)^T$  é não nula. Assim  $a$  ou  $c$  é não nulo.

- (a) Se  $c = 0$  então  $a \neq 0$ . Vamos calcular os pontos que estão no núcleo de  $A$  ou seja, os pares  $(x, y)$  tais que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $A$  tem posto 1, podemos considerar só a primeira equação (pois a primeira linha de  $A$  é não nula)

$$ax + by = 0 \Rightarrow ax = -by \Rightarrow x = \frac{-b}{a}y,$$

ou seja,

$$\text{Nuc}(A) = \left[ \left( \frac{-b}{a}, 1 \right) \right] = [(-b, a)].$$

(b) Se  $a = 0$  então  $c \neq 0$  e prosseguindo analogamente ao item anterior temos  $\text{Nuc}(A) = [(d, -c)]$ .

Se  $(a, c)^T$  for nulo, então basta fazer o mesmo raciocínio com a coluna  $(b, d)^T$ .

Portanto, podemos ver que o campo de direções do núcleo é gerado pelas colunas da matriz  $A^*$ . Analogamente, temos que o campo de direções da imagem é gerado pelas colunas de  $A$ . Vamos considerar que os campos de direções são horizontais, ou seja,  $\lambda = \lambda_0$  fixo.

**Exemplo.** Considere o sistema  $(A, F)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & y - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto temos

$$A^* = \begin{pmatrix} y - x & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como o núcleo é gerado pelas colunas de  $A^*|_{y=x}$ , então  $N(A) = [(1, 2)]$ . Assim, o campo de direções do núcleo associa a cada ponto  $(x_0, y_0)$  de  $\mathcal{I}_{A, \lambda}$  a reta

$$r = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u, v) = \alpha(1, 2) + (x_0, y_0)\},$$

com  $\alpha$  variando em  $\mathbb{R}$ , ou seja, a reta cujo vetor diretor é  $(1, 2)$  passando pelo ponto  $(x_0, y_0)$ .

Já o campo de direções da imagem é gerado pelas colunas de  $A|_{y=x}$ , isto é,  $\text{Im}(A) = [(1, 0)]$ . Logo,  $I_A$  associa a cada ponto  $(x_0, y_0)$  de  $\mathcal{I}_A$  a reta

$$s = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u, v) = \beta(1, 0) + (x_0, y_0)\},$$

com  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Podemos classificar os pontos de  $\mathcal{I}_A$  utilizando os campos de direções do núcleo e da imagem.

**Definição 1.1.3.** Classificamos os pontos sobre a Superfície de Impasse da seguinte maneira:

(a) *Pontos Núcleo-regulares:* são pontos  $(x, y, \lambda) \in \mathcal{I}_A$  tais que  $K_A(x, y, \lambda)$  é transversal a  $\mathcal{I}_A$  em  $(x, y, \lambda)$ ;

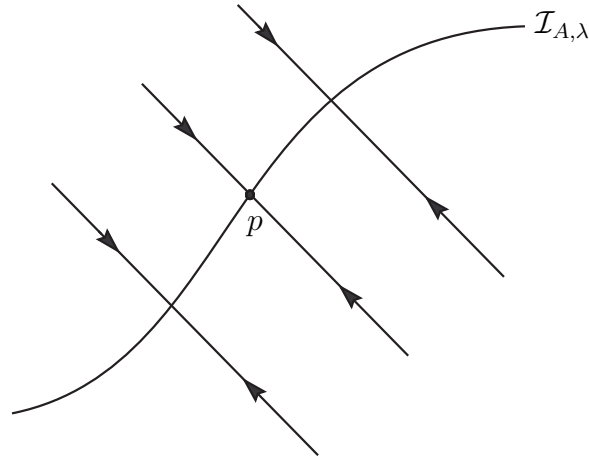


Figura 1.3: (a) O ponto  $p$  é núcleo-regular:  $A^*F$  é transversal a  $\mathcal{I}_{A,\lambda}$ . (b) O ponto  $p$  é imagem-regular: não é um equilíbrio para  $A^*F$ .

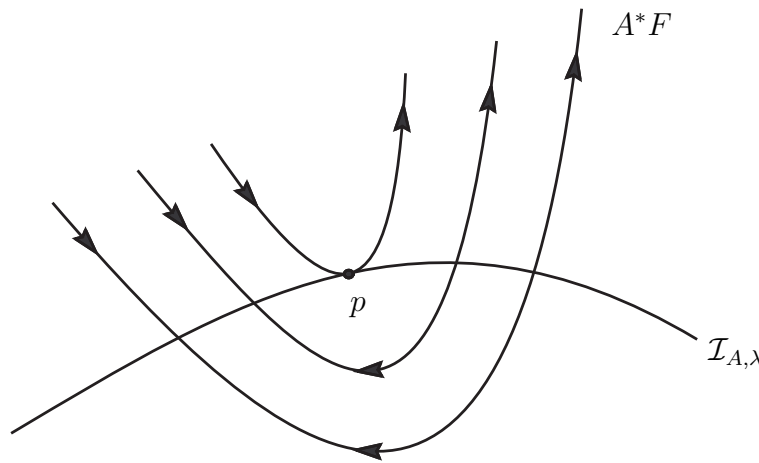


Figura 1.4: (a) O ponto  $p$  é núcleo-singular:  $A^*F$  é tangente a  $\mathcal{I}_{A,\lambda}$ . (b) O ponto  $p$  é imagem-regular: não é um equilíbrio para  $A^*F$ .

- (b) *Pontos Núcleo-singulares*: são pontos  $(x, y, \lambda) \in \mathcal{I}_A$  tais que  $K_A(x, y, \lambda)$  é tangente a  $\mathcal{I}_A$  em  $(x, y, \lambda)$ . Genericamente, estes pontos formam uma curva em  $\mathcal{I}_A$  denotado por  $\Gamma_K$ ;
- (c) *Pontos Imagem-regulares*: são pontos  $(x, y, \lambda) \in \mathcal{I}_A$  tais que  $I_A(x, y, \lambda)$  e  $F(x, y, \lambda)$  são linearmente independentes;
- (d) *Pontos Imagem-singulares*: são pontos  $(x, y, \lambda) \in \mathcal{I}_A$  tais que  $I_A(x, y, \lambda)$  e  $F(x, y, \lambda)$  são linearmente dependentes. Esses pontos formam, genericamente, uma curva denotada por  $\Gamma_I$  que coincide com os equilíbrios de  $A^*F$  contidos em  $\mathcal{I}_A$ .

Para uma compreensão geométrica do que foi definido, veja as figuras 1.3, 1.4 e 1.5.

**Observação.** A genericidade citada nesse capítulo será tratada com mais precisão no Capítulo 2.

Um ponto imagem-singular que também é núcleo-singular é chamado de *núcleo-imagem singular*. Genericamente, as curvas  $\Gamma_K$  e  $\Gamma_I$  se encontram transversalmente em  $\mathcal{I}_A$ .



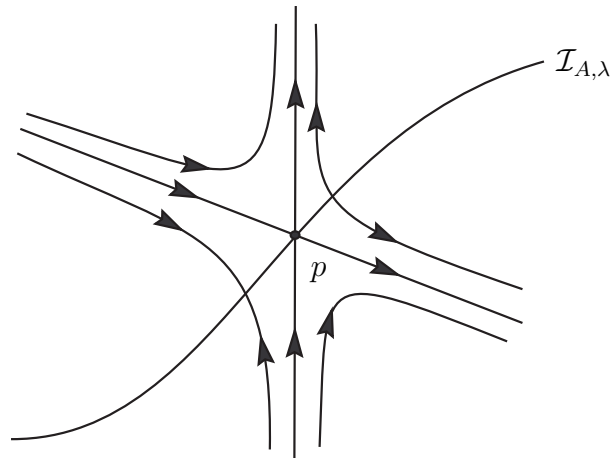


Figura 1.5: (a) O ponto  $p$  é imagem-singular: é uma sela (transversal) para  $A^*F$ . (b) O ponto  $p$  é núcleo-regular:  $\mathcal{I}_{A,\lambda}$  é transversal aos auto-espacos da sela.

**Definição 1.1.4.** Denotaremos o conjunto de pontos de equilíbrio de  $F$  por

$$\Gamma_E = \{(\mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}, \lambda) = (0, 0)\}$$

que é, genericamente, uma curva.

Um ponto imagem-singular que também é ponto de equilíbrio é chamado de *imagem-equilíbrio singular*. Claramente, os pontos que são imagem-equilíbrio singulares de (1.1) são os que estão na intersecção de  $\Gamma_E$  com  $\Gamma_I$  que, genericamente, ocorre transversalmente.

**Definição 1.1.5. (Equivalência Topológica)** Dizemos que dois Sistemas Forçados  $(A, F)$  e  $(B, G)$  são *topologicamente equivalentes* nos pontos  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  e  $(\mathbf{x}_1, \lambda_1)$  se existir um homeomorfismo  $h$  de uma vizinhança  $U$  de  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  em uma vizinhança  $V$  de  $(\mathbf{x}_1, \lambda_1)$  que leva  $\mathcal{I}_A \cap U$  em  $\mathcal{I}_B \cap V$ . Mais ainda,  $h$  leva arcos de órbitas de  $A^*F$  (de  $U$ ) em arcos de órbitas de  $B^*G$  (de  $V$ ) preservando sua *orientação forçada*. Veja figura 1.6.

**Observação.** A orientação forçada de  $(A, F)$  é a orientação de  $A^*F$  na região onde  $\delta_A > 0$  e a inversa da orientação de  $A^*F$  na região onde  $\delta_A < 0$ .

## 1.2 Formas Normais de Pontos de Codimensões 0 e 1 em $\mathcal{I}_{A,\lambda}$

Nesta seção apresentaremos (e não provaremos) as formas normais de pontos de codimensões 0 e 1 em  $\mathcal{I}_A$ . Para um aprofundamento maior sobre estas formas normais, ver [14].

Um ponto que é, simultaneamente, núcleo-regular e imagem-regular é chamado de ponto de impasse *não-singular*. Seu retrato de fase local, no  $\mathbb{R}^3$  (considerando os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $O\lambda$ ) é topologicamente equivalente ao retrato de fase de

$$\begin{cases} x' = 0 \\ yy' = 1 \end{cases}, \quad (1.6)$$

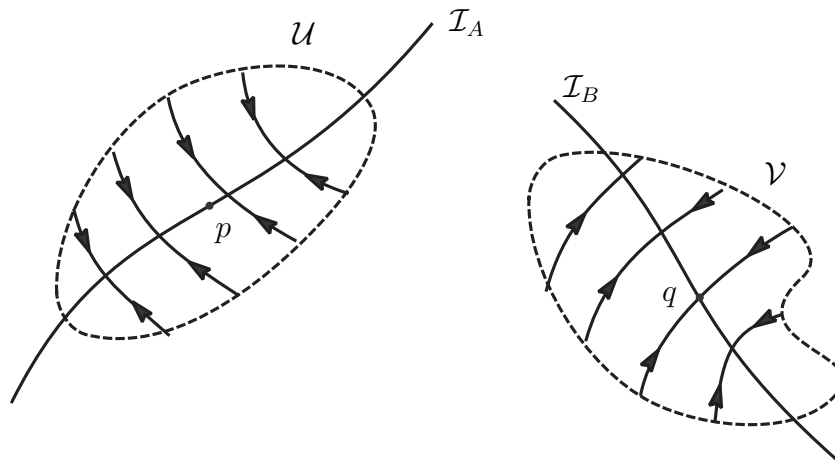


Figura 1.6: Conjugação topológica de Sistemas Forçados.

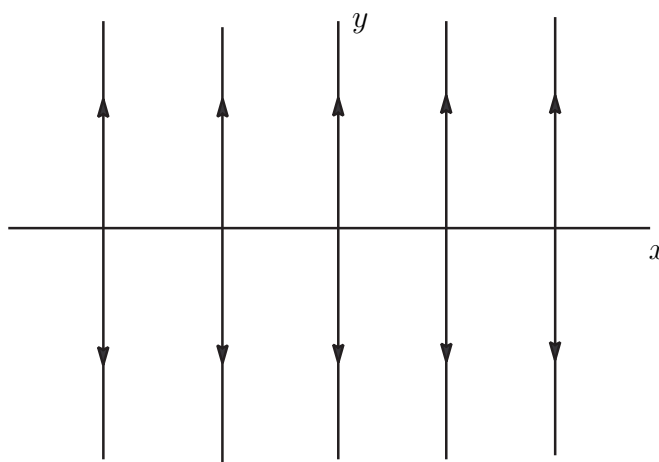


Figura 1.7: Caso repulsor do retrato de fase do sistema (1.6) para um  $\lambda$  fixo. Note que o impasse é o eixo  $Ox$

a menos de uma inversão do tempo, que origina os casos repulsor e atrator. Veja a figura 1.7

Denotaremos a derivada de uma função  $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  na direção de um campo de vetores  $X$  por  $X\delta$ , ou seja

$$X\delta = \frac{\partial \delta}{\partial X} = \langle X, \nabla \delta \rangle .$$

A notação  $X^2\delta$  significa  $X^2\delta = X(X\delta)$ .

**Definição 1.2.1.** Um ponto que é núcleo-singular e imagem-regular, satisfazendo

$$(A^*F)\delta_A = 0 \quad e \quad (A^*F)^2\delta_A \neq 0,$$

é chamado ponto de impasse do tipo *dobra* (ou, simplesmente, dobra).

O retrato de fase local de um ponto de Impasse do tipo dobra é topologicamente equivalente ao retrato de fase de

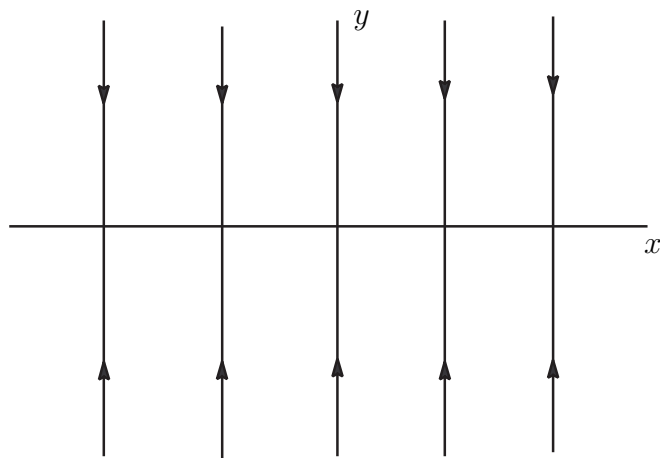


Figura 1.8: Caso atrator do retrato de fase do sistema (1.6) para um  $\lambda$  fixo. Aqui, o impasse também é o eixo  $Ox$

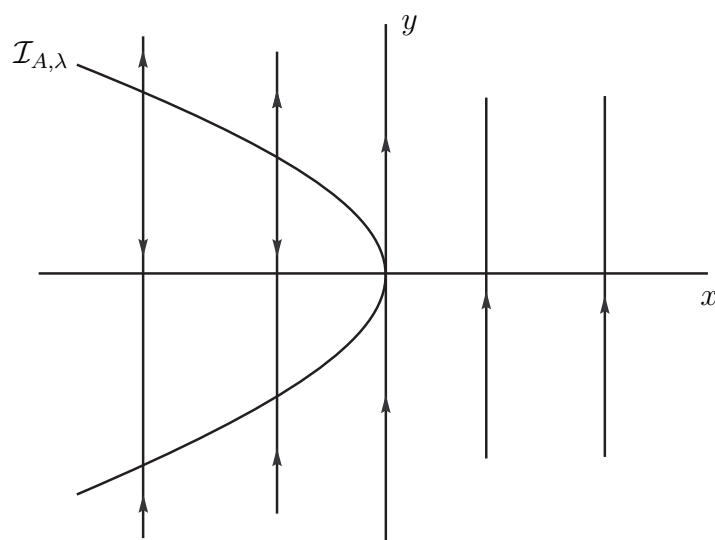


Figura 1.9: A origem é um ponto de dobra.

$$\begin{cases} x' = 0 \\ (x + y^2)y' = 1 \end{cases}$$

que pode ser visto na figura 1.9.

Os próximos três tipos de pontos de impasse são caracterizados por serem, simultaneamente, núcleo-regular, imagem-singular e hiperbólico para  $A^*F$ . Vamos exigir ainda que, nesses pontos, os autovalores da matriz jacobiana de  $A^*F$  sejam simples e os autoespaços correspondentes sejam transversais ao  $\mathcal{I}_A$ . Essas condições determinam os pontos de impasse dos tipos *nó*, *sela* e *foco*. Os dois primeiros tipos, quando necessário, serão referidos como *nó transversal* e *sela transversal* para não correr o risco de confundir com *nó tangente* e *sela tangente* que aparecerão neste trabalho no capítulo 3.

Os pontos de impasse nó transversal, sela transversal e foco têm o retrato de fase local topologicamente equivalente aos retratos de fase dos sistemas

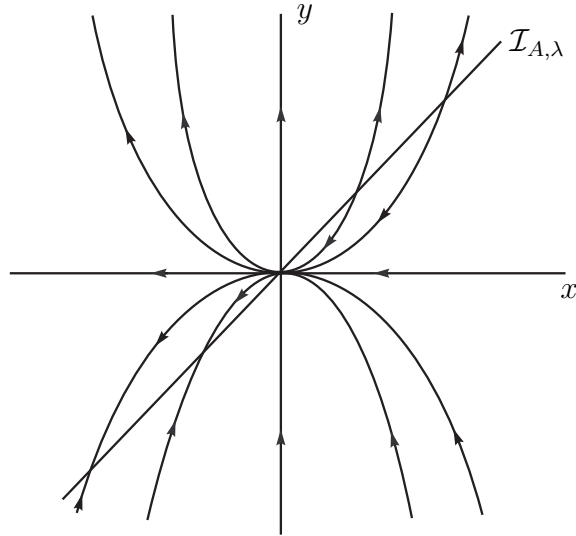


Figura 1.10: A origem é um nó transversal.

(a) nó transversal (Figura 1.10)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y' - x' = 1 \\ (y - x)y' = 2y \end{cases};$$

(b) sela transversal (Figura 1.11)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y' - x' = 1 \\ (y - x)y' = -2y \end{cases};$$

(c) foco (Figura 1.12)

$$\begin{cases} x' - y' = 2 \\ yy' = -x - y \end{cases}.$$

Vamos denotar por  $R_\alpha$  a rotação no plano de um ângulo  $\alpha$ , ou seja

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

As noções de teoria da medida usadas daqui para frente (quando não houver menção explícita) serão da medida de Lebesgue em espaços euclidianos.

**Teorema 1.2.2.** *Seja  $(A, F)$  uma família de Sistemas Forçados de classe  $C^3$ . Para quase toda quádrupla  $(\mathcal{A}_0, \mathcal{F}_0, \theta, \omega) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , a família de sistemas forçados*

$$((A + \mathcal{A}_0)R_\theta, R_\omega(F + \mathcal{F}_0)) \tag{1.7}$$

*satisfaz o seguinte: para quase todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , os pontos de Impasse de  $\mathcal{I}_{A,\lambda}$  são ou não-singulares ou singular do tipo dobra, foco, nó transversal ou sela transversal.*

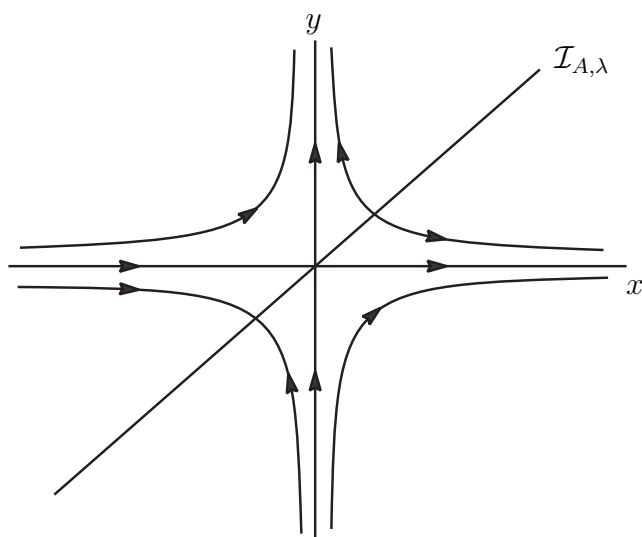


Figura 1.11: Sela transversal.

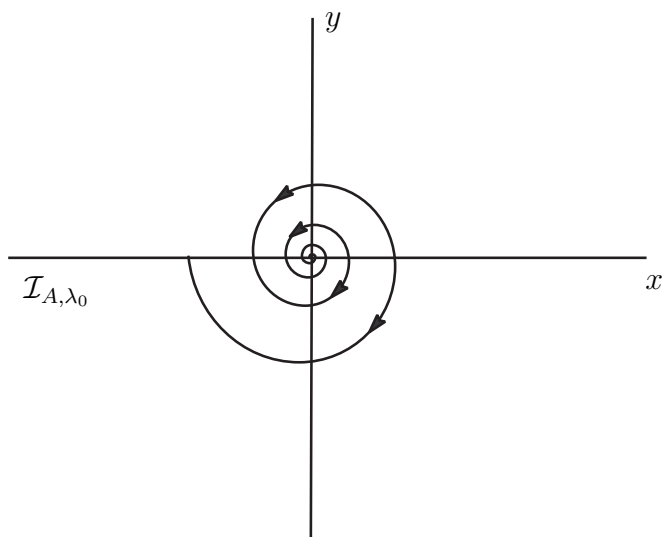


Figura 1.12: Foco sobre  $\mathcal{I}_{A,\lambda_0}$ . Note que o eixo  $Ox$  é justamente a curva  $\mathcal{I}_{A,\lambda_0}$

A demonstração desse teorema será dada no capítulo 2.

# Capítulo 2

## Demonstração do Teorema 1.2.2

Primeiramente, vamos apresentar alguns resultados importantes para a demonstração do Teorema 1.2.2, depois fechamos o capítulo com o esboço da demonstração.

Vamos considerar as seguintes subvariedades de  $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{\mathcal{A} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}) \in \mathbb{R}^4 : \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 \neq 0\}, \\ \mathcal{C}_4 &= \{\mathcal{A} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}) \in \mathbb{R}^4 : \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0\}.\end{aligned}$$

Note que  $\mathcal{C}_1$  é formado pelas matrizes de *corank* = 1 . Então sua codimensão em  $\mathbb{R}^4$  é 1. Por outro lado,  $\mathcal{C}_4$  é formado pela matriz nula, assim, sua codimensão em  $\mathbb{R}^4$  é 4.

**Definição 2.0.3.** Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  e uma variedade diferenciável  $M \subset \mathbb{R}^p$ . Dizemos que  $f$  é transversal à variedade  $M$  no ponto  $f(x_0)$  se  $f(x_0) \notin M$  ou  $f(x_0) \in M$  e  $\mathbb{R}^p = df_{x_0}(\mathbb{R}^n) + T_{f(x_0)}M$ . E dizemos que  $f$  é transversal à  $M$  se o for em todo ponto  $y_0 \in f(\mathbb{R}^n) \cap M$ .

**Proposição 2.0.4.** *Seja  $(A, F)$  uma família de Sistemas Forçados, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) A aplicação  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  é transversal à  $\mathcal{C}_1$  e à  $\mathcal{C}_4$
- (b) A Superfície de Impasse  $\mathcal{I}_A$  é regular.

**Demonstração:** Temos o seguinte fato:

$$\delta_A = \det \circ A \Rightarrow \nabla \delta_A(p) = \nabla \det(A(p))dA_p$$

(a)  $\Rightarrow$  (b) Suponha, por absurdo, que  $\nabla \delta_A(p) = 0$ , para algum  $p \in \mathcal{I}_A$ , assim, dado um vetor  $v \in \mathbb{R}^3$ , temos

$$0 = \langle \nabla \delta_A(p), v \rangle = \nabla \delta_A(p) \cdot v = \nabla \det(A(p))dA_p(v) = \langle \nabla \det(A(p)), dA_p(v) \rangle,$$

o que nos diz que  $dA_p(\mathbb{R}^3) \subseteq T_{A(p)}\mathcal{C}_1$ , pois  $\nabla \det(A(p))$  é perpendicular à  $T_{A(p)}\mathcal{C}_1$  e  $\dim T_{A(p)}\mathcal{C}_1 = 3$ . E isso contradiz a hipótese.

(b)  $\Rightarrow$  (a) Tome  $B = \{u_1, u_2, u_3\}$  uma base para  $T_{A(p)}\mathcal{C}_1$  e considere o vetor  $v = \nabla\delta_A(p) \in \mathbb{R}^3$ , temos

$$0 < \langle \nabla\delta_A(p), \nabla\delta_A(p) \rangle = \langle \nabla \det(A(p)), dA_p(\nabla\delta_A(p)) \rangle.$$

Portanto  $dA_p(\nabla\delta_A(p))$  não é ortogonal à  $\nabla \det(A(p))$ , o que significa que  $dA_p(\nabla\delta_A(p)) \notin T_{A(p)}\mathcal{C}_1$ . Ou seja, o conjunto  $B' = \{u_1, u_2, u_3, dA_p(\nabla\delta_A(p))\}$  é l.i. em  $\mathbb{R}^4$ .

Logo  $\mathbb{R}^4 = dA_p(\mathbb{R}^3) + T_{A(p)}\mathcal{C}_1$ .

□

**Proposição 2.0.5.** *Dado um campo matricial  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  de classe  $C^3$ , o conjunto formado pelas matrizes reais  $\mathcal{A}_0$  de ordem 2, tais que  $A + \mathcal{A}_0$  satisfaz as afirmações da proposição 2.0.4, tem medida total em  $\mathbb{R}^4$ .*

**Demonstração:** Temos que a aplicação  $A + \mathcal{A}_0 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  é uma submersão, pois

$$d(A + \mathcal{A}_0)_p = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_x & b_y & b_\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_x & c_y & c_\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d_x & d_y & d_\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja  $C_i^*$  a imagem inversa de  $C_i$  ( $i \in \{1, 4\}$ ) pela aplicação  $A + \mathcal{A}_0$ , assim,  $C_1^*$  é uma subvariedade de dimensão 6 e  $C_4^*$  é outra de dimensão 3. Toda matriz que é um valor regular das projeções dessas subvariedades  $C_1^*$  e  $C_4^*$ , de  $\mathbb{R}^7$  em  $\mathbb{R}^4$ , satisfaz o seguinte:  $A + \mathcal{A}_0$  é transversal à  $C_1$  e à  $C_4$ . Como estamos trabalhando com aplicações  $C^3$  e  $\max\{1, 6 - 4 + 1\} = 3$  então, pelo Teorema de Sard, o conjunto de valores regulares  $\mathcal{A}_0$  considerados acima tem medida total em  $\mathbb{R}^4$ .

□

**Observação.** A proposição acima garante que dada qualquer matriz  $A(\mathbf{x}, \lambda)$ , é possível perturbá-la via uma soma,  $A(\mathbf{x}, \lambda) + \mathcal{A}_0$  tal que a Curva de Impasse de

$$(A(\mathbf{x}, \lambda) + \mathcal{A}_0)\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}, \lambda)$$

é regular. Ou seja, a proposição 2.0.5 nos apresenta uma forma de genericidade para os campos  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  com Superfície de Impasse regular.

**Definição 2.0.6.** Um ponto  $(\mathbf{x}, \lambda)$  da Curva de Impasse  $\mathcal{I}_{A,\lambda}$  é chamado *regular* se

$$\nabla_{\mathbf{x}}\delta_A(\mathbf{x}, \lambda) = \left( \frac{\partial\delta_A}{\partial x}(\mathbf{x}, \lambda), \frac{\partial\delta_A}{\partial y}(\mathbf{x}, \lambda) \right) \neq 0,$$

caso contrário, é chamado *crítico*.

**Definição 2.0.7.** Dizemos que um ponto crítico  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  da Curva de Impasse  $\mathcal{I}_{A,\lambda}$ , ou da Superfície de Impasse  $\mathcal{I}_A$ , é do tipo *Morse* se

$$\det \begin{pmatrix} (\delta_A)_{xx} & (\delta_A)_{xy} \\ (\delta_A)_{yx} & (\delta_A)_{yy} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_0, \lambda_0)} \neq 0.$$



Pela proposição 2.0.4, nos pontos críticos teremos sempre

$$\nabla_{\mathbf{x}}\delta_A = 0, \quad \frac{\partial\delta_A}{\partial\lambda} \neq 0.$$

Assuma que  $\partial\delta_A/\partial\lambda > 0$ . Pelo Teorema da Função Implícita, a Superfície de Impasse, próximo a um ponto crítico do tipo Morse, é o gráfico de uma função  $\lambda = \lambda(x, y)$ , a qual tem um máximo, um mínimo ou uma sela nesse ponto crítico se a matriz

$$\begin{pmatrix} (\delta_A)_{xx} & (\delta_A)_{xy} \\ (\delta_A)_{yx} & (\delta_A)_{yy} \end{pmatrix}$$

é definida negativa, definida positiva ou qualquer outra, respectivamente. O máximo e o mínimo mudam de ordem na frase anterior se

$$\frac{\partial\delta_A}{\partial\lambda} < 0.$$

**Definição 2.0.8.** (Matriz singular e não-singular)

- (a) Dizemos que uma matriz  $A \subset M_n(\mathbb{R})$  é singular se seu determinante for nulo.
- (b) Dizemos que  $A$  é não-singular quando seu determinante for diferente de zero.

**Definição 2.0.9.** Dada uma família de Sistemas Forçados  $(A, F)$ , dizemos que ela é orbitalmente equivalente a  $(B, G)$  se existe uma mudança de coordenadas  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y})$  e uma matriz não-singular  $M$ , tais que, mudando as coordenadas de  $(A, F)$  e multiplicando o resultado pela esquerda por  $M$ , obtemos  $(B, G)$ .

**Proposição 2.0.10.** *Dada uma família qualquer de Sistemas Forçados  $(A, F)$  de classe  $C^r$  e qualquer ponto da Superfície de Impasse  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  para o qual a matriz  $A$  tem posto 1, existe uma família orbitalmente equivalente à  $(A, F)$  com a seguinte forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{A}(X, Y, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(X, Y, \lambda) \\ G(X, Y, \lambda) \end{pmatrix},$$

onde, a matriz  $\bar{A}$  é a matriz não-singular da definição 2.0.9.

**Demonstração:** Sem perda de generalidade, assuma que o campo de vetores

$$\mathcal{K} = (-b(x, y, \lambda), a(x, y, \lambda)),$$

não se anula em uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  (caso contrário, consideraríamos  $\mathcal{K} = (-d(x, y, \lambda), c(x, y, \lambda))$ ). Nessa vizinhança  $\mathcal{V}$  tome a coordenada  $X$  ao longo de um segmento  $L$  que passa pelo ponto  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  e é ortogonal à  $\mathcal{K}$ . Veja a figura (2.1).

Defina  $Y$  como o tempo para o ponto  $(x, y, \lambda) \in V$  alcançar  $L$  pelo fluxo de  $\mathcal{K}$ . Claramente, nas novas variáveis,  $\mathcal{K} = \frac{\partial}{\partial Y}$  (ou seja, o campo  $\mathcal{K}$  é vertical nas variáveis  $X$  e  $Y$ ) e  $L = \{Y = 0\}$  (ou seja, a reta  $L$  se transforma no eixo  $OX$  no plano  $XY$ ). Veja figura (2.2).

Como

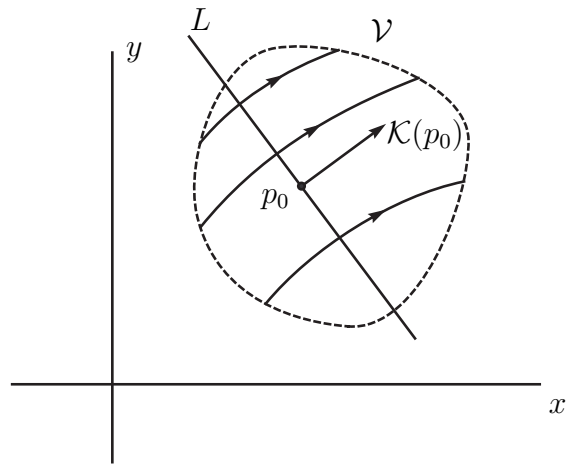


Figura 2.1: O campo  $\mathcal{K}$  nos eixos  $Ox$  e  $Oy$  para  $\lambda = \lambda_0$  fixo.

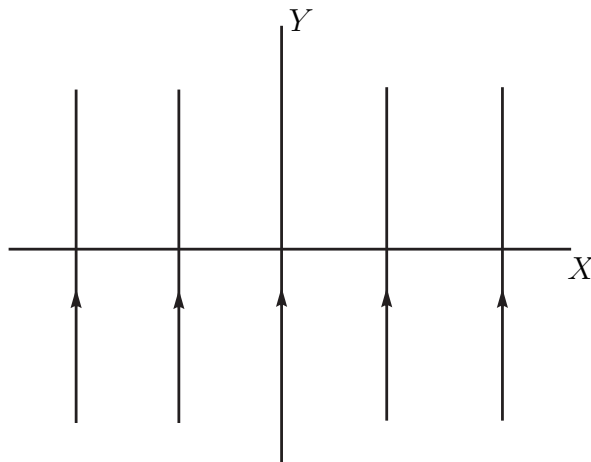


Figura 2.2: O campo  $\mathcal{K}$  nos eixos  $OX$  e  $OY$ .

$$\begin{cases} x = x(X, Y, \lambda) \\ y = y(X, Y, \lambda) \end{cases}$$

Então, segue que

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial x}{\partial X}X' + \frac{\partial x}{\partial Y}Y' \\ y' = \frac{\partial y}{\partial X}X' + \frac{\partial y}{\partial Y}Y' \end{cases}$$

Agora, substituindo as expressões de  $x'$  e  $y'$  em

$$\begin{cases} a(x, y, \lambda)x' + b(x, y, \lambda)y' = f(x, y, \lambda) \\ c(x, y, \lambda)x' + d(x, y, \lambda)y' = g(x, y, \lambda) \end{cases},$$

teremos

$$\begin{cases} \bar{a}(X, Y, \lambda)X' + \bar{b}(X, Y, \lambda)Y' = \bar{f}(X, Y, \lambda) \\ \bar{c}(X, Y, \lambda)X' + \bar{d}(X, Y, \lambda)Y' = \bar{g}(X, Y, \lambda) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde

$$\bar{a}(X, Y, \lambda) = a \frac{\partial x}{\partial X} + b \frac{\partial y}{\partial X}$$

$$\bar{b}(X, Y, \lambda) = a \frac{\partial x}{\partial Y} + b \frac{\partial y}{\partial Y}$$

$$\bar{c}(X, Y, \lambda) = c \frac{\partial x}{\partial X} + d \frac{\partial y}{\partial X}$$

$$\bar{d}(X, Y, \lambda) = c \frac{\partial x}{\partial Y} + d \frac{\partial y}{\partial Y}$$

Note que

$$\left( \frac{\partial x}{\partial Y}, \frac{\partial y}{\partial Y} \right) = (-b, a)$$

e portanto

$$\bar{b} = \langle (-b, a), (a, b) \rangle = 0.$$

Veja figura 2.3.

Como

$$\left( \frac{\partial x}{\partial X}, \frac{\partial y}{\partial X} \right) = (a, b)$$

temos que  $\bar{a} \neq 0$  em  $V$  e de (2.1) segue que

$$\begin{cases} \bar{a}X' + \bar{b}Y' = \bar{f} \\ \bar{c}X' + \bar{d}Y' = \bar{g} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X' + \frac{\bar{b}}{\bar{a}}Y' = \frac{\bar{f}}{\bar{a}} \\ \bar{c}X' + \bar{d}Y' = \bar{g} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{c}X' + \frac{\bar{b}\bar{c}}{\bar{a}}Y' = \frac{\bar{c}\bar{f}}{\bar{a}} \\ \bar{c}X' + \bar{d}Y' = \bar{g} \end{cases}$$

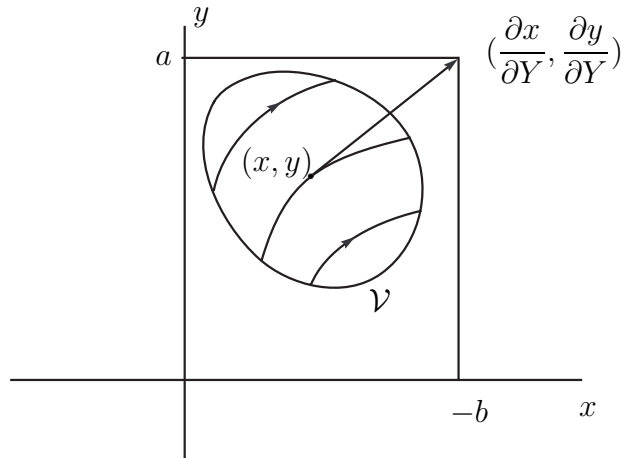


Figura 2.3: Figura ilustrando o seguinte fato:  $\left(\frac{\partial x}{\partial Y}, \frac{\partial y}{\partial Y}\right) = (-b, a)$ .

Subtraindo a primeira equação da segunda temos:

$$\frac{\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}}{\bar{a}}Y' = \bar{g}_2 \Rightarrow \delta_{\bar{A}}(X, Y, \lambda)Y' = G(X, Y, \lambda)$$

E, isolando  $X'$  na primeira equação do sistema (2.1) teremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{\bar{A}}(X, Y, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(X, Y, \lambda) \\ G(X, Y, \lambda) \end{pmatrix}.$$

□

**Corolário 2.0.11.** *Qualquer família de Sistemas Forçados (1.1) de classe  $C^r$  que satisfaz a condição de regularidade em um ponto crítico (ou seja,  $\frac{\partial \delta_A}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \neq 0$ , onde  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  é um ponto crítico) é localmente ( $C^{r-2}$ -) equivalente ao sistema da Proposição 2.0.10 com  $\delta(x, y, \lambda) = \lambda - z(x, y)$ .*

**Demonstração:** Assuma que a família de Sistemas Forçados está na forma da conclusão da Proposição 2.0.10. Note que  $\frac{\partial \delta_A}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \neq 0$ . Assim, pelo Teorema da Função Implícita, a Superfície de Impasse pode ser escrita localmente como  $\lambda = z(x, y)$ . Seja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(s) = \delta_A(x, y, z + s(\lambda - z))$ , assim temos

$$F'(s) = \frac{\partial \delta_A}{\partial \lambda}(x, y, z + s(\lambda - z)) \cdot (\lambda - z)$$

Agora, usando o Lema de Hadamard, temos

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(s) ds = (\lambda - z) \int_0^1 \frac{\partial \delta_A}{\partial \lambda}(x, y, z + s(\lambda - z)) ds$$

Como  $F(1) = \delta_A(x, y, \lambda)$  e  $F(0) = \delta_A(x, y, z(x, y)) = 0$  temos

$$\delta(x, y, \lambda) = (\lambda - z(x, y))U(x, y, \lambda),$$

onde

$$U(x, y, \lambda) = \int_0^1 \frac{\partial \delta_A}{\partial \lambda}(x, y, z + s(\lambda - z)) ds.$$

Assim, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda - z)U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda - z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G/U \end{pmatrix},$$

e assim segue o resultado.  $\square$

**Lema 2.0.12.** *Para qualquer campo matricial  $A$ , de classe  $C^2$ , da forma  $a \equiv 1$ ,  $b = c \equiv 0$  e  $d = \lambda - z(x, y)$ , o conjunto dos pares  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  para os quais a superfície*

$$\lambda - z(x, y) - ux - vy = 0$$

*é regular e só tem pontos críticos do tipo Morse, tem medida total em  $\mathbb{R}^2$ .*

**Demonstração:** Queremos mostrar que o conjunto dos pares  $(u, v)$  para os quais a superfície

$$f(x, y) = \lambda - z(x, y) - ux - vy = 0$$

é regular e só tem pontos críticos do tipo Morse é um conjunto de medida total. Para isso basta observar que tal conjunto coincide com o conjunto de valores regulares da função gradiente de  $z$ , definida por

$$\nabla z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \nabla z(x, y) = (z_x, z_y)$$

e aplicar o Teorema de Sard.

De fato  $(u, v) \in \text{Im}(\nabla z)$  é valor regular de  $\nabla z$  se para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\nabla z(x, y) = (u, v)$  tivermos

$$\begin{vmatrix} z_{xx}(x, y) & z_{xy}(x, y) \\ z_{yx}(x, y) & z_{yy}(x, y) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Da igualdade

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{xx}(x, y) & z_{xy}(x, y) \\ z_{yx}(x, y) & z_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

segue o resultado.  $\square$

**Proposição 2.0.13.** *Qualquer família de classe  $C^r$  de Sistemas Forçados (1.1) pode ser arbitrariamente aproximada para uma família de classe  $C^r$  na qual a Superfície de Impasse tenha pontos críticos apenas do tipo Morse.*

**Demonstração:** A idéia da demonstração é cobrir os pontos críticos degenerados por vizinhanças nas quais o sistema pode ser escrito em sua forma normal, ou seja com  $a = 1, b = 0, c = 1$  e  $d = \lambda - z(x, y)$ . Em seguida aplicamos o lema acima para obtermos um sistema próximo do original e cujos pontos críticos sejam todos do tipo Morse. Para finalizar, um argumento de partições da unidade nos fornece a família desejada. Mais detalhes podem ser obtidos em [4].  $\square$

**Teorema 2.0.14.** *Seja  $A$  um campo matricial arbitrário de classe  $C^r$  com Superfície de Impasse regular e pontos críticos do tipo Morse e seja  $F$  um campo de vetores arbitrário. Então existe um conjunto de ternas*

$$\Omega \subset \{(\mathcal{F}_0, \theta, \omega) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

com  $m(\Omega) = 1$  tal que para  $(\mathcal{F}_0, \theta, \omega) \in \Omega$  tem-se que a família de Sistemas Forçados

$$(AR_\theta, R_\omega(F + \mathcal{F}_0))$$

satisfaz as seguintes afirmações:

- (a)  $\Gamma_K$  é uma curva regular que passa por todos pontos críticos da superfície de impasse e nesses pontos  $\Gamma_K$  projeta-se no eixo  $O\lambda$  em pontos críticos não-degenerados;
- (b)  $\Gamma_E$  é uma curva regular que cruza a Superfície de Impasse transversalmente nos pontos de  $\Gamma_I$ , disjuntos de  $\Gamma_K$ ;
- (c)  $\Gamma_I$  é uma curva regular, exceto em  $\Gamma_I \cap \Gamma_E$ , que não contém pontos críticos e é transversal à  $\Gamma_K$ ;
- (d) Sejam  $\sigma$  o divergente e  $\Delta$  o jacobiano do campo de vetores regularizado

$$R_{-\theta}A^*R_\omega(F + \mathcal{F}_0).$$

Se as funções  $\sigma$  e  $\sigma^2 - 4\Delta$  se anulam em  $\Gamma_I^+ = \{\Gamma_I \cap \{\Delta > 0\}\}$  então sua derivada é não-nula.

**Demonstração:**

- (a) Claramente, o núcleo de  $AR_\theta$  é o núcleo de  $A$  rotacionado de  $\theta$ . Em um ponto regular  $(x, y, \lambda)$  da Superfície de Impasse, o ângulo  $k(x, y, \lambda)$  entre o vetor

$$-(\delta_{AR_\theta, \lambda})_y \frac{\partial}{\partial x} + (\delta_{AR_\theta, \lambda})_x \frac{\partial}{\partial y},$$

tangente a  $\mathcal{I}_{AR_\theta, \lambda}$ , e a linha  $R_\theta K_A$  é igual ao ângulo entre o vetor

$$-(\delta_{A, \lambda})_y \frac{\partial}{\partial x} + (\delta_{A, \lambda})_x \frac{\partial}{\partial y}$$

e a linha  $K_A$  mais  $\theta$ , ou seja,  $k(x, y, \lambda) + \theta$ . Para todo ângulo  $\theta$  que for um valor regular da função  $-k$ , a curva  $\Gamma_{K_{AR_\theta}}$  (definida pelos zeros de  $k + \theta$ ) é regular.

Agora vamos considerar os pontos críticos. Se o crítico tipo Morse for máximo ou mínimo então  $K_{AR_\theta}$  é regular tendo a  $\lambda$ -projeção em pontos críticos não-degenerados, independentemente da direção do núcleo. Para um ponto de sela, a última afirmação continua válida somente quando o núcleo é independente das duas direções nulas da parte quadrática da Superfície de Impasse representada por um gráfico na  $\lambda$ -direção. Claramente essas direções nulas podem ser evitadas para quase todo  $\theta$ .

- (b) Considere um ângulo  $\theta$  de modo que o item (a) seja satisfeito. Escolhendo  $\mathcal{F}_0$  dentre os valores regulares de  $-F$ , que também são valores regulares de  $-F$  restrito à Superfície de Impasse e à curva  $\Gamma_K$ , e usando o Teorema de Sard, segue o resultado.
- (c) Tome  $\theta$  e  $\mathcal{F}_0$  de modo que satisfaçam os itens (a) e (b). Temos que  $R_\omega$  rotaciona o campo de vetores  $F + \mathcal{F}_0$  por um ângulo  $\omega$ . Em um ponto de Impasse  $(x, y, \lambda) \notin \Gamma_E$ , o ângulo  $\eta(x, y, \lambda, \omega)$  entre o vetor  $R_\omega(F + \mathcal{F}_0)$  e a linha  $I_{AR_\theta}$  satisfaz o seguinte:  $\eta(x, y, \lambda, \omega) = \eta(x, y, \lambda, 0) + \omega$ . Para todo ângulo  $\omega$  que é um valor regular para as funções  $-\eta(x, y, \lambda, 0)$  e sua restrição à  $\Gamma_{K_{AR_\theta}}$ , a curva  $\Gamma_{I_{AR_\theta}}$ , definida pelos zeros de  $\eta + \omega$ , é regular e transversal à  $\Gamma_{K_{AR_\theta}}$ .
- (d) Agora, escolha  $\theta$ ,  $\mathcal{F}_0$  e  $\omega$  de maneira que estejam satisfeitos os itens (a), (b) e (c). Através de algumas contas, temos que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \neq 0,$$

em  $\Gamma_I^+$ . Isso implica que  $\sigma = 0$  é uma curva regular que pode ser vista como um gráfico no domínio  $\Gamma_I^+$ . Um valor regular da  $\theta$ -projeção dessa curva satisfaz a afirmação de (d) referente à  $\sigma$ . O mesmo argumento aplicado à função  $\sigma^2 - 4\Delta$  conclui a afirmação (d) referente à  $\sigma^2 - 4\Delta$ .

□

**Esboço da Prova do Teorema 1.2.2:** Tome  $\mathcal{A}_0$  de acordo com a Proposição 2.0.5 para ter uma Superfície de Impasse regular. Aplicamos o Teorema 2.0.14 ao sistema (1.7) fora dos pontos críticos da Superfície de Impasse para obtermos  $\theta$ ,  $\omega$  e  $\mathcal{F}_0$  que satisfazem as conclusões (a), (b), (c) e (d). Dentre os valores regulares da  $\lambda$ -projeção da Superfície de Impasse  $\mathcal{I}_{A+\mathcal{A}_0}$ , tome aqueles que são valores regulares das  $\lambda$ -projeções das curvas  $\Gamma_K$  e  $\Gamma_I$ . Assim, removemos os pontos imagem-singulares que são degenerados e também os pontos núcleo-singulares que não são do tipo dobra. Dentre os valores restantes, tome o complemento da  $\lambda$ -projeção dos seguintes conjuntos enumeráveis:  $P_{IE} = \Gamma_I \cap \Gamma_E$ ,  $P_{IK} = \Gamma_I \cap \Gamma_K$ ,  $P_H = \Gamma_I^+ \cap \{\sigma = 0\}$  e  $P_{FN} = \Gamma_I^+ \cap \{\sigma^2 - 4\Delta = 0\}$ . O conjunto considerado tem medida total e são os pontos que satisfazem a conclusão do Teorema (1.2.2).

□

# Capítulo 3

## Bifurcações Estáveis de Sistemas Forçados

Por simplicidade, neste capítulo vamos admitir que os Sistemas Forçados são de classe  $C^\infty$ .

### 3.1 Formas Normais de Pontos de Codimensão 2 em $\mathcal{I}_A$

O foco dessa seção é a apresentação das formas normais de alguns pontos da Superfície de Impasse que não foram vistos até aqui, mas que são estruturalmente estáveis dentro do conjunto de todos os Sistemas Forçados. Para ver os detalhes sobre a obtenção dessas formas normais, ver [4].

No espaço dos Sistemas Forçados, consideremos a topologia  $C^\infty$  de Whitney. O espaço dos Sistemas Forçados pode ser identificado com o produto cartesiano de seis cópias de  $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ , munido com a topologia  $C^\infty$  de Whitney.

**Definição 3.1.1.** Dizemos que uma família de Sistemas Forçados  $(A, F)$  é *estruturalmente estável* no ponto  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  se qualquer família  $(B, G)$ ,  $C^\infty$ -Whitney próxima de  $(A, F)$ , possui um ponto  $(\mathbf{x}_1, \lambda_1)$  tal que  $(B, G)$ , numa vizinhança de  $(\mathbf{x}_1, \lambda_1)$  é topologicamente equivalente a  $(A, F)$  numa vizinhança de  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ .

Vamos listar abaixo todos os tipos de pontos de bifurcação da Superfície de Impasse, que são estruturalmente estáveis. Denotamos esses pontos por  $P$  com um índice que identifique seu tipo.

**Definição 3.1.2.** (*Pontos Críticos de Morse*) Os pontos críticos de Morse são denotados por  $P_M$  e são pontos regulares da Superfície de Impasse, críticos do tipo Morse com respeito a  $\lambda$ -projeção, imagem-regulares e núcleo-singulares para os quais, no caso de serem do tipo sela, o campo  $K_A$  é transversal às direções nulas da aproximação quadrática da  $\lambda$ -projeção da Superfície de Impasse.

O fato de um ponto crítico de Morse ser um ponto regular de  $\mathcal{I}_A$  e crítico do tipo Morse significa o seguinte



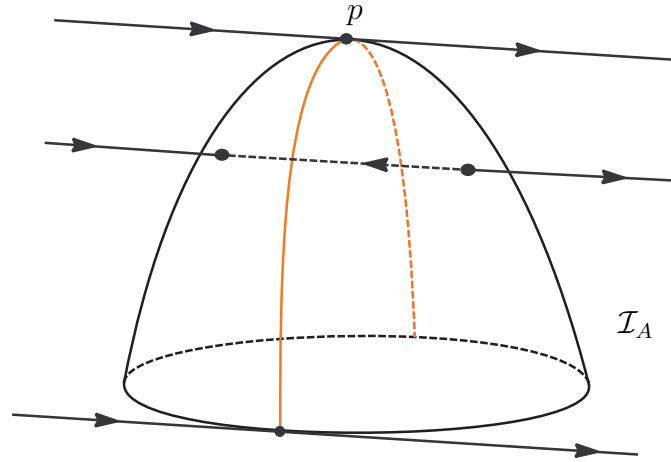


Figura 3.1: Ponto crítico de Morse do tipo máximo, denotado por  $p$  e situado entre duas linhas de dobras na Superfície de Impasse.

$$\left( \frac{\partial \delta_A}{\partial x}, \frac{\partial \delta_A}{\partial y} \right) = (0, 0), \quad \frac{\partial \delta_A}{\partial \lambda} \neq 0.$$

Para os pontos de  $P_M$  vale a conclusão (a) do Teorema (2.0.14).

**Proposição 3.1.3.** *Seja  $p$  um ponto crítico de Morse. Se  $p$  é um máximo ou mínimo local, então seu retrato de fase local é topologicamente equivalente ao retrato de fase de*

$$\begin{cases} x' = 0 \\ (\lambda \pm (x^2 + y^2))y' = 1 \end{cases},$$

*respectivamente, veja figura 3.1. Se  $p$  é uma sela, então seu retrato de fase local é topologicamente equivalente ao retrato de fase de*

$$\begin{cases} x' = 0 \\ (\lambda \pm (x^2 - y^2))y' = 1 \end{cases},$$

*veja figura 3.2.*

**Demonstração** Aplicando a forma quadrática canônica de Morse na função  $\lambda = z(x, y)$  do Corolário (2.0.11), teremos as expressões da conclusão da Proposição. □

**Definição 3.1.4.** (*Pontos de Cúspide*) Os pontos de cúspide são denotados por  $P_C$  e são os pontos da Superfície de Impasse tais que  $A^*F(\delta_A) = 0$  (ou seja, são núcleo-singulares),  $(A^*F)^2(\delta_A) = 0$  (não são do tipo dobra) e

$$\det(\nabla \delta_A, \nabla A^*F(\delta_A), \nabla (A^*F)^2(\delta_A)) \neq 0,$$

onde  $\nabla$  é o gradiente de uma função em  $\mathbb{R}^3$ .

Em um ponto de cúspide,  $\Gamma_K$  é uma curva regular definida por  $\delta_A = 0$  e  $A^*F(\delta_A) = 0$ . Os pontos de cúspide separam essa curva em dois ramos de linhas de dobra que cor-

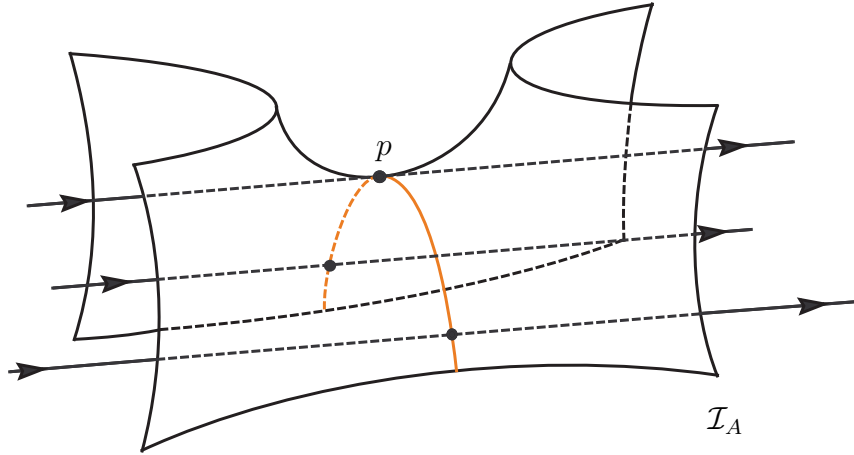


Figura 3.2: Ponto crítico de Morse do tipo sela, denotado por  $p$  e situado entre duas linhas de dobras.

respondem às tangências quadráticas das órbitas de  $A^*F$  nos lados opostos da Superfície de Impasse.

**Proposição 3.1.5.** *Se  $p$  é um ponto de cúspide, então seu retrato de fase local é topologicamente equivalente ao retrato de fase do sistema*

$$\begin{cases} x' = 0 \\ (x + \lambda y + y^3)y' = 1 \end{cases},$$

a menos de uma inversão do tempo. Veja a figura 3.3 ilustrando o caso atrator. Além disso, pontos de cúspide são estruturalmente estáveis, localmente.

**Demonstração:** Aplique o Teorema de Preparação de Weierstrass–Malgrange (para maiores detalhes, ver [1]) na função  $\delta$  composta com o fluxo de  $A^*F$  (com  $y$  sendo a coordenada do tempo) para obter um polinômio cúbico em função das variáveis  $x$  e  $\lambda$ . Depois de uma mudança de variáveis, o coeficiente do termo quadrático (i.e.  $y^2$ ) é eliminado. Os coeficientes de  $y^0$  e  $y^1$  serão as novas coordenadas  $x$  e  $\lambda$ , respectivamente.  $\square$

**Definição 3.1.6.** Dizemos que uma singularidade é núcleo-simples se o contato do campo  $K_A$  com a Superfície de Impasse, nesse ponto, é simples.

**Definição 3.1.7.** (*Pontos imagem-núcleo singulares*) Os pontos imagem-núcleo singulares são denotados por  $P_{IK}$  e são pontos núcleo-simples e imagem-singular hiperbólico, para os quais  $\Gamma_K$  é transversal à  $\Gamma_I$ .

Note que, a menos do ponto ser imagem-singular, a definição acima é equivalente à definição de dobra.

Em qualquer ponto imagem-núcleo singular, um auto-espaço do campo linearizado de  $A^*F$  é tangente à Curva de Impasse. Seja  $\mu_1$  o autovalor de  $A^*F$  correspondente a este auto-espaço e  $\mu_2$  o outro autovalor. O número  $\mu = \mu_1/\mu_2$  é um invariante da família de Sistemas Forçados com respeito a equivalência diferenciável. Assim temos o seguinte resultado:

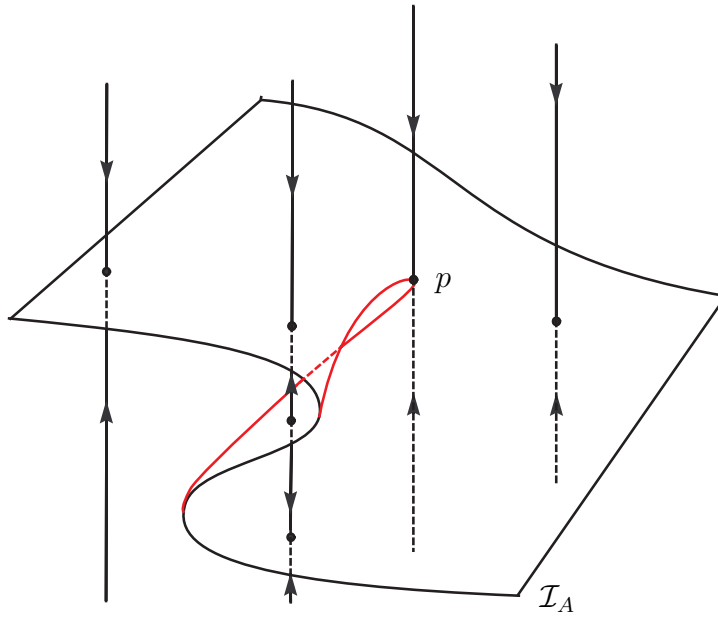


Figura 3.3: Ponto de cúspide, caso atrator, situado entre duas linhas de dobras.

**Proposição 3.1.8.** *Um ponto imagem-núcleo singular é estruturalmente estável (localmente) se, e somente se,  $\mu \notin \{1, 1/2\}$ . Nesse caso, seu retrato de fase local é topologicamente equivalente ao retrato de fase do sistema*

$$\begin{cases} x' = 1 \\ (x + \lambda y + y^2)y' = \mu y \end{cases},$$

a menos de uma inversão do tempo.

Veja figuras 3.4 e 3.5

Antes da demonstração, precisamos da seguinte definição:

**Definição 3.1.9.** (*nó fraco e nó forte*)

- (a) (*nó imagem-núcleo fraco*) Dizemos que um nó imagem-núcleo é fraco se  $0 < \mu < 1$ , ou seja, quando o auto-espaço correspondente ao autovalor de  $A^*F$  de menor módulo for tangente à Superfície de Impasse.
- (b) (*nó imagem-núcleo forte*) Dizemos que um nó imagem-núcleo é forte se  $\mu > 1$ , ou seja, quando a direção do auto-espaço correspondente ao autovalor de  $A^*F$  de maior módulo for tangente à Superfície de Impasse.

**Demonstração da Proposição 3.1.8:** Se  $\mu < 0$  então o retrato de fase de  $A^*F$  é uma sela, as singularidades dessa família são chamadas *sela imagem-núcleo* e denotada por  $P_{IKS}$ . Topologicamente, todas as selas são equivalentes, veja figura 3.4.

Se  $\mu > 0$  então o retrato de fase de  $A^*F$  é um nó e suas singularidades são chamadas *nó imagem-núcleo* e denotadas por  $P_{IKN}$ . Dentro do conjunto  $P_{IKN}$ , vamos diferenciar os nós fracos dos nós fortes.

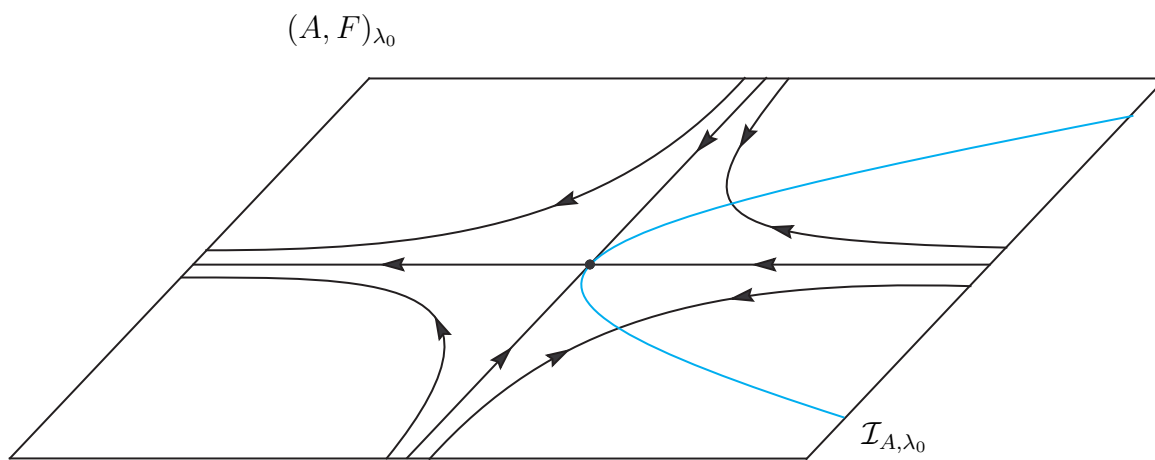


Figura 3.4: Retrato de fase da fatia  $\lambda = \lambda_0$  onde se encontra um  $P_{IK}$  do tipo sela.

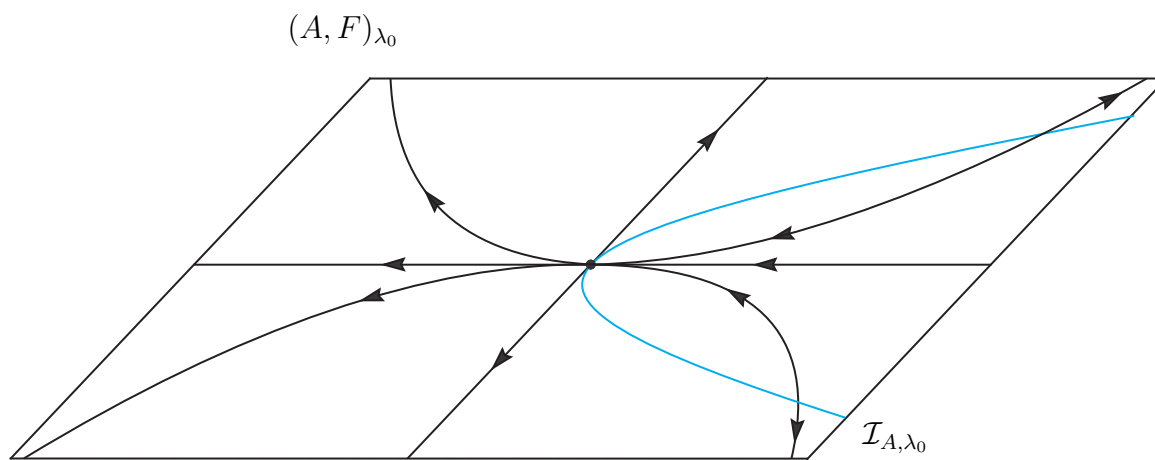


Figura 3.5: Retrato de fase da fatia  $\lambda = \lambda_0$  onde se encontra um  $P_{IK}$  do tipo nó.

Os nós fortes são topologicamente equivalentes, a menos de uma inversão da orientação. Na figura 3.5 está ilustrado o caso repulsor. A bifurcação acontece da seguinte maneira: quando  $\lambda = 0$ , todos os pontos da Curva de Impasse  $\mathcal{I}_{A,0}$  são não-singulares e repulsores e para  $\lambda \neq 0$  bifurca-se em um arco de pontos da Curva de Impasse  $\mathcal{I}_{A,\lambda}$  que são não-singulares e atratores. Esse arco é limitado por um nó transversal e uma dobra. Os outros pontos de Impasse são não-singulares e repulsores. Uma inversão do tempo nos faz mudar os atratores por repulsores, e vice-versa, na descrição acima.

Pode-se mostrar que, a menos de uma inversão do tempo, um nó fraco é topologicamente equivalente a um nó forte ou do tipo repulsor ou do tipo atrator. Porém, se levarmos a orientação em conta, existirão nós fracos arbitrariamente próximos que não são topologicamente equivalentes. Esse é o caso de duas singularidades próximas, com  $\mu$  invariante em lados opostos com respeito ao valor crítico  $\mu = 1/2$ . Note que se  $\mu = 1/2$ , então pelo menos uma órbita do campo regularizado tem contato de segunda ordem com a Curva de Impasse. Essa situação não é genérica para uma família de Sistemas Forçados de um parâmetro e indica uma bifurcação que não é estruturalmente estável.  $\square$

**Definição 3.1.10.** (*Sela-nó tangente*) Denotados por  $P_{ISN}$ , os pontos sela-nó tangentes são pontos da Superfície de Impasse para os quais  $\delta_A = 0$ ,  $F \neq 0$ ,  $F \wedge Im_A = 0$ , onde  $Im_A$  é um campo vetorial não-nulo dentre  $\{(a, c), (b, d)\}$  que gera  $I_A$ , e satisfaz a seguinte condição genérica: o Jacobiano das três funções  $\delta_A$ ,  $F \wedge Im_A$  e

$$\left( -(\delta_A)_y \frac{\partial}{\partial x} + (\delta_A)_x \frac{\partial}{\partial y} \right) (F \wedge Im_A)$$

é não-nulo.

Ou seja, esse tipo de ponto definido anteriormente é uma sela-nó para o campo de vetores  $A^*F$  com direção central tangente à Superfície de Impasse.

**Proposição 3.1.11.** *Seja  $p$  um ponto sela-nó tangente, então seu retrato de fase local é topologicamente equivalente ao retrato de fase do sistema*

$$\begin{cases} x' = 1 \\ xy' = \lambda + y^2 \end{cases} .$$

Veja figura (3.6).

**Demonstração:** Similar à bifurcação de sela-nó de campos de vetores, ver [10].  $\square$

**Definição 3.1.12.** (*Foco-nó*) Os pontos de Impasse do tipo foco-nó são denotados por  $P_{FN}$  e são pontos da Superfície de Impasse, núcleo-regulares, nós para o campo de vetores  $A^*F$  tendo autovalores repetidos, mas sua parte linear não é diagonalizável. Além disso, seu auto-espaco é transversal à Superfície de Impasse e a função  $\sigma^2 - 4\Delta$  é zero com derivada não-nula ao longo da curva de singularidades (como no Teorema 2.0.14(d)).

**Proposição 3.1.13.** *Seja  $p$  um ponto de Impasse foco-nó. Então seu retrato de fase local é topologicamente equivalente ao retrato de fase do sistema*

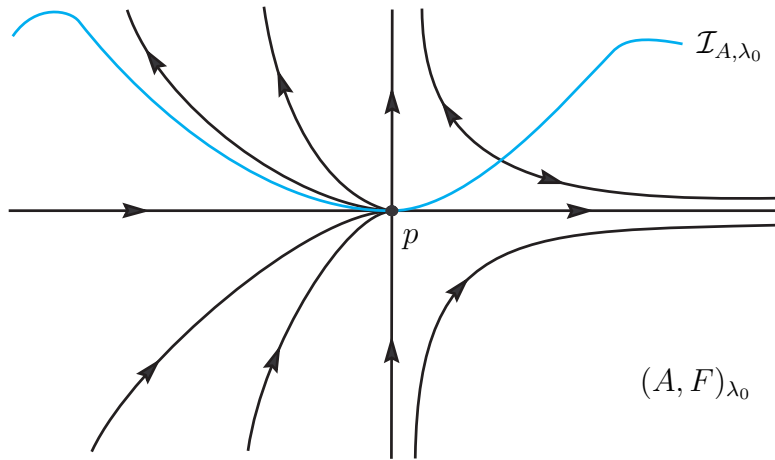


Figura 3.6: Retrato de fase da fatia  $\lambda = \lambda_0$ , onde se encontra um  $P_{ISN}$ . A curva  $\mathcal{I}_{A, \lambda_0}$  foi exagerada para ficar bem visível, mas ela tem uma forma parabólica.

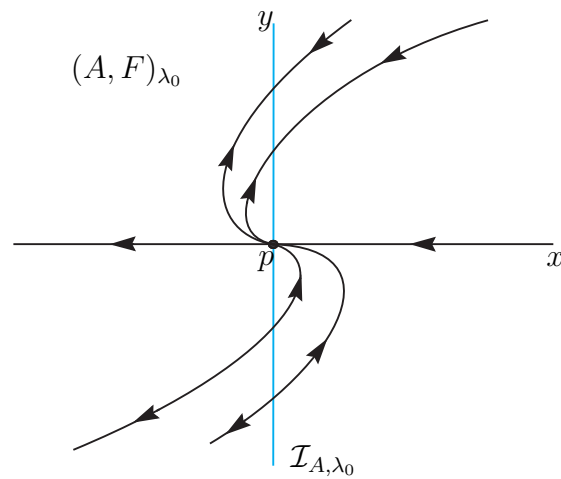


Figura 3.7: Retrato de fase da fatia  $\lambda = \lambda_0$  onde se encontra um  $P_{FN}$ . Note que a Curva de Impasse  $\mathcal{I}_{A, \lambda_0}$  é a reta  $x = 0$

$$\begin{cases} x' = 1 \\ (x+y)y' = y + \lambda x \end{cases}$$

Além disso, pontos de impasse do tipo foco-nó são estruturalmente estáveis.

**Demonstração.** Nos limitaremos a análise do retrato de fase da forma normal e indicamos [4] para a demonstração. □

Veja as figuras 3.7 e 3.8 para ter uma compreensão geométrica de um ponto foco-nó.

**Definição 3.1.14.** (*Pontos Andronov-Hopf*) Os pontos *Andronov-Hopf* são denotados por  $P_{AH}$  e são pontos da Superfície de Impasse, núcleo-regulares e são centros ou focos para a família de campo de vetores  $A^*F$  tendo autovalores imaginários não-nulos. Além disso, essa família é um desdobramento genérico do tipo Andronov-Hopf, ou seja, a derivada da aplicação de primeiro retorno de Poincaré, quando escrita em coordenadas

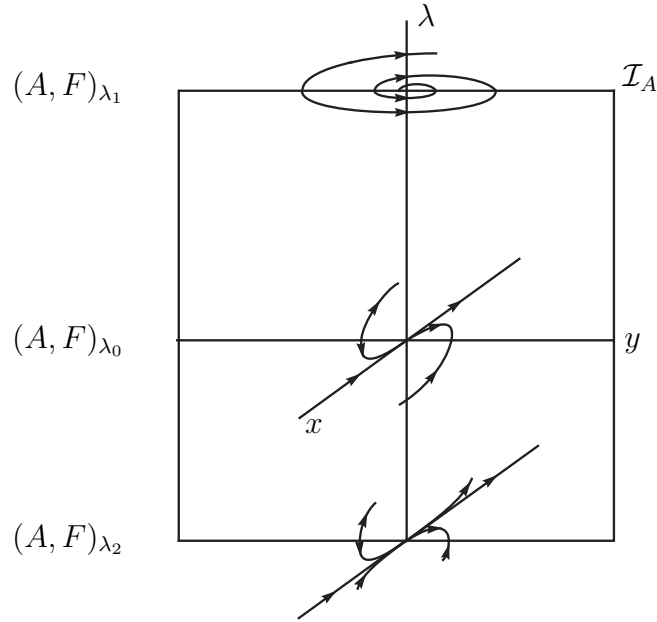


Figura 3.8:  $(A, F)_{\lambda_1}$  indica um foco,  $(A, F)_{\lambda_2}$  um nó e  $(A, F)_{\lambda_0}$  é onde ocorre a bifurcação foco-nó.

polares, começa com termos não-nulos de ordem 3 em  $r$  ( $V_3 \neq 0$ , ver o capítulo 5), onde  $r$  é o raio das coordenadas polares.

**Proposição 3.1.15.** *Seja  $p$  um ponto Andronov-Hopf. Então seu retrato de fase local é topologicamente equivalente ao retrato de fase do sistema*

$$\begin{cases} x' = 1 \\ yy' = -x + \lambda y \pm x^3 \end{cases}$$

*Além disso, pontos Andronov-Hopf são estruturalmente estáveis, localmente.*

Temos em 3.9 um esboço de como é o comportamento desse tipo de ponto.

**Demonstração:** Esse ponto é a transição genérica entre um foco atrator e um foco repulsor. A prova é similar a de bifurcações Andronov-Hopf para campos de vetores, ver [10].

□

**Definição 3.1.16.** (Sela-nó transversal) Um ponto *sela-nó transversal* é denotado por  $P_{ESN}$  e é um ponto núcleo-regular no qual  $F$  tem um ponto hiperbólico e  $\mathcal{I}_A$  encontra  $\Gamma_E$  transversalmente. Além disso, é necessário que esse ponto seja uma sela-nó para o campo de vetores  $A^*F$ . O auto-espaço central dessa sela-nó é transversal à Superfície de Impasse.

**Proposição 3.1.17.** *Seja  $p$  um ponto sela-nó transversal. Então seu retrato de fase local é topologicamente equivalente ao retrato de fase do sistema*

$$\begin{cases} x' = x \\ (x + y - \lambda)y' = \pm y \end{cases}$$

*Além disso, um ponto sela-nó transversal é estruturalmente estável, localmente.*

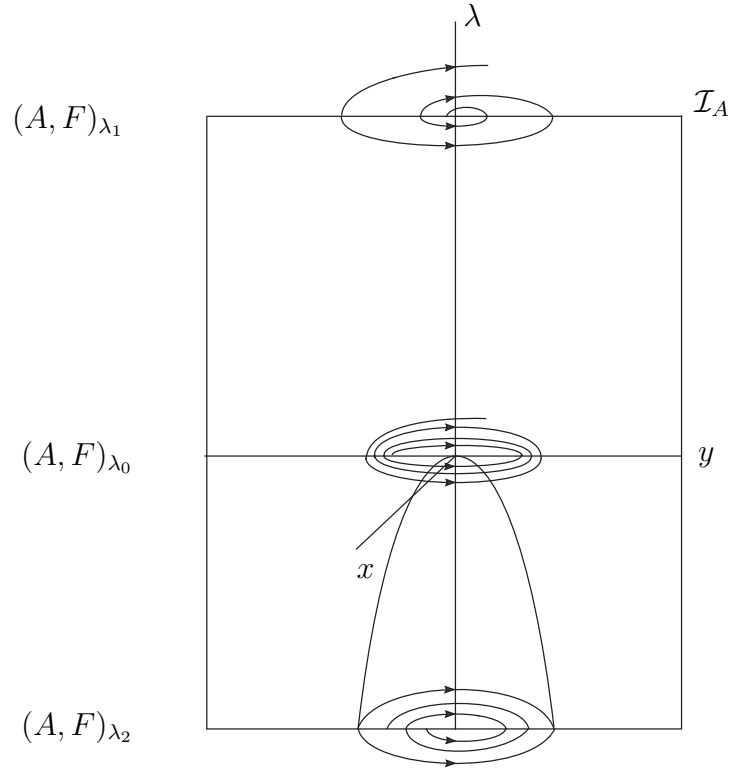


Figura 3.9:  $(A, F)_{\lambda_1}$  indica um foco,  $(A, F)_{\lambda_2}$  um ciclo limite e  $(A, F)_{\lambda_0}$  é onde ocorre a bifurcação Andronov–Hopf.

Veja, na figura 3.10, um esboço da fatia dessa família onde se encontra o ponto sela–nó transversal.

**Demonstração:** Esse ponto é a transição genérica entre uma sela transversal e um nó transversal. Essa situação é possível pois, nesse ponto, ocorre uma transição de um nó hiperbólico para uma sela (fora da Superfície de Impasse) ao longo da curva  $\Gamma_E$ . A análise é similar à bifurcação sela–nó de campo de vetores. Ver [10]. □

## 3.2 Estratificação da Superfície de Impasse

Agora, vamos dividir a Superfície de Impasse  $\mathcal{I}$  na união disjunta de estratos,  $\mathcal{I}_i$ , onde o sub–índice  $i$  indica a codimensão de  $\mathcal{I}_i$  em  $\mathcal{I}$ .

- (a)  $\mathcal{I}_0$ : o conjunto aberto dos pontos não-singulares;
- (b)  $\mathcal{I}_1$ : a coleção dos arcos suaves tais como, a linha de dobras  $\Gamma_{KF}$ , linha de nós transversais  $\Gamma_{IN}$ , a linha de selas transversais  $\Gamma_{IS}$  e a linha de focos  $\Gamma_{IF}$ ;
- (c)  $\mathcal{I}_2$ : a coleção dos pontos que estão nos extremos das linhas de  $\mathcal{I}_1$ , chamados de pontos críticos de Morse  $P_M$ , pontos de cúspide  $P_C$ , selas imagem-núcleos  $P_{IKS}$ , nós imagem-núcleos fracos e fortes  $P_{IKN}$ , selas-nós tangentes  $P_{ISN}$ , foco-nós  $P_{FN}$ ,



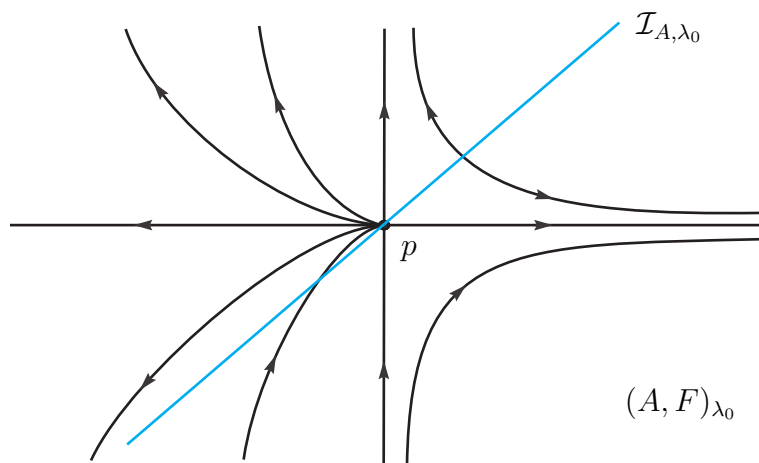


Figura 3.10: O ponto  $p$  representa um ponto de Impasse sela-nó transversal.

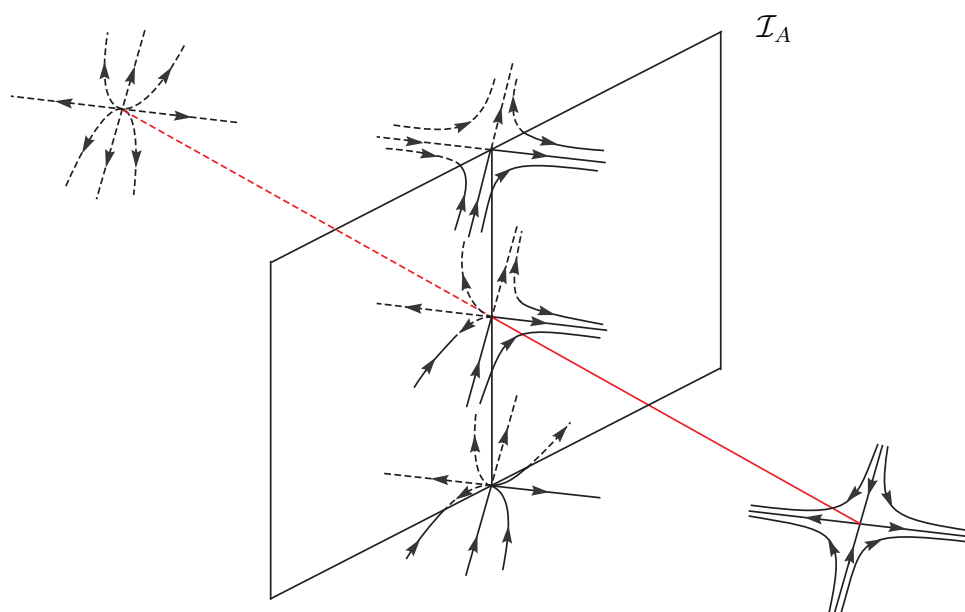


Figura 3.11: A bifurcação de Sela-nó tem uma particularidade: está sobre uma linha de equilíbrios do campo  $F$  (linha em vermelho).

pontos Andronov-Hopf  $P_{AH}$  e selas-nós transversais  $P_{ESN}$  (ou seja, é o conjunto dos sete tipos de pontos vistos anteriormente).

O resultado a seguir é uma síntese do que foi visto até aqui.

**Teorema 3.2.1.** *O conjunto  $\Sigma$  das famílias de Sistemas Forçados (1.1) tais que  $\mathcal{I} = \bigcup_{i=0}^2 \mathcal{I}_i$ , é um conjunto aberto e denso dentro do conjunto das famílias de Sistemas Forçados com a topologia  $C^\infty$  de Whitney.*

**Idéia da Demonstração:** Usa-se o Teorema 1.2.2 com os extremos das linhas de foco, nó transversal, sela transversal e dobra, que são os sete pontos de bifurcações estáveis, apresentados nesse capítulo. □

O Teorema acima nos diz que o conjunto de Sistemas Forçados, cuja Superfície de Impasse é  $\Sigma$ , é aberto e denso dentro do conjunto de todos os Sistemas Forçados. Isso vale para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , mas o teorema vale para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  com uma adaptação: substituindo o “aberto e denso” por “conjunto de Baire”.

# Capítulo 4

## Estabilidade Estrutural de Sistemas Forçados

### 4.1 O Teorema de Peixoto

Seja  $M$  uma região compacta e conexa de  $\mathbb{R}^2$  com fronteira  $\partial M$  suave. Em outras palavras, suponhamos que existe uma função real  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ , tal que

$$\begin{aligned} M &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) \geq 0\} \\ \nabla F(p) &= \left( \frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p) \right) \neq (0, 0), \forall p \text{ tal que } F(p) \neq 0. \end{aligned}$$

As condições acima nos garantem que

$$\begin{aligned} \partial M &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\} \\ \text{Int}(M) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) > 0\}. \end{aligned}$$

Denotamos  $\mathcal{X}^r = \mathcal{X}^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , o conjunto dos campos vetoriais  $X = (f, g)$  de classe  $C^r$  em  $M$ . Consideraremos  $\mathcal{X}^r$  munido da norma

$$\|X\|_r = \sup_{p \in M} \{|X(p)| + |DX(p)| + \dots + |D^r X(p)|\}.$$

**Definição 4.1.1.** O campo vetorial  $X = (f, g) \in \mathcal{X}^r$  é  $C^r$ -*estruturalmente estável* em  $M$  se existe  $\delta > 0$  tal que para qualquer  $Y \in \mathcal{X}^r$ , com  $\|Y - X\|_r < \delta$  existe um homeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  tal que  $h$  transforma cada arco de trajetória de  $Y$  contido em  $M$ , em um arco de trajetória de  $X$ , preservando o sentido dos mesmos.

**Definição 4.1.2.** Seja  $X \in \mathcal{X}^r$ .

- (a) Dizemos que  $X \in \sum(1)$  se todos os pontos singulares de  $X$  são hiperbólicos e estão contidos em  $\text{Int}(M)$ ;

- (b) Dizemos que  $X \in \Sigma(2)$  se todas as órbitas periódicas são hiperbólicas e estão contidas em  $\text{Int}(M)$ ;
- (c) Dizemos que  $X \in \Sigma(3)$  se em todo ponto  $p \in \partial M$ , a órbita de  $X$  por  $p$  é transversal a  $\partial M$  ou tem contato parabólico;
- (d) Dizemos que  $X \in \Sigma(4)$  se não existem ligações de selas, não existem trajetórias tangenciando  $\partial M$  e tendo como  $\alpha$  ou  $\omega$  limites um ponto de sela e não existe trajetória de  $X$  que tangencie  $\partial M$  em dois pontos distintos.

**Teorema 4.1.3.** (de Peixoto)

- (a) O conjunto  $\Sigma^r = \Sigma^r(M)$  definido por

$$\Sigma^r(M) = \bigcap_{i=1}^{i=r} \Sigma(i)$$

é aberto e denso em  $\mathcal{X}^r(M)$ , para  $r \geq 1$ .

- (b)  $X \in \mathcal{X}^r(M)$  é  $C^r$ -estruturalmente estável  $\Leftrightarrow X \in \Sigma^r(M)$ .

A partir de Poincaré, Liapunov e Birkhoff, a Teoria Qualitativa dos Sistemas Dinâmicos tem ocupado a atenção de inúmeros matemáticos. Em anos recentes que ela teve suas metas gerais estabelecidas, tomou forma e experimentou um desenvolvimento marcante. Mais de duas décadas se passaram entre dois pólos importantes: o trabalho de Andronov e Pontrjagin (1937), introduzindo o conceito básico de estabilidade estrutural, e os trabalhos de Peixoto (1958-1962), provando a densidade de campos de vetores estáveis em superfícies. Foi então que Smale enriqueceu substancialmente a teoria, definindo, como objetivo central, a busca de propriedades genéricas e estáveis, obtendo resultados e propondo problemas da maior relevância. Nesta mesma época, Hartman e Grobman mostraram que a estabilidade local é uma propriedade genérica. Logo a seguir, Kupka e Smale atacaram, com sucesso, o problema para órbitas periódicas.

Geometricamente não é difícil aceitarmos que  $\Sigma^r(M)$  é um conjunto aberto. De fato, as condições de hiperbolicidade e de contato com a fronteira garantem isso.

A densidade de  $\Sigma^r(M)$  decorre do fato que, dado um campo vetorial  $X$  de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , a medida do conjunto formado por vetores  $v \in \mathbb{R}^2$  e direções  $\theta \in \mathbb{R}$  tais que  $R_\theta(X + v) \notin \Sigma^1(M)$  é nula.

Aqui  $R_\theta(X + v)$  indica uma translação de  $X$  seguida de uma rotação.

Em outras palavras, Peixoto provou que podemos perturbar um campo  $C^1$  com uma translação seguida de uma rotação, para obtermos um elemento de  $\Sigma^1(M)$ .

Vamos agora apresentar uma versão do Teorema de Peixoto para variedades bidimensionais compactas e sem bordo. A grosso modo podemos pensar que uma variedade compacta de dimensão 2 é uma superfície regular compacta imersa no  $\mathbb{R}^3$ , por exemplo uma esfera, um elipsóide ou um toro.

Assim como nos espaços euclidianos, podemos definir um campo de vetores em uma variedade  $M$  da seguinte maneira  $X : M \rightarrow TM$  onde o vetor  $X(p)$  pertence ao espaço tangente à variedade  $M$  no ponto  $p$  ( $T_pM$ ).

Tudo que sabemos a respeito de campos de vetores em abertos de  $\mathbb{R}^n$  estende-se naturalmente para campos de vetores em variedades.

Nosso objetivo é dar um enunciado um pouco mais simples do famoso Teorema de Peixoto. Veremos que se considerarmos  $M$  uma variedade compacta de dimensão 2 no lugar de uma região compacta com fronteira, como fizemos no início desta seção, reduziremos significativamente as hipóteses. De fato, não precisaremos nos preocupar com a fronteira. Para ficar mais claro, pensemos em um campo de vetores em uma esfera.

**Definição 4.1.4.** Seja  $M$  uma variedade compacta de dimensão 2 e  $X \in \mathcal{X}^r(M)$ . Dizemos que  $X$  é um campo de Morse–Smale se:

- (a)  $X$  tem um número finito de elementos críticos (singularidades ou órbitas periódicas), todos hiperbólicos;
- (b) Não há ligações de selas;
- (c) Qualquer órbita tem como  $\alpha$ -limite um único elemento crítico e como  $\omega$ -limite um único elemento crítico.

**Teorema 4.1.5.** (*de Peixoto*)

*Os campos de vetores estruturalmente estáveis em uma variedade compacta de dimensão 2 são precisamente os campos de Morse–Smale. Além disso, se  $M$  for orientável então estes campos formam um subconjunto aberto e denso de  $\mathcal{X}^r(M)$ .*

A demonstração deste importante Teorema encontra-se em [6]

## 4.2 Teorema de Peixoto para Sistemas Forçados

Nesta seção veremos alguns resultados de estabilidade estrutural de Sistemas Forçados em regiões compactas do plano.

Considere o Sistema Forçado

$$A(\mathbf{x})\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

onde  $A$  (respectivamente,  $F$ ) é uma matriz  $2 \times 2$  (respectivamente,  $2 \times 1$ ) de funções reais de classe  $C^r$  em uma região do plano  $M$  com fronteira  $C^r$ -diferenciável  $\partial M$ , note que agora estamos tratando (4.1) sem o parâmetro  $\lambda$ , ou seja, nesta seção, vamos considerar (4.1) (ou  $(A, F)$ ) como um sistema e não como uma família.

Sem perda de generalidade, consideremos a região  $M$  do plano determinada por uma função real  $\beta$  de classe  $C^r$ , tal que

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \beta(x, y) \geq 0\}, \quad \partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \beta(x, y) = 0\}$$

com  $\nabla\beta \neq 0$  em  $\partial M$ .

Vamos considerar que as entradas de  $A$  e  $F$  são restrições de funções reais de classe  $C^r$  definidas no plano. O conjunto de sistemas do tipo (4.1) com a topologia  $C^r$ -Whitney em  $M$  é um espaço de Banach, denotado por  $\mathcal{Z}^r = \mathcal{Z}^r(M)$ , o qual é isomorfo ao produto

cartesiano de seis cópias do espaço  $C^r(M, \mathbb{R})$  das funções de classe  $C^r$  de  $M$  em  $\mathbb{R}$ , com a norma

$$\|f\|_r = \sup_{p \in M} \{|f(p)| + |Df(p)| + \dots + |D^r f(p)|\}.$$

**Definição 4.2.1.** Um sistema  $(A, F)$  é  $C^r$ -*estruturalmente estável* em  $M$  se existe uma vizinhança  $(A, F) \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{Z}^r$  tal que se  $(B, G) \in \mathcal{V}$ , então  $(B, G)$  e  $(A, F)$  são topologicamente equivalentes.

Vamos denotar a classe dos sistemas  $C^r$ -estruturalmente estáveis por  $\Phi^r = \Phi^r(M)$ . O conjunto  $\Phi^r$  é aberto em  $\mathcal{Z}^r$ .

Neste capítulo, vamos estender alguns resultados de estabilidade estrutural para os sistemas do tipo (4.1).

Antes de enunciar os teoremas dessa seção, vamos definir o conjunto  $\Sigma^r = \Sigma^r(M)$ , que é o análogo para os sistemas do tipo (4.1) do  $\Sigma^r$  considerado por Andronov, Pontrjagin e Peixoto.

O conjunto  $\Sigma^r$  é a intersecção

$$\Sigma^r(1) \cap \Sigma^r(2) \cap \Sigma^r(3),$$

onde os conjuntos  $\Sigma^r(i)$ 's são definidos a seguir:

**Definição 4.2.2.**  $\Sigma^r(1)$  é o conjunto de sistemas  $(A, F)$  tais que  $A^*F$  satisfaz o seguinte:

(1.1) A curva  $\mathcal{I}_A$  é regular e transversal à  $\partial M$ . A transversalidade significa que

$$\nabla \delta_A \wedge \nabla \beta \neq 0$$

nos pontos de  $\mathcal{I}_A \cap \partial M$ .

Ver figura 4.1

(1.2) O campo de direções do núcleo de  $A$ ,  $K_A$ , é transversal à  $\mathcal{I}_A$  exceto em um conjunto finito  $\mathcal{I}_A^1$  de pontos tais que

- (a) o contato é quadrático;
- (b) estão em  $Int(M)$ ;
- (c) não são pontos de equilíbrio de  $A^*F$ .

Ver figura 4.2.

(1.3) Seus pontos de equilíbrios:

- (a) são hiperbólicos e, se estes estiverem sobre  $\mathcal{I}_A$ , então seus autovalores são distintos;
- (b) estão em  $Int(M)$ .

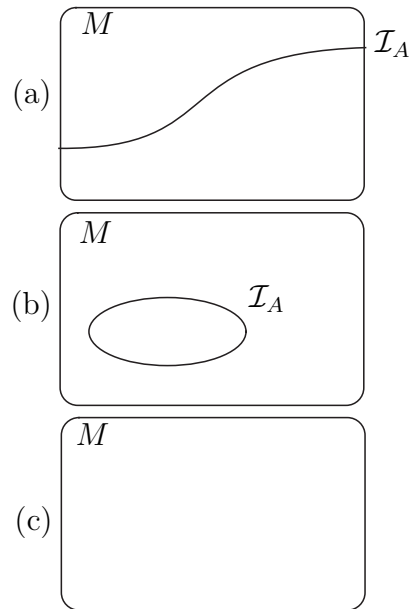


Figura 4.1: Esses são os possíveis casos para o contato de  $\mathcal{I}_A$  com  $\partial M$ , segundo a definição (1.1) de  $\Sigma^r(1)$ : (a) Transversal; (b) Vazio, mas com  $\mathcal{I}_A$  sendo uma curva fechada em  $Int(M)$ ; (c)  $\mathcal{I}_A = \emptyset$ .

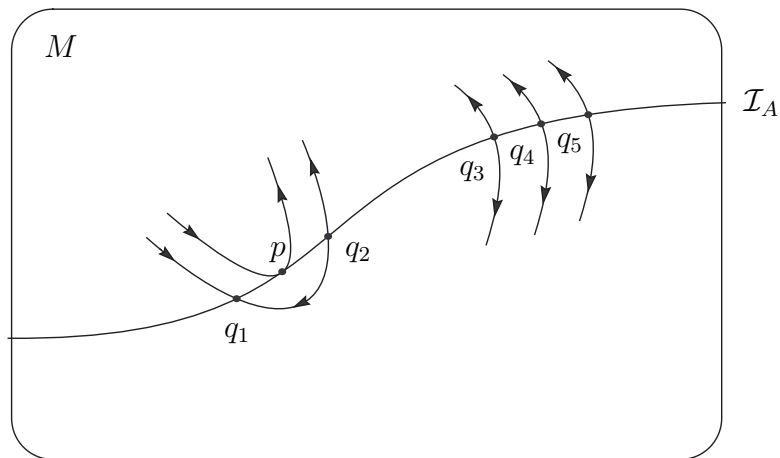


Figura 4.2: Os pontos  $q_i$ 's ilustram  $K_A$  transversal a  $\mathcal{I}_A$  e o ponto  $p$  ilustra um contato quadrático entre  $K_A$  e  $\mathcal{I}_A$ .

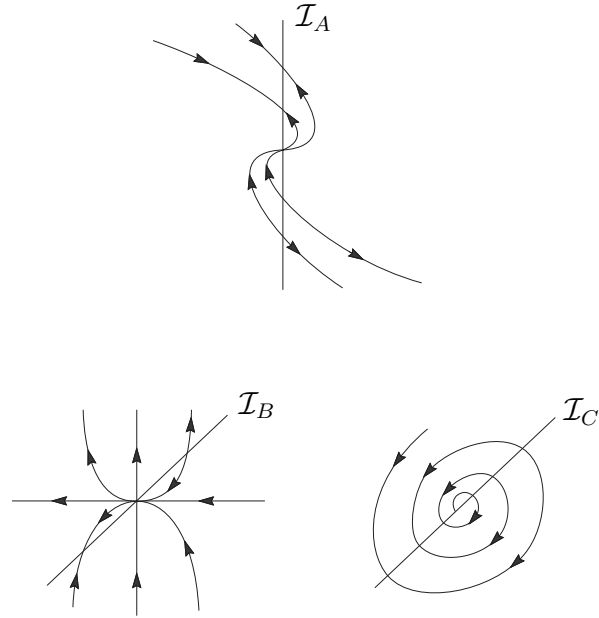


Figura 4.3: Perturbando um nó impróprio (sobre  $\mathcal{I}_A$ ), teremos (genericamente) um nó transversal ou um foco, porém, todas as trajetórias do nó impróprio cruzam  $\mathcal{I}_A$  uma única vez, o que não acontece com o nó transversal nem com o foco.

Ver figura 4.3

- (1.4) O campo  $A^*F$  e  $\partial M$  são transversais, exceto em um conjunto de pontos que não estão em  $\mathcal{I}_A$  e, para os quais, o contato de  $A^*F$  e  $\partial M$  é quadrático.

Ver figura 4.4

**Definição 4.2.3.**  $\Sigma^r(2)$  é o conjunto de Sistemas Forçados  $(A, F)$  tais que, para seu campo regularizado  $A^*F$ , todas as órbitas periódicas em  $M$ :

- (2.1) são hiperbólicas;  
 (2.2) estão contidas em  $\text{Int}(M)$ ;  
 (2.3) são transversais à  $\mathcal{I}_A$ .

Ver figura 4.5

**Definição 4.2.4.**  $\Sigma^r(3)$  é o conjunto dos Sistemas Forçados  $(A, F)$  tais que seu regularizado  $A^*F$  satisfaz o seguinte:

- (3.1) Sua restrição à  $(M - \mathcal{I}_A) \cup \partial M$  não possui conexões nem auto-conexões entre separatrizes.

**Observação:** No estudo de Sistemas Forçados, as separatrizes são consideradas em um sentido mais amplo. São consideradas separatrizes os seguintes casos:

- (a) separatrizes de sela;



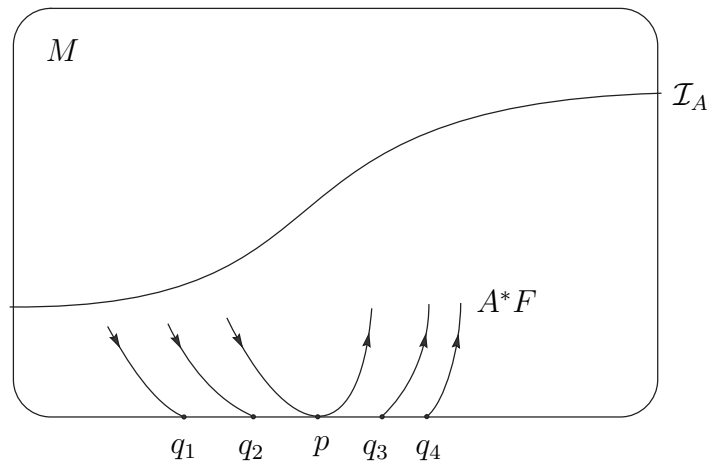


Figura 4.4: Os pontos  $q_i$ 's ilustram  $A^*F$  transversal a  $\partial M$  e o ponto  $p$  ilustra um contato quadrático entre eles.

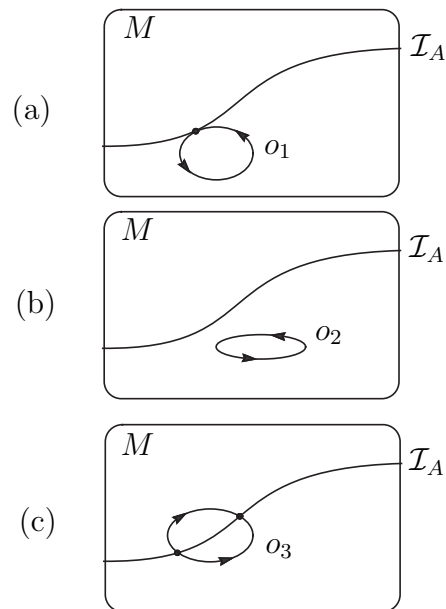


Figura 4.5: Em (a) temos uma trajetória fechada tangenciando  $\mathcal{I}_A$ , que é proibido na definição, pois se perturbarmos esse sistema, cairemos em um dos casos (b) ou (c) e ambos não são topologicamente equivalentes ao caso (a).

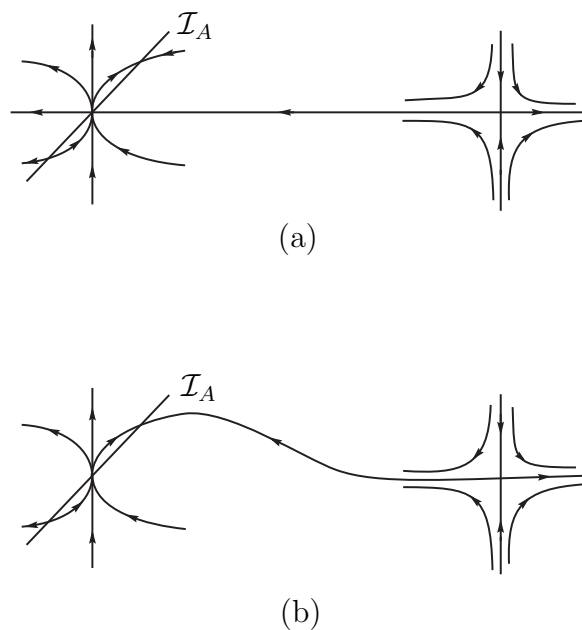


Figura 4.6: Auto-espaco forte de um nó é uma separatriz, pois pequenas perturbações em (a) pode, facilmente, mudar o sentido da trajetória (e, portanto, seu tipo topológico) que liga os dois pontos de equilíbrio, como mostrado na figura.

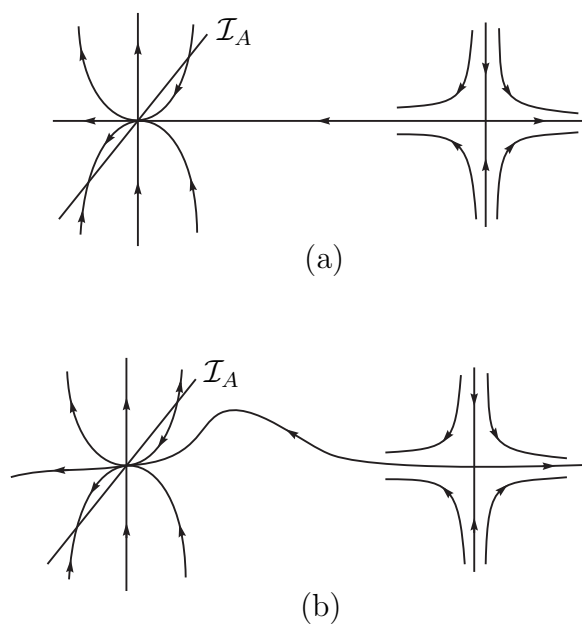


Figura 4.7: Auto-espaco fraco de um nó não é uma separatriz, pois pequenas perturbações em (a) não muda o sentido da trajetória que une os dois pontos de equilíbrio (mantendo seu tipo topológico), como é mostrado em (b).

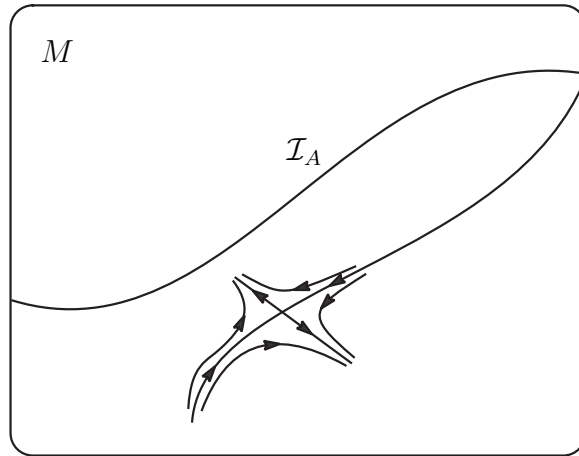


Figura 4.8: Perturbando esse sistema, essa ligação entre a separatriz de sela e a de canto se romperá facilmente.

- (b) separatrizes de nó associadas ao auto-espaço cujo autovalor é o de maior módulo (auto-espaço forte), ver figuras 4.6 e 4.7;
- (c) separatrizes de canto (que são as órbitas que passam por pontos de  $\mathcal{I}_A \cap \partial M$ ).

**Teorema 4.2.5.** *Para  $r \geq 2$ , o conjunto  $\Sigma^r$  é aberto em  $\mathcal{Z}^r$  e está contido em  $\Phi^r$ .*

**Idéia da Demonstração.** O fato de  $\Sigma^r$  ser aberto sai da definição analítica em termos das condições de transversalidade. De fato,  $\Sigma^r$  é um subconjunto aberto da imagem inversa, pela aplicação  $\mathcal{R}$ , do conjunto aberto  $\mathcal{P}^r(M)$  dos campos de vetores estruturalmente estáveis, onde  $\mathcal{R}(A, F)$  determina a regularização do campo  $(A, F)$  (ou seja,  $\mathcal{R}(A, F) = A^*F$ ). Para isso, considere as condições envolvendo  $\mathcal{I}_A$  (as condições de separatrizes).

A construção do homeomorfismo para provar a estabilidade estrutural de um sistema em  $\Sigma^r$  é a mesma desenvolvida em [7], mas, aplicado a uma classe mais específica de sistemas.

Vale notar a seguinte modificação nas órbitas de  $\mathcal{R}(A, F)$  que cruzam a Curva de Impasse; os pontos onde acontece esse cruzamento têm que ser preservados na construção da equivalência, assim como a orientação sobre a órbita em questão (orientação forçada).  $\square$

**Teorema 4.2.6.** *Seja  $(A, F)$  um Sistema Forçado de classe  $C^r$ ,  $r \geq 2$ . Assim o conjunto  $\Phi(A, F)$  de quadras  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tal que*

$$((A + \mathcal{A})R_\alpha, R_\beta(F + \mathcal{F})) \in \Sigma^r(M)$$

*tem medida total em  $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .*

**Idéia da Demonstração.** Considere os parâmetros  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ .

- (a) O conjunto  $\Phi(A, 1.1)$ , das matrizes  $\mathcal{A}$  tal que  $A + \mathcal{A}$  satisfaz a condição (1) de  $\Sigma^r$ , é aberto e tem medida total em  $\mathbb{R}^4$ . Isso é devido ao Teorema de Sard aplicado à

aplicação  $A + \mathcal{A}$ , a qual é exigida como sendo transversal à estratificação, pelo posto no espaço das matrizes  $2 \times 2$ .

- (b) O parâmetro  $\mathcal{F}$ . Fixe  $\mathcal{A}$  em  $\Phi(A, 1.1)$  e considere o conjunto  $\Phi(A, \mathcal{A}, 1.1, 1.4)$ , para o qual  $F + \mathcal{F}$  é não-singular em  $\partial M \cup \mathcal{I}_{A+\mathcal{A}}$  e tem pontos de equilíbrio simples (i.e. com Jacobiana não-nula) em  $M$ . Pelo Teorema de Sard, esse conjunto tem medida total.
- (c) Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Temos que, para quase todo  $\beta$ , a imagem de  $A + \mathcal{A}$  é transversal à  $F + \mathcal{F}$  em  $\mathcal{I}$ , exceto em um número finito de pontos de  $\mathcal{I}$ , para os quais  $A + \mathcal{A}$  é tangente à  $F + \mathcal{F}$ , mas de uma forma regular em  $\mathcal{I}$ : o ângulo entre essas linhas se anula somente no interior de  $M$  e com derivada não-nula ao longo de  $\mathcal{I}$ . É nesses pontos onde as singularidades do campo regularizado ocorre.

Uma vez fixado os parâmetros  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}$  e  $\beta$ , temos que, para quase todo  $\alpha$ , singularidades simples tornam-se hiperbólicas. Também temos que o contato do núcleo de  $(A + \mathcal{A})R_\alpha$  com  $\mathcal{I}$  torna-se quadrático e disjunto das singularidades de

$$\mathcal{R}((A + \mathcal{A})R_\alpha, R_\beta(F + \mathcal{F})).$$

Além disso, as separatrizes são desconectadas e as órbitas periódicas tornam-se hiperbólicas e disjuntas de  $\partial M$  e de  $\mathcal{I}$ . Isso é feito do mesmo modo que em [11].

Em outras palavras, depois dos passos (a), (b) e (c), todas as condições da definição de  $\Sigma$  são obtidas com medida total. Logo, essa sequencia de resultados de medida total em um espaço implica o mesmo para o espaço produto. □

**Teorema 4.2.7.** *Para  $r \geq 2$ ,  $\Phi^r \subset \Sigma^r$ .*

**Idéia da Demonstração.** Considere um sistema  $(A, F)$  da classe  $\Phi^r$  dos sistemas estruturalmente estáveis em  $M$ . Pelos Teoremas 4.2.5 e 4.2.6,  $(A, F)$  é topologicamente equivalente a um sistema de  $\Sigma^r$ . Se uma das condições (1.1), (1.2) ou (1.3) da definição de  $\Sigma^r$  não for satisfeita, isso acarretará em uma contradição na estabilidade de  $(A, F)$ . E temos também que as definições sobre órbitas periódicas ( $\Sigma^r(2)$ ) e pontos de impasse ( $\Sigma^r(3)$ ) são satisfeitas.

Se a curva  $\mathcal{I}_A$  não é regular no ponto  $p_0 = (x_0, y_0)$ , esse ponto é degenerado (ou seja, não é do tipo Morse para  $\delta$ ). Caso contrário, a curva  $\mathcal{I}_A$  seria, localmente, um ponto isolado ou um cruzamento normal (não seria como um dos sistemas de  $\Sigma$ ). Assim, a Curva de Impasse seria

- vazia ou
- uma curva regular fechada em  $Int(M)$  ou
- um arco regular com extremos em  $\partial M$ .

---

Mas, podemos considerar um campo matricial  $A'$ ,  $C^r$ -próximo de  $A$ , tal que  $A'$  não tenha pontos degenerados próximos a  $p_0$ . Isso mudaria o tipo topológico da Curva de Impasse contradizendo a hipótese de estabilidade.

Argumentos similares aplicam-se em órbitas periódicas não-hiperbólicas, pontos singulares (não-hiperbólicos) e às tangencias de  $\partial M$  com a Curva de Impasse (quando o contato não é quadrático). Ver [13]

□

**Teorema 4.2.8.**  $\Phi^r = \Sigma^r$  e é aberto e denso em  $\mathcal{Z}^r$ , para  $r \geq 2$ .

O Teorema 4.2.8 é uma consequência imediata dos outros 3.

# Capítulo 5

## Apêndice

### 5.1 Alguns Requisitos Utilizados no Texto

Nesse capítulo vamos enunciar alguns conceitos necessários para o texto.

#### 5.1.1 Teorema de Sard

Sejam  $a = (a_1, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, \dots, b_n)$  pontos do  $\mathbb{R}^n$  tais que  $a_i < b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Denote por  $C(a, b)$  o cubo aberto

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Definimos o volume de  $C(a, b)$  da seguinte maneira

$$\text{vol}[C(a, b)] = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

**Definição 5.1.1.** (medida nula) Seja  $S$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$ . Então  $S$  tem *medida nula* se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma cobertura de  $S$  por uma coleção enumerável de cubos abertos  $C_1, C_2, \dots$  tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}[C_i] < \varepsilon.$$

**Observação.** Se  $S$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , então dizemos que  $S$  tem medida total se  $S^c$  (complementar de  $S$  em  $\mathbb{R}^n$ ) tiver medida nula.

Dado  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma transformação linear dizemos que o *posto* de  $A$  é  $\ell$ , e denotamos  $\text{posto}(A) = \ell$ , se  $\dim A(\mathbb{R}^n) = \ell$ . Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma aplicação diferenciável no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $x_0 \in U$  dizemos que  $x_0$  é *ponto crítico* de  $f$  se  $\text{posto}(df_{x_0}) < p$ .

**Teorema 5.1.2.** (de Sard) Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma aplicação de classe  $C^r$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  com  $r \geq \max\{1, n - p + 1\}$ . Se  $W \subset U$  é o conjunto dos pontos críticos de  $f$  então  $f(W)$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^p$ .

**Demonstração.** Pelo teorema de Lindelöf,  $U$  é uma reunião enumerável de cubos fechados. Logo, basta provar que se  $C$  é um cubo fechado de aresta  $a > 0$  contido em  $U$  e  $T = \{x \in C : \text{posto}(df_x) < p\}$  então  $f(T)$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^p$ .

Subdividindo cada uma das arestas de  $C$  em  $k$  partes iguais, obtemos uma partição de  $C$  com  $k^p$  cubos  $C_i$  de mesma aresta  $\delta = \frac{a}{k}$  e volume  $\delta^p = \left(\frac{a}{k}\right)^p$ . Se  $x, y \in C_i$  temos que  $|x - y| \leq p\delta$ .

Em cada pequeno cubo  $C_i$  tal que  $C_i \cap T \neq \emptyset$ , escolhemos um ponto  $x_i \in C_i \cap T$ . A imagem da transformação linear  $df_{x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  está contida em um subespaço vetorial  $E_i \subset \mathbb{R}^p$  de dimensão  $p - 1$ , pois  $\text{posto}(df_{x_i}) < p$ . Todos os pontos  $f(x_i) + df_{x_i}(v)$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ , pertencem ao subespaço afim  $L_i = f(x_i) + E_i$  de dimensão  $p - 1$  em  $\mathbb{R}^p$ . Para cada  $x \in C_i$  podemos escrever

$$f(x) = f(x_i) + df_{x_i}(x - x_i) + r_i(x).$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , o inteiro  $k$  pode ser tomado tão grande que, para todo cubo  $C_i$  contendo pontos de  $T$  e todo  $x \in C_i$ , valha

$$|r_i(x)| < \varepsilon|x - x_i| \leq p\delta\varepsilon.$$

O raciocínio seguirá considerando  $\varepsilon < 1$ . Para o caso em que  $\varepsilon \geq 1$ , basta tomar  $\varepsilon_1 = \frac{1}{\varepsilon + 1}$ .

Como para todo  $x \in C_i$ , se  $c = \sup\{|df_x| : x \in C\}$ , temos

$$|df_{x_i}(x - x_i)| \leq c|x - x_i| < pc\delta,$$

logo, para todo  $x \in C_i$ , o ponto

$$f(x_i) + df_{x_i}(x - x_i)$$

pertence a um cubo de centro  $f(x_i)$  e aresta  $2p\delta(c + \varepsilon)$  em  $L_i$ . Se considerarmos o paralelepípedo retangular  $P_i$  em  $\mathbb{R}^p$  que tem esse cubo como secção média e altura  $2p\varepsilon\delta$ , vemos que

$$\text{vol}(P_i) = 2p\varepsilon\delta(2p\delta c + 2p\delta\varepsilon)^{p-1} = 2^p p^p c^{p-1} \delta^p \varepsilon + \alpha_1 \varepsilon + \dots + \alpha_{p-1} \varepsilon^{p-1}$$

e assim como  $\varepsilon^j < \varepsilon$ ,  $j = 2, \dots, p - 1$ , segue que existem  $M, L \in \mathbb{R}$  tais que

$$\text{vol}(P_i) < (Ma^p + L)\varepsilon.$$

A imagem  $f(T)$  está contida na reunião de, no máximo,  $k^p$  desses paralelepípedos  $P_i$ , cuja soma dos volumes não excede  $(Ma^p + L)k^p\varepsilon$ . Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, vemos que  $f(T)$  tem medida nula.

□

### 5.1.2 Teorema da Função Implícita

**Teorema 5.1.3.** (da Função Implícita) Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ , diferenciável no ponto  $(a_1, \dots, a_m, \lambda_0) \in U$ , com  $f(a_1, \dots, a_m, \lambda_0) = c$ . Se  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a_1, \dots, a_m, \lambda_0) \neq 0$  então existem abertos  $V, Z$  (onde  $(a_1, \dots, a_m) \in V \subset \mathbb{R}^m, (a_1, \dots, a_m, \lambda_0) \in Z \subset U$ ) com a seguinte propriedade: para cada  $(x_1, \dots, x_m) \in V$  há um único  $\xi(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}$  tal que

$$(x_1, \dots, x_m, \xi(x_1, \dots, x_m)) \in Z, \quad f(x_1, \dots, x_m, \xi(x_1, \dots, x_m)) = c.$$

A aplicação  $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}$  assim definida é diferenciável no ponto  $(a_1, \dots, a_m)$  e suas derivadas parciais nesse ponto são

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_m) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_m, \lambda_0)}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a_1, \dots, a_m, \lambda_0)}.$$

Em resumo:  $f^{-1}(c) \cap Z$  é o gráfico da aplicação  $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciável no ponto  $(a_1, \dots, a_m)$ . Se  $f \in C^k$  então  $\xi \in C^k$ ,

A aplicação  $\xi$  diz-se definida implicitamente pela equação  $f(x, y) = c$ .

**Demonstração.** Indicamos a referência [3], página 95. □

### 5.1.3 Derivada de Ordem 2

Dado  $U \subset \mathbb{R}^m$  aberto, dizemos que a aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável em  $U$  quando ela for diferenciável em todos os pontos  $x \in U$ . Define-se então a aplicação derivada

$$df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

que associa a cada ponto  $x \in U$  a aplicação linear  $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (outra notação:  $Df_x$ ) que é a derivada de  $f$  no ponto  $x$ . Como o espaço  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  tem uma topologia, definida por sua norma, diremos que  $f$  é de classe  $C^1$  quando  $f$  for diferenciável e, além disso,  $df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  for contínua.

Agora, se  $df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  tem derivada no ponto  $x \in U$ , dizemos que  $f$  é duas vezes diferenciável no ponto  $x$  e escrevemos

$$f''(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

para indicar a derivada de  $df$  em  $x$ , isto é, a segunda derivada de  $f$  em  $x$ . Quando  $f$  é duas vezes diferenciável em todos os pontos de  $U$ , então dizemos que  $f$  é duas vezes diferenciável. Se a aplicação  $f'' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$  for contínua então dizemos que  $f$  é de classe  $C^2$ .

Existe um isomorfismo natural entre  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$  e  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , que associa a cada transformação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  uma transformação bilinear  $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $B(u, v) = T(u) \cdot v$ . Isto nos permite considerar a derivada segunda como sendo uma transformação bilinear  $f''(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .



### 5.1.4 Derivadas de Ordem Superior

As derivadas de ordem superior são definidas indutivamente. Suponhamos que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  seja  $(k-1)$  vezes diferenciável. Então sua  $(k-1)$ -ésima derivada é uma aplicação  $f^{(k-1)} : U \rightarrow \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .

Se  $f^{(k-1)}$  é diferenciável em um ponto  $x \in U$ , dizemos que  $f$  é  $k$  vezes diferenciável neste ponto e, usando o isomorfismo canônico  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \approx \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , identificaremos  $f^{(k)}(x)$  com uma aplicação  $k$ -linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ , que chamamos de  $k$ -ésima derivada de  $f$  no ponto  $x$ . Quando  $f^{(k)}(x)$  existe para todo  $x \in U$ , dizemos que  $f$  é  $k$  vezes diferenciável em  $U$ . Fica então definida a aplicação  $f^{(k)} : U \rightarrow \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .

Se  $f^{(k)}$  é contínua, dizemos que  $f$  é de classe  $C^k$ .

### 5.1.5 Lema de Hadamard

**Lema 5.1.4.** (de Hadamard) *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^r$  ( $r \geq 1$ ),  $U$  convexo,  $0 \in U$  e  $f(0) = 0$ , então existem funções de classe  $C^{r-1}$ ,  $f_1, f_2, \dots, f_n$  definidas em  $U$  tais que*

$$f(x) = x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \dots + x_n f_n(x).$$

**Demonstração.** Para cada  $x \in U$ , temos que o segmento de reta que une  $x$  a um outro ponto de  $U$  está inteiramente contido em  $U$ , assim podemos definir  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\phi(t) = f(tx_1, \dots, tx_n) = f(tx).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos  $\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t) dt$  e assim

$$f(x) = \int_0^1 \left[ x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx) \right] dt$$

Como o somatório dentro da integral é finito, temos

$$f(tx) = x_1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx) dt + \dots + x_n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx) dt.$$

Portanto, basta chamar  $f_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$ .

□

### 5.1.6 A Topologia de Whitney

**Definição 5.1.5.** Sejam  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  tais que  $f(p) = g(p) = q$ , então:

- (1)  $f$  tem contato de ordem 1 com  $g$  em  $p$  se

$$df_p(h) = dg_p(h), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n;$$

- (2)  $f$  tem contato de ordem  $k$  com  $g$  em  $p$  se  $df$  tem contato de ordem  $k - 1$  com  $dg$  em todo ponto de  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, se

$$f^{(i)}(h_1, \dots, h_i) = g^{(i)}(h_1, \dots, h_i), \quad \forall (h_1, \dots, h_i) \in \mathbb{R}^{in}$$

e  $i = 1, 2, \dots, k$ . Denotamos isso por  $f \sim_k g$  em  $p$ ;

- (3)  $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_{p,q}$  é o conjunto das classes de equivalência das aplicações  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com  $f(p) = q$ , sob a relação de equivalência  $\sim_k$ ;

- (4) Temos a união disjunta

$$J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \bigcup_{(p,q) \in \mathbb{R}^{n+m}} J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_{p,q}.$$

Um elemento  $\sigma \in J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  é chamado  $k$ -jato de aplicações (ou simplesmente um  $k$ -jato) de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ ;

- (5) Seja  $\sigma$  um  $k$ -jato, então existem  $p \in \mathbb{R}^n$  e  $q \in \mathbb{R}^m$ , tais que  $\sigma \in J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_{p,q}$ . Assim,  $p$  é chamado fonte e  $q$  o alvo de  $\sigma$ .

Note que, dado uma aplicação  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , então existe uma aplicação  $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  chamada  $k$ -jato de  $f$ , definida por:  $j^k f(p)$  é a classe de equivalência de  $f$  em  $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_{p,f(p)}$ , para cada  $p$  em  $\mathbb{R}^n$ . A aplicação  $j^k f$  é diferenciável e  $j^k f(p)$  é uma maneira de descrever o polinômio de Taylor de ordem  $k$  de  $f$  em  $p$ .

Observe ainda que  $J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , então  $f$  tem  $\sim_0$  contato com  $g$  em  $p$  se, e somente se,  $f(p) = g(p)$ . Mais ainda,  $j^0 f(p) = (p, f(p))$  é justamente o gráfico de  $f$ .

O próximo objetivo é definir a topologia  $C^k$  de Whitney. Para isso, considere  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  o conjunto das aplicações diferenciáveis de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ . Fixe um inteiro  $k$  não negativo. Seja  $U \subset J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , assim, denote por  $M(U)$  o conjunto

$$M(U) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid j^k f(\mathbb{R}^n) \subset U\}.$$

Note que  $M(U) \cap M(V) = M(U \cap V)$ .

**Definição 5.1.6.** (Topologia  $C^k$  de Whitney) A família de conjuntos  $\{M(U)\}$  onde  $U$  é um subconjunto de  $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  forma uma base para uma topologia em  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , a qual é chamada Topologia  $C^k$  de Whitney.

### 5.1.7 Sobre a Bifurcação de Andronov-Hopf

Considere um campo de vetores no plano, o qual tem a seguinte forma em uma vizinhança da singularidade  $(0, 0)$ :

$$\begin{cases} x' = \beta y + \varphi(x, y) \\ y' = -\beta x + \psi(x, y) \end{cases} \quad (5.1)$$

com  $\beta > 0$  e  $\varphi$  e  $\psi$  funções analíticas que se anulam, juntamente com suas derivadas, no ponto  $(0, 0)$ .

Vamos fazer uma mudança para as coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}.$$

Assim, o sistema (5.1) se transforma no seguinte

$$\begin{cases} r' = P(r, \theta) \\ \theta' = Q(r, \theta) \end{cases},$$

onde o retrato de fase do sistema acima depende dos gráficos de  $r = f_\rho(\theta)$ , tal que  $f_\rho(0) = \rho$ , que são soluções de

$$\frac{dr}{d\theta} = R(r, \theta) = \frac{P(r, \theta)}{Q(r, \theta)} = R_1(\theta)r + R_2(\theta)r^2 + \dots$$

com

$$R_k(\theta) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k R(r, \theta)}{\partial r^k} \Big|_{r=0}.$$

As expansões em série das funções  $f_\rho(\theta)$  são dadas por

$$f_\rho(\theta) = u_1(\theta)\rho + u_2(\theta)\rho^2 + \dots$$

Da equação anterior e da expressão de  $\frac{dr}{d\theta}$  temos

$$u_1'(\theta)\rho + u_2'(\theta)\rho^2 + \dots = R_1(\theta)(u_1(\theta) + \dots) + R_2(\theta)(u_1(\theta) + \dots)^2 + \dots$$

Agora, considere a função de primeiro retorno  $\pi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\pi(\rho) = f_\rho(2\pi) - \rho$$

Os coeficientes de Lyapunov são dados por

$$V_k = \frac{\pi^{(k)}(0)}{k!}.$$

Temos que, se existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\pi'(0) = \pi''(0) = \dots = \pi^{(n-1)}(0) = 0; \quad \pi^{(n)} \neq 0,$$

então  $n$  é um número ímpar. Nesse caso, dizemos que  $\frac{n-1}{2}$  é a multiplicidade do foco.

O sinal do primeiro coeficiente não-nulo de Lyapunov define a estabilidade do foco. Se tivermos  $V_n > 0$  então o foco é atrator, caso contrário, repulsor.

### 5.1.8 Espaço de Baire

**Definição 5.1.7.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A$  um subconjunto de  $X$ . O interior de  $A$ , denotado por  $Int(A)$ , é a união de todos os conjuntos abertos de  $X$  que estão contidos em  $A$ .

Assim, um conjunto  $A$  tem interior vazio se  $A$  não contém abertos de  $X$  além do conjunto vazio.

**Definição 5.1.8.** Um espaço topológico  $X$  é um espaço de Baire se satisfaz o seguinte:

- Dado qualquer família enumerável  $\{A_n\}$  de subconjuntos fechados de  $X$ , com cada  $A_i$  tendo interior vazio em  $X$ , então sua união  $\bigcup A_n$  também tem interior vazio em  $X$ .

Essa definição também pode ser dada utilizando subconjuntos abertos do espaço topológico  $X$ . Essa forma é apresentada no Lema a seguir.

**Lema 5.1.9.**  $X$  é um espaço de Baire se, e somente se, dado qualquer família enumerável  $U_n$  de subconjuntos abertos de  $X$ , com  $U_i$  denso em  $X$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , a intersecção  $\bigcap U_n$  também é densa em  $X$ .

**Demonstração.** Lembrando que um subconjunto  $C$  de  $X$  é denso em  $X$  se  $\overline{C} = X$ , o Lema segue das duas afirmações a seguir:

- (a)  $A$  é fechado em  $X$  se, e somente se,  $X - A$  é aberto em  $X$
- (b)  $B$  tem interior vazio em  $X$  se, e somente se,  $X - B$  é denso em  $X$ .

□

# Referências Bibliográficas

- [1] DAMON, J., The Unfolding and Determinacy Theorems for Subgroups of  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{K}$ , *Memoirs, A.M.S.*, **306**, Providence, 1984.
- [2] HIRSCH, M. E SMALE, S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [3] LIMA, E.L., *Análise no  $\mathbb{R}^n$* , Coleção Matemática Universitária - IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [4] LLIBRE, J., SOTOMAYOR, J. E ZHITOMIRSKII, M., Impasse Bifurcations of Constrained Systems, *Fields Inst. Commun.*, Lisbon, 2000, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 2002.
- [5] MUNKRES, J. R., *Topology, a First Course*, Prentice Hall, Inc, Upper Saddle River, 1975.
- [6] JÚNIOR, J. P. E MELO, W., *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [7] PEIXOTO, M. M., PEIXOTO, M. C., Structural Stability with Enlarged Boundary Conditions, *An. Acad. Bras. Ciências*, 81, 1959.
- [8] RABIER, P.J. E RHEINBOLDT, W.C., On Impasse Points of Quasi-linear Differential-Algebraic Equations, *Jour. Math. Anal. and Appl.*, 181, 2, 429-454, 1994.
- [9] SOTOMAYOR, J., Curvas Definidas por Equações Diferenciais no Plano, *13º Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA*, 1981.
- [10] SOTOMAYOR, J., Generic One-parameter Families of Vector Fields on Two-dimensional Manifolds, *Publ. Math, IHES*, 43, 1974.
- [11] SOTOMAYOR, J., La Mesure de L'ensemble de Bifurcation de Champs de Vecteurs dans le Plan, *Comptes Rendus Acad. Sciences*, Paris 239, 1981.
- [12] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [13] SOTOMAYOR, J., Structurally Stable Differential Systems of the Form  $A(x)x' = F(x)$ , *Diff. Eq. and Dyn. Syst.*, 1997.

- [14] ZHITOMIRSKII, M., Local Normal Forms for Constrained Systems on 2-manifolds, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 1993.