Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Funções de Green para Problemas de Valor de Contorno com três pontos

ANDRÉ AZEVEDO PAES DE BARROS

Orientador: Prof. Dr. Germán Jesus Lozada Cruz

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto

Janeiro - 2011

ANDRÉ AZEVEDO PAES DE BARROS

Funções de Green para Problemas de Valor de Contorno com 3 pontos

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise Aplicada junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Germán Jesus Lozada Cruz
Professor Doutor
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte
Professor Doutor
UEMS – Cassilândia - MS

Prof. Dr. Juliana Conceição Precioso Pereira
Professora Doutora
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 28 de janeiro de 2011.

Aos meus pais,

Paulo e Rosária

e à minha querida irmã,

Maria Luiza.

dedico.

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, por essa e por todas maravilhosas realizações feitas em minha vida.

Agradeço aos meus pais, minha irmã e minhas tias e tios pelo incentivo, amor e por nunca desacreditarem em minha capacidade.

Ao professor Germán pela orientação, paciência e incentivo.

Agradeço à banca examinadora: Prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte e à Profª. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira, pela disponibilidade e por todas sugestões.

Meus agradecimentos ao meu orientador de graduação o professor Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte, aos amigos Alex e Ruickson pelo incentivo à busca de novos conhecimentos e amizade.

Aos meus amigos Vanuza e Antônio pela grande amizade e por sempre acreditarem em mim. Aos novos e grandiosos amigos Marcão, Glauce, Meire e Diego pelo companheirismo e apoio em momentos difíceis, ao pessoal da pós pela amizade, pelos inúmeros churras e momentos de descontração Junior, Michelli, Andréa, Ana, Érica, Eduardo, Danilo e Jaime, ao pessoal da república pela amizade e boa convivência Pedro, Juliano, Rodiak e Rafael, à Dra. Bruna e Dr. Diego pelo grande apoio!

Muito obrigado à todos que contribuíram com esse trabalho, e acima de tudo pela amizade e carinho!!!

Resumo

O objetivo desse trabalho é estudar problemas de valor de contorno com três pontos lineares e não-lineares, também conhecidos como problemas não-clássicos [9]. Isto é feito, usando as funções de Green, usadas para resolver problemas de valor de contorno com dois pontos.

Palavras chave: Equações Diferenciais, Problemas de Valor de Contorno com três pontos, Funções de Green.

Abstract

The aim of this work is to study boundary value problems with three points also known as non-classical problems. This is done using the Green's functions, which are used to solve two-point boundary value problems.

Keywords: Differential Equations, Three-point Boundary Value Problems, Green's Functions.

Sumário

Introdução

Equações diferenciais são usadas na modelagem de inúmeros fenômenos naturais (sejam elas algébricas, ordinárias, parciais, estocásticas, integro-diferenciais, etc). Como por exemplo, suponhamos que o seguinte problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, & u(b) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $a < b$, modela um certo fenômeno.

A solução do problema (1) é dada por

$$u(t) = \int_a^b G_2(t,s) f(s) ds, \tag{2}$$

onde $G_2 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é também conhecida como função de Green de (1), que tem como propriedades:

1) G_2 é contínua em $[a,b] \times [a,b]$.

2) G_2 satisfaz a equação homogênea associada à (1).

3) G_2 satisfaz as condições de contorno de (1).

4) $\dfrac{\partial G_2(t,s)}{\partial t}$ é contínua em cada um dos triângulos $a \leq t \leq s \leq b$ e $a \leq s \leq t \leq b$. Além disso a derivada primeira de G_2 com relação a t tem um salto em $t = s$

$$\frac{\partial G_2(s^+,s)}{\partial t} - \frac{\partial G_2(s^-,s)}{\partial t} = -1.$$

O objetivo deste trabalho é encontrar a solução do problema

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a, b] \\ u(a) = ku(\eta), & u(b) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\eta \in [a, b]$ e k são números dados e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Para atingirmos tal objetivo, vamos procurar a solução de (3) na forma

$$u(t) = \int_a^b G_3(t, s) f(s) ds, \tag{4}$$

onde G_3 será a função de Green de (3) que dependerá de G_2. Além de provar a existência da solução de (3), temos por objetivo , provar a existência e unicidade para outras condições de contorno e de quando o termo não-homogêneo é não-linear.

O trabalho de dissertação foi inspirado no artigo de Zhao [9], porém as demonstrações dos teoremas e corolários apresentados nessa dissertação são feitas detalhadamente.

Organização.

No Capítulo 1, colocamos os resultados básicos, definição e exemplos de problemas de valor de contorno, e também algumas motivações para o desenvolvimento destes problemas, maiores detalhes podem ser vistos em [1], [2], [4], [5], [7].

No Capítulo 2, definimos funções de Green para problemas clássicos lineares e não-lineares, formalizamos através de teoremas as motivações do Capítulo 1 e estudamos a existência e unicidade de soluções para estes problemas, que podem ser vistos em [1], [7], [8].

No Capítulo 3, finalmente, estudamos funções de Green para problemas não-clássicos lineares e não-lineares, e também a existência e unicidade de soluções [1], [3], [6], [7], [9], [10].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo enunciaremos alguns resultados os quais serão utilizados no decorrer deste trabalho.

1.1 Resultados Básicos

Seja a equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea

$$\ddot{u} + p(t)\dot{u} + q(t)u = f(t), \tag{1.1}$$

onde $p, q, f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas no intervalo I. Sabemos que a solução de (1.1) é dada por

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t), \tag{1.2}$$

e u_h é solução da equação homogênea associada à (1.1)

$$\ddot{u} + p(t)\dot{u} + q(t)u = 0 \tag{1.3}$$

e u_p é uma solução particular de (1.1). A solução geral de (1.3) é

$$u_h(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t), \tag{1.4}$$

sendo u_1 e u_2 são soluções linearmente independentes de (1.3).

O Método da Variação dos Parâmetros consiste em encontrar uma solução particular da equação (1.1) conhecendo duas soluções linearmente independentes de (1.3), isto é, queremos achar

$$u_p(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t), \tag{1.5}$$

onde c_1 e c_2 são funções deriváveis.

Aparentemente isto não tem sentido, pois estamos substituindo o problema de encontrar uma solução particular u_p pelo problema de determinar duas funções c_1 e c_2. O resultado a seguir nos diz como podem ser encontradas c_1 e c_2. Este Teorema pode ser encontrado em [2].

Teorema 1.1.1 *Se as funções $p, q, f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem contínuas no intervalo aberto I e se u_1 e u_2 forem soluções linearmente independentes da equação homogênea* (1.3)*, então uma solução particular da equação* (1.1) *é dada por*

$$u_p(t) = -u_1(t) \int_0^t \frac{u_2(s)f(s)}{W(u_1,u_2)(s)} dt + u_2(s) \int_0^t \frac{u_1(s)f(s)}{W(u_1,u_2)(s)} ds, \tag{1.6}$$

e a solução geral de (1.1) *é dada por*

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + u_p(t) \tag{1.7}$$

Demonstração. Sabemos que a solução geral da equação homogênea (1.3) é dada por

$$u_h(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t).$$

Vamos procurar uma solução particular de (1.1) na forma (1.5), onde $c_1(t)$ e $c_2(t)$ são funções a determinar.

Derivando (1.5), temos

$$\dot{u}_p(t) = \dot{c}_1(t)u_1(t) + c_1(t)\dot{u}_1(t) + \dot{c}_2(t)u_2(t) + c_2(t)\dot{u}_2(t). \tag{1.8}$$

Para simplificar as expressões de $\dot{u}_p$ e $\ddot{u}_p$ vamos impor sobre $c_1(t)$ e $c_2(t)$ a condição

$$\dot{c}_1(t)u_1(t) + \dot{c}_2(t)u_2(t) = 0. \tag{1.9}$$

Logo

$$\dot{u}_p(t) = c_1(t)\dot{u}_1(t) + c_2(t)\dot{u}_2(t). \tag{1.10}$$

Derivando agora (1.10) , obtemos

$$\ddot{u}_p(t) = \dot{c}_1(t)\dot{u}_1(t) + c_1(t)\ddot{u}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{u}_2(t) + c_2(t)\ddot{u}_2(t). \tag{1.11}$$

Substituindo (1.5), (1.10) e (1.11) em

$$\ddot{u}_p + p(t)\dot{u}_p + q(t)u_p = f(t)$$

e reorganizando os termos obtemos

$$c_1(t)[\ddot{u}_1(t)+p(t)\dot{u}_1(t)+q(t)u_1]+c_2(t)[\ddot{u}_2(t)+p(t)\dot{u}_2(t)+q(t)u_2]+\dot{c}_1(t)\dot{u}_1(t)+\dot{c}_2(t)\dot{u}_2(t) = f(t).$$

Cada expressão dentro dos colchetes é nula, pois u_1 e u_2 são soluções da equação homogênea (1.3). Portanto, temos

$$\dot{c}_1(t)\dot{u}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{u}_2(t) = f(t). \tag{1.12}$$

Juntando (1.9) e (1.12) temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t)u_1(t) + \dot{c}_2(t)u_2(t) = 0 \\ \dot{c}_1(t)\dot{u}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{u}_2(t) = f(t). \end{cases} \tag{1.13}$$

Resolvendo (1.13) temos

$$\begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= \frac{-u_2(t)f(t)}{(\dot{u}_2u_1 - u_2\dot{u}_1)(t)}, \\ \dot{c}_2(t) &= \frac{u_1(t)f(t)}{(\dot{u}_2u_1 - u_2\dot{u}_1)(t)}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Sabemos que $W[u_1, u_2] = \dot{u}_2u_1 - u_2\dot{u}_1$ é o wronskiano de u_1 e u_2, e integrando (1.14), temos

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\int_0^t \frac{u_2(s)f(s)}{W(u_1, u_2)(s)}ds, \\ c_2(t) &= \int_0^t \frac{u_1(s)f(s)}{W(u_1, u_2)(s)}ds. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Substituindo (1.15) em (1.5) obtemos a solução particular de (1.1)

$$u_p(t) = -u_1(t)\int_0^t \frac{u_2(s)f(s)}{W(u_1,u_2)(s)}ds + u_2(t)\int_0^t \frac{u_1(s)f(s)}{W(u_1,u_2)(s)}ds.$$

Logo a solução geral de (1.1) é dada por

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) - u_1(t)\int_0^t \frac{u_2(t)f(t)}{W(u_1,u_2)(t)}dt + u_2(t)\int_0^t \frac{u_1(t)f(t)}{W(u_1,u_2)(t)}dt. \qquad (1.16)$$

■

Detalhes das demonstrações do próximo teorema e corolário podem ser vistas em [5].

Teorema 1.1.2 [Regra de Leibniz] *Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, seja $f : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

1) *Para todo $x \in U$, a função $t \longmapsto f(x,t)$ é integrável em $a \leq t \leq b$.*

2) *A i-ésima derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ existe para cada $(x,t) \in U \times [a,b]$ e a função $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, assim definida, é contínua.*

Então a função $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$, possui i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt.$$

Corolário 1.1 *Seja $f : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, com derivadas parciais contínuas $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e sejam $g_1, g_2 : U \longrightarrow [a,b]$ funções de classe C^1. Então $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\varphi(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,t)dt$$

é de classe C^1, e suas derivadas parciais são expressas pela fórmula:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt + \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(x) f(x, g_2(x)) - \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x) f(x, g_1(x)).$$

Demonstração. Como

$$\varphi(x) = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,t)dt$$

então temos

$$\varphi(x) = \int\limits_{g_1(x)}^{a} f(x,t)dt + \int\limits_{a}^{g_2(x)} f(x,t)dt.$$

Definamos

$$\varphi_2(x) = \int\limits_{a}^{g_2(x)} f(x,t)dt.$$

Considere a função

$$\begin{aligned} \xi : U \times [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,u) &\longrightarrow \xi(x,u) = \int\limits_{a}^{u} f(x,t)dt. \end{aligned}$$

Facilmente vemos que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x,u) = \int\limits_{a}^{u} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u}(x,u) = f(x,u).$$

Assim, ξ é de classe C^1.

Podemos então usar a regra da cadeia, segundo a qual a função composta

$$\varphi_2(x) = \xi(x, g_2(x))$$

tem como derivada parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x, g_2(x)) + \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \xi}{\partial u}(x, g_2(x)) \\ &= \int\limits_{a}^{g_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt + \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(x) f(x, g_2(x)). \end{aligned}$$

Analogamente, se

$$\varphi_1(x) = \int\limits_{g_1(x)}^{a} f(x,t)dt = -\int\limits_{a}^{g_1(x)} f(x,t)dt$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(x) &= -\int\limits_{a}^{g_1(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt - \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x)f(x,g_1(x)) \\
&= \int\limits_{g_1(x)}^{a} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt - \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x)f(x,g_1(x)),
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}(x) \\
&= \int\limits_{g_1(x)}^{a} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt - \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x)f(x,g_1(x)) + \int\limits_{a}^{g_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt + \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(x)f(x,g_2(x)) \\
&= \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt + \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(x)f(x,g_2(x)) - \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x)f(x,g_1(x)).
\end{aligned}$$

■

1.2 Problemas de Valor de Contorno

Muitos fenômenos físicos, químicos, biológicos, econômicos, etc, são modelados por equações, sejam estas algébricas, diferenciais, integro-diferenciais, estocásticas, etc, como por exemplo [6]. Seja a equação diferencial

$$p_0(t)\ddot{u} + p_1(t)\dot{u} + p_2(t)u = f(t), \tag{1.17}$$

onde $p_0, p_1, p_2, f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Associado à equação diferencial (1.17) temos as seguintes condições de contorno gerais:

$$\begin{aligned}
B_1 u &\doteq \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}\dot{u}(a) + \beta_{11}u(b) + \beta_{12}\dot{u}(b) = \gamma_1 \\
B_2 u &\doteq \alpha_{21}u(a) + \alpha_{22}\dot{u}(a) + \beta_{21}u(b) + \beta_{22}\dot{u}(b) = \gamma_2,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

(onde os vetores $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \beta_{11}, \beta_{12})$ e $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_{21}, \beta_{22})$ são linearmente independentes, garantindo assim que temos duas condições de contorno distintas e γ_1 e γ_2 são constantes), formando assim o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} p_0(t)\ddot{u} + p_1(t)\dot{u} + p_2(t)u = f(t), \quad t \in [a, b] \\ B_1[u] = \gamma_1, \quad B_2[u] = \gamma_2, \end{cases} \tag{1.19}$$

Referimos à B_1 e B_2 como funcionais de contorno.

Em meados do século 20, foi constatado que a transição de equações diferenciais para equações integrais foi um avanço para analisar problemas de valor de contorno. Pois operadores integrais são ”melhores”, eles costumam aumentar a suavidade, são completamente contínuos em topologias naturais e permitem boa aproximação por uma matriz de dimensão finita [7].

Eis alguns exemplos de condições de contorno:

1ª **Condição tipo Dirichlet**.

$$\begin{cases} B_1 u = \alpha_{11} u(a) = \gamma_1 \\ B_2 u = \beta_{21} u(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

com $\alpha_{12} = \beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = \beta_{22} = 0$.

2ª **Condição de Neumann**

$$\begin{cases} B_1 u = \alpha_{12} \dot{u}(a) = \gamma_1 \\ B_2 u = \beta_{22} \dot{u}(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

com $\alpha_{11} = \beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = \beta_{21} = 0$.

3ª **Condição do tipo Mista**

$$\begin{cases} B_1 u = \alpha_{11} u(a) = \gamma_1 \\ B_2 u = \beta_{22} \dot{u}(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

com $\alpha_{12} = \beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = \beta_{21} = 0$.

4ª**Condição do tipo separáveis**

$$\begin{cases} B_1 u = \alpha_{11} u(a) + \alpha_{12} \dot{u}(a) = \gamma_1 \\ B_2 u = \beta_{21} u(b) + \beta_{22} \dot{u}(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

com $\beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$.

5ª **Condição do tipo periódica**

$$\begin{cases} B_1 u = \alpha_{11} u(a) - \beta_{11} u(b) = 0 \\ B_2 u = \alpha_{22} \dot{u}(a) - \beta_{22} \dot{u}(b) = 0, \end{cases}$$

com $\alpha_{12} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \beta_{21} u(b) = 0$.

Chamaremos de problema de valor de contorno homogêneo

$$\begin{cases} p_0(t)\ddot{u} + p_1(t)\dot{u} + p_2(t)u = 0, \quad t \in [a,b] \\ B_1[u] = 0, \quad B_2[u] = 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

e de problema de valor de contorno não-homogêneo

$$\begin{cases} p_0(t)\ddot{u} + p_1(t)\dot{u} + p_2(t)u = f(t), \quad t \in [a,b] \\ B_1[u] = \gamma_1, \quad B_2[u] = \gamma_2, \end{cases} \tag{1.21}$$

onde $p_0, p_1, p_2, f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e γ_1, γ_2 são constantes.

Exemplo 1.1 *Como motivação encontremos a solução do problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, \qquad t \in [a,b] \\ u(a) = 0, \quad u(b) = 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

onde $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função contínua e* u, *dependente de* t *é uma função desconhecida.*

Integrando (1.22) de 0 até t tem-se

$$\int_0^t \ddot{u}(s)ds = \int_0^t (-f(s))ds$$

$$\dot{u}(t) - \dot{u}(0) = -\int_0^t f(s)ds$$

$$\dot{u}(t) = \dot{u}(0) - \int_0^t f(s)ds.$$

Integrando novamente esta última equação de 0 até t tem-se

$$\int_0^t \dot{u}(s)ds = \int_0^t \dot{u}(0)ds - \int_0^t \left[\int_0^s f(x)dx\right] ds$$
$$u(t) - u(0) = \dot{u}(0)t - \int_0^t \left[\int_0^s f(x)dx\right] ds$$
$$u(t) = u(0) + \dot{u}(0)t - \int_0^t \left[\int_0^s f(x)dx\right] ds.$$

Fazendo $c_1 = u(0)$ e $c_2 = \dot{u}(0)$ a última equação tem a forma

$$u(t) = c_1 + c_2 t - \int_0^t \left[\int_0^s f(x)dx\right] ds. \tag{1.23}$$

Definamos $J = \int_0^t \left[\int_0^s f(x)dx\right] ds$. Fazendo $z = \int_0^s f(x)dx$ temos que a integral J tem a forma $J = \int_0^t zds$. Fazendo integração por partes, temos

$$J = zs\Big|_0^t - \int_0^t s\dot{z}ds$$
$$= t\int_0^t f(x)dx - \int_0^t sf(s)ds$$
$$= \int_0^t (t-s)f(s)ds.$$

Substituindo J em (1.23) temos que a solução geral de (1.22) pode ser dada por

$$u(t) = c_1 + c_2 t - \int_0^t (t-s)f(s)ds. \tag{1.24}$$

Aplicando as condições de contorno de (1.22) na solução (1.24), obtemos

$$c_1 = -ac_2 + \int_0^a (a-s)f(s)ds$$

e

$$c_2 = \int_0^b \frac{(b-s)f(s)ds}{b-a} - \int_0^a \frac{(a-s)f(s)ds}{b-a}.$$

Substituindo as constantes c_1 e c_2 em (1.24)

$$\begin{aligned}
u(t) &= -\int_0^b \frac{a(b-s)f(s)ds}{b-a} + \int_0^a \frac{b(a-s)f(s)ds}{b-a} + \int_0^b \frac{t(b-s)f(s)ds}{b-a} + \\
&\quad - \int_0^a \frac{t(a-s)f(s)ds}{b-a} - \int_0^t (t-s)f(s)ds \\
&= -\int_0^t \frac{a(b-s)f(s)ds}{b-a} - \int_t^b \frac{a(b-s)f(s)ds}{b-a} + \int_0^t \frac{b(a-s)f(s)ds}{b-a} \\
&\quad + \int_t^a \frac{b(a-s)f(s)ds}{b-a} + \int_0^t \frac{t(b-s)f(s)ds}{b-a} + \int_t^b \frac{t(b-s)f(s)ds}{b-a} \\
&\quad - \int_0^t \frac{t(a-s)f(s)ds}{b-a} - \int_t^a \frac{t(a-s)f(s)ds}{b-a} + \int_0^t \frac{(-tb-sb+at-as)f(s)ds}{b-a} \\
&= \int_0^t \frac{[-ab+as+ab-bs+tb-ts-at+ts-tb+bs+at-as]f(s)ds}{b-a} + \\
&\quad + \int_t^b \frac{[a(s-b)+t(b-s)]f(s)ds}{b-a} + \int_t^a \frac{[b(a-s)-t(a-s)]f(s)ds}{b-a} \\
&= \int_a^t \frac{[(s-a)(b-t)]f(s)ds}{b-a} + \int_t^b \frac{[(t-a)(b-s)]f(s)ds}{b-a}.
\end{aligned}$$

Definindo a função $G_2 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & a \leq s \leq t \leq b \\ \dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & a \leq t \leq s \leq b, \end{cases} \tag{1.25}$$

então podemos escrever a solução de (1.22) como

$$u(t) = \int_a^b G_2(t,s)f(s)ds.$$

■

Exemplo 1.2 *Uma outra motivação é o seguinte problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + u + f(t) = 0, & t \in [0,1] \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

onde $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função contínua.*

A solução geral da equação homogênea associada à equação (1.26) é dada por

$$u_h(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \mathrm{sen}(t).$$

onde

$$u_1(t) = \cos(t) \quad \text{e} \quad u_2(t) = \mathrm{sen}(t),$$

são soluções linearmente independentes, pois o Wronskiano $W[u_1, u_2] = 1 \neq 0$.

Como f é contínua, então pelo Teorema 1.1.1, temos que a solução particular da equação (1.26) é dada por

$$\begin{aligned} u_p(t) &= -\cos(t) \int_0^t \mathrm{sen}(s)(-f(s))ds + \mathrm{sen}(t) \int_0^t \cos(s)(-f(s))ds \\ &= \int_0^t [\mathrm{sen}(s)\cos(t) - \mathrm{sen}(t)\cos(s)] f(s) ds \\ &= \int_0^t [\mathrm{sen}(s-t)] f(s) ds \\ &= -\int_0^t [\mathrm{sen}(t-s)] f(s) ds. \end{aligned}$$

Logo a solução geral da equação (1.26) é dada por

$$u(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \mathrm{sen}(t) - \int_0^t [\mathrm{sen}(t-s)] f(s) ds. \tag{1.27}$$

Aplicando as condições de contorno (1.26) em (1.27), temos

$u(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$

$u(1) = 0 \Longrightarrow c_2 = \int\limits_0^1 \left[\dfrac{\text{sen}(1-s)}{\text{sen}1}\right] f(s)ds.$

Substituindo c_1 e c_2 em (1.27), temos

$$u(t) = \int\limits_0^1 \left[\frac{\text{sen}(1-s)\text{sen}(t)}{\text{sen}1}\right] f(s)ds - \int\limits_0^t \text{sen}(t-s)f(s)ds$$

$$u(t) = \int\limits_0^t \left[\frac{\text{sen}(1-s)\text{sen}(t)}{\text{sen}1}\right] f(s)ds + \int\limits_t^1 \left[\frac{\text{sen}(1-s)\text{sen}(t)}{\text{sen}1}\right] f(s)ds - \int\limits_0^t \text{sen}(t-s)f(s)ds$$

$$u(t) = \int\limits_0^t \left[\frac{\text{sen}(1-s)\text{sen}(t)}{\text{sen}1} - \text{sen}(t-s)\right] f(s)ds + \int\limits_t^1 \left[\frac{\text{sen}(1-s)\text{sen}(t)}{\text{sen}1}\right] f(s)ds$$

$$u(t) = \int\limits_0^t \left[\frac{\text{sen}(s)\text{sen}(1-t)}{\text{sen}1}\right] f(s)ds + \int\limits_t^1 \left[\frac{\text{sen}(t)\text{sen}(1-s)}{\text{sen}1}\right] f(s)ds.$$

Definindo a função $H_2 : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$H_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(s)\text{sen}(1-t)}{\text{sen}1}, & 0 \le s \le t \le 1 \\ \\ \dfrac{\text{sen}(t)\text{sen}(1-s)}{\text{sen}1}, & 0 \le t \le s \le 1, \end{cases} \tag{1.28}$$

podemos escrever a solução geral de (1.26) como

$$u(t) = \int\limits_0^1 H_2(t,s)f(s)ds. \tag{1.29}$$

■

Exemplo 1.3 *Determinemos agora a solução do seguinte problema com a condição de contorno do tipo Mista*

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, & \dot{u}(b) = 0. \end{cases} \tag{1.30}$$

Pelo exemplo (1.1) sabemos que a solução de (1.30) é dada por

$$u(t) = c_1 + c_2 t - \int\limits_0^t (t-s)f(s)ds. \tag{1.31}$$

Derivando (1.31), obtemos

$$\dot{u}(t) = c_2 - \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t-s)f(s)ds.$$

Aplicando o Corolário 1.1 na equação acima

$$\dot{u}(t) = c_2 - \int_0^t \frac{\partial(t-s)}{\partial t} f(s)ds = c_2 - \int_0^t f(s)ds. \tag{1.32}$$

Aplicando a condição de contorno em (1.31) temos

$$u(a) = 0 \Longrightarrow c_1 + c_2 a - \int_0^a (a-s)f(s)ds = 0 \Longrightarrow c_1 = -ac_2 + \int_0^a (a-s)f(s)ds.$$

Aplicando a condição de contorno em (1.32) temos

$$\dot{u}(b) = 0 \Longrightarrow c_2 - \int_0^b f(s)ds = 0 \Longrightarrow c_2 = \int_0^b f(s)ds.$$

Substituindo c_1 e c_2 em (1.31)

$$\begin{aligned}
u(t) &= -ac_2 + \int_0^a (a-s)f(s)ds + t\int_0^b f(s)ds - \int_0^t (t-s)f(s)ds \\
&= \int_0^a (a-s)f(s)ds + \int_0^b (t-a)f(s)ds - \int_0^t (t-s)f(s)ds \\
&= \int_a^t (s-a)f(s)ds + \int_t^b (t-a)f(s)ds - \int_0^t (t-a+a-s-t+s)f(s)ds \\
&= \int_a^t (s-a)f(s)ds + \int_t^b (t-a)f(s)ds.
\end{aligned}$$

Definindo a função $K_2 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$K_2(t,s) = \begin{cases} s-a, & a \le s \le t \le b \\ t-a, & a \le t \le s \le b, \end{cases}$$

podemos escrever a solução geral de (1.30) como

$$u(t) = \int_a^b K_2(t,s)f(s)ds.$$

■

Capítulo 2

Funções de Green

Neste capítulo definiremos funções de Green para problemas de valor de contorno de segunda ordem lineares e não-lineares com dois pontos. A possibilidade de uma transformação de problemas de física-matemática para equações integrais é o conceito fundamental das funções de Green, porém desde o tempo de Hilbert, a função de Green tem sido entendida como um objeto determinado por um certo conjunto de axiomas [7].

Seja o seguinte problema de valor de contorno

$$\begin{cases} p_0(t)\ddot{u} + p_1(t)\dot{u} + p_2(t)u = f(t), \quad t \in [a,b] \\ B_1[u] = \gamma_1, \quad B_2[u] = \gamma_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $p_0, p_1, p_2, f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e γ_1 e γ_2 são constantes.

Definição 2.1 *Dizemos que uma função $G : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de Função de Green do problema* (2.1) *se satisfaz as seguintes propriedades:*

1) *G é contínua em $[a,b] \times [a,b]$.*

2) *G satisfaz a equação homogênea associada à* (2.1).

3) *G satisfaz as condições de contorno de* (2.1).

4) $\dfrac{\partial G(t,s)}{\partial t}$ *é contínua em cada um dos triângulos $a \leq t \leq s \leq b$ e $a \leq s \leq t \leq b$. Além disso a derivada primeira de G com relação a t tem um salto em $t = s$*

$$\frac{\partial G(s^+, s)}{\partial t} - \frac{\partial G(s^-, s)}{\partial t} = \frac{1}{p_0(t)}.$$

2.1 Problemas lineares

Nesta seção vamos começar a estudar problemas de valor de contorno do tipo

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, & u(b) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

sendo $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $a < b$.

O seguinte resultado garante a existência da função de Green para o o problema (2.2).

Teorema 2.1.1 *A Função de Green para o problema* (2.2) *é dada por*

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & a \leq s \leq t \leq b \\ \dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & a \leq t \leq s \leq b, \end{cases} \tag{2.3}$$

e a solução de (2.2) *é dada por*

$$u(t) = \int_a^b G_2(t,s) f(s) ds. \tag{2.4}$$

Demonstração. Pelo exemplo 1.1, temos que a solução do problema (2.2) é dada por (2.4), então basta provarmos que G_2 é uma função de Green, ou seja, verificar se G_2 cumpre as 4 propriedades para ser uma função de Green.

1) Claramente vemos que G_2 é contínua em $[a,b] \times [a,b]$.

2) G_2 satisfaz a equação homogênea associada à (2.2).

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a-s}{b-a}\right) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\frac{b-s}{b-a}\right) = 0. \end{cases}$$

3) G_2 satisfaz as condições de contorno $G_2(a,s) = G_2(b,s) = 0$

$$G_2(a,s) = \frac{(a-a)(b-s)}{b-a} = 0, \quad a \leq t \leq s \leq b$$
$$G_2(b,s) = \frac{(s-a)(b-b)}{b-a} = 0, \quad a \leq s \leq t \leq b.$$

4) $\dfrac{\partial G_2(t,s)}{\partial t}$ é contínua em cada um dos triângulos $a \leq t \leq s \leq b$ e $a \leq s \leq t \leq b$. Além disso a derivada primeira de G_2 com relação a t tem um salto em $t = s$

$$\frac{\partial G_2(s^+,s)}{\partial t} - \frac{\partial G_2(s^-,s)}{\partial t} = \frac{1}{p_0(t)}.$$

Como $\ddot{u} = -f(t)$ então temos que $p_0(t) = -1$. Vejamos

$$\frac{\partial G_2(s^+,s)}{\partial t} = \lim_{\substack{t\to s\\ t>s}} \frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t} = \lim_{t\to s} \frac{a-s}{b-a} = \frac{a-s}{b-a}$$

$$\frac{\partial G_2(s^-,s)}{\partial t} = \lim_{\substack{t\to s\\ t<s}} \frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t} = \lim_{t\to s} \frac{b-s}{b-a} = \frac{b-s}{b-a}$$

logo

$$\frac{\partial G_2(s^+,s)}{\partial t} - \frac{\partial G_2(s^-,s)}{\partial t} = \frac{a-s}{b-a} - \frac{b-s}{b-a} = \frac{a-b}{b-a} = -1.$$

Como G_2 satisfaz as propriedades 1 à 4, então G_2 é a função de Green para o (2.2). Observemos que G_2 é simétrica, ou seja, $G_2(t,s) = G_2(s,t)$. ■

Exemplo 2.1 *Determine a solução do problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{u} + \operatorname{sen}(t) = 0, & t \in [0,1] \\ u(0) = 0, & u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Pelo Teorema 2.1.1 temos que a função de Green para o problema (2.5) é

$$G_2(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

e que sua solução é dada por

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^1 G_2(t,s)\mathrm{sen}(s)ds \\
&= \int_0^t [s(1-t)]\mathrm{sen}(s)ds + \int_t^1 [t(1-s)]\mathrm{sen}(s)ds \\
&= (1-t)\int_0^t s\mathrm{sen}(s)ds + t\int_t^1 (1-s)\mathrm{sen}(s)ds \\
&= (1-t)\left[\mathrm{sen}(s) - s\cos(s)\right]_0^t + t\left[-\mathrm{sen}(s) + s\cos(s) - \cos(s)\right]_t^1 \\
&= \mathrm{sen}(t) - t\mathrm{sen}1.
\end{aligned}
$$

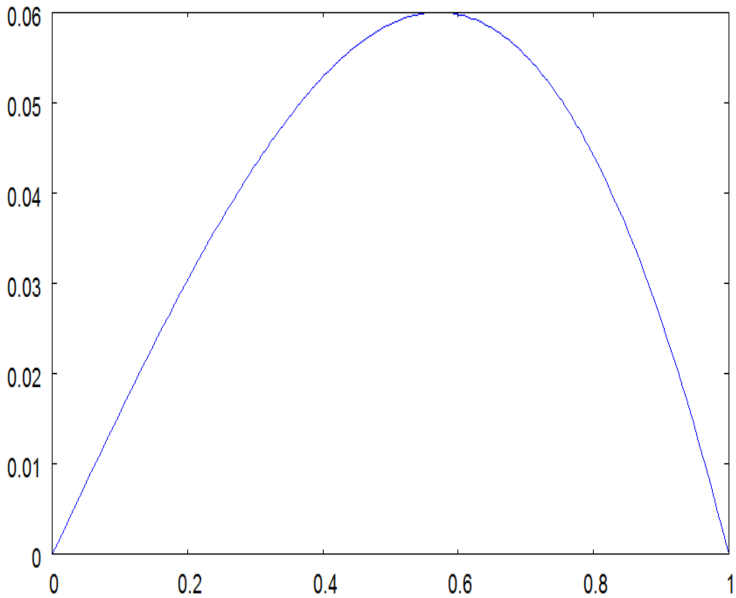

Figura 2.1: gráfico da solução de (2.5).

Teorema 2.1.2 *Seja $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua, a função de Green para o problema*

$$
\begin{cases}
\ddot{u} + u + f(t) = 0, & t\in[0,1] \\
u(0)=0, \quad u(1)=0,
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

é a função $H_2 : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$H_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(s)\text{sen}(1-t)}{\text{sen}1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \\ \dfrac{\text{sen}(t)\text{sen}(1-s)}{\text{sen}1}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

e a solução do problema (2.6) *é dada por*

$$u(t) = \int_0^1 H_2(t,s)f(s)ds. \tag{2.8}$$

Demonstração. Pelo exemplo 1.2, temos que a solução do problema (2.6) é dada por (2.8), então basta provarmos que H_2 é uma função de Green, ou seja, verificar se H_2 cumpre as 4 propriedades para ser uma função de Green.

1) Claramente vemos que H_2 é contínua em $[0,1] \times [0,1]$.

2) H_2 satisfaz a equação homogênea associada à (2.6).

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial t^2}(t,s) + H_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{\text{sen}(s)\text{sen}(1-t)}{\text{sen}1}\right) + \dfrac{\text{sen}(s)\text{sen}(1-t)}{\text{sen}1} \\ \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{\text{sen}(t)\text{sen}(1-s)}{\text{sen}1}\right) + \dfrac{\text{sen}(t)\text{sen}(1-s)}{\text{sen}1} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\text{sen}(s)\text{sen}(1-t)}{\text{sen}1} + \dfrac{\text{sen}(s)\text{sen}(1-t)}{\text{sen}1} \\ \\ -\dfrac{\text{sen}(t)\text{sen}(1-s)}{\text{sen}1} + \dfrac{\text{sen}(t)\text{sen}(1-s)}{\text{sen}1} \end{cases}$$

$$= 0.$$

3) H_2 satisfaz as condições de contorno $H_2(0,s) = H_2(1,s) = 0$ para todo $s \in [0,1]$.

$$H_2(0,s) = \frac{\text{sen}(t)\text{sen}(1-s)}{\text{sen}1} = \frac{\text{sen}(0)\text{sen}(1-s)}{\text{sen}1} = 0$$
$$H_2(1,s) = \frac{\text{sen}(s)\text{sen}(1-t)}{\text{sen}1} = \frac{\text{sen}(s)\text{sen}(0)}{\text{sen}1} = 0.$$

4) $\dfrac{\partial H_2(t,s)}{\partial t}$ é contínua em cada um dos triângulos $0 \leq t \leq s \leq 1$ e $0 \leq s \leq t \leq 1$. Além disso a derivada primeira de H_2 com relação a t tem um salto

$$\frac{\partial H_2(s^+,s)}{\partial t} - \frac{\partial H_2(s^-,s)}{\partial t} = -1.$$

Vejamos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_2(s^+,s)}{\partial t} &= \lim_{\substack{t \longrightarrow s \\ t>s}} \frac{\partial H_2(t,s)}{\partial t} &= -\lim_{t \longrightarrow s} \frac{\operatorname{sen}(s)\cos(1-t)}{\operatorname{sen}1} = -\frac{\operatorname{sen}(s)\cos(1-s)}{\operatorname{sen}1} \\
\frac{\partial H_2(s^-,s)}{\partial t} &= \lim_{\substack{t \longrightarrow s \\ t<s}} \frac{\partial H_2(t,s)}{\partial t} &= \lim_{t \longrightarrow s} \frac{\cos(t)\operatorname{sen}(1-s)}{\operatorname{sen}1} = \frac{\cos(s)\operatorname{sen}(1-s)}{\operatorname{sen}1}
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_2(s^+,s)}{\partial t} - \frac{\partial H_2(s^-,s)}{\partial t} &= -\frac{\operatorname{sen}(s)\cos(1-s)}{\operatorname{sen}1} - \frac{\cos(s)\operatorname{sen}(1-s)}{\operatorname{sen}1} \\
&= -\frac{\operatorname{sen}1}{\operatorname{sen}1} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Como H_2 satisfaz as 4 propriedades acima, então H_2 é uma função de Green. ■

Teorema 2.1.3 *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, a função de Green para o problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, \quad \dot{u}(b) = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

é a função $K_2 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$K_2(t,s) = \begin{cases} s-a, & a \leq s \leq t \leq b \\ t-a, & a \leq t \leq s \leq b, \end{cases} \tag{2.10}$$

e a solução do problema (2.9) *é*

$$u(t) = \int_a^b K_2(t,s) f(s) ds. \tag{2.11}$$

Demonstração. Pelo exemplo 1.3, temos que a solução do problema (2.9) é dada por (2.11), então basta provarmos que K_2 é uma função de Green, ou seja, verificar se K_2 cumpre as 4 propriedades para ser uma função de Green.

1) Claramente vemos que K_2 é contínua em $[a,b] \times [a,b]$.

2) K_2 satisfaz a equação homogênea associada à (2.9)

$$\frac{\partial^2 K_2}{\partial t^2}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(s-a) = \dfrac{\partial}{\partial t}(0) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(t-a) = \dfrac{\partial}{\partial t}(1) = 0. \end{cases}$$

3) K_2 satisfaz as condições de contorno $K_2(a,s) = \dot{K}_2(b,s) = 0$

$$K_2(a,s) = a - a = 0, \qquad a \leq t \leq s \leq b$$

$$\dot{K}_2(b,s) = 0, \qquad a \leq s \leq t \leq b.$$

4) $\dfrac{\partial K_2(t,s)}{\partial t}$ é contínua em cada um dos triângulos $a \leq t \leq s \leq b$ e $a \leq s \leq t \leq b$.
Além disso a derivada primeira de K_2 com relação à t tem um salto em $t = s$

$$\frac{\partial K_2(s^+,s)}{\partial t} - \frac{\partial K_2(s^-,s)}{\partial t} = \frac{1}{p_0(t)}.$$

Como $\ddot{u} = -f(t)$ então temos que $p_0(t) = -1$. Vejamos

$$\frac{\partial K_2(s^+,s)}{\partial t} = \lim_{\substack{t\to s\\ t>s}} \frac{\partial K_2(t,s)}{\partial t} = \lim_{t\to s} 0 = 0$$

$$\frac{\partial K_2(s^-,s)}{\partial t} = \lim_{\substack{t\to s\\ t<s}} \frac{\partial K_2(t,s)}{\partial t} = \lim_{t\to s} 1 = 1$$

logo

$$\frac{\partial K_2(s^+,s)}{\partial t} - \frac{\partial K_2(s^-,s)}{\partial t} = 0 - 1 = -1.$$

Portanto, K_2 é uma Função de Green para (2.9). ■

O seguinte resultado garante a existência e unicidade da Função de Green.

Teorema 2.1.4 *Se o problema de valor de contorno homogêneo* (1.20) *associado á* (1.21) *tem somente a solução trivial, então a Função de Green existe e é única.*

Demonstração. Suponhamos que u_1, u_2 são duas soluções linearmente independentes da equação homogênea de (1.20) tais que

$$B_1[u_1] = 0,$$

$$B_2[u_2] = 0.$$

Definamos $G : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$G(t,s) = \begin{cases} c_1(s)u_1(t), & a \leq t \leq s \\ c_2(s)u_2(t), & s \leq t \leq b \end{cases} \tag{2.12}$$

onde $c_1, c_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Como u_1 e u_2 são soluções fundamentais e pelo modo de que definimos G temos por propriedades:

1) G é contínua em $[a,b] \times [a,b]$, ou seja, $c_1(s)u_1(s) = c_2(s)u_2(s)$.

2) A derivada primeira de $G(t,s)$ com relação à t tem uma descontinuidade de salto em $t = s$ igual à 1.

$$\frac{\partial G(s^+,s)}{\partial t} - \frac{\partial G(s^-,s)}{\partial t} = c_2(s)\dot{u}_2(s) - c_1(s)\dot{u}_1(s) = 1.$$

3) Para qualquer $s \in [a,b]$ fixo, temos que $G(t,s)$ satisfaz a equação homogênea de (1.20)

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(c_1(s)u_1(t)\right) = c_1(s)\dot{u}_1(t) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(c_2(s)u_2(t)\right) = c_2(s)\dot{u}_2(t) \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(c_1(s)\dot{u}_1(t)\right) = c_1(s)\ddot{u}_1(t) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(c_2(s)\dot{u}_2(t)\right) = c_2(s)\ddot{u}_2(t). \end{cases} \tag{2.14}$$

Substituindo (2.13) e (2.14) em (1.20), e colocando c_1 e c_2 em evidência temos

$$\begin{cases} (\ddot{u}_1(t) + p(t)\dot{u}_1(t) + q(t)u_1(t))c_1(s) = 0 \\ \\ (\ddot{u}_2(t) + p(t)\dot{u}_2(t) + q(t)u_2(t))c_2(s) = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Como u_1, u_2 são soluções da equação homogênea de (1.20) então

$$\begin{cases} \ddot{u}_1(t) + p(t)\dot{u}_1(t) + q(t)u_1(t) = 0 \\ \ddot{u}_2(t) + p(t)\dot{u}_2(t) + q(t)u_2(t) = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Logo G satisfaz a equação homogênea de (1.20).

4) Para qualquer $s \in [a, b]$ fixo, temos que $G(t, s)$ satisfaz as condições de contorno de (1.20)

$$B_1[c_1u_1] = c_1(t)B_1(u_1) = 0$$

$$B_2[c_2u_2] = c_2(t)B_2(u_2) = 0.$$

Logo existe uma função G que tem as propriedades da Função de Green de 1) à 4). Mostremos agora que essa função G é única.
Pela propriedade 1) temos que

$$c_1(s)u_1(s) - c_2(s)u_2(s) = 0. \tag{2.17}$$

Pela propriedade 2) temos que

$$c_2(s)\dot{u}_2(s) - c_1(s)\dot{u}_1(s) = 1. \tag{2.18}$$

Juntando as equações (2.17) e (2.18) temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1(s)u_1(s) - c_2(s)u_2(s) = 0 \\ c_2(s)\dot{u}_2(s) - c_1(s)\dot{u}_1(s) = 1. \end{cases} \tag{2.19}$$

Colocando o sistema (2.19) na forma matricial Ac=b

$$\begin{pmatrix} u_2(t) & u_1(t) \\ \dot{u}_2(t) & \dot{u}_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Temos que $det(A) = W[u_2, u_1]$ e como u_1, u_2 são soluções linearmente independentes da equação homogênea de (1.20), então $det(A) \neq 0$, ou seja, o sistema (2.19) possui uma única solução. Logo G é determinada unicamente por c_1, c_2.

Portanto provamos que existe e é única uma função de Green para um problema homogêneo. ■

Exemplo 2.2 *Mostraremos agora que não existe uma função de Green para um problema de valor de contorno com a condição de Neumann.*

Considerando o seguinte problema

$$\begin{cases} \ddot{u} = -f(t), & t \in [a, b] \\ \dot{u}(a) = 0, \quad \dot{u}(b) = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Temos que uma solução da equação homogênea associada à (2.20) é dada por

$$u(t) = At + B, \tag{2.21}$$

onde A, B são constantes quaisquer. Derivando (2.21), temos

$$\dot{u}(t) = A.$$

Aplicando as condições de contorno de (2.20), temos

$$\begin{cases} \dot{u}(a) = 0 \\ \dot{u}(b) = 0 \end{cases} \Longrightarrow A = 0.$$

Substituindo A em (2.21), temos

$$u(t) = B.$$

Então para qualquer $t \in [a, b]$ a solução da equação homogênea associada à (2.20) será $u(t) = B$, onde B é uma constante qualquer. Como (2.20) não possui somente a solução trivial, então pelo Teorema 2.1.4 o problema (2.20) não possui uma função de Green.

2.2 Problemas não-lineares

Consideremos agora o seguinte problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \ddot{u} + g(t,u) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, \quad u(b) = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

onde $g : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua não-linear e u que depende de t é uma função desconhecida.

Teorema 2.2.1 *A função de Green para o problema* (2.22) *é dada por*

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & a \leq s \leq t \leq b \\ \dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & a \leq t \leq s \leq b \end{cases} \tag{2.23}$$

e a solução do problema (2.22) *é*

$$u(t) = \int_a^b G_2(t,s)g(s,u)ds. \tag{2.24}$$

Demonstração. Integrando (2.22) de 0 até t tem-se

$$\int_0^t \ddot{u}(s)ds = \int_0^t (-g(s,u(s)))ds$$

$$\dot{u}(t) - \dot{u}(0) = -\int_0^t g(s,u(s))ds$$

$$\dot{u}(t) = \dot{u}(0) - \int_0^t g(s,u(s))ds$$

Integrando novamente esta última equação de 0 até t tem-se

$$\int_0^t \dot{u}(s)ds = \int_0^t \dot{u}(0)ds - \int_0^t \left[\int_0^s g(x,u(x))dx\right] ds$$

$$u(t) - u(0) = \dot{u}(0)t - \int_0^t \left[\int_0^s g(x,u(x))dx\right] ds$$

$$u(t) = u(0) + \dot{u}(0)t - \int_0^t \left[\int_0^s g(x,u(x))dx\right] ds.$$

Fazendo $c_1 = u(0)$ e $c_2 = \dot{u}(0)$ a última equação tem a forma

$$u(t) = c_1 + c_2 t - \int_0^t \left[\int_0^s g(x, u(x))dx \right] ds. \tag{2.25}$$

Definamos

$$J = \int_0^t \left[\int_0^s g(x, u(x))dx \right] ds, \tag{2.26}$$

fazendo $z = \int_0^s g(x, u(x))dx$, temos que (2.26) tem a forma

$$J = \int_0^t z ds.$$

Fazendo integração por partes, nesta última igualdade temos

$$\begin{aligned} J &= zs\Big|_0^t - \int_0^t s\dot{z}ds \\ &= t\int_0^t g(x, u(x))dx - \int_0^t sg(s, u(s))ds \\ &= \int_0^t (t-s)g(s, u(s))ds. \end{aligned}$$

Substituindo (2.26) em (2.25) temos que a solução geral de (2.22) pode ser dada por

$$u(t) = c_1 + c_2 t - \int_0^t (t-s)g(s, u(s))ds. \tag{2.27}$$

Aplicando as condições de contorno de (2.22) na solução (2.27), obtemos

$$c_1 = -ac_2 + \int_0^a (a-s)g(s, u(s))ds$$

e

$$c_2 = \int_0^b \frac{(b-s)g(s, u(s))ds}{b-a} - \int_0^a \frac{(a-s)g(s, u(s))ds}{b-a}.$$

Sustituindo as constantes c_1 e c_2 em (2.27)

$$
\begin{aligned}
u(t) = & -\int_0^b \frac{a(b-s)g(s,u(s))}{b-a}ds + \int_0^a \frac{b(a-s)g(s,u(s))}{b-a}ds + \int_0^b \frac{t(b-s)g(s,u(s))}{b-a}ds + \\
& -\int_0^a \frac{t(a-s)g(s,u(s))}{b-a}ds - \int_0^t (t-s)g(s,u(s))ds \\
= & -\int_0^t \frac{a(b-s)g(s,u(s))}{b-a}ds - \int_t^b \frac{a(b-s)g(s,u(s))}{b-a}ds + \int_0^t \frac{b(a-s)g(s,u(s))}{b-a}ds \\
& + \int_t^a \frac{b(a-s)g(s,u(s))}{b-a}ds + \int_0^t \frac{t(b-s)g(s,u(s))}{b-a}ds + \int_t^b \frac{t(b-s)g(s,u(s))}{b-a}ds \\
& - \int_0^t \frac{t(a-s)g(s,u(s))}{b-a}ds - \int_t^a \frac{t(a-s)g(s,u(s))}{b-a}ds + \int_0^t \frac{(-tb-sb+at-as)g(s,u(s))}{b-a}ds \\
= & \int_0^t \frac{[-ab+as+ab-bs+tb-ts-at+ts-tb+bs+at-as]g(s,u(s))}{b-a}ds + \\
& + \int_t^b \frac{[a(s-b)+t(b-s)]g(s,u(s))}{b-a}ds + \int_t^a \frac{[b(a-s)-t(a-s)]g(s,u(s))}{b-a}ds \\
= & \int_a^t \frac{[(s-a)(b-t)]g(s,u(s))}{b-a}ds + \int_t^b \frac{[(t-a)(b-s)]g(s,u(s))}{b-a}ds.
\end{aligned}
$$

Definindo a função $G_2 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$
G_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & a \leq s \leq t \leq b \\ \dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & a \leq t \leq s \leq b. \end{cases} \tag{2.28}
$$

Assim, podemos escrever a solução geral da equação (2.22) como

$$
u(t) = \int_a^b G_2(t,s)g(s,u(s))ds. \tag{2.29}
$$

Observemos que a função G_2 do problema não-linear é a mesma de um problema linear, logo possui as mesmas propriedades para ser uma função de Green. ■

Capítulo 3

Funções de Green para problemas não-clássicos

Recentemente, os problemas de valor de contorno não-clássicos, também conhecidos como problemas de valor de contorno com três pontos, têm sido aplicados com grande potencial em física, química, biologia, etc. Um bom exemplo é o uso desses problemas como um modelo para a resposta de uma membrana esférica em difusão não-linear gerada por fontes não-lineares, e na teoria do reator químico [6].

Neste capítulo definiremos Funções de Green para problemas de valor de contorno de segunda ordem lineares e não-lineares com três pontos e exemplos. Os teoremas e corolários deste capítulo podem ser vistos em [9].

3.1 Problemas lineares

Para entendermos melhor este tipo de problema de valor de contorno não-clássico, vamos começar usando o seguinte resultado.

Teorema 3.1.1 *Seja o problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, \quad t \in [a,b] \\ u(a) = ku(\eta), \quad u(b) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\eta \in (a,b)$ e k são números dados e $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Suponha $k(b-\eta) \neq b-a$, então a Função de Green para o problema (3.1) é

$$G_3(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)} G_2(\eta,s), \tag{3.2}$$

onde

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & a \leq s \leq t \leq b \\ \dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & a \leq t \leq s \leq b. \end{cases} \tag{3.3}$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.1 sabemos que (3.3) é a Função Green para o problema de 2ª ordem linear com dois pontos

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, & u(b) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

e que a solução desse problema é

$$w(t) = \int_a^b G_2(t,s) f(s) ds. \tag{3.5}$$

Aplicando a condição de contorno de (3.4) em (3.5) temos que

$$\begin{cases} w(a) = 0 \\ w(b) = 0 \\ w(\eta) = \displaystyle\int_a^b G_2(\eta,s) f(s) ds. \end{cases}$$

Supondo que $u(t)$ é solução do problema (3.1) e como $w(t)$ é solução de (3.4), então $u(t)$ e $w(t)$ são soluções da equação homogênea

$$\ddot{u}(t) = 0, \tag{3.6}$$

logo $z = u - w$ também é solução de (3.6).

$$
\begin{aligned}
\ddot{z}(t) &= 0 \\
\ddot{u}(t) - \ddot{w}(t) &= 0 \\
\ddot{u}(t) &= \ddot{w}(t) \\
\int_0^t \ddot{u}(s)ds &= \int_0^t \ddot{w}(s)ds \\
\dot{u}(t) - \dot{u}(0) &= \dot{w}(t) - \dot{w}(0) \\
\dot{u}(t) &= \dot{u}(0) + \dot{w}(t) - \dot{w}(0).
\end{aligned}
$$

Fazendo $d = \dot{u}(0) - \dot{w}(0)$ uma constante, temos

$$
\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= d + \dot{w}(t) \\
\int_0^t \dot{u}(s)ds &= \int_0^t dds + \int_0^t \dot{w}(s)ds \\
u(t) - u(0) &= td + w(t) - w(0) \\
u(t) &= td + w(t) + u(0) - w(0).
\end{aligned}
$$

Fazendo $c = u(0) - w(0)$ constante

$$
u(t) = w(t) + c + td. \tag{3.7}
$$

Determinemos as constantes c e d, aplicando a, b e η em (3.7)

$$
\begin{cases}
u(a) = w(a) + c + ad = c + ad \\
u(b) = w(b) + c + bd = c + bd \\
u(\eta) = w(\eta) + c + d\eta.
\end{cases} \tag{3.8}
$$

Igualando (3.8) com as condições de contorno de (3.1), temos

$$
\begin{cases}
u(a) = u(a) \Leftrightarrow c + ad = ku(\eta) \Rightarrow c + ad = k[w(\eta) + c + d\eta] \\
u(b) = u(b) \Leftrightarrow c + bd = 0,
\end{cases}
$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} c + ad = k[w(\eta) + c + d\eta] \\ c + bd = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, descobrimos

$$c = \frac{kbw(\eta)}{b - a - k(b-\eta)}$$

$$d = \frac{-kw(\eta)}{b - a - k(b-\eta)}.$$

Substituindo c e d em (3.7), obtemos

$$u(t) = w(t) + \left[\frac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)}\right] w(\eta)$$

$$u(t) = \int_a^b G_2(t,s)f(s)ds + \left[\frac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)}\right] \int_a^b G_2(\eta,s)f(s)ds$$

$$u(t) = \int_a^b \left[G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)} G_2(\eta,s)\right] f(s)ds.$$

Chamando

$$G_3(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)} G_2(\eta,s),$$

então temos que a solução de (3.1) é

$$u(t) = \int_a^b G_3(t,s)f(s)ds. \tag{3.9}$$

Agora verificaremos se G_3 satisfaz as 4 propriedades da função de Green:

1) G_3 é contínua em $[a,b] \times [a,b]$.

   Pelo Teorema 2.1.1 G_2 é uma Função de Green para todo $t, s, \eta \in [a,b]$, logo G_2 é contínua. Por hipótese temos que $k(b-\eta) \neq b-a$, portanto G_3 é contínua em $[a,b] \times [a,b]$.

2) G_3 satisfaz a equação homogênea associada à eq. (3.1)

$$\frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a} + \dfrac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)}G_2(\eta,s)\right) \\ \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a} + \dfrac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)}G_2(\eta,s)\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{a-s}{b-a} - \dfrac{k}{[b-a-k(b-\eta)]}G_2(\eta,s)\right) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{b-s}{b-a} - \dfrac{k}{[b-a-k(b-\eta)]}G_2(\eta,s)\right) \end{cases}$$

$$= 0.$$

3) G_3 satisfaz as condições de contorno $G_3(a,s) = kG_3(\eta,s)$ e $G_3(b,s) = 0$.

Temos que

$$G_3(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)}G_2(\eta,s).$$

Aplicando em $t = \eta$, temos

$$G_3(\eta,s) = \left[\frac{b-a}{b-a-k(b-\eta)}\right] G_2(\eta,s). \tag{3.10}$$

Aplicando em $t = a$, temos

$$G_3(a,s) = G_2(a,s) + \frac{k(b-a)}{b-a-k(b-\eta)}G_2(\eta,s).$$

Como $G_2(a,s) = 0$ e substituindo por (3.10), temos

$$G_3(a,s) = kG_3(\eta,s).$$

Aplicando em $t = b$, temos

$$G_3(b,s) = G_2(b,s) + \frac{k(b-b)}{b-a-k(b-\eta)}G_2(\eta,s).$$

Como $G_2(b,s) = 0$, temos

$$G_3(b,s) = 0.$$

4) $\dfrac{\partial G_3}{\partial t}$ é contínua em cada um dos triângulos $a \leq t \leq s \leq b$ e $a \leq s \leq t \leq b$. Além disso a derivada primeira de G_3 com relação a t tem um salto em $t = s$

$$\frac{\partial G_3(s^+, s)}{\partial t} - \frac{\partial G_3(s^-, s)}{\partial t} = \frac{1}{p_0(t)}$$

Como $\ddot{u} = -f(t) \Rightarrow -\ddot{u} = f(t) \Rightarrow p_0(t) = -1$.

Vejamos

$$\frac{\partial G_3(s^+, s)}{\partial t} = \lim_{\substack{t \to s \\ t > s}} \frac{\partial G_3(t, s)}{\partial t} = \frac{a - s}{b - a} - \frac{k}{b - a - k(b - \eta)} G_2(\eta, s)$$

$$\frac{\partial G_3(s^-, s)}{\partial t} = \lim_{\substack{t \to s \\ t < s}} \frac{\partial G_3(t, s)}{\partial t} = \frac{b - s}{b - a} - \frac{k}{b - a - k(b - \eta)} G_2(\eta, s).$$

Logo,

$$\frac{\partial G_2(s^+, s)}{\partial t} - \frac{\partial G_2(s^-, s)}{\partial t} = \frac{a - s}{b - a} - \frac{b - s}{b - a} = \frac{a - b}{b - a} = -1.$$

■

Corolário 3.1 *Se $k(b - \eta) \neq b - a$, então o problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a, b] \\ u(a) = ku(\eta), & u(b) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

tem uma única solução

$$u(t) = \int_a^b G_3(t, s) f(s) ds.$$

Demonstração. É óbvio que $u(t)$ satisfaz o problema (3.1), supomos então que $v(t)$ também satisfaça este problema, logo

$$z(t) = u(t) - v(t) \tag{3.12}$$

satisfaz a equação homogênea associada à (3.1) para todo $t \in [a, b]$. Logo

$$\ddot{z}(t) = 0 \tag{3.13}$$

com isso temos que a solução é da forma

$$z(t) = tc_1 + c_2. \tag{3.14}$$

Aplicando os pontos a, b e $\eta \in [a, b]$, temos em (3.14)

$$\begin{cases} z(a) = ac_1 + c_2 \\ z(b) = bc_1 + c_2 \\ z(\eta) = \eta c_1 + c_2 \end{cases}$$

Aplicando as condições de contorno de (3.11) em (3.12), temos

$$\begin{cases} z(a) = u(a) - v(a) = ku(\eta) - kv(\eta) = k[(u - v)(\eta)] = kz(\eta) \\ z(b) = u(b) - v(b) = 0. \end{cases}$$

Igualando esses dois útimos sistemas, temos

$$\begin{cases} ac_1 + c_2 = k(\eta c_1 + c_2) \\ bc_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, caímos em contradição com a hipótese de que $k(b-\eta) \neq b-a$, logo a única solução é $c_1 = c_2 = 0$. Substituindo c_1, c_2 em (3.14) temos

$$\begin{aligned} z(t) &= 0, t \in [a, b] \\ u(t) - v(t) &= 0, t \in [a, b] \\ u(t) &= v(t), t \in [a, b]. \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.1 *Determine a Função de Green e a solução do problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + \operatorname{sen}(t) = 0, & t \in [0, 1] \\ u(0) = -\dfrac{3}{2} u\left(\dfrac{1}{3}\right), & u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Temos que $k = -\dfrac{3}{2}$ e $\eta = \dfrac{1}{3}$ e que pelo Teorema 3.1.1 a sua Função de Green é dada por

$$G_3(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)} G_2(\eta,s),$$
$$G_3(t,s) = G_2(t,s) - \frac{3}{4}(1-t) G_2(\eta,s)$$

e a única solução é

$$u(t) = \int_0^1 G_3(t,s)\operatorname{sen}(s)ds$$
$$u(t) = \int_0^1 G_2(t,s)\operatorname{sen}(s)ds - \frac{3}{4}(1-t)\int_0^1 G_2(\eta,s)\operatorname{sen}(s)ds.$$

Fazendo

$$u_1(t) = \int_0^1 G_2(t,s)\operatorname{sen}(s)ds \quad \text{e} \quad u_2(t) = \int_0^1 G_2(\eta,s)\operatorname{sen}(s)ds$$

temos

$$u(t) = u_1(t) - \frac{3}{4}(1-t)u_2(t). \tag{3.16}$$

Determinemos $u_1(t) = \displaystyle\int_0^1 G_2(t,s)\operatorname{sen}(s)ds$.

Uma vez que

$$G_2(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \le s \le t \le 1 \\ t(1-s), & 0 \le t \le s \le 1 \end{cases},$$

segue que

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int_0^t [s(1-t)]\operatorname{sen}(s)ds + \int_t^1 [t(1-s)]\operatorname{sen}(s)ds \\ &= (1-t)\int_0^t s\operatorname{sen}(s)ds + t\int_t^1 (1-s)\operatorname{sen}(s)ds \\ &= (1-t)\left[\operatorname{sen}(s) - s\cos(s)\right]_0^t + t\left[-\operatorname{sen}(s) + s\cos(s) - \cos(s)\right]_t^1 \\ &= \operatorname{sen}(t) - t\operatorname{sen}1. \end{aligned}$$

Portanto

$$u_1(t) = \text{sen}(t) - t\text{sen}1. \tag{3.17}$$

Determinemos

$$u_2(t) = \int\limits_0^1 G_2(\eta, s)\text{sen}(s)ds = \int\limits_0^1 G_2\left(\frac{1}{3}, s\right)\text{sen}(s)ds.$$

Uma vez que $G_2(\frac{1}{3}, s) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{3}(1-s), & 0 \leq \frac{1}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$, tem-se

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{2s}{3}\text{sen}(s)ds + \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 (1-s)\text{sen}(s)ds \\ &= \frac{2}{3}\left[\text{sen}(s) - s\cos(s)\right]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left[-\text{sen}(s) + s\cos(s) - \cos(s)\right]_{\frac{1}{3}}^1 \\ &= \frac{2}{3}\text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{9}\cos\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\text{sen}(1) + \frac{1}{3}\text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{9}\cos\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\text{sen}1. \end{aligned}$$

Portanto

$$u_2(t) = \text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\text{sen}1. \tag{3.18}$$

Substituindo (3.17) e (3.18) em (3.16), temos

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{sen}(t) - t\text{sen}1 - \frac{3}{4}(1-t)\left[-\frac{1}{3}\text{sen}1 + \text{sen}\left(\frac{1}{3}\right)\right] \\ u(t) &= \text{sen}(t) - \frac{5t}{4}\text{sen}1 + \frac{1}{4}\text{sen}1 - \frac{3}{4}\text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3t}{4}\text{sen}\left(\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

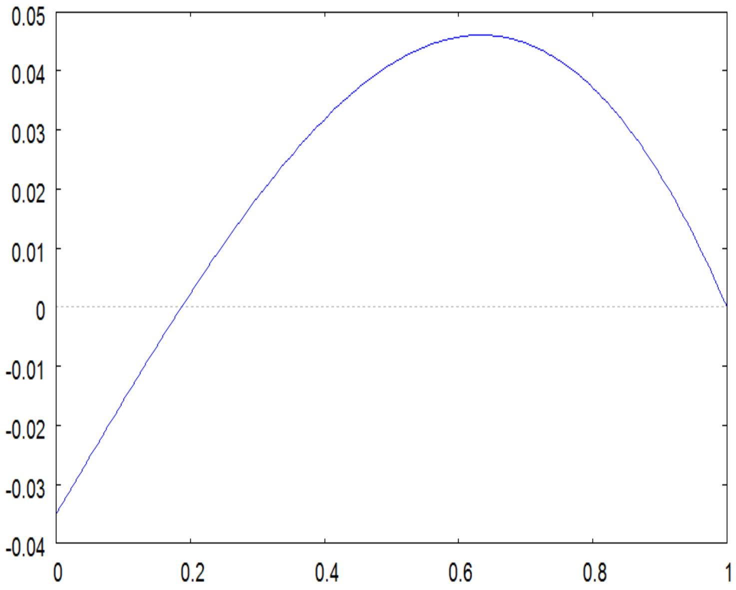

Figura 3.1: gráfico da solução de (3.15).

Teorema 3.1.2 *Suponha $k(\eta - a) \neq b - a$, então a Função de Green para o problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, & u(b) = ku(\eta) \end{cases} \tag{3.19}$$

é

$$G_4(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(t-a)}{b-a-k(\eta-a)} G_2(\eta, s), \tag{3.20}$$

onde $G_2(t,s)$ é como em (3.3).

Demonstração. Como feito na demonstração do Teorema 3.1.1, temos por hipótese que $u(t)$ pode ser escrito como

$$u(t) = w(t) + c + td.$$

Aplicando a, b e η na equação acima, obtemos

$$\begin{cases} u(a) = w(a) + c + ad = c + ad \\ u(b) = w(b) + c + bd = c + bd \\ u(\eta) = w(\eta) + c + \eta d. \end{cases}$$

Igualando com as condições de contorno de (3.19), temos

$$\begin{cases} u(a) = u(a) \Leftrightarrow c + ad = 0 \\ u(b) = u(b) \Leftrightarrow c + bd = ku(\eta) \Rightarrow c + bd = k[w(\eta) + c + \eta d], \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} c + ad = 0 \\ c + bd = k[w(\eta) + c + \eta d]. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema descobrimos

$$c = \frac{-akw(\eta)}{b - a - k(\eta - a)},$$

$$d = \frac{kw(\eta)}{b - a - k(\eta - a)}.$$

Substituindo c e d em $u(t) = w(t) + c + td$, obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &= w(t) + \left[\frac{k(t-a)}{b - a - k(\eta - a)}\right] w(\eta) \\ &= \int_a^b G_2(t,s) f(s) ds + \left[\frac{k(t-a)}{b - a - k(\eta - a)}\right] \int_a^b G_2(\eta, s) f(s) ds \\ &= \int_a^b \left[G_2(t,s) + \frac{k(t-a)}{b - a - k(\eta - a)} G_2(\eta, s)\right] f(s) ds. \end{aligned}$$

Chamando

$$G_4(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(t-a)}{b - a - k(\eta - a)} G_2(\eta, s),$$

temos que a solução de (3.19) é

$$u(t) = \int_a^b G_4(t,s) f(s) ds.$$

Não é difícil provar as 4 propriedades da função de Green para G_4. ■

Corolário 3.2 *Se $k(\eta - a) \neq b - a$, então o problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, & u(b) = ku(\eta) \end{cases} \tag{3.21}$$

tem uma única solução

$$u(t) = \int_a^b G_4(t,s)f(s)ds.$$

Demonstração. É óbvio que $u(t)$ satisfaz o problema (3.21), supomos então que $v(t)$ também satisfaça este problema. Logo,

$$z(t) = u(t) - v(t), \tag{3.22}$$

satisfaz a equação homogênea associada à (3.21) para todo $t \in [a,b]$. Logo,

$$\ddot{z}(t) = 0 \tag{3.23}$$

e portanto a solução é da forma

$$z(t) = tc_1 + c_2. \tag{3.24}$$

Aplicando os pontos a, b e $\eta \in [a,b]$ em (3.24) temos

$$\begin{cases} z(a) = ac_1 + c_2 \\ z(b) = bc_1 + c_2 \\ z(\eta) = \eta c_1 + c_2. \end{cases}$$

Aplicando as condições de contorno do problema (3.21) em (3.22), segue

$$\begin{cases} z(a) = u(a) - v(a) = 0 \\ z(b) = u(b) - v(b) = ku(\eta) - kv(\eta) = k[(u-v)(\eta)] = kz(\eta). \end{cases}$$

Igualando esses dois útimos sistemas, temos

$$\begin{cases} ac_1 + c_2 = 0 \\ bc_1 + c_2 = k(\eta c_1 + c_2). \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, caímos em contradição com a hipótese de que $k(\eta - a) \neq b - a$, logo a única solução é $c_1 = c_2 = 0$. Substituindo em (3.24) temos

$$\begin{aligned} z(t) &= 0, t \in [a,b] \\ u(t) - v(t) &= 0, t \in [a,b] \\ u(t) &= v(t), t \in [a,b]. \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.2 *Determine a Função de Green e a solução do problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + \operatorname{sen}(t) = 0, & t \in [0,1] \\ u(0) = 0, & u(1) = -\dfrac{3}{2} u\left(\dfrac{1}{3}\right) \end{cases} \tag{3.25}$$

Temos $k = -\dfrac{3}{2}$ e $\eta = \dfrac{1}{3}$ e pelo Teorema 3.1.2 a sua Função de Green é dada por

$$\begin{aligned} G_4(t,s) &= G_2(t,s) + \frac{k(t-a)}{b-a-k(\eta - a)} G_2(\eta, s) \\ &= G_2(t,s) - tG_2(\eta, s) \end{aligned}$$

e a única solução é

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G_4(t,s)\operatorname{sen}(s)ds \\ &= \int_0^1 G_2(t,s)\operatorname{sen}(s)ds - t\int_0^1 G_2(\eta,s)\operatorname{sen}(s)ds. \end{aligned}$$

Fazendo

$$u_1(t) = \int_0^1 G_2(t,s)\operatorname{sen}(s)ds \qquad \text{e} \qquad u_2(t) = \int_0^1 G_2(\eta,s)\operatorname{sen}(s)ds$$

temos

$$u(t) = u_1(t) - tu_2(t). \tag{3.26}$$

Determinemos $u_1(t) = \displaystyle\int_0^1 G_2(t,s)\operatorname{sen}(s)ds$, onde

$$G_2(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int_0^t [s(1-t)]\text{sen}(s)ds + \int_t^1 [t(1-s)]\text{sen}(s)ds \\ &= (1-t)\int_0^t s\text{sen}(s)ds + t\int_t^1 (1-s)\text{sen}(s)ds \\ &= (1-t)\left[\text{sen}(s) - s\cos(s)\right]_0^t + t\left[-\text{sen}(s) + s\cos(s) - \cos(s)\right]_t^1 \\ &= \text{sen}(t) - t\text{sen}1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u_1(t) = \text{sen}(t) - t\text{sen}1. \tag{3.27}$$

Determinemos $u_2(t) = \int_0^1 G_2(\eta,s)\text{sen}(s)ds = \int_0^1 G_2\left(\frac{1}{3}, s\right)\text{sen}(s)ds$, onde

$$G_2(\tfrac{1}{3},s) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}s, & 0 \leq s \leq \eta \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{3}(1-s), & 0 \leq \eta \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{2s}{3}\text{sen}(s)ds + \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^1 (1-s)\text{sen}(s)ds \\ &= \frac{2}{3}\left[\text{sen}(s) - s\cos(s)\right]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left[-\text{sen}(s) + s\cos(s) - \cos(s)\right]_{\frac{1}{3}}^1 \\ &= \frac{2}{3}\text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{9}\cos\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\text{sen}1 + \frac{1}{3}\text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{9}\cos\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\text{sen}1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u_2(t) = \text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\text{sen}1. \tag{3.28}$$

Substituindo (3.27) e (3.28) em (3.26), temos

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathrm{sen}(t) - t\mathrm{sen}1 - t\left[-\frac{1}{3}\mathrm{sen}1 + \mathrm{sen}\left(\frac{1}{3}\right)\right] \\ &= \mathrm{sen}(t) - \frac{2t}{3}\mathrm{sen}1 - t\mathrm{sen}\left(\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

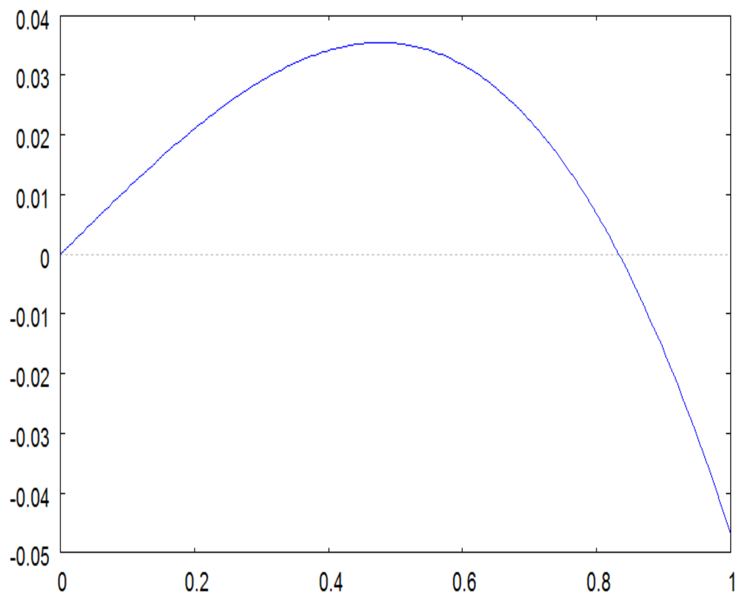

Figura 3.2: gráfico da solução de (3.25)

Teorema 3.1.3 *Suponha $b - a + k \neq 0$, então a Função de Green para o problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a, b] \\ u(a) = k\dot{u}(\eta), & u(b) = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

é

$$G_5(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta, s), \tag{3.30}$$

onde

$$\dot{G}_2(\eta, s) = \frac{\partial G_2}{\partial t}(\eta, s) = \begin{cases} \dfrac{a-s}{b-a}, & a \leq s \leq \eta, \\ \\ \dfrac{b-s}{b-a}, & \eta \leq s \leq b \end{cases} \tag{3.31}$$

e $G_2(t,s)$ é como em (3.3).

Demonstração. Como feito na demonstração do Teorema 3.1.1, temos por hipótese que $u(t)$ pode ser escrito como

$$u(t) = w(t) + c + td. \tag{3.32}$$

Aplicando a, b e η em (3.32), temos

$$\begin{cases} u(a) = w(a) + c + ad = c + ad \\ u(b) = w(b) + c + bd = c + bd \\ u(\eta) = w(\eta) + c + d\eta \Longrightarrow \dot{u}(\eta) = \dot{w}(\eta) + d. \end{cases}$$

Igualando com as condições de contorno de (3.29), temos

$$\begin{cases} u(a) = u(a) \Leftrightarrow c + ad = k\dot{u}(\eta) \Rightarrow c + ad = k(\dot{w}(\eta) + d) \\ u(b) = u(b) \Leftrightarrow c + bd = 0. \end{cases},$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} c + ad = k(\dot{w}(\eta) + d) \\ c + bd = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema descobrimos

$$c = \frac{bk\dot{w}(\eta)}{b - a + k},$$

$$d = \frac{-k\dot{w}(\eta)}{b - a + k}.$$

Substituindo c e d em (3.32) obtemos

$$u(t) = w(t) + \left[\frac{k(b-t)}{b-a+k}\right] \dot{w}(\eta)$$

$$u(t) = \int_a^b G_2(t,s) f(s) ds + \left[\frac{k(b-t)}{b-a+k}\right] \int_a^b \dot{G}_2(\eta,s) f(s) ds$$

$$u(t) = \int_a^b \left[G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s) \right] f(s)ds.$$

Chamando

$$G_5(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s).$$

Temos que a solução de (3.29) é

$$u(t) = \int_a^b G_5(t,s)f(s)ds.$$

Vejamos agora se G_5 satisfaz as 4 propriedades para da função de Green:

1) G_5 não é contínua em $[a,b] \times [a,b]$.

   Pelo Teorema 2.1.1 G_2 é uma Função de Green, logo G_2 é contínua para todo $t, s \in [a,b]$, porém $\dot{G}_2$ não é continua em $t = \eta$, pois os limites laterais são diferentes. Os limites laterais são iguais se, e somente se, $b = a$, o que contraria o fato do intervalo $[a,b]$ ser um intervalo não-degenerado. Portanto G_5 não é contínua em $[a,b] \times [a,b]$.

2) G_5 satisfaz a equação homogênea associada à (3.29)

$$\frac{\partial^2 G_5}{\partial t^2}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a} + \dfrac{k(b-t)}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s) \right) \\ \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a} + \dfrac{k(b-t)}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s) \right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{a-s}{b-a} - \dfrac{k}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s) \right) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{b-s}{b-a} - \dfrac{k}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s) \right) \end{cases}$$

$$= 0.$$

3) G_5 satisfaz as condições de contorno $G_5(a,s) = k\dot{G}_5(\eta,s)$ e $G_5(b,s) = 0$.

Temos que

$$G_5(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s). \tag{3.33}$$

Derivando (3.33) com relação a t no ponto $t = \eta$ temos

$$\dot{G}_5(\eta,s) = \frac{b-a}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s). \tag{3.34}$$

Aplicando $t = a$ em (3.33),

$$G_5(a,s) = G_2(a,s) + \frac{k(b-a)}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s).$$

Como $G_2(a,s) = 0$ e substituindo por (3.10),

$$G_5(a,s) = k\dot{G}_5(\eta,s).$$

Aplicando $t = b$ em (3.33),

$$G_5(b,s) = G_2(b,s) + \frac{k(b-b)}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s).$$

Como $G_2(b,s) = 0$ temos

$$G_5(b,s) = 0.$$

4) $\dfrac{\partial G_5(t,s)}{\partial t}$ é contínua em cada um dos triângulos $a \leq t \leq s \leq b$ e $a \leq s \leq t \leq b$.

Além disso a derivada primeira de G_5 com relação a t tem um salto

$$\frac{\partial G_5(s^+,s)}{\partial t} - \frac{\partial G_5(s^-,s)}{\partial t} = \frac{1}{p_0(t)}$$

Como $\ddot{u} = -f(t) \Rightarrow -\ddot{u} = f(t) \Rightarrow p_0(t) = -1$

Vejamos

$$\frac{\partial G_5(s^+,s)}{\partial t} = \lim_{\substack{t\to s\\ t>s}} \frac{\partial G_5(t,s)}{\partial t} = \frac{a-s}{b-a} - \frac{k}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s)$$

$$\frac{\partial G_5(s^-,s)}{\partial t} = \lim_{\substack{t\to s\\ t<s}} \frac{\partial G_5(t,s)}{\partial t} = \frac{b-s}{b-a} - \frac{k}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s).$$

Logo,

$$\frac{\partial G_5(s^+,s)}{\partial t} - \frac{\partial G_5(s^-,s)}{\partial t} = \frac{a-s}{b-a} - \frac{b-s}{b-a} = \frac{a-b}{b-a} = -1.$$

G_5 é chamada de função de Green Generalizada, pois não satisfaz as 4 propriedades da função de Green, entretanto temos que é solução do problema (3.29). ■

Corolário 3.3 *Se* $b - a + k \neq 0$, *então o problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = k\dot{u}(\eta), & u(b) = 0 \end{cases} \tag{3.35}$$

tem uma única solução

$$u(t) = \int_a^b G_5(t,s) f(s) ds.$$

Demonstração. É óbvio que $u(t)$ satisfaz o problema (3.35), supomos então que $v(t)$ também satisfaça este problema. Logo

$$z(t) = u(t) - v(t) \tag{3.36}$$

satisfaz a equação homogênea associada à (3.35) para todo $t \in [a,b]$. Logo

$$\ddot{z}(t) = 0. \tag{3.37}$$

Com isso temos que a solução é da forma

$$z(t) = tc_1 + c_2. \tag{3.38}$$

Fazendo $t = a, b, \eta$ em (3.38) temos

$$\begin{cases} z(a) = ac_1 + c_2 \\ z(b) = bc_1 + c_2 \\ z(\eta) = \eta c_1 + c_2 \Longrightarrow \dot{z}(\eta) = c_1. \end{cases}$$

Aplicando as condições de contorno do problema (3.35) em (3.36), temos

$$\begin{cases} z(a) = u(a) - v(a) = k\dot{z}(\eta) \\ z(b) = u(b) - v(b) = 0. \end{cases}$$

Igualando esses dois útimos sistemas, segue que

$$\begin{cases} z(a) = z(a) \Leftrightarrow ac_1 + c_2 = k\dot{z}(\eta) \\ z(b) = z(b) \Leftrightarrow bc_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, caímos em contradição com a hipótese de que $b-a+k \neq 0$, logo a única solução é $c_1 = c_2 = 0$. Substituindo em (3.38) temos

$$\begin{aligned} z(t) &= 0, t \in [a,b] \\ u(t) - v(t) &= 0, t \in [a,b] \\ u(t) &= v(t), t \in [a,b]. \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.3 *Determine a Função de Green e a solução do problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + \operatorname{sen}(t) = 0, & t \in [0,1] \\ u(0) = -\frac{3}{2}\dot{u}\left(\frac{1}{3}\right), & u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

Temos que $k = -\frac{3}{2}$ e $\eta = \frac{1}{3}$ e que pelo Teorema 3.1.3 a sua Função de Green é dada por

$$\begin{aligned} G_5(t,s) &= G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s), \\ &= G_2(t,s) + 3(1-t)\dot{G}_2(\eta,s) \end{aligned}$$

e a única solução é

$$u(t) = \int_0^1 G_5(t,s)\operatorname{sen}(s)ds$$

$$u(t) = \int_0^1 G_2(t,s)\operatorname{sen}(s)ds + (3-3t)\int_0^1 \dot{G}_2(\eta,s)\operatorname{sen}(s)ds.$$

Fazendo

$$u_1(t) = \int_0^1 G_2(t,s)\operatorname{sen}(s)ds \quad \text{e} \quad u_2(t) = \int_0^1 \dot{G}_2(\eta,s)\operatorname{sen}(s)ds$$

temos

$$u(t) = u_1(t) + (3-3t)u_2(t). \tag{3.40}$$

Determinemos $u_1(t) = \int\limits_0^1 G_2(t,s)\text{sen}(s)ds$, onde

$$G_2(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int\limits_0^t [s(1-t)]\text{sen}(s)ds + \int\limits_t^1 [t(1-s)]\text{sen}(s)ds \\ &= (1-t)\int\limits_0^t s\text{sen}(s)ds + t\int\limits_t^1 (1-s)\text{sen}(s)ds \\ &= (1-t)\left[\text{sen}(s) - s\cos(s)\right]_0^t + t\left[-\text{sen}(s) + s\cos(s) - \cos(s)\right]_t^1 \\ &= \text{sen}(t) - t\text{sen}1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u_1(t) = \text{sen}(t) - t\text{sen}1. \tag{3.41}$$

Determinemos $u_2(t) = \int\limits_0^1 \dot{G}_2(\frac{1}{3}, s)\text{sen}(s)ds$

$$\dot{G}_2(\tfrac{1}{3}, s) = \begin{cases} -s & 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \leq 1 \\ 1-s & 0 \leq \frac{1}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int\limits_0^{\frac{1}{3}} -s\text{sen}(s)ds + \int\limits_{\frac{1}{3}}^1 (1-s)\text{sen}(s)ds \\ &= -\left[\text{sen}(s) - s\cos(s)\right]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left[-\text{sen}(s) + s\cos(s) - \cos(s)\right]_{\frac{1}{3}}^1 \\ &= -\text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\right) - \text{sen}1 + \text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\right) + \cos\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{1}{3}\right) - \text{sen}1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u_2(t) = \cos\left(\frac{1}{3}\right) - \text{sen}1. \tag{3.42}$$

Substituindo (3.41) e (3.42) em (3.40), temos

$$u(t) = \text{sen}(t) - t\text{sen}1 + (3-3t)\left(\cos\left(\frac{1}{3}\right) - \text{sen}1\right)$$
$$u(t) = \text{sen}(t) + 2t\text{sen}1 - 3t\cos\left(\frac{1}{3}\right) + 3\cos\left(\frac{1}{3}\right) - 3\text{sen}1.$$

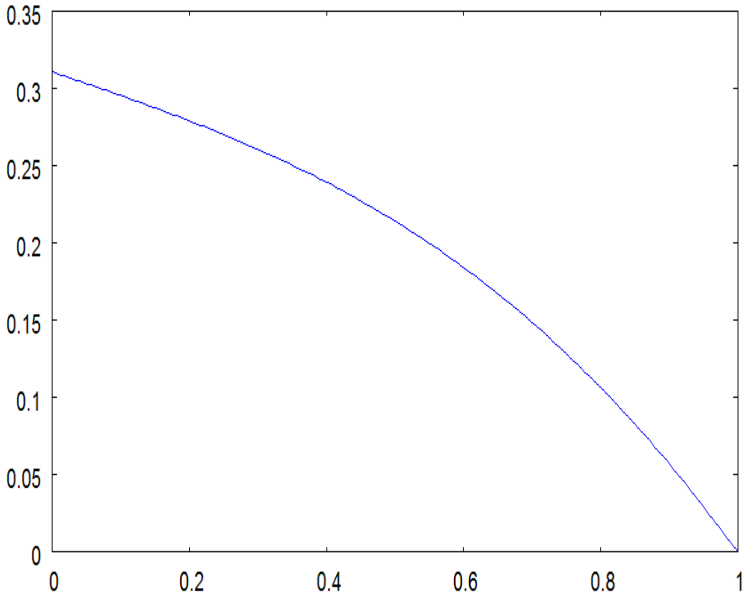

Figura 3.3: gráfico da solução de (3.39).

Teorema 3.1.4 *Suponha $k \neq b - a$, então a Função de Green para o problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, & u(b) = k\dot{u}(\eta) \end{cases} \tag{3.43}$$

é

$$G_6(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(t-a)}{b-a-k}\dot{G}_2(\eta,s), \tag{3.44}$$

onde $G_2(t,s)$ é como em (3.3) *e $\dot{G}_2(\eta,s)$ é como em* (3.31).

Demonstração. Como feito na demonstração do Teorema 3.1.1, temos por hipótese que $u(t)$ pode ser escrito como

$$u(t) = w(t) + c + td.$$

Aplicando a, b e η na equação acima, temos

$$\begin{cases} u(a) = w(a) + c + ad = c + ad \\ u(b) = w(b) + c + bd = c + bd \\ u(\eta) = w(\eta) + c + \eta \Longrightarrow \dot{u}(\eta) = \dot{w}(\eta) + d. \end{cases}$$

Igualando com as condições de contorno de (3.43), temos

$$\begin{cases} u(a) = u(a) \Leftrightarrow c + ad = 0 \\ u(b) = u(b) \Leftrightarrow c + bd = k\dot{u}(\eta) \Rightarrow c + bd = k(\dot{w}(\eta) + d), \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} c + ad = 0 \\ c + bd = k(\dot{w}(\eta) + d) \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema descobrimos

$$c = \frac{-ak\dot{w}(\eta)}{b - a - k}$$

$$d = \frac{k\dot{w}(\eta)}{b - a - k}.$$

Substituindo c e d em $u(t) = w(t) + c + td$, obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &= w(t) + \left[\frac{k(t-a)}{b-a-k}\right]\dot{w}(\eta) \\ &= \int_a^b G_2(t,s)f(s)ds + \left[\frac{k(t-a)}{b-a-k}\right]\int_a^b \dot{G}_2(\eta,s)f(s)ds \\ &= \int_a^b \left[G_2(t,s) + \frac{k(t-a)}{b-a-k}\dot{G}_2(\eta,s)\right]f(s)ds. \end{aligned}$$

Chamando

$$G_6(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(t-a)}{b-a-k}\dot{G}_2(\eta,s),$$

temos que a solução de (3.43) é

$$u(t) = \int_a^b G_6(t,s)f(s)ds.$$

G_6 é chamada de Função de Green Generalizada pois não satisfaz a continuidade da função de Green, entretanto que é solução do problema (3.43).

■

Corolário 3.4 *Se $k \neq b-a$, então o problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, & u(b) = k\dot{u}(\eta) \end{cases} \tag{3.45}$$

tem uma única solução

$$u(t) = \int_a^b G_6(t,s)f(s)ds.$$

Demonstração. É óbvio que $u(t)$ satisfaz o problema (3.45), supomos então que $v(t)$ também satisfaça este problema. Então a combinação linear dessas soluções denotada por

$$z(t) = u(t) - v(t), \tag{3.46}$$

satisfaz a equação homogênea associada à (3.45) para todo $t \in [a,b]$. Logo

$$\ddot{z}(t) = 0. \tag{3.47}$$

Com isso temos que a solução é da forma

$$z(t) = tc_1 + c_2. \tag{3.48}$$

Fazendo $t = a, b, e\eta$ em (3.48) temos

$$\begin{cases} z(a) = ac_1 + c_2 \\ z(b) = bc_1 + c_2 \\ z(\eta) = \eta c_1 + c_2 \Longrightarrow \dot{z}(\eta) = c_1. \end{cases}$$

Temos também, aplicando as condições de contorno do problema (3.45) em (3.46)

$$\begin{cases} z(a) = u(a) - v(a) = 0 \\ z(b) = u(b) - v(b) = k\dot{z}(\eta). \end{cases}$$

Igualando esses dois útimos sistemas, temos

$$\begin{cases} z(a) = z(a) \Leftrightarrow ac_1 + c_2 = 0 \\ z(b) = z(b) \Leftrightarrow bc_1 + c_2 = k\dot{z}(\eta). \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, caímos em contradição com a hipótese de que $b-a+k \neq 0$, logo a única solução é $c_1 = c_2 = 0$. Substituindo em (3.48) temos.

$$\begin{aligned} z(t) &= 0, t \in [a,b] \\ u(t) - v(t) &= 0, t \in [a,b] \\ u(t) &= v(t), t \in [a,b]. \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.4 *Determine a Função de Green e a solução do problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + \operatorname{sen}(t) = 0, & t \in [0,1] \\ u(0) = 0, & u(1) = -\dfrac{3}{2}\dot{u}\left(\dfrac{1}{3}\right). \end{cases} \tag{3.49}$$

Temos que $k = -\dfrac{3}{2}$ e $\eta = \dfrac{1}{3}$ e que pelo Teorema 3.1.4 a sua Função de Green é dada por

$$\begin{aligned} G_6(t,s) &= G_2(t,s) + \frac{k(t-a)}{b-a-k}\dot{G}_2(\eta,s), \\ &= G_2(t,s) - \frac{3t}{5}\dot{G}_2(\eta,s) \end{aligned}$$

e a única solução é

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G_5(t,s)\operatorname{sen}(s)ds \\ &= \int_0^1 G_5(t,s)\operatorname{sen}(s)ds - \frac{3t}{5}\int_0^1 \dot{G}_2(\eta,s)\operatorname{sen}(s)ds. \end{aligned}$$

Fazendo

$$u_1(t) = \int_0^1 G_2(t,s)\text{sen}(s)ds \quad \text{e} \quad u_2(t) = \int_0^1 \dot{G}_2(\eta,s)\text{sen}(s)ds$$

temos

$$u(t) = u_1(t) - \frac{3t}{5}u_2(t). \tag{3.50}$$

Determinemos $u_1(t) = \int\limits_0^1 G_2(t,s)\text{sen}(s)ds$, onde

$$G_2(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \int_0^t [s(1-t)]\text{sen}(s)ds + \int_t^1 [t(1-s)]\text{sen}(s)ds \\
&= (1-t)\int_0^t s\text{sen}(s)ds + t\int_t^1 (1-s)\text{sen}(s)ds \\
&= (1-t)\left[\text{sen}(s) - s\cos(s)\right]_0^t + t\left[-\text{sen}(s) + s\cos(s) - \cos(s)\right]_t^1 \\
&= \text{sen}(t) - t\text{sen}1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$u_1(t) = \text{sen}(t) - t\text{sen}1. \tag{3.51}$$

Determinemos $u_2(t) = \int\limits_0^1 \dot{G}_2(\frac{1}{3},s)\text{sen}(s)ds$

$$\dot{G}_2(\tfrac{1}{3},s) = \begin{cases} -s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \leq 1 \\ 1-s, & 0 \leq \frac{1}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= \int_0^{\frac{1}{3}} -s\text{sen}(s)ds + \int_{\frac{1}{3}}^1 (1-s)\text{sen}(s)ds \\
&= -\left[\text{sen}(s) - s\cos(s)\right]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left[-\text{sen}(s) + s\cos(s) - \cos(s)\right]_{\frac{1}{3}}^1 \\
&= -\text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\right) - \text{sen}1 + \text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\right) + \cos\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \cos\left(\frac{1}{3}\right) - \text{sen}1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$u_2(t) = \cos\left(\frac{1}{3}\right) - \text{sen}1. \tag{3.52}$$

Substituindo (3.51) e (3.52) em (3.50), temos

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{sen}(t) - t\text{sen}1 - \frac{3t}{5}\left[\cos\left(\frac{1}{3}\right) - \text{sen}1\right] \\ &= \text{sen}(t) - t\text{sen}1 - \frac{3t}{5}\cos\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3t}{5}\text{sen}1. \end{aligned}$$

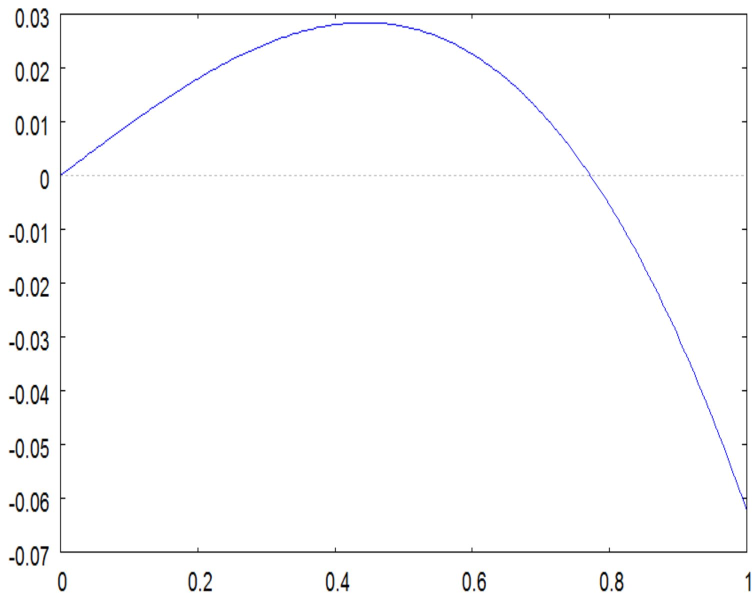

Figura 3.4: gráfico da solução de (3.49).

3.2 Problemas não-lineares

Nesta seção veremos funções de Green para problemas não-clássicos não-lineares. No Capítulo 2, mostramos que a função de Green para problemas clássicos lineares e não-lineares é a mesma, logo para problemas não-clássicos não-lineares a função de Green também é a mesma. Os teoremas a seguir podem ser vistos também em [9].

Teorema 3.2.1 *Se $g : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-linear e contínua, e $k(b-\eta) \neq b-a$, então a solução do problema não-linear*

$$\begin{cases} \ddot{u} + g(t,u) = 0, \quad t \in [a,b] \\ u(a) = ku(\eta), \qquad u(b) = 0 \end{cases} \tag{3.53}$$

é dada pela solução da equação integral

$$u(t) = \int_a^b G_3(t,s)g(s,u(s))ds, \tag{3.54}$$

onde $G_3(t,s)$ é como em (3.2).

Demonstração. Para provar este teorema, basta mostrarmos que a equação (3.54) é solução do problema (3.53), sabendo que G_3 é uma função de Green. Temos que

$$u(t) = \int_a^b G_3(t,s)g(s,u(s))ds = \int_a^t G_3(t,s)g(s,u(s))ds + \int_t^b G_3(t,s)g(s,u(s))ds. \tag{3.55}$$

Derivando com relação à t a igualdade (3.55), temos

$$\dot{u}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_a^t G_3(t,s)g(s,u(s))ds + \int_t^b G_3(t,s)g(s,u(s))ds\right].$$

Usando o Corolário 1.1 temos

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \int_a^t \frac{\partial G_3}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds + (t)'G_3(t,t)g(t,u(t)) - (a)'G_3(t,a)g(a,u(a)) \\ &+ \int_t^b \frac{\partial G_3}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds + (b)'G_3(t,b)g(b,u(b)) - (t)'G_3(t,t)g(t,u(t)) \\ &= \int_a^t \frac{\partial G_3}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds + \int_t^b \frac{\partial G_3}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds. \end{aligned}$$

Derivando novamente u com relação à t e usando o Corolário 1.1, temos

$$\begin{aligned}
\ddot{u}(t) &= \int_a^t \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + (t)'\frac{\partial G_3}{\partial t}(t^+,t)g(t,u(t)) - (a)'\frac{\partial G_3}{\partial t}(t,a)g(a,u(a)) \\
&+ \int_t^b \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + (b)'\frac{\partial G_3}{\partial t}(t,b)g(b,u(b)) - (t)'\frac{\partial G_3}{\partial t}(t^-,t)g(t,u(t)) \\
&= \int_a^t \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{\partial G_3}{\partial t}(t^+,t)g(t,u(t)) + \int_t^b \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds \\
&- \frac{\partial G_3}{\partial t}(t^-,t)g(t,u(t)) \\
&= \int_a^b \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{\partial G_3}{\partial t}(t^+,t)g(t,u(t)) - \frac{\partial G_3}{\partial t}(t^-,t)g(t,u(t)) \\
&= \int_a^b \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + \left[\frac{\partial G_3}{\partial t}(t^+,t) - \frac{\partial G_3}{\partial t}(t^-,t)\right]g(t,u(t))
\end{aligned}$$

Por hipótese, temos que G_3 é uma função de Green, logo pela Propriedade 4 sua derivada primeira possui um salto

$$\frac{\partial G_3}{\partial t}(t^+,t) - \frac{\partial G_3}{\partial t}(t^-,t) = -1.$$

Logo,

$$\ddot{u} = \int_a^b \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds - g(t,u(t)) \tag{3.56}$$

Substituindo a equação (3.56) na equação diferencial do problema (3.53), temos

$$\int_a^b \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds - g(t,u(t)) + g(t,u(t)) = 0$$

$$\int_a^b \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds = 0.$$

Como G_3 é uma função de Green, pela Propriedade 2, temos que

$$\frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s) = 0$$

satisfazendo assim a equação diferencial do problema (3.53).

Agora, mostremos que (3.54) satisfaz a condição de contorno do problema(3.53).

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \int_a^b G_3(t,s)g(s,u(s))ds \\
&= \int_a^b \left[G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)}G_2(\eta,s)\right] g(s,u(s))ds \\
&= \int_a^b G_2(t,s)g(s,u(s))ds + \int_a^b \frac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)}G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds \\
&= \int_a^b G_2(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)}\int_a^b G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds
\end{aligned}
$$

Aplicando esta última igualdade em $t=\eta$, temos

$$
u(\eta) = \left[\frac{b-a}{b-a-k(\eta-a)}\right]\int_a^b G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds. \tag{3.57}
$$

Aplicando em $t=a$, temos

$$
u(a) = \int_a^b G_2(a,s)g(s,u(s))ds + \frac{k(b-a)}{b-a-k(b-\eta)}\int_a^b G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds.
$$

Como G_2 é uma Função de Green, então $G_2(a,s)=0$, e usando a igualdade (3.57) temos que

$$
u(a) = ku(\eta).
$$

Aplicando em $t=b$, temos

$$
u(b) = \int_a^b G_2(b,s)g(s,u(s))ds + \frac{k(b-b)}{b-a-k(b-\eta)}\int_a^b G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds.
$$

Também pelo fato de G_2 ser uma função de Green, então $G_2(b,s)=0$, logo temos que

$$
u(b) = 0.
$$

Portanto, (3.54) satisfaz o problema de valor de contorno (3.53). ∎

Teorema 3.2.2 *Se $g : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-linear e contínua, e $k(\eta - a) \neq b - a$, então a solução do problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + g(t,u) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, & u(b) = ku(\eta) \end{cases} \tag{3.58}$$

é dada pela solução da equação integral

$$u(t) = \int_a^b G_4(t,s)g(t,u(s))ds, \tag{3.59}$$

onde $G_4(t,s)$ é como em (3.20).

Demonstração. Para provar este teorema, basta mostrarmos que a equação (3.59) é solução do problema (3.58), sabendo que G_4 é uma função de Green. Temos que

$$u(t) = \int_a^b G_4(t,s)g(s,u(s))ds = \int_a^t G_4(t,s)g(s,u(s))ds + \int_t^b G_4(t,s)g(s,u(s))ds. \tag{3.60}$$

Derivando com relação à t a igualdade (3.60), temos

$$\dot{u}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_a^t G_4(t,s)g(s,u(s))ds + \int_t^b G_4(t,s)g(s,u(s))ds\right].$$

Usando o Corolário 1.1 temos

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & \int_a^t \frac{\partial G_4}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds + (t)'G_4(t,t)g(t,u(t)) - (a)'G_4(t,a)g(a,u(a)) \\ & + \int_t^b \frac{\partial G_4}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds + (b)'G_4(t,b)g(b,u(b)) - (t)'G_4(t,t)g(t,u(t)) \\ = & \int_a^t \frac{\partial G_4}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds + \int_t^b \frac{\partial G_4}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds. \end{aligned}$$

Derivando novamente u com relação à t e usando o Corolário 1.1, temos

$$\begin{aligned}
\ddot{u}(t) &= \int\limits_a^t \frac{\partial^2 G_4}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + (t)'\frac{\partial G_4}{\partial t}(t^+,t)g(t,u(t)) - (a)'\frac{\partial G_4}{\partial t}(t,a)g(a,u(a)) \\
&+ \int\limits_t^b \frac{\partial^2 G_4}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + (b)'\frac{\partial G_4}{\partial t}(t,b)g(b,u(b)) - (t)'\frac{\partial G_4}{\partial t}(t^-,t)g(t,u(t)) \\
&= \int\limits_a^t \frac{\partial^2 G_4}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{\partial G_4}{\partial t}(t^+,t)g(t,u(t)) + \int\limits_t^b \frac{\partial^2 G_4}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds \\
&- \frac{\partial G_4}{\partial t}(t^-,t)g(t,u(t)) \\
&= \int\limits_a^b \frac{\partial^2 G_4}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{\partial G_4}{\partial t}(t^+,t)g(t,u(t)) - \frac{\partial G_4}{\partial t}(t^-,t)g(t,u(t)) \\
&= \int\limits_a^b \frac{\partial^2 G_4}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + \left[\frac{\partial G_4}{\partial t}(t^+,t) - \frac{\partial G_4}{\partial t}(t^-,t)\right] g(t,u(t)).
\end{aligned}$$

Por hipótese, temos que G_4 é uma função de Green, logo pela Propriedade 4 sua derivada primeira possui um salto

$$\frac{\partial G_4}{\partial t}(t^+,t) - \frac{\partial G_4}{\partial t}(t^-,t) = -1.$$

Logo,

$$\ddot{u} = \int\limits_a^b \frac{\partial^2 G_4}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds - g(t,u(t)) \tag{3.61}$$

Substituindo a equação (3.61) na equação diferencial do problema (3.58), temos

$$\int\limits_a^b \frac{\partial^2 G_4}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds - g(t,u(t)) + g(t,u(t)) = 0$$

$$\int\limits_a^b \frac{\partial^2 G_4}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds = 0.$$

Como G_4 é uma função de Green, pela Propriedade 2, temos que

$$\frac{\partial^2 G_4}{\partial t^2}(t,s) = 0,$$

satisfazendo assim a equação diferencial do problema (3.58).

Agora, mostremos que (3.59) satisfaz a condição de contorno do problema(3.58).

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_a^b G_4(t,s)g(s,u(s))ds \\ &= \int_a^b \left[G_2(t,s) + \frac{k(t-a)}{b-a-k(\eta-a)}G_2(\eta,s)\right] g(s,u(s))ds \\ &= \int_a^b G_2(t,s)g(s,u(s))ds + \int_a^b \frac{k(t-a)}{b-a-k(\eta-a)}G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds \\ &= \int_a^b G_2(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{k(t-a)}{b-a-k(\eta-a)}\int_a^b G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds \end{aligned}$$

Aplicando esta última igualdade em $t=\eta$, temos

$$u(\eta) = \left[\frac{b-a}{b-a-k(b-\eta)}\right]\int_a^b G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds. \tag{3.62}$$

Aplicando em $t=a$, temos

$$u(a) = \int_a^b G_2(a,s)g(s,u(s))ds + \frac{k(a-a)}{b-a-k(\eta-a)}\int_a^b G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds.$$

Como G_2 é uma função de Green, então $G_2(a,s)=0$, logo temos que

$$u(a)=0.$$

Aplicando em $t=b$, temos

$$u(b) = \int_a^b G_2(b,s)g(s,u(s))ds + \frac{k(b-a)}{b-a-k(\eta-a)}\int_a^b G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds.$$

Como G_2 é uma função de Green, então $G_2(b,s)=0$, e usando a igualdade (3.62) temos que

$$u(b)=ku(\eta).$$

Portanto (3.59) satisfaz o problema de valor de contorno (3.58). ■

Teorema 3.2.3 *Se* $g : [a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função não-linear e contínua, e* $b-a+k \neq 0$, *então a solução do problema*

$$\begin{cases} \ddot{u} + g(t,u) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = k\dot{u}(\eta), & u(b) = 0 \end{cases} \tag{3.63}$$

é dada pela solução da equação integral

$$u(t) = \int_a^b G_5(t,s)g(s,u(s))ds, \tag{3.64}$$

onde $G_5(t,s)$ *é como em* (3.30).

Demonstração. Para provar este teorema, basta mostrarmos que a equação (3.64) é solução do problema (3.63), sabendo que G_5 é uma função de Green. Temos que

$$u(t) = \int_a^b G_5(t,s)g(s,u(s))ds = \int_a^t G_5(t,s)g(s,u(s))ds + \int_t^b G_5(t,s)g(s,u(s))ds. \tag{3.65}$$

Derivando com relação à t a igualdade (3.65), temos

$$\dot{u}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_a^t G_5(t,s)g(s,u(s))ds + \int_t^b G_5(t,s)g(s,u(s))ds\right].$$

Usando o Corolário 1.1 temos

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & \int_a^t \frac{\partial G_5}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds + (t)'G_5(t,t)g(t,u(t)) - (a)'G_5(t,a)g(a,u(a)) \\ & + \int_t^b \frac{\partial G_5}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds + (b)'G_5(t,b)g(b,u(b)) - (t)'G_5(t,t)g(t,u(t)) \\ = & \int_a^t \frac{\partial G_5}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds + \int_t^b \frac{\partial G_5}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds. \end{aligned}$$

Derivando novamente u com relação à t e usando o Corolário 1.1, temos

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}(t) &= \int_a^t \frac{\partial^2 G_5}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + (t)'\frac{\partial G_5}{\partial t}(t^+,t)g(t,u(t)) - (a)'\frac{\partial G_5}{\partial t}(t,a)g(a,u(a)) \\
&+ \int_t^b \frac{\partial^2 G_5}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + (b)'\frac{\partial G_5}{\partial t}(t,b)g(b,u(b)) - (t)'\frac{\partial G_5}{\partial t}(t^-,t)g(t,u(t)) \\
&= \int_a^t \frac{\partial^2 G_5}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{\partial G_5}{\partial t}(t^+,t)g(t,u(t)) + \int_t^b \frac{\partial^2 G_5}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds \\
&- \frac{\partial G_5}{\partial t}(t^-,t)g(t,u(t)) \\
&= \int_a^b \frac{\partial^2 G_5}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{\partial G_5}{\partial t}(t^+,t)g(t,u(t)) - \frac{\partial G_5}{\partial t}(t^-,t)g(t,u(t)) \\
&= \int_a^b \frac{\partial^2 G_5}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + \left[\frac{\partial G_5}{\partial t}(t^+,t) - \frac{\partial G_5}{\partial t}(t^-,t)\right]g(t,u(t))
\end{aligned}
$$

Por hipótese, temos que G_5 é uma função de Green, logo pela Propriedade 4 sua derivada primeira possui um salto

$$
\frac{\partial G_5}{\partial t}(t^+,t) - \frac{\partial G_5}{\partial t}(t^-,t) = -1.
$$

Logo,

$$
\ddot{u} = \int_a^b \frac{\partial^2 G_5}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds - g(t,u(t)) \tag{3.66}
$$

Substituindo a equação (3.66) na equação diferencial do problema (3.63), temos

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\partial^2 G_5}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds - g(t,u(t)) + g(t,u(t)) = 0 \\
\int_a^b \frac{\partial^2 G_5}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds = 0.
\end{aligned}
$$

Como G_5 é uma função de Green, pela Propriedade 2, temos que

$$
\frac{\partial^2 G_5}{\partial t^2}(t,s) = 0
$$

satisfazendo assim a equação diferencial do problema (3.63).

Agora, mostremos que (3.64) satisfaz a condição de contorno do problema(3.63).

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_a^b G_5(t,s)g(s,u(s))ds \\
&= \int_a^b \left[G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s)\right] g(s,u(s))ds \\
&= \int_a^b G_2(t,s)g(s,u(s))ds + \int_a^b \frac{k(b-t)}{b-a+k}\dot{G}_2(\eta,s)g(s,u(s))ds \\
&= \int_a^b G_2(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{k(b-t)}{b-a+k}\int_a^b \dot{G}_2(\eta,s)g(s,u(s))ds
\end{aligned}$$

Derivando com relação à t esta última igualdade, temos

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b G_2(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{k(b-t)}{b-a+k}\int_a^b \dot{G}_2(\eta,s)g(s,u(s))ds\right] \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}G_2(t,s)g(s,u(s))ds - \frac{k}{b-a+k}\int_a^b \dot{G}_2(\eta,s)g(s,u(s))ds.
\end{aligned}$$

Aplicando esta última igualdade em $t = \eta$, temos

$$\dot{u}(\eta) = \frac{b-a}{b-a+k}\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds. \tag{3.67}$$

Aplicando em $t = a$, temos

$$u(a) = \int_a^b G_2(a,s)g(s,u(s))ds + \frac{k(b-a)}{b-a+k}\int_a^b \dot{G}_2(\eta,s)g(s,u(s))ds.$$

Como G_2 é uma função de Green, pela Propriedade 3 temos que $G_2(a,s) = 0$, e usando a igualdade (3.67) temos que

$$u(a) = k\dot{u}(\eta).$$

Aplicando em $t = b$, temos

$$u(b) = \int_a^b G_2(b,s)g(s,u(s))ds + \frac{k(b-b)}{b-a+k}\int_a^b G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds.$$

Como G_2 é uma função de Green, pela Propriedade 3 temos que $G_2(b,s)=0$, logo

$$u(b)=0.$$

Portanto (3.64) satisfaz o problema de valor de contorno (3.63). ■

Teorema 3.2.4 *Se $g:[a,b]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é uma função não-linear e contínua, e $k\neq b-a$, então a solução do problema*

$$\begin{cases} \ddot{u}+g(t,u)=0, & t\in[a,b] \\ u(a)=0, & u(b)=k\dot{u}(\eta) \end{cases} \tag{3.68}$$

é dada pela solução da equação integral

$$u(t)=\int_a^b G_6(t,s)g(s,u(s))ds, \tag{3.69}$$

onde $G_6(t,s)$ é como em (3.44).

Demonstração. Para provar este teorema, basta mostrarmos que a equação (3.69) é solução do problema (3.68), sabendo que G_6 é uma função de Green. Temos que

$$u(t)=\int_a^b G_6(t,s)g(s,u(s))ds=\int_a^t G_6(t,s)g(s,u(s))ds+\int_t^b G_6(t,s)g(s,u(s))ds. \tag{3.70}$$

Derivando com relação à t a igualdade (3.70), temos

$$\dot{u}(t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_a^t G_6(t,s)g(s,u(s))ds+\int_t^b G_6(t,s)g(s,u(s))ds\right].$$

Usando o Corolário 1.1 obtemos

$$\begin{aligned}\dot{u}(t)&=\int_a^t \frac{\partial G_6}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds+(t)'G_6(t,t)g(t,u(t))-(a)'G_6(t,a)g(a,u(a))\\&+\int_t^b \frac{\partial G_6}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds+(b)'G_6(t,b)g(b,u(b))-(t)'G_6(t,t)g(t,u(t))\\&=\int_a^t \frac{\partial G_6}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds+\int_t^b \frac{\partial G_6}{\partial t}(t,s)g(s,u(s))ds.\end{aligned}$$

Derivando novamente u com relação à t e usando o Corolário 1.1 obtemos

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}(t) &= \int_a^t \frac{\partial^2 G_6}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + (t)'\frac{\partial G_6}{\partial t}(t^+,t)g(t,u(t)) - (a)'\frac{\partial G_6}{\partial t}(t,a)g(a,u(a)) \\
&+ \int_t^b \frac{\partial^2 G_6}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + (b)'\frac{\partial G_5}{\partial t}(t,b)g(b,u(b)) - (t)'\frac{\partial G_6}{\partial t}(t^-,t)g(t,u(t)) \\
&= \int_a^t \frac{\partial^2 G_6}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{\partial G_6}{\partial t}(t^+,t)g(t,u(t)) + \int_t^b \frac{\partial^2 G_6}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds \\
&- \frac{\partial G_6}{\partial t}(t^-,t)g(t,u(t)) \\
&= \int_a^b \frac{\partial^2 G_6}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{\partial G_6}{\partial t}(t^+,t)g(t,u(t)) - \frac{\partial G_6}{\partial t}(t^-,t)g(t,u(t)) \\
&= \int_a^b \frac{\partial^2 G_6}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds + \left[\frac{\partial G_6}{\partial t}(t^+,t) - \frac{\partial G_6}{\partial t}(t^-,t)\right] g(t,u(t)).
\end{aligned}
$$

Por hipótese, temos que G_6 é uma função de Green, logo pela Propriedade 4 sua derivada primeira possui um salto

$$\frac{\partial G_6}{\partial t}(t^+,t) - \frac{\partial G_6}{\partial t}(t^-,t) = -1.$$

Logo,

$$\ddot{u} = \int_a^b \frac{\partial^2 G_6}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds - g(t,u(t)) \tag{3.71}$$

Substituindo a equação (3.71) na equação diferencial do problema (3.68), temos

$$\int_a^b \frac{\partial^2 G_6}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds - g(t,u(t)) + g(t,u(t)) = 0$$

$$\int_a^b \frac{\partial^2 G_6}{\partial t^2}(t,s)g(s,u(s))ds = 0.$$

Como G_6 é uma função de Green, pela Propriedade 2, temos que

$$\frac{\partial^2 G_6}{\partial t^2}(t,s) = 0,$$

satisfazendo assim a equação diferencial do problema (3.68).

Agora, mostremos que (3.69) satisfaz a condição de contorno do problema(3.68).

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_a^b G_6(t,s)g(s,u(s))ds \\
&= \int_a^b \left[G_2(t,s) + \frac{k(t-a)}{b-a-k}\dot{G}_2(\eta,s)\right] g(s,u(s))ds \\
&= \int_a^b G_2(t,s)g(s,u(s))ds + \int_a^b \frac{k(t-a)}{b-a-k}\dot{G}_2(\eta,s)g(s,u(s))ds \\
&= \int_a^b G_2(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{k(t-a)}{b-a-k}\int_a^b \dot{G}_2(\eta,s)g(s,u(s))ds
\end{aligned}$$

Derivando com relação à t esta última igualdade, temos

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b G_2(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{k(t-a)}{b-a-k}\int_a^b \dot{G}_2(\eta,s)g(s,u(s))ds\right] \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}G_2(t,s)g(s,u(s))ds + \frac{k}{b-a-k}\int_a^b \dot{G}_2(\eta,s)g(s,u(s))ds.
\end{aligned}$$

Aplicando esta última igualdade em $t=\eta$, temos

$$\dot{u}(\eta) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds\left[\frac{b-a}{b-a-k}\right]. \tag{3.72}$$

Aplicando em $t=a$, temos

$$u(a) = \int_a^b G_2(a,s)g(s,u(s))ds + \frac{k(a-a)}{b-a-k}\int_a^b G_2(\eta,s)g(s,u(s))ds.$$

Como G_2 é uma função de Green, pela Propriedade 3 temos que $G_2(a,s)=0$, logo

$$u(a)=0.$$

Aplicando em $t=b$, temos

$$u(b) = \int_a^b G_2(b,s)g(s,u(s))ds + \frac{k(b-a)}{b-a-k}\int_a^b \dot{G}_2(\eta,s)g(s,u(s))ds.$$

Como G_2 é uma função de Green, pela Propriedade 3 temos que $G_2(b,s) = 0$, e usando a igualdade (3.72) temos que

$$u(b) = k\dot{u}(\eta).$$

Portanto (3.69) satisfaz o problema de valor de contorno (3.68). ■

3.3 Existência e Unicidade de Solução

Nesta seção estudaremos a existência e unicidade da solução do problema

$$\begin{cases} \ddot{u} + f(t,u) = 0, & t \in (0,1) \\ u(0) = ku(\eta), & u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.73}$$

onde $f : (0,1) \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, $k \in \mathbb{R}$, e $\eta \in (0,1)$, satisfazendo $k(1-\eta) < 1$.

Sejam $J = (0,1), I = [0,1], \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$. Definamos o seguinte conjunto

$$D = \{x \in \mathcal{C}(I) : \exists\ M_x \geq m_x > 0;\ \ m_x(1-t) \leq x(t) \leq M_x(1-t),\ t \in I\}.$$

Afirmação: $D \neq \varnothing$.

De fato, a função $x(t) = 1 - t$, está em D, pois existem

$$M_x = m_x = 1 > 0 \text{ tal que } \ m_x(1-t) \leq 1 - t \leq M_x(1-t),\ t \in I.$$

Vamos supor que f satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} &1)\ f : J \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ é contínua e não-negativa.} \\ &2)\ f(t,u) \text{ é monótona crescente em } u \text{ para } t\ \in J \text{ fixo, ou seja, se} \\ &\quad\ u_1 \leq u_2 \Rightarrow f(t,u_1) \leq f(t,u_2). \\ &3)\ \text{Existe } q \in (0,1) \text{ tal que } f(t,ru) \geq r^q f(t,u), \quad \forall\ r \in (0,1), (t,u) \in J \times \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Dessas condições obtemos

i) Se $s > 1$ então

$$f(t,su) \leq s^q f(t,u) \tag{3.75}$$

De fato, se $s > 1$ então $0 < \dfrac{1}{s} = r < 1$. De 3)

$$\begin{aligned} f(t, rsu) &\geq r^q f(t, su) \\ f(t, u) &\geq \frac{1}{s^q} f(t, su) \\ s^q f(t, u) &\geq f(t, su). \end{aligned}$$

ii) Se $0 < \alpha_i < 1$ e $a_i : J \to \mathbb{R}$ são funções contínuas não-negativas para $i = 1, 2, \ldots, m$, então $f : J \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(t, u) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(t) u^{\alpha_i}$ satisfaz (4.5).

De fato.
Seja $u \geq 0$. Como $a_i(t) \geq 0,\ \forall\ t \in J$, segue $f(t, u) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(t) u^{\alpha_i} \geq 0$. Isto prova 1).
Se $u_1 \leq u_2$ então $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i(t) u_1^{\alpha_i} \leq \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(t) u_2^{\alpha_i}$. Logo $f(t, u_1) \leq f(t, u_2)$, Isto prova 2).
Finalmente,

$$\begin{aligned} f(t, ru) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)(ru)^{\alpha_i} &= a_1(t) u^{\alpha_1} r^{\alpha_1} + a_2(t) u^{\alpha_2} r^{\alpha_2} + \ldots + a_m(t) u^{\alpha_m} r^{\alpha_m} \\ &\geq a_1(t) u^{\alpha_1} r^q + a_2(t) u^{\alpha_2} r^q + \ldots + a_m(t) u^{\alpha_m} r^q,\ q = \max\{\alpha_i\},\ i = 1, 2, \ldots, m \\ &\geq r^q \sum_{i=1}^{m} a_i(t) u^{\alpha_i} = r^q f(t, u). \text{ Isto prova 3).} \end{aligned}$$

O principal resultado para o problema (4.2), é o seguinte.

Teorema 3.3.1 *Se f satisfaz (4.5), é singular em $t = 0$ e/ou $t = 1$, e*

$$0 < \int_0^1 f(t, 1 - t) dt < \infty \tag{3.76}$$

então o problema (4.2) tem uma única solução $w \in \mathcal{C}(I) \cap \mathcal{C}^2(J)$.
A sequência de funções $\{h_n\} \subset \mathcal{C}(I)$ dada por

$$h_n(t) = \int_0^1 G_3(t, s) f(s, h_{n-1}(s)) ds, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.77}$$

onde $h_0 \geq 0$ é uma função dada, converge para w uniformemente em I e a taxa de convergência é

$$\max_{t \in I} |h_n(t) - w(t)| = O\left(1 - N^{q^n}\right), \tag{3.78}$$

onde $0 < N < 1$, o qual depende da função inicial h_0.

Demonstração. Definamos o conjunto $P = \{x \in \mathcal{C}(I) : x(t) \geq 0, \forall\ t \in [0,1]\}$, e o operador $F : D \to P$ por

$$Fx(t) = \int_0^1 G_3(t,s)f(s,x(s))ds, \quad \forall x \in D. \tag{3.79}$$

• Como G_3 e f são contínuas, logo F está bem definido.

• F é crescente. De fato, como

$$G_3(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(1-t)}{1-k(1-\eta)}G_2(\eta,s),$$

onde

$$G_2(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}, \tag{3.80}$$

claramente vemos que $G_2(t,s) > 0,\ \forall\ t,s \in [0,1]$. Logo $G_3(t,s) > 0$.

Se $x_1, x_2 \in D$ tal que $x_1 \leq x_2$ temos

$$Fx_1(t) = \int_0^1 G_3(t,s)f(s,x_1(s))ds \leq \int_0^1 G_3(t,s)f(s,x_2(s))ds = Fx_2(t).$$

Disto segue que F é crescente.

Pelo Teorema 3.2.1 temos que se $u \in D$ satisfaz

$$u(t) = Fu(t) = \int_0^1 G_3(t,s)f(s,u(s))ds, \tag{3.81}$$

então $u \in \mathcal{C}^1(I) \cap \mathcal{C}^2(J)$ é uma solução do problema (4.2). Com isso, temos que para qualquer $x \in D$, existe números positivos $0 < m_x < 1 < M_x$ tais que

$$m_x(1-t) \leq x(t) \leq M_x(1-t).$$

De (4.5) e (4.6), temos que

$$(m_x)^q f(s,1-s) \leq f(s,m_x(1-s)) \leq f(s,x(s)) \leq f(s,M_x(1-s)) \leq (M_x)^q f(s,1-s)$$

$$(m_x)^q f(s,1-s) \leq f(s,x(s)) \leq (M_x)^q f(s,1-s). \tag{3.82}$$

Como $G_2(t,s) > 0$, temos que

$$G_3(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(1-t)}{1-k(1-\eta)}G_2(\eta,s) \geq \frac{k(1-t)}{1-k(1-\eta)}G_2(\eta,s). \tag{3.83}$$

Temos também que $G_2(t,s) \leq t(1-t) \leq 1-t, \forall\, t,s \in [0,1]$. Logo,

$$G_3(t,s) \leq t(1-t) + \frac{k(1-t)}{1-k(1-\eta)}G_2(\eta,s) \leq (1-t) + \frac{k(1-t)}{1-k(1-\eta)}G_2(\eta,s). \tag{3.84}$$

De (4.5), (4.8), (4.11) e (4.10) obtemos

$$Fx(t) \geq \int_0^1 \frac{k(1-t)}{1-k(1-\eta)}G_2(\eta,s)f(s,x(s))ds \geq \int_0^1 \frac{k(1-t)}{1-k(1-\eta)}G_2(\eta,s)(m_x)^q f(s,1-s)ds.$$

Logo,

$$Fx(t) \geq (1-t)\left[\frac{(m_x)^q k}{1-k(1-\eta)}\right]\int_0^1 G_2(\eta,s)f(s,1-s)ds \tag{3.85}$$

De (4.6), (4.8), (4.12) e (4.10) obtemos

$$\begin{aligned} Fx(t) &\leq (1-t)\left[1+\frac{k}{1-k(1-\eta)}G_2(\eta,s)\right]\int_0^1 f(s,x(s))ds \\ &\leq (1-t)\left[1+\frac{k}{1-k(1-\eta)}G_2(\eta,s)\right]\int_0^1 (M_x)^q f(s,1-s)ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$Fx(t) \leq (1-t)(M_x)^q \int_0^1 \left[1+\frac{k}{1-k(1-\eta)}G_2(\eta,s)\right]f(s,1-s)ds. \tag{3.86}$$

Denotando por

$$m_F = \frac{(m_x)^q k}{1-k(1-\eta)}\int_0^1 G_2(\eta,s)f(s,1-s)ds$$

e

$$M_F = (M_x)^q \int_0^1 \left[1+\frac{k}{1-k(1-\eta)}G_2(\eta,s)\right]f(s,1-s)ds,$$

obtemos $m_F(1-t) \leq Fx(t) \leq M_F(1-t)$, ou seja $F(x) \in D$. Portanto $F(D) \subset D$, assim temos $F : D \to D$.

Seja $h_0 \in D$ qualquer. Definamos

$$\begin{aligned} l_{h_0} &= \sup\{l > 0 : lh_0(t) \leq (Fh_0)(t),\ t \in I\}, \\ L_{h_0} &= \inf\{L > 0 : Lh_0(t) \geq (Fh_0)(t),\ t \in I\}, \\ m &= \min\left\{1, (l_{h_0})^{\frac{1}{1-q}}\right\}, \\ M &= \max\left\{1, (L_{h_0})^{\frac{1}{1-q}}\right\}, \end{aligned} \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned} u_0(t) &= mh_0(t), \quad\ u_n(t) = Fu_{n-1}(t), \\ v_0(t) &= Mh_0(t), \quad\ v_n(t) = Fv_{n-1}(t),\ n = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{3.88}$$

- $u_0(t) = mh_0(t) \leq Fh_0(t)$.

De fato.

Se $m = (l_{h_0})^{\frac{1}{1-q}}$, então $(l_{h_0})^{\frac{1}{1-q}} \leq 1$, se e somente se, $(l_{h_0}) \leq 1$ pois $0 < q < 1$. Logo,

$$mh_0(t) = (l_{h_0})^{\frac{1}{1-q}} h_0(t) \leq (l_{h_0})h_0(t) \leq Fh_0(t).$$

Se $m = 1$, então $(l_{h_0})^{\frac{1}{1-q}} \geq 1$, se e somente se, $(l_{h_0}) \geq 1$ pois $0 < q < 1$. Logo,

$$mh_0(t) = 1h_0(t) \leq (l_{h_0})h_0(t) \leq Fh_0(t).$$

Portanto,

$$u_0(t) \leq Fh_0(t). \tag{3.89}$$

- $u_0 \leq u_1$.

De fato.

Se $m = 1$, então

$$u_1(t) = Fu_0(t) = Fmh_0(t) = Fh_0(t) \geq h_0(t) = u_0(t).$$

Se $m = (l_{h_0})^{\frac{1}{1-q}}$, então

$$\begin{aligned} u_1(t) = Fu_0(t) = Fmh_0(t) &= \int_0^1 G_3(t,s) f(s, (l_{h_0})^{\frac{1}{1-q}} h_0(s)) ds \geq \left[(l_{h_0})^{\frac{1}{1-q}}\right]^q Fh_0(t) \\ &\geq \left[(l_{h_0})^{\frac{1}{1-q}}\right]^q l_{h_0} h_0(t) = (l_{h_0})^{\frac{1}{1-q}} h_0(t) = mh_0(t) = u_0(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$u_0 \leq u_1. \tag{3.90}$$

- $u_n \leq u_{n+1}$.

De fato, ja vimos que $u_0 \leq u_1$ e que o operador F é crescente. Vamos supor que

$$u_{n-1} \leq u_n \quad \text{(Hipótese de Indução.)}$$

Logo,

$$u_n(t) = Fu_{n-1}(t) \leq Fu_n(t) = u_{n+1}(t).$$

Portanto, temos

$$u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ldots \tag{3.91}$$

De (4.15) e (4.16) temos que

- $v_0(t) = Mh_0(t) \geq Fh_0(t)$.

De fato.

Se $M = (L_{h_0})^{\frac{1}{1-q}}$, então $(L_{h_0})^{\frac{1}{1-q}} \geq 1$, se e somente se, $(L_{h_0}) \geq 1$ pois $0 < q < 1$. Logo,

$$Mh_0(t) = (L_{h_0})^{\frac{1}{1-q}} h_0(t) \geq (L_{h_0}) h_0(t) \geq Fh_0(t).$$

Se $M = 1$, então $(L_{h_0})^{\frac{1}{1-q}} \leq 1$, se e somente se, $(L_{h_0}) \leq 1$ pois $0 < q < 1$. Logo,

$$Mh_0(t) = 1h_0(t) \geq (L_{h_0}) h_0(t) \geq Fh_0(t).$$

Portanto,

$$v_0(t) \geq Fh_0(t). \tag{3.92}$$

- $v_0(t) \geq v_1(t)$.

De fato.

Se $M = 1$, então

$$v_1(t) = Fv_0(t) = FMh_0(t) = Fh_0(t) \leq h_0(t) = v_0(t).$$

Se $M = (L_{h_0})^{\frac{1}{1-q}}$, então

$$v_1(t) = Fv_0(t) = FMh_0(t) = \int_0^1 G_3(t,s) f(s, (L_{h_0})^{\frac{1}{1-q}} h_0(s)) ds \leq \left[(L_{h_0})^{\frac{1}{1-q}} \right]^q Fh_0(t)$$

$$\leq \left[(L_{h_0})^{\frac{1}{1-q}} \right]^q L_{h_0} h_0(t) = (L_{h_0})^{\frac{1}{1-q}} h_0(t) = Mh_0(t) = v_0(t).$$

Portanto,

$$v_0(t) \geq v_1(t) \tag{3.93}$$

- $v_n \geq v_{n+1}$.

De fato, ja vimos que $v_0 \geq v_1$ e que o operador F é crescente. Vamos supor que

$$v_{n-1} \geq v_n \quad \text{(Hipótese de Indução.)}$$

Logo,

$$v_n(t) = Fv_{n-1}(t) \geq Fv_n(t) = v_{n+1}(t).$$

Portanto, temos

$$\ldots \leq v_{n+1} \leq v_n \leq \ldots \leq v_1 \leq v_0. \tag{3.94}$$

Como $m \leq M$ e $h_0 \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} mh_0(t) &\leq Mh_0(t) \\ u_0(t) &\leq v_0(t) \end{aligned} \tag{3.95}$$

De (3.91), (3.94) e (3.95), obtemos

$$u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq v_1 \leq v_0. \tag{3.96}$$

A seguinte desigualdade também vale

$$u_n(t) \geq (t_0)^{q^n} v_n(t), \quad t_0 = m/M, \quad t \in I, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.97}$$

De fato,

- $n = 0$

$$\begin{aligned} u_0(t) &\geq (t_0)^{q^0} v_0 \\ mh_0(t) &\geq \frac{m}{M} M_0 h_0(t) \\ mh_0(t) &\geq mh_0(t). \end{aligned}$$

- $n = k$ Hipótese de Indução:

$$u_k(t) \geq (t_0)^{q^k} v_k(t)$$

• $n = k+1$

$$u_{k+1}(t) = Fu_k = \int_0^1 G_3(t,s)f(s,u_k(s))ds \geq \int_0^1 G_3(t,s)f(s,\left(\frac{m}{M}\right)^{q^k} v_k(s))ds$$

$$\geq \left[\left(\frac{m}{M}\right)^{q^k}\right]^q \int_0^1 G_3(t,s)f(s,v_k)ds = \left(\frac{m}{M}\right)^{q^{k+1}} Fv_k = \left(\frac{m}{M}\right)^{q^{k+1}} v_{k+1}.$$

De (4.17) sabemos que

$$0 \leq u_{n+p}(t) \leq v_n.$$

Logo,

$$0 \leq u_{n+p}(t) - u_n(t) \leq v_n(t) - u_n(t).$$

Com isso e de (4.17) e (4.18) temos

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{n+p}(t) - u_n(t) \leq v_n(t) - u_n(t) \leq v_n(t) - (t_0)^{q^n} v_n(t) \\ \leq \left(1 - (t_0^{q^n})\right) Mh_0(t),\ \forall\ n,p \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Como $\{u_n\}$ é uma sequência de funções limitadas e não-decrescente, temos então que

$$u_n \to \sup\{u_n\} = w_1, \tag{3.99}$$

e de (4.19)

$$0 \leq u_{n+p}(t) - u_n(t) \leq \left(1 - (t_0^{q^n})\right) Mh_0(t),\ \forall\ n,p \in \mathbb{N}$$

temos que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy logo a convergência é uniforme, e como D é um espaço de Banach [3], então $w_1 \in D$.

De (4.17) e (4.18) temos

$$\begin{aligned} 0 \leq v_n(t) - v_{n+p}(t) \leq v_n(t) - u_n(t) \leq v_n(t) - (t_0)^{q^n} v_n(t) \\ \leq \left(1 - (t_0^{q^n})\right) Mh_0(t),\ \forall\ n,p \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Como $\{v_n\}$ é uma sequência de funções limitadas e não-crescente, temos então que

$$v_n \to \inf\{v_n\} = w_2, \tag{3.101}$$

e de (3.100)

$$0 \leq v_n(t) - v_{n+p}(t) \leq \left(1 - (t_0^{q^n})\right) M h_0(t), \ \forall \ n, p \in \mathbb{N}$$

temos que $\{v_n\}$ é uma sequência de Cauchy logo a convergência é uniforme, e como D é um espaço de Banach, então $w_2 \in D$. Mas, de (3.99), (4.19) e (3.101) temos que dado $\epsilon > 0$,

$$0 \leq |w_1 - w_2| \leq |w_1 - u_n| + |u_n - v_n| + |v_n - w_2| \leq \epsilon, \forall \ \ n > n_0,$$

n_0 suficientemente grande. Logo,

$$w_1 = w_2.$$

Seja $w = w_1 = w_2 \in D$ temos que

$$u_n(t) \to w(t), \quad v_n(t) \to w(t), \quad (\text{uniformemente em } \ I), \tag{3.102}$$

e

$$u_n(t) \leq w(t) \leq v_n(t), \quad t \in I, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.103}$$

De (4.16) e do fato de F ser crescente, temos

$$u_{n+1}(t) = F u_n(t) \leq F w(t) \leq F v_n(t) = v_{n+1}(t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.104}$$

De (4.20), (3.104) e da unicidade do limite concluímos que $w(t)$ satisfaz (4.9), portanto $w(t) \in \mathcal{C}^1(I) \cap \mathcal{C}^2(J)$ é uma solução de (4.2).

De (4.3), (4.16) e como F é crescente, obtemos

$$u_n(t) \leq h_n(t) \leq v_n(t), \quad t \in I, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.105}$$

Assim, de (4.19), (4.22) e (3.105) temos

$$\begin{aligned} |h_n(t) - w(t)| &\leq |h_n(t) - u_n(t)| + |u_n(t) - w(t)| \\ &\leq |v_n(t) - u_n(t)| + |v_n(t) - u_n(t)| \\ &\leq \left(1 - (t_0)^{q^n}\right) M |h_0(t)|, \end{aligned}$$

logo,

$$\max_{t \in I} |h_n(t) - w(t)| \leq \left(1 - (t_0)^{q^n}\right) M \max_{t \in I} |h_0(t)|.$$

Com isso obtemos

$$\max_{t \in I} |h_n(t) - w(t)| = O\left(1 - N^{q^n}\right),$$

onde $0 < N < 1$, o qual depende da função h_0.

Seja $h_0 \in D$ qualquer e w a única solução em D de (4.9) em D. Supomos $v(t) \in \mathcal{C}^1(I) \cap \mathcal{C}^2(J)$ solução do problema (4.2). Seja

$$z(t) = v(t) - w(t), \quad t \in I.$$

Com uma prova similar ao do Corolário 3.1, obtemos $v(t) = w(t)$, e assim w é a única solução de (4.9) em $\mathcal{C}^1(I) \cap \mathcal{C}^2(J)$. ■

Capítulo 4

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi estudar problemas de valor de contorno da forma

$$\ddot{u} + f(t) = 0, \quad t \in [a, b] \tag{4.1}$$

$$u(a) = ku(\eta), \quad u(b) = 0, \tag{4.2}$$

onde $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $\eta \in [a, b]$ e k são dados.

O problema de valor de contorno (4.1)-(4.2) também é conhecido como problema de valor de contorno com três pontos ou problema não-clássico.

No Teorema 3.1.1 mostramos que a função de Green para o problema (4.1)-(4.2) é dada por

$$G_3(t, s) = G_2(t, s) + \frac{k(b - t)}{b - a - k(b - \eta)} G_2(\eta, s), \tag{4.3}$$

onde G_2 é como em (2.3) e a solução de (4.1)-(4.2) é da forma

$$u(t) = \int_a^b G_3(t, s) f(s) ds. \tag{4.4}$$

Verificamos que $G_3 : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as propriedades da função de Green de acordo com a Definição (2.1). No Corolário 3.1 provamos a unicidade de (4.1)-(4.2).

Associada à equação (4.1) também estudamos as seguintes condições de contorno:

$$u(a) = 0, \quad u(b) = ku(\eta), \tag{4.5}$$

$$u(a) = k\dot{u}(\eta), \quad u(b) = 0, \tag{4.6}$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = k\dot{u}(\eta), \tag{4.7}$$

No Teorema 3.1.2 mostramos que a função de Green para o problema (4.1)-(4.5) é dada por

$$G_4(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(t-a)}{b-a-k(\eta-a)} G_2(\eta,s), \tag{4.8}$$

e a solução de (4.1)-(4.5) é da forma

$$u(t) = \int_a^b G_4(t,s)f(s)ds. \tag{4.9}$$

Verificamos que $G_4 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as propriedades da função de Green de acordo com a Definição (2.1). No Corolário 3.2 provamos a unicidade de (4.1)-(4.5).

No Teorema 3.1.3 mostramos que a função de Green para o problema (4.1)-(4.6) é dada por

$$G_5(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(b-t)}{b-a+k} \dot{G}_2(\eta,s), \tag{4.10}$$

onde $\dot{G}_2(\eta,s)$ é como em (3.31) e a solução de (4.1)-(4.6) é da forma

$$u(t) = \int_a^b G_5(t,s)f(s)ds. \tag{4.11}$$

Verificamos que $G_5 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ não satisfaz somente a continuidade das propriedades da função de Green, porém a solução (4.11) satisfaz (4.1)-(4.6), por isso é chamada de função de Green Generalizada. No Corolário 3.3 provamos a unicidade de (4.1)-(4.6).

No Teorema 3.1.4 mostramos que a função de Green para o problema (4.1)-(4.7) é dada por

$$G_6(t,s) = G_2(t,s) + \frac{k(t-a)}{b-a-k} \dot{G}_2(\eta,s), \tag{4.12}$$

e a solução de (4.1)-(4.7) é da forma

$$u(t) = \int_a^b G_6(t,s)f(s)ds. \tag{4.13}$$

Verificamos que $G_6 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ não satisfaz somente a continuidade das propriedades da função de Green, porém a solução (4.13) satisfaz (4.1)-(4.7), por isso é chamada de função de Green Generalizada. No Corolário 3.4 provamos a unicidade de (4.1)-(4.7).

No Teorema 3.2.1 mostramos que o problema

$$\begin{cases} \ddot{u} + g(t,u) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = ku(\eta), & u(b) = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

onde $g : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-linear e contínua, tem como solução a equação integral

$$u(t) = \int_a^b G_3(t,s) g(s, u(s)) ds, \tag{4.15}$$

onde $G_3(t,s)$ é como em (4.3).

No Teorema 3.2.2 mostramos que o problema

$$\begin{cases} \ddot{u} + g(t,u) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, & u(b) = ku(\eta) \end{cases} \tag{4.16}$$

tem como solução a equação integral

$$u(t) = \int_a^b G_4(t,s) g(s, u(s)) ds, \tag{4.17}$$

onde $G_4(t,s)$ é como em (4.8).

No Teorema 3.2.3 mostramos que o problema

$$\begin{cases} \ddot{u} + g(t,u) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = k\dot{u}(\eta), & u(b) = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

tem como solução a equação integral

$$u(t) = \int_a^b G_5(t,s) g(s, u(s)) ds, \tag{4.19}$$

onde $G_5(t,s)$ é como em (4.10).

No Teorema 3.2.4 mostramos que o problema

$$\begin{cases} \ddot{u} + g(t,u) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = 0, & u(b) = k\dot{u}(\eta) \end{cases} \tag{4.20}$$

tem como solução a equação integral

$$u(t) = \int_a^b G_6(t,s)g(s,u(s))ds, \tag{4.21}$$

onde $G_6(t,s)$ é como em (4.12).

No Teorema 3.3.1 mostramos a exitência e unicidade de solução do problema (4.14).

Num estudo futuro pretendemos estudar problemas de valor de contorno da forma

$$\begin{cases} \ddot{u} + g(t,u,\dot{u}) = 0, & t \in [a,b] \\ u(a) = ku(\eta), & u(b) = 0 \end{cases} \tag{4.22}$$

onde $g \in \mathcal{C}([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Referências Bibliográficas

[1] AGARWAL, R. P.; O'REGAN, D. **An Introduction to Ordinary Differential Equations**, Springer, 2008.

[2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 7.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[3] KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, S. V. **Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis**, Dover, 1999.

[4] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, Projeto Euclides,vol. 1, 2007.

[5] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, Projeto Euclides,vol. 2, 2007.

[6] PALAMIDES, P. K.; INFANTE, G.; PIETRAMALA, P. **Nontrivial Solutions of a Nonlinear Heat Flow Problem Via Sperner's Lemma**, Applied Mathematics Letters, 22 (9) p. 1444 - 1450, 2009.

[7] POKORNYI, Y. V.; BOROVSKIKH, A. V. **The Connection of the Green's Function and the Influence Function for Nonclassical Problems**, Journal of Mathematical Sciences, 119 (6) p. 739 - 768, 2004.

[8] WOLFGANG, W.; THOMPSON, R. **Ordinary Differential Equations**, New York: , Springer, 1998.

[9] ZHAO, Z. **Solutions and Green's Functions for Some Linear Second-Order Three-Point Boundary-Value Problems**, An International

Journal Computers and Mathematics with Applications 56 (1), p. 104-113, 2008.

[10] ZHAO, Z. **Positive Solutions for singular Three-Point Boundary Value Problems**, Eletronic Journal of Differential Equations. No. 156, p. 1 - 8, 2007.