



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Júnior César Bonafim

*Um Estudo do Teorema de Unicidade de
Holmgren*

Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000
São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Júnior César Bonafim

*Um Estudo do Teorema de Unicidade de
Holmgren*

Orientador:

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

17 de Junho de 2011

Bonafim, Júnior César.

Um estudo do teorema de unicidade de Holmgren / Júnior César Bonafim -
São José do Rio Preto: [s.n.], 2011.

49 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Waldemar Donizete Bastos.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Análise matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Teoria do
controle. I. Bastos, Waldemar Donizete. II. Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.
III. Título.

CDU - 517.97

JÚNIOR CÉSAR BONAFIM

Um estudo do teorema de unicidade de Holmgren

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Waldemar Donizete Bastos

Professor Doutor

UNESP - São José do Rio Preto

Orientador

Maurilio Márcio Melo

Professor Doutor

UFG - Universidade Federal de Goiás

Andréa Cristina Prokopczyk Arita

Professora Doutora

UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 17 de Junho de 2011.

Aos meus amados pais, Ademir e Luzia.

À minha irmã, Vanessa.

Aos meus queridos amigos.

Dedico.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho agradeço:

Primeiramente a Deus, pelas bênçãos de todos os dias e pelas oportunidades concedidas a mim.

À minha família, em especial aos meus pais Ademir e Luzia, à minha irmã Vanessa, minha avó Lucia e meu cunhado Cesar que durante estes anos de graduação e mestrado estiveram sempre presentes me apoiando e me dando todas as condições para prosseguir com meus estudos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Waldemar pelo apoio, incentivo e principalmente pela paciência durante todos estes anos.

Aos meus amigos de graduação em especial Cintya, Gustavo, Jucilene, Aroldo, Eduardo, Eduardo Costa, João, Clayton, Alan e Marcos.

Aos meus amigos de pós-graduação, em especial Glauce, Andrea, Michelli, André, Érica, Meire, Rodiak e Rafael pelo agradável convívio tanto nos momentos de estudo como nos de descontração em nossa sala de estudos e em nossos churrascos.

Aos Professores do Departamento de Matemática IBILCE/UNESP - São José do Rio Preto pelo conhecimento transmitido e por despertarem em mim o desejo de seguir a mesma carreira.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

*"Uma pessoa é capaz de conseguir
qualquer coisa se o seu entusiasmo
não tiver limites"*

Charles Schwab

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar o Teorema clássico de Unicidade de Holmgren e mostrar uma aplicação na teoria de controle em equações diferenciais parciais por meio de um exemplo relativamente simples.

Palavras-chave: Equação da onda, Teorema de Holmgren, Controle aproximado.

Abstract

The aim of this work is to present the classical Holmgren's uniqueness theorem and give an application in control theory in partial differential equations through a relatively simple example.

Keywords: Wave equation, Holmgren's theorem, approximate control.

Sumário

Introdução	p. 9
1 O Teorema de Holmgren	p. 10
1.1 Conceitos Iniciais	p. 10
1.2 Apresentação do Teorema de Holmgren	p. 16
1.3 Preparação para a demonstração: Parte 1	p. 17
1.4 Preparação para a demonstração: Parte 2	p. 21
1.5 Demonstração do teorema	p. 24
2 Uma Aplicação do Teorema de Holmgren	p. 28
2.1 Noções de controlabilidade	p. 28
2.2 Controlabilidade Aproximada para a Equação da Onda . . .	p. 32
2.2.1 Formulação do Problema	p. 32
2.2.2 Resolução do problema para $T \geq 2r$	p. 36
2.2.3 Resolução do problema para $T < 2r$	p. 39
Apêndice A O Espaço dos Estados com Energia Finita	p. 41
Referências Bibliográficas	p. 49

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar o Teorema clássico de Unicidade de Holmgren e mostrar uma aplicação deste teorema na teoria de controle em equações diferenciais parciais por meio de um exemplo relativamente simples.

No primeiro capítulo, inicialmente daremos algumas definições e resultados necessários ao entendimento do teorema de unicidade de Holmgren, dentre eles o Teorema de Cauchy-Kovalevsky. O Teorema de Holmgren é enunciado e demonstrado em seguida para um operador diferencial linear de segunda ordem. A demonstração do teorema tem como referências [4] e [11].

No capítulo seguinte aplicaremos o Teorema de Holmgren na resolução de um problema de controle aproximado para equação de onda em três dimensões. Como referências usamos os trabalhos [8] e [9]. Fornecemos também no início do mesmo capítulo os resultados na teoria de controle que se fazem necessários para o entendimento do exemplo dado.

Finalmente este trabalho traz um apêndice sobre os espaços dos estados com energia finita. Mostramos que é um espaço de Hilbert fazendo uso da desigualdade de Poincaré-Wirtinger.

Capítulo 1

O Teorema de Holmgren

Neste capítulo apresentaremos a demonstração do teorema de unicidade de Holmgren para o caso particular de um operador diferencial parcial linear de ordem dois. Antes, porém apresentaremos os conceitos necessários para a demonstração.

1.1 Conceitos Iniciais

Entendemos por *superfície* em \mathbb{R}^n um conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) = 0\}$ onde $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é função diferenciável com $\nabla\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in S$. A superfície S é dita *analítica* se ϕ é função real analítica.

Um operador diferencial parcial linear de ordem m num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ e a_α com $|\alpha| \leq m$ são funções reais definidas em Ω .

Muitas das propriedades das soluções de equações $Pu = f$ dependem apenas dos termos com derivadas de maior ordem. Estes termos compõem a parte principal de P , ou seja, a *parte principal do operador* P é o operador

$$P_m = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Chamamos *equação característica* associada ao operador P a equação

$$Q(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha = 0$$

onde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$.

Um vetor não nulo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ define uma direção em \mathbb{R}^n . Toda solução não nula da equação característica é chamada *direção característica*. Observe que se $\xi \neq 0$ é uma direção característica então $\lambda \xi$ também o é, para todo $\lambda \neq 0$.

É importante notar que se os coeficientes da parte principal do operador P são constantes, então as direções características não dependem do ponto $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.1. *Seja S uma superfície dada por $S = \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) = 0\}$ onde ϕ é uma função diferenciável com $\nabla\phi \neq 0$ em S . Dizemos que S é característica em $x_0 \in S$ em relação ao operador P se*

$$Q(\nabla\phi(x_0)) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0) (\nabla\phi(x_0))^\alpha = 0.$$

A superfície S é chamada superfície característica em relação ao operador P se S é característica em todos os seus pontos.

Segue da definição acima que uma superfície S é característica em $x_0 \in S$ se o vetor normal à S em x_0 for uma direção característica.

Definição 1.2. *Nas condições da definição anterior, S é dita não característica em $x_0 \in S$ em relação ao operador P se*

$$Q(\nabla\phi(x_0)) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0) (\nabla\phi(x_0))^\alpha \neq 0.$$

A superfície S é chamada superfície não característica em relação ao operador P se S é não característica em todos os seus pontos.

Exemplo 1.1. *Consideremos o operador $Lu = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}$. A parte principal de L é o próprio operador, assim sua equação característica é*

$$\xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0.$$

As direções características para esse operador são vetores que fazem ângulo de 45° com eixo t . Observe ainda que planos cujo vetor normal faz ângulo de 45° com o eixo t são superfícies características para o operador dado. Uma importante família de superfícies características para este operador são cones cujo vetor normal faz ângulo de 45° com o eixo t . Tais cones são chamados cones característicos.

Exemplo 1.2. [7] Consideremos a equação de onda em duas dimensões

$$u_{yy} - u_{xx} = 0, \quad (1.1)$$

com dados iniciais sobre $y = 0$, $-1 < x < 1$. Sua equação característica é

$$\xi_2^2 - \xi_1^2 = 0.$$

Suas superfícies características são retas que fazem ângulo de 45° com o eixo y .

Seja

$$\phi(x, y) = (x - y + 1)(x + y - 1).$$

Escrevendo S_λ , $-1 \leq \lambda < 0$ como o arco da hipérbole $\phi(x, y) = \lambda$ que permanece dentro do triângulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, observamos que para todo λ com $-1 \leq \lambda < 0$, S_λ é não característica em relação ao operador da equação (1.1). Além disso as curvas S_λ preenchem todo o interior do triângulo acima citado, como mostra a Figura 1.1 abaixo.

Uma situação análoga a esta ocorre quando estamos trabalhando em espaços de dimensão superior onde o triângulo é substituído por um cone característico que tem seu interior preenchido por superfícies não características.

Observemos que um cone não característico pode ser obtido por uma rotação conveniente de um triângulo como o da figura abaixo. Assim o preenchimento do triângulo com curvas não características nos fornece, mediante rotação, nova região do espaço preenchida por superfícies não características.

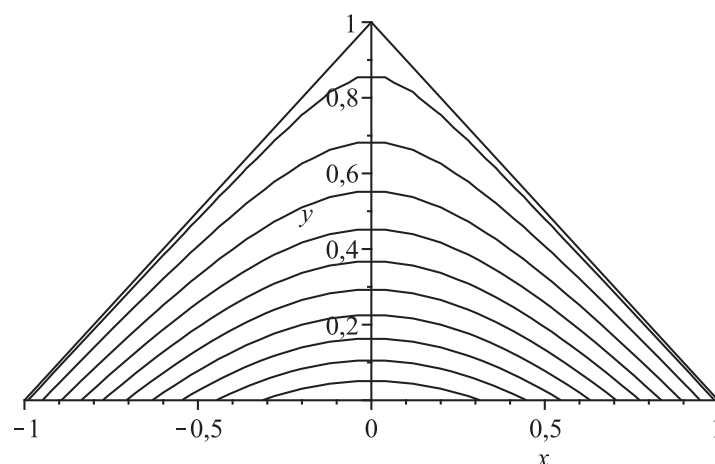


Figura 1.1

Consideremos a equação diferencial parcial linear de ordem m

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f, \quad (1.2)$$

onde os coeficientes a_α e f são funções definidas num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sejam S a parte de uma superfície de \mathbb{R}^n contida em Ω , $\nu = \nu(x)$ o vetor normal unitário à superfície S no ponto $x \in S$ e $\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$ funções dadas, definidas em S .

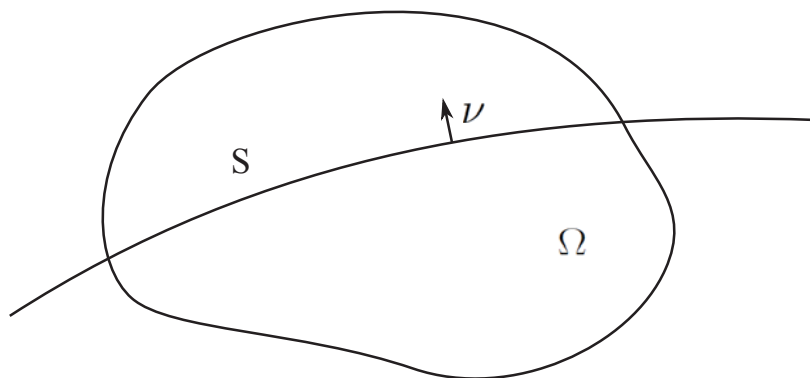


Figura 1.2

O *problema de Cauchy* para a equação (1.2) consiste em achar uma função suficientemente diferenciável $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça a equação (1.2) em Ω e as condições iniciais

$$u|_S = \varphi_0, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = \varphi_1, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}|_S = \varphi_{m-1} \quad (1.3)$$

em S . Aqui $\frac{\partial u}{\partial \nu}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}$ são as derivadas normais de u até ordem $m-1$, dadas por

$$\frac{\partial^J u}{\partial \nu^J} = \sum_{|\alpha|=J} \frac{J!}{\alpha!} \nu^\alpha D^\alpha u, \quad J = 1, \dots, m.$$

Observação 1.1. *Seja S uma superfície em Ω e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais contínuas até ordem $m-1$. Os dados de Cauchy (1.3) para tal função u determinam de maneira única todas as derivadas $D^\alpha u$, $|\alpha| \leq m-1$ sobre S e, reciprocamente, se conhecermos todas as derivadas $D^\alpha u$, $|\alpha| \leq m-1$ em S , podemos determinar os dados de Cauchy (1.3) para a função u ao longo de S .*

Em vista da observação acima os problemas de Cauchy podem ser reformulados e escritos da seguinte forma: dadas as funções g_α , $|\alpha| \leq m-1$ definidas em S e f definida em Ω , achar uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente derivável satisfazendo:

$$\begin{cases} Pu = f \\ D^\alpha u = \varphi_\alpha \text{ sobre } S \text{ para todo } |\alpha| \leq m-1. \end{cases} \quad (1.4)$$

O exemplo a seguir ilustra a importância das superfícies características.

Exemplo 1.3. *Seja o operador $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ um operador diferencial parcial no domínio $\Omega = \mathbb{R}^2$. Sua equação característica é*

$$\xi_1 = 0,$$

e $(0, 1)$ é a única direção característica. Portanto suas curvas características são retas $y = cte$.

Seja C uma curva não característica em relação a D_1 . Assim o vetor normal a C tem componente x não nula em todo ponto de C . Logo C pode ser dada por uma equação do tipo

$$x = h(y). \quad (1.5)$$

Considere o seguinte problema de Cauchy com condições iniciais ao longo de C

$$\begin{cases} D_1 u = 0 \\ u(h(y), y) = f(y) \end{cases} \quad (1.6)$$

onde f é uma função dada.

A equação diferencial do problema acima nos diz que u não depende da variável x . Seja $u(x, y) = g(y)$ uma solução da equação. Logo $f(y) = u(h(y), y) = g(y)$. Assim $f = g$ e portanto $u(x, y) = f(y)$ é a única solução do problema (1.6).

Suponhamos agora que C é uma curva característica, por exemplo $y = 0$, e considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} D_1 u = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (1.7)$$

onde f é dada. Se f não é constante, então não pode haver solução para o problema (1.7) pois a equação diferencial contradiz a condição inicial sobre $y = 0$. Por outro lado, se $f(x) = k$ para todo x , então para toda função $g(y)$ com $g(0) = k$, a função

$$u(x, y) = g(y)$$

é uma solução do problema (1.7).

Assim quando a curva inicial C é característica, pode não existir solução para o problema de Cauchy ou poderá haver uma infinidade de soluções. ■

Na demonstração do Teorema de Holmgren faremos uso do Teorema de Cauchy-Kovalevsky. Enunciaremos tal teorema para uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem. Observamos que o mesmo vale para equações quasi-lineares de ordem superior.

Teorema 1.1 (Cauchy-Kovalevsky). *Considere a equação*

$$Lu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f. \quad (1.8)$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, S a parte de uma superfície em \mathbb{R}^n contida em Ω e $x_0 \in S$ um ponto. Suponha que os coeficientes a_{ij} , b_j , c , f são analíticos numa vizinhança de x_0 . Suponhamos também que S seja não característica em

x_0 em relação ao operador L . Então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} Lu = f \\ D^\beta u(x) = g_\beta(x), |\beta| \leq 1, x \in S \end{cases} \quad (1.9)$$

com dados iniciais $g_\beta(x)$, $|\beta| \leq 1$ analíticos tem uma única solução u analítica numa vizinhança de x_0 .

Demonstração: Veja [3] ou [4].

1.2 Apresentação do Teorema de Holmgren

A estratégia para provar o Teorema de Holmgren é motivada por um resultado abstrato envolvendo o operador linear e seu adjunto. Suponha que X e Y são espaços vetoriais normados e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. O operador adjunto $T^* : Y' \rightarrow X'$ do operador T é definido por

$$\langle T^*y', x \rangle = \langle y', Tx \rangle, \forall y' \in Y', \forall x \in X,$$

onde X' e Y' são os espaços duais de X e Y respectivamente e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa a respectiva dualidade.

Proposição 1.1. *Se a imagem do operador T^* é densa em X' , então $\ker(T) = \{0\}$, ou seja, $u = 0$ é o único $u \in X$ satisfazendo $Tu = 0$.*

Demonstração: Para todo $y' \in Y'$ e todo $u \in \ker(T)$, $\langle y', Tu \rangle = 0$. Logo

$$\langle T^*y', u \rangle = 0, \forall y' \in Y', \forall u \in \ker(T).$$

Seja $x' \in X'$. Usando a densidade da imagem de T^* , existe sequência $(x'_k) \in \text{Im}(T^*)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_k = x'$. Seja $y'_k \in Y'$ tal que $T^*y'_k = x'_k$.

Para $u \in \ker(T)$ temos a expressão

$$\langle x', u \rangle = \langle \lim_{k \rightarrow \infty} x'_k, u \rangle = \langle \lim_{k \rightarrow \infty} T^*y'_k, u \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T^*y'_k, u \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle x', u \rangle = 0, \text{ para todo } x' \in X'.$$

Do Teorema de Hahn-Banach segue que

$$\|u\|_X = \sup_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\| \leq 1}} |\langle x', u \rangle| = 0.$$

Logo $u = 0$. ■

Concluimos então que a existência de soluções da equação adjunta $T^*v = g$ para um conjunto de funções g , que seja denso no espaço ao qual pertença u , prova a unicidade de solução da equação $Tu = f$.

A seguir enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Holmgren para uma equação diferencial parcial linear de ordem dois. Este teorema, assim como o Teorema de Cauchy-Kovalevsky, também vale para equações diferenciais parciais lineares de ordem superior a dois.

Teorema 1.2 (Teorema de Unicidade de Holmgren). *Seja L o operador diferencial linear*

$$Lu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu \quad (1.10)$$

com coeficientes a_{ij} , b_j , c reais analíticos num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e j . Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) = 0\} \subset \Omega$ uma superfície analítica não característica em relação a L . O problema de Cauchy

$$\begin{cases} Lu = f \text{ em } \Omega \\ D^\beta u(x) = g_\beta(x), |\beta| \leq 1, x \in S \end{cases} \quad (1.11)$$

com dados iniciais e f de classe \mathcal{C}^2 tem no máximo uma solução clássica numa vizinhança de S .

1.3 Preparação para a demonstração: Parte 1

Na demonstração do teorema de Holmgren encontraremos a seguinte situação: sendo L o operador (1.10) e G uma região contida em \mathbb{R}^n com fronteira $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, em que Γ_1 , Γ_2 são superfícies não características em relação

a L . Se u e v são funções tais que

$$D^\beta u(x) = 0, \quad |\beta| \leq 1, \quad x \in \Gamma_1, \quad (1.12)$$

$$D^\beta v(x) = 0, \quad |\beta| \leq 1, \quad x \in \Gamma_2. \quad (1.13)$$

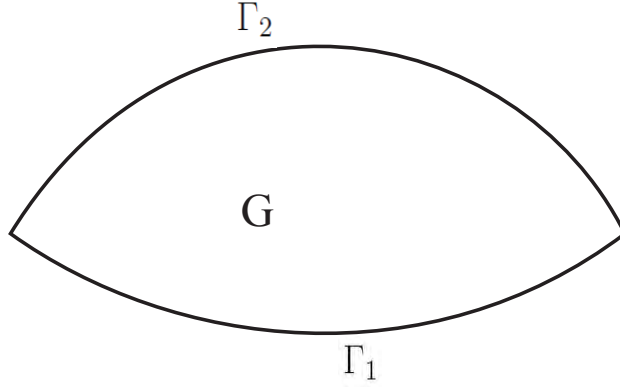


Figura 1.3

Estaremos interessados na unicidade de solução do problema

$$Lu = 0 \text{ em } G, \quad (1.14)$$

com dados (1.12), isto é, em concluir que $u \equiv 0$ em G .

Integrando o produto vLu em G , obtemos as igualdades

$$\begin{aligned} \int_G vLu \, dx &= \int_G v \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu \right) dx \\ &= \int_G \left(v \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij} \right) + \left(v \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} b_j \right) + vcu \, dx \\ &= \int_G \left(v \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij} \right) dx + \int_G \left(v \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} b_j \right) dx + \int_G vcu \, dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Analisemos cada integral de (1.15) separadamente. Usando a fórmula de integração por partes na primeira integral de (1.15), obtemos a expressão

$$\int_G v \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij} dx = - \int_G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} v) dx + \int_{\partial G} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} a_{ij} v \nu_i dS,$$

onde ν_i é a componente i do vetor normal unitário à ∂G .

Integrando por partes novamente temos

$$\begin{aligned} \int_G v \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij} dx &= \int_G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} v) dx + \int_{\partial G} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} a_{ij} v \nu_i dS - \\ &\quad - \int_{\partial G} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} v) \nu_j dS. \end{aligned}$$

Observemos que as integrais sobre a fronteira de G se anulam devido às condições (1.12) e (1.13). Portanto concluímos que

$$\int_G v \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij} dx = \int_G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} v) dx.$$

Integrando por partes também a segunda integral de (1.15) e obtemos a igualdade

$$\int_G \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} b_j v \right) dx = - \int_G \sum_{j=1}^n u \frac{\partial}{\partial x_j} (b_j v) dx + \int_{\partial G} \sum_{j=1}^n u b_j v \nu_j dS.$$

Novamente a integral na fronteira de G se anula devido às condições (1.12) e (1.13). Concluímos então que

$$\int_G v(Lu) dx = \int_G M(v)u dx, \quad (1.16)$$

onde

$$Mv = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} v) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (b_j v) + cv,$$

o qual chamamos *operador adjunto* de L .

Da definição de M vemos que sua parte principal é igual à parte principal de L . Daí, toda superfície não característica em relação a L também o é em

relação a M .

Agora suponhamos que o *problema adjunto*

$$\begin{cases} Mv = w \text{ em } G \\ D^\beta v = 0, |\beta| \leq 1, x \in \Gamma_2 \end{cases} \quad (1.17)$$

tenha uma solução para w variando num conjunto W denso no espaço ao qual pertença a função u . De (1.16), obtemos a identidade

$$0 = \int_G v(Lu) \, dx = \int_G M(v)u \, dx = \int_G wu \, dx. \quad (1.18)$$

Supondo $w = u$, obtemos a igualdade

$$0 = \int_G u^2 \, dx,$$

de onde segue que $u = 0$ em G .

Se $w \neq u$ tomemos uma sequência (w_n) em W convergindo uniformemente para u e Consideremos o problema adjunto

$$\begin{cases} Mv_n = w_n \text{ em } G \\ D^\beta v_n = 0, |\beta| \leq 1, x \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (1.19)$$

$n = 1, 2, \dots$. Temos

$$0 = \int_G v_n(Lu) \, dx = \int_G M(v_n)u \, dx = \int_G w_n u \, dx.$$

Aplicando o limite vem

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G w_n u \, dx = \int_G u^2 \, dx.$$

Logo $u = 0$ em G .

O argumento acima exposto é a essência da demonstração do Teorema de Holmgren.

A contribuição do Teorema de Cauchy-Kovalevsky ao Teorema de Holmgren é garantir a existência de solução do problema adjunto (1.19).

1.4 Preparação para a demonstração: Parte 2

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) = 0\}$ como no enunciado do teorema de Holmgren. Seja S_0 uma parte compacta de S . Vamos supor que existe uma superfície analítica dada por $S' = \{x \in \mathbb{R}^n; \alpha(x) = 0\}$ tal que a fronteira de S_0 seja dada por

$$\partial S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n; \alpha(x) = 0\}.$$

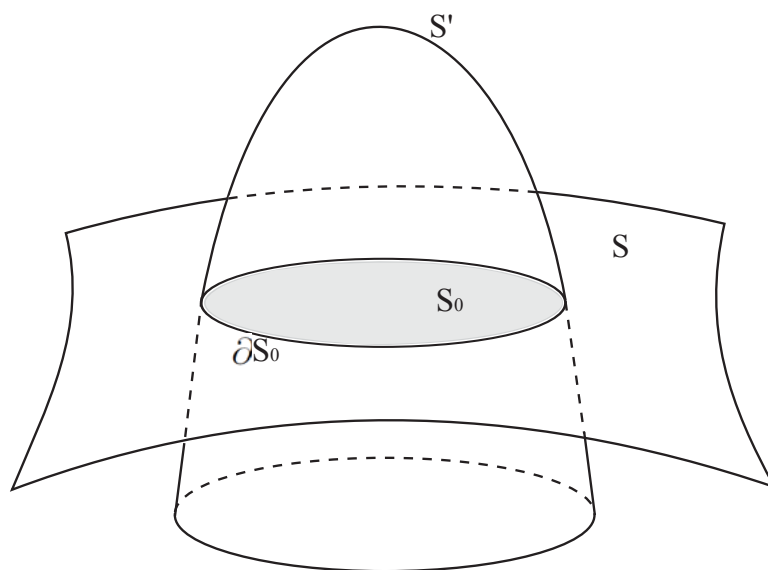


Figura 1.4

Seja $\Phi : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, \lambda) = (1 - \lambda)\phi(x) + \lambda\alpha(x)$. A aplicação Φ é uma homotopia entre ϕ e α e é analítica nas variáveis x e λ . As superfícies de nível $\Phi(x, \lambda) = 0$ preenchem toda a região entre S_0 e a parte de S' acima de S como na Figura 1.3. Assim, Φ deforma S_0 continuamente mantendo fixa a fronteira de S_0 .

Definamos a família

$$S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; \Phi(x, \lambda) = 0\}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Cada S_λ é uma superfície analítica. Vamos mostrar agora a seguinte afirmação:

Lema 1.1. *Existe $\bar{\lambda}$, $0 \leq \bar{\lambda} \leq 1$ tal que para todo $0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$ a superfície S_λ é não característica em relação a L .*

Demonstração: Para demonstrar o lema exibiremos $\bar{\lambda}$ tal que

$$\nabla\Phi(x, \lambda) \neq 0, \quad \nabla\Phi(x, \lambda)A\nabla\Phi(x, \lambda)^t \neq 0$$

para todo $x \in S_\lambda$ e $0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$. Aqui $A = [a_{ij}]$ é a matriz dos coeficientes da equação.

A aplicação $x \mapsto \|\nabla\phi(x)\|$ é contínua em \mathbb{R}^n e positiva no compacto S_0 . Do teorema de Heine-Borel concluímos que existe $\delta_1 > 0$ e um compacto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo S_0 em seu interior tal que

$$\|\nabla\phi(x)\| \geq \delta_1, \quad x \in U.$$

Notemos que $\nabla\Phi(x, \lambda) = (1 - \lambda)\nabla\phi(x) + \lambda\nabla\alpha(x)$, e assim

$$\|\nabla\Phi(x, \lambda)\|^2 = (1 - \lambda)^2\|\nabla\phi(x)\|^2 + \lambda^2\|\nabla\alpha(x)\|^2 + 2(1 - \lambda)\lambda\nabla\phi(x)\nabla\alpha(x).$$

Para cada x fixo em U temos a igualdade

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|\nabla\Phi(x, \lambda)\|^2 = \|\nabla\phi(x)\|^2 \geq \delta_1^2.$$

De onde concluímos que para um ponto x_0 qualquer em U tem-se a expressão

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|\nabla\Phi(x, \lambda)\|^2 = \|\nabla\phi(x_0)\|^2 \geq \delta_1^2.$$

Mas a função $(x, \lambda) \mapsto \|\nabla\Phi(x, \lambda)\|^2$ é contínua em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. De onde segue que

$$\|\nabla\Phi(x_0, 0)\|^2 = \lim_{(x, \lambda) \rightarrow (x_0, 0^+)} \|\nabla\Phi(x, \lambda)\|^2 = \|\nabla\phi(x_0)\|^2 \geq \delta_1^2,$$

para todo $x_0 \in U$, ou seja, $\|\nabla\Phi(x, 0)\| \geq \delta_1$ para todo $x \in U$.

Usando a continuidade de $(x, \lambda) \mapsto \|\nabla\Phi(x, \lambda)\|$ em $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$ e a compacidade de $U \times \{0\}$ em \mathbb{R}^{n+1} , o teorema de Heine-Borel e a desigualdade

$$\|\nabla\Phi(x, 0)\| \geq \delta_1, \quad x \in U$$

concluímos que existe $\bar{\lambda}$, $0 \leq \bar{\lambda} \leq 1$ tal que

$$\|\nabla\Phi(x, \lambda)\| \geq \delta_1$$

para todo $x \in U$ e todo λ com $0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$.

Agora consideremos em $\Omega \times [0, 1]$ a função contínua

$$(x, \lambda) \mapsto \nabla\Phi(x, \lambda)A\nabla\Phi(x, \lambda)^t = Q(\nabla\Phi(x, \lambda)).$$

Temos, para cada $x_0 \in S$, que

$$Q(\nabla\Phi(x_0, 0)) = Q(\nabla\phi(x_0)) \neq 0.$$

Usando o mesmo argumento acima, podemos encontrar vizinhança compacta \tilde{U} de S_0 , $\tilde{\delta}_1 > 0$ e $\tilde{\lambda}$ com $0 < \tilde{\lambda} \leq 1$ tais que

$$Q(\nabla\Phi(x, \lambda)) \neq 0$$

para todo $x \in \tilde{U}$ e todo λ com $0 \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}$. Ajustando os elementos U , \tilde{U} , $\bar{\lambda}$, $\tilde{\lambda}$, δ_1 e $\tilde{\delta}_1$ se necessário, teremos o lema provado. ■

Para λ_1 e λ_2 com $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \bar{\lambda}$, denotemos por $R_{\lambda_1\lambda_2}$ a região determinada por S_λ tal que $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ e escrevemos $R = R_{0\bar{\lambda}}$.

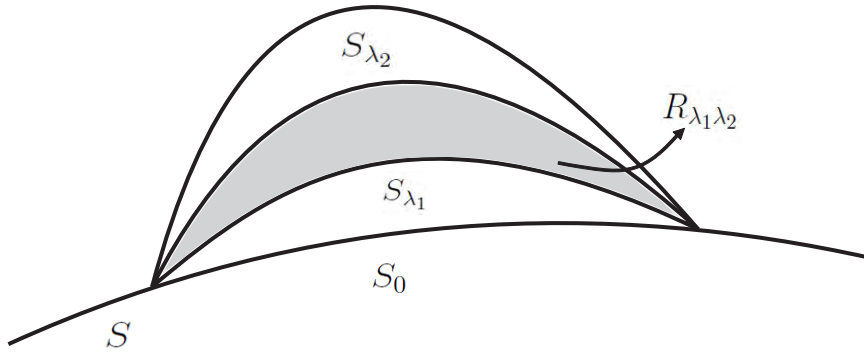


Figura 1.5

Para concluirmos a demonstração do teorema precisaremos do seguinte lema, o qual será demonstrado posteriormente.

Lema 1.2. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que se $0 \leq \lambda < \mu \leq \bar{\lambda}$ e $\mu - \lambda < \varepsilon$, então a equação $M(v) = w$ em $R_{\lambda\mu}$, com $D^\beta v = 0$ sobre a superfície S_μ , $|\beta| \leq 1$ tem solução v para um conjunto de funções w denso em $\mathcal{C}(R_{\lambda\mu})$.*

1.5 Demonstração do teorema

Podemos agora passar a demonstração do teorema de Holmgren. Suponhamos então que $Lu = 0$ em $R = R_{0\bar{\lambda}}$ com $D^\beta u = 0$, $|\beta| \leq 1$ sobre a superfície S_0 . Podemos encontrar um subconjunto finito

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k = \bar{\lambda}$$

de forma que

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j < \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 1, \dots, k-1,$$

onde ε é como no lema 1.2.

Pelo lema 1.2 sabemos que o problema

$$\begin{cases} M(v) = w \\ D^\beta v(x) = 0, \quad |\beta| \leq 1, \quad x \in S_{\lambda_2} \end{cases} \quad (1.20)$$

tem solução em $R_{0\lambda_2}$ para um conjunto de funções w denso em $\mathcal{C}(R_{0\lambda_2})$. A fronteira de $R_{0\lambda_2}$ é $\partial R_{0\lambda_2} = S_0 \cup S_{\lambda_2}$ onde u e suas primeiras derivadas são nulas sobre S_0 e v e suas primeiras derivadas são nulas sobre S_{λ_2} . Veja Figura 1.6. Da densidade de W em $R_{0\lambda_2}$, existe sequência $\{w_k\} \in W$, tal que w_k

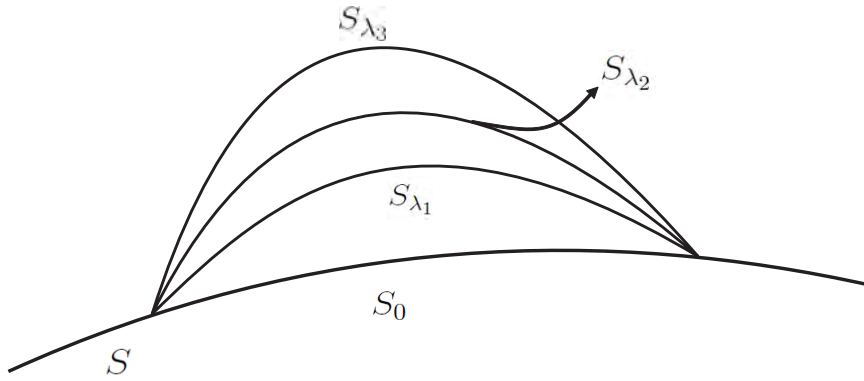


Figura 1.6

converge uniformemente para u em $R_{0\lambda_2}$. Para cada k , existe solução v_k do problema

$$\begin{cases} M(v_k) = w_k \\ D^\beta v_k(x) = 0, \quad |\beta| \leq 1, \quad x \in S_{\lambda_2} \end{cases} \quad (1.21)$$

em $R_{0\lambda_2}$ e assim

$$0 = \int_{R_{0\lambda_2}} Luv_k \, dx = \int_{R_{0\lambda_2}} uMv_k \, dx = \int_{R_{0\lambda_2}} uw_k \, dx.$$

Aplicando o limite temos

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{R_{0\lambda_2}} uw_k \, dx = \int_{R_{0\lambda_2}} \lim_{k \rightarrow \infty} uw_k \, dx = \int_{R_{0\lambda_2}} u^2 \, dx.$$

Portanto $u \equiv 0$ em $R_{0\lambda_2}$.

Usaremos o mesmo raciocínio para a região $R_{\lambda_1\lambda_3}$ que tem como fronteira $\partial R_{\lambda_1\lambda_3} = S_{\lambda_1} \cup S_{\lambda_3}$. Como $S_{\lambda_1} \subset R_{0\lambda_2}$, tanto u como suas derivadas de primeira ordem são nulas sobre S_{λ_1} , assim se $\{w_k\}$ é uma sequência de funções em W convergindo uniformemente para u em $R_{\lambda_1\lambda_3}$. Para cada k , existe solução para o problema

$$\begin{cases} M(v_k) = w_k \\ D^\beta v_k(x) = 0, \quad |\beta| \leq 1, \quad x \in S_{\lambda_3} \end{cases} \quad (1.22)$$

em $R_{\lambda_1\lambda_3}$ de onde obtemos que

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{R_{\lambda_1\lambda_3}} uw_k \, dx = \int_{R_{\lambda_1\lambda_3}} \lim_{k \rightarrow \infty} uw_k \, dx = \int_{R_{\lambda_1\lambda_3}} u^2 \, dx.$$

Portanto $u \equiv 0$ em $R_{\lambda_1\lambda_3}$.

Repetindo o processo finitas vezes obtemos $u \equiv 0$ em $R_{0\bar{\lambda}}$ o que completa a demonstração do teorema. ■

Demonstração do Lema 1.2: Para λ, μ com $0 \leq \lambda < \mu \leq \bar{\lambda}$, suponhamos $u, v : R_{\lambda\mu} \rightarrow \mathbb{R}$ funções com todas as derivadas necessárias para nossa discussão e tais que

$$D^\beta u(x) = 0, \quad |\beta| \leq 1, \quad x \in S_\lambda,$$

$$D^\beta v(x) = 0, \quad |\beta| \leq 1, \quad x \in S_\mu.$$

Da seção 1.3 vem que

$$\int_{R_{\lambda\mu}} v(Lu) \, dx = \int_{R_{\lambda\mu}} M(v)u \, dx \quad (1.23)$$

e ainda pelo discutido na seção 1.3 a fim de que possamos concluir que $u = 0$

em $R_{\lambda\mu}$ é necessário que possamos resolver o problema de Cauchy adjunto

$$\begin{cases} Mv = w \text{ em } R_{\lambda\mu} \\ D^\beta v(x) = 0, |\beta| \leq 1, x \in S_\mu \end{cases} \quad (1.24)$$

para uma classe de funções w que seja densa em $\mathcal{C}(R_{\lambda\mu})$ e desde que possamos garantir que todas as soluções $v = v(w)$ estejam numa mesma vizinhança contendo $R_{\lambda\mu}$, independente de w .

Inicialmente, escolhemos w do tipo

$$w_\theta(x) = \exp(\theta \cdot x),$$

sendo $\theta \in \mathbb{R}^n$ com $|\theta| \leq 1$. Aqui $\theta \cdot x$ é o produto interno entre θ e x . A escolha das funções w_θ como acima obedece duas razões: Primeiro, o conjunto de suas combinações lineares, ao qual chamaremos W , é denso em $\mathcal{C}(\Omega)$, observemos que cada monômio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ pode ser aproximado uniformemente em cada subconjunto limitado por combinações lineares de w_θ , $|\theta| \leq 1$, a saber,

$$x^\alpha = \lim_{\xi \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n \left(\frac{e^{x_k \xi_k} - 1}{\xi_k} \right)^{\alpha_k}$$

e segundo, que a família $\{w_\theta(x), |\theta| \leq 1\}$ é uma família de funções analíticas parametrizada no compacto $\{\theta \in \mathbb{R}^n; |\theta| \leq 1\}$.

O problema de Cauchy adjunto para esse caso é

$$\begin{cases} Mv = \exp(\theta \cdot x) \text{ em } \Omega \\ D^\beta v(x) = 0, |\beta| \leq 1, x \in S_\mu. \end{cases} \quad (1.25)$$

Observe que:

- 1) Os coeficientes do operador M são analíticos.
- 2) A parte principal de M é a mesma de L .
- 3) De 2) segue que S_μ é não característica em relação ao operador M .

As três propriedades acima não dependem do espaço onde está mergulhada S_μ . Por isso, podemos enxergar o problema acima no espaço $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, com

variáveis x, θ, μ . Os dados iniciais $D^\beta v(x) = 0, |\beta| \leq 1$ valem no conjunto

$$\{(x, \theta, \mu) \in \mathbb{R}^{2n+1}; x \in S_\mu, |\theta| \leq 1, 0 \leq \mu \leq \bar{\lambda}\}.$$

Pelo Teorema de Cauchy-Kovalevsky existe uma vizinhança de S_μ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ onde o problema (1.25) tem uma solução $v(x, \theta, \mu)$. Projetando tal vizinhança em \mathbb{R}^n , obtemos solução para todas as $w_\theta(x)$ com $|\theta| \leq 1$ numa δ -vizinhança de S_μ em \mathbb{R}^n .

Usando a linearidade do operador M podemos obter soluções v para todas as combinações lineares de $w_\theta(x)$ com $|\theta| \leq 1$, nessa mesma δ -vizinhança.

Logo existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer θ, μ com $|\theta| \leq 1$ e $0 \leq \mu \leq \bar{\lambda}$, a solução $v(x, \theta, \mu)$ está definida para todo x numa δ -vizinhança de S_μ .

Usando a continuidade da deformação de S_0 concluímos que existe $\varepsilon > 0$ tal que se os parâmetros λ, μ com $0 \leq \lambda < \mu \leq \bar{\lambda}$ satisfizerem $0 < \mu - \lambda < \varepsilon$, então existe solução v para o problema

$$\begin{cases} Mv = \exp(\theta \cdot x) \text{ em } \mathbb{R}_{\lambda\mu} \\ D^\beta v(x) = 0, |\beta| \leq 1, x \in S_\mu. \end{cases} \quad (1.26)$$

e a demonstração do lema está completa. ■

Observe que a região de unicidade do problema consiste de todos os pontos que podem ser cobertos deformando uma parte da superfície inicial analiticamente por superfícies não características mantendo a fronteira fixa. Assim a região de unicidade depende da geometria da superfície e do operador em questão.

Capítulo 2

Uma Aplicação do Teorema de Holmgren

Na primeira seção desse capítulo apresentaremos o conceito de controlabilidade aproximada para um operador linear de ordem dois. Na seção seguinte aplicaremos o teorema de Holmgren em um problema de controle para equação de onda.

2.1 Noções de controlabilidade

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e L o operador

$$Lu = u_{tt} - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + c(x)u,$$

onde

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > a_0 |\xi|^2, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad a_0 > 0, \quad c(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Considere o sistema

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1 & \text{em } \Omega \\ Bu = h & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $(u_0, u_1) \in H_1 \times H_2 = \mathcal{H}$, $h \in \mathcal{B}$, H_1 , H_2 e \mathcal{B} são espaços de Hilbert. B é um operador linear apropriado que não possui derivadas em relação a t .

Agora suponhamos que para todo $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, para todo $h \in \mathcal{B}$, exista solução u de (2.1) tal que $(u(\cdot, t), u_t(\cdot, t)) \in \mathcal{H}$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e para cada $T > 0$ existe $K = K(T) > 0$ tal que

$$\|(u(\cdot, t), u_t(\cdot, t))\|_{\mathcal{H}} \leq K(\|h\|_{\mathcal{B}} + \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}})$$

para todo $t \in (0, T)$.

Definição 2.1. Dizemos que (2.1) é controlável aproximadamente no instante $T > 0$ se dados $\varepsilon > 0$, $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}$ existe controle $h \in \mathcal{B}$ tal que a solução de (2.1) com dados (u_0, u_1) e h satisfaz a desigualdade

$$\|(u(\cdot, T), u_t(\cdot, T)) - (v_0, v_1)\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.$$

Observemos que se (2.1) é controlável aproximadamente em $T > 0$ e $u_0 = u_1 = 0$ temos para todo $\varepsilon > 0$, para todo $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}$ existe $h \in \mathcal{B}$ tal que a solução de

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = u_t(\cdot, 0) = 0 & \text{em } \Omega \\ Bu = h & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.2)$$

satisfaz

$$\|(u(\cdot, T), u_t(\cdot, T)) - (v_0, v_1)\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.$$

Consideremos o operador linear limitado

$$\begin{aligned} S_T : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ h &\longmapsto S_T(h) = (u^h(\cdot, T), u_t^h(\cdot, T)) \end{aligned}$$

onde u^h é solução de (2.2).

Teorema 2.1. O sistema (2.1) é controlável aproximadamente em $T > 0$ se, e somente se,

$$\mathcal{H} = \overline{\text{Im}(S_T)}^{\mathcal{H}}.$$

Demonstração: (\implies) Imediato da definição.

(\impliedby) Sejam $\varepsilon > 0$, $(u_0, u_1), (v_0, v_1) \in \mathcal{H}$ quaisquer. Tomemos $z \in \mathcal{B}$ e

resolvamos o problema

$$\begin{cases} Lw = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ w(\cdot, 0) = u_0, w_t(\cdot, 0) = u_1 & \text{em } \Omega \\ Bw = z & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}. \quad (2.3)$$

Fixemos $(w(\cdot, T), w_t(\cdot, T)) \in \mathcal{H}$. Da hipótese, existem $h_1, h_2 \in \mathcal{B}$ tais que

$$\|S_T(h_1) - (v_0, v_1)\|_{\mathcal{H}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\|S_T(h_2) - (w(\cdot, T), w_t(\cdot, T))\|_{\mathcal{H}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $S_T(h_1) = (w_1(\cdot, T), w_{1t}(\cdot, T))$ e $S_T(h_2) = (w_2(\cdot, T), w_{2t}(\cdot, T))$, então w_1 e w_2 são soluções de

$$\begin{cases} Lw_1 = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ w_1 = w_{1t} = 0 & \text{em } \Omega \\ Bw_1 = h_1 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.4)$$

e

$$\begin{cases} Lw_2 = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ w_2 = w_{2t} = 0 & \text{em } \Omega \\ Bw_2 = h_2 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.5)$$

respectivamente. Definamos agora

$$W = w + w_1 - w_2.$$

Assim W é solução do problema

$$\begin{cases} LW = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ W(\cdot, 0) = u_0, W_t(\cdot, 0) = u_1 & \text{em } \Omega \\ BW = z + h_1 - h_2 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.6)$$

e valem as igualdades

$$\begin{aligned} (W(\cdot, T), W_t(\cdot, T)) &= (w(\cdot, T), w_t(\cdot, T)) + (w_1(\cdot, T), w_{1t}(\cdot, T)) - (w_2(\cdot, T), w_{2t}(\cdot, T)) \\ &= (w(\cdot, T), w_t(\cdot, T)) + S_T(h_1) - S_T(h_2). \end{aligned}$$

Logo

$$(W(\cdot, T), W_t(\cdot, T)) - (v_0, v_1) = (w(\cdot, T), w_t(\cdot, T)) - S_T(h_2) + S_T(h_1) - (v_0, v_1).$$

De onde segue que

$$\begin{aligned} \|(W(\cdot, T), W_t(\cdot, T)) - (v_0, v_1)\|_{\mathcal{H}} &\leq \\ \|S_T(h_1) - (v_0, v_1)\|_{\mathcal{H}} + \|S_T(h_2) - (w(\cdot, T), w_t(\cdot, T))\|_{\mathcal{H}} &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto existe $h = z + h_1 - h_2 \in \mathcal{B}$ tal que a solução de

$$\begin{cases} LW = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ W(\cdot, 0) = u_0, W_t(\cdot, 0) = u_1 & \text{em } \Omega \\ BW = h & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.7)$$

satisfaz a desigualdade

$$\|(W(\cdot, T), W_t(\cdot, T)) - (v_0, v_1)\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon,$$

como queríamos. ■

Do Teorema acima vemos que a definição de controlabilidade aproximada é equivalente à

Definição 2.2. *O sistema (2.1) é controlável aproximadamente no instante $T > 0$ se para todo $\varepsilon > 0$, para todo $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}$ existe $h \in \mathcal{B}$ tal que a solução u de*

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) = u_t(\cdot, 0) = 0 & \text{em } \Omega \\ Bu = h & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.8)$$

satisfaz

$$\|(u(\cdot, T), u_t(\cdot, T)) - (v_0, v_1)\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.$$

Mais resultados na teoria de controle podem ser encontrados em [10].

2.2 Controlabilidade Aproximada para a Equação da Onda

Ilustraremos o conceito de controlabilidade aproximada para equação de onda num domínio circular do plano \mathbb{R}^2 . Mostraremos a utilidade do Teorema de Holmgren no estudo desses problemas.

2.2.1 Formulação do Problema

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = 0, u_t(\cdot, 0) = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.9)$$

onde

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < r^2\}$;
- $n = n(x, y, t)$ é vetor normal unitário ao cilindro $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$.

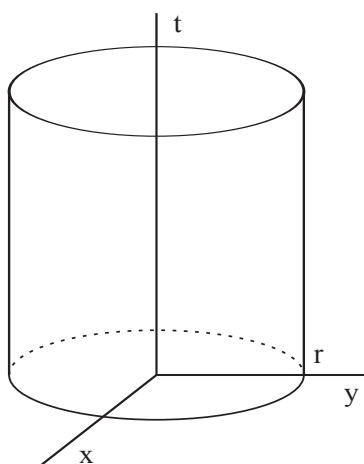


Figura 2.1

Seja

$$H = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Para todo $(w, v) \in H$ temos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty.$$

Definamos

$$\mathcal{E}(w, v) = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

A relação \sim definida em H por

$$(w, v) \sim (z, y) \iff \mathcal{E}(z - w, y - v) = 0$$

é uma relação de equivalência em H .

Denotemos $[w, v]$ a classe de equivalência de (w, v) e por H_E o espaço quociente H/\sim .

Em H_E definimos o produto interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_E} : H_E \times H_E \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\langle [w, v], [z, y] \rangle_{H_E} = \int_{\Omega} (vy + \nabla w \cdot \nabla z) dx dy. \quad (2.10)$$

$(H_E, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_E})$ é um espaço de Hilbert (ver apêndice A).

A norma proveniente do produto interno

$$\| \cdot \|_{H_E} : H_E \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dada por

$$\|(w, v)\|_{H_E} = \sqrt{\mathcal{E}(w, v)}.$$

Aqui não faremos distinção entre H e H_E identificando o par $(w, v) \in H$ com sua classe de equivalência $[w, v]$, ver apêndice. Daqui para frente o espaço dos estados finais \mathcal{H} será H_E , isto é, $\mathcal{H} = H_E$. Também colocaremos $\mathcal{B} = L^2(\partial\Omega \times (0, T))$.

Consideremos novamente o operador linear limitado

$$S_T : L^2(\partial\Omega \times (0, T)) \longrightarrow H_E$$

$$h \longmapsto S_T(h) = (u^h(\cdot, T), u_t^h(\cdot, T)),$$

onde u^h é solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) = 0, u_t(\cdot, 0) = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{em } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases}$$

$\text{Im}(S_T)$ é subespaço de H_E , assim de acordo com o teorema 2.1, o sistema (2.9) será controlável aproximadamente no instante $T > 0$ se, e somente se, $\text{Im}(S_T)$ é densa em H_E com a topologia induzida pela norma $\|\cdot\|_{H_E}$.

Os próximos resultados nos fornecerão uma condição necessária e suficiente para a controlabilidade aproximada do problema (2.9).

Proposição 2.1. *Para todo subconjunto $M \neq \emptyset$ de um espaço de Hilbert H , o span de M é denso em H se, e somente se, $M^\perp = \{0\}$.*

Detalhes da demonstração em [5]

Corolário 2.1. *Seja M subespaço de um espaço de Hilbert H , então M é denso em H se, e somente se, $M^\perp = \{0\}$.*

Proposição 2.2. *Sejam $(v_1, v_2) \in H_E$ e $v \in H^1(\Omega \times (0, T))$ solução fraca de*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ v(\cdot, T) = v_1, v_t(\cdot, T) = v_2 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.11)$$

então $(v_1, v_2) \perp \text{Im}(S_T)$ se, e somente se, $\frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0$ em $\partial\Omega \times (0, T)$.

Demonstração: Para $h \in L^2(\partial\Omega \times (0, T))$, seja $u (= u^h)$ solução de (2.9). Assumindo que a solução generalizada é suficientemente derivável temos

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{\Omega \times (0, T)} \left[\frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + \right. \\
& \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right) + \\
& \left. \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] dx dy dt = \\
& \int_{\Omega \times (0, T)} \operatorname{div} \begin{pmatrix} -\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} dx dy dt.
\end{aligned}$$

Do teorema da divergência segue que

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{t=T} \right. \\
& \left. - \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{t=0} \right] dx dy \\
& + \int_{\partial \Omega \times (0, T)} -\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial n} dS.
\end{aligned}$$

Observando as condições de u em $t = 0$ e as condições de fronteira de v obtemos

$$\int_{\partial \Omega \times (0, T)} \frac{\partial v}{\partial t} h dS = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{t=T} dx dy,$$

ou seja,

$$\int_{\partial \Omega \times (0, T)} \frac{\partial v}{\partial t} h dS = \langle (u^h(\cdot, T), u_t^h(\cdot, T)), (v_1, v_2) \rangle_{H_E}.$$

de onde segue o resultado. ■

Do corolário 2.1 e da proposição 2.2 segue que o sistema (2.9) não será controlável aproximadamente em $T > 0$ se, e somente se, existir estado terminal $(v(\cdot, T), v_t(\cdot, T)) = (v_1, v_2) \in H_E$ com norma não nula tal que a solução v de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ v(\cdot, T) = v_1, v_t(\cdot, T) = v_2 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{em } \partial \Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.12)$$

satisfaz a condição

$$\frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, T).$$

2.2.2 Resolução do problema para $T \geq 2r$

Apresentaremos agora o resultado quando $T \geq 2r$.

Teorema 2.2. *O problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = 0, u_t(\cdot, 0) = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.13)$$

é controlável aproximadamente no instante $T \geq 2r$ nos espaços H_E e $L^2(\partial\Omega \times (0, T))$.

Demonstração: Analisemos o problema de controle para o tempo $T = 2r$ (=diâmetro de Ω). O comportamento dos cones característicos para $T = 2r$ é descrito pela Figura 2.2.

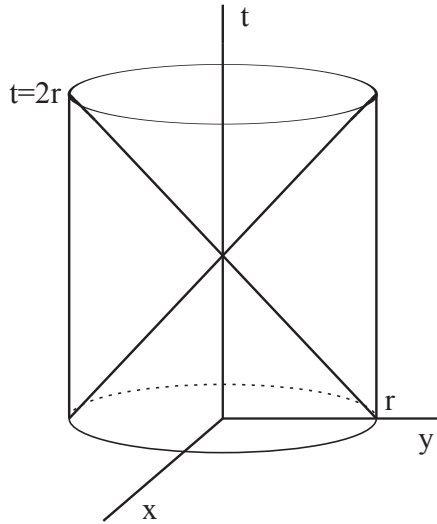


Figura 2.2

Suponhamos que o problema não seja controlável aproximadamente. Então, pela proposição 2.2, existe estado final $(v_1, v_2) \in H_E$ com norma não nula tal que a solução v da equação

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (2.14)$$

com estados finais (v_1, v_2) satisfazendo as condições

- $\frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0$ em $\partial\Omega \times (0, T)$;
- $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ em $\partial\Omega \times (0, T)$.

Assumindo que $v \in \mathcal{C}^3(\Omega \times (0, T))$ e escrevendo $U = \frac{\partial v}{\partial t}$ vemos que U satisfaz o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \\ D^\beta U = 0, |\beta| \leq 1 \text{ em } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}. \quad (2.15)$$

Observemos que a superfície inicial do problema acima é o cilindro $\partial\Omega \times (0, T)$ que pode ser descrito por

$$C = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^n; x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq t \leq T\}.$$

Tal superfície é não característica em relação ao operador

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

O teorema de Holmgren pode então ser utilizado no estudo do problema (2.15).

O Teorema de Holmgren garante que $U \equiv 0$ numa região que pode ser preenchida com superfícies não características. Afirmamos que $U \equiv 0$ na região G compreendida entre $\partial\Omega \times (0, T)$ e os cones característicos emanando da base e do topo do cilindro $\Omega \times [0, T]$ em direção ao seu interior. Podemos obter tal região preenchendo o triângulo de vértices $(0, r, 0)$, $(0, r, 2r)$ e $(0, 0, r)$ de maneira análoga como feito no Exemplo 1.2 e então rotacionando as curvas obtidas em torno do eixo t . Ver Figura 2.3.

Assim $\frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0$ em alguma vizinhança de cada ponto (x, y, r) ($r = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\text{diam}(\Omega)$) com $0 < x^2 + y^2 \leq r^2$. De onde segue que $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \equiv 0$ a.e. para $t = r$.

Pondo $v(x, y, r) = \tilde{v}(x, y)$, temos

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} = 0.$$

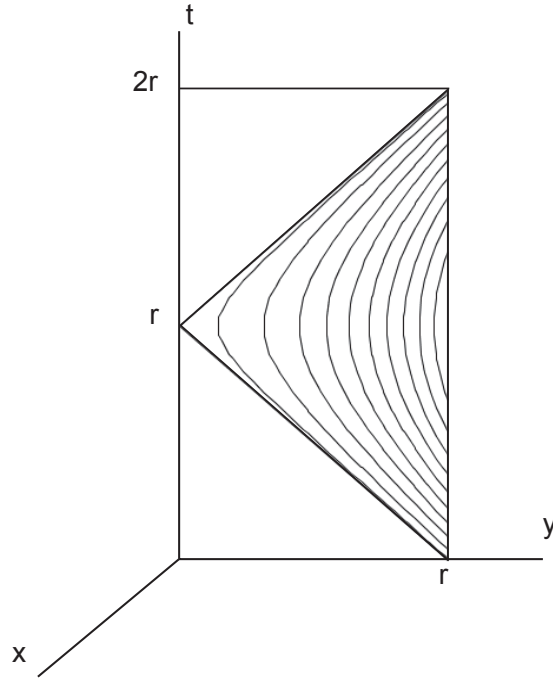


Figura 2.3

\tilde{v} é solução do problema elíptico

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.16)$$

o qual tem solução $\tilde{v} \equiv \text{const.}$

Assim

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, y, r) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y, r) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, r) \equiv 0.$$

Logo

$$\mathcal{E}(v(x, y, r), v_t(x, y, r)) = 0.$$

Da conservação de energia do sistema vem

$$\mathcal{E}(v(x, y, 2r), v_t(x, y, 2r)) = 0,$$

acarretando

$$\|(v_1, v_2)\|_{H_E} = 0,$$

o que é um absurdo.

Portanto o sistema (2.9) é controlável aproximadamente para $T = 2r$.

Para $T > 2r$ o comportamento dos cones característicos é como mostrado na Figura 2.4.

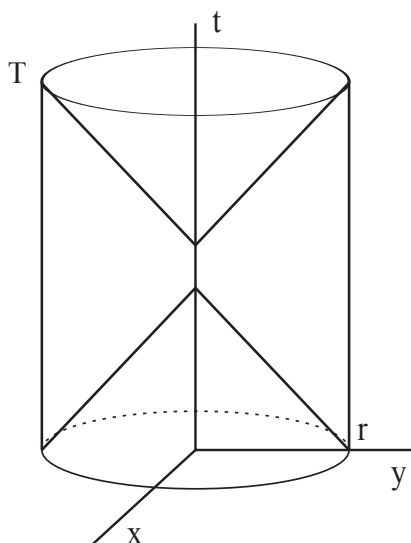


Figura 2.4

Procedendo de modo análogo obtemos a controlabilidade aproximada para este caso. ■

Observemos que assumimos $v \in C^3(\Omega \times (0, T))$. No caso de v ser solução fraca do problema (2.13) o resultado também é válido e se baseia no enunciado acima já que solução fraca é limite de soluções C^∞ . Detalhes em [9].

2.2.3 Resolução do problema para $T < 2r$

Quando $T < 2r$, o resultado anterior não é válido como mostra o seguinte teorema.

Teorema 2.3. *O problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = 0, u_t(\cdot, 0) = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.17)$$

não é controlável aproximadamente no instante $T < 2r$ nos espaços H_E e $L^2(\partial\Omega \times (0, T))$.

Demonstração: Para $T < 2r$, os cones característicos se intersectam formando um disco o qual chamaremos K , como mostra a figura 2.5.

Sejam $v_1 = v(x, y, \frac{T}{2})$ e $v_2 = v_t(x, y, \frac{T}{2})$ estados com $v_1, v_2 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\|(v_1, v_2)\|_{H_E} \neq 0$ e v_2 se anulando fora do compacto K .

Fazendo este "estado inicial" evoluir nos sentidos crescente e decrescente do tempo via equação (2.14), que é reversível no tempo, obtemos solução $v(x, y, t)$ de (2.14) satisfazendo

$$v(x, y, t) \equiv v_t(x, y, t) \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, T).$$

Da conservação de energia do sistema segue que

$$\|v(\cdot, T), v_t(\cdot, T)\|_{H_E} \neq 0.$$

Portanto o sistema não é aproximadamente controlável para $T < 2r$.

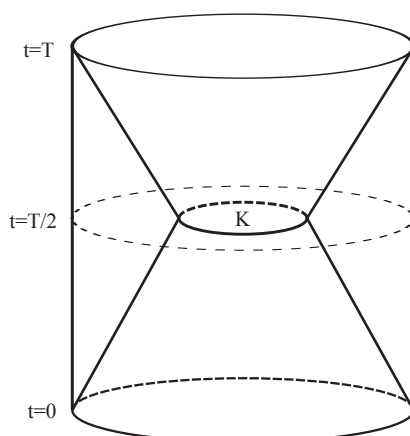


Figura 2.5

■

Apêndice A

O Espaço dos Estados com Energia Finita

Sejam Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n e

$$H = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

onde H^1 e L^2 são os espaços usuais de Sobolev de ordem 1 e 0 respectivamente.

Para todo $(w, v) \in H$ temos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty.$$

Definimos

$$\mathcal{E}(w, v) = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Proposição A.1. *A relação \sim definida em H por*

$$(w, v) \sim (z, y) \iff \mathcal{E}(z - w, y - v) = 0$$

é uma relação de equivalência em H .

Demonstração: A simetria e a reflexividade são óbvias. Vejamos a transitividade. Sejam $(w, v), (z, y), (\beta, \alpha) \in H$ tais que

$$(z, y) \sim (w, v) \text{ e } (w, v) \sim (\beta, \alpha).$$

Temos

$$\begin{aligned}
 & \|\alpha - y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \beta}{\partial x_i} - \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\
 & (\|\alpha - v\|_{L^2(\Omega)} + \|v - y\|_{L^2(\Omega)})^2 + \sum_{i=1}^n \left(\left\| \frac{\partial \beta}{\partial x_i} - \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \leq \\
 & 2(\|\alpha - v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v - y\|_{L^2(\Omega)}^2) + 2 \sum_{i=1}^n \left(\left\| \frac{\partial \beta}{\partial x_i} - \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \\
 & 2 \left(\|\alpha - v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \beta}{\partial x_i} - \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2 \left(\|v - y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \\
 & 2\mathcal{E}(\beta - w, \alpha - v) + 2\mathcal{E}(w - z, v - y) = 0
 \end{aligned}$$

pois

$$\begin{cases} (z, y) \sim (w, v) \implies \mathcal{E}(w - z, v - y) = 0 \\ (w, v) \sim (\beta, \alpha) \implies \mathcal{E}(\beta - w, \alpha - v) = 0 \end{cases} .$$

■

Denotemos $[w, v]$ a classe de equivalência de (w, v) e por H_E o espaço quociente H/\sim .

Lema A.1. *Se $\beta \in H^1(\Omega)$ é tal que $\frac{\partial \beta}{\partial x_i} = 0$ a.e. em Ω , $i = 1, \dots, n$, então β é constante em Ω .*

Demonstração: A desigualdade de Poincaré-Wirtinger nos dá

$$\|\beta - \bar{\beta}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla \beta\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

logo

$$\beta = \bar{\beta} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \beta \, dx \quad \text{a.e.}$$

■

Proposição A.2. *H_E é um espaço vetorial real, onde as operações são definidas por:*

- $[w, v] + [z, y] =: [w + z, v + y]$,
- $\lambda[w, v] =: [\lambda w, \lambda v]$

e o vetor nulo é classe $[1, 0]$, onde 1 denota a função constante igual a 1 em Ω .

Demonstração: Vejamos que a adição está bem definida.

Sejam $([w, v], [z, y]) = ([w_1, v_1], [z_1, y_1])$. Verifiquemos a validade de

$$[w, v] + [z, y] = [w_1, v_1] + [z_1, y_1],$$

isto é,

$$[w + z, v + y] = [w_1 + z_1, v_1 + y_1]. \quad (\text{A.1})$$

Temos

$$\begin{aligned} [w_1, v_1] = [w, v] &\iff (w, v) \sim (w_1, v_1) \iff \mathcal{E}(w - w_1, v - v_1) = 0 \\ &\iff \|v - v_1\|_{L^2(\Omega)} = 0, \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{\partial w_1}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Analogamente

$$\|y - y_1\|_{L^2(\Omega)} = 0, \left\| \frac{\partial z}{\partial x_i} - \frac{\partial z_1}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.3})$$

Agora veja que (A.1) vale se, e somente se,

$$\|(v_1 + y_1) - (v + y)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(w_1 + z_1) - \frac{\partial}{\partial x_i}(w + z) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0. \quad (\text{A.4})$$

Além disso segue de (A.2) e (A.3) que

$$\begin{aligned} \|(v_1 + y_1) - (v + y)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2(\|v_1 - v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y_1 - y\|_{L^2(\Omega)}^2) = 0, \\ \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(w_1 + z_1) - \frac{\partial}{\partial x_i}(w + z) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2 \left(\left\| \frac{\partial w_1}{\partial x_i} - \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial z_1}{\partial x_i} - \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

com $i = 1, \dots, n$ por (A.2) e (A.3).

Logo vale (A.4). Portanto a soma definida em H_E está bem definida. analogamente prova-se que a multiplicação por escalar está bem definida.

Provemos que o vetor nulo é $[1, 0]$.

Seja $[\beta, \alpha] \in H_E$ tal que

$$[\beta, \alpha] + [w, v] = [w, v], \quad \forall [w, v] \in H_E.$$

Logo

$$[w + \beta, v + \alpha] = [w, v],$$

isto é,

$$(w + \beta, v + \alpha) \sim (w, v).$$

Assim $\mathcal{E} = ((w + \beta) - w, (v + \alpha) - v) = 0$, ou seja, $\mathcal{E}(\beta, \alpha) = 0$. Logo

$$\|\alpha\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

Portanto $\alpha = 0$, $\frac{\partial \beta}{\partial x_i} = 0$ a.e. em Ω , $i = 1, \dots, n$.

Segue do Lema A.1 que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\beta = \lambda$ em Ω . Logo $(\beta, \alpha) = (\lambda, 0)$, mas $(\lambda, 0) \sim (1, 0)$, ou seja, $[\lambda, 0] = [1, 0]$. Portanto

$$[\beta, \alpha] = [1, 0].$$

As demais propriedades de espaço vetorial podem ser verificadas sem maiores dificuldades. ■

Definição A.1. Em H_E definimos o produto interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_E : H_E \times H_E \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\langle [w, v], [z, y] \rangle = \int_{\Omega} (vy + \nabla w \cdot \nabla y) dx. \quad (\text{A.5})$$

Vejamos que a função $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ está bem definida.

Suponha $([w, v], [z, y]) = ([w_1, v_1], [z_1, y_1])$ em $H_E \times H_E$. Segue que $[w, v] = [w_1, v_1]$ e $[z, y] = [z_1, y_1]$, logo

$$\|v - v_1\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|y - y_1\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left\| \frac{\partial w_1}{\partial x_i} - \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left\| \frac{\partial z_1}{\partial x_i} - \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Assim

$$v = v_1, \quad y = y_1, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_i} = \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad \text{a.e. em } \Omega, \quad i = 1, \dots, n.$$

Portanto

$$v_1 y_1 + \nabla w_1 \cdot \nabla z_1 = v y + \nabla w \cdot \nabla z \text{ a.e. em } \Omega,$$

de onde segue que

$$\int_{\Omega} (v_1 y_1 + \nabla w_1 \cdot \nabla z_1) dx = \int_{\Omega} (v y + \nabla w \cdot \nabla z) dx,$$

ou seja,

$$\langle [w, v], [z, y] \rangle_E = \langle [w_1, v_1], [z_1, y_1] \rangle_E.$$

Proposição A.3. A função $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ definida por (A.5) é um produto interno em H_E .

Demonstração: As linearidades são de verificação imediata. Vejamos:

$$\langle [w, v], [w, v] \rangle_E = 0 \implies [w, v] = [1, 0].$$

De fato,

$$\int_{\Omega} (v^2 + |\nabla w|^2) dx = 0 \implies v = 0 \text{ a.e.}, \frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \text{ a.e. } i = 1, \dots, n.$$

Logo, como já observado, $w = \lambda = \text{const}$ a.e. em Ω . Assim

$$[w, v] = [\lambda, 0] = [1, 0].$$

■

A norma proveniente deste produto interno é dada por

$$\|[w, v]\|_E = \sqrt{\langle [w, v], [w, v] \rangle_E} = \left(\int_{\Omega} (v^2 + |\nabla w|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nosso objetivo agora é mostrar que $(H_E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ é um espaço de Hilbert.

O espaço $H = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno.

$$\langle (w, v), (z, y) \rangle_H = \langle w, z \rangle_{H^1(\Omega)} + \langle v, y \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Em H o subespaço $M = \langle (1, 0) \rangle$, gerado pelo vetor $(1, 0)$ é um subespaço fechado pois tem dimensão um.

A relação \approx definida em H por

$$(w, v) \approx (z, y) \iff (w, v) - (z, y) \in M$$

é uma relação de equivalência e o espaço quociente H/\approx é um espaço de Banach com norma

$$\|[[w, v]]\|_{H/\approx} = \text{dist}((w, v), M) = \inf \left\{ \|(z, y)\|_H; (z, y) \in [[w, v]] \right\}. \quad (\text{A.6})$$

Veja [2] páginas 8-9.

Observemos inicialmente que para todo $(w, v) \in H$ tem-se

$$[[w, v]] = [w, v]. \quad (\text{A.7})$$

Basta ver que $(z, y) \sim (w, v) \iff (z, y) \approx (w, v)$. De fato,

$$\begin{aligned} (z, y) \sim (w, v) &\iff \begin{cases} \|v - y\|_{L^2(\Omega)} = 0 \\ \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v - y = 0 \text{ a.e. em } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial x_i}(w - z) = 0, \quad i = 1, \dots, n \text{ a.e. em } \Omega \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v = y \text{ a.e. em } \Omega \\ w - z = \text{const em } \Omega \end{cases} \\ &\iff (w, v) = (z + \text{const}, y) = (z, y) + \text{const}(1, 0) \\ &\iff (w, v) - (z, y) \in M \iff (z, y) \approx (w, v). \end{aligned}$$

De (A.7) vemos que vale a seguinte igualdade

$$H_E = H/\approx.$$

No entanto as topologias de $(H_E, \|\cdot\|_E)$ e $(H/\approx, \|\cdot\|_{H/\approx})$ são distintas.

De (A.6) temos

$$\begin{aligned}
 \left\| [[w, v]] \right\|_{H/\approx}^2 &= \inf \left\{ \|(w, v) + \lambda(0, 1)\|_H^2; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \inf \left\{ \|w + \lambda\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \inf \left\{ \|w + \lambda\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left(\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|w + \lambda\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \\
 &\leq \|w + \bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx, \quad \bar{w} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} w \, dx.
 \end{aligned}$$

Da desigualdade de Poincaré-Wirtinger obtemos

$$\begin{aligned}
 \left\| [[w, v]] \right\|_{H/\approx}^2 &\leq K(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \\
 &\leq (K(\Omega) + 1) \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right).
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\left\| [[w, v]] \right\|_{H/\approx} \leq C(\Omega) \|[w, v]\|_E.$$

Temos provado que existe $C(\Omega) > 0$ tal que

$$\left\| [[w, v]] \right\|_{H/\approx} \leq C(\Omega) \|[w, v]\|_E \tag{A.8}$$

para todo $(w, v) \in H$.

Teorema A.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com a propriedade do prolongamento. O espaço H_E com a norma proveniente de $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: Seja $([w_n, v_n])_{n=1}^{\infty} \subset H_E$ uma sequência de Cauchy. De (A.8) vemos que $([[w_n, v_n]])_{n=1}^{\infty} \subset H/\approx$ é de Cauchy em H/\approx . Logo existe $(w, v) \in H$ tal que

$$[[w_n, v_n]] \longrightarrow [[w, v]] \text{ em } H/\approx.$$

Seja $([[w_{n_k}, v_{n_k}]])_{k=1}^{\infty}$ uma subseqüência tal que

$$\left\| [[w_{n_k}, v_{n_k}]] - [[w, v]] \right\|_{H/\approx} < \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

$$\therefore \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \|(w_{n_k} - w, v_{n_k} - v) - \lambda(1, 0)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \right\} < \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Para cada $k = 1, 2, \dots$ escolha $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|(w_{n_k} - w, v_{n_k} - v) - \lambda_k(1, 0)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} < \frac{1}{2^k}.$$

Portanto

$$\|(w_{n_k} - \lambda_k, v_{n_k}) - (w, v)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 < \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \quad (\text{A.9})$$

para todo $k = 1, 2, \dots$. Usando

$$\int_{\Omega} v^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq \|(w, v)\|_{H^2(\Omega) \times L^2(\Omega)},$$

obtemos

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\nabla(w_{n_k} - w)|^2 dx \leq \|(w_{n_k} - \lambda_k, v_{n_k}) - (w, v)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 < \left(\frac{1}{2^k}\right)^2,$$

ou seja,

$$\|[w_{n_k}, v_{n_k}] - [w, v]\|_E \leq \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Assim, $([w_n, v_n])_{n=1}^{\infty}$ possui subsequência convergente em H_E . Logo a própria seqüência converge em H_E (para o mesmo limite $[w, v]$). ■

Referências Bibliográficas

- [1] R. Courant, D. Hilbert, *Partial Differential Equations*, Methods of Mathematical Physics vol. 2, Interscience, New York, 1962.
- [2] S. Goldberg, *Unbounded Linear Operator, Theory and Applications*, Dover, New York 1985.
- [3] F. John, *Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [4] F. John, L. Bers, M. Schechter, *Partial Differential Equations*, Lectures In Applied Mathematics, vol. 3, John Wiley and Sons, New York, 1964.
- [5] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis With Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1978.
- [6] J. Rauch, *Partial Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [7] M. Renardy, R. C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [8] D. L. Russel, *Control of Distributed Parameter Systems with More Than One Space Variable*, Technical Report 1, Control Science Center University of Minnesota, 1969.
- [9] D. L. Russel, *Boundary Value Control of the Higher-Dimensional Wave Equation*, SIAM J. Control, 9, pp. 29-42, 1971.
- [10] D. L. Russel, *Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations: Recent Progress and Open Questions*, SIAM Review, vol 20, N. 4, pp. 639-739, 1978.
- [11] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [12] E. C. Zachmanoglou, *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*, Dover Publications, Inc., New York, 1975.