

Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Seqüências espectrais de Lyndon-Hochschild-Serre e de Cartan-Leray, e algumas aplicações

Neila Mara Gomes

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Ermínia de Lourdes Campello
Fanti

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual
Paulista, Campus de São José do Rio Preto, como parte
dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em
Matemática.

São José do Rio Preto - SP

Janeiro - 2009

Gomes, Neila Mara.

Seqüências espectrais de Lyndon-Hochschild-Serre e de Cartan-Leray, e algumas aplicações / Neila Mara Gomes - São José do Rio Preto: [s.n.], 2009. 65 f.: il.; 30 cm.

Orientador: Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Topologia algébrica. 2. Seqüências espectrais (Matemática)
3. Homologia de grupos. I. Fanti, Ermínia de Lourdes Campello. II.
Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências
Exatas. III. Título.

CDU - 515.14

COMISSÃO JULGADORA

Titulares

Ermínia de Lourdes Campello Fanti

Professora Doutora - IBILCE - UNESP

Orientadora

Pedro Luiz Queiroz Pergher

Professor Doutor - UFSCar

1º Examinador

João Peres Vieira

Professor Doutor - IBILCE - UNESP

2º Examinador

Suplentes

Maria Gorete Carreira Andrade

Professora Doutora - IBILCE - UNESP

1º Suplente

Oziride Manzoli Neto

Professor Doutor - ICMC - USP

2º Suplente

*“A sabedoria é uma efusão da luz eterna,
um espelho sem mancha da atividade de Deus
e uma imagem de sua bondade.”*

(Sb 7, 26)

Aos meus pais,
João e Ilsa,
dedico.

Agradecimentos

Agradeço à meu Deus, meu tudo, por Sua mão que me conduz e me sustenta, tornando certa a vitória, ainda que as batalhas sejam duras.

Agradeço à meus pais, João e Ilsa, pelo apoio incondicional, por compreenderem minha ausência, pelas orações e pelo imenso amor dedicado à mim desde sempre. Obrigada também à toda a minha família, que esteve sempre presente mesmo tão distante.

Agradeço à Prof^a. Dr^a. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, pela disponibilidade na orientação, pela paciência, por todos os ensinamentos e pela amizade e alegria que marcaram este último ano de estudo.

Agradeço à todos os professores que passaram por minha vida, em especial aos professores da Universidade Federal de São João del Rei pela formação acadêmica, e aos professores do Departamento de Matemática do IBILCE.

Agradeço à meu namorado Everthon, pelo carinho, paciência e amor com que suportou esses dois anos em que estive ausente, pelo apoio e grande amizade que tornaram mais amenos os momentos difíceis.

Agradeço ao Ministério Universidades Renovadas (e à todos os grandes amigos que fazem parte dele) por transformar minha vida e por me fazer acreditar que minha vida profissional é um instrumento de transformação do mundo.

Agradeço aos amigos do mestrado Ana Paula, Andreza, Carol, Érika, Marisa, Rodiak, Oyran, Ruikson, Bethoven, Éder, Alexandre, Lucas e Jairo pela amizade, conversas e sorrisos inesquecíveis.

Agradeço àqueles que foram minha família em Rio Preto: às meninas da

república, D. Heide e Sr. Sílvia, aos amigos do GOU e tantos outros amigos que me ajudaram à suportar a saudade de casa. Obrigada também aos amigos mineiros que mesmo distantes torceram muito por mim.

Agradeço, enfim, à CAPES pelo apoio financeiro e à todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste grande sonho.

Que Deus abençoe e retribua à cada um de vocês!

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo da seqüência espectral associada à uma filtração (finita) de um complexo de cadeias de módulos sobre um anel arbitrário R . Em especial, destacamos as seqüências espectrais de Lyndon-Hochschild-Serre e de Cartan-Leray, e algumas aplicações na teoria de homologia.

Palavras-chave: Seqüência espectral, homologia de grupos, extensão de grupos, complexos celulares, recobrimento regular.

Abstract

In this work we present a study of the spectral sequence associated to the filtration (finite) of a chain complex of modules on an arbitrary ring R . In special, we emphasize the spectral sequences of Lyndon-Hochschild-Serre and Cartan-Leray and some applications in the homology theory.

Keywords: Spectral sequence, homology of groups, group extension, cell complexes, regular covering.

Sumário

Introdução	xiv
1 Preliminares	1
1.1 Alguns resultados de Álgebra Homológica	1
1.2 Espaços de recobrimento	5
1.3 Homologia celular	6
1.4 Homologia de grupos	9
1.5 Alguns resultados da Teoria de Grupos	12
2 Seqüência espectral	13
2.1 A seqüência espectral associada à um complexo filtrado	14
2.1.1 Cálculo dos termos $E_{p,q}^0$ e $E_{p,q}^1$	21
2.1.2 A relação entre $E_{p,q}^r$ e $E_{p,q}^{r+1}$	22
2.1.3 Seqüência espectral de 1 ^o quadrante	27
2.2 Homologia de grupos e seqüência espectral	28
2.2.1 Filtrações associadas a um complexo duplo	29
2.2.2 $H_*(G, C)$ como limite de duas seqüências espectrais	32
3 As seqüências de Lyndon-Hochschild-Serre e de Cartan-Leray	41
3.1 A seqüência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre	41
3.2 A seqüência espectral de Cartan-Leray	48
4 Aplicações	53
4.1 Aplicações da seqüência de Lyndon-Hochschild-Serre	53
4.1.1 Cálculo da ordem de $H_2(G, \mathbb{Z})$, G um grupo de ordem p^n , p primo	53
4.1.2 Homologia de um subgrupo de Hall	55
4.2 Aplicações da seqüência de Cartan-Leray	59
4.2.1 Extensão exata da homologia de um G -complexo livre	59
4.2.2 Homologia de um complexo de Eilenberg-Maclane	60
4.2.3 Homologia de um G -complexo livre, G grupo finito	61
Referências Bibliográficas	63
Índice Remissivo	65

Introdução

Seja R um anel arbitrário. Uma *filtração crescente* de um R -módulo M é uma família de submódulos $F_p M$ ($p \in \mathbb{Z}$) tal que $F_p M \subseteq F_{p+1} M$. A filtração é dita *finita* se $F_p M = 0$ para p suficientemente pequeno e $F_p M = M$ para p suficientemente grande. Dado um complexo de cadeias de R -módulos (C, ∂) com $C = (C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, dizemos que $(F_p C)_{p \in \mathbb{Z}}$ é uma *filtração (crescente)* de C se $F_p C$ é um subcomplexo de C , para cada p , e $\{F_p C_n\}_{p \in \mathbb{Z}}$ é uma filtração crescente de C_n para cada C_n . E esta filtração é *finita* (em cada nível ou dimensão) se cada $\{F_p C_n\}_{p \in \mathbb{Z}}$ é uma filtração finita de C_n . Neste trabalho descrevemos uma seqüência $\{E_{p,q}^r\}$, $r \geq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$, associada à uma filtração finita de um complexo de cadeias, denominada *seqüência espectral*. Não se sabe ao certo o motivo do uso do termo *espectral* como alega Timothy Y. Chow em [3]: “Uma questão que surge frequentemente é de onde veio o termo *espectral*. O adjetivo é devido a Leray, mas ele aparentemente nunca publicou uma explicação do porquê da escolha da palavra”. Em nossas pesquisas encontramos inúmeras aplicações desta teoria em vários campos da Topologia Algébrica, mostrando a grande eficácia das seqüências espectrais como ferramenta de cálculo, principalmente no que se refere à computação de grupos de homologia e cohomologia por aproximações sucessivas. Mas, apesar de serem uma das mais poderosas ferramentas de cálculo em Matemática, seqüências espectrais são relativamente difíceis de serem compreendidas. Encontramos em [2] a seguinte afirmação: “O assunto seqüência espectral é elementar, mas a noção da seqüência espectral de um complexo duplo envolve muitos objetos e índices que parecem inicialmente difíceis.” Nas bibliografias que tratam de seqüências espectrais, como [1] e [9], por exemplo, encontramos a seqüência espectral descrita omitindo-se, em geral, o segundo índice na definição dos termos $E_{p,q}^r$ da seqüência, o que dificulta ainda mais seu entendimento. Apresentamos aqui a seqüência espectral utilizando nas definições e resultados estudados, a notação completa, com os dois índices, facilitando assim sua compreensão. Como já dissemos as seqüências espectrais são ferramentas de cálculo e foram em geral descobertas tendo em vista essas necessidades. Um exemplo disto é que Leray introduziu uma seqüência

espectral, que hoje leva seu nome, quando se viu frente à um problema de cálculo da cohomologia de feixes (Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_sequence). Observamos que em [11] há uma nota interessante sobre o emprego de seqüências espectrais em Topologia Algébrica. O objetivo principal deste trabalho é apresentar as seqüências espectrais de *Lyndon-Hochschild-Serre* e de *Cartan-Leray* e algumas aplicações na teoria de homologia de grupos e espaços, fazendo ainda algumas observações sobre aplicações em cohomologia. A referência bibliográfica principal que motivou esse trabalho é [1].

No *Capítulo 1* introduzimos alguns conceitos preliminares necessários ao desenvolvimento do trabalho. Recordamos brevemente alguns tópicos de Álgebra Homológica (como o Teorema do Isomorfismo de Noether, o produto tensorial de dois complexos de cadeias e a definição de Tor); de Topologia Algébrica (como espaços de recobrimento, homologia relativa, *CW*-complexos, homologia celular, e homologia de grupos); além de alguns resultados da Teoria de Grupos. Nesses preliminares procuramos apresentar apenas os resultados que julgamos mais importantes para a compreensão do nosso trabalho. Omitimos, em geral, quase todas as demonstrações e admitimos conhecidas certas definições e propriedades básicas relacionadas aos conteúdos abordados, apenas citando, na maioria das vezes, as referências bibliográficas utilizadas.

No *Capítulo 2* apresentamos a seqüência espectral associada à um complexo de cadeias finitamente filtrado. Esse capítulo é a base de todo o restante do trabalho. Destacamos, por exemplo, o Teorema 2.1.2 que dá uma relação entre os termos da seqüência espectral e é primordial na teoria de seqüências espectrais. O fato de trabalharmos com complexos de cadeias que possuem filtração finita nos possibilita falar em “*convergência*” da seqüência espectral e disto decorrem grande parte dos resultados que envolvem tais seqüências. Por fim estabelecemos a relação entre homologia de grupos e seqüência espectral, obtendo um importante resultado que será utilizado em todo o restante do trabalho. Mais precisamente mostramos em 2.2.2, que existem duas seqüências espectrais convergindo para a homologia $H_*(G, C)$ com G um grupo e C um complexo de cadeias, não negativo, de $\mathbb{Z}G$ -módulos.

No *Capítulo 3* estudamos duas seqüências espectrais especiais, obtidas a partir de complexos particulares. Dada uma extensão de grupos $1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$, na qual H é um subgrupo normal de G e Q é o grupo quociente $\frac{G}{H}$, mostramos a existência de uma seqüência espectral associada à essa extensão, a *seqüência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre* (Teorema 3.1.1). Posteriormente descrevemos a *seqüência espectral de Cartan-Leray* (Teorema 3.2.1), que é uma seqüência associada a uma projeção de recobrimento regular $p : X \longrightarrow \frac{X}{G}$ com

X um CW -complexo munido da ação de um grupo G , que permuta livremente as células de X , isto é, X é um G -complexo livre .

Finalmente o *Capítulo 4* traz algumas aplicações das duas seqüências espectrais apresentadas no capítulo anterior. Na seção 4.1 apresentamos aplicações da seqüência de Lyndon-Hochschild-Serre. Na primeira aplicação mostramos (Proposição 4.1.1) que: “Se G é um grupo de ordem p^n , com p primo, então a ordem de $H_2(G, \mathbb{Z})$ é uma potência de p , digamos p^k , e $k \leq \frac{1}{2}n(n-1)$ ”. Na segunda aplicação apresentada mostramos que a homologia de um *subgrupo de Hall* N de um grupo G , com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$ -módulo arbitrário A , pode ser escrita como a soma direta das homologias de N e do grupo quociente $\frac{G}{N}$ com coeficientes em A e A_N , respectivamente (Proposição 4.1.2). Na seção 4.2 apresentamos aplicações da seqüência espectral de Cartan-Leray. Como primeira aplicação mostramos que se X é um G -complexo livre, então a seqüência $0 \rightarrow H_n(X)_G \rightarrow H_n\left(\frac{X}{G}\right) \rightarrow H_{n-1}(X)^G \rightarrow 0$ é exata (Proposição 4.2.1). Na aplicação seguinte (Proposição 4.2.2) mostramos que o n -ésimo grupo de homologia de um $K(G, 1)$ -complexo é isomorfo ao n -ésimo grupo de homologia do grupo G , para todo $n \geq 0$. Para tanto fez-se necessário a abordagem de alguns resultados relativos aos complexos de Eilenberg-MacLane do tipo $(G, 1)$. Finalizando, apresentamos uma aplicação que relaciona, sob certas hipóteses, as homologias de um G -complexo livre X e do complexo de órbitas $\frac{X}{G}$, sendo G um grupo de ordem finita (Proposição 4.2.3). Para as aplicações utilizamos [9], [17] como referências.

Preliminares

Neste capítulo faremos uma breve introdução de certos conteúdos de Álgebra Homológica, Teoria de Grupos e Topologia Algébrica que são importantes para o desenvolvimento de nosso trabalho. Omitiremos a maioria das demonstrações e admitiremos conhecidos certos conceitos e resultados envolvidos. Em todo o trabalho, salvo menção contrária, R denotará um anel arbitrário, porém na maioria das vezes o anel de interesse é $R = \mathbb{Z}$ ou o anel grupo $R = \mathbb{Z}G$, com G um grupo.

1.1 Alguns resultados de Álgebra Homológica

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e resultados de Álgebra Homológica. Destacamos o Teorema do Isomorfismo de Noether e a definição de produto tensorial de dois complexos de cadeias. Conceitos básicos, como a definição de módulos, módulos projetivos, resoluções projetivas, ação de grupos e anéis-grupo, por exemplo, serão supostos conhecidos. Tomamos [10], [15] e [16] como referências básicas.

Teorema 1.1.1 (Teorema do isomorfismo de Noether) *Sejam A e B submódulos de um R -módulo C e $A + B$ o submódulo de C gerado por $A \cup B$. Então $\frac{A}{A \cap B} \cong \frac{A + B}{B}$.*

Demonstração: Considere a aplicação inclusão $i : A \hookrightarrow A + B$. Obviamente i é um homomorfismo e $i(A \cap B) \subset B$. Assim i induz um homomorfismo

$$i_* : \frac{A}{A \cap B} \longrightarrow \frac{A + B}{B}$$

$$\bar{x} = x + A \cap B \longmapsto i_*(\bar{x}) = \widehat{i(x)} = i(x) + B$$

Para provar que i_* é um monomorfismo, seja $\bar{x} \in \frac{A}{A \cap B}$, $x \in A$ tal que $i_*(\bar{x}) = 0$. Pela definição de i_* obtemos que $i(x) = x \in B$. Portanto $x \in A \cap B$ e deste modo $\bar{x} = \bar{0}$. Por outro lado,

para ver que i_* é um epimorfismo, seja $\hat{y} \in \frac{A+B}{B}$, $y \in A+B$. Assim $y = a+b$, $a \in A$, $b \in B$. Considere o elemento $y-b = a \in A$. Temos: $i_*(\bar{a}) = i_*(\overline{y-b}) = i(y) - i(b) + B = i(y) + B$ pois $b \in B$. Portanto existe $\bar{a} = a + (A \cap B) \in \frac{A}{A \cap B}$ tal que $i_*(\bar{a}) = \hat{y}$. Logo i_* é um isomorfismo. ■

Lema 1.1.1 *Se A e B são R -módulos e $C \subseteq A$, então $A \cap (B+C) = C + (A \cap B)$.*

Demonstração: Se $u \in A \cap (B+C)$, então $u \in A$ e $u = b+c$, $b \in B$, $c \in C$. Assim $b = u-c$, $u \in A$, $c \in C \subset A$. Daí $b \in A$. Portanto, $b \in A \cap B$ e $u = b+c = c+b \in C + (A \cap B)$. Desse modo: $A \cap (B+C) \subseteq C + (A \cap B)$. Por outro lado se $v \in C + (A \cap B)$, então $v = c+a$, $c \in C$, $a \in A \cap B$. Desse modo, como $c \in C \subset A$ e $a \in A$, temos que $v = c+a \in A$. Também: como $a \in A \cap B \subset B$, temos que $v = c+a = a+c \in B+C$. Portanto $v \in A \cap (B+C)$ e daí $C + (A \cap B) \subseteq A \cap (B+C)$. Logo:

$$A \cap (B+C) = C + (A \cap B).$$

■

Corolário 1.1.1 *Se A e B são R -módulos e $C \subseteq A$, então $\frac{A}{C + (A \cap B)} \cong \frac{A+B}{C+B}$.*

Demonstração: Pelo Lema 1.1.1 temos

$$\frac{A}{C + (A \cap B)} = \frac{A}{A \cap (B+C)}.$$

Por outro lado, como $C \subseteq A$, pelo Teorema 1.1.1 obtemos:

$$\frac{A}{A \cap (B+C)} \cong \frac{A + (B+C)}{B+C} = \frac{A+B}{B+C}.$$

Logo:

$$\frac{A}{C + (A \cap B)} \cong \frac{A+B}{B+C} = \frac{A+B}{C+B}.$$

■

Os dois próximos resultados se relacionam à módulos projetivos e serão utilizados em algumas demonstrações.

Proposição 1.1.1 ([15], Teorema 3.14, p.63) *Um módulo P é projetivo se, e somente se, é o somando direto de um módulo livre.*

Proposição 1.1.2 ([16], Proposição A.3.2, p.119) *Todo módulo livre é projetivo.*

Sejam G um grupo e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo (à esquerda). A definição seguinte será útil na teoria de homologia de grupos (que abordaremos mais adiante).

Definição 1.1.1 *Seja M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. O grupo dos coinvariantes de M , denotado por M_G , é dado por*

$$M_G = \frac{M}{\langle \{gm - m, m \in M, g \in G\} \rangle}$$

e o grupo dos invariantes de M , denotado por M^G , é definido por

$$M^G = \{m \in M \mid g.m = m, \forall g \in G\}.$$

Produto Tensorial

Faremos a seguir algumas considerações importantes sobre produto tensorial de $\mathbb{Z}G$ -módulos e de complexos de cadeias.

Sejam M e N R -módulos arbitrários. Recordamos que o produto tensorial $M \otimes_R N$ é definido quando M é um R -módulo à direita e N é um R -módulo à esquerda. Agora, se M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo à esquerda podemos considerar M como um $\mathbb{Z}G$ -módulo à direita definindo $m * g = g^{-1} \cdot m$, $g \in G$, $m \in M$. Assim faz sentido considerar o produto tensorial de dois $\mathbb{Z}G$ -módulos à esquerda.

Agora, se M e N são $\mathbb{Z}G$ -módulos (à esquerda). Podemos definir uma G -ação (diagonal) sobre $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ (induzida da ação de G sobre M e N) da seguinte maneira:

$$G \times M \otimes_{\mathbb{Z}} N \longrightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} N$$

$$(g, m \otimes n) \longmapsto g \cdot (m \otimes n) := g \cdot m \otimes g \cdot n$$

Com esta G -ação $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ torna-se um $\mathbb{Z}G$ -módulo (à esquerda) e temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.3 ([1], p. 55 ou [18], Proposição 1.2.6, p. 6) *Se M e N são $\mathbb{Z}G$ -módulos, então $(M \otimes_{\mathbb{Z}} N)_G \cong M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$.*

Corolário 1.1.2 *Se \mathbb{Z} é visto como um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial, então $M \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \cong M_G$ e $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} N \cong N_G$.*

Em nosso trabalho vamos precisar do conceito de produto tensorial de complexos de cadeias. Antes de apresentar a definição deste produto tensorial recordemos que um complexo de cadeias de R -módulos é um par (C, ∂) , no qual cada C_n , $n \in \mathbb{Z}$, é um R -módulo e a aplicação $\partial = \{\partial_n\}$ é uma família de R -homomorfismos $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ tal que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para todo n . Esta aplicação é denominada diferencial ou operador bordo do complexo C . Definimos os conjuntos dos ciclos $Z_n(C)$, dos bordos $B_n(C)$ e as homologias $H_n(C)$, por $Z_n(C) := \ker \partial_n$, $B_n(C) := \text{Im} \partial_{n+1}$ e $H_n(C) := Z_n(C)/B_n(C)$, obtendo assim os módulos graduados $Z(C) = \{Z_n(C)\}$, $B(C) = \{B_n(C)\}$ e $H(C) = \{H_n(C)\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Se (C, ∂) e (C', ∂') são complexos de cadeias, então uma aplicação de cadeias de C em C' é um homomorfismo de módulos $f : C \longrightarrow C'$ de grau 0 tal que $\partial' \circ f = f \circ \partial$. Mais

precisamente f é uma família de homomorfismos $f = \{f_n\}$, com $f_n : C_n \longrightarrow C'_n$ tal que $\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$. Uma aplicação de cadeias f é chamada uma *equivalência fraca* se a aplicação induzida por f nos grupos de homologia de C e C' , $H_n(f) : H_n(C) \longrightarrow H_n(C')$; $H_n(f)(u + B_n(C)) = f_n(u) + B_n(C')$, é um isomorfismo para todo n .

Definimos agora o produto tensorial entre complexos de cadeias.

Definição 1.1.2 ([15], p.321) *Sejam $C = (C_n)_{n \geq 0}$ e $D = (D_n)_{n \geq 0}$ dois complexos de cadeias de R -módulos e ∂' e ∂'' suas respectivas diferenciais. O produto tensorial dos complexos C e D é o complexo denotado por $C \otimes D$ que em cada nível é definido por:*

$$(C \otimes D)_n := \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_R D_q,$$

com diferencial dada por:

$$\begin{aligned} \partial_n : (C \otimes_R D)_n &\longrightarrow (C \otimes_R D)_{n-1} \\ c_p \otimes d_q &\longmapsto \partial'(c_p) \otimes d_q + (-1)^p c_p \otimes \partial''(d_q), \end{aligned}$$

com $c_p \in C_p$ e $d_q \in D_q$.

Finalizamos esta seção apresentando a Fórmula de Künneth. Antes porém recordamos a definição do Tor e algumas de suas propriedades.

Definição 1.1.3 ([1], III, p.60) *Sejam M e N dois R -módulos e $\varepsilon : F \longrightarrow R$ uma resolução projetiva de M sobre R . Para todo inteiro positivo n , define-se $Tor_n(M, N)$ como o grupo de homologia $H_n(F \otimes_R N)$, isto é, $Tor_n(M, N) := H_n(F \otimes_R N)$. Usualmente denota-se $Tor_1(M, N)$ por $Tor(M, N)$.*

Proposição 1.1.4 ([15], Teorema 8.4, p.221) *Se o R -módulo M é projetivo, então $Tor_n(M, N) = 0$ para todo n e para todo R -módulo N .*

Proposição 1.1.5 ([15], Teorema 8.4, p.221) *Se o R -módulo N é projetivo, então $Tor_n(M, N) = 0$ para todo n e para todo R -módulo M .*

Proposição 1.1.6 ([9], p.191) *Se A e B são grupos abelianos tais que para algum inteiro m , $m.A = 0$ e $\{x \in B \mid m.x = 0\} = \{0\}$, então $Tor(A, B) = 0$ (aqui estamos considerando o Tor sobre o anel dos inteiros \mathbb{Z}).*

Proposição 1.1.7 (Fórmula de Künneth, [1], p.7, Proposição 0.8) *Seja R um domínio de ideais principais e sejam C e C' complexos de cadeia tais que C é livre em cada nível. Existe uma seqüência exata natural*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(C) \otimes_R H_{n-p}(C') \longrightarrow H_n(C \otimes_R C') \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} Tor(H_p(C), H_{n-p-1}(C')) \longrightarrow 0.$$

e esta seqüência cinde.

Para uma demonstração da Fórmula de Künneth sugerimos, por exemplo, [11], p.167.

1.2 Espaços de recobrimento

Nesta seção apresentamos algumas definições e proposições da teoria de espaços de recobrimento. Novamente admitiremos conhecidos certos conceitos como o de grupo fundamental, por exemplo. Adotamos como referências [7], [12].

Definição 1.2.1 ([12], p.145) *Seja X um espaço topológico. Um espaço de recobrimento de X (ou mais simplesmente um recobrimento de X) é um par (\tilde{X}, p) , em que \tilde{X} é um espaço topológico conexo e localmente conexo por caminhos e $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação contínua, satisfazendo a seguinte condição: Cada ponto x de X possui uma vizinhança aberta conexa por caminhos U tal que cada componente conexa por caminhos \tilde{U} de $p^{-1}(U)$ é aplicada por p homeomorficamente sobre U , (isto é, $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ é um homeomorfismo). A vizinhança U é chamada vizinhança elementar ou vizinhança admissível e a aplicação p é chamada projeção de recobrimento. O espaço X é chamado espaço base.*

Se (\tilde{X}, p) é um espaço de recobrimento de X com $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, então a projeção de recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ induz um homomorfismo do grupo fundamental de \tilde{X} no grupo fundamental de X , $p_{\#} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$; $p_{\#}([\alpha]) = [p \circ \alpha]$, que é um monomorfismo ([12], Teorema 4.1, p.154). As imagens $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$, com $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, $x_0 \in X$, são subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$ e são exatamente as classes de conjugação dos subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$ ([12], Teorema 4.2, p.155).

Definição 1.2.2 ([12], p.163) *Sejam (\tilde{X}, p) um recobrimento de X , $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ com $x \in X$ e $p_{\#} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$ o homomorfismo induzido por p . Se o subgrupo $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ é normal em $\pi_1(X, x)$ dizemos que \tilde{X} é um recobrimento regular de X .*

Se (\tilde{X}_1, p_1) e (\tilde{X}_2, p_2) são espaços de recobrimento de um espaço X , um homomorfismo de (\tilde{X}_1, p_1) em (\tilde{X}_2, p_2) é uma aplicação contínua $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tal que $p_2 \circ \varphi = p_1$ ([12], p.158). Podemos garantir a existência de um homomorfismo φ de (\tilde{X}_1, p_1) em (\tilde{X}_2, p_2) no caso em que $p_{1\#}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset p_{2\#}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$, com $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$ ([12], Lema 6.3, p.159). Pode-se mostrar ainda que se φ é um homomorfismo de \tilde{X}_1 em \tilde{X}_2 , então (\tilde{X}_1, φ) é um recobrimento de \tilde{X}_2 ([12], Lema 6.7, p.160). Assim se um recobrimento (\tilde{X}, p) de um espaço X é simplesmente conexo, isto é, se $\pi_1(\tilde{X}) = \{1\}$, então ele é um recobrimento para qualquer outro recobrimento do espaço X .

Definição 1.2.3 ([12], p.160) *Um recobrimento (\tilde{X}, p) de X é chamado de recobrimento universal de X se $\pi_1(\tilde{X}) = 1$, isto é, se \tilde{X} é simplesmente conexo.*

Definição 1.2.4 ([12], p.159) *Seja (\tilde{X}, p) um recobrimento de X . Um homeomorfismo $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ é uma transformação de recobrimento (ou Deck transformation) se $p \circ \varphi = p$. O conjunto de todas as transformações de recobrimento do espaço \tilde{X} , que será denotado por $A(\tilde{X}, p)$, é um grupo com relação à composição, denominado grupo das transformações de recobrimento.*

Proposição 1.2.1 ([12], Corolário 6.2, p.159) *O grupo $A(\tilde{X}, p)$ atua livremente sobre \tilde{X} , isto é, dado $g \in A(\tilde{X}, p)$, $g.\tilde{x} = \tilde{x}$ para algum $\tilde{x} \in \tilde{X}$ se, e somente se, $g = 1$.*

Proposição 1.2.2 ([12], Corolário 7.5, p.163) *Seja (\tilde{X}, p) um recobrimento universal de X . Então $A(\tilde{X}, p) \simeq \pi_1(X, x)$.*

1.3 Homologia celular

Nesta seção falaremos sobre a homologia de complexos celulares. Inicialmente recordemos o conceito de complexo celular ou CW -complexo.

Intuitivamente falando, um espaço topológico X admite uma estrutura de CW -complexo se é um espaço de Hausdorff e é obtido por adjunção sucessiva de células (bolas abertas à menos de homeomorfismo) de dimensões 1, 2, 3, ..., etc, de modo conveniente, iniciando com um espaço com a topologia discreta, cujos pontos (abertos) são considerados como 0-células. Mais precisamente temos:

Definição 1.3.1 ([13], p.80) *Um espaço topológico de Hausdorff X admite uma estrutura de CW -complexo se existe uma seqüência ascendente de subespaços fechados*

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

que satisfaz as seguintes condições:

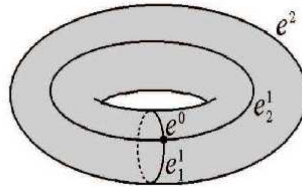
- (i) X^0 tem a topologia discreta;
- (ii) Para $n > 0$, X^n é obtido de X^{n-1} pela adjunção de uma coleção de n -células (caso exista), isto é, $X^n - X^{n-1}$ é a união disjunta de subconjuntos abertos $e_\lambda^n, \lambda \in \Lambda$ (chamados n -células ou n -células abertas), em que cada e_λ^n é homeomorfo ao conjunto $U^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$. Cada n -célula é "colada" em X^n por meio de uma aplicação chamada aplicação característica. Isto significa que para cada índice $\lambda \in \Lambda$ existe uma aplicação contínua $f_\lambda : E^n \rightarrow \bar{e}_\lambda^n$, com $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$, tal que f_λ aplica U^n homeomorficamente em e_λ^n e $f_\lambda(\bar{U}^n - U^n) \subset X^{n-1}$. Além disso, $A \subset X^n$ é fechado se, e somente se, $A \cap X^{n-1}$ e $f_\lambda^{-1}(A)$ são fechados para todo $\lambda \in \Lambda$;
- (iii) X é a união dos subespaços $X^i, i \geq 0$;
- (iv) O espaço X e os espaços X^q têm a topologia fraca: um subconjunto A é fechado se, e somente se, $A \cap \bar{e}_\lambda^n$ é fechado para todas as n -células $e^n, n = 0, 1, 2, \dots$

O subconjunto X^n é chamado o n -esqueleto. Os pontos de X^0 são chamados vértices ou 0-células. Um CW -complexo é dito finito se sua coleção de células é finita e infinito, caso contrário. Se $X = X^n$ para algum inteiro n (onde X^n foi obtido pela adjunção de pelo menos uma n -célula) dizemos que o CW -complexo tem dimensão finita n .

Exemplo 1.3.1 *Seja $X = \mathbb{R}$. Podemos dar à \mathbb{R} uma estrutura natural de CW -complexo na qual as 0-células e 1-células são dadas, respectivamente, por $e_n^0 = \{n\}$ e $e_n^1 =]n, n + 1[$ com $n \in \mathbb{Z}$.*

Exemplo 1.3.2 Seja $X = S^n$ (n -esfera). Uma estrutura de CW-complexo sobre S^n pode ser dada por considerar apenas uma 0-célula e^0 e uma n -célula e^n .

Exemplo 1.3.3 Podemos dar ao toro T^2 uma estrutura de CW-complexo 2-dimensional com uma 0-célula, duas 1-células e uma 2-célula, como na figura



Definição 1.3.2 ([13], p.83) Um subconjunto A de um CW-complexo X é um subcomplexo de X se A é a união de células de X , e para qualquer célula e^n , $e^n \cap A \neq \emptyset \implies \bar{e}^n \subset A$. Se este é o caso, é possível ver que os conjuntos $A^n = A \cap X^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ definem uma estrutura de CW-complexo sobre A .

Exemplo 1.3.4 Os esqueletos X^n são subcomplexos.

Nós agora iremos associar a um CW-complexo X um complexo de cadeias $C_*(X)$, a fim de determinar a homologia $H_*(X)$. Para tanto, abordamos alguns conceitos da teoria de homologia relativa, admitindo conhecida a teoria de homologia singular (ver, por exemplo, [7]).

Seja R um anel comutativo com unidade. Dados um espaço X e um subespaço $A \subset X$, seja $C_n(X, A; R)$ o módulo quociente $\frac{C_n(X; R)}{C_n(A; R)}$. Assim, cadeias em A são triviais em $C_n(X, A; R)$. Como a aplicação bordo $\partial_n : C_n(X; R) \longrightarrow C_{n-1}(X; R)$ leva $C_n(A; R)$ em $C_{n-1}(A; R)$, ∂_n induz uma aplicação bordo

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_n : C_n(X, A; R) &\longrightarrow C_{n-1}(X, A; R) \\ \sigma + C_n(A; R) &\longmapsto \partial_n(\sigma) + C_{n-1}(A; R) \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, temos uma seqüência de aplicações bordo

$$\dots \longrightarrow C_{n+1}(X, A; R) \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} C_n(X, A; R) \xrightarrow{\bar{\partial}_n} C_{n-1}(X, A; R) \longrightarrow \dots$$

Pode-se mostrar ainda que $\bar{\partial}_n \circ \bar{\partial}_{n+1} = 0$, de modo que $\{C_*(X, A; R), \bar{\partial}_*\}$ forma um complexo de cadeias (relativas).

Definição 1.3.3 Um n -ciclo relativo é uma n -cadeia $\alpha \in C_n(X; R)$ tal que $\partial_n(\alpha) \in C_{n-1}(A; R)$. Um n -bordo relativo é um elemento de $C_n(X, R)$ da forma $\alpha = \partial(\beta) + \gamma$ com $\beta \in C_{n+1}(X; R)$ e $\gamma \in C_n(A; R)$.

Definição 1.3.4 *O n -ésimo grupo de homologia relativa de X módulo A , denotado por $H_n(X, A; R)$, é definido por*

$$H_n(X, A; R) := \frac{\ker \bar{\partial}_n}{\text{Im} \bar{\partial}_{n+1}}.$$

Quando $R = \mathbb{Z}$, é usual denotar $H_n(X, A, \mathbb{Z})$ simplesmente por $H_n(X, A)$.

Para cada n considere a seqüência exata curta de R -módulos livres

$$0 \longrightarrow C_n(A; R) \xrightarrow{i_\#} C_n(X; R) \xrightarrow{j_\#} C_n(X, A; R) \longrightarrow 0,$$

na qual $i_\#$ é a aplicação induzida da inclusão de A em X e $j_\#$ é a projeção canônica. Dessa forma, temos a seqüência exata de complexos de cadeias

$$0 \longrightarrow C_*(A; R) \xrightarrow{i_\#} C_*(X; R) \xrightarrow{j_\#} C_*(X, A; R) \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Teorema 1.3.1 *Se X é um espaço e A um subespaço de X , então a seqüência exata de complexos de cadeias $(*)$ induz uma seqüência exata longa em homologia*

$$\dots \longrightarrow H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A; R) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X; R) \longrightarrow \dots$$

Demonstração: Ver [7], p.115 e Teorema 2.16, p.117. ■

Observação 1.3.1 *A aplicação bordo $\partial_* : H_n(X, A; R) \longrightarrow H_{n-1}(A; R)$ tem uma descrição muito simples: se uma classe $[\alpha] \in H_n(X, A; R)$ é representada por um ciclo relativo α (isto é, um elemento α tal que $\partial_n(\alpha) \in C_{n-1}(A; R)$), então $\partial_*([\alpha])$ é a classe do elemento $\partial_n(\alpha)$ em $H_{n-1}(A; R)$.*

Vamos agora definir a homologia de um CW -complexo X .

Definição 1.3.5 ([13], p.84) *Seja X um CW -complexo e considere os subcomplexos X^n e X^{n-1} . Definimos:*

$$C_n(X) := H_n(X^n, X^{n-1}),$$

no qual $H_n(X^n, X^{n-1})$ é o n -ésimo grupo de homologia relativa como definido em 1.3.4. A aplicação bordo $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ é definida pela composição dos homomorfismos,

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

em que ∂_* é como no Teorema 1.3.1 e j_{n-1} é a aplicação induzida da inclusão. Podemos verificar que $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$ e assim obtemos um complexo de cadeias $\{C_n(X), \partial_n\}$, denominado complexo de cadeia celular de X . A homologia deste complexo de cadeias é chamada homologia celular de X .

Proposição 1.3.1 Para cada $n \geq 0$, $C_n(X)$ é um grupo abeliano livre com base em correspondência 1-1 com o conjunto $\{e_\lambda^n \mid \lambda \in \Lambda\}$ das n -células de X .

Demonstração: Ver [13], Teorema 2.1, p. 78.

1.4 Homologia de grupos

Definição 1.4.1 ([1], p.35) Sejam G um grupo e $\dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$, ou mais simplesmente $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. A homologia do grupo G é definida por:

$$H_*(G) = H_*(F_G) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}),$$

com \mathbb{Z} visto como um $\mathbb{Z}G$ -módulo com a G -ação trivial, sendo F_G o complexo de cadeias dos grupos dos coinvariantes dos $\mathbb{Z}G$ -módulos F_n (Definição 1.1.1).

Proposição 1.4.1 Se G é um grupo então $H_0(G) = \mathbb{Z}$ e $H_1(G) \cong G_{ab} = \frac{G}{[G, G]}$, com $[G, G] := \langle \{g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}, g_1, g_2 \in G\} \rangle$. O quociente G_{ab} é denominado abelianização de G .

Demonstração: [1], p. 36.

Observação 1.4.1 ([1], p.18) Vamos recordar brevemente duas resoluções especiais de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$, as resoluções padrão e bar.

Sejam G um grupo e F_n o \mathbb{Z} -módulo livre gerado por X_n , onde X_n é o conjunto das $(n+1)$ -uplas (g_0, g_1, \dots, g_n) de elementos de G . Consideremos a seqüência

$$\dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

com diferencial $\partial_n : F_n \rightarrow F_{n-1}$ definida por $\partial_n(g_0, g_1, \dots, g_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n)$, em que $(g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n)$ é a n -upla $(g_0, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n)$, e a aplicação $\varepsilon : F_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ definida nos geradores por $\varepsilon(g_0) = 1$ e estendida por linearidade. Podemos mostrar que essa seqüência é exata. Temos ainda uma G -ação livre sobre F_n dada por $g \cdot (g_0, g_1, \dots, g_n) = (g \cdot g_0, g \cdot g_1, \dots, g \cdot g_n)$. Assim cada F_n é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre. Logo temos uma resolução livre (projetiva) de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$ denominada Resolução Padrão.

Consideremos agora, na Resolução Padrão, como representante para a G -órbita de (g_0, g_1, \dots, g_n) o elemento $g_0^{-1}(g_0, g_1, \dots, g_n) = (1, g_0^{-1}g_1, \dots, g_0^{-1}g_n) = (1, g'_1, g'_1 g'_2, \dots, g'_1 g'_2 \dots g'_n)$, sendo $g'_j = g_j^{-1} g_j$. Denotemos um elemento $(1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 g_2 \dots g_n)$ de F_n por $[g_1 | g_2 | \dots | g_n]$. Esta notação é denominada notação bar. Desta maneira, F_n é o $\mathbb{Z}G$ -módulo livre gerado pelos elementos $[g_1 | g_2 | \dots | g_n]$ e $\partial_n([g_1 | g_2 | \dots | g_n]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i([g_1 | g_2 | \dots | g_n])$, com

$$d_i([g_1 | g_2 | \dots | g_n]) = \begin{cases} g_1 [g_2 | \dots | g_n], & i=0; \\ [g_1 | \dots | g_{i-1} | g_i g_{i+1} | g_{i+2} | \dots | g_n], & 0 < i < n; \\ [g_1 | \dots | g_{n-1}], & i=n. \end{cases}$$

Quando a notação bar é usada a resolução padrão é usualmente denominada Resolução Bar.

Para qualquer grupo G nós sempre podemos tomar a Resolução Padrão a fim de determinar a homologia de G e neste caso escrevemos $C_*(G)$ para o complexo de cadeia F_G . Podemos descrever $C_*(G)$ como segue: Defina uma relação de equivalência sobre as $(n+1)$ -uplas (g_0, g_1, \dots, g_n) , $(g_i \in G)$ estabelecendo $(g_0, g_1, \dots, g_n) \sim (gg_0, gg_1, \dots, gg_n)$ para todo $g \in G$ e denote por $[g_0, g_1, \dots, g_n]$ a classe de equivalência de (g_0, g_1, \dots, g_n) . Desse modo $C_n(G)$ tem uma \mathbb{Z} -base consistindo das classes de equivalência $[g_0, g_1, \dots, g_n]$, e $\partial : C_n(G) \rightarrow C_{n-1}(G)$ é dada por $\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$, onde $d_i[g_0, g_1, \dots, g_n] = [g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n]$.

Definimos agora a homologia de um grupo G com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$ -módulo arbitrário M .

Definição 1.4.2 ([1], p.56) *Sejam G um grupo, M um $\mathbb{Z}G$ -módulo e $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. O grupo de homologia de G com coeficientes em M é definido por:*

$$H_*(G, M) := H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} M).$$

Observação 1.4.2 *A homologia de um grupo G é um caso particular da homologia com coeficientes considerando o $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial $M = \mathbb{Z}$. De fato: Como $(F_p)_G \cong (F_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})_G \cong F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}$ (Proposição 1.1.3), então $H_*(G) = H_*(F_G) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) = H_*(G, \mathbb{Z})$.*

Para qualquer grupo G e qualquer $\mathbb{Z}G$ -módulo M a homologia de G com coeficientes em M é facilmente determinada no nível 0, como veremos na proposição a seguir:

Proposição 1.4.2 *Se M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo, então $H_0(G, M) = M_G$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. O funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ é exato à direita ([15], Teorema 2.10, p.35). Portanto, na seqüência

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & F_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \xrightarrow{\bar{\partial}_1} & F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{\partial}_0 & & \downarrow \bar{\partial}_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

$\bar{\varepsilon}$ é sobrejetor e $Im \bar{\partial}_1 = \ker \bar{\partial}_0 = F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M$. Daí

$$H_0(G, M) = \frac{\ker \bar{\partial}_0}{Im \bar{\partial}_1} = \frac{F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M}{Im \bar{\partial}_1} = \frac{F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M}{\ker \bar{\varepsilon}}$$

Portanto, pelo Teorema do Isomorfismo, temos

$$H_0(G, M) \cong Im \bar{\varepsilon} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \cong M_G$$

em que o último isomorfismo segue da Proposição 1.1.2. ■

Exemplo 1.4.1 (1) Se G é um grupo cíclico infinito, ou seja, $G \cong \mathbb{Z}$, e M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo podemos mostrar que:

$$H_i(G, M) \cong \begin{cases} M_G, & \text{se } i = 0; \\ M^G, & \text{se } i = 1; \\ 0, & \text{se } i \geq 2. \end{cases}$$

(2) Se G é um grupo cíclico finito de ordem n , isto é, se G é isomorfo a \mathbb{Z}_n e se M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo temos

$$H_i(G, M) \cong \begin{cases} M_G, & \text{se } i = 0; \\ \frac{\ker(t-1)}{\text{Im}N} = \frac{M^G}{N.M}, & \text{se } i \text{ é ímpar}; \\ \frac{\ker N}{\text{Im}(t-1)} = \frac{\ker N}{(t-1)M}, & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

onde N e $t-1$ denotam a multiplicação por $1+t+\dots+t^{n-1}$ e $t-1$, respectivamente. Em particular, se $M = \mathbb{Z}$ temos que

$$H_i(G, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = 0; \\ \mathbb{Z}_n, & \text{se } i \text{ é ímpar}; \\ 0, & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

Um resultado de homologia de grupos que será útil em nossas aplicações é o Lema de Shapiro, que enunciamos a seguir:

Lema 1.4.1 (Lema de Shapiro) Se H é um subgrupo de G e M é um $\mathbb{Z}H$ -módulo, então:

$$H_*(H, M) \cong H_*(G, \text{Ind}_H^G M),$$

onde $\text{Ind}_H^G M := \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$.

Demonstração: Ver [1], p. 73.

No estudo das seqüências espectrais precisamos da homologia de um grupo G com coeficientes em um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}G$ -módulos $C = (C_n)_{n \geq 0}$, que é uma generalização da Definição 1.4.2.

Definição 1.4.3 ([1], p.168) Sejam G um grupo e $C = (C_n)_{n \geq 0}$ um complexo de cadeias não negativo de $\mathbb{Z}G$ -módulos. O grupo de homologia de G com coeficientes em C é definido por:

$$H_*(G, C) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} C),$$

sendo F uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$ e o produto tensorial $F \otimes_{\mathbb{Z}G} C$ como na Definição 1.1.2.

Finalizando esta breve introdução da teoria de homologia de grupos apresentamos alguns resultados utilizados em aplicações de seqüências espectrais que serão desenvolvidas no Capítulo 4.

Proposição 1.4.3 ([1], Corolário 10.2, p.84) *Se G é um grupo finito e M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo, então $H_n(G, M)$ é anulado pela ordem de G para todo $n > 0$.*

Teorema 1.4.1 ([9], Teorema 10.7.20, p.462) *Se M é um grupo abeliano (visto como um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial) então $H_n(G, M) \cong (H_n(G) \otimes M) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(G), M)$.*

Teorema 1.4.2 ([9], Teorema 10.7.22, p.463) *Se $G = \tilde{G} \oplus G'$, então*

$$H_n(G, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{p+q=n} (H_p(\tilde{G}, \mathbb{Z}) \otimes H_q(G', \mathbb{Z})) + \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(\tilde{G}, \mathbb{Z}), H_q(G', \mathbb{Z})).$$

1.5 Alguns resultados da Teoria de Grupos

No Capítulo 4 apresentaremos algumas aplicações da seqüência espectral associada à uma extensão de grupos. Necessitamos, para tanto, de alguns conceitos e resultados da Teoria de Grupos. Utilizamos [4] e [5] como bibliografias básicas para os resultados apresentados aqui.

Seja G um grupo não necessariamente finito. O *centro* do grupo G , denotado por $Z(G)$ é o conjunto $Z(G) = \{x \in G \mid x.g = g.x, \forall g \in G\}$ que é um subgrupo do grupo G . Se todo elemento do grupo G tem ordem igual a uma potência de p , dizemos que G é um *p -grupo*. O primeiro teorema apresentado nos dá uma propriedade do centro de um p -grupo G e o seguinte é conhecido como o 1º Teorema de Sylow.

Teorema 1.5.1 ([5], Teorema 2, p.138) *Se G é um p -grupo e $|G| = p^n > 1$, então $|Z(G)| = p^m > 1$.*

Teorema 1.5.2 ([4], Teorema VI.2.1, p.235) *Sejam p um número primo e G um grupo de ordem $p^m b$ com $m.d.c.(p, b) = 1$. Então para cada n , $0 \leq n \leq m$, existe um subgrupo H de G tal que $|H| = p^n$.*

Seqüência espectral

Neste capítulo apresentamos o conceito de seqüência espectral associada a um complexo de cadeias finitamente filtrado e vários resultados importantes, dentre os quais destacamos o Teorema 2.1.2, que dá uma relação importante entre os termos da seqüência espectral e o Corolário 2.2.2, que mostra a existência de uma importante seqüência espectral associada a um complexo de cadeias não-negativo, acíclico, de $\mathbb{Z}G$ -módulos. Tal capítulo é a base do restante do trabalho.

Como uma motivação inicial, observamos que se C é um complexo de cadeias e C' é um subcomplexo, então existe uma seqüência exata longa que dá informações sobre $H_*(C)$ em termos de $H_*(C')$ e $H_*\left(\frac{C}{C'}\right)$, pois a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow C' \hookrightarrow C \twoheadrightarrow \frac{C}{C'} \longrightarrow 0$$

induz a seqüência exata longa em homologia

$$\cdots \longrightarrow H_n(C') \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow H_n\left(\frac{C}{C'}\right) \longrightarrow H_{n-1}(C') \longrightarrow \cdots$$

Se ao invés de um único subcomplexo C' é dada uma seqüência de subcomplexos $\{F_p C\}_{p \in \mathbb{Z}}$ com $F_{p-1}C \subseteq F_p C$, então, para cada p , podemos dar informações de $H_*(F_p C)$ a partir de $H_*(F_{p-1}C)$ e de $H_*\left(\frac{F_p C}{F_{p-1}C}\right)$, e assim sucessivamente. Deste modo podemos obter informações de $H_*(C)$ a partir dos grupos de homologia $H_*\left(\frac{F_p C}{F_{p-1}C}\right)$, $p \in \mathbb{Z}$. O que obtemos, grosseiramente falando é uma seqüência de aproximações sucessivas E^r ($r \geq 0$) para $H_*(C)$, tal que E^1 é a homologia $H_*\left(\frac{F_p C}{F_{p-1}C}\right)$. Tal seqüência é conhecida como seqüência espectral.

2.1 A seqüência espectral associada à um complexo filtrado

Definição 2.1.1 ([1], p.162) *Uma filtração crescente de um R -módulo M é uma família de submódulos $F_p M$ ($p \in \mathbb{Z}$) tais que $F_p M \subseteq F_{p+1} M$. A filtração é dita finita se $F_p M = 0$ para p suficientemente pequeno e $F_p M = M$ para p suficientemente grande.*

Exemplo 2.1.1 *Um exemplo trivial de uma filtração finita é a do \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z} dada da seguinte forma*

$$0 \subseteq 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$$

Um R -módulo graduado A é uma seqüência de R -módulos, ou seja, $A = (A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, em que cada A_n é um R -módulo ([15], p.300 ou [1], p.4). Dada uma filtração de um R -módulo, podemos associar um módulo graduado definido a seguir.

Definição 2.1.2 ([1], p.162) *Dada uma filtração de um R -módulo M , o módulo graduado associado GrM é definido por:*

$$Gr_p M = \frac{F_p M}{F_{p-1} M}.$$

Exemplo 2.1.2 *No exemplo anterior, considerando que a filtração dada sobre \mathbb{Z} tem os níveis $F_0 \mathbb{Z} = 0 \subseteq F_1 \mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \subseteq F_2 \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ obtemos $Gr_0 \mathbb{Z} = 0$; $Gr_1 \mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$; $Gr_2 \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ e para $p < 0$ ou $p > 2$ temos $Gr_p M = 0$.*

Lema 2.1.1 *Se M e M' são R -módulos com filtrações finitas tais que $f : M \rightarrow M'$ é uma aplicação que preserva filtração, isto é, $f(F_p M) \subseteq F_p M'$, e $Grf : GrM \rightarrow GrM'$ é um isomorfismo (em que Grf denota a aplicação induzida por f nos módulos graduados), então as filtrações de M e M' têm os mesmos níveis.*

Demonstração: Sejam $0 = F_0 M \subseteq F_1 M \subseteq \dots \subseteq F_n M = M$ e $0 = F_{\mu_0} M' \subseteq F_{\mu_1} M' \subseteq \dots \subseteq F_{\mu_m} M' = M'$ filtrações de M e M' respectivamente. Suponhamos inicialmente que as inclusões são estritas, isto é, $F_p M \subsetneq F_{p+1} M$ e $F_p M' \subsetneq F_{p+1} M'$ para todos os módulos indicados nas filtrações. Vamos mostrar que $\mu_0 = 0$ e $\mu_m = n$.

Suponha que $\mu_0 > 0$. Assim $\mu_0 \geq 1$. Deste modo $F_0 M' = F_1 M' = 0$. Portanto, pela Definição 2.1.2, $Gr_1 M' = 0$. Mas por hipótese, $GrM \cong GrM'$ e daí $Gr_1 M = F_1 M = 0$ o que é uma contradição. Portanto $\mu_0 \leq 0$. Agora suponha que $\mu_0 < 0$. Assim $\mu_0 + 1 \leq 0$. Conseqüentemente $F_{\mu_0} M = F_{\mu_0+1} M = 0$. Portanto, obtemos da Definição 2.1.2 que $Gr_{\mu_0+1} M = 0$. Mas $Gr_{\mu_0+1} M' = F_{\mu_1} M' \neq 0$ o que contradiz novamente a hipótese. Logo $\mu_0 = 0$.

Analogamente, suponha $\mu_m > n$. Deste modo $\mu_m \geq n + 1$ o que implica que $F_{n+1} M' \neq M'$ e $F_n M' \neq M'$. Como $n > 0$ segue que $F_n M' \neq 0$. Assim, pela Definição 2.1.2, temos $Gr_{n+1} M' \neq 0$. Mas $F_{n+1} M = F_n M = M$ e daí $Gr_{n+1} M \cong 0$ o que contradiz a hipótese de que os módulos graduados de M e M' são isomorfos. Portanto $\mu_m \leq n$. Agora, se $\mu_m < n$, então $\mu_m + 1 \leq n$. Assim pelo mesmo raciocínio aplicado anteriormente obtemos que $Gr_{\mu_m+1} M \neq 0$.

Mas $F_{\mu_m}M' = M'$ e $F_{\mu_m+1}M' = M'$ e daí $Gr_{\mu_m+1}M' \cong 0$, o que também contradiz a hipótese. Logo $\mu_m = n$.

Finalmente observamos que se existe alguma igualdade entre os submódulos indicados na filtração de M , então a hipótese de isomorfismo dos módulos graduados garante que, no mesmo nível, os submódulos de M' são iguais, isto é, se $F_nM = F_{n-1}M$ para algum n , então $F_nM' = F_{n-1}M'$. Portanto a demonstração se reduz ao caso anterior. ■

Uma importante consequência deste resultado é o lema seguinte:

Lema 2.1.2 ([1], p. 162, Lema 2.1) *Sejam M e M' módulos com filtrações finitas e $f : M \rightarrow M'$ uma aplicação preservando filtração. Se $Grf : GrM \rightarrow GrM'$ é um isomorfismo, então f é um isomorfismo.*

Demonstração: Sejam M e M' módulos finitamente filtrados tais que $GrM \cong GrM'$. Pelo Lema 2.1.1, as filtrações de M e M' possuem os mesmos níveis. Assim, sejam $0 = F_0M \subseteq F_1M \subseteq \dots \subseteq F_nM = M$ e $0 = F_0M' \subseteq F_1M' \subseteq \dots \subseteq F_nM' = M'$ filtrações de M e M' , respectivamente. Pela Definição 2.1.2, $Gr_1M = F_1M$ e $Gr_1M' = F_1M'$. Portanto, $F_1M \cong F_1M'$. Desta maneira obtemos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1M & \longrightarrow & F_2M & \longrightarrow & \frac{F_2M}{F_1M} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F_1M' & \longrightarrow & F_2M' & \longrightarrow & \frac{F_2M'}{F_1M'} \longrightarrow 0 \end{array}$$

com $F_1M \cong F_1M'$ e $Gr_2M = \frac{F_2M}{F_1M} \cong \frac{F_2M'}{F_1M'} = Gr_2M'$. Daí, pelo Lema dos Cinco Curto ([10], Corolário 5.13, p.38), $F_2M \cong F_2M'$. Analogamente concluímos que $F_3M \cong F_3M', \dots, M = F_nM \cong F_nM' = M'$. Logo, f é um isomorfismo. ■

Definição 2.1.3 *Se o módulo filtrado M é graduado, digamos $M = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, e cada F_pM é um submódulo graduado de M , temos para cada $n \in \mathbb{Z}$ uma filtração $\{F_pM_n\}_p$ de M_n . Daí podemos associar a M um módulo bigraduado definido por:*

$$Gr_{p,q}M = \frac{F_pM_{p+q}}{F_{p-1}M_{p+q}}.$$

Neste caso diz-se que um elemento de $Gr_{p,q}M$ tem grau de filtração p , grau complementar q e grau total $p + q$.

Exemplo 2.1.3 *Se C é um complexo de cadeias, a homologia de C , $H(C) = \{H_n(C)\}$ é um \mathbb{Z} -módulo graduado. Portanto, dada uma filtração de $H(C)$, temos associado à esta filtração*

um módulo bigraduado dado por:

$$Gr_{p,q}H(C) = \frac{F_p H_{p+q}(C)}{F_{p-1} H_{p+q}(C)}$$

Queremos obter uma filtração para $H_*(C)$. Seja (C, ∂) um complexo de cadeias finitamente filtrado, isto é, cada $\{F_p C_n\}_{p \in \mathbb{Z}}$ é uma filtração finita de C_n . Considerando cada $F_p C$ como um subcomplexo com diferencial $\partial'_n = \partial_n|_{F_p C_n} : F_p C_n \longrightarrow F_p C_{n-1}$ podemos obter uma filtração de $H_*(C)$ como definida a seguir.

Definição 2.1.4 ([1], p.162) *Seja (C, ∂) um complexo de cadeias finitamente filtrado. A filtração induzida sobre a homologia do complexo C , é definida por:*

$$F_p H_n(C) = \text{Im}\{H_n(F_p C) \xrightarrow{i_*} H_n(C)\}$$

com i_* a aplicação induzida pela inclusão $i : F_p C \hookrightarrow C$.

Proposição 2.1.1 *A filtração anterior $F_p H_n(C)$ do grupo de homologia $H_n(C)$ pode ser dada como $F_p H_n(C) = \frac{F_p C_n \cap Z}{F_p C_n \cap B}$, na qual Z (respectivamente B) é o módulo dos ciclos (respectivamente bordos) de C_n , isto é, $Z = \ker \partial_n$ e $B = \text{Im} \partial_{n+1}$.*

Demonstração: Considere o subcomplexo $(F_p C, \partial')$, com $\partial' = \partial|_{F_p C}$ a restrição. Temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow i & & \uparrow i & & \uparrow i & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_p C_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & F_p C_n & \xrightarrow{\partial'_n} & F_p C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

A aplicação i_* induzida nos grupos de homologia é dada por

$$i_* : H_n(F_p C) \longrightarrow H_n(C)$$

$$\bar{\alpha} = \alpha + \text{Im} \partial'_{n+1} \longmapsto i_*(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} = \alpha + \text{Im} \partial_{n+1} = \alpha + B$$

com $\alpha \in \ker \partial'_n = Z \cap F_p C_n$. (Por um abuso de notação estamos denotando por $\bar{\alpha}$ tanto um elemento de $H_n(C)$ como um elemento de $H_n F_p(C)$). Pela Definição 2.1.4, temos

$$F_p H_n(C) = \text{Im} i_* \cong \frac{H_n(F_p C)}{\ker i_*}.$$

Calculando $\ker i_*$ obtemos

$$\begin{aligned} \ker i_* &= \{\bar{\alpha} \in H_n(F_p C) \mid i_*(\bar{\alpha}) = \bar{0}, \text{ com } \alpha \in F_p C_n \cap Z\} = \\ &= \{\alpha + \text{Im} \partial'_{n+1} \mid \alpha \in B, \text{ com } \alpha \in F_p C_n \cap Z\}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\ker i_* = \frac{B \cap (F_p C_n \cap Z)}{\operatorname{Im} \partial'_{n+1}} = \frac{F_p C_n \cap B}{\operatorname{Im} \partial'_{n+1}}$$

sendo que a última igualdade segue do fato que $B \subset Z$. Logo

$$F_p H_n C \cong \frac{\frac{F_p C_n \cap Z}{\operatorname{Im} \partial'_{n+1}}}{\frac{F_p C_n \cap B}{\operatorname{Im} \partial'_{n+1}}} \cong \frac{F_p C_n \cap Z}{F_p C_n \cap B}.$$

■

Proposição 2.1.2 *O módulo bigraduado associado à filtração de $H(C)$ satisfaz*

$$Gr_{p,q} H(C) \cong \frac{F_p C_{p+q} \cap Z}{(F_p C_{p+q} \cap B) + (F_{p-1} C_{p+q} \cap Z)}.$$

Demonstração: Pela Definição 2.1.3 e Proposição 2.1.1 temos:

$$Gr_{p,q} H(C) = \frac{F_p H_{p+q}(C)}{F_{p-1} H_{p+q}(C)} = \frac{\frac{F_p C_{p+q} \cap Z}{F_p C_{p+q} \cap B}}{\frac{F_{p-1} C_{p+q} \cap Z}{F_{p-1} C_{p+q} \cap B}}$$

Aplicando o Teorema do Isomorfismo de Noether (Teorema 1.1.1) nos quocientes $\frac{F_p C_{p+q} \cap Z}{F_p C_{p+q} \cap B}$ e $\frac{F_{p-1} C_{p+q} \cap Z}{F_{p-1} C_{p+q} \cap B}$ obtemos

$$\frac{F_p C_{p+q} \cap Z}{F_p C_{p+q} \cap B} \cong \frac{F_p C_{p+q} \cap Z + F_p C_{p+q} \cap B}{F_p C_{p+q} \cap B}$$

(tomando $\mathbf{A} = F_p C_{p+q} \cap Z$ e $\mathbf{B} = F_p C_{p+q} \cap B$) e

$$\frac{F_{p-1} C_{p+q} \cap Z}{F_{p-1} C_{p+q} \cap B} \cong \frac{F_{p-1} C_{p+q} \cap Z + F_p C_{p+q} \cap B}{F_p C_{p+q} \cap B}$$

(tomando $\mathbf{A} = F_{p-1} C_{p+q} \cap Z$ e $\mathbf{B} = F_p C_{p+q} \cap B$). Conseqüentemente,

$$Gr_{p,q} H(C) \cong \frac{F_p C_{p+q} \cap Z + F_p C_{p+q} \cap B}{F_{p-1} C_{p+q} \cap Z + F_p C_{p+q} \cap B}.$$

Sabemos que $F_{p-1} C_{p+q} \cap Z \subseteq F_p C_{p+q} \cap Z$. Logo, pelo Corolário 1.1.1

$$Gr_{p,q} H(C) \cong \frac{F_p C_{p+q} \cap Z}{(F_{p-1} C_{p+q} \cap Z) + (F_p C_{p+q} \cap B)}.$$

■

Vamos agora definir a *seqüência espectral* associada à um complexo de cadeias de R -módulos finitamente filtrado C , isto é, uma seqüência $\{E^r\}_{r \geq 0}$ de “aproximações sucessivas” para o módulo bigraduado $GrH(C)$ ([1], p.163).

Definição 2.1.5 (*Seqüência espectral associada à filtração de um complexo de cadeias*) *Seja (C, ∂) um complexo de cadeias finitamente filtrado de R -módulos com diferencial $\partial = \partial_n$ e filtração finita $\{F_p C_n\}$ para cada C_n . Considere os módulos:*

$$Z_{p,q}^r = F_p C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r} C_{p+q-1}), \quad Z_{p,q}^\infty = F_p C_{p+q} \cap Z,$$

e

$$B_{p,q}^r = F_p C_{p+q} \cap \partial(F_{p+r-1} C_{p+q+1}), \quad B_{p,q}^\infty = F_p C_{p+q} \cap B,$$

sendo que Z (respectivamente B) denota o módulo dos ciclos (respectivamente bordos) de C_{p+q} , isto é, $Z = \ker \partial_{p+q}$ e $B = \text{Im} \partial_{p+q+1}$. A seqüência $\{E_{p,q}^r\}$, $r \geq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$, com

$$E_{p,q}^r := \frac{Z_{p,q}^r}{B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1}}$$

é chamada *seqüência espectral associada ao complexo C* . Analogamente define-se

$$E_{p,q}^\infty = \frac{Z_{p,q}^\infty}{B_{p,q}^\infty + Z_{p-1,q+1}^\infty} = \frac{F_p C_{p+q} \cap Z}{F_p C_{p+q} \cap B + F_{p-1} C_{p+q} \cap Z}.$$

Observação 2.1.1 *Segue imediatamente da Definição 2.1.5 que:*

$$B_{p,q}^0 \subseteq B_{p,q}^1 \subseteq \dots \subseteq B_{p,q}^\infty \subseteq Z_{p,q}^\infty \subseteq \dots \subseteq Z_{p,q}^1 \subseteq Z_{p,q}^0 = F_p C_{p+q}.$$

Observação 2.1.2 *Uma conseqüência importante da Proposição 2.1.2 e da definição anterior é que $E_{p,q}^\infty \cong Gr_{p,q}H(C)$.*

Observação 2.1.3 *Pela Definição 2.1.5 temos:*

$$Z_{p-1,q+1}^{r-1} = F_{p-1} C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r} C_{p+q-1});$$

$$Z_{p,q}^r = F_p C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r} C_{p+q-1}).$$

Portanto, como $F_{p-1} C_{p+q} \subseteq F_p C_{p+q}$, obtemos: $Z_{p-1,q+1}^{r-1} = Z_{p,q}^r \cap F_{p-1} C_{p+q}$. Assim podemos escrever:

$$E_{p,q}^r = \frac{Z_{p,q}^r}{B_{p,q}^r + (Z_{p,q}^r \cap F_{p-1} C_{p+q})}.$$

Observação 2.1.4 *A Definição 2.1.5 pode ser aplicada à complexos de cadeias com filtração não finita. Entretanto, por simplicidade e tendo em vista nossos objetivos, consideramos apenas complexos de cadeias finitamente filtrados.*

Observação 2.1.5 *No caso em que C é um complexo de cocadeias $C = (C^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, com diferencial de grau $+1$, a filtração é denotada por $\{F^p C\}$ e assumida decrescente, isto é, $F^p C \supseteq F^{p+1} C$. Os termos da seqüência espectral resultante são denotados por $E_r^{p,q}$ e temos $E_\infty^{p,q} \cong Gr^{p,q} = \frac{F^p H^{p+q}(C)}{F^{p+1} H^{p+q}(C)}$. A diferencial d_r possui bigrau $(r, -r + 1)$ e assim $d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$.*

Definição 2.1.6 ([1], p. 163) *Uma seqüência espectral $\{E_{p,q}^r\}$ converge ou é convergente, se para todo par (p, q) de inteiros existe um índice μ (que depende de p e q) tal que $E_{p,q}^\mu = E_{p,q}^{\mu+1} = \dots = E_{p,q}^\infty$. O termo $E_{p,q}^\infty$ é chamado limite (ou abutment) da seqüência espectral.*

Observação 2.1.6 *Vimos que $E_{p,q}^\infty \cong Gr_{p,q} H(C)$. Portanto, se a seqüência espectral converge, seu limite é $Gr H(C)$. É comum omitir-se o “ Gr ” e dizer simplesmente que a seqüência espectral converge para $H(C)$, o que é usualmente denotado por*

$$E_{p,q}^r \implies H_{p+q}(C),$$

ou ainda, $E^r \implies H(C)$. É comum também escrever o termo $E_{p,q}^2$ do lado esquerdo do limite, porque este é o termo mais útil da maioria das seqüências espectrais, e assim denotar $E_{p,q}^2 \implies H_{p+q}(C)$.

Teorema 2.1.1 *Se (C, ∂) é um complexo de cadeias finitamente filtrado, então a seqüência espectral associada $\{E_{p,q}^r\}$ converge para o módulo bigraduado $Gr_{p,q} H(C)$. Mais precisamente, fixados p e q , existe*

- (i) *t suficientemente grande tal que $Z_{p,q}^t = Z_{p,q}^{t+1} = \dots = Z_{p,q}^\infty$;*
- (ii) *s suficientemente grande tal que $B_{p,q}^s = B_{p,q}^{s+1} = \dots = B_{p,q}^\infty$;*
- (iii) *μ suficientemente grande tal que $E_{p,q}^\mu = E_{p,q}^{\mu+1} = \dots = E_{p,q}^\infty \cong Gr_{p,q} H(C)$.*

Demonstração: Sejam p e q fixados.

(i) Como a filtração em cada nível é finita, existem t_1, t_2 tais que:

$$0 = F_{t_1} C_{p+q-1} \subseteq F_{t_1+1} C_{p+q-1} \subseteq \dots \subseteq F_{t_2} C_{p+q-1} = C_{p+q-1}$$

e

$$F_n C_{p+q-1} = 0, \quad \forall n < t_1 ; \quad F_n C_{p+q-1} = C_{p+q-1}, \quad \forall n > t_2.$$

Seja t tal que $t > p - t_1$, ou seja, $p - t < t_1$. Assim:

$$Z_{p,q}^t = F_p C_{p+q} \cap \partial^{-1} F_{p-t} C_{p+q-1} = F_p C_{p+q} \cap \partial^{-1}(0) = F_p C_{p+q} \cap Z = Z_{p,q}^\infty.$$

Pelo mesmo raciocínio obtemos:

$$Z_{p,q}^{t+1} = Z_{p,q}^{t+2} = \dots = Z_{p,q}^\infty.$$

(ii) Similarmente existem s_1, s_2 tais que:

$$0 = F_{s_1}C_{p+q+1} \subseteq F_{s_1+1}C_{p+q+1} \subseteq \dots \subseteq F_{s_2}C_{p+q+1} = C_{p+q+1}$$

e:

$$F_n C_{p+q+1} = 0, \quad \forall n < s_1 ; \quad F_n C_{p+q+1} = C_{p+q+1}, \quad \forall n > s_2.$$

Seja s tal que $s > s_2 - p + 1$, ou seja, $p + s - 1 > s_2$. Assim:

$$B_{p,q}^s = F_p C_{p+q} \cap \partial F_{p+s-1} C_{p+q+1} = F_p C_{p+q} \cap \partial C_{p+q+1} = F_p C_{p+q} \cap B = B_{p,q}^\infty.$$

Pelo mesmo raciocínio obtemos:

$$B_{p,q}^{s+1} = B_{p,q}^{s+2} = \dots = B_{p,q}^\infty.$$

(iii) Finalmente, tomando $\mu = \max\{t + 1, s\}$, obtemos

$$E_{p,q}^\mu = \frac{Z_{p,q}^\mu}{B_{p,q}^\mu + Z_{p-1,q+1}^{\mu-1}} = \frac{Z_{p,q}^\infty}{B_{p,q}^\infty + Z_{p-1,q+1}^\infty} = \frac{F_p C_{p+q} \cap Z}{(F_p C_{p+q} \cap B) + (F_{p-1} C_{p+q} \cap Z)}.$$

Portanto, pela Proposição 2.1.2:

$$E_{p,q}^\mu = E_{p,q}^\infty.$$

Pelo mesmo raciocínio concluímos que:

$$E_{p,q}^{\mu+1} = E_{p,q}^{\mu+2} = \dots = E_{p,q}^\infty \cong Gr_{p,q}H(C),$$

sendo que o último isomorfismo segue da Observação 2.1.2. ■

O teorema anterior nos garante que a seqüência espectral $E_{p,q}^r$ associada à um complexo de cadeias finitamente filtrado é sempre convergente e converge para $Gr_{p,q}H(C)$.

Exemplo 2.1.4 *Considere o complexo de cadeias finitamente filtrado*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\partial_2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\partial_1} & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\partial'_2} & 2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\partial'_1} & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\partial''_2} & 0 & \xrightarrow{\partial''_1} & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

em que $\partial_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, $C_n = 0$ se n é par ou $n < 0$ e $C_n = \mathbb{Z}$ se n é ímpar. Considerando a filtração $F_0\mathbb{Z} = 0 \subseteq F_1\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \subseteq F_2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, para este complexo de cadeias obtemos:

- $Gr_2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$, $Gr_1\mathbb{Z} = \{0\}$;
- $F_0H_1(C) = \{0\}$, $F_1H_1(C) = 2\mathbb{Z}$, $F_2H_1(C) = \mathbb{Z}$;

- $Gr_{2,1}H(C) = \mathbb{Z}_2$;
- $E_{2,1}^0 = E_{2,1}^1 = E_{2,1}^2 = \mathbb{Z}_2$.

2.1.1 Cálculo dos termos $E_{p,q}^0$ e $E_{p,q}^1$

Calculamos agora os termos $E_{p,q}^r$ para $r = 0$ e $r = 1$. Isto será útil na demonstração de resultados posteriores apresentados neste trabalho.

Proposição 2.1.3 *Se C é um complexo de cadeias finitamente filtrado e $\{E_{p,q}^r\}$ é a seqüência espectral associada (Definição 2.1.5), então:*

- (i) $E_{p,q}^0 = \frac{F_p C_{p+q}}{F_{p-1} C_{p+q}} = Gr_{p,q} C$;
- (ii) $E_{p,q}^1 \cong H_{p+q} \left(\frac{F_p C}{F_{p-1} C} \right) = H_q(E_{p,*}^0)$, o que denotamos simplesmente por $E^1 \cong H_{p+q}(E^0)$.

Demonstração: (i) Pela Observação 2.1.3 temos:

$$E_{p,q}^0 = \frac{Z_{p,q}^0}{B_{p,q}^0 + (Z_{p,q}^0 \cap F_{p-1} C_{p+q})}.$$

Deste modo, considerando que $Z_{p,q}^0 = F_p C_{p+q}$ e $F_p C_{p+q} \supseteq F_{p-1} C_{p+q}$, e aplicando a Definição 2.1.5 obtemos:

$$E_{p,q}^0 = \frac{F_p C_{p+q}}{(F_p C_{p+q} \cap \partial(F_{p+0-1} C_{p+q+1})) + (F_{p-1} C_{p+q})}.$$

Sabemos também que o operador ∂ preserva filtração (visto que cada $F_p C$ é um subcomplexo de C) e daí $\partial(F_{p-1} C_{p+q+1}) \subseteq F_{p-1} C_{p+q}$. Portanto $F_p C_{p+q} \cap \partial(F_{p+0-1} C_{p+q+1}) \subseteq F_{p-1} C_{p+q}$. Logo:

$$E_{p,q}^0 = \frac{F_p C_{p+q}}{F_{p-1} C_{p+q}} = Gr_{p,q} C,$$

onde a última igualdade segue da definição de módulo bigraduado.

(ii) Utilizando novamente a Observação 2.1.3 e a Definição 2.1.5 obtemos:

$$E_{p,q}^1 = \frac{Z_{p,q}^1}{B_{p,q}^1 + (Z_{p,q}^1 \cap F_{p-1} C_{p+q})} = \frac{F_p C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-1} C_{p+q-1})}{(F_p C_{p+q} \cap \partial(F_p C_{p+q+1})) + (F_{p-1} C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-1} C_{p+q-1}))}.$$

Como $\partial(F_p C_{p+q+1}) \subseteq F_p C_{p+q}$ e $F_{p-1} C_{p+q} \subseteq \partial^{-1}(F_{p-1} C_{p+q-1})$, temos:

$$E_{p,q}^1 = \frac{F_p C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-1} C_{p+q-1})}{\partial(F_p C_{p+q+1}) + (F_{p-1} C_{p+q})} \quad (*).$$

Consideremos o operador induzido por ∂ no complexo quociente $\frac{F_p C}{F_{p-1} C}$, o qual vamos denotar por d^0 :

$$d_{p,q}^0 : E_{p,q}^0 = \frac{F_p C_{p+q}}{F_{p-1} C_{p+q}} \longrightarrow \frac{F_p C_{p+q-1}}{F_{p-1} C_{p+q-1}} = E_{p,q-1}^0$$

$$\bar{\alpha} = \alpha + F_{p-1}C_{p+q} \longmapsto d_{p,q}^0(\bar{\alpha}) = \overline{\partial(\alpha)} = \partial(\alpha) + F_{p-1}C_{p+q-1}.$$

(Por um abuso de notação estamos denotando por \bar{x} elementos de ambos os complexos quocientes). Sabemos que: $\ker d_{p,q}^0 = \{\alpha + F_{p-1}C_{p+q} \mid \partial(\alpha) \in F_{p-1}C_{p+q-1}, \text{ com } \alpha \in F_p C_{p+q}\}$, ou seja,

$$\ker d_{p,q}^0 = \frac{F_p C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-1}C_{p+q-1})}{F_{p-1}C_{p+q}}.$$

Por outro lado

$$\text{Im}d_{p,q+1}^0 = \frac{\partial(F_p C_{p+q+1}) + (F_{p-1}C_{p+q})}{F_{p-1}C_{p+q}}.$$

Assim

$$H_{p+q} \left(\frac{F_p C}{F_{p-1}C} \right) = \frac{\ker d_{p,q}^0}{\text{Im}d_{p,q+1}^0} \cong \frac{F_p C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-1}C_{p+q-1})}{\partial(F_p C_{p+q+1}) + (F_{p-1}C_{p+q})}.$$

Logo considerando (*) e a parte (i) da demonstração obtemos a afirmação desejada:

$$E_{p,q}^1 \cong H_{p+q}(E^0).$$

■

Observação 2.1.7 Na verdade, se consideramos, para cada p fixo, o complexo $(E_{p,q}^0)_{q \in \mathbb{Z}}$, então $E_{p,q}^1 \cong H_q(E_{p,*}^0)$ (homologia no nível q). Mas se tomamos $n = p + q$ e consideramos que $E_{p,q}^0 = \frac{F_p C_n}{F_{p-1}C_n}$ então $E_{p,q}^1 \cong H_n(\frac{F_p C}{F_{p-1}C}) = H_{p+q}(E^0)$. Esta última notação é melhor para generalizações conforme veremos a seguir, pois de fato estamos calculando a homologia de um módulo bigraduado.

2.1.2 A relação entre $E_{p,q}^r$ e $E_{p,q}^{r+1}$

Podemos generalizar o resultado obtido na Proposição 2.1.3 e dar uma importante relação entre os termos da seqüência espectral. Primeiramente apresentamos um lema que nos dá a diferencial induzida pelo operador ∂ nos termos da seqüência espectral.

Lema 2.1.3 O operador $\partial : C \rightarrow C$ induz uma diferencial $d_{p,q}^r$ em $E_{p,q}^r$, de bigrau $(-r, r-1)$, isto é, $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r, q+r-1}^r$. Notemos que em $E_{p,q}^0$ temos uma diferencial de bigrau $(0, -1)$ e em $E_{p,q}^1$ temos uma diferencial de bigrau $(-1, 0)$.

Demonstração: Consideremos os módulos $Z_{p,q}^r$ e $Z_{p-1, q+1}^{r-1} + B_{p,q}^r$. Afirmamos que:

$$(1^\circ) \partial Z_{p,q}^r \subseteq Z_{p-r, q+r-1}^r.$$

De fato: Da Definição 2.1.5, obtemos

$$\partial Z_{p,q}^r = \partial(F_p C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r} C_{p+q-1})) \subseteq F_{p-r} C_{p+q-1} \cap \partial F_p C_{p+q} = B_{p-r, q+r-1}^{r+1}.$$

Ainda, pela Definição 2.1.5, $Z_{p-r, q+r-1}^r = F_{p-r} C_{p+q-1} \cap \partial^{-1}(F_{p-r-r} C_{p+q-2})$. Agora, seja $x \in B_{p-r, q+r-1}^{r+1} = F_{p-r} C_{p+q-1} \cap \partial F_p C_{p+q}$. Deste modo $x \in F_{p-r} C_{p+q-1}$ e $x = \partial(a)$, com $a \in F_p C_{p+q}$.

Daí $\partial(x) = \partial\partial(a) = 0$ e, conseqüentemente, $x \in \partial^{-1}(F_{p-r-r}C_{p+q-2})$, pois obviamente $0 \in F_{p-r-r}C_{p+q-2}$. Assim $x \in F_{p-r}C_{p+q-1} \cap \partial^{-1}(F_{p-r-r}C_{p+q-2}) = Z_{p-r,q+r-1}^r$ e então $B_{p-r,q+r-1}^{r+1} \subseteq Z_{p-r,q+r-1}^r$. Portanto

$$\partial Z_{p,q}^r \subseteq Z_{p-r,q+r-1}^r.$$

(2º) $\partial(Z_{p-1,q+1}^{r-1} + B_{p,q}^r) \subseteq B_{p-r,q+r-1}^r$.

De fato: Pela Definição 2.1.5, $\partial B_{p,q}^r = \partial(F_p C_{p+q} \cap \partial F_{p+r-1} C_{p+q+1}) \subseteq \partial F_p C_{p+q} \cap \partial \partial F_{p+r-1} C_{p+q+1} = \partial F_p C_{p+q} \cap \{0\} = \{0\}$. Deste modo $\partial B_{p,q}^r = \{0\}$. Também pela Definição 2.1.5, $\partial Z_{p-1,q+1}^{r-1} = \partial(F_{p-1} C_{p+q} \cap \partial^{-1} F_{p-r} C_{p+q-1}) \subseteq F_{p-r} C_{p+q-1} \cap \partial F_{p-1} C_{p+q} = B_{p-r,q+r-1}^r$. Portanto

$$\partial(Z_{p-1,q+1}^{r-1} + B_{p,q}^r) = (\partial Z_{p-1,q+1}^{r-1} + \partial B_{p,q}^r) \subseteq (B_{p-r,q+r-1}^r + \{0\}) = B_{p-r,q+r-1}^r.$$

Logo, ∂ induz a diferencial

$$d_{p,q}^r : \frac{Z_{p,q}^r}{B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1}} \longrightarrow \frac{Z_{p-r,q+r-1}^r}{B_{p-r,q+r-1}^r + Z_{p-r-1,q+r}^{r-1}},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} d_{p,q}^r : E_{p,q}^r &\longrightarrow E_{p-r,q+r-1}^r \\ \alpha + I &\longmapsto d_{p,q}^r(\alpha + I) = \partial(\alpha) + I' \end{aligned}$$

onde denotamos $I := B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1}$ e $I' := B_{p-r,q+r-1}^r + Z_{p-r-1,q+r}^{r-1}$. ■

Teorema 2.1.2 ([9], Teorema 10.2.5, p. 402) $H(E^r) \cong E^{r+1}$. Mais precisamente, se considerarmos o complexo (E^r, d^r) com a diferencial d^r de bigrau $(-r, r-1)$, então $E_{p,q}^{r+1} \cong H_{p+q}(E^r)$.

Demonstração: Considere as diferenciais

$$d_{p+r,q-r+1}^r : E_{p+r,q-r+1}^r \longrightarrow E_{p,q}^r \text{ e } d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \longrightarrow E_{p-r,q+r-1}^r.$$

Temos: $H_{p+q}(E^r) := \frac{\ker d_{p,q}^r}{\text{Im} d_{p+r,q-r+1}^r}$. Portanto temos que calcular $\ker d_{p,q}^r$ e $\text{Im} d_{p+r,q-r+1}^r$. Como anteriormente vamos considerar $I := B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1}$ e $I' := B_{p-r,q+r-1}^r + Z_{p-r-1,q+r}^{r-1}$.

- Cálculo de $\ker d_{p,q}^r$:

$\ker d_{p,q}^r = \{\alpha + I \in E_{p,q}^r \mid d_{p,q}^r(\alpha + I) = 0 + I'\} = \{\alpha + I \in E_{p,q}^r \mid \partial(\alpha) \in I'\} = \frac{Z_{p,q}^r \cap \partial^{-1}(I')}{I}$,
ou seja,

$$\ker d_{p,q}^r = \frac{Z_{p,q}^r \cap \partial^{-1}(B_{p-r,q+r-1}^r + Z_{p-r-1,q+r}^{r-1})}{B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1}}.$$

1ª AFIRMAÇÃO: $\partial^{-1}(B_{p-r,q+r-1}^r + Z_{p-r-1,q+r}^{r-1}) = \partial^{-1}(B_{p-r,q+r-1}^r) + \partial^{-1}(Z_{p-r-1,q+r}^{r-1})$.

De fato: Seja $u \in \partial^{-1}(B_{p-r,q+r-1}^r + Z_{p-r-1,q+r}^{r-1})$. Deste modo $\partial(u) = x + y$, com $x \in B_{p-r,q+r-1}^r =$

$F_{p-r}C_{p+q-1} \cap \partial(F_{p-1}C_{p+q})$ e $y \in Z_{p-r-1, q+r}^{r-1} = F_{p-r-1}C_{p+q-1} \cap \partial^{-1}(F_{p-r-r}C_{p+q-2})$. Assim, como $x \in B_{p-r, q+r-1}^r$, existe $c \in F_{p-1}C_{p+q}$ tal que $x = \partial(c)$. Conseqüentemente $c \in \partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r)$. Como $\partial(u) = x+y$, temos $y = \partial(u) - x = \partial(u) - \partial(c) = \partial(u-c)$. Portanto, como $y \in Z_{p-r-1, q+r}^{r-1}$, $u-c \in \partial^{-1}(Z_{p-r-1, q+r}^{r-1})$. Assim $u = c + (u-c) \in \partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r) + \partial^{-1}(Z_{p-r-1, q+r}^{r-1})$. Portanto

$$\partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r + Z_{p-r-1, q+r}^{r-1}) \subseteq \partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r) + \partial^{-1}(Z_{p-r-1, q+r}^{r-1}) \quad (I)$$

Por outro lado, se $u \in \partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r) + \partial^{-1}(Z_{p-r-1, q+r}^{r-1})$, existem $x \in \partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r)$ e $y \in \partial^{-1}(Z_{p-r-1, q+r}^{r-1})$ tais que $u = x + y$. Assim, $\partial(u) = \partial(x + y) = \partial(x) + \partial(y) \in (B_{p-r, q+r-1}^r + Z_{p-r-1, q+r}^{r-1})$, isto é, $u \in \partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r + Z_{p-r-1, q+r}^{r-1})$. Portanto

$$\partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r) + \partial^{-1}(Z_{p-r-1, q+r}^{r-1}) \subseteq \partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r + Z_{p-r-1, q+r}^{r-1}) \quad (II)$$

De (I) e (II) temos $\partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r + Z_{p-r-1, q+r}^{r-1}) = \partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r) + \partial^{-1}(Z_{p-r-1, q+r}^{r-1})$ o que demonstra a afirmação.

2ª AFIRMAÇÃO: $\partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r) + \partial^{-1}(Z_{p-r-1, q+r}^{r-1}) = Z_{p-1, q+1}^{r-1} + \partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1})$.

De fato: Pela Definição 2.1.5, $\partial^{-1}(Z_{p-r-1, q+r}^{r-1}) = \partial^{-1}[F_{p-r-1}C_{p+q-1} \cap \partial^{-1}(F_{p-2r}C_{p+q-2})] = \partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1}) \cap \partial^{-1}[\partial^{-1}(F_{p-2r}C_{p+q-2})]$. Como $\partial \circ \partial = 0$, segue que $\partial^{-1}[\partial^{-1}(F_{p-2r}C_{p+q-2})] = C_{p+q}$. Deste modo, como $\partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1}) \subseteq C_{p+q}$, temos $\partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1}) \cap \partial^{-1}[\partial^{-1}(F_{p-2r}C_{p+q-2})] = \partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1})$. Portanto

$$\partial^{-1}(Z_{p-r-1, q+r}^{r-1}) = \partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1}). \quad (i)$$

Por outro lado, sabemos que $B_{p-r, q+r-1}^r = F_{p-r}C_{p+q-1} \cap \partial F_{p-1}C_{p+q}$ e $\partial Z_{p-1, q+1}^{r-1} = \partial[F_{p-1}C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r}C_{p+q-1})]$ (Definição 2.1.5). Agora: $\partial[F_{p-1}C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r}C_{p+q-1})] = \{\partial(x) \mid x \in F_{p-1}C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r}C_{p+q-1})\} = \{\partial(x) \mid x \in F_{p-1}C_{p+q} \text{ e } \partial(x) \in F_{p-r}C_{p+q-1}\} = F_{p-r}C_{p+q-1} \cap \partial F_{p-1}C_{p+q} = B_{p-r, q+r-1}^r$. Desta maneira $\partial Z_{p-1, q+1}^{r-1} = B_{p-r, q+r-1}^r$. Assim se $x \in \partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r)$, então $\partial(x) = \partial(c)$, $c \in Z_{p-1, q+1}^{r-1}$. Deste modo, $\partial(x-c) = 0$, isto é, $x-c \in Z$, em que Z denota o módulo dos ciclos de C_{p+q} (mais precisamente $Z = \ker \partial_{p+q}$). Portanto $x = (x-c) + c \in Z + Z_{p-1, q+1}^{r-1}$ e conseqüentemente $B_{p-r, q+r-1}^r \subseteq Z + Z_{p-1, q+1}^{r-1}$. Se $u \in Z + Z_{p-1, q+1}^{r-1}$, então $u = z + y$, $z \in Z$ e $y \in Z_{p-1, q+1}^{r-1}$. Daí $\partial(u) = \partial(z) + \partial(y) = 0 + \partial(y) = \partial(y) \in \partial Z_{p-1, q+1}^{r-1} = B_{p-r, q+r-1}^r$. Assim $u \in \partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r)$ e $Z + Z_{p-1, q+1}^{r-1} \subseteq B_{p-r, q+r-1}^r$. Portanto

$$\partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r) = Z + Z_{p-1, q+1}^{r-1}. \quad (ii)$$

De (i) e (ii) segue que $\partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r) + \partial^{-1}(Z_{p-r-1, q+r}^{r-1}) = Z + Z_{p-1, q+1}^{r-1} + \partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1})$. Como $\partial Z = \{0\}$, $Z \subseteq \partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1})$. Logo

$$\partial^{-1}(B_{p-r, q+r-1}^r) + \partial^{-1}(Z_{p-r-1, q+r}^{r-1}) = Z_{p-1, q+1}^{r-1} + \partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1})$$

e a afirmação está demonstrada.

Pelas afirmações anteriores temos $Z_{p,q}^r \cap \partial^{-1}(B_{p-r,q+r-1}^r + Z_{p-r-1,q+r}^{r-1}) = Z_{p,q}^r \cap [Z_{p-1,q+1}^{r-1} + \partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1})]$. Da Definição 2.1.5, obtemos que $Z_{p-1,q+1}^{r-1} \subseteq Z_{p,q}^r$. Deste modo, pelo Lema 1.1.1, $Z_{p,q}^r \cap [Z_{p-1,q+1}^{r-1} + \partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1})] = Z_{p-1,q+1}^{r-1} + [Z_{p,q}^r \cap \partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1})] = Z_{p-1,q+1}^{r-1} + [(F_p C_{p+q} \cap \partial^{-1}F_{p-r}C_{p+q-1}) \cap \partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1})] = Z_{p-1,q+1}^{r-1} + [F_p C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r-1}C_{p+q-1})] = Z_{p-1,q+1}^{r-1} + Z_{p,q}^{r+1}$.

Logo:

$$\ker d_{p,q}^r = \frac{Z_{p-1,q+1}^{r-1} + Z_{p,q}^{r+1}}{B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1}}.$$

- Cálculo de $\text{Im}d_{p+r,q-r+1}^r$:

$\text{Im}d_{p+r,q-r+1}^r = \{x + I \in E_{p,q}^r \mid x + I = d_{p+r,q-r+1}^r(a + I'')\}$, $x \in Z_{p,q}^r$, $a \in Z_{p+r,q-r+1}^r$ e $I'' = B_{p+r,q-r+1}^r + Z_{p+r-1,q-r+2}^{r-1}$. Deste modo $\text{Im}d_{p+r,q-r+1}^r = \{x + I \in E_{p,q}^r \mid x + I = \partial(a) + I\}$, $x \in Z_{p,q}^r$, $a \in Z_{p+r,q-r+1}^r$. Portanto

$$\text{Im}d_{p+r,q-r+1}^r = \frac{\partial(Z_{p+r,q-r+1}^r) + I}{I},$$

isto é,

$$\text{Im}d_{p+r,q-r+1}^r = \frac{\partial(Z_{p+r,q-r+1}^r) + (B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1})}{B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1}}.$$

Pela Definição 2.1.5 obtemos $\partial(Z_{p+r,q-r+1}^r) = \partial(F_{p+r}C_{p+q+1} \cap \partial^{-1}F_p C_{p+q}) = F_p C_{p+q} \cap \partial F_{p+r}C_{p+q+1} = B_{p,q}^{r+1}$. Assim

$$\text{Im}d_{p+r,q-r+1}^r = \frac{B_{p,q}^{r+1} + (B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1})}{B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1}}.$$

Pela Observação 2.1.1, $B_{p,q}^r \subseteq B_{p,q}^{r+1}$. Deste modo

$$\text{Im}d_{p+r,q-r+1}^r = \frac{B_{p,q}^{r+1} + Z_{p-1,q+1}^{r-1}}{B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1}}.$$

Assim a homologia $H_{p+q}(E^r)$ é dada por

$$H_{p+q}(E^r) = \frac{\ker d_{p,q}^r}{\text{Im}d_{p+r,q-r+1}^r} = \frac{\frac{Z_{p-1,q+1}^{r-1} + Z_{p,q}^{r+1}}{B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1}}}{\frac{B_{p,q}^{r+1} + Z_{p-1,q+1}^{r-1}}{B_{p,q}^r + Z_{p-1,q+1}^{r-1}}} \cong \frac{Z_{p-1,q+1}^{r-1} + Z_{p,q}^{r+1}}{B_{p,q}^{r+1} + Z_{p-1,q+1}^{r-1}}.$$

Como $B_{p,q}^{r+1} \subseteq Z_{p,q}^{r+1}$, segue do Corolário 1.1.1, que

$$\frac{Z_{p-1,q+1}^{r-1} + Z_{p,q}^{r+1}}{B_{p,q}^{r+1} + Z_{p-1,q+1}^{r-1}} \cong \frac{Z_{p,q}^{r+1}}{B_{p,q}^{r+1} + (Z_{p,q}^{r+1} \cap Z_{p-1,q+1}^{r-1})}.$$

Temos ainda: $Z_{p,q}^{r+1} \cap Z_{p-1,q+1}^{r-1} = [F_p C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r-1} C_{p+q-1})] \cap [F_{p-1} C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r} C_{p+q-1})] = F_{p-1} C_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r-1} C_{p+q-1}) = Z_{p-1,q+1}^r$. Logo:

$$H_{p+q}(E^r) \cong \frac{Z_{p,q}^{r+1}}{B_{p,q}^{r+1} + Z_{p-1,q+1}^r} = E_{p,q}^{r+1},$$

com a última igualdade obtida da definição de $E_{p,q}^{r+1}$ (Definição 2.1.5). ■

Observação 2.1.8 *De uma maneira mais geral uma seqüência espectral (homológica) é definida (ver [14], Definição 2.2, p.29) como uma seqüência de módulos bigraduados $\{E^r, d^r\}$ cuja diferencial d^r tem bigrau $(-r, r-1)$ tal que $E^{r+1} \cong H(E^r)$. Se temos um complexo de cadeias finitamente filtrado, o Teorema 2.1.2 garante que a seqüência que apresentamos na Definição 2.1.5 satisfaz estas condições e, portanto, é uma seqüência espectral de acordo com essa definição geral.*

Observação 2.1.9 *Se compararmos o tratamento de seqüência espectral apresentado em [9] com o dado por [1], referência que motivou este trabalho, encontramos algumas diferenças na notação utilizada. Assim, no teorema anterior e em algumas aplicações que apresentamos posteriormente que foram baseadas em [9], foram necessárias algumas modificações nas notações para a devida adaptação à notação utilizada em [1] e que adotamos neste trabalho.*

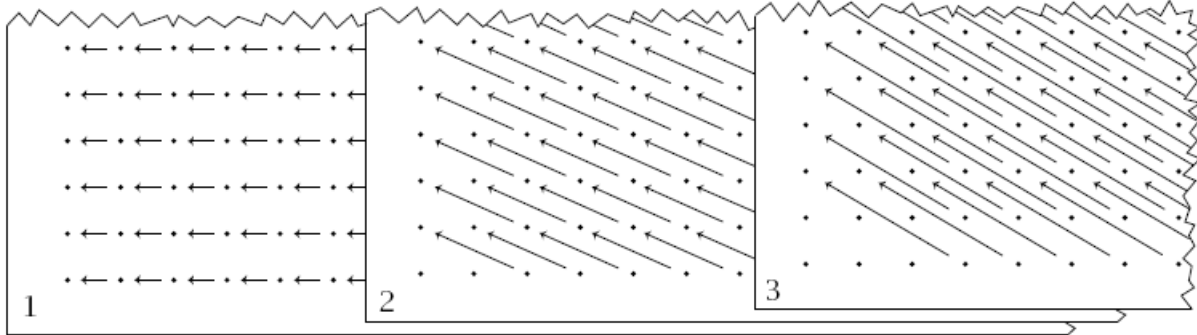
Uma importante conseqüência do Teorema 2.1.2 é a proposição seguinte:

Proposição 2.1.4 ([1], p. 163, Proposição 2.6) *Sejam C e C' complexos de cadeias com filtração finita em cada dimensão e $\tau : C \rightarrow C'$ uma aplicação de cadeias preservando filtração. Se a aplicação induzida das seqüências espectrais $E^r(\tau) : E^r(C) \rightarrow E^r(C')$ é um isomorfismo para algum r , então $H(\tau) : H(C) \rightarrow H(C')$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Seja $r \geq 0$ e suponha que $E^r(\tau) : E^r(C) \rightarrow E^r(C')$ é um isomorfismo. Então a aplicação induzida nos grupos de homologia $H(E^r(\tau)) : H(E^r(C)) \rightarrow H(E^r(C'))$ é um isomorfismo. Portanto, pelo Teorema 2.1.2, $E^{r+1}(\tau) : E^{r+1}(C) \rightarrow E^{r+1}(C')$ é um isomorfismo. Assim para todo $s > r$ temos que a aplicação $E^s(\tau)$ é um isomorfismo. Portanto $E^\infty(C) \cong GrH(C) \cong GrH(C') \cong E^\infty(C')$. Logo, pelo Lema 2.1.2, $H(\tau) : H(C) \rightarrow H(C')$ é um isomorfismo. ■

Costuma-se representar um módulo bigraduado imaginando que os mesmos estão dispostos em um plano cartesiano. Desta maneira os termos $E_{p,q}^r$ da seqüência espectral podem ser representados por pontos (p, q) sobre o plano de coordenadas cartesianas e as diferenciais $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ como flechas que partem de (p, q) e chegam em $(p-r, q+r-1)$. Utilizando esta representação, [8] dá uma abordagem interessante do Teorema 2.1.2, dizendo que a seqüência espectral poderia ser pensada como um livro no qual na $(r+1)$ -ésima página

estão representados os grupos abelianos $E_{p,q}^r$ e as diferenciais $d_{p,q}^r$ de bigrau $(-r, r-1)$. Os grupos que aparecem na página seguinte, são os grupos de homologia dos grupos que aparecem na página anterior. A figura abaixo ilustra esta abordagem para os termos $E_{p,q}^r$ e diferenciais $d_{p,q}^r$ para $r = 1, 2$ e 3 , com bigraus $(-1, 0)$, $(-2, 1)$ e $(-3, 2)$, respectivamente.



A seguir apresentamos um conceito bastante importante na teoria de seqüências espectrais.

Definição 2.1.7 ([14], Definição 1.3, p.7) *Uma seqüência espectral $\{E_{p,q}^r\}$ colapsa no N -ésimo termo se $d_{p,q}^r = 0$, para $r \geq N$, para todos p e q .*

Observação 2.1.10 *É claro que se uma seqüência espectral colapsa no N -ésimo termo então $E_{p,q}^N \cong E_{p,q}^{N+1} \cong \dots \cong E_{p,q}^\infty$ quaisquer que sejam p e q .*

2.1.3 Seqüência espectral de 1º quadrante

Uma seqüência espectral é de 1º quadrante se $E_{p,q}^r = 0$ para $p < 0$ ou $q < 0$, qualquer que seja r . Nesta subseção apresentamos alguns resultados relativos à estas seqüências.

Exemplo 2.1.5 *Seja $E_{p,q}^r$ uma seqüência espectral de 1º quadrante e considere as aplicações $d_{3,-1}^2 : E_{3,-1}^2 \rightarrow E_{1,0}^2$ e $d_{1,0}^2 : E_{1,0}^2 \rightarrow E_{-1,1}^2$. Como a seqüência espectral é de 1º quadrante temos $d_{1,0}^2 = d_{3,-1}^2 = 0$ e $\ker d_{1,0}^2 = E_{1,0}^2$ e $\text{Im} d_{3,-1}^2 = \{0\}$. Portanto, pelo Teorema 2.1.2, $E_{1,0}^3 \cong H_1(E^2) = \frac{\ker d_{1,0}^2}{\text{Im} d_{3,-1}^2} = E_{1,0}^2$. Analogamente $E_{1,0}^4 \cong H_1(E^3) = \frac{\ker d_{1,0}^3}{\text{Im} d_{4,-2}^3} = E_{1,0}^3$, pois $d_{1,0}^3 : E_{1,0}^3 \rightarrow E_{-2,2}^3$ é nula visto que $E_{-2,2}^3 = 0$. Daí $E_{1,0}^4 \cong E_{1,0}^3$. Procedendo deste modo, podemos mostrar que $E_{1,0}^{r+1} \cong E_{1,0}^r$ para todo $r \geq 2$.*

Como no exemplo anterior pode-se mostrar que as diferenciais d^r de uma seqüência espectral de 1º quadrante se anulam a partir de um determinado índice r (que depende dos valores de p e q) e neste caso segue do Teorema 2.1.2 que $E_{p,q}^r \cong E_{p,q}^{r+1}$. Em geral, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.5 ([11], p.320) *Se a seqüência espectral é de primeiro quadrante, então $E_{p,q}^{r+1} \cong E_{p,q}^r$ para $r > \max\{p, q+1\}$.*

Demonstração Basta observar que se a seqüência é de 1° quadrante, para $r > \max\{p, q + 1\}$ temos $\ker d_{p,q}^r = E_{p,q}^r$ e $\text{Im} d_{p+r,q-r+1}^r = \{0\}$ (sendo as diferenciais associadas nulas). Assim $E_{p,q}^{r+1} \cong H_{p+q}(E^r) = E_{p,q}^r$. ■

Algumas filtrações dão origem à seqüências espectrais de 1° quadrante. Apresentamos a seguir a definição de uma filtração com esta propriedade e uma importante proposição relacionada que será útil nas aplicações que apresentaremos no Capítulo 4.

Definição 2.1.8 *Uma filtração F de um módulo graduado M é canonicamente limitada se $F_{-1}M_n = 0$ e $F_nM_n = M_n$ em cada grau n . Analogamente um complexo de cadeias de R -módulos $C = (C_n)$ possui uma filtração canonicamente limitada se a filtração de cada R -módulo C_n é canonicamente limitada.*

Proposição 2.1.6 ([11], Teorema 3.3, p.330) *Se F é uma filtração canonicamente limitada de um complexo de cadeias $C = (C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, então a seqüência espectral associada à F é de 1° quadrante e a filtração induzida nos grupos de homologia $H_n(C)$ é finita e tem a seguinte forma:*

$$0 = F_{-1}H_n(C) \subset F_0H_n(C) \subset \dots \subset F_nH_n(C) = H_n(C)$$

com quocientes sucessivos $\frac{F_pH_n(C)}{F_{p-1}H_n(C)} \cong E_{p,n-p}^\infty$.

Demonstração: Vimos que $E_{p,q}^0 = \frac{F_pC_{p+q}}{F_{p-1}C_{p+q}}$ (Proposição 2.1.3). Assim se $p < 0$, como $F_{-1}C_n = 0$, obtemos que $E_{p,q}^0 = 0$. Portanto, pelo Teorema 2.1.2, se $p < 0$, então $E_{p,q}^r = 0$, $\forall r$. Por outro lado, como $F_nC_n = C_n$, se $q < 0$, então $F_pC_{p+q} = F_{p-1}C_{p+q}$. Daí $E_{p,q}^0 = 0$ para $q < 0$ e, conseqüentemente, $E_{p,q}^r = 0$, para $q < 0 \forall r$. Logo a seqüência espectral é de primeiro quadrante.

Pela Proposição 2.1.1, $F_pH_n(C) = \frac{F_pC_n \cap Z}{F_pC_n \cap B}$, no qual Z (respectivamente B) é o módulo dos ciclos (respectivamente bordos) de C_n . Deste modo, $F_{-1}H_n(C) = 0$ e $F_nH_n(C) = \frac{Z}{B} = H_n(C)$. Portanto a filtração de $H_n(C)$ é finita e tem a forma descrita. Vimos também que $E_{p,q}^\infty \cong Gr_{p,q}H(C) = \frac{F_pH_{p+q}(C)}{F_{p-1}H_{p+q}(C)}$. Daí a filtração de $H_n(C)$ tem os quocientes sucessivos: $\frac{F_pH_n(C)}{F_{p-1}H_n(C)} = Gr_{p,n-p}H(C) \cong E_{p,n-p}^\infty$. ■

A proposição anterior nos garante que uma filtração canonicamente limitada de um complexo de cadeias C induz uma filtração canonicamente limitada nos grupos de homologia de C .

2.2 Homologia de grupos e seqüência espectral

Nesta seção estabelecemos uma forte relação existente entre as teorias de homologia de grupos e de seqüências espectrais.

2.2.1 Filtrações associadas a um complexo duplo

Definição 2.2.1 ([1], p.164) Um complexo duplo é um módulo bigraduado $\mathcal{C} = (C_{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}}$, com uma diferencial “horizontal” ∂' de bigrau $(-1,0)$ e uma diferencial “vertical” ∂'' de bigrau $(0,-1)$, tais que $\partial' \partial'' = \partial'' \partial'$ (i.é, os quadrados abaixo são comutativos).

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1,q} & \xrightarrow{\partial'} & C_{p,q} & \xrightarrow{\partial'} & C_{p-1,q} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \partial'' & & \downarrow \partial'' & & \downarrow \partial'' & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{p+1,q-1} & \xrightarrow{\partial'} & C_{p,q-1} & \xrightarrow{\partial'} & C_{p-1,q-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Observação 2.2.1 ([1], p.164) Um complexo duplo pode ser considerado de dois modos diferentes como um “complexo de cadeias na categoria dos complexos de cadeias”:

(1) Para cada q , nós temos um complexo de cadeias horizontal $C_{*,q}$ com diferencial ∂' e são dadas aplicações de cadeias $\partial'' : C_{*,q} \longrightarrow C_{*,q-1}$ tais que $\partial'' \partial' = 0$.

(2) Similarmente, para cada p , nós temos um complexo de cadeias vertical $C_{p,*}$ com diferencial ∂'' e são dadas aplicações de cadeias $\partial' : C_{p,*} \longrightarrow C_{p-1,*}$ com $\partial' \partial'' = 0$.

Definição 2.2.2 Dado um complexo duplo $\mathcal{C} = C_{p,q}$, o complexo total $T\mathcal{C}$, é o complexo de cadeias originado de \mathcal{C} , considerando $(T\mathcal{C})_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$ e a diferencial ∂ dada por $\partial|_{C_{p,q}} = \partial' + (-1)^p \partial''$.

Exemplo 2.2.1 Consideremos um complexo duplo $\mathcal{C} = (C_{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}}$ de 1º quadrante, isto é, com $C_{p,q} = 0$, se $p < 0$ ou $q < 0$, e o complexo total originado (Definição 2.2.2). Temos, por exemplo:

$$\begin{aligned} (T\mathcal{C})_3 &= \bigoplus_{p+q=3} C_{p,q} = C_{03} \oplus C_{12} \oplus C_{21} \oplus C_{30}; \\ (T\mathcal{C})_2 &= \bigoplus_{p+q=2} C_{p,q} = C_{02} \oplus C_{11} \oplus C_{20}. \end{aligned}$$

Vamos analisar

$$\partial : (T\mathcal{C})_3 \longrightarrow (T\mathcal{C})_2.$$

Pela Definição 2.2.2 temos:

$$\partial|_{C_{12}} = \partial' + (-1)^1 \partial''.$$

Assim, se $x \in C_{12} \subseteq (T\mathcal{C})_3$, então:

$$\partial(x) = \partial'(x) - \partial''(x) \in C_{02} \oplus C_{11}.$$

Daí:

$$\partial|_{C_{12}} : C_{12} \longrightarrow C_{02} \oplus C_{11}.$$

Analogamente obtemos:

$$\begin{aligned} \partial|_{C_{03}} &: C_{03} \longrightarrow C_{02}; \\ \partial|_{C_{21}} &: C_{21} \longrightarrow C_{11} \oplus C_{20}; \\ \partial|_{C_{30}} &: C_{30} \longrightarrow C_{20}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.2 *O produto tensorial de dois complexos de cadeias nos dá um exemplo de um complexo total. Na verdade, o produto $C \otimes D = (C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q$ é o complexo total obtido do complexo duplo $\mathcal{C} = C_{p,q} = C_p \otimes D_q$ (Ver Definição 1.1.2).*

Podemos obter **duas filtrações** de um complexo total TC originado de um complexo duplo \mathcal{C} . Estas filtrações são finitas desde que \mathcal{C} tenha somente um número finito de módulos não nulos em qualquer grau total $p+q$ dado, e neste caso nós temos **duas seqüências espectrais** convergindo para $H_*(TC)$. Vamos agora descrever estas filtrações.

1ª Filtração: Filtramos o complexo TC por considerar

$$F_p(TC)_n = \bigoplus_{i \leq p} C_{i,n-i} = \dots \oplus C_{0,n} \oplus C_{1,n-1} \oplus \dots \oplus C_{p,n-p}.$$

Vimos na Proposição 2.1.3 que $E_{p,q}^0 = \frac{F_p(TC)_{p+q}}{F_{p-1}(TC)_{p+q}}$. Portanto

$$E_{p,q}^0 = \frac{\bigoplus_{i \leq p} C_{i,p+q-i}}{\bigoplus_{i \leq p-1} C_{i,p+q-i}} = C_{p,q}.$$

Também:

$$E_{p,q-1}^0 = \frac{\bigoplus_{i \leq p} C_{i,p+q-1-i}}{\bigoplus_{i \leq p-1} C_{i,p+q-1-i}} = C_{p,q-1}.$$

Assim a diferencial $d_{p,q}^0 : E_{p,q}^0 \longrightarrow E_{p,q-1}^0$ é tal que:

$$d_{p,q}^0 : C_{p,q} \longrightarrow C_{p,q-1}.$$

Seja $x \in C_{p,q}$. Sabemos que $\partial|_{C_{p,q}} = \partial' + (-1)^p \partial''$. Deste modo $\partial(x) = \partial'(x) + (-1)^p \partial''(x)$. Como $\partial'(x) \in C_{p-1,q} \subseteq \bigoplus_{i \leq p-1} C_{i,p+q-1-i}$, então $\partial'(x) = 0$ em $E_{p,q-1}^0$. Portanto $d_{p,q}^0 = \pm \partial''$.

Sabemos, pelo Teorema 2.1.2, que

$$E_{p,q}^1 \cong H_{p+q}(E^0) = \frac{\ker d_{p,q}^0}{\text{Im} d_{p,q+1}^0} = \frac{\ker \partial''}{\text{Im} \partial''}.$$

Portanto, pelo diagrama da Definição 2.2.1, podemos dizer que E^1 é a homologia vertical de \mathcal{C} , isto é, $E_{p,q}^1 = H_q(C_{p,*})$. Segue que a diferencial $d_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \longrightarrow E_{p-1,q}^1$ é a aplicação induzida pela aplicação de cadeias $\partial' : C_{p,*} \longrightarrow C_{p-1,*}$, pois um elemento de $E_{p,q}^1$ é representado por um elemento $c \in C_{p,q}$ tal que $\partial''(c) = 0$, e para tal c , $\partial(c) = \partial'(c) + (-1)^p \partial''(c) = \partial'(c)$. Deste modo, como $E_{p,q}^2 \cong H_{p+q}(E^1)$, vemos que E^2 é (a menos de isomorfismo) a homologia horizontal

da homologia vertical de \mathcal{C} , ou seja,

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(H_q(\mathcal{C})).$$

2ª Filtração: Também podemos filtrar $T\mathcal{C}$ considerando

$$F_p(T\mathcal{C})_n = \bigoplus_{j \leq p} C_{n-j,j} = \dots \oplus C_{n,0} \oplus C_{n-1,1} \oplus \dots \oplus C_{n-p,p}.$$

Desta filtração obtemos:

$$E_{p,q}^0 = \frac{\bigoplus_{j \leq p} C_{p+q-j,j}}{\bigoplus_{j \leq p-1} C_{p+q-j}} = C_{q,p}$$

e

$$E_{p,q-1}^0 = \frac{\bigoplus_{j \leq p} C_{p+q-1-j,j}}{\bigoplus_{j \leq p-1} C_{p+q-1-j,j}} = C_{q-1,p}.$$

Deste modo $d_{p,q}^0 : E_{p,q}^0 \longrightarrow E_{p,q-1}^0$ é tal que:

$$d_{p,q}^0 : C_{q,p} \longrightarrow C_{q-1,p}.$$

Como $\partial|_{C_{q,p}} = \partial' + (-1)^q \partial''$ e $\partial''(x) \in C_{q,p-1} \subseteq \bigoplus_{j \leq p-1} C_{p+q-1-j,j}$, pelo mesmo raciocínio aplicado anteriormente obtemos $d_{p,q}^0 = \partial'$.

Portanto:

$$E_{p,q}^1 \cong H_{p+q}(E^0) = \frac{\ker d_{p,q}^0}{\text{Im} d_{p,q+1}^0} = H_q(C_{*,p}).$$

A diferencial $d_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \longrightarrow E_{p-1,q}^1$ é a aplicação induzida pela aplicação de cadeias: $\partial'' : C_{*,p} \longrightarrow C_{*,p-1}$ (a menos de sinal).

Proposição 2.2.1 *Se \mathcal{C} é um complexo duplo de 1º quadrante, então as filtrações do complexo total associado como apresentadas anteriormente são canonicamente limitadas.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{C} = (C_{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}}$ um complexo duplo e $T\mathcal{C}$ o complexo total associado.

Vimos que as filtrações de $T\mathcal{C}$ são dadas por $F_p(T\mathcal{C})_n = \bigoplus_{i \leq p} C_{i,n-i}$ e $F'_p(T\mathcal{C})_n = \bigoplus_{j \leq p} C_{n-j,j}$.

Temos que mostrar que $F_{-1}(T\mathcal{C})_n = 0 = F'_{-1}(T\mathcal{C})_n$ e $F_n(T\mathcal{C})_n = (T\mathcal{C})_n = F'_n(T\mathcal{C})_n$. Como o complexo duplo \mathcal{C} é de primeiro quadrante obtemos: $F_{-1}(T\mathcal{C})_n = \bigoplus_{i \leq -1} C_{i,n-i} = 0$ e analogamente

$F'_{-1}(T\mathcal{C})_n = \bigoplus_{j \leq -1} C_{n-j,j} = 0$. Por outro lado $F_n(T\mathcal{C})_n = \bigoplus_{i \leq n} C_{i,n-i} = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q} = (T\mathcal{C})_n$ e

$F'_n(T\mathcal{C})_n = \bigoplus_{j \leq n} C_{n-j,j} = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q} = (T\mathcal{C})_n$. Logo as filtrações são canonicamente limitadas. ■

Corolário 2.2.1 *Se \mathcal{C} é um complexo duplo de 1º quadrante e TC é o complexo total associado, então existem duas seqüências espectrais de 1º quadrante convergindo para $H_*(TC)$.*

Demonstração: Pela proposição anterior as filtrações do complexo total TC são canonicamente limitadas. Assim pela Proposição 2.1.6 as duas seqüências espectrais associadas às filtrações de TC são de 1º quadrante. Por outro lado, TC é um complexo de cadeias finitamente filtrado. Logo, pela Observação 2.1.6 e pelo Teorema 2.1.1, as duas seqüências espectrais convergem para $H_*(TC)$. ■

Observação 2.2.2 ([1], p.165) *Embora as duas seqüências espectrais obtidas tenham o mesmo limite $H_*(TC)$, elas não têm em geral o mesmo E^∞ -termo, pois estamos tomando duas filtrações distintas do complexo total TC e assim temos dois diferentes termos $E_{p,q}^\infty \cong GrH_{p+q}(TC)$.*

Observação 2.2.3 *Uma discussão similar se aplica à complexos duplos de cocadeias $\mathcal{C} = C^{p,q}$. Neste caso temos um complexo total TC com duas filtrações decrescentes, e conseqüentemente duas seqüências espectrais de cohomologia convergindo para $H^*(TC)$ (contanto que \mathcal{C} tenha somente um número finito de módulos não nulos em cada grau total $p + q$ dado).*

2.2.2 $H_*(G, C)$ como limite de duas seqüências espectrais

As duas filtrações do complexo total obtido de um complexo duplo, descritas anteriormente, nos permitirão estabelecer a desejada relação entre homologia de grupos e seqüência espectral.

Sejam G um grupo, $C = (C_n)$ um complexo de cadeias não-negativo de $\mathbb{Z}G$ -módulos e F uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. Considerando o complexo duplo $\mathcal{C} = (C_{p,q}) = F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q$, temos que $F \otimes_{\mathbb{Z}G} C$ é o complexo total TC associado à \mathcal{C} e como visto na Seção 2.2.1, podemos obter duas filtrações de $TC = F \otimes_{\mathbb{Z}G} C$ e daí duas seqüências espectrais associadas. Claramente, o complexo duplo $\mathcal{C} = (C_{p,q}) = F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q$ é de primeiro quadrante. Portanto, pelo Corolário 2.2.1, as seqüências espectrais convergem para o grupo de homologia do complexo total que neste caso é $H_*(TC) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} C) = H_*(G, C)$.

Logo a homologia de um grupo G com coeficientes em um complexo de cadeias não-negativo C , $H_*(G, C)$, é limite das seqüências espectrais associadas às filtrações do complexo $F \otimes_{\mathbb{Z}G} C$.

Esse fato será fundamental no desenvolvimento deste trabalho, e é muito importante conhecer os termos dessas seqüências.

Vamos inicialmente descrever alguns termos da seqüência espectral associada à 1ª filtração do complexo total. Como visto na Seção 2.2.1, temos:

$$E_{p,q}^0 = C_{p,q} = F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q.$$

e

$$E_{p,q}^1 \cong H_{p+q}(E^0) = H_q(\mathcal{C}_{p*}) = H_q(F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*).$$

Proposição 2.2.2 $H_q(F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*) \cong F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} H_q(C)$.

Demonstração: Consideremos a seqüência

$$\dots \xrightarrow{id \otimes \partial_{q+2}} F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_{q+1} \xrightarrow{id \otimes \partial_{q+1}} F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q \xrightarrow{id \otimes \partial_q} F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_{q-1} \longrightarrow \dots$$

obtida de: $\dots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \longrightarrow \dots$ pela aplicação do functor $F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} -$. Sabemos que $H_q(F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*) = \frac{\ker(id \otimes \partial_q)}{\text{Im}(id \otimes \partial_{q+1})}$. Vamos calcular $\ker(id \otimes \partial_q)$ e $\text{Im}(id \otimes \partial_{q+1})$.

Considere a seqüência exata curta:

$$0 \longrightarrow \ker \partial_q \xrightarrow{i} C_q \xrightarrow{\partial_q} \text{Im} \partial_q \longrightarrow 0$$

Como os módulos F_p são projetivos, o functor $F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} -$ é exato ([15], Corolário 3.46, p.85). Daí temos a seqüência exata:

$$0 \longrightarrow F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \ker \partial_q \xrightarrow{id \otimes i} F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q \xrightarrow{id \otimes \partial_q} F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \text{Im} \partial_q \longrightarrow 0$$

Portanto, $\ker(id \otimes \partial_q) = \text{Im} id \otimes i = F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \ker \partial_q$ e $\text{Im}(id \otimes \partial_q) = F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \text{Im} \partial_q$, para todo q . Por outro lado temos a seqüência exata:

$$0 \longrightarrow F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \text{Im} \partial_{q+1} \xrightarrow{id \otimes i} F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \ker \partial_q \xrightarrow{id \otimes p} F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} H_q(C) \longrightarrow 0,$$

obtida da seqüência exata $0 \longrightarrow \text{Im} \partial_{q+1} \xrightarrow{i} \ker \partial_q \xrightarrow{p} H_q(C) \longrightarrow 0$, sendo p a projeção natural, novamente pela aplicação do functor $F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} -$. Assim

$$F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} H_q(C) \cong \frac{F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \ker \partial_q}{F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \text{Im} \partial_{q+1}}.$$

Logo:

$$F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} H_q(C) \cong \frac{F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \ker \partial_q}{F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \text{Im} \partial_{q+1}} = \frac{\ker(id \otimes \partial_q)}{\text{Im}(id \otimes \partial_{q+1})} = H_q(F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*).$$

■

A proposição anterior nos dá

$$E_{p,q}^1 \cong H_{p+q}(E^0) = H_q(\mathcal{C}_{p*}) = H_q(F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*) \cong F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} H_q(C)$$

Tomando agora a homologia com respeito a p , temos:

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(F_* \bigotimes_{\mathbb{Z}G} H_q(C)) = H_p(G, H_q(C)).$$

Uma conseqüência importante disto é que $H_*(G, C)$ é um invariante do tipo de homotopia fraca de C :

Proposição 2.2.3 ([1], Proposição 5.2, p. 169) *Se $\tau : C \rightarrow C'$ é uma equivalência fraca de $\mathbb{Z}G$ -complexos de cadeias, então τ induz um isomorfismo:*

$$H_*(G, C) \cong H_*(G, C').$$

Demonstração: Sejam (C, ∂) e (C', ∂') complexos de cadeias de $\mathbb{Z}G$ -módulos. Como $\tau : C \rightarrow C'$ é uma equivalência fraca, a aplicação $\tau_* : H(C) \rightarrow H(C')$ é um isomorfismo (ver p. 4). Considere a resolução projetiva $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$, e

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &:= id \otimes \tau : F \bigotimes_{\mathbb{Z}G} C \rightarrow F \bigotimes_{\mathbb{Z}G} C' \\ f \otimes c &\mapsto \tilde{\tau}(f \otimes c) = f \otimes \tau(c). \end{aligned}$$

Em primeiro lugar mostremos que $\tilde{\tau}$ é uma aplicação de cadeias preservando filtração. De fato: Considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & (F \otimes_{\mathbb{Z}G} C)_n & \xrightarrow{\partial_*} & (F \otimes_{\mathbb{Z}G} C)_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \tilde{\tau} & & \downarrow \tilde{\tau} & & \\ \cdots & \longrightarrow & (F \otimes_{\mathbb{Z}G} C')_n & \xrightarrow{\partial'_*} & (F \otimes_{\mathbb{Z}G} C')_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

no qual $\partial_* = id \otimes \partial_n$ e $\partial'_* = id \otimes \partial'_n$. Temos que mostrar que $\partial'_* \circ \tilde{\tau} = \tilde{\tau} \circ \partial_*$. Sejam $f \otimes c \in F_p \otimes_G C_q \subseteq (F \otimes_{\mathbb{Z}G} C)_n$, e $f \otimes c' \in F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C'_q \subseteq (F \otimes_{\mathbb{Z}G} C')_n$. Pela Definição 1.1.2 temos: $\partial_*(f \otimes c) = f \otimes c + (-1)^p f \otimes \partial(c)$ e $\partial'_*(f \otimes c') = f \otimes c' + (-1)^p f \otimes \partial'(c')$. Assim

$$\tilde{\tau} \circ \partial_*(f \otimes c) = \tilde{\tau}(f \otimes c + (-1)^p f \otimes \partial(c)) = \tilde{\tau}(f \otimes (c + (-1)^p \partial(c))) = f \otimes (\tau(c) + (-1)^p \tau \circ \partial(c)).$$

Por outro lado

$$\partial'_* \circ \tilde{\tau}(f \otimes c) = \partial'_*(f \otimes \tau(c)) = f \otimes \tau(c) + (-1)^p f \otimes \partial'(\tau(c)) = f \otimes (\tau(c) + (-1)^p (\partial' \circ \tau)(c)).$$

Como $\tau : C \rightarrow C'$ é uma aplicação de cadeias segue que $\partial' \circ \tau = \tau \circ \partial$. Portanto, $\tilde{\tau} \circ \partial_* = \partial'_* \circ \tilde{\tau}$ e conseqüentemente $\tilde{\tau}$ é uma aplicação de cadeias.

Agora consideremos as filtrações (1ª filtração) dos complexos $TC = F \otimes_G C$ e $TC' = F \otimes_G C'$: $F_p(F \otimes_G C)_n = \bigoplus_{i \leq p} F_i \otimes_G C_{n-i}$ e $F_p(F \otimes_G C')_n = \bigoplus_{i \leq p} F_i \otimes_G C'_{n-i}$. Claramente, $\tilde{\tau}$ preserva filtração.

Utilizando os resultados da Seção 2.2.1 obtemos as seqüências espectrais $E_{p,q}^r(C)$ e $E_{p,q}^r(C')$ associadas aos complexos TC e TC' , com $E_{p,q}^1 = F_p \otimes H_q(C)$ e $E_{p,q}^1 = F_p \otimes H_q(C')$ convergindo para $H_*(G, C)$ e $H_*(G, C')$, respectivamente. Sabemos que $\tau_* : H(C) \rightarrow H(C')$ é um isomorfismo. Portanto a aplicação:

$$E^1(\tilde{\tau}) : F_p \otimes H_q(C) \rightarrow F_p \otimes H_q(C')$$

é um isomorfismo, isto é, $E^1(\tilde{\tau}) : E_{p,q}^1(C) \rightarrow E_{p,q}^1(C')$ é um isomorfismo. Logo, pela Proposição 2.1.4, $H(\tilde{\tau}) : H(F \otimes_G C) \rightarrow H(F \otimes_G C')$ é um isomorfismo e assim $H_*(G, C) \cong H_*(G, C')$. ■

Apresentamos agora o cálculo de $H_*(G, C)$ em dois casos especiais. No primeiro, o grupo G atua trivialmente sobre o complexo C e deste modo podemos obter $H_*(G, C)$ em termos de $H_*(G)$ e $H_*(C)$. No segundo caso, o complexo de cadeias C possui uma propriedade especial e neste caso mostraremos que $H_*(G, C) \cong H_*(C_G)$.

Proposição 2.2.4 *Se G atua trivialmente sobre C , então $F \otimes_G C \cong F_G \otimes C$ e assim existe uma fórmula de Künneth expressando $H_*(G, C)$ em termos de $H_*(G)$ e $H_*(C)$:*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(G) \otimes H_q(C) \rightarrow H_n(G, C) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(G), H_q(C)) \rightarrow 0.$$

Demonstração: Se G atua trivialmente sobre C , então, dado $p \in \mathbb{Z}$ qualquer que seja $c \in C_p$, $g.c = c$ para todo $g \in G$. Pela Proposição 1.1.3 temos $F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q \cong (F_p \otimes_{\mathbb{Z}} C_q)_G$. Considere os \mathbb{Z} -módulos $F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} = (F_p)_G$, onde a última igualdade segue do Corolário 1.1.2. Como F é uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$, os $\mathbb{Z}G$ -módulos F_p são projetivos. Assim F_p é um somando direto de um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre (Proposição 1.1.1), digamos: $F_p \oplus Q_p = \bigoplus \mathbb{Z}G$. Portanto:

$$(F_p \oplus Q_p) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} = (\bigoplus \mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \cong \bigoplus (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \cong \bigoplus \mathbb{Z}.$$

Deste modo $(F_p \oplus Q_p) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} = (F_p)_G \oplus (Q_p)_G$ é um \mathbb{Z} -módulo livre e $(F_p)_G$ é \mathbb{Z} -projetivo (Proposição 1.1.1). Assim, como \mathbb{Z} é um domínio de ideais principais, $(F_p)_G$ é \mathbb{Z} -livre ([15], Corolário 4.20, p.122). Obtemos então: \mathbb{Z} é um domínio de ideais principais; $(F_p)_G = F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}$ é um \mathbb{Z} -módulo livre (munido de uma G -ação); C é um complexo de \mathbb{Z} -módulos. Portanto, pela Proposição 1.1.7, temos:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(F_G) \otimes H_q(C) \rightarrow H_n(F_G \otimes_{\mathbb{Z}} C) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(F_G), H_q(C)) \rightarrow 0,$$

Sabemos ainda que $F_G \otimes_{\mathbb{Z}} C \cong (F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} C \cong F \otimes_{\mathbb{Z}G} C$. Logo:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(G) \otimes H_q(C) \rightarrow H_n(G, C) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(G), H_q(C)) \rightarrow 0$$

É interessante conhecer o limite $H_*(G, C)$ das seqüências espectrais apresentadas para determinados complexos C , por exemplo, quando C é acíclico. ■

Definição 2.2.3 *Seja G um grupo. Um $\mathbb{Z}G$ -módulo M é H_* -acíclico se $H_j(G, M) = 0$, $\forall j > 0$.*

Lema 2.2.1 *Se M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre, então M é H_* -acíclico.*

Demonstração: Seja $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. Como M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre, temos a seguinte seqüência exata:

$$\dots \rightarrow F_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow 0$$

Logo, para todo $q > 0$, $H_q(G, M) = 0$ e segue da Definição 2.2.3 que o $\mathbb{Z}G$ -módulo M é H_* -acíclico. ■

Proposição 2.2.5 ([1], p.169) *Sejam G um grupo, F uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$ e C um complexo de cadeias não-negativo finitamente filtrado de $\mathbb{Z}G$ -módulos. Se o complexo C é um complexo de $\mathbb{Z}G$ -módulos livres, ou mais geralmente $\mathbb{Z}G$ -módulos H_* -acíclicos, então a seqüência espectral $\{E_{p,q}^r\}$ associada à 2ª filtração do complexo $F \otimes_{\mathbb{Z}G} C$ (Seção 2.2.1) satisfaz:*

- (i) *O E^1 -termo é concentrado na linha $q = 0$ e $E_{p,0}^1 = (C_p)_G$;*
- (ii) *A seqüência espectral colapsa no E^2 -termo e seu limite é $H_*(G, C) \cong H_*(C_G)$.*

Demonstração: Pelo Lema 2.2.1 basta provar o caso em que o complexo C é um complexo de $\mathbb{Z}G$ -módulos H_* -acíclicos.

Seja $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. Considerando \mathbb{Z} como um complexo concentrado na dimensão 0, obtemos que ε é uma aplicação de cadeias de $\mathbb{Z}G$ -módulos (com \mathbb{Z} visto como um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial):

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como a seqüência $F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ é exata, ε é uma equivalência fraca. Além disso ε induz a aplicação

$$\beta := \varepsilon \otimes id : F \otimes_{\mathbb{Z}G} C \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C = C_G$$

Afirmamos que β é uma aplicação de cadeias preservando filtração. De fato: Pela Definição 1.1.2 temos: $(F \otimes_{\mathbb{Z}G} C)_n = \bigoplus_{p+q=n} F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q$ e $(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C)_n = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_n = (C_n)_G$. Em primeiro lugar notemos que se $p > 0$, $\beta(F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q) = 0$, pois $\varepsilon(f) = 0$ qualquer que seja $f \in F_p$; se $p = 0$, $\beta(F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} C_n) \subseteq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_n$. Assim $\beta((F \otimes_{\mathbb{Z}G} C)_n) \subseteq (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C)_n$. Temos então:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & (F \otimes_{\mathbb{Z}G} C)_n & \xrightarrow{\partial} & (F \otimes_{\mathbb{Z}G} C)_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_n & \xrightarrow{id \otimes \partial'_n} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

sendo $\partial'_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ a diferencial do complexo C e $\partial|_{F_p \otimes C_q} = \partial_p + (-1)^p \partial'_q$.

Sabemos que se $f_p \otimes c_q \in F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q$, então $\partial(f_p \otimes c_q) = \partial_p(f_p) \otimes c_q + (-1)^p f_p \otimes \partial'_q(c_q) \in F_{p-1} \otimes C_q \oplus F_p \otimes C_{q-1}$. Deste modo $\beta(\partial(F_p \otimes C_q)) \subseteq \beta(F_{p-1} \otimes C_q \oplus F_p \otimes C_{q-1})$. Portanto, se $p > 1$, $(\beta \circ \partial)(F_p \otimes C_q) = 0$. Suponhamos $p = 1$ e seja $x \otimes y \in F_1 \otimes C_{n-1}$. Assim $\partial(x \otimes y) = \partial_1(x) \otimes y - x \otimes \partial'_{n-1}(y)$ e daí $\beta(\partial(x \otimes y)) = (\varepsilon \otimes id)(\partial(x \otimes y)) = \varepsilon(\partial_1(x)) \otimes y - \varepsilon(x) \otimes \partial'_{n-1}(y)$. Como $x \in F_1$ segue que $\varepsilon(x) = 0$ e pelo fato que a seqüência $F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ é exata segue também que $\varepsilon(\partial_1(x)) = 0$. Portanto, $\beta(\partial(x \otimes y)) = 0$, ou seja, $(\beta \circ \partial)(F_1 \otimes C_{n-1}) = 0$. Assim, $(\beta \circ \partial)(F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q) = 0$ para todo $p > 0$. Vimos que, para $p > 0$, $\beta(F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q) = 0$ e conseqüentemente $[(id \otimes \partial') \circ \beta](F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q) = 0$ para $p > 0$. Assim sendo, para mostrar que β é uma aplicação de cadeias é suficiente considerar o caso $p = 0$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} C_n & \xrightarrow{\partial} & F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_n & \xrightarrow{id \otimes \partial'_n} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Dado $x \otimes y \in F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} C_n$ temos: $(\beta \circ \partial)(x \otimes y) = \beta(x \otimes \partial'_n(y)) = \varepsilon(x) \otimes \partial'_n(y) = (id \otimes \partial'_n)(\varepsilon(x) \otimes y) = (id \otimes \partial'_n)(\beta(x \otimes y))$. Logo $\beta \circ \partial = (id \otimes \partial'_n) \circ \beta$ e β é uma aplicação de cadeias.

Por outro lado, considere as filtrações dos complexos $TC := F \otimes_{\mathbb{Z}G} C$ e $TC' := \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C$ (2ª filtração apresentada em 2.2.1): $F_p(TC)_n = \bigoplus_{i \leq p} C_{n-i, i} = \bigoplus_{i \leq p} F_{n-i} \otimes C_i$ e $F_p(TC')_n = \bigoplus_{i \leq p} C'_{n-i, i} = \bigoplus_{i \leq p} \mathbb{Z}_{n-i} \otimes C_i$. Deste modo $F_p(TC')_n = 0$, se $p < n$ e $F_p(TC')_n = \mathbb{Z} \otimes C_n$, se $p \geq n$. Portanto se $p < n$, ou equivalentemente $n - p > 0$,

$$\beta(F_p(TC)_n) = \beta\left(\bigoplus_{i \leq p} F_{n-i} \otimes C_i\right) = 0 = F_p(TC')_n,$$

e se $p \geq n$

$$\beta(F_p(TC)_n) = \beta\left(\bigoplus_{i \leq p} F_{n-i} \otimes C_i\right) \subseteq \mathbb{Z} \otimes C_n = F_p(TC')_n.$$

Logo, β preserva filtração.

(i) Sabemos que $\beta : TC \longrightarrow TC'$ induz uma aplicação: $E^r(\beta) : E^r(TC) \longrightarrow E^r(TC')$. Sabemos também, por 2.2.1 (2ª filtração associada ao complexo total), que:

$$E_{p,q}^0(TC) = C_{q,p} = F_q \otimes C_p;$$

$$E_{p,q}^0(TC') = C'_{q,p} = \begin{cases} 0, & \text{se } q > 0; \\ \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_p, & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

Ainda como visto em 2.2.1:

$$E_{p,q}^1(TC) = H_q(F_* \otimes C_p) = H_q(G, C_p)$$

Como os $\mathbb{Z}G$ -módulos C_p são H_* -acíclicos (por hipótese), então:

$$E_{p,q}^1(TC) = \begin{cases} 0, & \text{se } q > 0; \\ H_0(G, C_p), & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

Pela Proposição 1.4.2, $H_0(G, C_p) \cong (C_p)_G$. Portanto, o E^1 -termo é concentrado na linha $q = 0$ e

$$E_{p,0}^1 \cong (C_p)_G.$$

(ii) Já sabemos que a seqüência espectral converge para $H_*(TC) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} C) = H_*(G, C)$ (Corolário 2.2.1). Vejamos que $H_*(G, C) \cong H_*(C_G)$. Temos:

$$E_{p,q}^1(TC') = \begin{cases} 0, & \text{se } q > 0; \\ H_0(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_p) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_p = (C_p)_G, & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

Logo, $E_{p,q}^1(TC) \cong E_{p,q}^1(TC')$ e pela Proposição 2.1.4, $H_*(F \otimes_G C) \cong H_*(\mathbb{Z} \otimes_G C)$, isto é,

$$H_*(G, C) \cong H_*(C_G).$$

Vejamos agora que a seqüência colapsa no E^2 -termo. Do fato que $E_{p,q}^1(TC) \cong E_{p,q}^1(TC')$ segue que $E_{p,q}^2(TC) \cong E_{p,q}^2(TC')$, pois sabemos que $E_{p,q}^2 \cong H_{p+q}(E^1)$ (Teorema 2.1.2). Portanto $E_{p,q}^2(TC) = 0$, se $q > 0$ e $E_{p,0}^2(TC) = H_p(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C)$. Como \mathbb{Z} é um complexo concentrado na dimensão 0, o complexo total TC' é concentrado na coluna $p = 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes_G C_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes_G C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Portanto $H_p(\mathbb{Z} \otimes_G C) = \mathbb{Z} \otimes_G C_p = (C_p)_G = E_{p,0}^1$. Procedendo sucessivamente obtemos que $E_{p,q}^2 \cong E_{p,q}^3 \cong \dots \cong E_{p,q}^\infty$, para todos p e q . Logo a seqüência colapsa no E^2 -termo. ■

Corolário 2.2.2 ([1], p.170, Proposição 5.6) *Seja C um complexo de cadeias não-negativo de $\mathbb{Z}G$ -módulos tais que cada C_n é H_* -acíclico. Então existe uma seqüência espectral $E_{p,q}^r$ tal que*

$E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(C))$, e que converge para $H_{p+q}(C_G)$, o que denotamos por:

$$E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(C)) \implies H_{p+q}(C_G).$$

Demonstração: Utilizando a 1ª filtração do complexo $F \otimes_{\mathbb{Z}G} C$ apresentada na Seção 2.2.1, obtemos que existe uma seqüência espectral cujo E^2 -termo é $E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(C))$. Pelo Corolário 2.2.1, esta seqüência converge para $H_{p+q}(G, C)$. Como os $\mathbb{Z}G$ -módulos C_n são H_* -acíclicos, segue da proposição anterior que $H_*(G, C) \cong H_*(C_G)$. Logo:

$$E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(C)) \implies H_{p+q}(C_G).$$

■

Observação 2.2.4 *É importante destacar que a seqüência espectral a que se refere a proposição anterior é associada à uma filtração do complexo $F \otimes_{\mathbb{Z}G} C$, que é um complexo duplo de 1º quadrante, pois F é uma resolução projetiva e C é um complexo de cadeias não negativo. Portanto, pelo Corolário 2.2.1, a seqüência espectral obtida no Corolário 2.2.2 é de 1º quadrante. Outro fato importante a ser destacado é o fato que as duas seqüências espectrais associadas às filtrações do complexo total possuem o mesmo limite $H_*(G, C)$. Mas apesar de possuírem o mesmo limite, as seqüências espectrais associadas à 1ª e 2ª filtrações apresentadas na Seção 2.2.1 são distintas. Deste modo **não** podemos garantir que a seqüência espectral obtida no Corolário 2.2.2 (associada à 1ª filtração) colapsa no E^2 -termo, como ocorre com a seqüência obtida na Proposição 2.2.5 (associada à 2ª filtração).*

Observação 2.2.5 ([1], p. 170) *Como já observamos (Observação 2.2.3) podemos falar em seqüências espectrais cohomológicas. Nós podemos também definir grupos de cohomologia $H^*(G, C)$, para $C = (C^n)_{n \geq 0}$ um complexo de cocadeias não-negativo; a saber:*

$$H^*(G, C) = H^*(\mathcal{H}om_G(F, C))$$

sendo F uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. Pode-se então deduzir, neste caso, análogos cohomológicos das seqüências espectrais como vistas em 2.2.1 e no Corolário 2.2.2.

As seqüências de Lyndon-Hochschild-Serre e de Cartan-Leray

Neste capítulo introduzimos duas seqüências espectrais especiais. Primeiramente, apresentamos a seqüência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre que é associada a uma extensão de grupos. Posteriormente descrevemos a seqüência espectral de Cartan-Leray associada a uma aplicação de recobrimento regular $p : X \rightarrow \frac{X}{G}$ na qual X é um G -complexo livre.

3.1 A seqüência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre

Sejam G um grupo e H um subgrupo normal de G . Considerando a extensão exata $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow \frac{G}{H} \rightarrow 1$, podemos obter uma seqüência espectral cujo “limite” é a homologia do grupo G com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$ -módulo arbitrário M , $H_*(G, M)$. Nesta seção apresentamos essa seqüência espectral, denominada seqüência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre. Denotaremos o grupo quociente $\frac{G}{H}$ das classes laterais gH , $g \in G$, por Q .

Proposição 3.1.1 *Sejam G um grupo, H um subgrupo normal de G e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Então:*

- (i) *A ação de G sobre M induz uma ação de Q sobre M_H ;*
- (ii) $M_G \cong (M_H)_Q$;
- (iii) $M_H \cong \mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ como $\mathbb{Z}Q$ -módulos (aqui a ação translação à direita de G sobre $\mathbb{Z}Q$ é usada para formar o produto tensorial e a ação translação à esquerda de Q sobre $\mathbb{Z}Q$ é usada para dar ao produto tensorial uma estrutura de $\mathbb{Z}Q$ -módulos).

Demonstração:

- (i) Considere a aplicação:

$$* : Q \times M_H \longrightarrow M_H$$

$$([g], \overline{m}) \longmapsto [g] * \overline{m} = \overline{gm}$$

em que $[g]$ representa a classe do elemento $g \in G$ no grupo quociente Q , ou seja, $[g] = gH$, e \overline{m} é a classe de $m \in M$ em $M_H = \frac{M}{\langle \{hm - m, h \in H, m \in M\} \rangle}$. Em primeiro lugar vejamos que a aplicação $*$ está bem definida. De fato: Suponha que $([g_1], \overline{m_1}) = ([g_2], \overline{m_2})$. Assim:

- $[g_1] = [g_2]$. Deste modo existe $h \in H$ tal que $g_1 = g_2h$ e como $H \triangleleft G$, segue que existe $h' \in H$ tal que $g_1 = h'g_2$.
- $\overline{m_1} = \overline{m_2}$. Assim $m_1 - m_2 \in \langle \{hm - m, m \in M, h \in H\} \rangle$, conjunto que denotaremos por L_H . Agora sejam $h \in H$ e $m \in M$. Dado $g \in G$ temos: $g(hm - m) = h''gm - gm \in L_H$, no qual a última igualdade segue do fato que $H \triangleleft G$. Assim $g.L_H \subset L_H$ para todo $g \in G$. Portanto $g_1m_1 - g_2m_2 = h'g_2m_1 - g_2m_2 = h'g_2m_1 - g_2m_1 + g_2m_1 - g_2m_2 = h'g_2m_1 - g_2m_1 + g_2(m_1 - m_2) \in L_H$. Logo $\overline{g_1m_1} = \overline{g_2m_2}$ e a aplicação está bem definida.

Temos ainda:

- $[1] * \overline{m} = \overline{1m} = \overline{m}$;
- $[g_1] * ([g_2] * \overline{m}) = [g_1] * (\overline{g_2m}) = \overline{g_1(g_2m)} = \overline{(g_1g_2)m} = [g_1g_2] * \overline{m} = ([g_1][g_2]) * \overline{m}$.

Logo, a aplicação definida é uma ação de Q sobre M_H .

(ii) Sabemos que $M_G = \frac{M}{\langle \{gm - m, g \in G, m \in M\} \rangle}$ e $(M_H)_{\frac{G}{H}} = \frac{M_H}{\langle \{[g] * \overline{m} - \overline{m}, \overline{m} \in M_H, [g] \in \frac{G}{H}\} \rangle}$. Denotemos por L_Q o conjunto $\langle \{[g] * \overline{m} - \overline{m}, \overline{m} \in M_H, [g] \in \frac{G}{H}\} \rangle$ e por L_G o conjunto $\langle \{gm - m, g \in G, m \in M\} \rangle$. Considere a aplicação:

$$\varphi : (M_H)_Q \longrightarrow M_G$$

$$\tilde{m} \longmapsto \varphi(\tilde{m}) := \hat{m}$$

na qual \tilde{m} representa a classe de um elemento $m \in M$ em $(M_H)_Q$, mais precisamente $\tilde{m} = (m + L_H) + L_Q = \overline{m} + L_Q$, e \hat{m} representa a classe de m em M_G . Vamos mostrar, primeiramente, que φ está bem definida. Suponha que $\tilde{m}_1 = \tilde{m}_2$. Assim $\overline{m_1} - \overline{m_2} \in L_Q$ e $\overline{m_1} - \overline{m_2} = \sum ([g_\alpha] * \overline{m_\alpha} - \overline{m_\alpha})$. Pela ação de Q em M_H , como definida em (i) temos: $\overline{m_1} - \overline{m_2} = \sum_{\alpha} \overline{g_\alpha m_\alpha} - \overline{m_\alpha}$. Daí $m_1 - m_2 \in L_G$ e, portanto, $\hat{m}_1 = \hat{m}_2$ o que mostra que φ está bem definida. Claramente, φ é um homomorfismo.

Considere agora a aplicação:

$$\psi : M_G \longrightarrow (M_H)_Q$$

$$\hat{m} \longmapsto \psi(\hat{m}) := \tilde{m}$$

Se $\hat{m}_1 = \hat{m}_2$, então $m_1 - m_2 \in L_G$, ou seja, $m_1 - m_2 = \sum_{\beta} (g_\beta m_\beta - m_\beta)$. Sabemos que

$G = \dot{\bigcup} g_i H$, onde os elementos g_i são representantes para as classes laterais à esquerda de H em G . Assim existem $h_\beta \in H$ tais que $g_\beta = g_i h_\beta$ para algum i e como $H \triangleleft G$ existem $h'_\beta \in H$ tais que $g_\beta = h'_\beta g_i$. Daí $m_1 - m_2 = \sum_{\beta} (h'_\beta g_i m_\beta - m_\beta) = \sum_{\beta} (h'_\beta g_i m_\beta - g_i m_\beta + g_i m_\beta - m_\beta)$. Portanto

$$\overline{m_1 - m_2} = \sum_{\beta} \overline{h'_{\beta} g_i m_{\beta} - g_i m_{\beta} + g_i m_{\beta} - m_{\beta}} = \sum_{\beta} \overline{g_i m_{\beta} - m_{\beta}} = \sum_{\beta} ([g_i] * \overline{m_{\beta}} - \overline{m_{\beta}}) \in L_Q$$

(note que como $h'_{\beta} g_i m_{\beta} - g_i m_{\beta} \in L_H$, $\overline{h'_{\beta} g_i m_{\beta} - g_i m_{\beta}} = \overline{0}$). Logo $\tilde{m}_1 = \tilde{m}_2$ e ψ está bem definida. Também ψ é um homomorfismo.

Temos ainda: $\varphi \circ \psi(\widehat{m}) = \varphi(\tilde{m}) = \widehat{m}$ e $\psi \circ \varphi(\tilde{m}) = \psi(\widehat{m}) = \tilde{m}$. Portanto $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = id$. Logo φ é um isomorfismo e $M_G \cong (M_H)_Q$.

(iii) Em primeiro lugar vejamos que $\mathbb{Z}Q$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo à direita. Considere a aplicação

$$“ \cdot ” : \mathbb{Z}Q \times G \longrightarrow \mathbb{Z}Q$$

$$([g'], g) \longmapsto [g'] \cdot g = [g'g]$$

Esta aplicação está bem definida pois se $[g_1] = [g_2]$, então $g_2^{-1}g_1 \in H$. Assim $(g_2g)^{-1}(g_1g) = g^{-1}g_2^{-1}g_1g \in g^{-1}Hg = H$ qualquer que seja $g \in G$, pois $H \triangleleft G$. Portanto $[g_1g] = [g_2g]$ para todo $g \in G$.

Temos ainda:

- $[g] \cdot 1 = [g1] = [g]$;
- $[g] \cdot (g_1g_2) = [g(g_1g_2)] = [(gg_1)g_2] = [gg_1] \cdot g_2 = ([g] \cdot g_1)g_2$.

Logo \cdot é uma ação à direita de G sobre $\mathbb{Z}Q$ e conseqüentemente $\mathbb{Z}Q$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo à direita.

Podemos então definir o produto tensorial $\mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, que será visto como um $\mathbb{Z}Q$ -módulo por considerar a ação

$$\star : Q \times \mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow \mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}G} M$$

$$([g'], [g] \otimes m) \longmapsto [g'] \star ([g] \otimes m) = [g'g] \otimes m$$

Considere agora as aplicações:

$$\eta : \mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow M_H$$

$$[g] \otimes m \longmapsto \eta([g] \otimes m) = \overline{gm}$$

e

$$\eta' : \mathbb{Z}Q \times M \longrightarrow M_H$$

$$([g], m) \longmapsto \eta'([g], m) = \overline{gm}$$

Se $([g_1], m_1) = ([g_2], m_2)$, então $g_2^{-1}g_1 \in H$ e $m_1 = m_2$. Assim $\overline{g_1m_1 - g_2m_2} = \overline{g_2hm_1 - g_2m_2} = \overline{h'g_2m_2 - g_2m_2} \in L_H$ e daí $\overline{g_1m_1} = \overline{g_2m_2}$. Portanto η' é uma aplicação bem definida. Agora, sejam $[g], [g_1] \in \mathbb{Z}Q$, $m, m_1 \in M$ e $a, b \in \mathbb{Z}$. Temos:

- $\eta'([g] + a[g_1], m) = \overline{(g + ag_1)m} = \overline{gm} + \overline{ag_1m} = \eta'([g], m) + a\eta'([g_1], m)$;
- $\eta'([g], m + bm_1) = \overline{g(m + bm_1)} = \overline{gm} + \overline{gbm_1} = \eta'([g], m) + b\eta'([g], m_1)$.

Assim η' é uma aplicação bilinear. Temos portanto o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}Q \times M & \xrightarrow{\eta'} & M_H \\ f \downarrow & \nearrow h & \\ \mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}G} M & & \end{array}$$

no qual f é a aplicação tensor e $h : \mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow M_H$ é o único homomorfismo tal que $h \circ f = \varphi'$ (propriedade do produto tensorial). Assim, como $\eta \circ f = \eta'$ segue que $\eta = h$ e deste modo η é um homomorfismo. Considere agora a aplicação:

$$\begin{aligned} \mu : M_H &\longrightarrow \mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}G} M \\ \bar{m} &\longmapsto \mu(\bar{m}) = [1] \otimes m \end{aligned}$$

Se $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$, então $m_1 - m_2 \in L_H$, isto é, $m_1 - m_2 = \sum_{\alpha} (h_{\alpha} m_{\alpha} - m_{\alpha})$, $h_{\alpha} \in H$. Assim $[1] \otimes (m_1 - m_2) = [1] \otimes (\sum_{\alpha} h_{\alpha} m_{\alpha} - m_{\alpha}) = \sum_{\alpha} (h_{\alpha}([1] \otimes m_{\alpha}) - ([1] \otimes m_{\alpha}))$. Como $h_{\alpha} \in H$, então $h_{\alpha}[1] = [1]$. Deste modo $[1] \otimes (m_1 - m_2) = 0$ e conseqüentemente $[1] \otimes m_1 = [1] \otimes m_2$. Portanto a aplicação μ está bem definida. Claramente μ é um homomorfismo.

Temos também:

- $(\eta \circ \mu)(\bar{m}) = \eta([1] \otimes m) = \overline{1 \cdot m} = \bar{m}$;
- $(\mu \circ \eta)([g] \otimes m) = \mu(\overline{gm}) = [1] \otimes gm = [1] \cdot g \otimes m = [g] \otimes m$.

Logo μ é a inversa de η e portanto temos um isomorfismo entre M_H e $\mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ vistos como $\mathbb{Z}Q$ -módulos. ■

Consideremos agora a extensão de grupos $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$ e sejam F uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$ e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Tomando $M' = F \otimes_{\mathbb{Z}} M$ é fácil ver que M' é um $\mathbb{Z}G$ -módulo com a ação diagonal: $g \cdot (f \otimes m) = gf \otimes gm$. Assim pelo item (ii) da Proposição 3.1.1 $M'_G \cong (M'_H)_Q$, ou seja, $(F \otimes_{\mathbb{Z}} M)_G \cong [(F \otimes_{\mathbb{Z}} M)_H]_Q$. Deste modo o produto tensorial $F \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ pode ser calculado em dois passos: $F \otimes_{\mathbb{Z}G} M \cong (F \otimes_{\mathbb{Z}} M)_G \cong [(F \otimes_{\mathbb{Z}} M)_H]_Q \cong (F \otimes_{\mathbb{Z}H} M)_Q$. Logo, temos:

$$H_*(G, M) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} M) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}H} M)_Q.$$

Lema 3.1.1 *Nas condições anteriores o complexo $\mathcal{C} = (F \otimes_{\mathbb{Z}H} M)$ é um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}Q$ -módulos e o grupo quociente $Q = \frac{G}{H}$ age sobre os grupos de homologia $H_*(H, M)$ de H .*

Demonstração: Pela Proposição 1.1.3 temos $F \otimes_{\mathbb{Z}H} M \cong (F \otimes_{\mathbb{Z}} M)_H$. O complexo $F \otimes_{\mathbb{Z}} M$ é um complexo de $\mathbb{Z}G$ -módulos com a G -ação diagonal: $g \cdot (x \otimes m) = gx \otimes gm$. Portanto, pelo item (i) da Proposição 3.1.1, o grupo quociente Q age sobre $(F \otimes_{\mathbb{Z}} M)_H \cong F \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ por

considerar $[g].(x \otimes_H m) = gx \otimes_H gm$. Esta ação induz a Q -ação

$$* : Q \times H_*(\mathcal{C}) \longrightarrow H_*(\mathcal{C})$$

$$([g], \overline{x \otimes_H m}) \longmapsto [g] * \overline{(x \otimes_H m)} = \overline{gx \otimes_H gm}$$

Logo, $H_*(\mathcal{C}) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}H} M) = H_*(H, M)$ é um $\mathbb{Z}Q$ -módulo. ■

Vamos mostrar agora que os $\mathbb{Z}Q$ -módulos $(F_p \otimes_{\mathbb{Z}} M)_H$ são H_* -acíclicos.

Lema 3.1.2 *Sejam F uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$ e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Os $\mathbb{Z}Q$ -módulos $\mathcal{C}_p = (F_p \otimes_{\mathbb{Z}} M)_H$ são H_* -acíclicos.*

Demonstração: Considere os $\mathbb{Z}G$ -módulos F_p , $p \geq 0$, e seja \tilde{F} uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}Q$. Como F é uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$, cada F_p é projetivo e conseqüentemente é um somando de um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre (Proposição 1.1.1) digamos: $F_p \oplus S_p = \oplus \mathbb{Z}G$. Assim

$$\tilde{F} \otimes_{\mathbb{Z}Q} ((\oplus \mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}H} M) = \tilde{F} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (F_p \otimes_{\mathbb{Z}H} M) \oplus \tilde{F} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (S_p \otimes_{\mathbb{Z}H} M).$$

Daí

$$\oplus H_*(\tilde{F} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M)) = H_*(\tilde{F} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (F_p \otimes_{\mathbb{Z}H} M)) \oplus H_*(\tilde{F} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (S_p \otimes_{\mathbb{Z}H} M)).$$

Sabemos que $H_*(Q, \mathcal{C}_p) = H_*(\tilde{F} \otimes_{\mathbb{Z}Q} \mathcal{C}_p) = H_*(\tilde{F} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (F_p \otimes_{\mathbb{Z}H} M))$. Portanto:

$$\oplus H_*(Q, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M) = H_*(Q, \mathcal{C}_p) \oplus H_*(Q, S_p \otimes_{\mathbb{Z}H} M).$$

Desta maneira, para mostrar que os $\mathbb{Z}Q$ -módulos \mathcal{C}_p são H_* -acíclicos, basta mostrar que $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ é H_* -acíclico. Tomando $M' = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} M$, segue da Proposição 3.1.1 (item (iii)) que $M'_H \cong \mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}G} M'$, isto é, $(\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} M)_H \cong \mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}G} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} M)$. Pela Proposição 1.1.3, $M'_H = (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} M)_H \cong \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$. Assim $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \cong \mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}} M$. Sabemos que $\mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}} M = \text{Ind}_{\{1\}}^Q M$ (ver [1], p. 67). Portanto $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \cong \text{Ind}_{\{1\}}^Q M$ e daí $H_*(Q, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M) \cong H_*(Q, \text{Ind}_{\{1\}}^Q M)$. Assim, pelo Lema de Shapiro (Lema 1.4.1), $H_*(Q, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M) \cong H_*(\{1\}, M) = 0$. Logo $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ é H_* -acíclico e conseqüentemente os $\mathbb{Z}Q$ -módulos \mathcal{C}_p são H_* -acíclicos. ■

Apresentamos a seguir o principal resultado desta seção que garante a existência e descreve uma seqüência espectral associada a uma extensão de grupos ([1], Teorema 6.3, p.171):

Teorema 3.1.1 *(Seqüência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre) Para qualquer extensão de grupos $1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$ e qualquer $\mathbb{Z}G$ -módulo M , existe uma seqüência espectral*

da forma:

$$E_{p,q}^2 = H_p(Q, H_q(H, M)) \implies H_{p+q}(G, M).$$

Demonstração: Seja F uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$ e considere o complexo $\mathcal{C} = F \otimes_{\mathbb{Z}H} M \cong (F \otimes_{\mathbb{Z}} M)_H$. Claramente \mathcal{C} é um complexo de cadeias não negativo e, pela Proposição 3.1.1 e pelo Lema 3.1.2, é um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}Q$ -módulos H_* -acíclicos. Daí, pelo Corolário 2.2.2, existe uma seqüência espectral da forma:

$$E_{p,q}^2 = H_p(Q, H_q(\mathcal{C})) \implies H_{p+q}(\mathcal{C}_Q)$$

isto é,

$$E_{p,q}^2 = H_p(Q, H_q(F \otimes_{\mathbb{Z}H} M)) \implies H_{p+q}((F \otimes_{\mathbb{Z}H} M)_Q).$$

Sabemos pela Proposição 3.1.1 (item (ii)) que $(F \otimes_{\mathbb{Z}H} M)_Q \cong F \otimes_{\mathbb{Z}G} M$. Logo:

$$E_{p,q}^2 = H_p(Q, H_q(H, M)) \implies H_{p+q}(G, M),$$

ou seja, a seqüência espectral é convergente e seu limite é a homologia de grupo $H_{p+q}(G, M)$. (Note que, pelo Lema 3.1.1, $H_*(H, M)$ é um $\mathbb{Z}Q$ -módulo). ■

Corolário 3.1.1 *Sob as hipóteses do Teorema 3.1.1 existe uma seqüência exata:*

$$H_2(G, M) \longrightarrow H_2(Q, M_H) \longrightarrow H_1(H, M)_Q \longrightarrow H_1(G, M) \longrightarrow H_1(Q, M_H) \longrightarrow 0.$$

Demonstração: Seja F uma resolução projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$ e considere o complexo de $\mathbb{Z}G$ -módulos $TC = F \otimes_{\mathbb{Z}G} M$. Vendo M como um complexo concentrado na dimensão 0 podemos dizer que TC é um complexo total (obtido do complexo duplo $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{p,q} = F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} M_q$) concentrado na linha $q = 0$. Assim podemos filtrar TC como visto na Subseção 2.2.1: $F_p(TC)_n = \bigoplus_{i \leq p} F_i \otimes_{\mathbb{Z}G} M_{n-i}$. Deste modo $F_{-1}(TC)_n = 0$ e $F_n(TC)_n = \bigoplus_{i \leq n} F_i \otimes_{\mathbb{Z}G} M_{n-i} = F_n \otimes_{\mathbb{Z}G} M = (TC)_n$. Portanto a filtração do complexo TC é canonicamente limitada e, pela Proposição 2.1.6, a seqüência espectral é de 1º quadrante e a filtração induzida no n -ésimo grupo de homologia de TC , $H_n(TC)$ é da forma

$$0 = F_{-1}H_n(TC) \subset F_0H_n(TC) \subset \dots \subset F_nH_n(TC) = H_n(TC)$$

com coeficientes sucessivos $\frac{F_pH_n(TC)}{F_{p-1}H_n(TC)} \cong E_{p,n-p}^\infty$. Obtemos então:

- $E_{0,1}^\infty \cong \frac{F_0H_1(TC)}{F_{-1}H_1(TC)} = F_0H_1(TC) = F_0H_1(G, M);$
- $E_{1,0}^\infty \cong \frac{F_1H_1(G, M)}{F_0H_1(G, M)} = \frac{H_1(G, M)}{E_{0,1}^\infty}.$

Daí temos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow E_{0,1}^\infty \hookrightarrow H_1(G, M) \twoheadrightarrow E_{1,0}^\infty \longrightarrow 0$$

Como a seqüência espectral é de primeiro quadrante, segue da Proposição 2.1.5 que $E_{1,0}^\infty = E_{1,0}^2$, pois $2 > \max\{1, 1\}$. Podemos então reescrever a seqüência acima:

$$0 \longrightarrow E_{0,1}^\infty \hookrightarrow H_1(G, M) \twoheadrightarrow E_{1,0}^2 \longrightarrow 0 \quad (I)$$

Considere agora as diferenciais

$$E_{2,0}^2 \xrightarrow{d_{2,0}^2} E_{0,1}^2 \xrightarrow{d_{0,1}^2} E_{-2,2}^2$$

Como a seqüência é de primeiro quadrante $E_{-2,2}^2 = 0$ e daí $\ker d_{0,1}^2 = E_{0,1}^2$. Assim $E_{0,1}^3 = H_1(E^2) = \frac{E_{0,1}^2}{\text{Im}d_{2,0}^2}$. Utilizando novamente a Proposição 2.1.5 obtemos que $E_{0,1}^\infty = E_{0,1}^3$, pois $3 > \max\{0, 2\}$. Deste modo:

- $E_{0,1}^\infty = \frac{E_{0,1}^2}{\text{Im}d_{2,0}^2}$.

Considerando as diferenciais

$$E_{4,-1}^2 \xrightarrow{d_{4,-1}^2} E_{2,0}^2 \xrightarrow{d_{2,0}^2} E_{0,1}^2$$

obtemos que $E_{2,0}^3 = \frac{\ker d_{2,0}^2}{\text{Im}d_{4,-1}^2} = \ker d_{2,0}^2$, pois $E_{4,-1}^2 = 0$ uma vez que a seqüência é de primeiro quadrante. Ainda pela Proposição 2.1.5, $E_{2,0}^\infty = E_{2,0}^3$, pois $3 > \max\{2, 1\}$. Deste modo:

- $E_{2,0}^\infty = \ker d_{2,0}^2 \subset E_{2,0}^2$.

Destes resultados obtemos a seguinte seqüência exata

$$0 \longrightarrow E_{2,0}^\infty \hookrightarrow E_{2,0}^2 \xrightarrow{d_{2,0}^2} E_{0,1}^2 \twoheadrightarrow E_{0,1}^\infty \longrightarrow 0 \quad (II)$$

Portanto, de (I) e (II), temos a seqüência exata:

$$0 \longrightarrow E_{2,0}^\infty \hookrightarrow E_{2,0}^2 \xrightarrow{d_{2,0}^2} E_{0,1}^2 \twoheadrightarrow E_{0,1}^\infty \hookrightarrow H_1(G, M) \twoheadrightarrow E_{1,0}^2 \longrightarrow 0$$

Sabemos ainda que:

- $E_{2,0}^\infty = \frac{F_2 H_2(G, M)}{F_1 H_2(G, M)} = \frac{H_2(G, M)}{F_1 H_2(G, M)}$.

Deste modo obtemos:

$$H_2(G, M) \twoheadrightarrow E_{2,0}^\infty \hookrightarrow E_{2,0}^2 \xrightarrow{d_{2,0}^2} E_{0,1}^2 \twoheadrightarrow E_{0,1}^\infty \hookrightarrow H_1(G, M) \twoheadrightarrow E_{1,0}^2 \longrightarrow 0$$

que, fazendo a composição das aplicações, podemos reescrever como

$$H_2(G, M) \longrightarrow E_{2,0}^2 \xrightarrow{d_{2,0}^2} E_{0,1}^2 \longrightarrow H_1(G, M) \twoheadrightarrow E_{1,0}^2 \longrightarrow 0$$

Pelo Teorema 3.1.1 temos:

- $E_{2,0}^2 = H_2(Q, H_0(H, M)) = H_2(Q, M_H)$;
- $E_{0,1}^2 = H_0(Q, H_1(H, M)) = (H_1(H, M))_Q$;
- $E_{1,0}^2 = H_1(Q, H_0(H, M)) = H_1(Q, M_H)$.

Logo temos a seqüência exata:

$$H_2(G, M) \longrightarrow H_2(Q, M_H) \longrightarrow (H_1(H, M))_Q \longrightarrow H_1(G, M) \longrightarrow H_1(Q, M_H) \longrightarrow 0$$

■

Observação 3.1.1 *Existe uma seqüência espectral em cohomologia análoga à seqüência de Lyndon-Hochschild-Serre. Essa seqüência é conhecida como seqüência espectral de Lyndon e é apresentada, por exemplo, em [11], p. 351.*

3.2 A seqüência espectral de Cartan-Leray

Seja G um grupo. Dado um G -complexo livre X (cuja definição recordamos abaixo) podemos mostrar que X é um recobrimento regular do espaço quociente $\frac{X}{G}$ ([12], Proposição 8.2, p.165). Nesta seção introduziremos uma seqüência espectral associada à projeção de recobrimento regular $p : X \longrightarrow \frac{X}{G}$, conhecida como *seqüência espectral de Cartan-Leray*. Iniciamos com a definição e algumas propriedades de G -complexos livres.

Definição 3.2.1 ([1], p.14) *Seja G um grupo. Um G -complexo é um CW-complexo X junto com uma G -ação que permuta células. Assim, se T denota o conjunto das n -células de X , tem-se $g.T = T$, para todo $g \in G$. Se a ação de G permuta livremente as células de X (isto é, dado σ uma n -célula de X , $g.\sigma = \sigma$ se, e somente se, $g = 1$), dizemos que X é um G -complexo livre.*

Exemplo 3.2.1 *Sejam $G = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$, o grupo cíclico gerado por a , e $X = \mathbb{R}$. Como vimos (Exemplo 1.3.1), podemos dar a \mathbb{R} uma estrutura de CW-complexo no qual as 0-células e as 1-células são dadas, respectivamente, por $e_n^0 = \{n\}$ e $e_n^1 = (n, n+1)$, com $n \in \mathbb{Z}$. Considere a aplicação:*

$$* : G \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a^n, x) \longmapsto a^n * x := n + x$$

*Temos: $1 * x = a^0 * x = 0 + x = x$ e $a^n * (a^m * x) = n + (m + x) = (n + m) + x = a^{n+m} * x = (a^n \cdot a^m) * x$. Portanto $*$ é uma G -ação sobre X . Claramente tal ação permuta células de X e, como $a^n * x = n + x = x \iff n = 0 \iff a^n = 1$, segue que a G -ação é livre. Logo, X é um G -complexo livre.*

Lema 3.2.1 ([1], I.3, Proposição 3.1, p.13) *Sejam X um G -conjunto livre e E um conjunto de representantes para as G -órbitas em X . Então $\mathbb{Z}X$, o \mathbb{Z} -módulo livre gerado por X , é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base E .*

Demonstração: Claramente $\mathbb{Z}X$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo com a ação induzida de G sobre X . Seja $E = \{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ um conjunto de representantes para as G -órbitas em X . Então $X = \dot{\bigcup}_{x_\lambda \in E} G(x_\lambda)$ e assim $\mathbb{Z}X = \mathbb{Z}\left(\dot{\bigcup}_{x_\lambda \in E} G(x_\lambda)\right) = \bigoplus_{x_\lambda \in E} \mathbb{Z}(G(x_\lambda))$ sendo que a última igualdade segue de [1], p.13. Agora, como a G -ação é livre, para cada x_λ , a aplicação:

$$f_\lambda : G \longrightarrow G(x_\lambda)$$

$$g \longmapsto f_\lambda(g) = g.x_\lambda$$

é uma bijeção. Daí, $\mathbb{Z}(G(x_\lambda)) \cong \mathbb{Z}G$. Logo, $\mathbb{Z}X = \bigoplus_{x_\lambda \in E} (\mathbb{Z}G)_{x_\lambda}$. ■

Proposição 3.2.1 *Se X é um G -complexo livre, então $C_n(X)$, o complexo de cadeias celular de X (Definição 1.3.5), é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre, para cada $n \geq 0$.*

Demonstração: Sejam X um G -complexo livre e $X_n = \{\sigma \mid \sigma \text{ é célula de dimensão } n \text{ de } X\}$. Como X é um CW -complexo, pela Proposição 1.3.1, $C_n(X)$ é um grupo abeliano livre, ou seja, um \mathbb{Z} -módulo livre, cuja base está em correspondência biunívoca com os elementos de X_n . Assim podemos identificar $C_n(X)$ com $\mathbb{Z}X_n$, para cada $n \geq 0$. Por hipótese, G permuta livremente as células de X e conseqüentemente X_n é um G -conjunto livre. Portanto, pelo Lema 3.2.1, $\mathbb{Z}X_n$ (ou seja, $C_n(X)$) é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base num conjunto de representantes para as G -órbitas em X_n . ■

Corolário 3.2.1 *Os módulos $C_n(X)$ são $\mathbb{Z}G$ -módulos H_* -acíclicos, para todo $n \geq 0$.*

Demonstração: Segue da proposição anterior e do Lema 2.2.1. ■

Lema 3.2.2 ([1], Proposição 2.4, p.34) *Seja X um G -complexo livre e Y o complexo de órbitas $\frac{X}{G}$. Então $C_*(Y) \cong C_*(X)_G$.*

Demonstração: Considere a projeção de recobrimento

$$p : X \longrightarrow \frac{X}{G},$$

$$x \longmapsto G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Temos induzido um homomorfismo bem definido:

$$p_{\#} : C_n(X) \longrightarrow C_n\left(\frac{X}{G}\right)$$

$$\sum n_j \sigma_j \longmapsto \sum n_j G(\sigma_j)$$

no qual σ_j são n -células de X . Agora, se $g \in G$ e σ é uma n -célula, então $p_{\#}(g \cdot \sigma - \sigma) = p_{\#}(g \cdot \sigma) - p_{\#}(\sigma) = G(g \cdot \sigma) - G(\sigma) = G(\sigma) - G(\sigma) = 0$ e daí $I := \langle g \cdot \alpha - \alpha \mid g \in G, \alpha \in C_n(X) \rangle \subset \ker p_{\#}$. Assim a aplicação:

$$\phi : C_n(X)_G = \frac{C_n(X)}{I} \longrightarrow C_n\left(\frac{X}{G}\right)$$

$$\bar{\alpha} = \overline{\sum n_j \sigma_j} \longmapsto \phi(\bar{\alpha}) = p_{\#}(\alpha) = \sum n_j G(\sigma_j)$$

está bem definida. Vimos que $C_n(X)$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base $\{\sigma_j\}_{j \in J}$ em que σ_j representa um elemento de cada G -órbita de n -células de X . Conseqüentemente $C_n(X)_G$ é um \mathbb{Z} -módulo livre com base $\{\bar{\sigma}_j\}_{j \in J}$. Por outro lado, $C_n\left(\frac{X}{G}\right)$ é um \mathbb{Z} -módulo livre gerado pelas n -células em $\frac{X}{G}$, ou seja, gerado por $\{G(\sigma) \mid \sigma \text{ é } n\text{-célula de } X\}$. Como $\sigma_j, j \in J$, representa um elemento para cada G -órbita de n -células de X , segue que $C_n\left(\frac{X}{G}\right)$ é um \mathbb{Z} -módulo livre com base $\{G(\sigma_j)\}_{j \in J}$. Agora, como $\phi(\bar{\sigma}_j) = G(\sigma_j)$, ϕ aplica um elemento básico de $C_n(X)_G$ em um elemento básico de $C_n\left(\frac{X}{G}\right)$. Logo ϕ é um isomorfismo. ■

Apresentamos agora uma seqüência espectral associada à aplicação de recobrimento regular $p : X \longrightarrow \frac{X}{G}$ de um G -complexo livre X , denominada *seqüência espectral de Cartan-Leray* ([1], p. 173, Teorema 7.9). Notemos que como X é um G -complexo livre, podemos dar à $H_*(X)$ uma G -ação induzida da ação de G sobre X , de modo que $H_*(X)$ torna-se um $\mathbb{Z}G$ -módulo ([1], p.172).

Teorema 3.2.1 (*Seqüência espectral de Cartan-Leray*) *Se X é um G -complexo livre, então existe uma seqüência espectral da forma:*

$$E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(X)) \implies H_{p+q}\left(\frac{X}{G}\right).$$

Demonstração: Seja $C = C_*(X)$ o complexo de cadeias celular de X . Pelo Corolário 3.2.1, $C_n(X)$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo H_* -acíclico, qualquer que seja n . Assim, pelo Corolário 2.2.2, existe uma seqüência espectral da forma:

$$E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(X)) \implies H_{p+q}(C(X)_G).$$

Vimos (Lema 3.2.2) que

$$(C_*(X))_G \cong C_* \left(\frac{X}{G} \right).$$

Logo:

$$H_p(G, H_q(X)) \implies H_{p+q} \left(\frac{X}{G} \right).$$

■

Observação 3.2.1 ([1], p.173) *O Teorema 3.2.1 permanece verdadeiro se introduzirmos um $\mathbb{Z}G$ -módulo arbitrário M como módulo de coeficientes. Neste caso existe uma seqüência espectral da forma*

$$E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(X, M)) \implies H_{p+q} \left(\frac{X}{G}, M \right)$$

e se G não atua trivialmente sobre M , $H_ \left(\frac{X}{G}, M \right)$ deve ser interpretado como um grupo de homologia com coeficientes locais.*

Observação 3.2.2 *Sejam Y um CW-complexo, (\tilde{Y}, p) um recobrimento regular de Y e G o grupo das transformações de recobrimento. Então existe uma seqüência espectral da forma*

$$E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(\tilde{Y})) \implies H_{p+q}(Y).$$

Isto segue do teorema anterior visto que \tilde{Y} é um G -complexo livre ([1], p.15) e $\frac{\tilde{Y}}{G}$ é homeomorfo à Y ([13], p.165). Em [9] a seqüência espectral de Cartan-Leray é apresentada dessa forma com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial M .

Observação 3.2.3 (Homologia Equivariante) *Sejam G um grupo e X um G -complexo livre. Considere o complexo de cadeias celular de X , $C(X)$ (Definição 1.3.5) e os grupos de homologia de G com coeficientes em $C(X)$, que denotamos por $H_*^G(X)$, isto é,*

$$H_*^G(X) := H_*(G, C(X)).$$

Os grupos de homologia $H_^G(X)$ são chamados grupos de homologia equivariante de (G, X) . Mais geralmente, se M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo, então existe uma G ação diagonal sobre $C(X, M) = C(X) \otimes_{\mathbb{Z}} M$ e podemos definir:*

$$H_*^G(X, M) := H_*(G, C(X, M)).$$

Agora, se $\{x_0\}$ é um espaço constituído de um único ponto, então $C(\{x_0\}) \cong \mathbb{Z}$. Portanto $H_^G(\{x_0\}, M) = H_*(G, \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M) = H_*(G, M)$ e assim a homologia de G com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$ -módulo M é uma homologia equivariante. Como qualquer G -complexo X admite uma (única) G -aplicação para um ponto $\{x_0\}$ deduzimos que existe uma aplicação canônica*

$$H_*^G(X, M) \longrightarrow H_*(G, M).$$

Considerando o complexo $C(X, M)$ e a 1ª seqüência espectral como vista na Seção 2.2.1, temos que existe uma seqüência espectral com $E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(X, M))$ e que converge para $H_{p+q}(G, C(X, M)) = H_{p+q}^G(X, M)$.

Aplicações

Neste capítulo apresentamos aplicações das seqüências espectrais de Lyndon-Hochschild-Serre e de Cartan-Leray.

4.1 Aplicações da seqüência de Lyndon-Hochschild-Serre

4.1.1 Cálculo da ordem de $H_2(G, \mathbb{Z})$, G um grupo de ordem p^n , p primo

Seja G um grupo de ordem p^n onde p é primo. Nesta subseção vamos calcular a ordem do grupo de homologia $H_2(G, \mathbb{Z})$ (ou simplesmente $H_2(G)$).

Proposição 4.1.1 *Seja G um grupo de ordem p^n , com p primo. A ordem de $H_2(G, \mathbb{Z})$ é uma potência de p , digamos p^k , e $k \leq \frac{1}{2}n(n-1)$.*

Demonstração: Seja F a Resolução Padrão de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$ (Observação 1.4.1). Como $|G| = p^n$, G é finito. Assim, $F_2 = \langle \{(g_0, g_1, g_2), g_i \in G\} \rangle$ é finitamente gerado e, conseqüentemente, $C_2(G) = (F_2)_G$ também é finitamente gerado. Portanto $H_2(G, \mathbb{Z})$ é um grupo abeliano finitamente gerado. Pela Proposição 1.4.3, $|G|.H_2(G, \mathbb{Z}) = 0$, isto é, $p^n.H_2(G, \mathbb{Z}) = 0$. Logo, pelo teorema de estrutura de grupos abelianos finitamente gerados ([4], Teorema IX.1.1, p.309), a ordem de $H_2(G, \mathbb{Z})$ é uma potência de p .

Suponhamos que $|H_2(G, \mathbb{Z})| = p^k$. Vamos mostrar que $k \leq \frac{1}{2}n(n-1)$. Como $|G| = p^n$, pelo Teorema 1.5.1, $Z(G)$ possui ordem igual a p^m . Assim pelo 1º Teorema de Sylow (Teorema 1.5.2), $Z(G)$ contém um subgrupo de ordem p , ou seja, \mathbb{Z}_p é um subgrupo de $Z(G)$ (a menos de isomorfismo). Sabemos que $Z(G)$ é um subgrupo normal de G . Portanto \mathbb{Z}_p é um subgrupo normal de G . Temos então a extensão de grupos

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow G \longrightarrow \frac{G}{\mathbb{Z}_p} \longrightarrow 1.$$

Vamos denotar o grupo quociente $\frac{G}{\mathbb{Z}_p}$ por Q . Pelo Teorema 3.1.1, existe uma seqüência espectral da forma

$$E_{p,q}^2 = H_p(Q, H_q(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})) \implies H_{p+q}(G, \mathbb{Z}).$$

A seqüência de Lyndon-Hochschild-Serre foi obtida de uma filtração canonicamente limitada e, dessa maneira, a filtração induzida em $H_2(G, \mathbb{Z})$ é da forma

$$H_2(G, \mathbb{Z}) = F_2 H_2(G, \mathbb{Z}) \supseteq F_1 H_2(G, \mathbb{Z}) \supseteq F_0 H_2(G, \mathbb{Z}) \supseteq 0.$$

Sabemos ainda que $E_{2,0}^\infty \cong \frac{H_2(G, \mathbb{Z})}{F_1 H_2(G, \mathbb{Z})}$; $E_{1,1}^\infty \cong \frac{F_1 H_2(G, \mathbb{Z})}{F_0 H_2(G, \mathbb{Z})}$ e $E_{0,2}^\infty \cong F_0 H_2(G, \mathbb{Z})$. Portanto:

$$|H_2(G, \mathbb{Z})| = |E_{2,0}^\infty| \cdot |E_{1,1}^\infty| \cdot |E_{0,2}^\infty| \quad (i)$$

Como a seqüência de Lyndon-Hochschild-Serre é de primeiro quadrante, pela Proposição 2.1.5, $E_{2,0}^\infty = E_{2,0}^3$. Considere as diferenciais $E_{4,-1}^2 \xrightarrow{d_{4,-1}^2} E_{2,0}^2 \xrightarrow{d_{2,0}^2} E_{0,1}^2$. Como $E_{4,-1}^2 = 0$ temos $\text{Im} d_{4,-1}^2 = 0$. Portanto $E_{2,0}^3 = H_2(E^2) = \ker d_{2,0}^2$ que é um subgrupo de $E_{2,0}^2$. Deste modo $|E_{2,0}^\infty| \leq |E_{2,0}^2|$. Aplicando novamente o Teorema de Lyndon-Hochschild-Serre obtemos que $E_{2,0}^2 = H_2(Q, H_0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})) = H_2(Q, \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_p}) = H_2(Q, \mathbb{Z})$. Portanto

$$|E_{2,0}^\infty| \leq |H_2(Q, \mathbb{Z})| \quad (ii)$$

Também pela Proposição 2.1.5 $E_{1,1}^\infty = E_{1,1}^3$. Considerando a diferencial $d_{1,1}^2 : E_{1,1}^2 \longrightarrow E_{-1,2}^2$ e o fato que $E_{-1,2}^2 = 0$ obtemos que $E_{1,1}^3 = H_2(E^2) = \frac{E_{1,1}^2}{\text{Im} d_{3,0}^2}$. Daí $|E_{1,1}^\infty| \leq |E_{1,1}^2|$. Novamente pelo Teorema de Lyndon-Hochschild-Serre temos $E_{1,1}^2 = H_1(Q, H_1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}))$. Pela Proposição 1.4.1, $H_1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$, pois \mathbb{Z}_p é um grupo abeliano. Assim $E_{1,1}^2 = H_1(Q, \mathbb{Z}_p) \cong (H_1(Q, \mathbb{Z}) \otimes H_1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})) \oplus \text{Tor}(H_0(Q, \mathbb{Z}), H_1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}))$ (Teorema 1.4.1). Também pela Proposição 1.4.1 obtemos $H_0(Q, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e $H_1(Q, \mathbb{Z}) = Q_{ab}$. Daí $\text{Tor}(H_0(Q, \mathbb{Z}), H_1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})) = \text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$. Como \mathbb{Z} é um \mathbb{Z} -módulo projetivo segue da Proposição 1.1.4 que $\text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) = 0$. Assim $E_{1,1}^2 = Q_{ab} \otimes \mathbb{Z}_p$. Afirmamos que a ordem de $E_{1,1}^2$ é no máximo $|Q_{ab}|$. De fato: Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : Q_{ab} \otimes \mathbb{Z}_p &\longrightarrow \frac{Q_{ab}}{p \cdot Q_{ab}} \\ x \otimes \bar{n} &\longmapsto nx + p \cdot Q_{ab} \end{aligned}$$

Esta aplicação é injetora, pois: se $\varphi(x \otimes \bar{n}) = \widehat{0}$, então $nx \in p \cdot Q_{ab}$, ou seja, $nx = pa$, $a \in Q_{ab}$, e segue que $x \otimes \bar{n} = nx \otimes \bar{1} = pa \otimes \bar{1} = a \otimes \bar{p} = 0$. Disto segue que $|E_{1,1}^2| = |Q_{ab} \otimes \mathbb{Z}_p|$ é no máximo $|Q_{ab}| \leq |Q|$, isto é, $|E_{1,1}^2| \leq |Q| = p^{n-1}$. Portanto

$$|E_{1,1}^\infty| \leq |E_{1,1}^2| \leq |Q| = p^{n-1} \quad (iii)$$

Analogamente, da Proposição 2.1.5 temos $E_{0,2}^\infty = E_{0,2}^4$. Como $E_{-2,3}^2 = 0$ o kernel da diferencial $d_{0,2}^2 : E_{0,2}^2 \rightarrow E_{-2,3}^2$ é $E_{0,2}^2$. Assim $E_{0,2}^3 = \frac{E_{0,2}^2}{\text{Im}d_{2,1}^2}$. Pelo Teorema 3.1.1 temos $E_{0,2}^2 = H_0(Q, H_2(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}))$. Como $H_2(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) = 0$ obtemos $E_{0,2}^2 = H_0(Q, 0) = 0$. Desse modo $E_{0,2}^3 = 0$ e daí $E_{0,2}^4 = 0$. Portanto

$$|E_{0,2}^\infty| = 1 \quad (iv)$$

Assim pelas igualdades obtidas em (i), (ii), (iii) e (iv) temos

$$|H_2(G, \mathbb{Z})| \leq |H_2(Q, \mathbb{Z})| \cdot p^{n-1}$$

Finalmente, concluiremos a prova usando indução sobre n . Se $n = 1$ então $|G| = p$, ou seja, $G = \mathbb{Z}_p$. Daí $H_2(G, \mathbb{Z}) = 0$ e $|H_2(G, \mathbb{Z})| = 1 = p^0$. Portanto $k = 0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1-1) = 0$ e o resultado é válido. Suponha que para todo grupo G' tal que $|G'| = p^{n-1}$ temos $|H_2(G', \mathbb{Z})| = p^{k'}$ com $k' \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Assim, como $|Q| = p^{n-1}$, temos $|H_2(Q, \mathbb{Z})| = p^{k'}$ com $k' \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Logo

$$|H_2(G, \mathbb{Z})| \leq |H_2(Q, \mathbb{Z})| \cdot p^{n-1} = p^k$$

$$\text{onde } k = k' + (n-1) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

■

Observação 4.1.1 *O resultado obtido na proposição anterior é o melhor possível, pois se $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p$ (n cópias), então $|H_2(G, \mathbb{Z})| = p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$. De fato: Utilizando o Teorema 1.4.2, façamos a prova por indução sobre n . Se $n = 1$, então $H_2(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) = \{0\}$ (Exemplo 1.4.1) e daí $|H_2(G, \mathbb{Z})| = 1 = p^{\frac{1}{2}1(1-1)}$. Suponha que se G' é a soma direta de $(n-1)$ cópias de \mathbb{Z}_p , então $|H_2(G', \mathbb{Z})| = p^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$. Para o grupo $G = G' \oplus \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p$, obtemos:*

$$H_2(G, \mathbb{Z}) = [(H_0(G', \mathbb{Z}) \otimes H_2(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})) \oplus (H_1(G', \mathbb{Z}) \otimes H_1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})) \oplus (H_2(G', \mathbb{Z}) \otimes H_0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}))] + [Tor(H_0(G', \mathbb{Z}), H_1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})) \oplus Tor(H_1(G', \mathbb{Z}), H_0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}))].$$

Daí, segue do Exemplo 1.4.1 e das Proposições 1.1.4, 1.1.5 e 1.4.1 que:

$$H_2(G, \mathbb{Z}) = G'_{ab} \otimes \mathbb{Z}_p \oplus H_2(G', \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}$$

e como $G' = G'_{ab}$ pois G' é abeliano, $G' = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p$ ($(n-1)$ -cópias), e $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$, obtemos

$$H_2(G, \mathbb{Z}) \cong G' \oplus H_2(G', \mathbb{Z}).$$

Logo:

$$|H_2(G, \mathbb{Z})| = |H_2(G', \mathbb{Z})| \cdot |G'| = p^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \cdot p^{n-1} = p^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

4.1.2 Homologia de um subgrupo de Hall

Um subgrupo N de um grupo finito G é denominado um subgrupo de Hall se $m.d.c.(|N|, (G : N)) = 1$, ou seja, o máximo divisor comum entre a ordem do subgrupo N

e o índice de G em N é 1. Nesta subseção relacionamos a homologia de um subgrupo de Hall normal N com a homologia do grupo G e do grupo quociente $\frac{G}{N}$ utilizando a seqüência de Lyndon-Hochschild-Serre.

Proposição 4.1.2 *Sejam G um grupo finito e N um subgrupo de Hall normal de G . Se A é um $\mathbb{Z}G$ -módulo, então para todo $n > 0$*

$$H_n(G, A) \cong H_n\left(\frac{G}{N}, A_N\right) \oplus H_n(N, A)_{\frac{G}{N}}.$$

Demonstração: Sejam $k = |N|$ e $m = (G : N)$. Como N é um subgrupo de Hall de G , $m.d.c.(m, k) = 1$. Assim existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $am + bk = 1$ ([5], p. 22). Como N é também um subgrupo normal de G temos a extensão exata $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow \frac{G}{N} \rightarrow 1$. Pelo Teorema 3.1.1 (Lyndon-Hochschild-Serre) existe uma seqüência espectral cujo E^2 -termo é $E_{p,q}^2 = H_p\left(\frac{G}{N}, H_q(N, A)\right)$. Iremos mostrar que $E_{p,q}^2 = 0$ se p e q são maiores que zero. Seja $\tau \in E_{p,q}^2 = H_p\left(\frac{G}{N}, H_q(N, A)\right)$. Sabemos pela Proposição 1.4.3 que se $p > 0$, $\left|\frac{G}{N}\right| \cdot H_p\left(\frac{G}{N}, H_q(N, A)\right) = 0$ ($H_q(N, A)$ é um $\mathbb{Z}\left[\frac{G}{N}\right]$ -módulo pelo Lema 3.1.1). Daí $m \cdot \tau = 0$.

Por outro lado $\tau = [f]$, onde f é um elemento de um $\mathbb{Z}\left[\frac{G}{N}\right]$ -módulo do complexo de cadeias

$\tilde{F} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G}{N}\right]} H_q(N, A)$, com \tilde{F} a resolução (bar) projetiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}\left[\frac{G}{N}\right]$ (Observação 1.4.1).

Desse modo $f = \sum [q_1|q_2|\dots|q_p] \otimes x$, $x \in H_q(N, A)$. Novamente pela Proposição 1.4.3, para $q > 0$, $|N| \cdot H_q(N, A) = 0$. Assim $k \cdot f = k \cdot (\sum [q_1|q_2|\dots|q_p] \otimes x) = 0$, pois $x \in H_q(N, A)$. Portanto $k \cdot \tau = k \cdot [f] = [k \cdot f] = 0$. Temos então: para $p > 0$ e $q > 0$ $m \cdot \tau = k \cdot \tau = 0$. Conseqüentemente, $\tau = 1 \cdot \tau = (am + bk) \cdot \tau = a \cdot m\tau + b \cdot k\tau = 0$. Logo, para $p > 0$ e $q > 0$, $E_{p,q}^2 = 0$. E mais: como $E_{p,q}^{r+1} = H_{p+q}(E^r)$, se $p > 0$ e $q > 0$, $E_{p,q}^r = 0$ para $r \geq 2$.

Agora seja $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos mostrar que $E_{n,0}^2 \cong E_{n,0}^\infty$ e $E_{0,n}^2 \cong E_{0,n}^\infty$.

Primeiramente, considere as diferenciais $d_{n,0}^2 : E_{n,0}^2 \rightarrow E_{n-2,1}^2$ e $d_{n+2,-1}^2 : E_{n+2,-1}^2 \rightarrow E_{n,0}^2$. Como a seqüência espectral é de 1º quadrante, $E_{n+2,-1}^2 = 0$ e assim $\text{Im}d_{n+2,-1}^2 = 0$ para todo n . Pelo que concluímos anteriormente, se $n \neq 2$ temos $E_{n-2,1}^2 = 0$ e conseqüentemente $\ker d_{n,0}^2 = E_{n,0}^2$. Portanto, para $n \neq 2$, $E_{n,0}^3 = H_n(E^2) = E_{n,0}^2$ donde segue que $E_{n,0}^\infty \cong E_{n,0}^2$. Suponha $n = 2$ e considere a diferencial $d_{2,0}^2 : E_{2,0}^2 \rightarrow E_{0,1}^2$. Seja $\sigma \in E_{2,0}^2$; $d_{2,0}^2(\sigma) \in E_{0,1}^2$. Desse modo, pelo mesmo raciocínio aplicado no primeiro parágrafo desta demonstração, $k \cdot d_{2,0}^2(\sigma) = 0$, pois $q = 1 > 0$. Analogamente, como $\sigma \in E_{2,0}^2$ e $p = 2 > 0$, $m \cdot \sigma = 0$. Portanto $d_{2,0}^2(\sigma) = d_{2,0}^2(1 \cdot \sigma) = d_{2,0}^2((am + bk)\sigma) = a \cdot d_{2,0}^2(m \cdot \sigma) + b \cdot d_{2,0}^2(k \cdot \sigma) = 0 + 0 = 0$. Assim $\ker d_{2,0}^2 = E_{2,0}^2$ e $E_{2,0}^2 \cong E_{2,0}^\infty$. Logo $E_{n,0}^2 \cong E_{n,0}^\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Por outro lado considere as diferenciais $d_{0,n}^2 : E_{0,n}^2 \rightarrow E_{-2,n+1}^2$ e $d_{2,n-1}^2 : E_{2,n-1}^2 \rightarrow E_{0,n}^2$. Sabemos que a seqüência espectral é de 1º quadrante e que se $p > 0$ e $q > 0$ $E_{p,q}^2 = 0$. Daí $\ker d_{0,n}^2 = E_{0,n}^2$ qualquer que seja n e $\text{Im}d_{2,n-1}^2 = 0$ para $n \neq 1$. Portanto para $n \neq 1$ temos $E_{0,n}^2 \cong E_{0,n}^\infty$. Se $n = 1$ temos a diferencial $d_{2,0}^2 : E_{2,0}^2 \rightarrow E_{0,1}^2$ que vimos ser nula. Assim

$\text{Im}d_{2,0}^2 = 0$. Desse modo $E_{0,1}^2 \cong E_{0,1}^\infty$. Logo $E_{0,n}^2 \cong E_{0,n}^\infty$ para todo n .

Portanto temos:

$$E_{0,n}^\infty = H_0 \left(\frac{G}{N}, H_n(N, A) \right) = H_n(N, A)_{\frac{G}{N}}$$

e

$$E_{n,0}^\infty = H_n \left(\frac{G}{N}, H_0(N, A) \right) = H_n \left(\frac{G}{N}, A_N \right).$$

A filtração à qual está associada a seqüência de Lyndon-Hochschild-Serre é canonicamente limitada e dessa maneira, pela Proposição 2.1.6, a filtração induzida em $H_n(G, A)$ é da forma:

$$H_n(G, A) \cong F_n H_n(G, A) \supseteq F_{n-1} H_n(G, A) \supseteq \dots \supseteq F_0 H_n(G, A) \supseteq F_{-1} H_n(G, A) = 0.$$

Sabemos também que $E_{p,n-p}^\infty \cong \frac{F_p H_n(G, A)}{F_{p-1} H_n(G, A)}$. Daí $E_{0,n}^\infty \cong F_0 H_n(G, A) \subseteq H_n(G, A)$ e $E_{n,0}^\infty \cong \frac{H_n(G, A)}{F_{n-1} H_n(G, A)}$. Vimos que $E_{n-t,t}^\infty = 0$, se $n \neq t$ e $t \neq 0$. Desse modo, se $n \neq t$ e $t \neq 0$, $F_{n-t} H_n(G, A) \cong F_{n-t-1} H_n(G, A)$. Portanto, $F_{n-1} H_n(G, A) \cong F_{n-2} H_n(G, A) \cong \dots \cong F_0 H_n(G, A)$. Logo $E_{n,0}^\infty \cong \frac{H_n(G, A)}{E_{0,n}^\infty}$ e temos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow E_{0,n}^\infty \hookrightarrow H_n(G, A) \twoheadrightarrow E_{n,0}^\infty \longrightarrow 0$$

isto é,

$$0 \longrightarrow H_n(N, A)_{\frac{G}{N}} \xrightarrow{l_n} H_n(G, A) \xrightarrow{r_n} H_n \left(\frac{G}{N}, A_N \right) \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata, onde l_n é um monomorfismo e r_n é um epimorfismo.

Sejam $e_1 := am$ e $e_2 := bk$. Assim $e_1 + e_2 = 1$ e se $\tau \in H_n(G, A)$ então $e_1 e_2 \tau = am.bk.\tau = ab.mk.\tau = 0$ pois $|G| = m.k$. Desse modo, podemos verificar facilmente que $e_1^2 \tau = e_1 \tau$ e $e_2^2 \tau = e_2 \tau$. Conseqüentemente

$$H_n(G, A) \cong e_1 H_n(G, A) \bigoplus e_2 H_n(G, A). \quad (i)$$

Temos então a seqüência exata

$$0 \longrightarrow H_n(N, A)_{\frac{G}{N}} \xrightarrow{l_n} e_1 H_n(G, A) \bigoplus e_2 H_n(G, A) \xrightarrow{r_n} H_n \left(\frac{G}{N}, A_N \right) \longrightarrow 0 \quad (I)$$

Se $e_1 \sigma \in e_1 H_n(G, A)$, então $r_n(e_1 \sigma) = r_n(am\sigma) = m.r_n(a\sigma) = 0$, pois $r_n(a\sigma) \in H_n \left(\frac{G}{N}, A_N \right)$ e $m = (G : N)$. Logo $r_n(e_1 H_n(G, A)) = 0$, isto é, $e_1 H_n(G, A) \subset \ker r_n = \text{Im}l_n$ (pois a seqüência (I) é exata). Por outro lado, se $u \in \text{Im}l_n$, então $u = l_n(v)$ para algum $v \in H_n(N, A)_{\frac{G}{N}}$. Dessa maneira, como $|N| = k$, temos $k.v = 0$. Daí $u = 1.u = (am + bk)u = am.u + bk.u = am.l_n(v) + bk.l_n(v) = e_1.l_n(v) + 0 = e_1.l_n(v)$. Portanto $u \in e_1 H_n(G, A)$. Logo $\text{Im}l_n = e_1 H_n(G, A)$ e como l_n é um monomorfismo,

$$e_1 H_n(G, A) \cong H_n(N, A)_{\frac{G}{N}}. \quad (ii)$$

Temos ainda que r_n é uma aplicação sobrejetora. Assim $r_n(e_1H_n(G, A) \oplus e_2H_n(G, A)) = H_n\left(\frac{G}{N}, A_N\right)$, ou seja, $r_n(e_1H_n(G, A)) \oplus r_n(e_2H_n(G, A)) = H_n\left(\frac{G}{N}, A_N\right)$. Como $r_n(e_1H_n(G, A)) = 0$, concluímos que $r_n|_{e_2H_n(G, A)}$ é sobrejetora. Por fim, se $e_2.u \in \ker r_n = \text{Im}l_n = e_1H_n(G, A)$ então $e_2.u = e_1.v$ para algum $v \in H_n(G, A)$. Assim $e_1e_2.u = e_1^2.v$. Como $e_1e_2.u = 0$ e $e_1^2.v = e_1.v$ qualquer que seja $v \in H_n(G, A)$, segue que $e_2.u = e_1.v = 0$. Assim $r_n|_{e_2H_n(G, A)}$ é injetora e conseqüentemente

$$e_2H_n(G, A) \cong H_n\left(\frac{G}{N}, A_N\right). \quad (\text{iii})$$

Logo, de (i), (ii) e (iii) obtemos

$$H_n(G, A) \cong H_n(N, A)_{\frac{G}{N}} \oplus H_n\left(\frac{G}{N}, A_N\right).$$

■

Observação 4.1.2 *Nas condições da Proposição 4.1.2, existe um resultado análogo relacionado aos grupos de cohomologia, a saber:*

$$H^n(G, A) = H^n\left(\frac{G}{N}, A^N\right) \oplus H^n(N, A)^G.$$

Este resultado é obtido como uma aplicação da seqüência espectral de Lyndon (Observação 3.1.1) e está apresentado em [11], Corolário 10.3, p.354.

No exemplo a seguir veremos um caso interessante da Proposição 4.1.2 em que A é um grupo abeliano (isto é, um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial). Para tanto utilizaremos o seguinte resultado:

Proposição 4.1.3 ([9], Proposição 10.10.2, p. 471) *Se um grupo G opera trivialmente sobre um $\mathbb{Z}G$ -módulo A e se N está no centro de G , então $Q = \frac{G}{N}$ opera trivialmente sobre $H_*(N, A)$.*

Exemplo 4.1.1 (1) *Considere o grupo diedral $G = D_{23} = \langle a, b; a^3 = b^2 = 1, ab = ba^2 \rangle$ e o subgrupo $N = \{e, a, a^2\}$. Como $(G : N) = 2$ e $m.d.c.(|N|, (G : N)) = 1$, segue que N é um subgrupo de Hall normal de D_{23} . Temos: $N \cong \mathbb{Z}_3$ e $\frac{G}{N} \cong \mathbb{Z}_2$. Assim, dado um $\mathbb{Z}G$ módulo arbitrário A , pela Proposição 4.1.2 obtemos:*

$$H_n(D_{23}, A) = H_n(\mathbb{Z}_2, A_{\mathbb{Z}_3}) \oplus H_n(\mathbb{Z}_3, A)_{\mathbb{Z}_2}$$

para todo $n > 0$. Mais geralmente, considerando o grupo diedral D_{2p} com p primo ímpar, pelo mesmo raciocínio aplicado anteriormente obtemos

$$H_n(D_{2p}, A) = H_n(\mathbb{Z}_2, A_{\mathbb{Z}_p}) \oplus H_n(\mathbb{Z}_p, A)_{\mathbb{Z}_2}$$

para todo $n > 0$.

(2) Considere agora o grupo $G = \mathbb{Z}_{2p}$ com p primo e A um $\mathbb{Z}G$ -módulo arbitrário ($G = \mathbb{Z}_{2p}$). Pelo 1º Teorema de Sylow (Teorema 1.5.2), existe N subgrupo de G tal que $|N| = p$, isto é, $N \cong \mathbb{Z}_p$. Por procedimento análogo ao da parte 1 deste exemplo obtemos

$$H_n(\mathbb{Z}_{2p}, A) = H_n(\mathbb{Z}_2, A_{\mathbb{Z}_p}) \oplus H_n(\mathbb{Z}_p, A)_{\mathbb{Z}_2}$$

para todo $n > 0$. Agora se A é um $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_{2p}$ -módulo trivial, como \mathbb{Z}_{2p} é um grupo abeliano (isto é, o centro de \mathbb{Z}_{2p} é ele próprio: $Z(\mathbb{Z}_{2p}) = \mathbb{Z}_{2p}$), segue da Proposição 4.1.3 e do fato que $A_{\mathbb{Z}_p} = A$ que

$$H_n(\mathbb{Z}_{2p}, A) = H_n(\mathbb{Z}_2, A) \oplus H_n(\mathbb{Z}_p, A)$$

para todo $n > 0$.

4.2 Aplicações da seqüência de Cartan-Leray

4.2.1 Extensão exata da homologia de um G -complexo livre

Proposição 4.2.1 *Sejam $G \approx \mathbb{Z}$, o grupo cíclico infinito, e X um G -complexo livre. Então temos a seguinte extensão exata*

$$0 \longrightarrow H_n(X)_G \longrightarrow H_n\left(\frac{X}{G}\right) \longrightarrow H_{n-1}(X)^G \longrightarrow 0.$$

Em particular, se G atua trivialmente em $H_*(X)$, então

$$0 \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n\left(\frac{X}{G}\right) \longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração: Sabemos que $H_p(G, H_q(X)) = \begin{cases} H_q(X)_G, & p = 0; \\ H_q(X)^G, & p = 1; \text{ pois } G \text{ é cíclico infinito.} \\ 0, & p \geq 2. \end{cases}$

Pelo Teorema 3.2.1 (Cartan-Leray), temos uma seqüência espectral com $E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(X))$. Assim $E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(X)) = 0$, para $p \geq 2$; $E_{1,q}^2 = H_1(G, H_q(X)) = H_q(X)^G$ e $E_{0,q}^2 = H_q(X)_G$. Vamos mostrar que $E_{p,q}^2 = E_{p,q}^\infty$ quaisquer que sejam p e q .

Se $p \geq 2$ vimos que $E_{p,q}^2 = 0$ e conseqüentemente $E_{p,q}^3 \cong H_{p+q}(E^2) = 0$. Assim $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^2 = 0$ para $p \geq 2$. Como a seqüência é de primeiro quadrante temos também que $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^2 = 0$ para $p < 0$. Se $p = 0$, tomando $q = n$ temos as diferenciais

$$E_{2,n-1}^2 \xrightarrow{d_{2,n-1}^2} E_{0,n}^2 \xrightarrow{d_{0,n}^2} E_{-2,n+1}^2$$

Como $E_{2,n-1}^2 = 0$ (pois $p = 2$) e $E_{-2,n+1}^2 = 0$ (pois $-2 < 0$) obtemos $d_{2,n-1}^2 = d_{0,n}^2 = 0$, e $E_{0,n}^3 = H_n(E^2) = E_{0,n}^2$. Desse modo $E_{0,n}^\infty = E_{0,n}^2 = H_n(X)_G$. Por fim, se $p = 1$ tomando $q = n$

temos as diferenciais

$$E_{3,n-1}^2 \xrightarrow{d_{3,n-1}^2} E_{1,n}^2 \xrightarrow{d_{1,n}^2} E_{-1,n+1}^2$$

e pelo mesmo raciocínio aplicado anteriormente obtemos que $E_{1,n}^\infty = E_{1,n}^2 = H_n(X)^G$.

Considerando que a filtração do complexo $\frac{X}{G}$ é canonicamente limitada, pela Proposição 2.1.6, a filtração de $H_n\left(\frac{X}{G}\right)$ é da forma:

$$H_n\left(\frac{X}{G}\right) = F_n H_n\left(\frac{X}{G}\right) \supseteq F_{n-1} H_n\left(\frac{X}{G}\right) \supseteq \dots \supseteq F_0 H_n\left(\frac{X}{G}\right) \supseteq 0$$

Como $E_{p,q}^\infty = 0$ para $p \geq 2$, segue que $\frac{F_p H_n\left(\frac{X}{G}\right)}{F_{p-1} H_n\left(\frac{X}{G}\right)} \cong E_{p,n-p}^\infty = 0$, para $p \geq 2$ e portanto a

filtração de $H_n\left(\frac{X}{G}\right)$ tem no máximo dois termos:

$$H_n\left(\frac{X}{G}\right) = F_1 H_n\left(\frac{X}{G}\right) \supseteq F_0 H_n\left(\frac{X}{G}\right) \supseteq 0.$$

Daí temos:

$$H_{n-1}(X)^G = E_{1,n-1}^\infty = \frac{F_1 H_n\left(\frac{X}{G}\right)}{F_0 H_n\left(\frac{X}{G}\right)}.$$

Temos também

$$H_n(X)_G = E_{0,n}^\infty = \frac{F_0 H_n\left(\frac{X}{G}\right)}{F_{-1} H_n\left(\frac{X}{G}\right)} = F_0 H_n\left(\frac{X}{G}\right).$$

Logo:

$$H_{n-1}(X)^G \cong \frac{H_n\left(\frac{X}{G}\right)}{H_n(X)_G}$$

e temos o resultado desejado. ■

4.2.2 Homologia de um complexo de Eilenberg-Maclane

Definição 4.2.1 ([1], p. 15) Dizemos que X é um complexo de Eilenberg-Maclane do tipo $(G, 1)$ (ou simplesmente um $K(G, 1)$ -complexo) se X é um CW-complexo, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) X é conexo;
- (ii) $\pi_1(X) \cong G$;

(iii) o recobrimento universal \tilde{X} de X é contráctil.

Proposição 4.2.2 *Se G é um grupo e Y é um $K(G, 1)$ -complexo, então $H_n(Y) \cong H_n(G)$.*

Demonstração: Seja X o recobrimento universal de Y . Pela Proposição 1.2.1, $A(X, p)$ atua livremente sobre X . Como X é um recobrimento universal de Y , pela Proposição 1.2.2, $A(X, p) \cong \pi_1(Y)$. Daí, como Y é um $K(G, 1)$ -complexo, $A(X, p) \cong \pi_1(Y) \cong G$. Portanto G age livremente sobre X , tornando-o um G -complexo livre (Definição 3.2.1). Podemos identificar $Y \equiv \frac{X}{G}$ por uma aplicação: $\varphi : Y \longrightarrow \frac{X}{G}$, tal que $\varphi(y) = \{g.x, g \in G\}$, onde $y = p_1(x)$ e $p_1 : X \longrightarrow Y$ é a projeção de recobrimento. Portanto, o Teorema 3.2.1 nos dá:

$$E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(X)) \implies H_{p+q}(Y).$$

Sendo Y um $K(G, 1)$ -complexo, X é contráctil. Assim $H_q(X) = 0$ para $q > 0$ e portanto $E_{p,q}^2 = 0$ para $q > 0$. Pelo Teorema 2.1.2 temos $E^{r+1} = H(E^r)$ e assim $E_{p,q}^\infty = 0$, para $q > 0$. Fixemos, então $q = 0$. Tomando $p = n$ temos:

$$E_{n,0}^2 = H_n(G, H_0(X)) = H_n(G, \mathbb{Z}) = H_n(G).$$

Temos as diferenciais:

$$E_{n+2,-1}^2 \xrightarrow{d_{n+2,-1}^2} E_{n,0}^2 \xrightarrow{d_{n,0}^2} E_{n-2,1}^2.$$

Mas $E_{n+2,-1}^2 = 0$, pois a seqüência é de primeiro quadrante (isto é, $E_{p,q}^r = 0$ para $p < 0$ ou $q < 0$) e $E_{n-2,1}^2 = 0$ pelo fato que $E_{p,q}^2 = 0$ para $q > 0$. Portanto temos a seqüência:

$$0 \xrightarrow{d_{n+2,-1}^2} E_{n,0}^2 \xrightarrow{d_{n,0}^2} 0.$$

Daí $H_n(E^2) = E_{n,0}^2$ donde $E_{n,0}^\infty = E_{n,0}^2 = H_n(G)$. Logo:

$$H_n(Y) \cong E_{n,0}^\infty = H_n(G).$$

■

Exemplo 4.2.1 *O círculo unitário S^1 possui uma estrutura de CW-complexo dada por uma 0-célula e^0 e uma 1-célula e^1 . Ainda: S^1 é conexo, $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1; t \longmapsto e^{2\pi it}$ é uma aplicação de recobrimento, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ e \mathbb{R} é contráctil. Daí S^1 é um $K(\mathbb{Z}, 1)$ -complexo. Assim pela Proposição 4.2.2, $H_n(S^1) \cong H_n(\mathbb{Z})$ para todo $n \geq 0$. Logo, pelo Exemplo 1.4.1, temos: $H_n(S^1) \cong \mathbb{Z}$, se $n = 0, 1$ e $H_n(S^1) \cong 0$, se $n \geq 2$.*

4.2.3 Homologia de um G -complexo livre, G grupo finito

Proposição 4.2.3 *Sejam G um grupo tal que $|G| = m$ e X um G -complexo livre. Se G atua trivialmente sobre $H_*(X)$ e todo elemento de $H_*(X)$ é unicamente divisível por m (isto é, dado $u \in H_*(X)$ existe um único $v \in H_*(X)$ tal que $u = mv$) então, para todo n ,*

$$H_n(X) \cong H_n\left(\frac{X}{G}\right).$$

Demonstração: Seja X um G -complexo livre. Pelo Teorema de Cartan-Leray, existe uma seqüência espectral cujo E^2 -termo é $E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(X))$ e esta seqüência converge para $H_{p+q} \left(\frac{X}{G} \right)$. Por hipótese $H_q(X)$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial. Assim, pelo Teorema 1.4.1,

$$E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q(X)) \cong (H_p(G) \otimes H_q(X)) \oplus \text{Tor}(H_{p-1}(G), H_q(X)).$$

Seja $u \otimes y \in H_p(G) \otimes H_q(X)$. Como todo elemento de $H_*(X)$ é unicamente divisível por m , existe um único $y' \in H_q(X)$ tal que $y = m \cdot y'$. Deste modo $u \otimes y = u \otimes m \cdot y' = m \cdot u \otimes y'$. Por outro lado como $|G| = m$, pela Proposição 1.4.3, $m \cdot H_p(G) = 0$ para $p \geq 1$. Portanto, para $p \geq 1$, $u \otimes y = 0$ e assim $H_p(G) \otimes H_q(X) = 0$, se $p \geq 1$. Agora considere $\text{Tor}(H_{p-1}(G), H_q(X))$. Para $p > 1$, $m \cdot H_{p-1}(G) = 0$ e $\{y \in H_q(X) \mid m \cdot y = 0\} = 0$ pela hipótese de unicamente divisível (visto que $0 = m \cdot 0$). Assim, pela Proposição 1.1.6, para $p > 1$, $\text{Tor}(H_{p-1}(G), H_q(X)) = 0$. Se $p = 1$, $\text{Tor}(H_{p-1}(G), H_q(X)) = \text{Tor}(H_0(G), H_q(X)) = \text{Tor}(\mathbb{Z}, H_q(X)) = 0$, sendo que a última igualdade segue da Proposição 1.1.4. Deste modo $E_{p,q}^2 = 0$ para $p \geq 1$.

Analizando o caso $p = 0$, temos $E_{0,n}^2 = H_0(G, H_n(X)) = (H_n(X))_G$ (Proposição 1.4.2) e como a ação de G sobre $H_n(X)$ é trivial, $E_{0,n}^2 = H_n(X)$. Considere as diferenciais $E_{2,n-1}^2 \xrightarrow{d_{2,n-1}^2} E_{0,n}^2 \xrightarrow{d_{0,n}^2} E_{-2,n+1}^2$. Portanto, como $E_{2,n-1}^2 = 0$ (pelo exposto acima) e $E_{-2,n+1}^2 = 0$ (pois a seqüência é de 1º quadrante), $E_{0,n}^3 \cong E_{0,n}^2$ e procedendo desta maneira concluímos que $E_{0,n}^\infty \cong E_{0,n}^2$. Logo, a seqüência colapsa em E^2 e

$$H_n \left(\frac{X}{G} \right) \cong E_{0,n}^\infty \cong E_{0,n}^2 \cong H_n(X).$$

■

Observação 4.2.1 *Uma referência bibliográfica interessante que trata somente de seqüências espectrais é [14]. Esse livro traz várias aplicações de seqüências espectrais, inclusive das seqüências de Lyndon-Hochschild-Serre e de Cartan-Leray, mas só tivemos acesso ao livro referido quando nosso trabalho já estava em fase final de conclusão.*

Referências Bibliográficas

- [1] Brown, K.S.; *Cohomology of Groups*, G.T.M., n.87, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [2] Eisenbud, D.; *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1995.
- [3] Chow, T.Y.; *You Could Have Invented Spectral Sequences*, Notices of the AMS, **53**, 15-19, 2006.
- [4] Garcia, A.; Lequain, Y.; *Elementos de Álgebra*, IMPA, 4ª edição, Rio de Janeiro, 2006.
- [5] Gonçalves, A.; *Introdução à Álgebra*, IMPA, 5ª edição, Rio de Janeiro, 2007.
- [6] Greenberg, M.J.; *Lectures on Algebraic Topology*, W.A., Benjamim, Inc., 1966.
- [7] Hatcher, A.; *Algebraic Topology*, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [8] Hatcher, A.; *Spectral Sequences in Algebraic Topology*, disponível em:
<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/>. Última consulta em 12/2008.
- [9] Hilton, P.J.; Wylie, S.; *Homology Theory - An Introduction to Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1960.
- [10] Hu, S.T.; *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day Series in Mathematics, Holden-Day Inc. São Francisco, 1968.
- [11] MacLane, S.; *Homology*, Springer - Verlag, Berlin, 1967.
- [12] Massey, W.S.; *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer - Verlag, New York, Inc., 1967.
- [13] Massey, W.S.; *Singular Homology Theory*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1980.
- [14] McCleary, J.; *A user's guide to spectral sequences*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2001.

-
- [15] Rotman, J.J.; *An introduction to homological algebra*, Academic Press, New York, Inc., 1979.
- [16] Santos, A.P.; *Cohomologia de grupos e invariantes algébricos*, Dissertação (Mestrado em Matemática), IBILCE-UNESP, 2006.
- [17] Spanier, E. H.; *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, Inc., 1966.
- [18] Silveira, F.S.M.; *Um Invariante Cohomológico para Pares de Grupos*, Dissertação (Mestrado em Matemática), IBILCE - UNESP, 2003.

Índice Remissivo

- Abelianização, 9
- Abutment, 19
- Bordos, 3
- Centro de um grupo, 12
- Ciclos, 3
- Ciclos e bordos relativos, 7
- Colapsar, 27
- Complexo de cadeia celular, 8
- Complexo de cadeias relativas, 7
- Complexo de Eilenberg-MacLane, 61
- Complexo Total, 29
- Complexos de Cadeias, 3
- Complexos Duplos, 29
- Convergência da seqüência espectral, 19
- CW-complexo, 6
- Diferencial, 3
- Equivalência fraca, 4
- Espaço de recobrimento, 5
- Fórmula de Künneth, 4
- Filtração canonicamente limitada, 28
- Filtração de um R -módulo, xiv, 14
- Filtração do grupo de homologia, 16
- G-complexos livres, 48
- Grupo dos coinvariantes, 3
- Grupo dos invariantes, 3
- Homologia, 3, 4
- Homologia Celular, 8
- Homologia de grupos, 9
- Homologia de grupos com coeficientes, 10
- Homologia equivariante, 51, 52
- Homologia singular relativa, 8
- Lema de Shapiro, 11
- Módulo H_* -acíclico, 36
- Módulo Bigraduado, 15
- Módulo graduado, 14
- p-grupo, 12
- Produto tensorial, 3
- Recobrimento regular, 5
- Recobrimento universal, 5
- Resolução bar, 9
- Resolução padrão, 9
- Seqüência Espectral, 18
- Seqüência exata longa em homologia (do par (X,A)), 8
- Subcomplexos celulares, 7
- Subgrupo de Hall, 56
- Teorema de Cartan-Leray, 50
- Teorema de Lyndon-Hochschild-Serre, 46
- Teorema de Sylow, 12
- Teorema do Isomorfismo de Noether, 1
- Tor, 4
- Transformação de recobrimento, 5