Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Dinâmica de Endomorfismos do Plano Complexo e Conjuntos de Julia na Esfera de Riemann

Andresa Baldam Marchioli

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto

Outubro - 2009

ANDRESA BALDAM MARCHIOLI

Dinâmica de Endomorfismos do Plano Complexo e Conjuntos de Julia na Esfera de Riemann

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Geometria e Sistemas Dinâmicos junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Julio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ali Messaoudi
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr Eduardo Garibaldi
Professor Doutor
IMECC-UNICAMP

Prof^{a}. Dr^{a}. Maria Gorete Carreira Andrade
Professora Doutora
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 08 de outubro de 2009

Aos meus pais,
Aparecida e Antenor, por
sempre terem me mostrado o
caminho da educação e da
verdade, me protegendo e me
guiando por caminhos
corretos.
dedico.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por essa oportunidade e por me conduzir, fortalecer e amparar, dando-me perseverança para superar os obstáculos e concluir mais uma etapa da minha vida acadêmica e profissional.

Ao meu orientador, Professor Doutor Ali Messaoudi, pelo imprescindível e valioso apoio em todas as fases de elaboração dessa dissertação, desde a ideia original até a redação, o qual foi muito paciente e generoso. A ele manifesto minha sincera gratidão e profundo reconhecimento.

À banca examinadora: Professor Doutor Eduardo Garibaldi, pela disponibilidade e, em especial, à Professora Doutora Maria Gorete Carreira Andrade também pela disponibilidade, pela orientação científica, pelo incentivo e apoio durante minha graduação.

Agradeço ao Professor Doutor Cláudio Aguinaldo Buzzi pela participação na banca do exame de qualificação, pela atenção e por toda ajuda durante esse período do Mestrado.

Aos meus amigos do Mestrado, pela amizade, apoio e agradável convivência. Agradeço, em especial, ao Rafael, ao Rodiak e ao Alexandre pelo carinho e pela disponibilidade em me ajudar sempre que necessário.

Aos meus pais, pelo constante estímulo, apoio e confiança e ao meu namorado Vítor, pelo companheirismo e compreensão durante a execução deste trabalho.

Finalmente, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão desta dissertação.

“Nada é tão contagioso como o entusiasmo. Ele comove pedras. Encanta brutos. A verdade é que nada se realiza sem ele.”

(Grantland Rice)

Resumo

Neste trabalho, estudaremos as propriedades dinâmicas de endomorfismos do plano complexo $\mathbb{C}$. Provaremos também o teorema de Montel e mostraremos algumas propriedades topológicas do conjunto de Julia $J(f)$, onde $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ é uma aplicação racional de grau ≥ 2.

Palavras chave: conjunto de Julia, teorema de Montel, dinâmica.

Abstract

In this work, we will study the dynamical properties of endomorfisms of complex plane $\mathbb{C}$. We will also prove Montel's theorem and show some topological properties of Julia set $J(f)$, where $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ is a rational map of degree ≥ 2.

Key words: Julia set, Montel's theorem, dynamic.

Sumário

Introdução **9**

1 Dinâmica dos Difeomorfismos **11**

1.0.1 Pontos Fixos de Difeomorfismos Locais Analíticos 11

2 Teorema de Montel **23**

2.0.2 O Espaço das Funções Contínuas $\mathcal{C}(G,\Omega)$ 23

2.0.3 O Espaço das Funções Analíticas 32

3 Endomorfismos da Esfera de Riemann **40**

3.0.4 Definição de $\overline{\mathbb{C}}$: A Esfera de Riemann 40

4 Propriedades do Conjunto de Julia **47**

Apêndice **53**

Referências Bibliográficas **55**

Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é estudar a dinâmica de endomorfismos do plano complexo $\mathbb{C}$, onde partiremos de uma aplicação holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, e mostrar algumas propriedades topológicas do conjunto de Julia de f, $J(f)$, na esfera de Riemann, sendo $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ uma aplicação racional de grau ≥ 2.

O conjunto de Julia foi investigado inicialmente pelos matemáticos franceses Gaston Julia e Pierre Fatou em 1915, os quais também introduziram os métodos iterativos no estudo dos sistemas dinâmicos. Os conjuntos de Julia estão ligados a várias áreas da Matemática, como Sistemas Dinâmicos, Análise Funcional, Análise Complexa, entre outros.

No primeiro capítulo deste trabalho, estudaremos a dinâmica em torno de pontos fixos de difeomorfismos locais analíticos, sendo que, para isso, consideraremos um difeomorfismo local $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, onde $\varphi(0) = 0$ é ponto fixo. Em particular, mostraremos os seguintes resultados:

Se $0 \leq |a| < 1$, onde $a = \varphi'(0)$, então existem $r > 0$ e uma única função analítica $F = F_a$ definida para $|z| < r$, satisfazendo $F(0) = 0$ e $F'(0) = 1$ tal que:

(i) Se $a \neq 0$, então $F(\varphi(z)) = aF(z)$.

(ii) Se $a = 0$, então existe um inteiro $m \geq 2$ tal que $F(\varphi(z)) = \varphi(z)^m$.

Estudaremos também o caso onde $|\varphi'(0)| = 1$ e $\varphi(z)$ é um polinômio.

No segundo capítulo, provaremos o Teorema de Montel, o qual diz o seguinte: Se $\mathcal{F}$ é uma família de funções analíticas em uma região $G \subset \mathbb{C}$ na qual $f \in \mathcal{F}$ não assume os valores 0 e 1, então $\mathcal{F}$ é normal. Em particular, mostraremos dois resultados importantes para a sua demonstração, os quais são o teorema de Schottky e um resultado que diz o seguinte: Uma família $\mathcal{F}$ em $H(G)$ é normal se e somente se $\mathcal{F}$ é localmente limitada, onde $H(G)$ representa o conjunto das funções holomorfas em um aberto G.

No terceiro capítulo, estudaremos a dinâmica de endomorfismos na esfera de Riemann, onde mostraremos que as funções holomorfas $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ não constantes e não lineares que são exatamente as funções racionais e citaremos uma segunda versão do teorema de Montel, a qual será muito útil no quarto capítulo, onde mostraremos algumas propriedades topológicas do conjunto de Julia $J(f)$, em que $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ é uma aplicação racional de grau ≥ 2.

Por último, no anexo, demonstraremos o teorema de Hurwitz, que será útil na demonstração do teorema de Montel e um resultado necessário na demonstração do teorema de Schottky, o qual diz o seguinte: Seja (f_n) uma seqüência de funções holomorfas em um aberto G e f em $\mathcal{C}(G, \Omega)$ tal que $f_n \to f$. Então f é analítica e $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ para cada inteiro $k \geq 1$, ou seja, a k-ésima derivada de f_n converge para a k-ésima derivada de f.

Capítulo 1

Dinâmica dos Difeomorfismos

Neste capítulo, estudaremos as propriedades da dinâmica global dos endomorfismos analíticos do plano complexo. Começaremos com um breve estudo da dinâmica em torno de pontos fixos de difeomorfismos locais analíticos.

1.0.1 Pontos Fixos de Difeomorfismos Locais Analíticos

Definição 1.0.1 *Sejam $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma aplicação holomorfa e $z \in \mathbb{C}$.*

*A **órbita positiva** de z é definida por $O^{+}(z) = \{f^{n}(z),\, n \geq 0\}$.*

*Define-se a **órbita negativa** de z por $O^{-}(z) = \{y \in \mathbb{C};\ z = f^{n}(y)$, para algum $n \in \mathbb{C}\}$.*

*A **órbita completa** de $z \in \mathbb{C}$ é a união das órbitas positiva e negativa de $z \in \mathbb{C}$, ou seja, $O(z) = O^{+}(z) \cup O^{-}(z)$.*

*Se para $p \in \mathbb{C}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k-1}(p) = p$, diremos que $p \in \mathbb{C}$ é **ponto periódico** de f e que $O^{+}(z)$ é **órbita periódica** de f. O menor inteiro $k \in \mathbb{N}$ que satisfaz $f^{k-1}(p) = p$ é chamado de **período** de $O^{+}(z)$.*

Consideremos um difeomorfismo local $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ analítico tendo $0 \in \mathbb{C}$ como ponto fixo. Temos várias possibilidades, conforme o valor de $a = \varphi'(0)$.

Teorema 1.0.1 *Suponhamos que $0 \leq |a| < 1$, então temos os seguintes resultados:*

1- Existem $r > 0$ e $0 < \mu < 1$ tais que, para todo $z \in B(0,r)$, $|\varphi^n(z)| \leq \mu^n|z|$, onde $\varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ ... \circ \varphi$.

2- Existem $r > 0$ e uma única função analítica $F = F_a$ definida para $|z| < r$, satisfazendo $F(0) = 0$ e $F'(0) = 1$ tal que:

(i) Se $a \neq 0$, então $F(\varphi(z)) = aF(z)$.

(ii) Se $a = 0$, então existe um inteiro $m \geq 2$ tal que $F(\varphi(z)) = \varphi(z)^m$.

Demonstração: 1- Como $|\varphi'(0)| < 1$ e φ' é contínua, então existem $r > 0$, $\mu < 1$ tal que para todo $z \in \overline{B(0,r)}$, temos que $|\varphi'(z)| < \mu < 1$.

Pelo Teorema do Valor Médio, temos:

$$|\varphi(z)| = |\varphi(z) - \varphi(0)| \leq \mu|z - 0|$$

Logo,

$$|\varphi(z)| \leq \mu|z| < |z| \leq r$$

Portanto, $\varphi(B(0,r)) \subset B(0,r)$ e segue por indução que $|\varphi^n(z)| < \mu^n|z|$, de modo que a órbia positiva $\{\varphi^n(z), n \geq 0\}$ de qualquer ponto $z \in \overline{B(0,r)}$ converge ao ponto fixo 0.

2- (i) **Existência:** Consideremos a seqüência de funções $(h_n)_{n\geq 0}$ definida por:

$$h_n(z) = \tfrac{\varphi^n(z)}{a^n},\ |z| \leq r,\ n \geq 0.$$

Afirmação: A seqüência $(h_n)_{n\geq 0}$ é uniformemente convergente.

De fato, temos o seguinte:

$$h_{n+1}(z) = z.\frac{h_{n+1}(z)}{h_0(z)} = z.\frac{h_1(z)}{h_0(z)}\frac{h_2(z)}{h_1(z)}...\frac{h_{n+1}(z)}{h_n(z)},\ \ se\ \ h_{n+1}(z) \neq 0.$$

pois $h_0(z) = \frac{\varphi^0(z)}{a^0} = z$.

Dessa forma,

$$h_{n+1}(z) = z\prod_{i=0}^{n}\frac{h_{i+1}(z)}{h_i(z)}$$

Agora, para todo $i = 0, ..., n$,

$$\frac{h_{i+1}(z)}{h_i(z)} = \frac{\varphi^{i+1}(z)}{a^{i+1}}.\frac{a^i}{\varphi^i(z)} =$$

$$= \frac{\varphi^{i+1}(z)}{a\varphi^i(z)} = \frac{\varphi(z_i)}{az_i}$$

onde $z_i = \varphi^i(z)$.

Além disso, temos

$$\frac{\varphi(z)}{az} = 1 + \xi(z),\ onde\ \xi(z) = \frac{\varphi(z) - az}{az}\ e\ |\xi(z)| \leq \alpha|z|.$$

com α uma constante positiva.

De fato, pelo Teorema de Taylor:

$$\varphi(z) - \varphi(0) = \varphi'(0)z + r(z)z^2,$$

onde $r(z)$ é limitado quando $z \in B(0, r)$.

Logo,

$$\varphi(z) - az = r(z)z^2$$

Portanto,

$$|\xi(z)| = |\frac{r(z)}{a}||z|$$

onde $|\frac{r(z)}{a}| \leq \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $|z| \leq r$.

Dessa forma, $|\xi(z)| \leq \alpha|z|$.

Logo,

$$h_{n+1}(z) = z\prod_{i=1}^{n}\frac{\varphi(z_i)}{az_i} = z\prod_{i=1}^{n}(1+\xi(z_i))$$

Finalmente, observemos que:

$$|h_{n+1}(z)| = |z|\prod_{i=0}^{n}|1+\xi(z_i)|$$

Portanto,

$$log|h_{n+1}(z)| = log|z| + \sum_{i=0}^{n} log|1+\xi(z_i)|$$

Agora, quando $i \to \infty$ temos que $\xi(z_i) \to 0$ e, dessa forma

$$-|\xi(z_i)| \sim log(1-|\xi(z_i)|) \leq log|1+\xi(z_i)| \leq log(1+|\xi(z_i)|) \sim |\xi(z_i)|$$

Logo,

$$|log|1+\xi(z_i)|| \leq c|\xi(z_i)|$$

Sendo assim, se a série $\sum_{i=1}^{+\infty}|\xi(z_i)|$ convergir, então a série $\sum_{i=1}^{+\infty} log|1+\xi(z_i)|$ também converge.

Mostremos então que $\sum_{i=1}^{+\infty}|\xi(z_i)|$ é convergente:

$$\sum_{i=1}^{+\infty}|\xi(z_i)| \leq \sum_{i=1}^{+\infty}\alpha|z_i| \leq \alpha|z|\sum_{i=1}^{+\infty}\mu^i < +\infty, \quad pois$$

$$|z_i| = |\varphi^i(z)| < \mu^i|z|$$

Logo, $(h_n)_{n\geq 0}$ é uniformemente convergente.

Seja

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} h_n(z)$$

Temos que $F(0) = 0$, pois,

$$F(0) = \lim_{n\to\infty} h_n(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^n(0)}{a^n} = 0$$

Agora, como $(\varphi^n)'(0) = (\varphi^{n-1})'(\varphi(0)).\varphi'(0)$, temos por indução sobre n que $(\varphi^n)'(0) = a^n$.

Dessa forma,

$$F'(0) = \lim_{n\to\infty} (h_n)'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\varphi^n)'(0)}{a^n} = 1$$

Logo, $F'(0) = 1$.

Além disso,

$$F(\varphi(z)) = \lim_{n\to\infty} h_n(\varphi(z)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^n(\varphi(z))}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{n+1}(z)}{a^n} = a \lim_{n\to\infty} h_{n+1}(z) = aF(z)$$

Logo, $F(\varphi(z)) = aF(z)$.

Unicidade: Se $\tilde{F}(z)$ é uma outra função analítica definida numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ tal que $\tilde{F}(0) = 0$, $\tilde{F}'(0) = 1$ e $\tilde{F}(\varphi(z)) = a\tilde{F}(z)$, então, considerando $H(z) = \tilde{F}(F^{-1}(z))$, temos que $H(0) = 0$ e $H'(0) = 1$, pois

$$H(0) = \tilde{F}(F^{-1}(0)) = \tilde{F}(0) = 0$$

e

$$H'(0) = (\tilde{F} \circ F^{-1})'(0) = \tilde{F}'(F^{-1}(0)).(F^{-1})'(0) = \tilde{F}'(0).\tfrac{1}{F'(0)} = 1$$

Portanto, $H(0) = 0$ e $H'(0) = 1$.

Mostremos agora que $H(az) = aH(z)$:

$$H(az) = \tilde{F}(F^{-1}(az)) = \tilde{F}(\varphi(F^{-1}(z))), \text{ pois}$$

$$F(\varphi(z)) = aF(z).$$

Logo,

$$\varphi(z) = F^{-1}(aF(z))$$

E, portanto

$$\varphi(F^{-1}(F(z)) = F^{-1}(aF(z)), \forall z.$$

Dessa forma,

$$F^{-1}(az) = \varphi(F^{-1}(z))$$

Além disso, temos que $\tilde{F}(\varphi(z)) = a\tilde{F}(z)$, onde concluimos que:

$$H(az) = \tilde{F}(F^{-1}(az)) = \tilde{F}(\varphi(F^{-1}(z))) = a\tilde{F}(F^{-1}(z)) = aH(z)$$

Logo, $H(az) = aH(z)$.

Comparando os desenvolvimentos em séries de potências de ambos os membros da última equação, temos

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

$$H(az) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a^n c_n) z^n \ \ e \ \ aH(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a c_n z^n$$

Como $H(az) = aH(z)$, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a^n c_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a c_n z^n$$

$$(a^n - a)c_n = 0, \ \forall \ n.$$

Temos dois casos a serem considerados:

1º Caso: Para todo $n \neq 1$, temos $a^n \neq a$. Assim, $c_n = 0$, $\forall n \neq 1$, onde $H(z) = c_1 z$. Por outro lado, $H'(z) = c_1$ e $H'(0) = 1$, ou seja, $c_1 = 1$.

Logo, $H(z) = z$.

2º Caso: Existe n_0 tal que $a^{n_0} = a$. Dessa forma, $a(a^{n_0 - 1} - 1) = 0$, onde $a = 1$ ou $a = 0$, o que não pode ocorrer.

Portanto, concluimos que $H(z) = z$, ou seja, $F(z) = \tilde{F}(z)$, para $z \in \mathbb{C}$ numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$.

(ii) Supondo que $a = \varphi'(0) = 0$, consideremos a seqüência de funções $(h_n)_{n\geq 0}$ definida por

$$h_n(z) = [\varphi^n(z)]^{\frac{1}{m^n}}$$

Afirmamos que a seqüência $(h_n)_{n\geq 0}$ é uniformemente convergente para $|z| \leq r$. De fato,

$$h_{n+1}(z) = z.\frac{h_{n+1}(z)}{h_0(z)} = z.\frac{h_1(z)}{h_0(z)}\frac{h_2(z)}{h_1(z)}...\frac{h_{n+1}(z)}{h_n(z)}$$

pois $h_0(z) = [\varphi^0(z)]^{\frac{1}{m^0}} = z$.

Dessa forma,

$$h_{n+1}(z) = z\prod_{i=0}^{n}\frac{h_{i+1}(z)}{h_i(z)}$$

Agora,

$$\frac{h_{i+1}(z)}{h_i(z)} = \frac{[\varphi^{i+1}(z)]^{\frac{1}{m^{i+1}}}}{[\varphi^i(z)]^{\frac{1}{m^i}}} = [\frac{(\varphi^{i+1}(z))^{\frac{1}{m}}}{\varphi^i(z)}]^{\frac{1}{m^i}} = [\frac{(\varphi(\varphi^i(z)))^{\frac{1}{m}}}{\varphi^i(z)}]^{\frac{1}{m^i}} = [\frac{(\varphi(z^i))^{\frac{1}{m}}}{z^i}]^{\frac{1}{m^i}}$$

onde $z_i = \varphi^i(z)$.

Se $\xi(z) = \frac{\varphi(z)^{\frac{1}{m}}}{z} = 1 + \tilde{\xi}(z)$ (onde $\tilde{\xi}$ é analítica), temos que

$$h_{n+1}(z) = z\prod_{i=0}^{n}\xi(z_i)^{\frac{1}{m^i}}$$

Devemos então verificar se

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{m^i}log\xi(z_i)$$

é convergente.

Se $r > 0$ é suficientemente pequeno:

$$|log\xi(z_i)| = |log(1+\tilde{\xi}(z_i))| \leq 2|\tilde{\xi}(z_i)| \leq c$$

ou seja,

$$\sum_{i=0}^{+\infty}|\frac{1}{m^i}log\xi(z_i)| \leq \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{c}{m^i} < +\infty$$

Logo, a seqüência $(h_n)_{n\geq 0}$ é uniformemente convergente. Seja

$$F(z) = \lim_{n\to+\infty} h_n(z), \quad |z| \leq r'.$$

Temos que:

$$F(\varphi(z)) = \lim_{n\to+\infty} h_n(\varphi(z)) = \lim_{n\to+\infty}[(\varphi^n(\varphi(z)))]^{\frac{1}{m^n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}[\varphi^{n+1}(z)]^{\frac{1}{m^n}} = \lim_{n\to+\infty}[(\varphi^{n+1}(z))^{\frac{1}{m^{n+1}}}]^m = F(z)^m,$$

sendo que $F(z)$ é a função procurada.

Unicidade: Se $\tilde{F}(z)$ é outra função analítica definida numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ tal que $\tilde{F}(0) = 0$, $\tilde{F}'(0) = 1$ e $\tilde{F}(\varphi(z)) = \tilde{F}(z)^m$, então, considerando $H(z) = \tilde{F}(F^{-1}(z))$, temos que $H(0) = 0$ e $H'(0) = 1$, pois

$$H(0) = \tilde{F}(F^{-1}(0)) = \tilde{F}(0) = 0$$

$$H'(0) = (\tilde{F} \circ F^{-1})'(0) = \tilde{F}'(F^{-1}(0)).(F^{-1})'(0) = \tilde{F}'(0).\tfrac{1}{F'(0)} = 1$$

Portanto,

$$H(0) = 0 \text{ } e \text{ } H'(0) = 1. \tag{1.1}$$

Mostremos agora que $H(z^m) = H(z)^m$:

Afirmação 1.0.1 $F^{-1}(z^m) = \varphi(F^{-1}(z))$

De fato,

$$F(\varphi(F^{-1})(z)) = F(F^{-1}(z))^m$$
$$\varphi(F^{-1}(z)) = F^{-1}(z^m)$$

Seja $H(z) = \tilde{F}(F^{-1}(z))$. Então,

$$H(z^m) = \tilde{F}(F^{-1}(z^m)) = \tilde{F}(\varphi(F^{-1}(z))) = \tilde{F}(F^{-1}(z))^m = H(z)^m$$

Portanto,

$$H(z^m) = H(z)^m. \tag{1.2}$$

Considere agora,

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

Por (1.1), temos que $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$.

Por outro lado, através de (1.2) obtemos

$$z^m + \sum_{n=2}^{+\infty} c_n z^{nm} = (z + \sum_{n=2}^{+\infty} c_n z^n)^m \tag{1.3}$$

Desenvolvendo (1.3), obtemos $H(z) = z$ e, portanto, $\tilde{F}(z) = F(z)$. $\square$

Proposição 1.0.1 *Se* $|a| > 1$ *então a órbita negativa de qualquer ponto suficientemente próximo de* $0 \in \mathbb{C}$ *converge ao ponto fixo 0.*

Demonstração: Aplicando a descrição do item 2 (i) do Teorema anterior a φ^{-1}, temos que

$$(\varphi'(0))^{-1} = \frac{1}{a} < 1$$

Logo, vemos que a órbita negativa de qualquer ponto suficientemente próximo de $0 \in \mathbb{C}$ converge ao ponto fixo 0. $\square$

Definição 1.0.2 *No caso onde $|\varphi'(0)| < 1$, dizemos que 0 é* ***ponto fixo atrator****.*

Se $|\varphi'(0)| > 1$, dizemos que 0 é ***ponto fixo repulsor****.*

Para $|\varphi'(0)| = 0$, o ponto fixo 0 é chamado de ***fortemente atrator****.*

Agora veremos o caso onde $|\varphi'(0)| = 1$.

Por ser um caso mais complicado, consideraremos um polinômio $P(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + ... + a_nz^n$.

Vamos supor que $a_2 \neq 0$. Então P é conjugado a um polinômio da forma $z + z^2 + a'_3z^3 + ... + a'_nz^n$.

De fato, seja $G(z) = a_2z$. Temos que

$$GPG^{-1}(z) = GP(\frac{z}{a_2})$$

Logo,

$$G(\frac{z}{a_2} + \frac{z^2}{a_2} + ... + \frac{a_n}{a_2^n}z^n) = z + z^2 + ... + \frac{a_n}{a_2^{n-1}}z^n = F(z)$$

Portanto, a dinâmica de P é equivalente à dinâmica de F.

Proposição 1.0.2 *Seja $P(z) = z + z^2 + a_3z^3 + ... + a_nz^n$. Existe $\mu > 0$ tal que*

1. Todos os pontos no interior do círculo de raio μ centrado em $-\mu$ são atraídos para 0.

2. Todos os pontos no interior do círculo de raio μ centrado em μ são afastados do 0.

Demonstração: A estrutura local próxima ao ponto fixo é mais fácil de ser compreendida se eliminarmos inteiramente o ponto fixo tendendo-o para ∞. Isto é feito através da conjugação de P com a transformação de Möbius $H(z) = \frac{1}{z}$. Isto resulta em

$$(H^{-1} \circ P \circ H)(z) = G(z) = \frac{z^n}{z^{n-1} + z^{n-2} + a_3 z^{n-3} + ... + a_n}.$$

Dividindo, podemos escrever

$$G(z) = z - 1 + G_0(z).$$

onde

$$G_0(z) = \frac{b_2 z^{n-2} + ... + b_n}{z^{n-1} + z^{n-2} + a_3 z^{n-3} + ... + a_n}.$$

Note que

$$\lim_{|z| \to \infty} G_0(z) = 0.$$

Dessa forma, próximo a ∞, G é uma translação de uma unidade para a esquerda. Em particular, existe $\delta > 0$ tal que, se $\eta > \delta$ e $Re(z) < -\eta$, então $Re(G(z)) < -\eta$. Logo, G aplica cada meio plano $Re(z) < -\eta$ em si próprio. H envia o meio plano $Re(z) < -\eta$ no disco de raio $\frac{1}{2\eta}$ centrado em $\frac{-1}{2\eta}$. Consequentemente, pontos dentro desses círculos são atraídos para 0 sobre interação de P. De fato:

Para todo z onde $Re(z) > -\eta$, temos que $|P^n(z)| \to \infty$.

Seja $D = D(-\frac{1}{2\eta}, \frac{1}{2\eta})$. Como $G = H^{-1} \circ P \circ H$, temos que $P(D) \subset D$.

Seja $z \in D$. Temos que

$$P^n(z) = (H \circ G^n \circ H^{-1})(z).$$

Dessa forma,

$$|P^n(z)| = |(H \circ G^n \circ H^{-1})(z)|$$

onde $|(G^n \circ H^{-1})(x)| \to \infty$, pois $(H^{-1})(x) \in P$.

Logo,

$$|(H \circ G^n \circ H^{-1})(x)| = \frac{1}{|(G^n \circ H^{-1})(x)|} \to 0.$$

Portanto, para concluirmos a demostração da parte 1, basta tomarmos $\mu = \frac{-1}{2\delta}$.

A demonstração da parte 2 é análoga a da parte 1, porém utilizamos $Rez > \eta$.

$\square$

Pela escolha de diferentes regiões próximas a ∞, pode-se descrever a dinâmica local em mais detalhes. Chamamos cada uma dessas regiões de *pétalas de atração* para P. Mais precisamente, uma região simplesmente conexa C é uma pétala de atração para um ponto fixo indiferente z_0 se z_0 está contido em uma vizinhança de C e para cada $z \in C$, $P^n(z) \to z_0$. Uma pétala repulsora é definida analogamente.

Capítulo 2

Teorema de Montel

Neste capítulo estudaremos o Teorema de Montel, o qual será muito útil para provarmos as propriedades do conjunto de Julia.

Definição 2.0.3 *Uma família $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ de aplicações analíticas em um domínio $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ é dita normal em D se cada seqüência $(f_n)_n$, $f_n \in \mathcal{F}$, contém uma subseqüência que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de D.*

O nosso objetivo é mostrar os seguinte teorema:

Teorema 2.0.2 (Teorema de Montel) *Se $\mathcal{F}$ é uma família de funções analíticas em uma região $G \subset \mathbb{C}$ na qual $f \in \mathcal{F}$ não assume os valores 0 e 1, então $\mathcal{F}$ é normal.*

2.0.2 O Espaço das Funções Contínuas $\mathcal{C}(G, \Omega)$

Definição 2.0.4 *Seja G um aberto em $\mathbb{C}$ e (Ω, d) um espaço métrico completo. Definimos $\mathcal{C}(G, \Omega)$ o conjunto de todas as funções contínuas de G em Ω.*

Considere $G = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, onde cada K_n é um conjunto compacto contido no interior de K_{n+1}, isto é, $K_n \subset int(K_{n+1})$.

Proposição 2.0.3 *Se G é um aberto em $\mathbb{C}$ então existe uma sequência (K_n) de subconjuntos compactos de G tal que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Além disso, os conjuntos K_n podem ser escolhidos para satisfazer as seguintes condições:*

(a) $K_n \subset int(K_{n+1})$;

(b) $K \subset G$ e K compacto implica $K \subset K_n$ para algum n.

Demonstração: Para cada inteiro positivo n seja

$$K_n = \{z : |z| \leq n\} \cap \{z : d(z, \mathbb{C} - G) \geq \frac{1}{n}\};$$

sendo que K_n é limitado e é a intersecção dos dois subconjuntos fechados de $\mathbb{C}$, logo, K_n é compacto. Além disso, o conjunto

$$\{z : |z| < n + 1\} \cap \{z : d(z, \mathbb{C} - G) \geq \frac{1}{n+1}\}$$

é aberto, contém K_n e está contido em K_{n+1}. Com isso, o item (a) está satisfeito.

Como $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, nós também temos que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} intK_n$. Então, se K é um subconjunto compacto de G os conjuntos $\{intK_n\}$ formam uma cobertura aberta de K. Portanto, isto mostra a parte (b).

$\square$

Para todo n, seja $\rho_n : \mathcal{C}(G, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$\rho_n(f, g) = sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K_n\}$$

Podemos definir também

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}$$

Como $t(1 + t)^{-1} \leq 1$ para todo $t \geq 0$, então a série anterior converge, pois está dominada por $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$.

O seguinte lema é usado para mostrar que ρ é uma métrica para $\mathcal{C}(G, \Omega)$.

Lema 2.0.1 *: Seja (S,d) um espaço métrico, então a função $\mu : S \times S \to \mathbb{R}^+$ definida por*

$$\mu(s,t) = \frac{d(s,t)}{1+d(s,t)}, \ \forall \ (s,t) \ \in \ S \times S$$

é uma métrica em S.

Demonstração: Vamos mostrar apenas que

$$\mu(s,t) \leq \mu(s,u) + \mu(u,t), \ \forall \ s,t,u \ \in \ S$$

Como d é uma métrica, temos que

$$d(s,t) \leq d(s,u) + d(u,t), \ \forall \ s,t,u \ \in \ S$$

Dessa forma,

$$\mu(s,t) = \frac{d(s,t)}{1+d(s,t)} \leq \frac{d(s,u)+d(u,t)}{1+d(s,u)+d(u,t)}$$

pois $f(t) = \frac{t}{1+t}$ é estritamente crescente.

Sendo assim,

$$\frac{d(s,u)+d(u,t)}{1+d(s,u)+d(u,t)} = \frac{d(s,u)}{1+d(s,u)+d(u,t)} + \frac{d(u,t)}{1+d(s,u)+d(u,t)} \leq \frac{d(s,u)}{1+d(s,u)} + \frac{d(u,t)}{1+d(u,t)} =$$

$$= \mu(s,u) + \mu(u,t), \ \forall \ s,t,u \ \in \ S$$

Portanto,

$$\mu(s,t) \leq \mu(s,u) + \mu(u,t), \ \forall \ s,t,u \ \in \ S$$

□

Proposição 2.0.4 $(\mathcal{C}(G,\Omega),\rho)$ *é um espaço métrico.*

Demonstração: Está claro que $\rho(f,g) = \rho(g,f)$. Além disso, como cada ρ_n satisfaz a desigualdade triangular, pelo lema anterior temos que ρ satisfaz a desigualdade triangular. Temos também que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ e, portanto, $f = g$ sempre que $\rho(f,g) = 0$. □

Definição 2.0.5 *Um conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G,\Omega)$ é equicontínuo em um ponto z_0 em G se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para $|z - z_0| < \delta$, $d(f(z), f(z_0)) < \epsilon$, para toda f em $\mathcal{F}$.*

O principal teorema desta seção é o resultado seguinte.

Teorema 2.0.3 (Arzela-Ascoli) *Um conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G,\Omega)$ é normal se e somente se satisfaz a seguintes condições:*

a) Para cada z em G, $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ tem fecho compacto em Ω;

b) $\mathcal{F}$ é equicontinuo em cada ponto de G.

Para a prova deste Teorema precisaremos de vários resultados.

Lema 2.0.2 *Seja ρ a métrica definida anteriormente. Dado $\epsilon > 0$, então existem um número real $\delta > 0$ e um conjunto compacto $K \subset G$ tal que para toda f e g em $\mathcal{C}(G,\Omega)$,*

$$sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta \Rightarrow \rho(f,g) < \epsilon.$$

Reciprocamente, dados $\delta > 0$ e um conjunto compacto K, existe um $\epsilon > 0$ tal que para todo f e g em $\mathcal{C}(G,\Omega)$,

$$\rho(f,g) < \epsilon \Rightarrow sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta.$$

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ fixo e p um inteiro positivo tal que $\sum_{n=p+1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{2}\epsilon$ e denote $K = K_p$. Como $\lim_{t\to 0} \frac{t}{t+1} = 0$, escolhemos $\delta > 0$ tal que se $0 \leq t \leq \delta$ então

$\frac{t}{1+t} < \frac{1}{2}\epsilon$. Suponha que f e g em $\mathcal{C}(G,\Omega)$ satisfazem $sup\{d(f(z),g(z)) : z \in K\} < \delta$. Como $K_n \subset K_p = K$ para $1 \leq n \leq p, \rho_n(f,g) < \delta$ para $1 \leq n \leq p$. Assim, temos

$$\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < \frac{1}{2}\epsilon$$

para $1 \leq n \leq p$. Portanto

$$\rho(f,g) < \sum_{n=1}^{p} (\frac{1}{2})^n (\frac{1}{2}\epsilon) + \sum_{n=p+1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n < \epsilon$$

Sejam agora $K \subset G$ um conjunto compacto e $\delta > 0$. Como $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} int(K_n)$ e K é um conjunto compacto, existe um inteiro $p \geq 1$ tal que $K \subset K_p$. Isto implica

$$\rho_p(f,g) \geq sup\{d(f(z),g(z)) : z \in K\}.$$

Escolhamos $\epsilon > 0$ de modo que para todo $0 \leq s \leq 2^p\epsilon$ implique $\frac{s}{1-s} < \delta$, então $r = \frac{t}{1+t} < 2^p\epsilon$ implica $\frac{r}{1-r} = t < \delta$. Logo, se $\rho(f,g) < \epsilon$, então $\frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)} < 2^p\epsilon$ e temos $\rho_p(f,g) < \delta$.

□

Proposição 2.0.5

a) Um conjunto $\mathcal{O} \subset \mathcal{C}(G,\Omega)$ é aberto se e somente se para cada f em $\mathcal{O}$ existe um conjunto compacto $K \subset G$ e um número real $\delta > 0$ tal que

$$\{g \text{ em } \mathcal{C}(G,\Omega) : d(f(z),g(z)) < \delta, \ \forall \ z \in K\} \subset \mathcal{O}$$

b) Uma seqüência (f_n) em $(\mathcal{C}(G,\Omega),\rho)$ converge para f se e somente se (f_n) converge para f uniformemente em todo subconjunto compacto de G.

Demonstração: (a) Se $\mathcal{O}$ é aberto e $f \in \mathcal{O}$, então para algum $\epsilon > 0$, $\{g : \rho(f,g) < \epsilon\} \subset \mathcal{O}$. Pela primeira parte do lema anterior, existe um $\delta > 0$ e um compacto K tal que $\mathcal{O}$ cumpre a condição requerida. Reciprocamente, se $\mathcal{O}$ tem a propriedade estabelecida e $f \in \mathcal{O}$, então pela segunda parte do lema anterior, temos um $\epsilon > 0$ tal que $\{g : \rho(f,g) < \epsilon\} \subset \mathcal{O}$. Logo, $\mathcal{O}$ é aberto.

(b) Fica a cargo do leitor. □

Proposição 2.0.6 *Um conjunto $\mathcal{F}$ é normal se e somente se tem fecho compacto.*

Demonstração: Seja (f_n) uma sequência em $\overline{\mathcal{F}}$. Seja $\epsilon > 0$ tal que, para todo n, existe uma sequência g_n em $\mathcal{F}$ tal que $\rho(f_n, g_n) < \frac{1}{n}$. Como $g_n \subset \mathcal{F}$ é normal, então existe uma subsequência (g_{n_k}) tal que $g_{n_k} \to g$. Como $\rho(f_{n_k}, g_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$, então $f_{n_k} \to g$. Logo, $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto.

Reciprocamente, seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{F}$ e, consequentemente, em $\overline{\mathcal{F}}$. Como $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto, existe (f_{n_i}) em $\overline{\mathcal{F}}$ tal que (f_{n_i}) converge para f. Logo, pela proposição 2.0.4, (f_{n_i}) converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathcal{F}$ e, portanto, concluimos que $\mathcal{F}$ é normal.

$\square$

Proposição 2.0.7 *Um conjunto $\mathcal{F}$ é normal se e somente se para todo compacto $K \subset G$ e um número real $\delta > 0$ existem funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$ em $\mathcal{F}$ tal que para todo f em $\mathcal{C}(G, \Omega)$ existe pelo menos um inteiro $k, 1 \leq k \leq n$, com*

$$sup\{d(f(z), f_k(z)) : z \in K\} < \delta.$$

Demonstração: Suponha que $\mathcal{F}$ é normal e sejam $K \subset G$ um conjunto compacto e $\delta > 0$ dados. Pelo lema (2.0.2) existe um número real $\epsilon > 0$ tal que se $f,\ g \in \mathcal{F}$, $\rho(f, g) < \epsilon$ implica $sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta$. Mas, como $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto, existem $g_1, ..., g_n \in \overline{\mathcal{F}}$ tais que

$$\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(g_i, \frac{\epsilon}{2})$$

.

Por outro lado, para todo i, existe $f_i \in \mathcal{F}$ tal que $\rho(f_i, g_i) < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $h \in \mathcal{F}$. Dessa forma, existe i tal que $\rho(h_i, g_i) < \frac{\epsilon}{2}$. Logo,

$$\rho(h, f_i) \leq \rho(h, g_i) + \rho(g_i, f_i) < \epsilon$$

Logo, $h \in B(f_i, \epsilon)$.

Portanto, existem $f_1, \ldots, f_n$ em $\mathcal{F}$ tal que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{f; \rho(f, f_k) < \epsilon\}.$$

Mas, pela escolha de ϵ temos

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{f; d(f(z), f_k(z)) < \delta, z \in K\};$$

isto é, $\mathcal{F}$ satisfaz a condição da proposição.

Para o recíproco, suponha que $\mathcal{F}$ cumpre a propriedade estabelecida. Temos que $\overline{\mathcal{F}}$ também satisfaz a condição, portanto $\overline{\mathcal{F}}$ é fechado. Mas, como $\mathcal{C}(G, \Omega)$ é completo, então $\overline{\mathcal{F}}$ é completo. Logo, usando novamente o lema (2.0.2), temos que $\overline{\mathcal{F}}$ é totalmente limitado. Assim, $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto e portanto, normal.

□

Para todo $n \geq 1$ seja (X_n, d_n) um espaço métrico. Seja $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ o produto cartesiano dos X_n, isto é, $X = \{\xi = (x_n) : x_n \in X_n \ \forall \ n \geq 1\}$. Para $\xi = (x_n)_{n \geq 1}$ e $\eta = (y_n)_{n \geq 1}$ em X, definimos

$$d(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Proposição 2.0.8 $\left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, d\right)$ *com d definida anteriormente, é um espaço métrico. Além do mais, se $\xi^k = (x_n^k)_{n=1}^{\infty}$ é um elemento de $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, então $\xi^k \to \xi = (x_n)$ se e somente se $x_n^k \to x_n$ para cada n.*

Temos também que, se cada (X_n, d_n) é compacto, então X é compacto.

Demonstração: Claramente, d é uma métrica. Suponha $d(\xi^k, \xi) \to 0$; como

$$\frac{d_n(x_n^k, x_n)}{1 + d_n(x_n^k, x_n)} \leq 2^n d(\xi^k, \xi)$$

temos que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{d_n(x_n^k, x_n)}{1 + d_n(x_n^k, x_n)} = 0.$$

Então $x_n^k \to x_n$ para cada $n \geq 1$.

Suponha agora que $\lim_{k\to\infty} d_n(x_n^k, x_n) = 0$. Logo, para todo $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ temos que $\frac{d_n(x_n^k,x_n)}{1+d_n(x_n^k,x_n)} < \epsilon$ implica que $d(\xi^k, \xi) < \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n\epsilon = \epsilon$. Portanto, $\xi^k \to \xi$. □

Lema 2.0.3 (Cobertura de Lebesgue) *Se (X, d) é sequencialmente compacto e $\mathcal{G}$ é uma cobertura aberta de X então existe um $\epsilon > 0$ tal que se x está em X, existe um conjunto G em $\mathcal{G}$ com $B(x, \epsilon) \subset G$.*

Demonstração: Ver em [2]. □

Proposição 2.0.9 *Suponha que $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, \Omega)$ é equicontínuo em cada ponto de G. Então $\mathcal{F}$ é equicontínuo em cada subconjunto compacto de G.*

Demonstração: Sejam $K \subset G$ compacto e $\epsilon > 0$ fixo. Então para cada w em K existe um número real $\delta_w > 0$ tal que

$$d(f(w'), f(w)) < \frac{1}{2}\epsilon$$

para toda f em $\mathcal{F}$ sempre que $|w - w'| < \delta_w$. O conjunto $\{B(w, \delta_w) : w \in K\}$ forma uma cobertura aberta de K. Pelo lema da Cobertura de Lebesgue, existe um $\delta > 0$ tal que para cada z em $K, B(z, \delta)$ está contida em um dos conjuntos desta cobertura. Logo se z e z' estão em K e $|z-z'| < \delta$ existe w em K tal que $z' \in B(z, \delta) \subset B(w, \delta_w)$. Isto é, $|z-w| < \delta_w$ e $|z'-w| < \delta_w$. Isto implica $d(f(z), f(w)) < \frac{1}{2}\epsilon$ e $d(f(z'), f(w)) < \frac{1}{2}\epsilon$. Portanto $d(f(z), f(z')) < \epsilon$ e $\mathcal{F}$ é equicontinuo sobre K. □

Demonstração do Teorema de Arzela-Ascoli: Suponha que $\mathcal{F}$ é normal. Temos que para cada z em G a aplicação $\mathcal{C}(G, \Omega) \to \Omega$ definida por $f \to f(z)$ é contínua. Pela proposição (2.0.6), $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto e, com isso, sua imagem é compacta em Ω e temos provada a parte (a). Para mostrar (b) fixe um ponto z_0 em G e seja $\epsilon > 0$. Escolhamos $R > 0$ tal que $K = \overline{B}(z_0, R) \subset G$; logo K é compacto e pela proposição (2.0.7) temos que existem funções $f_1, \ldots, f_n$ em $\mathcal{F}$ tal que para cada f em $\mathcal{F}$ existe pelo menos um f_k tal que

$$sup\{d(f(z), f_k(z)) : z \in K\} < \frac{\epsilon}{3}. \quad (*)$$

Mas, como as f_k são contínuas, existe um $\delta, 0 < \delta < R$, tal que $|z - z_0| < \delta$ implica que

$$d(f_k(z), f_k(z_0)) < \frac{\epsilon}{3}$$

para $1 \leq k \leq n$. Portanto, se $|z - z_0| < \delta, f \in \mathcal{F}$ e escolhemos k de modo que cumpra-se (*), então

$$d(f(z), f(z_0)) \leq d(f(z), f_k(z)) + d(f_k(z), f_k(z_0)) + d(f_k(z_0), f(z_0)) < \epsilon$$

Isto é, $\mathcal{F}$ é equicontínuo em z_0.

Suponha agora que $\mathcal{F}$ satisfaz as condições (a) e (b). Devemos mostrar que $\mathcal{F}$ é normal. Seja (z_n) a sequência de todos os pontos em G com partes racionais (logo, para z em G e $\delta > 0$ existe um z_n tal que $|z - z_n| < \delta$). Para cada $n \geq 1$, seja

$$X_n = \overline{\{f(z_n) : f \in \mathcal{F}\}} \subset \Omega;$$

pela parte (a), (X_n, d) é um espaço métrico compacto. Logo, pela proposição (2.0.8), $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ é um espaço métrico compacto. Seja f em $\mathcal{F}$ e defina $\widetilde{f}$ por

$$\widetilde{f} = (f(z_n))_{n \geq 1}$$

Seja (f_k) uma seqüência em $\mathcal{F}$, então $(\widetilde{f_k})$ é uma seqüência em X. Logo, existe um ξ em X e uma subseqüência de $(\widetilde{f_k})$ que converge para ξ. Por conveniência, denote $\xi = lim\widetilde{f_k}$. Usando novamente a proposição (2.0.8) temos

$$\lim_{k \to \infty} f_k(z_n) = w_n \qquad (**)$$

onde $\xi = (w_n)$.

Vamos mostrar que (f_k) converge para uma função f em $\mathcal{C}(G, \Omega)$. Logo, por (**) esta função f terá de satisfazer $f(z_n) = w_n$.

Para achar a função f e mostrar que (f_k) converge para f, é suficiente mostrar que (f_k) é uma seqüência de Cauchy. Seja K um compacto em G e $\epsilon > 0$; pela proposição (2.0.7) é suficiente achar um inteiro J tal que para $k, j \geq J$,

$$sup\{d(f_k(z), f_j(z)) : z \in K\} < \epsilon.$$

Como K é compacto, $R = d(K, \partial G) > 0$. Seja $K_1 = \{z : d(z, K) \leq \frac{1}{2}R\}$; então K_1 é compacto e $K \subset intK_1 \subset K_1 \subset G$. $\mathcal{F}$ é equicontinuo em cada ponto de G, então pela proposição (2.0.9), $\mathcal{F}$ é equicontinuo em K_1. Escolhamos $\delta, 0 < \delta < \frac{1}{2}R$ tal que

$$d(f(z), f(z') < \frac{\epsilon}{3} \qquad (1)$$

para toda f em $\mathcal{F}$, sempre que z e z' estejam em K_1 e $|z - z'| < \delta$. Seja agora D a coleção de pontos em (z_n) que também são pontos em K_1; isto é,

$$D = \{z_n : z_n \in K_1\}.$$

Se $z \in K$, então existe um z_n tal que $|z - z_n| < \delta$; mas $\delta < \frac{1}{2}R$, então $d(z_n, K) < \frac{1}{2}R$ ou $z_n \in K_1$. Logo $\{B(w, \delta) : w \in D\}$ é uma cobertura aberta de K. Sejam $w_1, \ldots, w_n \in D$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(w_i, \delta).$$

Como $\lim_{k \to \infty} f_k(w_i)$ existe para $1 \leq i \leq n$ (por (**)) existe um inteiro J tal que, para $k \geq J$,

$$d(f_k(w_i), f_j(w_i)) < \frac{\epsilon}{3} \qquad (2)$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Seja z um ponto arbitrário em K e w_i tal que $|w_i - z| < \delta$. Para k e j maiores que J, (1) e (2) implicam

$$d(f_k(z), f_j(z)) \leq d(f_k(z), f_k(w_i)) + d(f_k(w_i), f_j(w_i)) + d(f_j(w_i), f_j(z)) < \epsilon.$$

Como z é arbitrário, o teorema está mostrado.

$\square$

2.0.3 O Espaço das Funções Analíticas

Seja G um subconjunto aberto do plano complexo. Denotamos $H(G)$ a coleção de funções analíticas em G. Podemos considerar $H(G)$ como um subconjunto de $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$

Definição 2.0.6 *Um conjunto $\mathcal{F} \subset H(G)$ é localmente limitado se para cada ponto a em G, existem constantes M e $r > 0$ tal que para toda f em $\mathcal{F}$,*

$$|f(z)| \leq M, \ \forall \ z \ \in B(a, r)$$

Equivalentemente, $\mathcal{F}$ é localmente limitado se existe um $r > 0$ tal que

$$sup\{|f(z)| : |z - a| < r, f \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Lema 2.0.4 *Um conjunto $\mathcal{F}$ em $H(G)$ é localmente limitado se e somente se para cada compacto $K \subset G$, existe uma constante M tal que*

$$|f(z)| \leq M$$

para toda f em $\mathcal{F}$ e z em K.

Teorema 2.0.4 *Uma família $\mathcal{F}$ em $H(G)$ é normal se e somente se $\mathcal{F}$ é localmente limitado.*

Demonstração: Suponha que $\mathcal{F}$ é normal mas não é localmente limitado. Então, existe um conjunto compacto $K \subset G$ tal que $sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \mathcal{F}\} = \infty$. Isto é, existe uma seqüência (f_n) em $\mathcal{F}$ tal que $sup\{|f(z)| : z \in K\} \geq n$. Como $\mathcal{F}$ é normal, existe uma função analítica f e uma subseqüência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k} \to f$. Mas, isto implica que $sup(|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} \to 0$ quando $k \to \infty$. Se $|f(z)| \leq M$, para z em K,

$$n_k \leq sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} + M;$$

o qual é absurdo, pois o lado direito converge para M.

Suponha agora que $\mathcal{F}$ é localmente limitado. Vamos usar o Teorema de Arzela-Ascoli para mostrar que $\mathcal{F}$ é normal. Temos satisfeita a condição (a) do Teorema de Arzela-Ascoli, pois $\overline{\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}}$ é limitado e fechado. Vamos mostrar então que $\mathcal{F}$ é equicontínuo em cada ponto de G. Fixe um ponto a em G e $\epsilon > 0$; pela hipótese, existe um $r > 0$ e $M > 0$ tal que $\overline{B}(a, r) \subset G$ e $|f(z)| \leq M$, para todo z

em $\overline{B}(a,r)$ e toda f em $\mathcal{F}$. Temos $|z-a|<\frac{1}{2}r$ e $f\in\mathcal{F}$; então usando a Fórmula de Cauchy para $\gamma(t)=a+re^{it}, 0\leq t\leq 2\pi$,

$$|f(a)-f(z)|\leq\left|\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-a)}dw-\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z)}dw\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma(\frac{f(w)}{(w-a)}-\frac{f(w)}{(w-z)})dw\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma\frac{f(w)(a-z)}{(w-a)(w-z)}dw\right|\leq\frac{2M}{r}|a-z|$$

Fazendo $\delta<min\{\frac{1}{2}r,\frac{r}{4M}\epsilon\}$ segue que $|a-z|<\delta$ implica $|f(a)-f(z)|<\epsilon$ para toda f em $\mathcal{F}$.

□

Observação 2.0.1 *Este Teorema também é chamado de Teorema de Montel.*

Teorema 2.0.5 (Teorema de Schottky) *Dados α e $\beta, 0<\alpha<\infty$ e $0\leq\beta\leq 1$, existe $C(\alpha,\beta)$ tal que se f é analítica em uma região simplesmente conexa contendo $\overline{B}(0,1)$ a qual omite os valores 0 e 1 e tal que $|f(0)|\leq\alpha$, então $|f(z)|\leq C(\alpha,\beta)$ para $2\leq\alpha<\infty$ e $|z|\leq\beta$.*

Para a demonstração desse Teorema, precisaremos dos seguintes resultados.

Definição 2.0.7 *Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções analíticas em uma região contendo o fecho do disco $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ e satisfazendo $f(0)=0$ e $f'(0)=1$. Definimos $\lambda(f)=sup\{r:f(D)$ contém um disco de raio $r\}$. A constante de Landau é definida por $L=inf\{\lambda(f):f\in\mathcal{F}\}$.*

Proposição 2.0.10 *Seja $f\in\mathcal{F}$, então $f(D)$ contém um disco de raio L, onde L é o número real definido acima.*

Demonstração: Basta mostrarmos que $f(D)$ contém um disco de raio $\lambda=\lambda(f)$. Para cada n, existe um ponto α_n em $f(D)$ tal que $B\left(\alpha_n,\lambda-\frac{1}{n}\right)\subset f(D)$, isto é, tal que se $|\alpha-\alpha_n|<\lambda-\frac{1}{n}$ então $\alpha\in f(D)$. Como $\alpha_n\in f(D)\subset f(\overline{D})$, então existe um ponto $\alpha \in f(\overline{D})$ e uma subseqüência (α_{n_k}) tal que $\alpha_{n_k} \to \alpha$, pois $f(\overline{D})$ é compacto. Sem perda de generalidade assumimos que $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$.

Se $|w-\alpha| < \lambda$, escolhemos n_0 tal que $|w-\alpha| < \lambda - \frac{1}{n_0}$. Assim, existe $n_1 > n_0$ tal que $|\alpha_n - \alpha| < \lambda - \frac{1}{n_0} - |w-\alpha|$, para $n \geq n_1$. Portanto, $|w-\alpha_n| < |w-\alpha| + |\alpha - \alpha_n| < \lambda - \frac{1}{n_0} < \lambda - \frac{1}{n}$, se $n \geq n_1$. Logo, $w \in B\left(\alpha_n, \lambda - \frac{1}{n}\right) \subset f(D)$. Como w era arbitrário, segue que $B(\alpha, \lambda) \subset f(D)$. □

Corolário 2.0.1 *Se f é analítica em uma região que contém $\overline{B}(0,R)$, então $f(B(0,R))$ contém um disco de raio $R|f'(0)|L$.*

Lema 2.0.5 *Seja $G \subset \mathbb{C}$ uma região simplesmente conexa e f uma função analítica em G que não assume os valores 0 e 1. Então existe uma função analítica g em G tal que $f(z) = -exp(i\pi cosh[2g(z)])$.*

Demonstração: Já que f não assume 0, existe l, ramo de $log f$, definido em G, isto é, $exp\ l = f$. Seja $F(z) = (2\pi i)^{-1} l(z)$. Como $f(a) \neq 1$, para todo $a \in G$ temos que $F(a) \neq n$, n inteiro qualquer. Definimos $H(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z) - 1}$ e $H(z) \neq 0$. Assim, é possível definir g, um ramo de $log H$ em G.

Assim, temos: $cosh(2g) + 1 = \frac{1}{2}(e^{2g} + e^{-2g}) + 1 = \frac{1}{2}(e^g + e^{-g})^2 = \frac{1}{2}(H + \frac{1}{H})^2 = \frac{1}{2}(2\sqrt{F})^2 = 2F = \frac{1}{\pi i} l$. Logo, $l = \pi i cosh(2g) + \pi i$. Dessa forma,

$$f = e^l = exp(\pi i cosh(2g) + \pi i) = exp(\pi i cosh(2g)).exp(\pi i) = -exp(\pi i cosh[2g]).$$

□

Lema 2.0.6 *Sejam G, f e g como no lema anterior. Então $g(G)$ não contém discos de raio 1.*

Demonstração: Sejam n um inteiro positivo e m um inteiro qualquer. suponhamos que exista $a \in G$ tal que $g(a) = \pm log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2} i m\pi$. Assim temos

$$2cosh(2g(a)) = e^{2g(a)} + \ e^{-2g(a)} = e^{im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} + e^{-im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} =$$

$$(-1)^m[(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2 + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2] = (-1)^m[2(2n-1)].$$

Logo, $cosh[2g(a)] = (-1)^m(2n-1)$ e $2n-1$ é ímpar. Portanto, $f(a) = 1$ e g não pode assumir os valores

$$\{\pm log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \frac{1}{2}im\pi; n \geq 1,\ n \in \mathbb{N},\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

Os pontos acima formam os vértices de um reticulado do plano.

A altura de um retângulo qualquer é $|\frac{1}{2}im\pi - \frac{1}{2}i(m+1)\pi| = \frac{1}{2}\pi < \sqrt{3}$.

A largura é $log(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) - log(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) > 0$. Como $\varphi(x) = log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) - log(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$ é uma função decrescente, a largura de um retângulo é menos que $\varphi(1) = log(1+\sqrt{2}) < loge = 1$. Assim, a diagonal de um retângulo qualquer é menor que 2, logo, todo disco fechado de raio 1 intercepta o reticulado. Portanto, temos o resultado.

$\square$

Demonstração do Teorema de Schottky:

É necessário provar apenas para $2 \leq \alpha < \infty$. A prova é dividida em dois casos:

<u>1^o *Caso*</u>

Suponhamos que $\frac{1}{2} \leq |f(0)| \leq \alpha$. Seja l um ramo de $logf$. Temos que $0 \leq Im\ l(0) < 2\pi$. Assim

$$|F(0)| = \frac{1}{2\pi}|log|f(0)| + iIml(0)| \leq \frac{1}{2\pi}log\alpha + 1$$

pois

$$e^l = f \Rightarrow e^{Re(l)+iIm(l)} = |f|e^{iargf} \Rightarrow e^{Re(l)}.e^{iIm(l)} = |f|e^{iargf} \Rightarrow Im(l) = arg(f)$$

e

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2\pi i}l \Rightarrow F(0) = \frac{1}{2\pi i}l(0) \Rightarrow |F(0)| = \frac{1}{2\pi}|l(0)| = \frac{1}{2\pi}|logf(0)| \\ = \frac{1}{2\pi}|log(|f(0)|e^{iargf(0)})| = \frac{1}{2\pi}|log|f(0)| + \\ +i\ argf(0)| = \frac{1}{2\pi}|log|f(0)| + i\ Im\ l(0)| \leq \frac{1}{2\pi}log\alpha + 1. \end{aligned}$$

Seja $C_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\ log\alpha + 1$. Por outro lado,

$$|\sqrt{F(0)} \pm \sqrt{F(0)-1}| \leq |\sqrt{F(0)}| + |\sqrt{F(0)-1}|.$$

Como $|\sqrt{F(0)}| = |exp\,\frac{1}{2}\,logF(0)| = |exp\left(\frac{1}{2}\,log(|F(0)|e^{i\theta})\right)| = |exp\left(\frac{1}{2}\,log|F(0)| + \frac{i\theta}{2}\right)| = |exp\left(\frac{1}{2}\,log|F(0)|\right)|$, temos

$$|\sqrt{F(0)} \pm \sqrt{F(0)-1}| \leq exp\left(\frac{1}{2}\,log|F(0)|\right) + exp\left(\frac{1}{2}\,log|F(0)-1|\right) =$$

$$= |F(0)|^{\frac{1}{2}} + |F(0)-1|^{\frac{1}{2}} \leq C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + (C_0(\alpha)+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Seja $C_1(\alpha) = C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + (C_0(\alpha)+1)^{\frac{1}{2}}$. Assim, se $|H(0)| \geq 1$ e $0 \leq Img(0) < 2\pi$, então

$$|g(0)| = |log|H(0)| + i\ Img(0)| \leq |log|H(0)|| + 2\pi \leq log\ C_1(\alpha) + 2\pi.$$

Se

$$|H(0)| < 1, |g(0)| \leq -log|H(0)| + 2\pi = log\left(\frac{1}{|H(0)|}\right) + 2\pi =$$

$$= log\ |\sqrt{F(0)} + \sqrt{F(0)-1}| + 2\pi \leq log\ C_1(\alpha) + 2\pi.$$

Seja $C_2(\alpha) = log\ C_1(\alpha) + 2\pi$.

Se $|a| < 1$ então $g(B(a, 1-|a|))$ contém um disco de raio $L(1-|a|)|g'(a)|$. Pelo lema (2.0.6), $g(B(0,1))$ não contém discos de raio 1. Portanto $|g'(a)| < [L(1-|a|)]^{-1}$ para $|a| < 1$.

Para $|a| < 1$ seja $\gamma = [0, a]$. Então

$$|g(a)| \leq |g(0)| + |g(a) - g(0)| \leq C_2(\alpha) + |\int_\gamma g'(z)dz| \leq$$

$$\leq C_2(\alpha) + |a|max\{|g'(z)| : z \in [0,a]\} \leq C_2(\alpha) + \frac{|a|}{L(1-|a|)}.$$

Seja

$$C_3(\alpha, \beta) = C_2(\alpha) + \beta[L(1-\beta)]^{-1}.$$

Assim $|g(z)| \leq C_3(\alpha, \beta)$ se $|z| \leq \beta$. Portanto

$$|z| \leq \beta \Rightarrow |f(z)| = |exp[\pi i\ cosh\ 2g(z)]| \leq$$

$$\leq exp[\pi|cosh\ 2g(z)|] \leq [\pi e^{2|g(z)|}] \leq exp[\pi e^{2C_3(\alpha,\beta)}].$$

Definimos

$$C_4(\alpha,\beta) = exp\{\pi exp[2C_3(\alpha,\beta)]\}.$$

<u>2^o *Caso*</u>

Suponhamos $0 < |f(0)| < \frac{1}{2}$. Então $1 - f$ satisfaz as condições do caso 1. De fato:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} < 1 - |f(0)| < |1 - f(0)| \leq 1 + |f(0)| \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < \alpha$$

pois $\alpha \geq 2$.

Portanto $|1 - f(z)| \leq C_4(2,\beta)$ se $|z| \leq \beta$ e assim $|f(z)| \leq 1 + C_4(2,\beta)$. Logo basta definirmos

$$C(\alpha,\beta) = max\{C_4(\alpha,\beta), 1 + C_4(2,\beta)\}.$$

$\square$

Corolário 2.0.2 *Seja f analítica numa região simplesmente conexa contendo $\overline{B}(0,R)$ e suponhamos que f não assume os valores 0 e 1. Se $C(\alpha,\beta)$ é a constante do Teorema de Schottky e $|f(0)| \leq \alpha$ então $|f(z)| \leq C(\alpha,\beta)$ para $|z| \leq \beta R$.*

Teorema 2.0.6 (Teorema de Montel) *Se $\mathcal{F}$ é uma família de funções analíticas em uma região G na qual toda função $f \in \mathcal{F}$ não assume os valores 0 e 1, então $\mathcal{F}$ é normal.*

Demonstração: Fixemos $z_0 \in G$ e consideremos

$$\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| < 1\},\ \mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \geq 1\} \text{ e } \mathcal{F} = \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$$

Mostremos que $\mathcal{G}$ é normal no conjunto das funções analíticas e $\mathcal{H}$ é normal em $C(G,\mathbb{C})$.

Para obtermos a normalidade de $\mathcal{G}$, pelo teorema (2.0.4), basta mostrarmos que $\mathcal{G}$ é localmente limitada.

Sejam $a \in G$ e γ uma curva em G de z_0 até a. Sejam $D_0, D_1, ..., D_n$ discos em G com centros $z_0, z_1, ..., z_n = a$ em γ e tais que z_{k-1} e z_k estão em $D_{k-1} \cap D_k$ para $1 \leq k \leq n$ e $\overline{D_k} \subset G$.

Aplicamos o corolário do teorema de Schottky (corolário (2.0.2)) para D_0 e f em $\mathcal{G}$ ($D_0 = B(z_0, r)$ e $R > r$ é tal que $\overline{B}(z_0, R) \subset G$ então $|f(z)| \leq C(1, \beta)$ para z em D_0 e f em G quando β é escolhido com $r < \beta R$).

Segue que existe C_0 tal que $|f(z)| \leq C_0$ para z em D_0 e f em G. Assim, $\mathcal{G}$ é limitada por uma constante C_0 em D_0. Continuando, nós temos que $\mathcal{G}$ é limitada em D_n. Já que a era arbitrário, isto dá que $\mathcal{G}$ é localmente limitada e, portanto, $\mathcal{G}$ é normal no conjunto das analíticas.

Agora, consideremos $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \geq 1\}$. Se $f \in \mathcal{H}$ então $\frac{1}{f}$ é analítica em G, pois f não se anula. Já que f não assume o valor 1, então $\frac{1}{f}$ também não assume. Além disso, $|(\frac{1}{f})(z_0)| \leq 1$, portanto, $\tilde{\mathcal{H}} = \{\frac{1}{f} : f \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{G}$ e $\tilde{\mathcal{H}}$ é normal.

Assim, se $(f_n)_n$ é uma sequência em $\mathcal{H}$, então existe $(f_{n_k})_k$ tal que $(\frac{1}{f_{n_k}})_k$ converge para uma aplicação analítica h ou para infinito. De acordo com o teorema de Hurwitz, $h \equiv 0$ ou h nunca se anula. Se $h \equiv 0$, então $\lim\limits_k f_{n_k}(z) = \infty$ uniformemente em compactos de G. Se h nunca se anula, então $\frac{1}{h}$ é analítica, e segue que $\lim\limits_k f_{n_k}(z) = \dfrac{1}{h(z)}$ uniformemente em compactos de G. Se $(\frac{1}{f_{n_k}})_k$ converge para infinito, temos que $\lim\limits_k f_{n_k}(z) = 0$ uniformemente em compactos de G.

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$. Então $|f_n(z_0)| < 1$ ou $|f_n(z_0)| \geq 1$, $\forall\, n$.

Assim, $\{n, f_n \in \mathcal{G} \cup \mathcal{H}\} = \mathbb{N}$, ou seja, $\{n, f_n \in \mathcal{G}\}$ ou $\{n, f_n \in \mathcal{H}\}$ são infinitos.

Dessa forma, existe uma sequência de inteiros $\{n_1 < n_2 < ...\}$, onde $(f_{n_i}) \in \mathcal{G}$ ou $(f_{n_i}) \in \mathcal{H}$.

Logo, (f_{n_i}) é uma subsequência que converge para uma função analítica ou para infinito. Portanto, $\mathcal{F}$ é normal.

$\square$

Capítulo 3

Endomorfismos da Esfera de Riemann

Neste capítulo, iremos estudar a dinâmica na Esfera de Riemann. A classe de funções com as quais iremos trabalhar será dada pelas funções $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ analíticas que não são lineares e nem constantes. Tais funções são chamadas de endomorfismos da esfera.

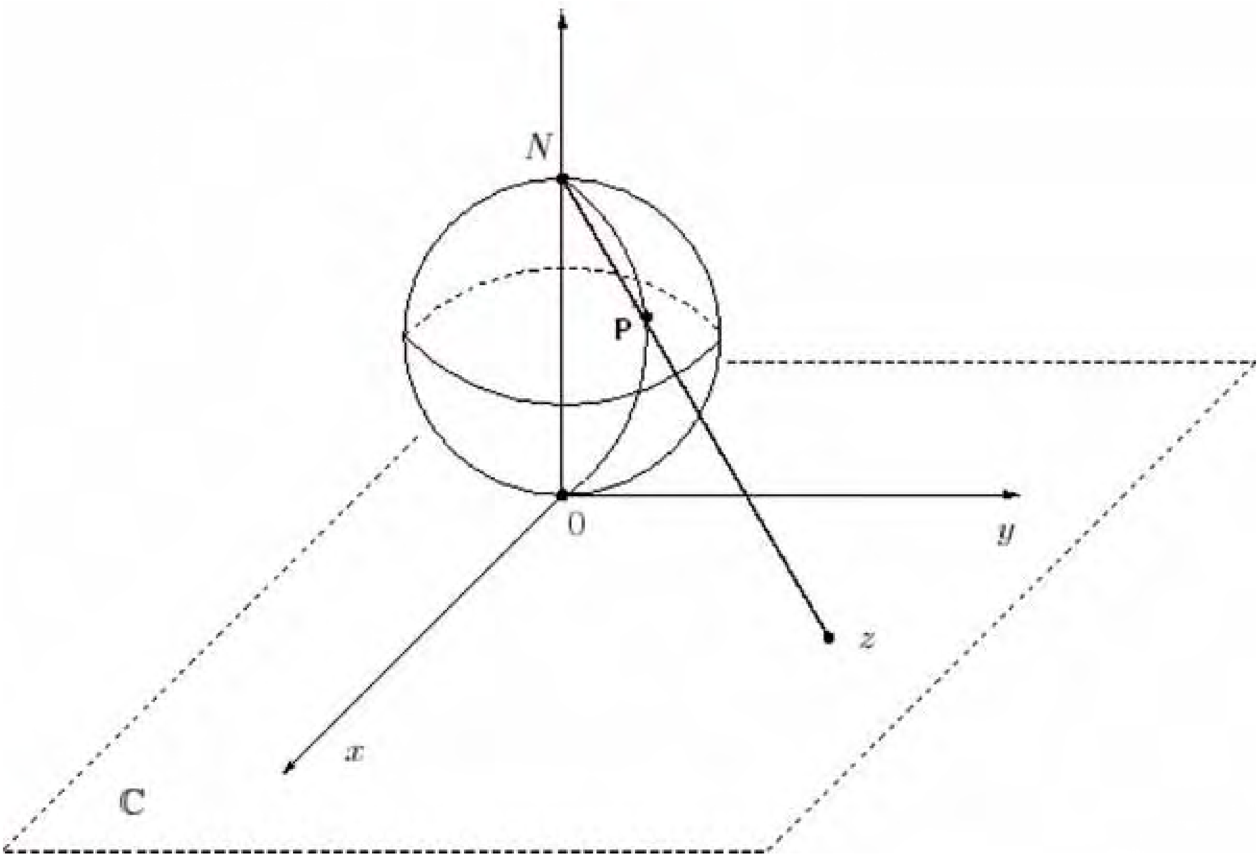
3.0.4 Definição de $\overline{\mathbb{C}}$: A Esfera de Riemann

Seja $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ a esfera unitária do $\mathbb{R}^3$ e considere $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ o plano complexo estendido.

Provaremos agora que S^2 é homeomorfa a $\overline{\mathbb{C}}$ através da sua projeção estereográfica no plano complexo.

Seja $N = (0, 0, 1)$ o "polo norte" de S^2 e identifiquemos o plano complexo $\mathbb{C}$ com o plano $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, que intercepta S^2 ao longo do Equador $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Dessa forma, cada número complexo $z = x + iy$ se identifica com o ponto $(x_1, x_2, 0)$.

Agora, para cada $z \in \mathbb{C}$ considere a reta em $\mathbb{R}^3$ que passa por N e por z. Essa reta intercepta a esfera em exatamente um ponto $P \neq N$. Observemos que, se $|z| < 1$, então P está no hemisfério sul, se $|z| = 1$, então $P = z$ e, se $|z| > 1$, então P está no hemisfério norte.



Se fizermos $z \to \infty$, temos que $P \to N$ e, com isso, chamamos N de ponto no infinito $\{\infty\}$ e identificamos $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com S^2.

De fato, considere a aplicação $\pi : \mathbb{C} \to S^2 - N$, onde $\pi(x+iy) = (x_1, x_2, x_3) = P$.

A equação da reta que passa pelos pontos z e N é dada por

$$\{(x, y, 0) + t(-x, -y, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \{((1-t)x, (1-t)y, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

O ponto P é um ponto da reta acima que pertence à esfera e, para obtê-lo, precisamos calcular o valor de t que nos dá um ponto em S^2. Agora, um ponto dessa reta está em S^2 quando

$$(1-t)^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t^2 = 1$$

Daí,

$$(1-t)^2(x^2 + y^2) + t^2 = 1$$

$$(1-t)^2|z|^2 = 1-t^2$$

$$(1-t)^2|z|^2 = (1-t)(1+t)$$

Como $P \neq N$ e $t \neq 1$, temos:

$$(1-t)|z|^2 = 1+t$$

$$t = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

Agora, substituindo esse valor de t na equação da reta, obtemos:

$$x_1 = \left(1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)x = \frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, \;\; pois \;\; 2Re(z) = z+\overline{z}$$

$$x_2 = \left(1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)y = \frac{-i(z-\overline{z})}{|z|^2+1}, \;\; pois \;\; 2Im(z) = -i(z-\overline{z})$$

$$x_3 = t = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

Sendo assim, temos o ponto

$$P = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, \frac{-i(z-\overline{z})}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \;\in\; S^2$$

Assim, fica claro que se $z \to \infty$ então $P \to N$.

Como essa aplicação é uma bijeção, ela possui uma inversa $\pi^{-1} : S^2 - N \to \mathbb{C}$ tal que $\pi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = x + iy$, onde $((1-t)x, (1-t)y, t) = (x_1, x_2, x_3)$.

Portanto,

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

Dessa forma,

$$\pi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3})$$

Essa aplicação inversa é conhecida pelo nome de *projeção estereográfica.*

Sendo assim, obtivemos uma bijeção π entre $\overline{\mathbb{C}}$ e S^2 definida por

$$\pi(\infty) = N \quad e \quad \pi(z) = \Big(\frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{-i(z - \overline{z})}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\Big)$$

onde $z = x + iy$ e cuja inversa π^{-1} é $\pi^{-1}(N) = \infty$ e $\pi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$.

Portanto, $\overline{\mathbb{C}}$ e S^2 são homeomorfos.

Podemos agora definir uma distância entre os pontos de $\overline{\mathbb{C}}$ da seguinte maneira:

Tome z_1, $z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ e seja $d(z_1, z_2)$ a distância Euclidiana entre os correspondentes pontos em $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ denotados por (x_1, x_2, x_3) e (x_1', x_2', x_3'), respectivamente. Assim,

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{2 - 2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')}$$

Substituindo

$$x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \; x_2 = \frac{-i(z - \overline{z})}{|z|^2 + 1} \; e \; x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \tag{3.1}$$

obtemos a seguinte expressão:

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{[(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)]^{\frac{1}{2}}}, \; para \; z_1, \; z_2 \neq \infty$$

No caso em que $z_2 = \infty$, o ponto correspondente sobre S^2 é $(0, 0, 1)$. Sendo assim, através de (3.1), temos

$$d(z_1, \infty) = \frac{2}{(1 + |z_1|)^{\frac{1}{2}}}$$

Para $z_1 = \infty$ e $z_2 = \infty$, podemos dizer que $d(\infty, \infty) = 0$.

Pode-se agora ver que $d : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$, dada por

$$d(z,w)=\begin{cases}\frac{2|z-w|}{[(1+|z|^2)(1+|w|^2)]^{\frac{1}{2}}}, & z,w\in\mathbb{C};\\ \frac{2}{(1+|z_1|)^{\frac{1}{2}}}, & z\in\mathbb{C} \text{ e } w=\infty;\\ 0, & z=\infty \text{ e } w=\infty.\end{cases}$$

é uma métrica definida em $\overline{\mathbb{C}}$ que faz com que os espaços métricos $(\overline{\mathbb{C}},d)$ e $(S^2,|\ |)$ sejam isométricos. Logo, $\overline{\mathbb{C}}$ é um espaço métrico compacto (portanto completo) chamado de Esfera de Riemann.

Definição 3.0.8 *Seja $f: U\to\overline{\mathbb{C}}$ uma função contínua, onde $U\subset\overline{\mathbb{C}}$ é um aberto. Diremos que f é holomorfa em $z_0\in U$ se uma das quatro condições abaixo for verificada:*

(a)$z_0\neq\infty$, $f(z_0)\neq\infty$ e f é holomorfa em z_0 no sentido usual.

(b)$z_0\neq\infty$, $f(z_0)=\infty$ e $1/f(z)$ é holomorfa em z_0.

(c)$z_0=\infty$, $f(z_0)\neq\infty$ e $f(1/z)$ é holomorfa em 0.

(d)$z_0=\infty$, $f(z_0)=\infty$ e $1/f(1/z)$ é holomorfa em 0.

Observação 3.0.2 *1- Nos casos (b) e (d) convencionaremos que $1/f(w)=0$ se $f(w)=\infty$.*

2- Diremos que f é holomorfa em U se f for holomorfa em todos os pontos de U.

Teorema 3.0.7 *Seja $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ uma função holomorfa. Valem as seguintes propriedades:*

(a) Se $f(\overline{\mathbb{C}})\neq\overline{\mathbb{C}}$ então f é constante.

(b) Se f não é constante então $f|\mathbb{C}$ é uma função racional.

Demonstração: *Prova de (a):* Observemos em primeiro lugar que o teorema da aplicação aberta vale no contexto em que estamos trabalhando. Mais especificamente, se $g: U\to\overline{\mathbb{C}}$ é uma função holomorfa não constante, onde $U\subset\overline{\mathbb{C}}$ é um aberto conexo, então $g(U)$ é um aberto de $\overline{\mathbb{C}}$.

Seja então $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ uma função holomorfa tal que $f(\overline{\mathbb{C}})\neq\overline{\mathbb{C}}$. Suponhamos por absurdo que f não fosse constante. Neste caso, pelo teorema da aplicação aberta,

$f(\overline{\mathbb{C}})$ é um aberto de $\overline{\mathbb{C}}$. Por outro lado, $f(\overline{\mathbb{C}})$ é compacto, já que $\overline{\mathbb{C}}$ é compacto e f é contínua. Isto implica que $\overline{\mathbb{C}} - f(\overline{\mathbb{C}})$ é aberto em $\overline{\mathbb{C}}$. Desta maneira obtivemos dois abertos disjuntos de $\overline{\mathbb{C}}$, cuja união é $\overline{\mathbb{C}}$: $\overline{\mathbb{C}} = f(\overline{\mathbb{C}}) \cup (\overline{\mathbb{C}} - f(\overline{\mathbb{C}}))$. Como $\overline{\mathbb{C}}$ é conexo, um destes abertos é vazio. Como $f(\overline{\mathbb{C}}) \neq \emptyset$, concluimos que $\overline{\mathbb{C}} - f(\overline{\mathbb{C}}) = \emptyset$, ou seja, $f(\overline{\mathbb{C}}) = \overline{\mathbb{C}}$, contradição. Logo, f é constante.

Prova de (b): Primeiramente provaremos que para todo $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, o conjunto $f^{-1}(w_0)$ é finito. Para demonstrarmos este fato, usaremos o seguinte resultado: sejam $g, h : U \to \overline{\mathbb{C}}$ funções holomorfas, onde $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ é um aberto conexo. Se g e h coincidem num conjunto $A \subset U$, o qual tem um ponto de acumulação em U, então $g \equiv h$.

Fixemos então $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ e suponhamos por absurdo que $f^{-1}(w_0)$ seja infinito. Neste caso, como $\overline{\mathbb{C}}$ é compacto, o conjunto $f^{-1}(w_0)$ tem pelo menos um ponto de acumulação em $\overline{\mathbb{C}}$. Por outro lado, $ff^{-1}(w_0) \equiv \{w_0\}$, contra a hipótese de f não ser constante. Logo, $f^{-1}(w_0)$ é finito.

Seja $\{z_1, ..., z_n\} = f^{-1}(\infty) \cap \mathbb{C}$. Os pontos $z_1, ..., z_n$ são pólos de $g = f|\mathbb{C}$. Suponhamos que z_j seja um polo de ordem r_j de g, $1 \leq j \leq n$. Neste caso, podemos escrever que $g(z) = \tilde{g}(z)/(z - z_j)^{r_j}$, para z uma vizinhança perfurada de z_j, onde $\tilde{g}$ é holomorfa em z_j e $\tilde{g}(z_j) \neq 0$. Decorre daí que a função $z \mapsto (z - z_j)^{r_j} g(z) = \tilde{g}(z)$ é holomorfa numa vizinhança de z_j, $1 \leq j \leq n$. Isto implica que a função

$$h(z) = (z - z_1)^{r_1} ... (z - z_n)^{r_n} . g(z)$$

se estende a uma função inteira, a qual chamaremos também de h. Para concluir, basta provar que h é um polinômio. Para isto, é suficiente verificar que o limite $\lim\limits_{z \to \infty} h(z)$ existe em $\overline{\mathbb{C}}$. Isto não é difícil de ver, uma vez que sabemos que $\lim\limits_{z \to \infty} g(z) = f(\infty)$. Seja $\lim\limits_{z \to \infty} h(z) = l$. Se $l \neq \infty$, h será uma função inteira limitada, logo, será constante. Se $l = \infty$, h será um polinômio não constante. Em qualquer caso, g será uma função racional.

$\square$

Consideremos agora uma aplicação analítica $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ não constante e não linear, isto é, $f(\overline{\mathbb{C}}) = \overline{\mathbb{C}}$.

Nosso espaço é composto por funções da forma

$$f(z) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i z^i}{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j z^j}$$

onde a_i, $b_j \in \overline{\mathbb{C}}$, a_d, $b_m \neq 0$ e o grau de f é dado pelo $max(d, m)$.

Daqui por diante trabalharemos com aplicações racionais.

Podemos ver a seguir uma versão do teorema de Montel na esfera de Riemann, dada pelo teorema de Montel II, cuja demonstração é feita usando-se técnicas avançadas.

Teorema 3.0.8 (Teorema de Montel II) *Seja* $\mathcal{F} \subset C^{\circ}(U, \overline{\mathbb{C}})$ *uma família de funções racionais. Se nenhuma função em* $\mathcal{F}$ *assume os valores* 0*,* 1 *e* ∞ *então* $\mathcal{F}$ *é normal.*

Observação 3.0.3 *Os teoremas de Montel são muito úteis para provar as propriedades do Conjunto de Julia.*

Capítulo 4

Propriedades do Conjunto de Julia

Neste capítulo iremos demonstrar algumas propriedades dos Conjuntos de Julia em $\overline{\mathbb{C}}$, sendo que estas também são válidas no plano complexo $\mathbb{C}$.

Definição 4.0.9 *Um ponto $z \in \overline{\mathbb{C}}$ é um elemento do Conjunto de Fatou de f $(F(f))$ se existe uma vizinhança $U = U_z$ de z em $\overline{\mathbb{C}}$ tal que $\{f^n|U\}$ é uma família normal. O Conjunto de Julia de f $(J(f))$ é o complementar do Conjunto de Fatou.*

Observação 4.0.4 *O Conjunto de Fatou é aberto, pois se $z \in F$ então $U_z \subset F$. Consequentemente, o Conjunto de Julia é um conjunto fechado.*

Exemplo 4.0.1 *Consideremos a aplicação $f(z) = z^2$. Seja z_0 tal que $|z_0| < 1$. Então, existe uma vizinhança U de z_0, tal que $f^n|U$ converge para a constante 0, para todo $z \in U$. Portanto, o interior do círculo é um subconjunto de F. Analogamente, o exterior também é um subconjunto de F. Porém, em $|z| = 1$, $\{f^n\}$ não é equicontínuo, e, portanto, não é normal.*

De fato, vamos supor que $\{f^n\}$ é equicontínuo numa vizinhança U de z. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in U$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$, para todo n.

Dessa forma, sejam $x, y \in U$ tais que $|x - y| < \delta$, $|x| < 1$ e $|y| > 1$. Logo, $|x^{2^n} - y^{2^n}| \geq |y^{2^n}| - |x^{2^n}|$, com $|x^{2^n}| \to 0$ e $|y^{2^n}| \to +\infty$. Portanto, $|y^{2^n}| - |x^{2^n}| \to +\infty$, o que é uma contradição.

Portanto, $J(f) = S^1$.

Observação 4.0.1 *: Se considerarmos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = z^2$ é uma função polinomial e fizermos uma pequena modificação acrescentando um número complexo c, ficaremos com $f(z) = z^2 + c$. Assim, dependendo do valor de c, o conjunto de Julia deixa de ser uma circunferência e passa a ser algo extremamente complicado.*

Observemos então, o conjunto dos pontos do plano complexo que pertencem ao Conjunto de Julia, para a função acima, para alguns valores de c:

Fig. 1: Conjunto de Julia para $c = 0,02 + 0,15i$.

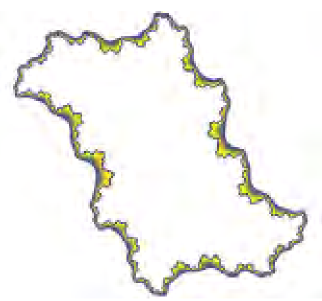


Fig. 2: Conjunto de Julia para $c = 0,0726 + 0,5511i$.

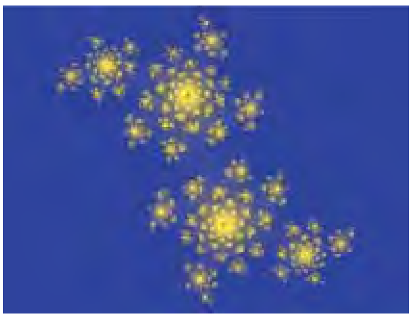


Fig. 3: Conjunto de Julia para $c = 0,081095 + 0,625501i$.

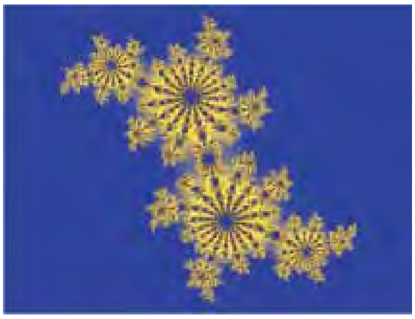


Fig. 4: Conjunto de Julia para $c = 0,086 + 0,65i$.

Teorema 4.0.9 *O Conjunto de Julia de f, onde f é uma aplicação racional de grau ≥ 2, tem as seguintes propriedades:*

1- $J(f)$ é um conjunto não vazio.

2- $J(f)$ é completamente invariante, isto é, $J(f) = f(J) = f^{-1}(J)$.

3- $J(f)$ é compacto.

4- Se $int(J(f)) \neq \emptyset$ então $J(f) = \overline{\mathbb{C}}$.

5- $J(f)$ é perfeito.

6- $J(f) = \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(z)}$, ou seja, o Conjunto de Julia é igual ao fecho do conjunto de pontos periódicos repulsores.

Demonstração: Para mostrarmos que $J(f)$ é não vazio, suponhamos que $J(f) = \emptyset$. Então, $F(f) = \overline{\mathbb{C}}$ e, portanto, $(f^{n_i})_i$ converge uniformemente a uma aplicação analítica limitada g. Assim, o grau de f^{n_i} tende ao mesmo tempo para ∞, pois $\#f^{n_i} = (\#f)^{n_i}$, e para o grau de g. De fato, temos que $f^{n_i} \to g$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe N tal que, para todo $i \geq N$, temos

$$|f^{n_i}(x) - g(x)| < \epsilon, \ \ \forall\ x \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Seja $i_0 \geq N$ fixo. Então,

$$|f^{n_{i_0}}(x) - g(x)| < \epsilon, \ \ \forall\ x \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Seja $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, $|w_0| > \epsilon$.

Então, $f^{n_{i_0}}(x) - g(x) = w_0$ não tem solução.

Logo, $\partial(f^{n_{i_0}} - g) = 0$. Portanto, $\partial f^{n_{i_0}} = \partial g$, para todo $i \geq N$.

Isso é uma contradição, pois o grau de g é finito.

Portanto, $J(f) \neq \emptyset$.

Agora, por definição, $F(f)$ é um conjunto aberto. Como f é uma aplicação contínua e aberta, temos que F é completamente invariante, pois, se $z \in F$ então $f(z) \in F$ e $f^{-1} \in F$.

Conseqüentemente, $J(f)$ é completamente invariante.

Além disso, como $J(f)$ é um conjunto fechado e, por estarmos em $\overline{\mathbb{C}}$, é limitado, concluimos que $J(f)$ é compacto.

Para demosntrarmos a propriedade 4, precisamos da seguinte proposição:

Proposição 4.0.11 *Seja $z \in J(f)$. Se U é uma vizinhança de z, então o conjunto $E_U = \overline{\mathbb{C}} - \bigcup_{n\geq 0} f^n(U)$ contém no máximo 2 pontos.*

Demonstração: Suponhamos que exista U tal que $\#E_U \geq 3$. Então, pelo Teorema de Montel II, $\{f^n|U\}$ é normal, e, portanto, $z \in F(f)$, o que é uma contradição.

□

Observação 4.0.5 *Podemos provar que os pontos excepcionais não pertencem ao Conjunto de Julia.*

Exemplo 4.0.2 *Consideremos um polinômio $p(z)$. O ponto ∞ é um ponto fixo, ou seja, $f(\infty) = \infty$ e ainda vale que $p^{-1}(\infty) = \{\infty\}$. Para $p(z)$, ∞ é um ponto fixo atrator, pois existe uma vizinhança U de ∞ tal que para $z \in U$, temos que $f^n \to \infty$, isto é, existe $R > 0$ tal que $|f^n(z)| \to \infty$, para todo z tal que $|z| > R$. Dessa forma, $J(p) \subset \mathbb{C}$. Como $\displaystyle\bigcup_{n\geq 0} p^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, isto é, deixa de cobrir somente o ∞, que está no $F(p)$, vemos que ∞ é um ponto excepcional.*

Mostremos agora que se $int(J(f)) \neq \emptyset$, então $J(f) = \overline{\mathbb{C}}$.

Seja U um domínio contido no interior de $J(f)$. Como $J(f)$ é invariante, temos que $\overline{\mathbb{C}} - E_U = \displaystyle\bigcup_{n\geq 0} f^n(U) \subset J(f)$, onde E denota o conjunto dos pontos excepcionais.

Sendo assim, como $J(f)$ é fechado e E contém no máximo 2 pontos, concluímos que devemos ter $E = \emptyset$ e, portanto, $J(f) = \overline{\mathbb{C}}$.

Consideremos o lema a seguir para demonstrarmos a propriedade 5:

Lema 4.0.7 *Se $a \in J(f)$, então existe $b \in J(f)$ tal que $a \in O^+(b)$, mas $b \notin O^+(a)$.*

Demonstração: *Caso 1:* Suponhamos que a não é periódico.

Seja $b \in f^{-1}(a)$. Então, $f(b) = a$ e, portanto, $a \in O^+(b)$. Se $b \in O^+(a)$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(a) = b$ e, então, $f(f^n(a)) = f(b) = a$ e a seria periódico, o que é um absurdo.

Caso 2: Suponhamos agora que a é periódico de período n.

Seja $S = f^n$ e consideremos a equação $S(z) = a$. Se a é a única solução da equação, temos

$$S(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = a$$

E assim,

$$f(z) - g(z)a = c(z-a)^n \Rightarrow \frac{f(z) - g(z)a}{g(z)} = \frac{c(z-a)^n}{g(z)} \Rightarrow S(z) - a = \frac{c(z-a)^n}{g(z)}$$

onde c é uma constante qualquer.

Seja $\epsilon > 0$ muito pequeno e $|z - a| < \epsilon$. Então,

$$|S^k(z) - a| = |S(S^{k-1}(z)) - a| = \frac{|c|^{\frac{n^k-1}{n-1}}|z-a|^{n^k}}{|g(S^{k-1}(z))|...|g(z)|}$$

Como $g(a) \neq 0$, temos

$$|c|^{\frac{n^k-1}{n-1}}|z-a|^{n^k} \leq |c|^{\frac{n^k-1}{n-1}}\epsilon^{n^k} = e^{\frac{n^k-1}{n-1}log|c| + n^k log\epsilon} =$$

$$= e^{n^k(log\epsilon + log|c|\frac{n^k-1}{n^k(n-1)})} \sim e^{n^k(log\epsilon + \frac{log|c|}{n-1})} \to 0$$

pois $log\epsilon + \frac{log|c|}{n-1} < 0$ e $e^{n^k} \to -\infty$.

Dessa forma, teríamos que $a \in F(S)$, o que é uma contradição. Logo, existe $b \neq a$ tal que $S(b) = a$ e $b \notin O^+(a)$, pois a é a única solução em $O^+(a)$.

□

Vamos mostrar agora que $J(f)$ é um conjunto perfeito:

Definição 4.0.10 *Um conjunto A é perfeito se ele for igual ao seu conjunto dos pontos de acumulação, ou seja, $A = A'$.*

Demonstração: Como $J(f)$ é fechado, segue que $J(f)' \subset J(f)$. Mostremos então que $J(f) \subset J(f)'$. Sejam $a \in J(f)$ e U uma vizinhança de a. Tomemos $b \in J(f) - O^+(a)$ e, assim, como b não pertence ao conjunto dos pontos excepcionais, existe k tal que $b \in f^k(U)$.

Seja $c \in U$ tal que $f^k(c) = b$. Temos que $c \neq a$, pois $b \notin O^+(a)$ e $c \in J(f)$, pois $J(f)$ é f^{-1}-invariante.

□

Finalmente, mostremos que $J(f) = \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(z)}$:

Demonstração: Sejam $z \in \overline{\mathbb{C}} - E$, $w \in J(f)$ e U uma vizinhança de w suficientemente pequena. Assim, $\bigcup_{n\geq 0} f^n(U)$ cobre $\mathbb{C}$- $\{2 \text{ pontos}\}$. Como $z \in \overline{\mathbb{C}} - E$, temos que existe n tal que $z \in f^n(U)$. Então, existe $u \in U$ tal que $u \in f^{-n}(z)$. Assim, $U \cap f^{-n}(z) \neq \emptyset$ e, portanto, w é ponto de aderência de $\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(z)$.

Vamos supor que $z \in J(f)$. Temos que $J(f) \subset \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(z)}$ e, como J é invariante, segue que $\overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(z)} \subset J(f)$.

Portanto, $J(f) = \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(z)}$.

□

□

Anexo

Teorema 4.0.10 (Teorema de Hurwitz) *Se as funções f_n são analíticas e diferentes de zero em uma região Ω, e se f_n converge para f uniformemente em todo subconjunto compacto de Ω, então f ou é identicamente nula ou nunca se anula em Ω.*

Demonstração: Suponha que f não seja identicamente nula. Os zeros de f estão em qualquer caso isolados. Para qualquer ponto $z_0 \in \Omega$, existe um número $r > 0$ tal que f está definido e é não nulo para $0 < |z - z_0| \leq r$. Em particular, $|f|$ tem um valor mínimo positivo sobre o círculo $|z - z_0| = r$, o qual denotamos por $\mathcal{C}$.

Segue que $\frac{1}{f_n}$ converge uniformemente para $\frac{1}{f}$ em C. Desde que $f_n' \to f'$, uniformemente em $\mathcal{C}$, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f_n'}{f_n} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'}{f} dz.$$

Mas as integrais da esquerda devem ser todas nulas, para que elas dêem o número de raízes da equação $f_n = 0$ em $\mathcal{C}$. Então, a integral da direita é nula, e consequentemente $f(z_0) \neq 0$. Para z_0 arbitrário, o teorema é válido.

$\square$

Teorema 4.0.11 *: Seja $\{f_n\}$ uma seqüência em $H(G)$ e f em $\mathcal{C}(G, \Omega)$ tal que $f_n \to f$. Então f é analítica e $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ para cada inteiro $k \geq 1$.*

Demonstração: Mostraremos que f é analítica aplicando o teorema de Morera. Seja T o triângulo contido dentro de um disco $D \subset G$. Temos que T é compacto, então $\{f_n\}$ converge para f uniformemente em T. Logo, $\int_T f = lim \int_T f_n = 0$ pois cada f_n é analítica. Assim, f é analítica em cada disco $D \subset G$; isto implica que f é analítica em G.

Para mostrar que $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$, seja $D = \overline{B}(a,r) \subset G$; então existe um número $R > r$ tal que $\overline{B}(a,R) \subset G$. Se γ é o círculo $|z-a| = R$, então pela formula integral de Cauchy,

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}}dw.$$

para z em D. Usando a estimativa de Cauchy,

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!M_nR}{(R-r)^{k+1}} \text{ para } |z-a| \leq r, \quad (*)$$

onde $M_n = sup\{|f_n(w) - f(w)| : |w-a| = R\}$. Mas, $f_n \to f$, então $limM_n - 0$. Logo, segue de (*) que $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformemente em $\overline{B}(a,r)$. Logo, se K é uma subconjunto compacto arbitrário de G e $0 < r < d(K, \partial G)$ então existem $a_1, \ldots, a_n$ em K tal que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(a_j, r)$. Como $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformemente em cada $B(a_j, r)$, então a convergência é uniforme em K. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Neto, A. L., **Funções de uma variável complexa**, segunda edição, IMPA, 1996

[2] Conway, J. B., **Functions of one Complex Variable**, second edition, Springer Verlag, 1978

[3] Da Silva, P. R., **Regularidade dos Conjuntos de Julia**, Dissertação de Mestrado, UFRGS, 1990.

[4] Sad, P. R. G., **Introdução à dinâmica das funções racionais na esfera de Riemann**, IMPA, 1983.

[5] Uceda, R. A., **Propriedades Topológicas dos Conjuntos de Julia**, Dissertação de Mestrado, UNESP-Ibilce, 2008.