

**Problemas de Riemann-Hilbert:
Estudo e Caracterização de
Polinômios Ortogonais**

Heron Martins Félix

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

**Problemas de Riemann-Hilbert:
Estudo e Caracterização de Polinômios Ortogonais**

Heron Martins Félix

Dissertação apresentada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga

São José do Rio Preto

2009

Heron Martins Félix

Problemas de Riemann-Hilbert:
Estudo e Caracterização de Polinômios Ortogonais

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, *campus* de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Walter dos Santos Motta Junior
UFU - Uberlândia

Prof.^a Dr.^a Eliana Xavier Linhares de Andrade
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 27 de Fevereiro de 2009.

Aguardo, tenso: será exatamente nesse mundo vasto que aprenderei a desfazer-me de mim, a fim de encontrar-me numa próxima estação. Perguntarei: quem é você? E então poderei responder: eu sou eu mesmo.

Aos meus pais,
Dedico.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, pela orientação no trabalho, pela disposição em me atender e pela sinceridade que sempre teve comigo.

À Prof. Dra. Eliana Xavier Linhares de Andrade, pelo afeto especial, pelos conselhos academicamente pessoais, pela atenção e pelo apoio, todos quase maternos.

À prof. Dra. Cleonice Fátima Bracciali, pela disposição em ajudar, pela orientação e pelos almoços perdidos juntos.

A todos os professores, em especial Maurílio, Masayoshi, Cláudio e Adalberto, pelos bons exemplos (matemáticos ou não).

Aos meus amigos, em especial Liliane, Cristian e Guilherme, pela amizade, cumplicidade, autenticidade e insanidade.

Aos amigos da pós, da dança e do rpg, pelas piadas e pela alegria que me proporcionam.

À Carol, por ter sugerido um estágio em polinômios ortogonais...

Aos meus pais, pelo afeto, perseverança, crenças e apoio incondicionais. E por tudo quanto é possível nessa vida.

Ao CNPq e à Capes, pelo auxílio financeiro.

Resumo

O estudo da obtenção de fórmulas assintóticas para polinômios ortogonais clássicos foi amplamente desenvolvido por Szegő. Recentemente, a necessidade de obtenção de assintóticas para polinômios, ortogonais com respeito a funções peso variadas, foi renovada devido a novos estudos na teoria de matrizes randômicas. Nestes estudos, uma das principais ferramentas utilizadas é a teoria dos problemas de Riemann-Hilbert, caracterizada pelo método de máxima descida de autoria de Deift e Zhou. Essas novas técnicas também aprimoraram os resultados obtidos por Szegő e outros autores predecessores.

O objetivo do presente trabalho é esclarecer a conexão entre as teorias de polinômios ortogonais e problemas de Riemann-Hilbert, demonstrando os passos que devem ser seguidos a fim de se obter assintóticas que valham em qualquer subconjunto compacto do plano complexo. Como aplicação, escolhemos os polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ com respeito a uma função peso modificada de Jacobi.

Abstract

The study of obtaining asymptotics for Classical Orthogonal Polynomials was vastly developed by Szegő. Recently, the need for obtaining asymptotics for polynomials, orthogonal with respect to varied weight functions, was renewed due to new researches in the theory of Random Matrices. In these studies, one of the most important tools used lies in the theory of Riemann-Hilbert problems, enforced by the steepest descent method of Deift and Zhou. These new techniques also have improved the results obtained by Szegő and other previous authors.

The main purpose of this work is to explain the connection between the theories of Orthogonal Polynomials and Riemann-Hilbert problems, showing the steps to be followed on the way of finding asymptotics which hold true for any compact subsets of the complex plane. As an application, we choose the polynomials orthogonal on $[-1, 1]$ with respect to a modified Jacobi weight.

Sumário

Introdução	1
1 Pré-requisitos	5
1.1 Propriedades de Polinômios Ortogonais	5
1.2 Alguns polinômios ortogonais clássicos	10
1.2.1 Polinômios de Jacobi	10
1.2.2 Polinômios de Tchebichef	11
1.3 Conceitos básicos de Análise Complexa	12
1.3.1 Arcos, curvas e contornos	12
1.3.2 Analiticidade e a Fórmula Integral de Cauchy	13
1.3.3 A fórmula de Plemelj	14
1.3.4 Teoremas de Morera e Liouville	14
1.3.5 Singularidades	17
2 Problemas de Riemann-Hilbert (RHP)	19
2.1 Caracterização de um RHP	19
2.2 RHP quando $n = 1$ (caso escalar)	20
2.2.1 Solução para o caso $\Sigma = \mathbb{R}$	20
2.2.2 Solução para o $\Sigma = [-a, a]$ e $J(z) = i$	21
2.2.3 Solução para $\Sigma = [-a, a]$ e $J(z) = -i$	22
2.3 O RHP quando $n = 2$	22
2.3.1 Solução para um Y-RHP	23
2.3.2 Solução para um T-RHP	31
2.3.3 Solução para um S-RHP	35
2.3.4 Solução para um N-RHP	43

<i>Sumário</i>	xi
3 Assintóticas para polinômios ortogonais	46
3.1 Partindo de $Y(z)$	47
3.2 Primeira transformação: $Y \mapsto T$	48
3.3 Segunda transformação: $T \mapsto S$	48
3.4 Caso especial: $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$	49
3.4.1 A matriz $S(z)$ para $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$	49
3.4.2 A matriz $N(z)$ para $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$	51
3.5 Terceira transformação: $S \mapsto R$	52
3.6 Assintóticas para polinômios ortogonais	54
3.6.1 Caso $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$	54
3.6.2 Caso $x \in [-1, 1]$	55
Apêndice	69
Referências Bibliográficas	71
Referências Bibliográficas	71

Introdução

A teoria dos problemas de Riemann-Hilbert constituem uma importante ramificação da teoria de funções analíticas, possuindo forte conexão com problemas de aplicação física como elasticidade e hidrodinâmica (veja, por exemplo, Muskhelishvili [10]). Basicamente, nesta teoria o objetivo central é encontrar uma função que seja analítica numa determinada região, levando em conta certas *relações de salto* entre os valores de seus limites sobre os pontos de um contorno dado. Tal problema foi mencionado por Riemann em sua célebre dissertação, mas foi primeiramente estudado por Hilbert - daí a terminologia *problema de Riemann-Hilbert* (RHP).

Para enunciarmos um RHP, devemos considerar os seguintes elementos: seja Σ um contorno orientado em \mathbb{C} , isto é, cada arco de Σ possui um lado *positivo* e um *negativo*; o positivo (respectivamente, negativo) fica do lado esquerdo (respectivamente, direito) quando percorremos Σ no sentido de sua orientação. Além disso, suponha que Σ seja uma união finita de arcos suaves em \mathbb{C} que se intersectam num número finito de pontos e que todas as intersecções sejam transversais. Defina

$$\Sigma^\circ := \Sigma \setminus \{\text{pontos de auto-intersecção}\}$$

e considere uma função s

$$J : \Sigma^\circ \longrightarrow \text{GL}(\mathbb{C})_{n \times n},$$

onde $\text{GL}(\mathbb{C})_{n \times n}$ é a classe das matrizes complexas $n \times n$ inversíveis. A partir do par (Σ, J) é possível enunciar um RHP da seguinte forma: encontrar uma função $F(z)$ de \mathbb{C} em $\mathcal{M}(\mathbb{C})_{n \times n}$ (espaço vetorial das matrizes complexas $n \times n$) que satisfaça

- i)* F é analítica em $\mathbb{C} \setminus \Sigma$;
- ii)* $F_+(z) = F_-(z)J(z)$, para $z \in \Sigma^\circ$ (*relação de salto*);
- iii)* $F(z)$ tende à matriz identidade quando $z \longrightarrow \infty$.

A notação $F_+(z)$ (respectivamente, $F_-(z)$) representa o limite de $F(z')$ quando $z' \rightarrow z$ pelo lado positivo (respectivamente, negativo) de Σ . A condição assintótica (iii) pode ter um formato diferente, como veremos a seguir. A matriz $J(z)$ é chamada de *matriz de salto* e pode-se exigir algumas condições assintóticas extras sobre $J(z)$ numa vizinhança de Σ ou sobre $F(z)$ quando z se aproxima dos pontos extremos de Σ , caso existam. O seguinte teorema, encontrado em [8], estabelece um resultado muito útil a partir de uma dessas condições extras:

Teorema: *Suponha que γ seja um contorno fechado simples e que Ω seja uma vizinhança aberta de γ . Então, existem constantes positivas C e δ tais que uma solução R do RHP (i), (ii) e (iii), com $J(z)$ analítica em Ω e*

$$\|J(z) - I\|_{\Omega} < \delta,$$

satisfaz

$$\|R(z) - I\|_{\Omega} < C\|J(z) - I\|_{\Omega}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma.$$

A conexão entre polinômios ortogonais e os RHP surgiu a partir de estudos na teoria de Matrizes Randômicas. Por exemplo, quando a dimensão das matrizes tende a infinito, as propriedades estatísticas locais dos autovalores estão relacionadas às assintóticas fortes dos polinômios ortogonais associados a essas matrizes. Técnicas para se obter assintóticas fortes de polinômios ortogonais clássicos (pertencentes às famílias de Hermite, Laguerre e Jacobi) são bem conhecidas (veja Szegő [11]). Novas técnicas introduzidas por Deift e outros [4, 5, 6] e por Bleher e Its [2] permitiram a obtenção de assintóticas, válidas em qualquer região do plano complexo, para polinômios ortogonais com respeito a diversas funções peso.

Dados uma medida $\phi(x)$ tal que $d\phi(x) = w(x)dx$ e um intervalo real $[a, b]$ (finito ou infinito), uma seqüência $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinômios ortogonais caracteriza-se principalmente por possuir uma relação de ortogonalidade da forma

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } n = m \end{cases},$$

onde $P_k(x)$ tem grau exatamente k , e dizemos que a seqüência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é ortogonal em $[a, b]$ com respeito a $w(x)$.

Aqui estudaremos como se obter as assintóticas dos polinômios que são ortogonais em $[-1, 1]$ com respeito ao peso modificado de Jacobi

$$w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta h(x), \quad x \in (-1, 1) \quad (1)$$

onde $\alpha, \beta > -1$ e h é positiva em $[-1, 1]$ e analítica numa vizinhança de $[-1, 1]$. Em [8, 9], a matriz

$$Y(z) = \begin{pmatrix} P_n(z) & \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)w(x)}{x-z} dx \\ -2\pi i \gamma_n^2 P_{n-1}(z) & -\gamma_{n-1}^2 \int_{-1}^1 \frac{P_{n-1}(x)w(x)}{x-z} dx \end{pmatrix},$$

onde $\gamma_n = (\rho_n)^{-\frac{1}{2}}$, é solução do seguinte RHP:

a) $Y(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$;

b) $Y_+(z) = Y_-(z) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para $x \in [-1, 1]$;

c) $Y(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}$ quando $z \rightarrow \infty$;

d) $Y(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^\alpha \\ 1 & |z-1|^\alpha \end{pmatrix}, & \text{se } \alpha < 0, \\ O \begin{pmatrix} 1 & \ln|z-1| \\ 1 & \ln|z-1| \end{pmatrix}, & \text{se } \alpha = 0, \\ O \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{se } \alpha > 0, \end{cases}$ quando $z \rightarrow 1, z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$;

e) $Y(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & |z+1|^\beta \\ 1 & |z+1|^\beta \end{pmatrix}, & \text{se } \beta < 0, \\ O \begin{pmatrix} 1 & \ln|z+1| \\ 1 & \ln|z+1| \end{pmatrix}, & \text{se } \beta = 0, \\ O \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{se } \beta > 0; \end{cases}$ quando $z \rightarrow -1, z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Observação 1. A notação $Y(z) = (y_{ij}(z)) = O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^\alpha \\ 1 & |z-1|^\alpha \end{pmatrix}$ significa que $y_{11}(z) = O(1)$, $y_{12}(z) = O(|z-1|^\alpha)$ e assim por diante. Consulte o Apêndice para mais informações.

Nos trabalhos [8, 9], foi aplicado em $Y(z)$ uma variação do *método de máxima descida* (*steepest descent method*) de Deift e Zhou. A idéia básica desse método consiste de uma seqüência de transformações explícitas que aqui terão a forma

$$Y \longmapsto T \longmapsto S \longmapsto R.$$

O objetivo é gerar um RHP para R que satisfaça às condições (i), (ii) e (iii) anteriores em um sistema de contornos γ para os quais

$$J(z) = J(z, n) = I + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

onde I é a matriz identidade.

Note que Y depende de n e, assim, podemos dizer que $Y = Y^{(n)}$. O mesmo acontece para T , S e R , isto é, $T = T^{(n)}$, $S = S^{(n)}$ e $R = R^{(n)}$, sendo que, pelo resultado estabelecido no teorema anterior,

$$R^{(n)}(z) = I + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

uniformemente em $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Percorrendo os passos $Y^{(n)} \longmapsto T^{(n)} \longmapsto S^{(n)} \longmapsto R^{(n)}$ em sentido contrário, será possível encontrar assintóticas para $Y^{(n)}$ válidas em todas as regiões do plano complexo. Assim, em particular, como $P_n(z) = y_{11}(z)$, encontramos fórmulas assintóticas para os polinômios ortogonais válidas em todas as regiões do plano complexo.

Métodos mais clássicos, desenvolvidos em [11], para se obter assintóticas de polinômios ortogonais dependem do fato de que esses polinômios satisfazem a uma determinada equação diferencial ou possuem uma certa representação integral. O método de máxima descida para os RHP é o primeiro método capaz de fornecer expansões assintóticas completas para polinômios ortogonais mesmo nos casos em que não há representações integrais ou equações diferenciais.

Por exemplo, os polinômios de Jacobi, que são ortogonais em $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, possuem uma representação integral e satisfazem a uma equação diferencial de segunda ordem. Entretanto, os polinômios ortogonais com relação à função peso dada em (1) não possuem uma representação integral nem satisfazem a uma equação diferencial.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo serão consideradas apenas algumas das propriedades básicas de polinômios ortogonais, enfatizando as definições dos polinômios ortogonais clássicos de Jacobi e de Hermite. Além disso, forneceremos definições e teoremas básicos acerca da teoria de Análise Complexa, uma vez que este trabalho se baseia fortemente nestes quesitos. Todas as demonstrações sobre polinômios ortogonais podem ser encontradas em Chihara [3] e Szegő [11], enquanto que as demais podem ser encontradas em Henrici [7] ou em livros básicos de Análise Complexa. Algumas dessas demonstrações estão aqui explicadas com detalhes adicionais omitidos pelos autores.

Os tópicos abordados foram selecionados de modo a contribuir para um melhor entendimento do trabalho desenvolvido e não refletem a vastidão de resultados dessa área de estudo.

1.1 Propriedades de Polinômios Ortogonais

Definição 1.1. *Seja ϕ uma função real, limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento num intervalo real (a, b) , finito ou infinito. Os valores μ_n definidos por*

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\phi(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.1)$$

*são chamados de **momentos**. Se os momentos existem para $n = 0, 1, \dots$, então ϕ é chamada de **função distribuição** e $d\phi$ é chamada de **medida** (ou **medida positiva**) em (a, b) . No caso em que $d\phi(x) = w(x)dx$, $w(x) \geq 0$ e $w \not\equiv 0$ em (a, b) , dizemos que w é uma **função peso**.*

Definição 1.2. (Seqüência de Polinômios Ortogonais) Dizemos que a seqüência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma **seqüência de polinômios ortogonais (SPO)** com relação a uma função peso $w(x)$ no intervalo (a, b) se

(i) $P_n(x)$ é de grau exatamente n ;

$$(ii) \langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Teorema 1.1. Considere uma seqüência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e uma função peso $w(x)$ num intervalo real (a, b) . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma SPO com relação à função peso $w(x)$ no intervalo (a, b) ;

(ii) $\langle P_n, Q \rangle = 0$ caso $Q(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ e $\langle P_n, Q \rangle \neq 0$ no caso em que Q tem grau exatamente n ;

$$(iii) \langle P_n, x^m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0 & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Corolário 1.1. Sejam $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ duas seqüências de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à função peso $w(x)$. Então,

$$Q_j(x) = c_j P_j(x), \quad j = 0, 1, \dots,$$

sendo que a constante c_j depende somente de j .

Dizemos que $P_n(x)$ é **mônico** quando o coeficiente do termo de maior grau de $P_n(x)$ é igual a 1 e, ao longo deste trabalho, $P_n(x)$ denotará um polinômio mônico. Além disso, se considerarmos

$$p_n(x) := \frac{1}{(\rho_n)^{\frac{1}{2}}} P_n(x) = \gamma_n P_n(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.2)$$

onde $\rho_n = \langle P_n, P_n \rangle$, verifica-se que

$$\langle p_n, p_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ 1, & \text{se } n = m. \end{cases} \quad (1.3)$$

A seqüência $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é chamada de seqüência de polinômios **ortonormais** e γ_n , dado em (1.2), é o coeficiente do termo de maior grau de $p_n(x)$.

Teorema 1.2. (Relação de recorrência de três termos) *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO em (a, b) com relação à função peso $w(x)$. Então,*

$$P_{n+1}(x) = (x - b_{n+1})P_n(x) - a_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.4)$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{R}$ para $n \geq 0$ e

$$b_{n+1} = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad a_{n+1} = \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0. \quad (1.5)$$

Observação 1.1. *Especialmente para o caso em que $n = 0$, é convencionado que $a_1 = \int_a^b w(x)dx$.*

Teorema 1.3. (Identidade de Christoffel-Darboux) *Considere $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfazendo (1.4) com $a_{n+1} \neq 0$, $n \geq 0$. Então,*

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{a_1 a_2 \dots a_{k+1}} = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x - y}. \quad (1.6)$$

Relembrando a definição de $p_n(x)$ em (1.2), é possível mostrar que a seqüência de polinômios ortonormais correspondente satisfaz

$$\sum_{k=0}^n p_n(x)p_n(y) = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y} \quad (1.7)$$

sendo que o coeficiente γ_n pode ser dado por

$$\gamma_n = \frac{1}{(a_1 a_2 \dots a_{n+1})^{\frac{1}{2}}}, \quad n \geq 0. \quad (1.8)$$

Teorema 1.4. *Sejam $w(x)$ e $\tilde{w}(x)$ duas funções peso em $[-1, 1]$ tais que $\frac{w(x)}{\tilde{w}(x)} = k(x)$. Suponha que $k(x) \geq K > 0$ para todo $x \in [-1, 1]$ e, também, que*

$$|k(x_1) - k(x_2)| \leq \lambda |x_1 - x_2|, \quad (1.9)$$

para $\lambda > 0$ fixo e $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ (condição de Lipschitz).

Se $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\tilde{p}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ forem as seqüências de polinômios ortonormais relativas a $w(x)$ e $\tilde{w}(x)$, respectivamente, então

$$|p_n(x)| \leq K^{-\frac{1}{2}} |\tilde{p}_n(x)| + \lambda K^{-\frac{3}{2}} \left[|\tilde{p}_n(x)| + |\tilde{p}_{n-1}(x)| \right]. \quad (1.10)$$

Demonstração: Como $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\tilde{p}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ são seqüências de polinômios ortonormais, então existem constantes reais $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \tilde{p}_k(x) \quad (1.11)$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 p_n(t) \left(\sum_{i=0}^n \tilde{p}_i(x) \tilde{p}_i(t) \right) \tilde{w}(t) dt &= \sum_{i=0}^n \tilde{p}_i(x) \int_{-1}^1 p_n(t) \tilde{p}_i(t) \tilde{w}(t) dt \\
&= \sum_{i=0}^n \tilde{p}_i(x) \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=0}^n c_k \tilde{p}_k(t) \right) \tilde{p}_i(t) \tilde{w}(t) dt \\
&= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{i=0}^n \tilde{p}_i(x) \int_{-1}^1 \tilde{p}_k(t) \tilde{p}_i(t) \tilde{w}(t) dt \\
&\stackrel{(1.3)}{=} \sum_{k=0}^n c_k \tilde{p}_k(x) \int_{-1}^1 \tilde{p}_k(t) \tilde{p}_k(t) \tilde{w}(t) dt \\
&\stackrel{(1.11)}{=} p_n(x).
\end{aligned}$$

Relembrando o coeficiente γ_n em (1.2), então

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= \int_{-1}^1 p_n(t) \left(\sum_{i=0}^n \tilde{p}_i(x) \tilde{p}_i(t) \right) \tilde{w}(t) dt \\
&= \tilde{p}_n(x) \int_{-1}^1 p_n(t) \tilde{p}_n(t) \tilde{w}(t) dt + \int_{-1}^1 p_n(t) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{p}_i(x) \tilde{p}_i(t) \right) \tilde{w}(t) dt \\
&\quad - \int_{-1}^1 p_n(t) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{p}_i(x) \tilde{p}_i(t) \right) \frac{\tilde{w}(t) k(t)}{k(x)} dt.
\end{aligned}$$

O último termo do lado direito é zero, e assim

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= \frac{\gamma_n}{\tilde{\gamma}_n} \tilde{p}_n(x) + \int_{-1}^1 p_n(t) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{p}_i(x) \tilde{p}_i(t) \right) \tilde{w}(t) \left(1 - \frac{k(t)}{k(x)} \right) dt \\
&\stackrel{(1.7)}{=} \frac{\gamma_n}{\tilde{\gamma}_n} \tilde{p}_n(x) \\
&\quad + \int_{-1}^1 p_n(t) \left(\frac{\tilde{\gamma}_{n-1} \tilde{p}_n(x) \tilde{p}_{n-1}(t) - \tilde{p}_{n-1}(x) \tilde{p}_n(t)}{\tilde{\gamma}_n (x-t)} \right) \tilde{w}(t) \left(\frac{k(x) - k(t)}{k(x)} \right) dt \\
&= \frac{\gamma_n}{\tilde{\gamma}_n} \tilde{p}_n(x) + \frac{\tilde{\gamma}_{n-1}}{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{k(x)} \\
&\quad \times \int_{-1}^1 p_n(t) \left(\tilde{p}_n(x) \tilde{p}_{n-1}(t) - \tilde{p}_{n-1}(x) \tilde{p}_n(t) \right) \tilde{w}(t) \left(\frac{k(x) - k(t)}{x-t} \right) dt. \quad (1.12)
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Schwarz, é possível majorar os seguintes termos:

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_n}{\tilde{\gamma}_n} &= \int_{-1}^1 p_n(t) \tilde{p}_n(t) \tilde{w}(t) dt \\
&\leq \left[\int_{-1}^1 \left(p_n(t) \right)^2 \frac{w(t)}{k(t)} dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\underbrace{\int_{-1}^1 \left(\tilde{p}_n(t) \right)^2 \tilde{w}(t) dt}_{=1} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\frac{\langle p_n, p_n \rangle}{k} \right]^{\frac{1}{2}} = K^{-\frac{1}{2}}, \tag{1.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\gamma}_{n-1}}{\tilde{\gamma}_n} &= \int_{-1}^1 t \tilde{p}_{n-1}(t) \tilde{p}_n(t) \tilde{w}(t) dt \stackrel{(t \leq 1)}{\leq} \int_{-1}^1 \left| \tilde{p}_{n-1}(t) \right| \left| \tilde{p}_n(t) \right| \tilde{w}(t) dt \\
&\leq \left[\int_{-1}^1 \left(\tilde{p}_{n-1}(t) \right)^2 \tilde{w}(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-1}^1 \left(\tilde{p}_n(t) \right)^2 \tilde{w}(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} = 1 \tag{1.14}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-1}^1 p_n(t) \tilde{p}_{n-1}(t) \tilde{w}(t) dt \right| &\leq \left[\int_{-1}^1 \left(\tilde{p}_n(t) \right)^2 \tilde{w}(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\underbrace{\int_{-1}^1 \left(\tilde{p}_{n-1}(t) \right)^2 \tilde{w}(t) dt}_{=1} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.15}
\end{aligned}$$

Dessa forma, pelas desigualdades (1.13), (1.14) e (1.15), é possível concluir que

$$\begin{aligned}
|p_n(x)| &\leq \left| \frac{\gamma_n}{\tilde{\gamma}_n} \right| |\tilde{p}_n(x)| + \left| \frac{\tilde{\gamma}_{n-1}}{\tilde{\gamma}_n} \right| \left| \frac{1}{k(x)} \right| \\
&\quad \times \left| \int_{-1}^1 p_n(t) \left(\tilde{p}_n(x) \tilde{p}_{n-1}(t) - \tilde{p}_{n-1}(x) \tilde{p}_n(t) \right) \tilde{w}(t) \left(\frac{k(x) - k(t)}{x - t} \right) dt \right| \\
&\leq K^{-\frac{1}{2}} |\tilde{p}_n(x)| + \frac{\lambda}{K} \left[|\tilde{p}_n(x)| K^{-\frac{1}{2}} + |\tilde{p}_{n-1}(x)| K^{-\frac{1}{2}} \right] \\
&= K^{-\frac{1}{2}} |\tilde{p}_n(x)| + \lambda K^{-\frac{3}{2}} \left[|\tilde{p}_n(x)| |\tilde{p}_{n-1}(x)| \right].
\end{aligned}$$

■

Corolário 1.2. *Nas condições do Teorema 1.4, é possível reescrever a desigualdade (1.10) na forma*

$$|P_n(x)| \leq K^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} |\tilde{P}_n(x)| + \lambda K^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} \left[|\tilde{P}_n(x)| + |\tilde{P}_{n-1}(x)| \right], \tag{1.16}$$

onde M finito é tal que $k(x) < M$ para todo $x \in [-1, 1]$ e $P_n(x)$, $\tilde{P}_n(x)$ são os polinômios ortogonais mônicos associados.

Demonstração: Pela relação (1.2), ao dividirmos ambos os lados de (1.10) por γ_n , obtemos

$$|P_n(x)| \leq K^{-\frac{1}{2}} |\tilde{P}_n(x)| \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} + \lambda K^{-\frac{3}{2}} |\tilde{P}_n(x)| \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} + \lambda K^{-\frac{3}{2}} |\tilde{P}_{n-1}(x)| \frac{\tilde{\gamma}_{n-1}}{\gamma_n}. \tag{1.17}$$

Como $k(x)$ satisfaz a uma condição de Lipschitz em $[-1, 1]$, segue que existe $M > 0$ finito tal que $k(x) < M$, $x \in [-1, 1]$. Assim, da mesma forma que no Teorema 1.4, é possível majorar os seguintes termos:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} &= \int_{-1}^1 \tilde{p}_n(t) p_n(t) w(t) dt \\ &\leq \left[\int_{-1}^1 (\tilde{p}_n(t))^2 \tilde{w}(t) k(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq M^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\frac{\tilde{\gamma}_{n-1}}{\gamma_n} = \frac{\tilde{\gamma}_{n-1}}{\tilde{\gamma}_n} \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} \stackrel{(1.18)}{\leq} M^{\frac{1}{2}} \leq M^{\frac{1}{2}}, \quad (1.19)$$

e, portanto,

$$|P_n(x)| \leq K^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} |\tilde{P}_n(x)| + \lambda K^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} \left[|\tilde{P}_n(x)| + |\tilde{P}_{n-1}(x)| \right].$$

■

1.2 Alguns polinômios ortogonais clássicos

Segundo Chihara[3], são *polinômios ortogonais clássicos* os polinômios de Hermite, Jacobi - o que inclui os casos especiais de Tchebichef, Legendre e Gegenbauer - e Laguerre (há outros mais; veja Agarwall e Milovanović [1] para uma definição mais geral). Consideraremos aqui somente algumas propriedades, que serão usadas posteriormente, dos polinômios de Jacobi e de Tchebichef.

1.2.1 Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ relativamente à função peso

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1. \quad (1.20)$$

Na forma mônica, estes polinômios podem ser definidos através da fórmula de Rodrigues da seguinte forma:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n + \alpha + \beta)}{\Gamma(2n + \alpha + \beta)} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}], \quad (1.21)$$

onde

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C} \text{ e } \operatorname{Re}(z) > 0$$

é conhecida como *função Gama*.

O valor do produto interno entre dois destes polinômios, $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e $P_m^{(\alpha,\beta)}$, é igual a

$$\begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}n!\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)} \neq 0, & \text{se } n = m, \end{cases} \quad (1.22)$$

e os coeficientes da relação de recorrência de três termos (1.4) podem ser dados explicitamente por

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{4n(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n)^2(\alpha+\beta+2n+1)} \\ b_{n+1} = b_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n)} \end{cases}. \quad (1.23)$$

Além disso,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 2^n \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}, \quad (1.24)$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-2)^n \frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}. \quad (1.25)$$

Utilizando o fato de que $\Gamma(c+n+1) = O(n!)$ para valores de n suficientemente grandes (veja [?] para mais propriedades da função Gama), então

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(1) &= 2^n \frac{O(n!)O(n!)}{O(2n!)} = 2^n \frac{n(n-1)\dots(1)}{2n(2n-1)\dots(n+1)} \\ &= \frac{2n(2n-2)(2n-4)\dots(4)(2)}{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)(n+1)} \\ &\leq \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)(n+1)}{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)(n+1)} = 1, \end{aligned} \quad (1.26)$$

ou seja,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \Big|_{\{-1,1\}} = O(1) \quad (1.27)$$

mesmo quando $n \rightarrow \infty$.

1.2.2 Polinômios de Tchebichef

Os polinômios de Tchebichef de 1ª espécie são um caso particular dos polinômios $P_n^{(\alpha,\beta)}$ de Jacobi, quando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Eles são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ relativamente à função peso

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (1.28)$$

o que faz com que $T_n(x) = (-1)^n T_n(-x)$ (isto é, os polinômios de Tchebichef são simétricos).

Na forma mônica, estes polinômios podem ser definidos por

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos(x)), \quad \text{para } x \in [-1, 1], \quad (1.29)$$

e sua relação de ortogonalidade é da forma

$$\langle T_n, T_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \pi, & \text{se } n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } n = m > 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Por fim, os coeficientes da relação de recorrência de três termos (1.4) destes polinômios são

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2^{n-1}} \\ b_{n+1} = 0 \end{cases} . \quad (1.31)$$

1.3 Conceitos básicos de Análise Complexa

Para uma melhor compreensão desta seção, dividiremos os teoremas, lemas e definições em tópicos de acordo com o assunto a ser abordado.

1.3.1 Arcos, curvas e contornos

- a) Um *arco*, ou também *caminho*, denota uma função complexa de uma variável real, contínua, definida num intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Dessa maneira, arcos são definidos em termos de uma *representação paramétrica*

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad \text{ou } z = ((x(t), y(t))), \quad a \leq t \leq b$$

e também nos referiremos ao arco como o objeto geométrico $z = \{z(t) : t \in [a, b]\}$. Um arco é simples quando valores distintos de t se associam a pontos distintos em \mathbb{C} , e é suave se as derivadas $x'(t)$ e $y'(t)$ (no sentido real) existem e não se anulam simultaneamente em $[a, b]$.

Os pontos $z_0 := z(a)$ e $z_1 := z(b)$ são chamados de *pontos extremos* do arco, e dizemos que o arco é *orientado de z_0 a z_1* quando o sentido de seu percurso é de z_0 a z_1 .

- b) Uma *curva fechada* é um arco para o qual $z(a) = z(b)$, e uma curva fechada é *simples* se não possui pontos de auto-intersecção, exceto por seus pontos extremos.
- c) Um *contorno* é uma cadeia finita de n arcos $z_1(t), \dots, z_n(t)$, associados respectivamente a intervalos $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$, de modo que $z_i(b_i) = z_{i+1}(a_{i+1})$, $i = 1, \dots, n - 1$. Dizemos que o contorno é *fechado* caso $z_1(a_1) = z_n(b_n)$ e *fechado simples* se não possuir pontos de auto-intersecção, exceto por seus extremos.

Por fim, diz-se que um contorno fechado simples é orientado *positivamente* se o sentido de sua orientação for horário.

Definição 1.3. Dizemos que um conjunto aberto R é **conexo** se ele não pode ser representado como a união de dois conjuntos abertos que sejam disjuntos e não-vazios.

Definição 1.4. Um conjunto não-vazio, aberto e conexo é chamado de região.

1.3.2 Analiticidade e a Fórmula Integral de Cauchy

Informalmente, a analiticidade de uma função f num ponto z_0 caracteriza-se pela exigência de que $f \in C^\infty$ numa vizinhança aberta de z_0 . Em termos mais precisos:

Definição 1.5. (Função Analítica) Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica num ponto z_0 de uma região $R \subset \mathbb{C}$ se existirem $\varepsilon > 0$ e constantes a_0, a_1, a_2, \dots tais que

i) a bola aberta $B(z_0, \varepsilon) \subset R$;

ii) para todo $z \in B(z_0, \varepsilon)$, tivermos

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (1.32)$$

Nestas condições, dizemos que f é **representada localmente** pela série de potências (1.32). Além disso, tal série é única e, também, os coeficientes da mesma são dados por

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0).$$

Salientamos ainda que é relativamente simples mostrar que, quando f é analítica num certo ponto z_0 , então f também é analítica em qualquer outro ponto pertencente a $B(z_0, \varepsilon)$. Por fim, quando f é analítica em todos os pontos de \mathbb{C} , diz-se que f é **inteira**.

Teorema 1.5. (Fórmula Integral de Cauchy) *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica numa região fechada R delimitada por um contorno fechado simples C , orientado positivamente. Se z pertence ao interior de R , então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt. \quad (1.33)$$

1.3.3 A fórmula de Plemelj

De autoria do matemático Josip Plemelj (1873 - 1967), a célebre fórmula de Plemelj constitui uma das principais ferramentas no estudo da teoria dos problemas de Riemann-Hilbert; este fato será muito enfatizado no próximo Capítulo. Antes de enunciarmos tal fórmula, relembremos a seguinte definição:

Definição 1.6. (Condição de Hölder) *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida numa região L do plano complexo. Dizemos que f satisfaz uma condição de Hölder (ou condição de Lipschitz de ordem λ) em L se, para todo $x, y \in L$, tivermos*

$$|f(x) - f(y)| \leq \Lambda |x - y|^\lambda, \quad (1.34)$$

com $\Lambda > 0$ e $0 < \lambda \leq 1$.

Teorema 1.6. (Fórmula de Plemelj) *Seja L um contorno (aberto ou fechado) e considere $\varphi(s)$ uma função que satisfaz a uma condição de Hölder em L . Então, a integral de Cauchy $\phi(z)$ definida por*

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(s)}{s-z} ds \quad (1.35)$$

possui valores limites $\phi_+(x)$ e $\phi_-(x)$ à medida que z se aproxima de $x \in L$ pela esquerda e pela direita, respectivamente. Estes valores são dados como segue:

$$\begin{cases} \phi_+(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(s)}{s-x} ds \\ \phi_-(x) = -\frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(s)}{s-x} ds \end{cases} \quad (1.36)$$

desde que, no caso em que L é fechado, x não seja um extremo de L .

1.3.4 Teoremas de Morera e Liouville

O seguinte teoremas serão freqüentemente usados ao longo do Capítulo 2.

Teorema 1.7. (Morera) *Seja f uma função contínua numa região aberta e simplesmente conexa $R \subset \mathbb{C}$ tal que, para todo contorno fechado $C \subset R$, temos*

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Então, f é necessariamente analítica em R .

Corolário 1.3. *Denote por \mathbb{C}_+ e \mathbb{C}_- , respectivamente, os semiplanos abertos acima e abaixo do eixo real. Considere uma função f que seja analítica em $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ e contínua em \mathbb{C} . Então, f é analítica em \mathbb{C} .*

Observação 1.2. *Utilizando uma argumentação um pouco mais rigorosa, é possível estender o Corolário 1.3 para qualquer região R aberta e simplesmente conexa, que contenha um arco suave simples σ . Logo, se f for analítica em $R \setminus \sigma$ e contínua em R , então f será analítica em R .*

Demonstração: Provemos que $\int_C f(z)dz = 0$ para qualquer contorno fechado $C \subset \mathbb{C}$. Então, pelo Teorema de Morera, teremos f analítica em \mathbb{C} .

Sem perda de generalidade, considere um contorno $C \cup C_1$ fechado e contido em \mathbb{C}_+ , como mostra a Figura 1.1, com $\varepsilon > 0$.

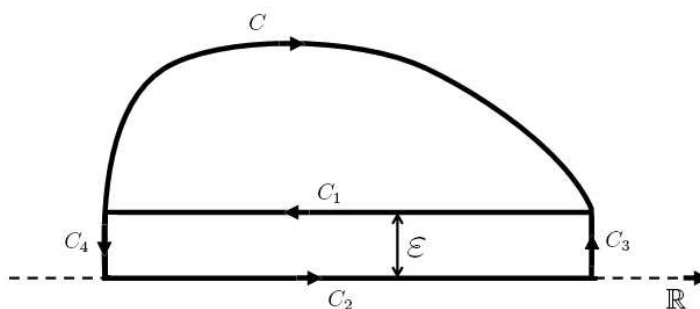


Figura 1.1: O contorno $C \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

Note que $\int_C f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz = 0$, já que $C \cup C_1$ está inteiramente contida em \mathbb{C}_+ . Mostremos então que a integral sobre $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ tende a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Os arcos C_1 e C_2 serão parametrizados da seguinte forma:

$$C_1 : \tau(t, \varepsilon) = \begin{cases} x(t) = -t, \\ y(t) = 0, \end{cases}, \quad a(\varepsilon) \leq t \leq b(\varepsilon), \quad (1.37)$$

$$C_2 : \omega(t, \varepsilon) = \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \varepsilon, \end{cases}, \quad a \leq t \leq b, \quad (1.38)$$

onde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} a(\varepsilon) = a$ e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} b(\varepsilon) = b$.

Além disso, considere C_3 e C_4 definidos, respectivamente, sobre os intervalos $[c(\varepsilon), d(\varepsilon)]$ e $[c_1(\varepsilon), d_1(\varepsilon)]$, onde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |c(\varepsilon) - d(\varepsilon)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |c_1(\varepsilon) - d_1(\varepsilon)| = 0$.

Dessa forma, a integral de f sobre $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, denotada por I , será tal que

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz \\ &\leq \int_{b(\varepsilon)}^{a(\varepsilon)} f(\tau(t, \varepsilon))dt + \int_a^b f(\omega(t, \varepsilon))dt + M_1|c(\varepsilon) - d(\varepsilon)| + M_2|c_1(\varepsilon) - d_1(\varepsilon)| \end{aligned}$$

onde $M_1 = \max \{|f(z)|, z \in C_3\}$ e $M_2 = \max \{|f(z)|, z \in C_4\}$. Assim,

$$I \leq \int_a^b f(\omega(t))dt - \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} f(\tau(t))dt + M_1|c(\varepsilon) - d(\varepsilon)| + M_2|c_1(\varepsilon) - d_1(\varepsilon)|.$$

Como $f(\tau(t, \varepsilon))$ é uma função contínua em ε , temos que a função F definida por

$$F(\varepsilon) := \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} f(\tau(t, \varepsilon))dt$$

também é uma função contínua em ε e, por isso,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(\varepsilon) = \int_{a(0)}^{b(0)} f(\tau(t, 0))dt.$$

Dessa maneira, temos que $I \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Portanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C \cup C_1} f(z)dz = 0. \quad (1.39)$$

Consideremos, agora, C como um contorno fechado qualquer, como mostra a Figura 1.2.

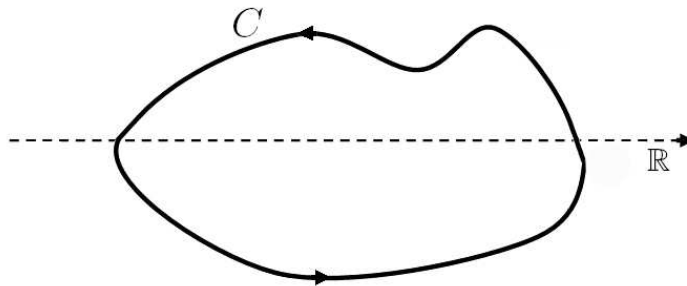


Figura 1.2: O contorno C

Lembremos que f é contínua em \mathbb{C} . Logo, pelo fato de C ser o limite para $\varepsilon \rightarrow 0^+$ da união dos contornos C_{C_+} e C_{C_-} , como mostra a Figura 1.3, então, por (1.39), $\int_C f(z)dz = 0$, e o resultado está demonstrado. ■

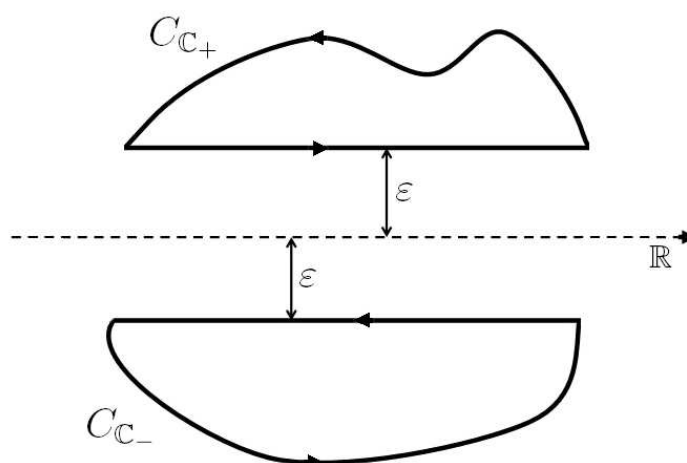


Figura 1.3: As curvas C_{C_+} e C_{C_-}

Teorema 1.8. (Liouville) *Seja f uma função inteira tal que $|f(z)|$ é limitada para todo $z \in \mathbb{C}$. Então, f é constante em \mathbb{C} .*

Corolário 1.4. *Seja f uma função inteira e $\eta \in \mathbb{C}$ uma constante tal que $f(z) \rightarrow \eta$ quando $z \rightarrow \infty$. Então, $f(z) = \eta$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

1.3.5 Singularidades

Quando uma função f é analítica numa região R com exceção de um ponto $z_0 \in R$, onde f não é definida, dizemos que z_0 é uma **singularidade isolada** da função f . Existem três tipos de singularidades isoladas, bem como propriedades advindas de teoremas clássicos que nos auxiliam a distingui-las.

1) Uma singularidade é **removível** quando

- O limite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.
- f possui continuação analítica em z_0 , isto é, existe uma função $g(z)$ analítica em R tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in R \setminus \{z_0\}$.
- $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.

2) Uma singularidade é um **pólo** quando

- O limite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ existe como um limite impróprio.
- Existe $n > 0$ inteiro tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z)$ é limitado.

3) Uma singularidade é **essencial** quando

- O limite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ não existe, seja como limite próprio ou impróprio.
- f não pode ser continuada analiticamente em z_0 .
- Não existe $n > 0$ inteiro tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z)$ seja limitado.

Observação 1.3. *Tradicionalmente, em análise complexa, assume-se que uma singularidade, caso seja removível, já tenha sido removida. Isto é, para efeitos de analiticidade, consideramos a continuação analítica de f ao invés da própria f .*

Capítulo 2

Problemas de Riemann-Hilbert (RHP)

Neste capítulo iremos apresentar alguns exemplos de RHP, bem como suas respectivas soluções. Os resultados aqui obtidos serão usados no próximo capítulo.

2.1 Caracterização de um RHP

Considere Σ um contorno em \mathbb{C} como sendo uma união finita de arcos suaves em \mathbb{C} que se intersectam numa quantidade finita de pontos e, também, que todas essas intersecções sejam transversais. Suponha que cada um desses arcos seja orientado, de modo que cada arco de Σ possua um lado *positivo* e um *negativo* - o lado positivo (negativo) fica à esquerda (direita) quando percorremos Σ no sentido de sua orientação. Defina, então, Σ° como

$$\Sigma^\circ := \Sigma \setminus \{\text{pontos de auto-intersecção}\}.$$

Considere, também, uma função analítica $J : \Sigma^\circ \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C})_{n \times n}$, onde $\text{GL}(\mathbb{C})_{n \times n}$ é o espaço das matrizes inversíveis $n \times n$. No caso em que Σ não é limitada, suponha que $J(z)$ tende à matriz identidade quando $z \rightarrow \infty$ sobre Σ .

O par (Σ, J) determina um *problema de Riemann-Hilbert* da seguinte forma: *encontrar uma função $F : \mathbb{C} \rightarrow \text{M}(\mathbb{C})_{n \times n}$ de tal modo que*

- F é analítica em $\mathbb{C} \setminus \Sigma$,
- $F_+(z) = F_-(z)J(z)$, $z \in \Sigma^\circ$ (relação de salto),

- $F(z)$ possui um comportamento assintótico quando $z \rightarrow \infty$.

Denotamos por $F_+(z)$ e $F_-(z)$ os limites de $F(z')$ quando $z' \rightarrow z \in \Sigma$, respectivamente, pelos lados positivo e negativo de Σ . A matriz $J(z)$ é chamada de *matriz de salto* do RHP.

2.2 RHP quando $n = 1$ (caso escalar)

Quando $n = 1$, dizemos que o RHP é *escalar*. A solução que encontramos a seguir para um problema dessa natureza será utilizada no estudo de soluções para RHP com $n = 2$. No estudo pretendido, faremos uso da conhecida *fórmula de Plemelj* (Teorema 1.6), que nessa área de trabalho desempenha um papel fundamental.

2.2.1 Solução para o caso $\Sigma = \mathbb{R}$

Dada um função $J(z)$ (com certas restrições que veremos a seguir), procuramos uma função $F(z)$ tal que

- F é analítica em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,
- $F_+(x) = F_-(x)J(x)$, $x \in \mathbb{R}$,
- $F(z) = O(1)$ quando $z \rightarrow \infty$.

Fazendo uso da função logarítmica, teremos que

$$(\ln F)_+(x) - (\ln F)_-(x) = \ln(J(x)); \quad (2.1)$$

Observe, agora, que (2.1) pode ser resolvida explicitamente através da fórmula de Plemelj em (1.36), de tal modo que

$$\ln(F(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(J(x))}{x-z} dx, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad (2.2)$$

e, assim,

$$F(z) = e^{\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(J(x))}{x-z} dx}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Note, por (2.2), que devemos supor $J(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a fim de que $\ln(J(x))$ esteja bem definida. Ainda assim, existem casos onde a integral em (2.2) não existe. Isto pode ocorrer, por exemplo, quando $J(x) \rightarrow 1$ para $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ na reta real,

havendo então a possibilidade de *espiralamento* (*winding number*). Felizmente, as funções $J(z)$ que consideraremos garantirão que a integral em (2.2) é bem definida.

Finalmente, é possível garantir a unicidade da solução se considerarmos algumas condições extras, como mostra o próximo teorema:

Teorema 2.1. *Dadas $F_1(z)$ e $F_2(z)$ duas soluções de um RHP (caso escalar) onde $\Sigma = \mathbb{R}$, suponha que $J^{-1}(x)$ exista para todo $x \in \mathbb{R}$ e, também, que $F_2^{-1}(z)$ exista para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Então, $F_1 \equiv F_2$ a menos de uma constante.*

Demonstração: Considere $W = F_1 F_2^{-1}$. Como F_1 e F_2 são ambas soluções, então

$$\begin{aligned} W_+ &= (F_1)_+(F_2)_+^{-1} = (F_1)_- J[(F_2)_- J]^{-1} \\ &= (F_1)_- J J^{-1} (F_2)_-^{-1} = (F_1)_- (F_2)_-^{-1} \\ &= W_-. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pelo fato de F_1 e F_2 serem analíticas em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, então W também é analítica em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e, por (2.4) temos W contínua em \mathbb{C} . Assim, utilizando o Corolário 1.3, segue que W é inteira.

Note agora que $W(z) \rightarrow 1 + O(\frac{1}{z})$ quando $z \rightarrow \infty$, ou seja, $W(z)$ se aproxima de 1 à medida que z tende ao infinito. Dessa maneira, pelo Corolário 1.4, teremos que $W \equiv 1$ e, dessa forma, $F_1 \equiv F_2$. ■

Observação: No caso em que $\Sigma = [-a, a] \subset \mathbb{R}$, é possível estabelecer um resultado semelhante ao do Teorema 2.1, impondo relativamente à solução $F(z)$ algumas condições assintóticas quando $z \rightarrow \{-a, a\}$, $z \notin [-a, a]$.

2.2.2 Solução para o $\Sigma = [-a, a]$ e $J(z) = i$

Procuramos aqui por uma função $F(z)$ tal que

- F é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$,
- $F_+(x) = iF_-(x)$, $x \in (-a, a)$,
- $F(z) = O(1)$ quando $z \rightarrow \infty$.

Analogamente ao caso anterior, mostra-se que

$$F(z) = e^{\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln(i)}{x-z} dx}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-a, a]. \tag{2.5}$$

Entretanto, temos que

$$\ln(i) = \ln(e^{i\frac{\pi}{2}}) = i\frac{\pi}{2}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln(i)}{x-z} dx &= \frac{1}{4} \ln(x-z) \Big|_{-a}^a = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{a-z}{-a-z}\right) \\ &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right). \end{aligned}$$

Isto nos permite reescrever (2.5) como

$$F(z) = \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-a, a]. \quad (2.6)$$

De fato, para $x \in (-a, a)$,

$$\begin{aligned} F_+(x) &= \lim_{z^+ \rightarrow x} F(z) = \lim_{z^+ \rightarrow x} \frac{[-(a-z)]^{\frac{1}{4}}}{(z+a)^{\frac{1}{4}}} \\ &= \lim_{z^+ \rightarrow x} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \frac{(a-z)^{\frac{1}{4}}}{(z+a)^{\frac{1}{4}}} = i \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) \frac{(a-x)^{\frac{1}{4}}}{(x+a)^{\frac{1}{4}}} \\ &= i \lim_{z^- \rightarrow x} \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) \frac{(a-z)^{\frac{1}{4}}}{(z+a)^{\frac{1}{4}}} = \lim_{z^- \rightarrow x} \frac{[-(a-z)]^{\frac{1}{4}}}{(z+a)^{\frac{1}{4}}} \\ &= i \lim_{z^- \rightarrow x} F(z) = iF_-(x). \end{aligned}$$

Por fim, é relativamente simples mostrar que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{\frac{1}{4}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\frac{a}{z}}{1+\frac{a}{z}}\right)^{\frac{1}{4}} = O(1).$$

2.2.3 Solução para $\Sigma = [-a, a]$ e $J(z) = -i$

Assim como no caso anterior, mostra-se que

$$F(z) = \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-a, a] \quad (2.7)$$

é a solução procurada nas condições atuais.

2.3 O RHP quando $n = 2$

Para os casos em que $n > 1$, serão mais trabalhosos os argumentos a serem utilizados para se garantir a existência e a unicidade da solução de um determinado RHP. Essencialmente, dado um RHP onde $n = 2$, nos limitaremos a mostrar que uma certa matriz $F = F(z)$ é solução do problema e então provar que tal solução é, de fato, única.

2.3.1 Solução para um Y-RHP

A situação a ser estudada agora exemplifica as possibilidades de relacionamento entre as teorias de Polinômios Ortogonais e problemas de Riemann-Hilbert. Aqui, consideraremos $\Sigma = [-1, 1]$ e a matriz de salto $J(x)$ terá a forma

$$J(x) = \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

onde $w(x)$ é uma modificação da função peso de Jacobi, dada por

$$w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta h(x), \quad (2.9)$$

sendo $\alpha, \beta > -1$ e $h(x)$ uma função positiva em $[-1, 1]$ e analítica numa vizinhança aberta U de $[-1, 1]$.

Queremos, então, encontrar uma matriz $Y = Y(z)_{2 \times 2}$, que satisfaça:

- (a) $Y(z)$ é analítica para $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
- (b) $Y_+(x) = Y_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para $x \in (-1, 1)$.
- (c) $Y(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}$, quando $z \rightarrow \infty$.

Além disso, a fim de garantirmos a unicidade da solução, iremos impor, sobre $Y(z)$, duas condições assintóticas para quando $z \rightarrow \pm 1 \Big|_{\mathbb{C} \setminus [-1, 1]}$, quais sejam:

- (d) Quando $z \rightarrow 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, então

$$Y(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^\alpha \\ 1 & |z-1|^\alpha \end{pmatrix}, & \text{se } \alpha < 0, \\ O \begin{pmatrix} 1 & \ln|z-1| \\ 1 & \ln|z-1| \end{pmatrix}, & \text{se } \alpha = 0, \\ O \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{se } \alpha > 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

(consulte o Apêndice para o significado da notação)

(e) Quando $z \rightarrow -1$, $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, então

$$Y(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & |z+1|^\beta \\ 1 & |z+1|^\beta \end{pmatrix}, & \text{se } \beta < 0, \\ O \begin{pmatrix} 1 & \ln|z+1| \\ 1 & \ln|z+1| \end{pmatrix}, & \text{se } \beta = 0, \\ O \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{se } \beta > 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Daqui em diante, um RHP cuja solução satisfaz as condições (a) - (e) anteriores será denotado por **Y-RHP**.

Teorema 2.2. *A matriz $Y(z)$ dada por*

$$Y(z) = \begin{pmatrix} P_n(z) & \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)w(x)}{x-z} dx \\ -2\pi i \gamma_{n-1}^2 P_{n-1}(z) & -\gamma_{n-1}^2 \int_{-1}^1 \frac{P_{n-1}(x)w(x)}{x-z} dx \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

é uma solução para o Y-RHP, em que $P_n(x)$ é o polinômio ortogonal mônico em $[-1, 1]$ relativo a $w(x)$ dada em (2.9) e γ_{n-1} é o coeficiente do termo de maior grau do polinômio ortonormal correspondente (veja (1.2)).

Demonstração: Mostremos que $Y(z)$ satisfaz cada uma das condições do Y-RHP.

(a) $Y(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, já que:

- $y_{11}(z)$ e $y_{21}(z)$ são polinômios e, portanto, funções analíticas em \mathbb{C} .
- $y_{12}(z)$ é derivável em $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, isto é,

$$y'_{12}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)w(x)}{(x-z)^2} dx \quad (2.13)$$

e, portanto, $y_{12}(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. A demonstração para $y_{22}(z)$ segue de maneira idêntica.

(b) Para $x \in (-1, 1)$, mostremos que a relação de salto se verifica em cada um dos elementos de $Y(z)$:

- Novamente por $P_n(z)$ ser analítico em \mathbb{C} , temos $y_{11}(x)_+ = y_{11}(x)_- = y_{11}(x)$. O argumento é o mesmo para $y_{21}(z)$.
- $y_{12}(x)_+ = y_{11}(x)_- w(x) + y_{12}(x)_- \implies y_{12}(x)_+ - y_{12}(x)_- = P_n(x)w(x)$. Note agora que $P_n(x)w(x)$, pelo fato de ser analítica em $(-1, 1)$, satisfaz a uma condição de Hölder em $(-1, 1)$; assim, pela fórmula de Plemelj em (1.36), temos então que

$$y_{12}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)w(x)}{x-z} dx$$

que é exatamente a expressão de $y_{12}(z)$. A demonstração para $y_{22}(z)$ é feita de maneira análoga.

(c) Quando $z \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O(z^n) & O(z^{-(n+1)}) \\ O(z^{n-1}) & O(z^{-n}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Agora analisemos cada um dos elementos de $Y(z)$ quando $z \rightarrow \infty$, comparando-os com (2.14):

- $y_{11}(z) = O(z^n)$

Como $y_{11}(z) = P_n(z)$ é um polinômio ortogonal mônico, temos

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P_n(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(z^n + O(z^{n-1}) \right) = O(z^n), \quad (2.15)$$

o que verifica a igualdade. A demonstração é a mesma para $y_{21}(z)$.

- $y_{12}(z) = O(z^{-(n+1)})$

Observe que

$$\begin{aligned}
y_{12}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)w(x)}{x-z} dx \\
&= \frac{-1}{2\pi iz} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)w(x)}{1-\frac{x}{z}} dx \\
&= \frac{-1}{2\pi iz} \int_{-1}^1 P_n(x) \left(1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \dots\right) w(x) dx \\
&\stackrel{\text{Teo. 1.1}}{=} \frac{-1}{2\pi iz} \int_{-1}^1 P_n(x) \left(\frac{x^n}{z^n} + \frac{x^{n+1}}{z^{n+1}} + \dots\right) w(x) dx \\
&= \frac{-1}{2\pi iz^{n+1}} \int_{-1}^1 P_n(x)x^n w(x) dx + O(z^{-(n+2)}) \\
&= O(z^{-(n+1)}), \tag{2.16}
\end{aligned}$$

sendo, assim, a igualdade verificada. Para $y_{22}(z)$, o processo é similar.

(d) Provemos, primeiramente, que $\lim_{z \rightarrow 1} y_{11}(z) = O(1)$, já que essa condição ocorre independentemente do sinal de α . Essa demonstração também vale para $y_{21}(z)$.

Ao considerarmos a função peso dos polinômios de Jacobi

$$\tilde{w}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1, \tag{2.17}$$

é relativamente simples mostrar que existe $K > 0$ tal que

$$\frac{w(x)}{\tilde{w}(x)} = h(x) > K, \quad \forall x \in [-1, 1], \tag{2.18}$$

bastando, para isso, supor que $K := \min \{h(x), x \in [-1, 1]\}$, sendo $h(x)$ citada em (2.9).

Com isto, segundo o Corolário 1.2, temos que

$$|P_n(x)| \leq K^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} |\tilde{P}_n(x)| + \lambda K^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} \left[|\tilde{P}_n(x)| + |\tilde{P}_{n-1}(x)| \right], \tag{2.19}$$

onde $\tilde{P}_n(x)$ é o polinômio ortogonal de Jacobi relativo a $\tilde{w}(x)$, $M := \max \{h(x), x \in [-1, 1]\}$ e $\lambda := \max \{h'(x), x \in [-1, 1]\}$. Agora, como $\tilde{P}_n(1) = O(1)$ (veja (1.27)), resta somente que $P_n(1) = \lim_{z \rightarrow 1} y_{11}(z) = O(1)$, para $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Resta, agora, provar que

$$y_{12}(z) = \begin{cases} O(|z-1|^\alpha), & \alpha < 0 \\ O(\ln|z-1|), & \alpha = 0 \\ O(1), & \alpha > 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

quando $z \rightarrow 1$, $z \notin [-1, 1]$, sendo que as demonstrações para $y_{22}(z)$ podem ser feitas de forma análoga.

- No caso em que $\alpha > 0$, considere $a = \alpha - 1 > -1$. Então,

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n(x)w(x)}{x-1} dx = - \int_{-1}^1 P_n(x)(1-x)^a(1+x)^\beta h(x) dx. \quad (2.21)$$

Como $(1-x)^a(1+x)^\beta h(x) > 0$ em $(-1, 1)$, temos, pelo Teorema do valor médio generalizado, que existe $c \in (-1, 1)$ de forma que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)w(x)}{x-1} dx &= -P_n(c) \int_{-1}^1 (1-x)^a(1+x)^\beta h(x) dx \\ &\stackrel{(1.1)}{=} -P_n(c)\mu_0^{(a,\beta)}, \end{aligned}$$

onde $\mu_0^{(a,\beta)}$ é o momento de ordem zero associado à função peso $(1-x)^a(1+x)^\beta h(x)$.

Com isto, provamos que (2.21) é limitado. Daí, pelo fato de $y_{12}(z)$ ser analítica numa vizinhança de $x = 1$, segue que $\lim_{z \rightarrow 1} y_{12}(z) = P_n(c)\mu_0^{(a,\beta)}$, isto é, $\lim_{z \rightarrow 1} y_{12}(z) = O(1)$.

- No caso em que $\alpha = 0$, observe que

$$y_{12}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^0 \frac{P_n(x)(1+x)^\beta h(x)}{x-z} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{P_n(x)(1+x)^\beta h(x)}{x-z} dx. \quad (2.22)$$

O primeiro termo de (2.22) é obviamente analítico num aberto que contenha $x = 1$; resta, então, nos preocuparmos com o segundo termo de (2.22).

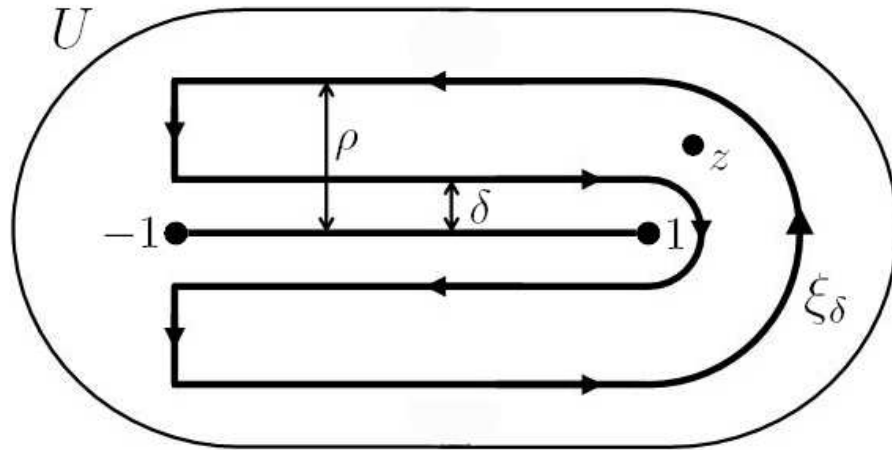
Note que $f(z) = P_n(z)(1+z)^\beta h(z)$ é analítico num aberto B que contém $[0, 1]$ e, daí, $f'(z)$ existe para todo $z \in B$. Considere

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(x)}{x-z} dx &= \frac{f(z)}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(x)}{x-z} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(x) - f(z)}{x-z} dx \\ &= \frac{f(z)}{2\pi i} \ln\left(\frac{z-1}{z}\right) + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(x) - f(z)}{x-z} dx}_{\Phi(z)}. \end{aligned}$$

Observe, agora, que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$. Logo, $\frac{f(x) - f(z)}{x-z}$ é analítica no aberto B e, conseqüentemente, $\Phi(z)$ também é analítica em B . Assim, podemos concluir que, para $z \rightarrow 1$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)(1+x)^\beta h(x)}{x-z} dx = C \ln(z-1) + \Phi(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad (2.23)$$

onde C é uma constante. Dessa forma, $y_{12}(z) = O(\ln|z-1|)$ quando $z \rightarrow 1$, caso $\alpha = 0$.

Figura 2.1: O contorno ξ_δ

- No caso em que $\alpha < 0$, lembremos, por (2.9), que a função h é analítica em U . Escolha $\rho > 0$ de forma que o disco de centro 1 e raio ρ esteja contido em U e seja $|z - 1| < \rho$ com $z \notin [-1, 1]$. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, z se localiza no interior do contorno fechado ξ_δ , como mostra a Figura 2.1.

Defina, agora, a função $g(z)$ como

$$g(z) = (-1)^\alpha P_n(z)w(z) = P_n(z)(z - 1)^\alpha(z + 1)^\beta h(z).$$

Excluindo-se a semi-reta $(-\infty, 1]$, fica claro que $g(z)$ é analítica em $U \setminus (-\infty, 1]$.

Assim, pelo teorema de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_\delta} \frac{g(t)}{t - z} dt = g(z). \quad (2.24)$$

Note, então, que

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1+i\delta}^{1+i\delta} \frac{g(t)}{t - z} dt &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1+i\delta}^{1+i\delta} \frac{(-1)^\alpha P_n(z)w(z)}{t - z} dt \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1+i\delta}^{1+i\delta} \frac{(e^{i\pi})^\alpha P_n(z)w(z)}{t - z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(z)w(z)}{t - z} (e^{i\pi\alpha}) dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

e, analogamente, que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\delta}^{-1-i\delta} \frac{g(t)}{t - z} dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(z)w(z)}{t - z} (e^{i\pi\alpha}) dt. \quad (2.26)$$

Por fim, é relativamente simples mostrar que a integral na variável t de $\frac{g(t)}{t - z}$ sobre as demais curvas que compõem ξ_δ constituem uma função (digamos, $\Omega(z)$) analítica

em z caso $\delta < |z - 1| < \rho$, $z \notin [-1, 1]$, mesmo quando $\delta \rightarrow 0$. Utilizando este fato e os resultados obtidos em (2.25) e (2.26), mostra-se que

$$g(z) = \Omega(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)w(x)}{x-z} (e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}) dx \quad (2.27)$$

e, assim, sabendo que a função seno é definida em \mathbb{C} como

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2i},$$

podemos finalmente concluir, através de (2.27), que

$$y_{12}(z) = \frac{P_n(z)(z+1)^\beta h(z)}{2i \text{sen}(\pi\alpha)} (z-1)^\alpha - \frac{\Omega(z)}{2i \text{sen}(\pi\alpha)}, \quad (2.28)$$

motivo pelo qual $y_{12}(z) = O(|z-1|^\alpha)$ quando $z \rightarrow 1$, caso $\alpha < 0$.

(e) A demonstração de que $Y(z)$ satisfaz à condição Y-RHP(e) segue de forma análoga à demonstração feita anteriormente para Y-RHP(d). ■

Até aqui, nos preocupamos somente em mostrar que a matriz $Y(z)$ era uma solução para Y-RHP. O próximo teorema garante a unicidade dessa solução.

Teorema 2.3. *Se existe uma solução para Y-RHP, então essa solução é única.*

Demonstração: Seja $V(z)$ uma solução qualquer para Y-RHP. Logo, $V(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Como

$$V_+(x) = V_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{para } x \in (-1, 1),$$

temos que

$$\begin{aligned} \det(V)_+(x) &= \det(V)_-(x) \det \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det(V)_-(x) \end{aligned}$$

e, assim, pelo Corolário 1.3, temos $\det(V(z))$ analítico em $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

Entretanto, pelo fato de $V(z)$ satisfazer (2.10) quando $z \rightarrow 1$, temos necessariamente que

$$\det(V(z)) = \begin{cases} O(|z-1|^\alpha), & \alpha < 0 \\ O(\ln|z-1|), & \alpha = 0 \\ O(1), & \alpha > 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

quando $z \rightarrow 1$.

Sabendo que $\alpha > -1$, temos que a singularidade de $\det(V)(z)$ em 1 é removível. De fato: observando que

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)|z-1|^\alpha = 0 \quad (\text{mesmo quando } \alpha < 0),$$

via a utilização da regra de L'Hôspital, segue que

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \ln|z-1| = \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{\frac{1}{|z-1|}}{\frac{1}{(z-1)^2}} = 0.$$

Utilizando os mesmos argumentos acima, mostra-se que a singularidade de $\det(V)(z)$ em -1 também é removível e disso decorre que $\det(V)(z)$ é inteira.

Agora, como

$$Y(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty,$$

então

$$\det(V(z)) = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Portanto, pelo fato de $\det(V(z))$ ser inteira e $\det(V(z)) = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right)$ quando $z \rightarrow \infty$, segue, pelo Corolário 1.4, que $\det(V(z)) = 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Logo, $V(z)$ é inversível para todo z e $V^{-1}(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Suponha, agora, que exista outra solução $\tilde{V}(z)$ para Y-RHP. Dessa forma, a função $H(z) = \tilde{V}(z)V^{-1}(z)$ será analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ e, como $\det(V)(z) = 1$, teremos

$$\begin{aligned} H(z) &= \begin{pmatrix} \tilde{v}_{11}(z) & \tilde{v}_{12}(z) \\ \tilde{v}_{21}(z) & \tilde{v}_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{22}(z) & -v_{12}(z) \\ -v_{21}(z) & v_{11}(z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{v}_{11}(z)v_{22}(z) - \tilde{v}_{12}(z)v_{21}(z) & \tilde{v}_{12}(z)v_{11}(z) - \tilde{v}_{11}(z)v_{12}(z) \\ \tilde{v}_{21}(z)v_{22}(z) - \tilde{v}_{22}(z)v_{21}(z) & \tilde{v}_{22}(z)v_{11}(z) - \tilde{v}_{21}(z)v_{12}(z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por hipótese, $V(z)$ e $\tilde{V}(z)$ satisfazem (2.10). Assim, para cada um dos elementos de $H(z) = (h_{ij}(z))$, segue que

$$h_{ij}(z) = \begin{cases} O(|z-1|^\alpha), & \alpha < 0 \\ O(\ln|z-1|), & \alpha = 0 \\ O(1), & \alpha > 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

quando $z \rightarrow 1$. Novamente, o ponto 1 será uma singularidade removível de $h_{ij}(z)$, assim como -1 também será (os argumentos são os mesmos, utilizando-se (2.11)). Além disso, para $x \in (-1, 1)$,

$$\begin{aligned}
H_+(x) &= \tilde{V}_+(x)[V_+]^{-1}(x) \\
&= \tilde{V}_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [V_-]^{-1}(x) \\
&= \tilde{V}_-(x)[V_-]^{-1}(x) \\
&= H_-(x)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

e, assim, pelo Corolário 1.3 aplicado a cada um de seus elementos, $H(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ (veja também a Observação 1.2). Mas, como -1 e 1 são ambas singularidades removíveis, então $H(z)$ é analítica em \mathbb{C} .

Finalmente, quando $z \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
H(z) &= \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} z^{-n} & 0 \\ 0 & z^n \end{pmatrix} \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \right] \\
&= I + O\left(\frac{1}{z}\right)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

e, aplicando o Teorema de Liouville em cada um dos elementos de $H(z)$, resta somente que $H \equiv I$ e, portanto $\tilde{V} = V$. ■

Pelos Teoremas 2.2 e 2.3, garantimos que $Y(z)$, dada em (2.12), é a única solução de Y-RHP.

2.3.2 Solução para um T-RHP

Neste RHP, consideraremos novamente $\Sigma = [-1, 1]$, todavia agora a matriz de salto $J(z)$ será

$$J(x) = \begin{pmatrix} \varphi_+(x)^{-2n} & w(x) \\ 0 & \varphi_-(x)^{-2n} \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

onde $w(x)$ é a mesma função descrita em (2.9) e $\varphi : \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus S^1$ é a função dada por

$$\varphi(z) = z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.34}$$

Vale ressaltar que tal função possui as seguintes propriedades:

- $\varphi(z) = O(2z)$, quando $z \rightarrow \infty$

De fato: podemos utilizar a série de Taylor para mostrar que

$$z^2 - 1 = z^2 \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = \frac{z^2}{1 - \frac{1}{z^2}} = \frac{z^2}{1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \dots}$$

e, assim, para $z \rightarrow \infty$, teremos $(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = O(z)$.

- $\varphi(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ e $\varphi_+(x)\varphi_-(x) = 1$, para todo $x \in (-1, 1)$

De fato: escolha para $z^{\frac{1}{2}}$ o ramo definido por

$$g(z) = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\arg(z)}{2}}, \quad -\pi < \arg(z) \leq \pi.$$

Então, $g(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ e descontínua em $(-\infty, 0)$, com $g_+(x) = \overline{g_-(x)}$ para todo $x < 0$. Por esse motivo, $g(z^2 - 1)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ e descontínua em $(-1, 1)$ e, portanto, $\varphi(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Note, agora, que $\varphi_+(x) = \lim_{z \rightarrow x} \varphi(z) = x + i\sqrt{1 - x^2}$, com $z \in \mathbb{C}_+$ e $x \in (-1, 1)$.

Logo,

$$\varphi_+(x)\varphi_-(x) = \varphi_+(x)\overline{\varphi_+(x)} = (x + i\sqrt{1 - x^2})(x - i\sqrt{1 - x^2}) = 1$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

De volta ao RHP, nosso objetivo é encontrar uma matriz $T = T(z)_{2 \times 2}$, que satisfaz:

- $T(z)$ é analítica para $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
- $T_+(x) = T_-(x) \begin{pmatrix} \varphi_+(x)^{-2n} & w(x) \\ 0 & \varphi_-(x)^{-2n} \end{pmatrix}$, para $x \in (-1, 1)$.
- $T(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right)$, quando $z \rightarrow \infty$.

Também imporemos, sobre a solução $T(z)$, duas condições assintóticas para quando $z \rightarrow \pm 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, que são:

(d) Quando $z \rightarrow 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$,

$$T(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^\alpha \\ 1 & |z-1|^\alpha \end{pmatrix}, & \text{se } \alpha < 0, \\ O \begin{pmatrix} 1 & \ln|z-1| \\ 1 & \ln|z-1| \end{pmatrix}, & \text{se } \alpha = 0, \\ O \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{se } \alpha > 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

(e) Quando $z \rightarrow -1$, $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$,

$$T(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & |z+1|^\beta \\ 1 & |z+1|^\beta \end{pmatrix}, & \text{se } \beta < 0, \\ O \begin{pmatrix} 1 & \ln|z+1| \\ 1 & \ln|z+1| \end{pmatrix}, & \text{se } \beta = 0, \\ O \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{se } \beta > 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Daqui em diante, um RHP cuja solução satisfaz as condições (a) - (e) anteriores, será denotado por **T-RHP**.

Lema 2.1. *A matriz $T(z)$, dada por*

$$T(z) = \begin{pmatrix} 2^n \varphi^{-n}(z) P_n(z) & \frac{2^n \varphi^n(z)}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x) w(x)}{x-z} dx \\ 2^{-n} \varphi^{-n}(z) (-2\pi \gamma_n^2) P_n(z) & \frac{2^{-n} \varphi^n(z) (-\gamma_n^2)}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x) w(x)}{x-z} dx \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

é a única solução para o T-RHP, em que $P_n(x)$, $w(x)$ e γ_n são os mesmos de (2.12), e $\varphi(z)$ é dada segundo (2.34).

Demonstração: Observe que $T(z)$ pode ser reescrita como segue:

$$T(z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}}_M Y(z) \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi(z)^{-n} & 0 \\ 0 & \varphi(z)^n \end{pmatrix}}_{P(z)}, \quad (2.38)$$

em que $Y(z)$ é a solução do Y-RHP dada em (2.12). Mostremos, então, que $T(z)$ satisfaz cada uma das condições do T-RHP:

(a) Note que as matrizes M e $P(z)$ são ambas analíticas em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ (veja as propriedades de $\varphi(z)$ a partir de (2.34)). Conseqüentemente, pelo fato de $Y(z)$ satisfazer Y-RHP(a), tem-se que $T(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

(b) Por (2.38) e sabendo que $Y(z)$ satisfaz Y-RHP(b), mostra-se facilmente que, para $x \in (-1, 1)$,

$$\begin{aligned}
 T_+(x) &= MY_+(x)P_+(x) \\
 &= MY_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_+(x) \\
 &= T_-(x)P_-^{-1}(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_+(x) \\
 &= T_-(x) \begin{pmatrix} \varphi_+(x)^{-2n} & w(x) \\ 0 & \varphi_-(x)^{-2n} \end{pmatrix}. \tag{2.39}
 \end{aligned}$$

(c) Dado que $Y(z)$ satisfaz Y-RHP(c), segundo (2.38) e o fato de que

$$\varphi(z) = O(2z) \tag{2.40}$$

quando $z \rightarrow \infty$, então temos que

$$\begin{aligned}
 T(z) &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2z)^{-n} & 0 \\ 0 & (2z)^n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \\
 &= \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \tag{2.41}
 \end{aligned}$$

quando $z \rightarrow \infty$.

(d) Como a função $\varphi(z)$ é limitada numa vizinhança de 1, então, através de (2.38), temos que $T(z)$ possui o mesmo comportamento assintótico de $Y(z)$ quando $z \rightarrow 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

(e) Pelo mesmo argumento utilizado em (d), prova-se que $T(z)$ satisfaz à condição

T-RHP(e).

A unicidade de $T(z)$ segue do fato que

$$Y(z) = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} T(z) \begin{pmatrix} \varphi(z)^n & 0 \\ 0 & \varphi(z)^{-n} \end{pmatrix}$$

é uma solução do Y-RHP. Logo, pelo Teorema 2.3, temos que $T(z)$ é a única solução do T-RHP. ■

2.3.3 Solução para um S-RHP

Para este tipo de RHP, consideraremos o contorno orientado $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ contido em U , como mostra a Figura 2.2.

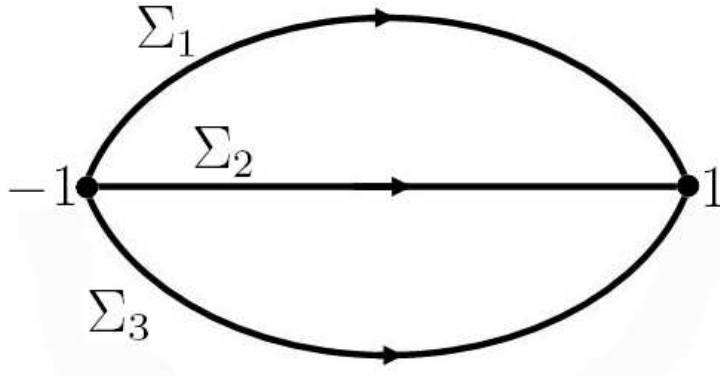


Figura 2.2: O contorno Σ

Σ_1 e Σ_3 são arcos suaves, $\Sigma_2 = [-1, 1]$ e U (ver Figura 2.1) é a região onde $h(x)$, dada em (2.9), é analítica.

Note que Σ possui "formato similar ao de uma lente". Desse modo, a fim de simplificarmos a notação, nos referiremos

- à *parte superior da lente* como a região aberta delimitada por Σ_1 e Σ_2 ,
- à *parte inferior da lente* como a região aberta delimitada por Σ_2 e Σ_3 ,
- ao *exterior da lente* como a região aberta no exterior de Σ .

Além disso, defina

$$\Sigma_j^o = \Sigma_j \setminus \{-1, 1\}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Utilizando a expressão da matriz $J(x)$ dada em (2.33), podemos obter uma fatoração da mesma como segue:

$$J(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(x)\varphi_-(x)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(x)^{-1}\varphi_+(x)^{-2n} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Observe que $\varphi_+(x)\varphi_-(x) = 1$, conforme visto anteriormente na Seção §2.3.2.

Consideraremos, também, a extensão analítica da função peso $w(x)$ em $U \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$ dada por

$$w(z) = (1 - z)^\alpha (1 + z)^\beta h(z). \quad (2.43)$$

Tal extensão é não-nula em $U \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$, uma vez que $Re(h(z)) > 0$ em U (veja (2.9)).

Assim, dados estes elementos, buscamos uma matriz $S = S(z)$ que satisfaça:

- $S(z)$ é analítica para $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$.
- $S(z)$ possui as seguintes relações de salto em $\Sigma \setminus \{-1, 1\}$:

$$S_+(x) = S_-(x) \begin{pmatrix} 0 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{para } x \in (-1, 1), \quad (2.44)$$

$$S_+(z) = S_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{para } z \in \Sigma_1^o \cup \Sigma_3^o. \quad (2.45)$$

- $S(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right)$, quando $z \rightarrow \infty$.

- Quando $z \rightarrow 1$, o comportamento de $S(z)$ dependerá de α como segue:

Para $\alpha < 0$,

$$S(z) = O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^\alpha \\ 1 & |z-1|^\alpha \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma. \quad (2.46)$$

Para $\alpha = 0$,

$$S(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & \ln|z-1| \\ 1 & \ln|z-1| \end{pmatrix}, & \text{para } z \rightarrow 1 \text{ pelo exterior da lente,} \\ O \begin{pmatrix} \ln|z-1| & \ln|z-1| \\ \ln|z-1| & \ln|z-1| \end{pmatrix}, & \text{para } z \rightarrow 1 \text{ pelo interior da lente.} \end{cases} \quad (2.47)$$

Por fim, para $\alpha > 0$,

$$S(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{para } z \rightarrow 1 \text{ pelo exterior da lente,} \\ O \begin{pmatrix} |z-1|^{-\alpha} & 1 \\ |z-1|^{-\alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \text{para } z \rightarrow 1 \text{ pelo interior da lente.} \end{cases} \quad (2.48)$$

(e) Quando $z \rightarrow -1$, o comportamento de $S(z)$ fica determinado simplesmente substituindo-se, em (2.46), (2.47) e (2.48), α por β , $|z-1|$ por $|z+1|$ e $z \rightarrow -1$ por $z \rightarrow 1$.

Doravante, o RHP satisfazendo as condições (a) - (e) anteriores será denotado por **S-RHP**.

Teorema 2.4. *A matriz $S = S(z)$ definida por*

$$S(z) = \begin{cases} T(z), & \text{para } z \text{ no exterior da lente} \\ T(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix}, & \text{para } z \text{ na parte superior da lente} \\ T(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix}, & \text{para } z \text{ na parte inferior da lente} \end{cases} \quad (2.49)$$

é uma solução do S-RHP, em que $T(z)$, $w(z)$ e $\varphi(z)$ são dados respectivamente por (2.37), (2.43) e (2.34).

Demonstração: Mostremos que $S(z)$ satisfaz cada uma das condições do S-RHP.

(a) Dado que $T(z)$ e $\varphi(z)$ são analíticas em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, temos que ambas são analíticas em $\mathbb{C} \setminus \Sigma$. A função $w(z)$ (a extensão analítica de (2.9)) é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, em particular, ela também é analítica em $\mathbb{C} \setminus \Sigma$. O resultado segue da construção de $S(z)$.

(b) Nas relações de salto de $S(z)$, observe que z pode pertencer a Σ_1^o , $\Sigma_2^o = (-1, 1)$ ou a Σ_3^o . Façamos a prova de cada caso separadamente:

- Suponhamos que $z \in \Sigma_1^o$. Então, pela definição de $S(z)$,

$$\begin{aligned} S_+(z) &= T_+(z) = T(z) = T(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= T(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \\ &= S_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e a igualdade se verifica.

- Para $z \in \Sigma_3^o$, a demonstração é feita de maneira similar à anterior.
- Para $x \in (-1, 1)$, temos, também pela definição de $S(z)$, que

$$\begin{aligned} S_+(x) &= T_+(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w(x)^{-1}\varphi(x)_+^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \\ &= T_-(x) \begin{pmatrix} \varphi_+(x)^{-2n} & w(x) \\ 0 & \varphi_-(x)^{-2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w(x)^{-1}\varphi(x)_+^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \\ &= T_-(x) \begin{pmatrix} 0 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & \varphi_-(x)^{-2n} \end{pmatrix} \\ &= T_-(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(x)^{-1}\varphi_-(x)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= S_-(x) \begin{pmatrix} 0 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

o que comprova o resultado.

(c) Para $z \rightarrow \infty$ temos $S(z) = T(z)$, uma vez que z pertence ao exterior da lente. Portanto, a condição S-RHP(c) é satisfeita.

(d) Primeiramente, note que $S(z)$ apresenta o mesmo comportamento de $T(z)$ à medida que z se aproxima de 1 pelo exterior da lente. Assim, vamos analisar, de acordo com o sinal de α , o comportamento de $S(z)$ quando $z \rightarrow 1$ pela parte superior da lente. Os resultados obtidos neste contexto serão válidos mesmo no caso em que $z \rightarrow 1$ pela parte inferior da lente.

- Caso $\alpha < 0$:

Note que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

tendo em vista que

$$\lim_{z \rightarrow 1} w^{-1}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta}h^{-1}(z) = 0, \quad z \notin \Sigma$$

e, também, que $\lim_{z \rightarrow 1} \varphi(z) = 1$. Logo, por $T(z)$ satisfazer (2.35), $S(z)$ satisfaz (2.46).

- Caso $\alpha = 0$:

Por (2.9), temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

quando $z \rightarrow 1$ pela parte superior da lente, onde $c = 2^{-\beta}h(1)$ é uma constante não-nula. Assim,

$$S(z) = O \begin{pmatrix} 1 + c \ln|z-1| & \ln|z-1| \\ 1 + c \ln|z-1| & \ln|z-1| \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} \ln|z-1| & \ln|z-1| \\ \ln|z-1| & \ln|z-1| \end{pmatrix}$$

para $z \rightarrow 1$ pela parte superior da lente.

- Caso $\alpha > 0$: Novamente por (2.9), observe que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ |z-1|^{-\alpha} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Logo, da mesma forma que procedemos no caso em que $\alpha = 0$, pode-se mostrar que

$$S(z) = O \begin{pmatrix} |z-1|^{-\alpha} & 1 \\ |z-1|^{-\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

quando $z \rightarrow 1$ pela parte superior da lente.

(e) A demonstração segue de maneira análoga à feita em (d). ■

Até aqui, provamos que dada uma solução para T-RHP, obtemos, através de (2.49), uma solução para S-RHP. A fim de demonstrarmos a unicidade de $S(z)$, considere a matriz $\tilde{T}(z)$ dada por

$$\tilde{T}(z) = \begin{cases} \tilde{S}(z), & \text{para } z \text{ no exterior da lente} \\ \tilde{S}(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix}, & \text{para } z \text{ na parte superior da lente} \\ \tilde{S}(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix}, & \text{para } z \text{ na parte inferior da lente} \end{cases} \quad (2.53)$$

onde $\tilde{S}(z)$ é uma solução para S-RHP e mostremos que $\tilde{T}(z)$ é uma solução para T-RHP.

Teorema 2.5. *Sejam $\tilde{S}(z)$ uma solução do S-RHP e $\tilde{T}(z)$ definida como em (2.53). Então, $\tilde{T}(z)$ é uma solução para RHP-T.*

Demonstração: Concentrar-nos-emos em mostrar que $\tilde{T}(z)$ satisfaz às condições (d) e (e) do T-RHP, uma vez que a demonstração de que $\tilde{T}(z)$ satisfaz (a), (b) e (c) segue de maneira muito similar ao que foi feito na demonstração do Teorema 2.4.

Seja $T(z) = (t_{ij}(z))$ a (única) solução para T-RHP. Então, por (2.38),

$$\begin{aligned} \det(T(z)) &= \det \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \det(Y(z)) \det \begin{pmatrix} \varphi(z)^{-n} & 0 \\ 0 & \varphi(z)^n \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(2.12)}{=} \det \begin{pmatrix} P_n(z) & \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)w(x)}{x-z} dx \\ -2\pi i \gamma_{n-1}^2 P_{n-1}(z) & -\gamma_{n-1}^2 \int_{-1}^1 \frac{P_{n-1}(x)w(x)}{x-z} dx \end{pmatrix} \\ &= \int_{-1}^1 \gamma_{n-1}^2 \frac{P_n(x)P_{n-1}(z) - P_n(z)P_{n-1}(x)}{x-z} w(x) dx \\ &\stackrel{(1.7)}{=} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(x)P_k(z)}{a_1 a_2 \dots a_{k+1}} w(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(z)}{a_1 a_2 \dots a_{k+1}} \int_{-1}^1 P_k(x)w(x) dx \\ &\stackrel{\text{Def. (1.2)}}{=} \frac{1}{a_1} \int_{-1}^1 w(x) dx \stackrel{\text{Obs. 1.1}}{=} 1. \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$T^{-1}(z) = \begin{pmatrix} t_{22}(z) & -t_{12}(z) \\ -t_{21}(z) & t_{11}(z) \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

existe e é analítica para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Defina $W(z)$ como

$$\begin{aligned} W(z) &:= \tilde{T}(z)T^{-1}(z) \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{t}_{11}(z)t_{22}(z) - \tilde{t}_{12}(z)t_{21}(z) & \tilde{t}_{12}(z)t_{11}(z) - \tilde{t}_{11}(z)t_{12}(z) \\ \tilde{t}_{21}(z)t_{22}(z) - \tilde{t}_{22}(z)t_{21}(z) & \tilde{t}_{22}(z)t_{11}(z) - \tilde{t}_{21}(z)t_{12}(z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Assim, $W(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Dado que $T(z)$ e $\tilde{T}(z)$ possuem a mesma relação de salto para $x \in (-1, 1)$, procedendo de forma análoga ao apresentado na demonstração do Teorema 2.3, segue que $W(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

A fim de determinarmos o comportamento de $W(z)$ quando $z \rightarrow 1$, analisemos primeiramente o comportamento de $\tilde{T}(z)$ segundo o sinal de α :

- Quando $\alpha < 0$, temos, por (2.50), que

$$T(z) = O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^\alpha \\ 1 & |z-1|^\alpha \end{pmatrix}$$

quando $z \rightarrow 1$, seja pelo interior ou pelo exterior da lente.

- Quando $\alpha = 0$, segue de (2.51) que

$$T(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & \ln|z-1| \\ 1 & \ln|z-1| \end{pmatrix}, & \text{para } z \rightarrow 1 \text{ pelo exterior da lente,} \\ O \begin{pmatrix} \ln|z-1| & \ln|z-1| \\ \ln|z-1| & \ln|z-1| \end{pmatrix}, & \text{para } z \rightarrow 1 \text{ pelo interior da lente.} \end{cases}$$

- Por fim, quando $\alpha > 0$, segundo (2.52) obtém-se

$$T(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{para } z \rightarrow 1 \text{ pelo exterior da lente,} \\ O \begin{pmatrix} |z-1|^{-\alpha} & 1 \\ |z-1|^{-\alpha} & 1 \end{pmatrix}, & \text{para } z \rightarrow 1 \text{ pelo interior da lente.} \end{cases}$$

Logo, combinando (2.35) e (2.55), teremos, quando $z \rightarrow 1$, que:

$$W(z) = O \begin{pmatrix} |z-1|^\alpha & |z-1|^\alpha \\ |z-1|^\alpha & |z-1|^\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{caso } \alpha < 0,$$

$$W(z) = O \begin{pmatrix} \ln|z-1| & \ln|z-1|^2 \\ \ln|z-1| & \ln|z-1|^2 \end{pmatrix}, \quad \text{caso } \alpha = 0,$$

e, por fim,

$$W(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{para } z \rightarrow 1 \text{ pelo exterior da lente} \\ O \begin{pmatrix} |z-1|^{-\alpha} & |z-1|^{-\alpha} \\ |z-1|^{-\alpha} & |z-1|^{-\alpha} \end{pmatrix}, & \text{para } z \rightarrow 1 \text{ pelo interior da lente} \end{cases},$$

caso $\alpha > 0$.

Mostremos, agora, que a singularidade de $W(z)$ em 1 é removível (de maneira análoga, é possível mostrar que a singularidade em -1 também é removível):

- Quando $\alpha \leq 0$, utilizando a regra de L'Hôspital, segue que

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)w_{ij}(z) = 0,$$

onde $w_{ij}(z)$ é qualquer um dos elementos de $W(z)$ e, dessa forma, a singularidade em 1 é removível (lembrando que $\alpha > -1$).

- Quando $\alpha > 0$, temos que $W(z)$ permanece limitada quando $z \rightarrow 1$ pelo exterior da lente. Dessa forma, a singularidade em 1 não pode ser um pólo. Além disso, para qualquer $m > \alpha$ inteiro,

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^m |z-1|^{-\alpha} = 0$$

e, assim, a singularidade em 1 não é uma singularidade essencial. Resta-nos, por exclusão, somente a possibilidade de que 1 é uma singularidade removível.

Observe que a analiticidade de $W(z)$ se estende a todo plano complexo, haja visto que as singularidades em ± 1 são removíveis. Além disso, utilizando (2.55) e as condições T-RHP(c) e S-RHP(c), tem-se

$$W(z) \rightarrow I, \quad \text{quando } z \rightarrow \infty.$$

Dessa forma, pelo Corolário 1.4, $W(z) \equiv I$. Portanto, conclui-se que $T(z) = \tilde{T}(z)$.

Dessa maneira, a solução $S(z)$ é única. ■

2.3.4 Solução para um N-RHP

Consideremos agora $\Sigma = [-1, 1]$ e a matriz de salto $J(z)$ dada como segue:

$$J(z) = \begin{pmatrix} 0 & w(z) \\ -w(z)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

onde $w(x)$ é uma modificação da função peso de Jacobi, segundo (2.9).

Queremos encontrar uma matriz $N = N(z)_{2 \times 2}$, que satisfaça:

- $N(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
- $N_+(x) = N_-(x) \begin{pmatrix} 0 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, para todo $x \in (-1, 1)$.
- $N(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right)$, quando $z \rightarrow \infty$.

Um RHP satisfazendo as condições (a), (b) e (c) acima será denotado por **N-RHP**.

Afim de encontrarmos uma solução para este N-RHP, necessitaremos da função de Szegő, dada por

$$D(z) = D(z, w) = \exp\left(\frac{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(w(x))}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{x-z}\right). \quad (2.57)$$

Esta função possui as seguintes propriedades (veja [11, ?]):

- $D(z)$ é analítica e não-nula em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$,
- $D_+(x)D_-(x) = w(x)$, quando $x \in (-1, 1)$,
- $\lim_{z \rightarrow \infty} D(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(w(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx\right) = D_\infty$, onde $0 < D_\infty < \infty$.

Proposição 2.1. *A matriz $N(z)$ abaixo descrita é uma solução para N-RHP:*

$$N(z) = \begin{pmatrix} D_\infty & 0 \\ 0 & D_\infty^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a(z)+a(z)^{-1}}{2} & \frac{a(z)-a(z)^{-1}}{2i} \\ \frac{a(z)-a(z)^{-1}}{-2i} & \frac{a(z)+a(z)^{-1}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(z)^{-1} & 0 \\ 0 & D(z) \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

onde $a(z) = \frac{(z-1)^{\frac{1}{4}}}{(z+1)^{\frac{1}{4}}}$.

Demonstração: Utilizando as notações

$$d^\infty = \begin{pmatrix} D_\infty & 0 \\ 0 & D_\infty^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad d(z) = \begin{pmatrix} D(z)^{-1} & 0 \\ 0 & D(z) \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

segue que $N(z) = d^\infty Q(z) d(z)$. Assim, para que $N(z)$ seja uma solução para N-RHP, $Q(z)$ deve satisfazer as seguintes condições:

- i) $Q(z)$ deve ser analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, uma vez que $d(z)$ já é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
- ii) Para todo $x \in (-1, 1)$,

$$Q_+(x) = Q_-(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

já que

$$\begin{aligned} N_+(x) &= N_-(x) \begin{pmatrix} 0 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ \implies d^\infty Q_+(x) d_+(x) &= d^\infty Q_-(x) d_-(x) \begin{pmatrix} 0 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ \implies Q_+(x) &= Q_-(x) \begin{pmatrix} 0 & D_+(x)^{-1} w(x) D_-(x)^{-1} \\ -D_+(x) w(x)^{-1} D_-(x) & 0 \end{pmatrix} \\ \implies Q_+(x) &= Q_-(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- iii) Para $z \rightarrow \infty$,

$$Q(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

tendo em vista que $d(z) = d_\infty^{-1}$ quando $z \rightarrow \infty$.

Encontremos, então, uma matriz que atenda às condições (i), (ii) e (iii) anteriores.

Primeiramente, observe que a matriz de salto em (2.60) para $Q(z)$ pode ser fatorada como segue:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Assim, definindo

$$Q'(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} Q(z) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

podemos reescrever as condições (i), (ii) e (iii) anteriores como:

- $i')$ $Q'(z)$ deve ser analítica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

- $ii')$ Para todo $x \in (-1, 1)$,

$$Q'_+(x) = Q'_-(x) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

iii') Quando $z \rightarrow \infty$,

$$Q'(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Suponhamos agora que $Q'(z) = (q'_{ij}(z))$ seja uma matriz diagonal. Dessa forma, $q'_{11}(z)$ e $q'_{22}(z)$ serão, respectivamente, as soluções para os RHP apresentados em §2.2.2 e §2.2.3, com $[-a, a] = [-1, 1]$. Ou seja,

$$Q'(z) = \begin{pmatrix} a(z) & 0 \\ 0 & a(z)^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

onde $a(z) = \frac{(z-1)^{\frac{1}{4}}}{(z+1)^{\frac{1}{4}}}$. Portanto, através de (2.62), teremos que

$$Q(z) = \begin{pmatrix} \frac{a(z)+a(z)^{-1}}{2} & \frac{a(z)-a(z)^{-1}}{2i} \\ \frac{a(z)-a(z)^{-1}}{-2i} & \frac{a(z)+a(z)^{-1}}{2} \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.1. *É importante ressaltar que até o presente momento não garantimos a unicidade da solução $N(z)$ para N -RHP. Porém, no próximo capítulo serão impostas algumas condições adicionais ao N -RHP, condições estas suficientes para garantirmos a unicidade de $N(z)$.*

Observação 2.2. *Utilizando $w(z)$ dada segundo (2.43), é possível mostrar que, para $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$,*

$$D(z) = D(z, w) = \frac{(z-1)^{\frac{\alpha}{2}}(z+1)^{\frac{\beta}{2}}}{\varphi(z)^{\frac{(\alpha+\beta)}{2}}} \exp\left(\frac{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(h(x))}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{x-z}\right) \quad (2.66)$$

onde $\varphi(z)$ é dada em (2.34). Logo, para $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, é possível obter a informação de que

$$D(z) = \begin{cases} O(|z-1|^{\frac{\alpha}{2}}), & z \rightarrow 1, \\ O(|z+1|^{\frac{\beta}{2}}), & z \rightarrow -1. \end{cases} \quad (2.67)$$

Esta propriedade nos será útil no próximo capítulo.

Capítulo 3

Assintóticas para polinômios ortogonais

Mostraremos, agora, como utilizar os exemplos de RHP explorados no Capítulo 2, para se determinar assintóticas para os polinômios ortogonais em $[-1, 1]$, relativamente à função peso modificada de Jacobi

$$w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta h(x),$$

onde $\alpha, \beta > -1$ e $h(x)$ é uma função real positiva e analítica numa vizinhança aberta U de $[-1, 1]$, com parte real positiva. Este estudo será feito para o caso particular em que $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$.

Inicialmente vamos esclarecer a estratégia de abordagem que vamos seguir. O *método de máxima descida* de Deift e Zhou consiste de uma seqüência de transformações que partem de uma matriz Y até uma matriz R ,

$$Y \mapsto T \mapsto S \mapsto R$$

onde R será a solução de um RHP com as seguintes características:

- i)* R é analítica em $\mathbb{C} \setminus \gamma$;
- ii)* $R_+(z) = R_-(z)J(z)$, para $z \in \gamma$;
- iii)* $R(z) \rightarrow I$ quando $z \rightarrow \infty$;
- iv)* Existe $\delta > 0$ tal que $\|J(z) - I\| < \delta$, numa vizinhança aberta de γ ,

sendo γ um contorno fechado simples. Entretanto, a solução $R = R(z)$ não será determinada explicitamente! Na realidade, estimaremos o valor dos elementos de R através do próximo teorema (para maiores detalhes sobre o mesmo, veja [8]).

Teorema 3.1. *Sejam γ um contorno fechado simples e Ω uma vizinhança aberta de γ . Se existir $\delta > 0$ tal que*

$$\|J(z) - I\|_{\Omega} < \delta$$

para $z \in \Omega$, então existirá uma constante $C > 0$ de tal maneira que, dada uma solução R do RHP (i), (ii) e (iii) anterior, teremos

$$\|R(z) - I\|_{\Omega} < C\|J(z) - I\|_{\Omega}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma.$$

Assim, na prática, o que faremos será relacionar a matriz $Y(z)$, dada em (2.12), a uma matriz $R(z)$ muito próxima a I , através de transformações que sejam todas inversíveis. Logo, percorrendo $Y \mapsto T \mapsto S \mapsto R$ em sentido inverso, encontraremos assintóticas para a matriz $Y(z)$ válidas em qualquer região do plano complexo. Como o primeiro elemento de $Y(z)$ é exatamente o polinômio $P_n(x)$ ortogonal em $[-1, 1]$ com relação a $w(x)$, teremos então encontrado assintóticas para $P_n(x)$ válidas em todo plano complexo.

3.1 Partindo de $Y(z)$

Relembremos que a matriz $Y(z)$ dada em (2.12) é a única solução para o Y-RHP apresentado em §2.3.1. Salientamos que neste caso a matriz de salto era, segundo (2.8),

$$\begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

e, além disso, tínhamos que

$$Y(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}$$

quando $z \rightarrow \infty$. Temos, então, o seguinte problema a considerar: a matriz de salto (3.1) não é próxima à identidade, o mesmo acontecendo com $Y(z)$ quando $z \rightarrow \infty$.

3.2 Primeira transformação: $Y \mapsto T$

Obtemos a matriz $T(z)$ através da transformação

$$T(z) = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} Y(z) \begin{pmatrix} \varphi(z)^{-n} & 0 \\ 0 & \varphi(z)^n \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

onde $\varphi(z)$ é dada em (2.34). O efeito dessa transformação foi o de normalizar $T(z)$ quando $z \rightarrow \infty$, isto é,

$$T(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Todavia, a matriz de salto para $T(z)$, dada por

$$\begin{pmatrix} \varphi_+(x)^{-2n} & w(x) \\ 0 & \varphi_-(x)^{-2n} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

possui os elementos da diagonal com valor absoluto igual a 1, permanecendo ainda distante da identidade.

3.3 Segunda transformação: $T \mapsto S$

A formulação do S-RHP foi baseada na fatoração da matriz de salto (3.3) em

$$J(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(x)\varphi_-(x)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(x)^{-1}\varphi_+(x)^{-2n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Também expandimos o intervalo $[-1, 1]$ para o contorno Σ , com formato de lentes, e obtivemos a matriz $S(z)$ através da transformação

$$S(z) = \begin{cases} T(z), & \text{para } z \text{ no exterior da lente,} \\ T(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix}, & \text{para } z \text{ na parte superior da lente,} \\ T(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix}, & \text{para } z \text{ na parte inferior da lente.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Observe que $S(z)$ permanece normalizada quando $z \rightarrow \infty$. Além disso, temos agora que, para valores suficientemente grandes de n , a matriz de salto para $z \in \Sigma_1^\circ \cup \Sigma_3^\circ$, dada em (2.45) por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix},$$

é tão próxima da identidade quanto se queira. Contudo, a matriz de salto quando $x \in (-1, 1)$, ou seja,

$$S_+(x) = S_-(x) \begin{pmatrix} 0 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

dada em (2.44), ainda não é próxima da identidade.

3.4 Caso especial: $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$

Ao considerarmos $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, a análise dos RHP considerados se tornará mais simples. Daí, estabeleceremos algumas condições extras que nos permitirão ajustar o S-RHP, de modo que a matriz de salto (2.44) se aproxime de I .

3.4.1 A matriz $S(z)$ para $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$

Observe que, para estes valores de α e β , a função $w(z)$ de (2.43) se torna

$$w(z) = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} h(z). \quad (3.5)$$

Nesse caso, consideramos o contorno Σ do S-RHP de modo que Σ_1 e Σ_3 coincidam em algum ponto dos intervalos $[-1 - \delta, -1]$ e $[1, 1 + \delta]$, com $\delta > 0$, de tal maneira que $[-1 - \delta, 1 + \delta] \subset U$, a região onde $h(z)$ é analítica, como mostra a Figura 3.1.

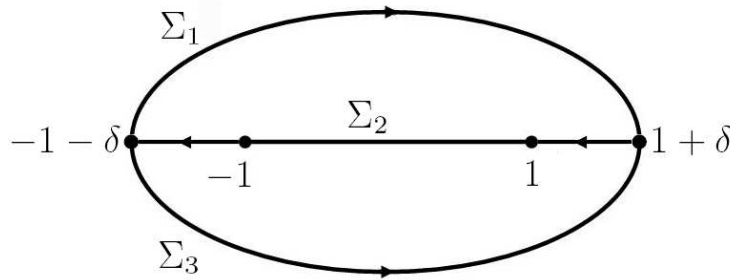


Figura 3.1: O contorno $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$

Note agora que, nos intervalos $(-1 - \delta, -1)$ e $(1, 1 + \delta)$, duas relações de salto estão combinadas: o salto de $S(z)$ quando $z \in \Sigma_1^o \cup \Sigma_3^o$ (veja (2.45)) e o salto da própria função $w(z)$, uma vez que

$$w_+(x) = -w_-(x), \quad \text{para } x < 1 \text{ ou } x > 1, \quad x \in U. \quad (3.6)$$

Porém para x pertencente a $(-1 - \delta, -1)$ ou $(1, 1 + \delta)$, tem-se

$$\begin{aligned} S_+(x) &= T(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w_+(x)^{-1}\varphi(x)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(3.6)}{=} T(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w_-(x)^{-1}\varphi(x)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} = S_-(x), \end{aligned}$$

ou seja, S é contínua em $(-1 - \delta, -1)$ e $(1, 1 + \delta)$. Isto, juntamente com o Corolário 1.3, nos fornece a informação de que $S(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \Sigma$, onde estamos considerando $\Sigma = \gamma \cup [-1, 1]$, como mostra a Figura 3.2.

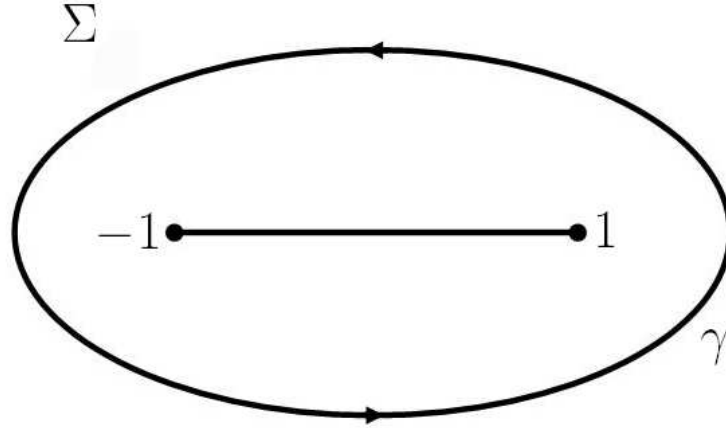


Figura 3.2: O contorno $\Sigma = \gamma \cup [-1, 1]$ para S-RHP, quando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$

Dessa forma, S é a única solução do seguinte RHP:

(a) $S(z)$ é analítica para $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$.

(b) As relações de salto para $S(z)$ são:

$$S_+(x) = S_-(x) \begin{pmatrix} 0 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para } x \in (-1, 1), \quad (3.7)$$

$$S_+(z) = S_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para } z \in \gamma \cap \{\text{Im}(z) < 0\}, \quad (3.8)$$

$$S_+(z) = S_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para } z \in \gamma \cap \{\text{Im}(z) > 0\}. \quad (3.9)$$

(c) $S(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right)$, quando $z \rightarrow \infty$.

(d) Quando $z \rightarrow 1$,

$$S(z) = O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^{-\frac{1}{2}} \\ 1 & |z-1|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad z \notin [-1, 1]. \quad (3.10)$$

(e) Quando $z \rightarrow -1$,

$$S(z) = O \begin{pmatrix} 1 & |z+1|^{-\frac{1}{2}} \\ 1 & |z+1|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad z \notin [-1, 1]. \quad (3.11)$$

Mas a matriz de salto (3.7) para $x \in (-1, 1)$ *ainda* não é próxima da indentidade! A fim de resolvermos isso, relembremos o N-RHP do Capítulo 2.

3.4.2 A matriz $N(z)$ para $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$

Voltando ao N-RHP apresentado em §2.3.4, salientamos que não provamos a unicidade da solução $N(z)$ descrita em (2.58). Contudo, considerando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, podemos acrescentar duas condições ao N-RHP que irão garantir a unicidade de $N(z)$, quais sejam:

$$\text{d) } N(z) = O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^{-\frac{1}{2}} \\ 1 & |z-1|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \text{quando } z \rightarrow 1,$$

$$\text{e) } N(z) = O \begin{pmatrix} 1 & |z+1|^{-\frac{1}{2}} \\ 1 & |z+1|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \text{quando } z \rightarrow -1,$$

sendo que em ambos casos $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

De forma análoga à dinâmica adotada para provar que $Y(z)$ era a única solução para Y-RHP, pode-se mostrar que $N(z)$ será a única solução de N-RHP (a) - (e). Observe que (2.58) com $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ satisfaz também às condições (d) e (e) anteriores. De fato: observe que o comportamento de $Q(z)$ dada em (2.65) é tal que

$$Q(z) = O \begin{pmatrix} |z-1|^{-\frac{1}{4}} & |z-1|^{-\frac{1}{4}} \\ |z-1|^{-\frac{1}{4}} & |z-1|^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}, \quad \text{quando } z \rightarrow 1, \quad (3.12)$$

uma vez que $a(z)^{-1} = \frac{(z+1)^{\frac{1}{4}}}{(z-1)^{\frac{1}{4}}} = O(|z-1|^{-\frac{1}{4}})$ quando $z \rightarrow 1$. Por outro lado, o comportamento de $d(z)$ dada em (2.59) será, de acordo com (2.67),

$$d(z) = O \begin{pmatrix} |z-1|^{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & |z-1|^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}, \quad \text{para } z \rightarrow 1. \quad (3.13)$$

Como $N(z) = d^\infty Q(z)d(z)$, com d_∞ constante dada em (2.59), teremos, por (3.12) e (3.13), que $N(z)$ satisfaz exatamente a condição N-RHP(d). A demonstração de que $N(z)$ também satisfaz N-RHP(e) pode ser feita de maneira análoga.

3.5 Terceira transformação: $S \mapsto R$

Finalmente, no caso em que $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, obteremos a matriz $R(z)$ através da transformação

$$R(z) = S(z)N^{-1}(z). \quad (3.14)$$

Pelo fato de $S(z)$ e $N(z)$ possuírem a mesma relação de salto em $(-1, 1)$, mostra-se facilmente que

$$\begin{aligned} R_+(x) &= S_+(x)N_+^{-1}(x) \\ &= S_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \left[N_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ -w(x)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= S_-(x)N_-^{-1}(x) = R_-(x) \end{aligned}$$

para $x \in (-1, 1)$. Em outras palavras, $R(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \gamma \cap \{-1, 1\}$, com singularidades isoladas em ± 1 . Mostremos que essas singularidades são removíveis. De fato: note inicialmente que $\det(N(z)) = 1$, já que

$$\begin{aligned} \det(N(z)) &\stackrel{(2.58)}{=} \det \begin{pmatrix} D_\infty & 0 \\ 0 & D_\infty^{-1} \end{pmatrix} \det(Q(z)) \det \begin{pmatrix} D(z)^{-1} & 0 \\ 0 & D(z) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{a(z)+a(z)^{-1}}{2} & \frac{a(z)-a(z)^{-1}}{2i} \\ \frac{a(z)-a(z)^{-1}}{-2i} & \frac{a(z)+a(z)^{-1}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{a(z)^2 + a(z)^{-2} + 2}{4} - \frac{a(z)^2 + a(z)^{-2} - 2}{4} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Assim, como

$$N(z) = O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^{-\frac{1}{2}} \\ 1 & |z-1|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

quando $z \rightarrow 1$, então

$$N^{-1}(z) = O \begin{pmatrix} |z-1|^{-\frac{1}{2}} & |z-1|^{-\frac{1}{2}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} R(z) &= O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^{-\frac{1}{2}} \\ 1 & |z-1|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} O \begin{pmatrix} |z-1|^{-\frac{1}{2}} & |z-1|^{-\frac{1}{2}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= O \begin{pmatrix} |z-1|^{-\frac{1}{2}} & |z-1|^{-\frac{1}{2}} \\ |z-1|^{-\frac{1}{2}} & |z-1|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

quando $z \rightarrow 1$. Ou seja, todos os elementos de $R(z) = (r_{ij}(z))$ são tais que $r_{ij}(z) = O(|z-1|^{-\frac{1}{2}})$ quando $z \rightarrow 1$. Assim, de maneira análoga à que procedemos na demonstração do Teorema 2.3, temos que a singularidade isolada em 1 é removível.

Utilizando argumentos similares, mostra-se que a singularidade em -1 também é removível, e portanto $R(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Por fim, temos que $R(z)$ é a solução do seguinte RHP, denotado por R-RHP:

i) R é analítica em $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

ii) Para $z \in \gamma$, temos $R_+(z) = R_-(z)J(z)$, onde

$$J(z) = \begin{cases} N(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} N^{-1}(z), & \text{se } \text{Im}(z) < 0, \\ N(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} N^{-1}(z), & \text{se } \text{Im}(z) > 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

iii) $R(z) \rightarrow I$ quando $z \rightarrow \infty$.

Como a matriz de salto $J(z) \rightarrow I$ à medida que $n \rightarrow \infty$, então, de acordo com o Teorema 3.1, segue que

$$R(z) \rightarrow I, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Observação 3.1. A relação de salto de R-RHP é facilmente verificável. Sem perda de generalidade, suponha $z \in \gamma$, com $\text{Im}(z) < 0$. Então,

$$\begin{aligned} R_+(z) &= S_+(z)N^{-1}(z) \\ &= S_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} N^{-1}(z) \\ &= S_-(z)N^{-1}(z)N(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(z)^{-1}\varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} N^{-1}(z) \\ &= R_-(z)J(z) \end{aligned}$$

e a igualdade se verifica.

3.6 Assintóticas para polinômios ortogonais

Mostraremos agora como obter assintóticas para os polinômios ortogonais em $[-1, 1]$, relativamente à função peso $w(x)$ de (2.9), no caso em que $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Isto nos será possível graças a (3.18).

3.6.1 Caso $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$

Neste caso, consideremos a curva γ (Figura 3.2) próxima ao intervalo $[-1, 1]$, de forma que z esteja no exterior de γ . Então,

$$\begin{aligned}
Y(z) &\stackrel{(2.38)}{=} \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} T(z) \begin{pmatrix} \varphi(z)^n & 0 \\ 0 & \varphi(z)^{-n} \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(2.49)}{=} \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} S(z) \begin{pmatrix} \varphi(z)^n & 0 \\ 0 & \varphi(z)^{-n} \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(3.14)}{=} \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} R(z)N(z) \begin{pmatrix} \varphi(z)^n & 0 \\ 0 & \varphi(z)^{-n} \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(3.18)}{=} \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} N(z) \begin{pmatrix} \varphi(z)^n & 0 \\ 0 & \varphi(z)^{-n} \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(2.58)}{=} \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\infty & 0 \\ 0 & D_\infty^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a(z)+a(z)^{-1}}{2} & \frac{a(z)-a(z)^{-1}}{2i} \\ \frac{a(z)-a(z)^{-1}}{-2i} & \frac{a(z)+a(z)^{-1}}{2} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} D(z)^{-1} & 0 \\ 0 & D(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(z)^n & 0 \\ 0 & \varphi(z)^{-n} \end{pmatrix} \tag{3.19}
\end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Logo, o elemento $y_{11}(z)$ de $Y(z)$ pode ser expresso através de (3.19), como segue:

$$y_{11}(z) = P_n(z) = \left(\frac{\varphi(z)}{2}\right)^n \frac{D_\infty}{D(z)} \frac{a(z) + a(z)^{-1}}{2}, \tag{3.20}$$

onde $\varphi(z)$ e $D(z)$ são descritas, respectivamente, por (2.34) e (2.57), e $a(z) = \frac{(z-1)^{\frac{1}{4}}}{(z+1)^{\frac{1}{4}}}$.

Recordemos agora que, ao substituímos n por $n+1$ na fórmula de $y_{21}(z)$, teremos

$$y_{21}(z) = -2\pi i \gamma_n^2 P_n(z).$$

Pelo fato de $P_n(z)$ ser um polinômio mônico de grau n , temos então que

$$\gamma_n^2 = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{-n} y_{21}(z) \quad (3.21)$$

e, assim, por (3.19), substituindo n por $n + 1$, teremos

$$\begin{aligned} \gamma_n^2 &= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{-n} \left[2^{n+1} \varphi(z)^{n+1} \frac{1}{D_\infty D(z)} \frac{a(z) - a(z)^{-1}}{-2i} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{z \rightarrow \infty} \left[2^{n+1} \left(\frac{\varphi(z)}{z} \right)^{n+1} \frac{z}{D_\infty D(z)} \frac{a(z) - a(z)^{-1}}{-2i} \right] \\ (2.34) \quad &\stackrel{=}{=} -\frac{1}{2\pi i} \frac{2^{2n+2}}{2i D_\infty^2} = \frac{2^{2n}}{\pi D_\infty^2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.6.2 Caso $x \in [-1, 1]$

Inicialmente, consideremos z pertencente à parte superior da lente (veja (2.49)) e façamos $z \rightarrow x \in (-1, 1)$:

$$\begin{aligned} Y(z) &\stackrel{(2.38)}{=} \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} T(z) \begin{pmatrix} \varphi(z)^n & 0 \\ 0 & \varphi(z)^{-n} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(2.53)}{=} \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} S(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(z)^{-1} \varphi(z)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(z)^n & 0 \\ 0 & \varphi(z)^{-n} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} R(z) N(z) \begin{pmatrix} \varphi(z)^n & 0 \\ w(z)^{-1} \varphi(z)^{-n} & \varphi(z)^{-n} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(3.18)}{=} \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} N(z) \begin{pmatrix} \varphi(z)^n & 0 \\ w(z)^{-1} \varphi(z)^{-n} & \varphi(z)^{-n} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(2.58)}{=} \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\infty & 0 \\ 0 & D_\infty^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a(z)+a(z)^{-1}}{2} & \frac{a(z)-a(z)^{-1}}{2i} \\ \frac{a(z)-a(z)^{-1}}{-2i} & \frac{a(z)+a(z)^{-1}}{2} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} D(z)^{-1} & 0 \\ 0 & D(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(z)^n & 0 \\ w(z)^{-1} \varphi(z)^{-n} & \varphi(z)^{-n} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dessa forma,

$$y_{11}(z) = P_n(z) = \left(\frac{\varphi(z)}{2} \right)^n \frac{D_\infty}{D(z)} \frac{a(z) + a(z)^{-1}}{2} + \left(\frac{1}{2\varphi(z)} \right)^n \frac{D_\infty D(z)}{w(z)} \frac{a(z) - a(z)^{-1}}{2i}. \quad (3.24)$$

Estudemos agora o valor de $\lim_{z^+ \rightarrow x} y_{11}(z)$, segundo (3.24). É possível mostrar que

$$\exp(i \arccos(x)) = x + i \operatorname{sen}(\arccos(x)) = x + i\sqrt{1-x^2} = \varphi_+(x),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{i}{2} \arccos(x) - \frac{\pi i}{4}\right) &= \frac{\sqrt{\varphi_+(x)}}{\sqrt{2} \sqrt[4]{(-1)(1-x^2)}} \\ &= \frac{a_+(x) + a_+(x)^{-1}}{2}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{i}{2} \arccos(x) + \frac{\pi i}{4}\right) = \frac{a_+(x) - a_+(x)^{-1}}{2i},$$

e que

$$\sqrt{w(x)} \exp\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(w(t))}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{x-t}\right) = D_+(x).$$

Portanto, combinando estes resultados adequadamente em (3.24), obteremos

$$P_n(x) = \frac{D_\infty}{2^n \sqrt{2w(x)}(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} (e_1(x) + e_2(x)), \quad (3.25)$$

onde

$$e_1(x) = \exp\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) i \arccos(x) - \frac{\pi i}{4} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(w(t))}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{x-t}\right]$$

e

$$e_2(x) = \exp\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) i \arccos(x) + \frac{\pi i}{4} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(w(t))}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{x-t}\right].$$

Apêndice

Este apêndice foi criado com o intuito de familiarizar o leitor às notações utilizadas ao longo deste trabalho. São elas:

Ordem de uma função (a notação O)

Dadas duas funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, existem dois casos onde pode-se dizer que f é da ordem de g , quais sejam:

- **Limite no infinito:** dizemos que f é da ordem de g quando x tende ao infinito, e utilizamos a notação $f(x) = O(g(x))$ quando $x \rightarrow \infty$, se, e somente se, existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(x)| \leq c|g(x)|, \text{ para todo } x \geq n_0.$$

- **Limite para um ponto c :** dizemos que f é da ordem de g quando x tende a um ponto c , e utilizamos a notação $f(x) = O(g(x))$ quando $x \rightarrow c$, se, e somente se, existem constantes $c, \varepsilon \in \mathbb{R}$, com $\varepsilon > 0$, tais que

$$|f(x)| \leq c|g(x)|, \text{ para todo } x \text{ tal que } |x - c| \leq \varepsilon.$$

Tal conceito pode ser estendido para o caso em que $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, como segue: dizemos que f é da ordem de g , e utilizamos a notação $f(z) = O(g(z))$, se, e somente se,

- existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(z)| \leq c|g(z)|, \text{ para todo } z \text{ tal que } |z| \geq n_0 \text{ (limite no infinito)}$$

- existem constantes $c, \varepsilon \in \mathbb{R}$, com $\varepsilon > 0$, tais que

$$|f(z)| \leq c|g(z)|, \text{ para todo } z \text{ tal que } |z - c| \leq \varepsilon \text{ (limite para um ponto } c)$$

Observação 1: É conveniente ressaltar que o papel da função g **não é** o de informar o comportamento assintótico do limite de f (seja no infinito ou para um ponto c). De fato, g se restringe a informar qual é a *magnitude* da função f , isto é, qual é o valor absoluto máximo que f *pode* assumir quando num determinado limite.

Observação 2: Nos casos em que f é uma soma de várias funções, é comum considerar-se somente a ordem da função que cresce mais rapidamente. Por exemplo, no caso em que f é uma soma de monômios,

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x,$$

considera-se que $f(x) = O(x^n)$.

Observação 3: No caso em que f é um produto de funções por fatores constantes, é comum omitir-se os termos constantes quando se está considerando a ordem de f . Por exemplo, no caso em que f é uma função do tipo

$$f(x) = 14e^x + 2,$$

considera-se que $f(x) = O(e^x)$.

Observação 4: Quando utilizamos a notação

$${}^{\text{''}}Y(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} \text{ quando } z \longrightarrow \infty{}^{\text{''}} \quad (3.26)$$

queremos dizer que

$$\begin{aligned} Y(z) &= \begin{pmatrix} 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) & O\left(\frac{1}{z}\right) \\ O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z^n + O(z^{n-1}) & O(z^{-(n+1)}) \\ O(z^{n-1}) & z^{-n} + O(z^{-(n+1)}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O(z^n) & O(z^{-(n+1)}) \\ O(z^{n-1}) & (z^{-(n+1)}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Perceba que já fizemos uso das Observações 2 e 3.

Referências Bibliográficas

- [1] Agawal, R.P.; Milovanović, G. V., *Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials*, Appl. Math. Comput., v. 128, p. 151-166, 2002.
- [2] Bleher, P. and Its, A., *Double scaling limit in the random matrix model: the Riemann-Hilbert approach*, Comm. Pure Appl. Math. **56**, (2003), 433-516.
- [3] Chihara, T.S., *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [4] Deift, P., *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach*, Courant Lectures Notes 3, New York University, 1999.
- [5] Deift, P.; Kriecherbauer, K.; McLaughlin, T-R.; Venakides, S; Zhou, X., *Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights*, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), 1491-1552.
- [6] Deift, P.; Kriecherbauer, K.; McLaughlin, T-R.; Venakides, S; Zhou, X., *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory*, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), 1335-1425.
- [7] Henrici, P., *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. I, Wiley Classics Library, United States of America, 1988.
- [8] Kuijlaars, A. B. J., *Riemann-Hilbert analysis for orthogonal polynomials*, in: Orthogonal Polynomials and Special Functions (E. Koelink en W. Van Assche eds), Lecture Notes in Mathematics Vol. 1817, Springer-Verlag, (2003), pp. 167-210.

- [9] Kuijlaars, A. B. J., McLaughlin T-R., Van Assche W., M. Vanlessen, *The Riemann-Hilbert approach to strong asymptotics for orthogonal polynomials on $[-1,1]$* , Advances in Math. 188 (2004), 337-398.
- [10] Muskhelishvili, N.I., *Singular Integral Equations*, Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, 1977.
- [11] Szegő, G., *Orthogonal Polynomials*, Fourth edition, Colloquium Publications, Vol. 23, Amer. Math. Soc. Providence R.I., 1975.