

Ricardo Nicasso Benito

A Redução de Liapunov-Schmidt e a Bifurcação  
de Hopf

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências,  
Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual  
Paulista, Câmpus de São José do Rio Preto, como parte  
dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

São José do Rio Preto  
2005

Benito, Ricardo Nicasso

A Redução de Liapunov-Schmidt e a bifurcação de Hopf/Ricardo  
Nicasso Benito – São José do Rio Preto : [s.n.], 2005

81 f. ; 30cm.

Orientador: Claudio Aguinaldo Buzzzi

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Insti-  
tuto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Teoria da bifurcação. 3.  
Hopf, Bifurcação de. 4. Liapunov-Schmidt, Redução de. I.  
Buzzzi, Claudio Aguinaldo. II. Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.93

# COMISSÃO JULGADORA

## Titulares

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi - Orientador

Prof. Dr. Ali Messaoudi

Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado

## Suplentes

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira

*Dedico à minha avó Maria  
Eugênia Roma Benito e ao  
meu avô Vicente Nicasso  
(in memoriam).*

# Agradecimentos

Ao final desse trabalho, gostaria de dar meus sinceros agradecimentos à todas as pessoas que de qualquer forma contribuíram para que o mesmo fosse realizado. Seria necessário muitas páginas para citar todos esses nomes, mas existem algumas que faço questão de citar com todo carinho e reconhecimento.

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi, primeiramente por ter aceito o desafio de orientar-me, por todo conteúdo matemático que aprendi ao seu lado durante nossos seminários, pela imensa paciência com minhas dificuldades, pela incomparável disposição, demonstrada nos finais de semana que passamos trabalhando no IBILCE e, enfim, pela valiosa e fundamental orientação.

Amigo Claudio Aguinaldo Buzzi, pelos sinceros conselhos no momento que pensei em desistir, passando-me firmeza, confiança e a certeza de minha capacidade de vencer; fazendo-me acreditar que dias melhores estavam por vir. Não podendo esquecer, é claro, dos sensacionais churrascos do grupo de Sistemas Dinâmicos, que renderam-me agradáveis momentos de alegria e diversão.

Meus queridos pais: Claudionor Alécio Benito (vulgo Titão, para quem é de Cajobi) e Aparecida de Fátima Nicasso Benito, ou somente Fátima. Muito obrigado por todos sacrifícios para que nunca faltasse nada nessa minha caminhada, pela educação e caráter que tenho hoje, pelo apoio que sempre tive e mais do que tudo, pela imensa confiança.

Agradeço à Dona Zezé e Sr. Marcos (pais do Fabinho), por terem acolhido-me no momento mais difícil desses 2 anos de mestrado. Não sei como explicar o tamanho da importância de vocês para a realização deste trabalho, muito menos o que é aquele pudim que a Sra. faz.

Meus amigos da república TranQra: Thiago, Sidney, Deni e José Eduardo pela gratificante convivência na inesquecível “TranQra”. Ubarana e Morera, por tantas e tantas alegrias compartilhadas em todo esse tempo de intensa amizade, pelas barras que seguraram sem medirem esforços, pela fundamental

ajuda do Sidney no terceiro capítulo dessa dissertação e pelas fáceis partidas de sinuca no “chalé”, as quais vocês sempre tentavam vencer.

Agradeço também a Daniele, por toda compreensão e carinho nesse tempo em que estamos juntos, por nunca ter se negado ouvir os detalhes estudados nessa dissertação (nem me lembro quantas vezes foram...) e pelo ombro amigo nas horas em que precisei. Agradeço ao seus pais por terem aguentado-me durante o carnaval de 2005, enquanto digitava parte deste trabalho.

Meus amigos de graduação e pós-graduação: Fabinho, Evandro, Flávio, Sabrina, Ciléia, Robinson, Juliano, Cristiane, Carina, Janete e Raffaella.

Os professores do departamento de matemática do IBILCE, pela formação e disposição que sempre encontrei quando foi preciso.

Meus amigos de São Paulo: Rafael e Julio, pelas sugestões com os problemas físicos, ao Carlos pela ajuda com o Linux e ao Márcio Gouveia, pela grande amizade e por todas as ajudas com a matemática.

Todos que me deram carona no trajeto Rio Preto-Cajobi.

Santos Futebol Clube, pelas alegrias nesses 2 anos de mestrado.

Deus.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Primeira Visão da Redução de Liapunov-Schmidt</b>	<b>14</b>
1.1 Derivação das Equações Reduzidas . . . . .	15
1.2 Breve Resumo da Redução de Liapunov-Schmidt . . . . .	18
<b>2 A Redução de Liapunov-Schmidt</b>	<b>20</b>
2.1 Operadores Fredholm de Índice Zero . . . . .	20
2.2 Mecanismo da Redução de Liapunov-Schmidt . . . . .	22
2.3 Os cálculos das derivadas de $g$ . . . . .	24
<b>3 A Elástica: Um Exemplo de Dimensão Infinita</b>	<b>30</b>
3.1 Descrição do Problema . . . . .	31
3.2 Análise do problema para $0 < \lambda < 1$ . . . . .	33
3.3 Entendendo a Redução para $\lambda = 1$ . . . . .	35
3.4 Calculando as Derivadas da Função Reduzida . . . . .	37
3.5 Análise das soluções da função reduzida $g$ . . . . .	39
<b>4 A Bifurcação de Hopf</b>	<b>42</b>
4.1 Primeiros Exemplos de Bifurcação de Hopf . . . . .	42
4.2 Encontrando soluções periódicas através da Redução de Liapunov-Schmidt . . . . .	48
4.2.1 A definição do Operador $\Phi$ . . . . .	48
4.2.2 Enunciado e prova do teorema principal da seção 4.2 . . . . .	51
4.3 Existência e unicidade das soluções . . . . .	73
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>77</b>

A	Algumas Propriedades dos Operadores Diferenciais Elípticos Lineares.	78
B	Resultados e Conceitos Básicos.	80



# Resumo

O objetivo desse trabalho é aplicar a técnica da Redução de Liapunov-Schmidt no estudo da Bifurcação de Hopf. Primeiramente discutimos a Redução de Liapunov-Schmidt em espaços de dimensão finita e posteriormente em espaços de Banach de dimensão infinita. A conclusão do trabalho é a demonstração do Teorema de Hopf usando a Redução de Liapunov-Schmidt.

**palavras chave:** Redução de Liapunov-Schmidt, Bifurcação de Hopf.

# Abstract

The main goal of this work is to apply the Liapunov-Schmidt Reduction technique in the study of the Hopf Bifurcation. First of all we discuss the Liapunov-Schmidt Reduction in finite dimensional spaces and after that in Banach spaces of infinite many dimensions. The conclusion of this work is the proof of the Hopf Theorem using the Liapunov-Schmidt Reduction.

**Key words:** Liapunov-Schmidt Reduction, Hopf bifurcation.

# Introdução

Podemos dizer que a Teoria da Bifurcação é o estudo de equações com múltiplas soluções. Especificamente, por uma bifurcação queremos dizer uma mudança no número de soluções de uma equação quando um parâmetro varia. Muitos desses problemas podem ser simplificados para o estudo de como as soluções  $x$  de uma simples equação escalar

$$f(x, \lambda) = 0 \tag{1}$$

varia com o parâmetro  $\lambda$ . Essa simplificação depende de uma técnica conhecida como *Redução de Liapunov-Schmidt*.

Certos fenômenos modelados por uma equação diferencial da forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda), \tag{2}$$

que depende de um parâmetro  $\lambda$ , evoluem para o surgimento de uma órbita (solução) periódica quando o parâmetro varia. Esse tipo de comportamento é conhecido como *Bifurcação de Hopf*.

O intuito desse trabalho é mostrar que as órbitas periódicas da equação diferencial (2) podem ser caracterizadas como zeros de uma certa aplicação do tipo (1) e a partir daí entender a Bifurcação de Hopf.

O trabalho está dividido em quatro capítulos: (1) Primeira visão da Redução de Liapunov-Schmidt em dimensão finita, (2) Redução de Liapunov-Schmidt em dimensão infinita, (3) Aplicação da Redução em para entender a Elástica, e (4) Aplicação da Redução provando o Teorema de Hopf.

No primeiro capítulo introduziremos a técnica da Redução e consideraremos o problema de bifurcação em dimensão  $n$

$$\Phi(x, \alpha) = 0, \text{ com } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}^k \tag{3}$$

e assumimos que  $\text{posto}(L) = n - 1$ , onde  $L = d\Phi_{0,0}$ . Veremos que as soluções de  $\Phi(x, \alpha) = 0$  estão em correspondência um-a-um com uma equação escalar  $f(x, \alpha) = 0$ . Os passos essenciais dessa Redução são:

1. Decompor o espaço ambiente com uma decomposição relacionada com o operador linear  $L$ .
2. Usar a decomposição do item anterior para decompor a equação (3) em duas novas equações.
3. Mostrar que uma das equações pode ser resolvida usando-se o Teorema das Funções Implícitas(TFI).
4. Usar a solução obtida pelo TFI para ficar com uma única equação.
5. Escolher coordenadas no núcleo de  $L$  e no complemento ortogonal da imagem de  $L$  para obter a função escalar  $f(x, \alpha)$ .

Outro assunto a ser discutido neste capítulo é o cálculo das derivadas da equação reduzida em termos da equação original. Esses resultados serão úteis para a discussão da estabilidade assintótica de soluções de equações diferenciais ordinárias.

No segundo capítulo consideraremos sistemas definidos em espaços de Banach de dimensão infinita. Para desenvolver a técnica de Liapunov-Schmidt para tais espaços necessitaremos dos operadores de Fredholm de índice zero.

Nesse cenário, permitiremos que o operador linearizado tenha um núcleo de dimensão superior a um. E, para determinar o comportamento qualitativo da bifurcação teremos que calcular derivadas de ordens superiores.

No terceiro capítulo apresentaremos uma aplicação da Redução de Liapunov-Schmidt em dimensão infinita: a elástica. Trata-se de um problema envolvendo uma barra flexível sofrendo ação de uma força externa  $\lambda$ . A pergunta natural que surge é “quantas soluções de equilíbrio o sistema possui em função de  $\lambda$ ?” Veremos que para um determinado valor do parâmetro  $\lambda$  ocorre uma bifurcação do tipo pitchfork.

No quarto capítulo veremos como utilizar a Redução de Liapunov-Schmidt para entender a Bifurcação de Hopf. Essa forma de entender a Bifurcação de Hopf é devida a Cesari e Hale (ver [H69, CH82]).

Trabalhando com órbitas periódicas naturalmente surge o grupo das simetrias do círculo  $S^1$  atuando naturalmente como um “shift” na variável tempo, e

claramente essas simetrias persistem após o processo de Redução de Liapunov-Schmidt. Na verdade a Redução terá dois estágios, o primeiro leva a uma aplicação  $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  o qual comuta com as rotações do plano; o segundo estágio levará a uma função escalar  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Provaremos o seguinte teorema.

**Teorema de Hopf** *Dado um sistema de EDO na forma*

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \lambda \in \mathbb{R},$$

*satisfazendo:*

(H1) *A função  $F$  se anula no conjunto  $\{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x = 0\}$ , ou seja  $F(0, \lambda) = 0$ , e  $dF_{0,0}$  tem  $\pm i$  como autovalores simples e não tem nenhum outro autovalor no eixo imaginário;*

(H2) *quando  $\lambda$  passa por zero, os autovalores cruzam o eixo imaginário com velocidade positiva.*

*Então existe uma família a um-parâmetro de órbitas periódicas bifurcando do ponto de equilíbrio  $x = 0$  em  $\lambda = 0$ .*

O texto fundamental para o desenvolvimento do trabalho foi Golubitsky e Schaeffer [GS85]. Outros textos que serviram de apoio para o estudo da Bifurcação de Hopf foram: Marsden e McCracken [MM76], Hassard et al [H81], Carr [C81] e Buzzi e Lamb [BL05].

# Capítulo 1

## Primeira Visão da Redução de Liapunov-Schmidt

Consideremos o sistema de  $n$  equações, não lineares,

$$\Phi_i(y, \alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

onde a aplicação  $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é  $C^\infty$ . Considere o vetor  $y = (y_1, \dots, y_n)$  como a solução desconhecida para a equação (1.1) e  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$  um vetor de parâmetros. Vamos assumir que  $\Phi_i(0, 0) = 0$  e tentamos descrever as soluções do sistema numa vizinhança da origem.

Seja  $(D_y\Phi)(0, 0)$  a derivada, vista como transformação linear, cuja matriz é a matriz Jacobiana  $\left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}(0, 0) \right)$ .

Se o posto da matriz Jacobiana anterior, que coincide com a dimensão de  $\text{Im}(D_y\Phi)(0, 0)$ , é  $n$ , segue que  $(D_y\Phi)(0, 0)$  é uma transformação linear sobrejetora, e pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos que

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Nuc}(D_y\Phi)(0, 0) + \dim \text{Im}(D_y\Phi)(0, 0),$$

ou seja,

$$\dim \text{Nuc}(D_y\Phi)(0, 0) = 0,$$

isto é,  $(D_y\Phi)(0, 0)$  é invertível. Deste modo, o Teorema da Função Implícita nos diz que (1.1) possui solução única para  $y$  como função de  $\alpha$ . Em outras palavras, esse é um caso não degenerado onde não ocorre bifurcação. Nesta

seção consideremos o caso onde

$$\text{posto}(D_y\Phi)(0, 0) = n - 1. \quad (1.2)$$

Vamos agora dividir essa seção em duas subseções:

- (i) Na seção 1.1 mostraremos que se assumirmos (1.2), então as soluções do sistema completo (1.1), localmente, poderão ser colocadas em correspondência biunívoca com soluções de uma equação da forma

$$g(x, \alpha) = 0, \quad (1.3)$$

onde  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Esse procedimento é conhecido como Redução de Liapunov-Schmidt de (1.1). Em outras palavras, (1.3) é uma família a  $k$ -parâmetros de um problema de bifurcação da forma  $g(x, \lambda) = 0$ .

- (ii) Resumiremos os passos essenciais da Redução na seção 1.2.

## 1.1 Derivação das Equações Reduzidas

Para simplificar a notação vamos chamar  $L = (D_y\Phi)(0, 0)$ . São necessárias duas escolhas arbitrárias para estabelecer a Redução de Liapunov-Schmidt. A primeira delas diz que devemos escolher dois espaços vetoriais complementares  $M$  e  $N$  para o  $\text{Nuc}(L)$  e  $\text{Im}(L)$ , respectivamente, obtendo as seguintes decomposições:

$$\mathbb{R}^n = \text{Nuc}(L) \oplus M, \quad (1.4)$$

e

$$\mathbb{R}^n = N \oplus \text{Im}(L). \quad (1.5)$$

Notemos que, assumindo (1.2), e usando o Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que a dimensão de  $\text{Nuc}(L)$  é 1, e por (1.4) e (1.5), respectivamente, concluímos que a dimensão de  $M$  é  $n - 1$  e a dimensão de  $N$  é 1.

Consideremos agora a projeção

$$E : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Im}(L)$$

com  $\text{Nuc}(E) = N$ . Consideremos também a projeção complementar

$$(I - E) : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$$

com  $\text{Nuc}(I - E) = \text{Im}(L)$ .

**Proposição 1.1.** *Dado  $v \in \mathbb{R}^n$  temos que  $v = 0$  se, e somente se,  $Ev = 0$  e  $(I - E)v = 0$ .*

**Demonstração:**

A implicação é trivial. Vejamos a recíproca. Seja  $v \in (\text{Nuc}(E) \cap \text{Nuc}(I - E))$ . Como as projeções  $E$  e  $I - E$  são projeções complementares, temos que  $(\text{Nuc}(E) \cap \text{Nuc}(I - E)) = \{0\}$ , ou seja,  $v = 0$ . ■

De acordo com a proposição 1.1, o sistema de equações (1.1) pode ser expandido para um equivalente par de equações da forma

$$(a)E\Phi(y, \alpha) = 0, \quad (b)(I - E)\Phi(y, \alpha) = 0. \quad (1.6)$$

A idéia básica da Redução de Liapunov-Schmidt é que (1.6a) pode ser resolvido para  $n - 1$  das  $y$  variáveis, e substituindo esses  $n - 1$  valores em (1.6b) encontramos o restante desconhecido. Vamos explicar melhor essa idéia. Primeiro aplicamos o Teorema da Função Implícita para mostrarmos que (1.6a) pode ser resolvido para  $n - 1$  das  $y$  variáveis. Utilizando a decomposição (1.4) podemos escrever qualquer vetor  $y \in \mathbb{R}^n$  da forma  $y = v + w$ , onde  $v \in \text{Nuc}(L)$  e  $w \in M$ . Escrevemos então a equação (1.6a) como

$$E\Phi(v + w, \alpha) = 0. \quad (1.7)$$

Em outras palavras, estamos pensando em (1.7) como uma aplicação  $F : \text{Nuc}(L) \times M \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \text{Im}(L)$  dada por

$$F(v, w, \alpha) = E\Phi(v + w, \alpha).$$

**Proposição 1.2.** *Existe uma vizinhança  $\Omega \subset \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^{k+1}$  do ponto  $(0, 0)$  e uma aplicação  $W : \Omega \longrightarrow M$ , a qual satisfaz*

$$E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) \equiv 0$$

para todo  $(v, \alpha) \in \Omega$  e  $W(0, 0) = 0$ .



**Demonstração:**

Pela Regra da Cadeia, a derivada de (1.7) com respeito a variável  $w$  na origem é

$$(E(D_y\Phi)(0,0))|_M = (EL)|_M = L|_M.$$

A primeira igualdade segue por definição e a segunda do fato que  $E$  age como identidade sobre  $\text{Im}(L)$ . De qualquer modo, a aplicação linear  $L : M \rightarrow \text{Im}(L)$  é invertível. Assim, segue do Teorema da Função Implícita que (1.6a) tem solução única para  $w$  numa vizinhança  $\Omega \subset \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^{k+1}$  da origem. Vamos escrever essa solução como  $w = W(v, \alpha)$ ; sendo  $W : \Omega \rightarrow M$  a qual satisfaz

$$E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) \equiv 0$$

para todo  $(v, \alpha) \in \Omega$  e  $W(0, 0) = 0$ . ■

Substituímos  $W$  em (1.6b) e obtemos a aplicação reduzida  $\phi : \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow N$  onde

$$\phi(v, \alpha) = (I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha). \quad (1.8)$$

Deste modo, os zeros de  $\phi(v, \alpha)$  estão em correspondência biunívoca com os zeros de  $\Phi(y, \alpha)$ , tal correspondência é dada por

$$\phi(v, \alpha) = 0 \iff \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) = 0.$$

A função reduzida  $\phi$  tem todas as informações necessárias da Redução de Liapunov-Schmidt. Em aplicações como esta, é interessante escolher coordenadas explícitas no  $\text{Nuc}(L)$  e em  $N$ , e desse modo obtém-se uma aplicação reduzida  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Nesse momento fica claro a segunda dentre as duas escolhas que mencionamos no início desta subseção. Além da escolha dos complementos  $M$  e  $N$  em (1.4) e em (1.5), devemos escolher também vetores não nulos  $v_0$  e  $v_0^*$  em  $\text{Nuc}(L)$  e  $(\text{Im}(L))^\perp$ , respectivamente. Aqui o complemento ortogonal é tomado com respeito ao produto interno usual

$$\langle y, z \rangle = \sum_{i=1}^n y_i z_i.$$

Assim, qualquer vetor  $v \in \text{Nuc}(L)$  pode ser escrito de maneira única como  $v = xv_0$  onde  $x \in \mathbb{R}$ . Definimos  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(x, \alpha) = \langle v_0^*, \phi(xv_0, \alpha) \rangle. \quad (1.9)$$

Do fato de  $\phi(xv_0, \alpha) \in N$ , temos que  $g(x, \alpha) = 0$  se, e somente se,  $\phi(xv_0, \alpha) = 0$ , pois  $\phi(xv_0, \alpha) \in [N \cap N^\perp] = \{0\}$ . Logo, os zeros de  $g$  estão em correspondência biunívoca com as soluções de  $\Phi(y, \alpha) = 0$ .

A razão para essa simplificação é que  $v_0^* \in (\text{Im}(L))^\perp$  e para qualquer vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ , temos que  $Ev \in \text{Im}(L)$ , ou seja  $\langle v_0^*, Ev \rangle = 0$ .

Daí temos

$$\langle v_0^*, (I - E)v \rangle = \langle v_0^*, v \rangle \quad (1.10)$$

pois  $(I - E)v \in (\text{Im}(L))^\perp$ , pela definição da projeção  $(I - E)$ .

## 1.2 Breve Resumo da Redução de Liapunov-Schmidt

Nesta subseção vamos citar, brevemente, os cinco passos essenciais para chegarmos na equação reduzida (1.9):

- Passo 1. Decompomos o espaço, no caso o  $\mathbb{R}^n$ , em uma soma direta dependendo de  $L$  (eq.(1.4) e eq.(1.5)).
- Passo 2. Usamos tal decomposição para definirmos as projeções  $E$  e  $(I - E)$ , donde chegamos nas equações (1.6).
- Passo 3. Mostramos que (1.6a) pode ser resolvida, exceto para uma variável, usando o Teorema da Função Implícita.
- Passo 4. Substituímos a solução de (1.6a) em (1.6b) para obtermos a equação (1.8).
- Passo 5. Escolhemos bases convenientes para  $\text{Nuc}(L)$  e para  $(\text{Im}(L))^\perp$  e obtemos a equação reduzida (1.9).

A essência da Redução de Liapunov-Schmidt, é mostrar que podemos usar o Teorema da Função Implícita em situações onde sua aplicação não é direta,

como por exemplo em espaços de Hilbert de dimensão infinita, que abordaremos nos capítulos seguintes. Desse modo, o Passo 3 torna-se o passo fundamental na Redução.

# Capítulo 2

## A Redução de Liapunov-Schmidt

### 2.1 Operadores Fredholm de Índice Zero

**Definição 2.1 (Operadores de Fredholm).** *Sejam  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$  espaços de Banach. Um operador linear limitado  $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  é dito Fredholm se satisfaz as seguintes condições:*

- (i)  $\text{Nuc}(L)$  é um subespaço de  $\mathbb{X}$  com dimensão finita.
- (ii)  $\text{Im}(L)$  é um subespaço fechado de  $\mathbb{Y}$  com codimensão finita.

**Definição 2.2.** *Se  $L$  é Fredholm, o índice de  $L$  é o inteiro*

$$i(L) = \dim \text{Nuc}(L) - \text{codim} \text{Im}(L).$$

**Proposição 2.3.** *Se  $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  é Fredholm, então existem subespaços fechados  $M$  e  $N$  de  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$ , respectivamente, tais que,*

- (a)  $\mathbb{X} = \text{Nuc}(L) \oplus M$ ,
- (b)  $\mathbb{Y} = N \oplus \text{Im}(L)$ .

Para uma demonstração deste resultado ver Berger [B77].

Em particular, para um operador de Fredholm com  $\text{Nuc}(L) = \{0\}$ , temos

$$i(L) = 0 \Rightarrow \dim(\text{Nuc}(L)) = \text{codim}(\text{Im}(L)) = 0,$$

ou seja,  $L$  é sobrejetora com imagem de  $L$  igual ao contradomínio de  $L$ , sendo portanto invertível. Assim, temos a seguinte implicação para operadores de Fredholm de índice zero:

*Se  $\text{Nuc}(L) = \{0\}$ , então  $L$  é invertível.*

No contexto de operadores diferenciáveis,  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$ , em geral, são subespaços do espaço de Hilbert  $L^2(\Omega)$ , onde  $\Omega$  é um domínio limitado no  $\mathbb{R}^n$ . Esse espaço tem o produto interno usual

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(\xi)v(\xi)d\xi. \quad (2.1)$$

Discutiremos agora o uso do complemento ortogonal nos itens (a) e (b) da Proposição 2.3, isto é,

$$(a) \ M = (\text{Nuc}(L))^{\perp} \quad (b) \ N = (\text{Im}(L))^{\perp} \quad (2.2)$$

Em geral  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$  não são completos com respeito ao produto interno (2.1). Por exemplo,  $\mathbb{X}$  poderia ser  $C^k(\Omega)$  e  $\mathbb{Y}$  ser  $C(\Omega)$ , isto é, o espaço das funções de classe  $C^k$  definidas em  $\Omega$  e o espaço das funções contínuas definidas em  $\Omega$ , respectivamente. Desse modo, para um subespaço de dimensão infinita  $S \subset \mathbb{Y}$ , nem sempre é válido que  $\mathbb{Y} = S \oplus S^{\perp}$ . Todavia, a decomposição  $\mathbb{Y} = S \oplus S^{\perp}$  é válida nos seguintes casos especiais:

- (a)  $S$  tem dimensão finita.
- (b)  $S$  é imagem de um operador diferenciável elíptico.

Veja o apêndice A para uma discussão sobre operadores diferenciais elípticos.

No caso (a) usamos o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Para o caso (b), de maneira resumida, a discussão gira em torno da alternativa Fredholm,

$$(\text{Im}(L))^{\perp} = \text{Nuc}(L^*) \quad (2.3)$$

onde  $L^*$  é a adjunta de  $L$ .

#### **Observação 2.4.**

- (i) *A equação (2.3) fornece uma escolha particular para  $N$  no item (b) da proposição 2.3 que geralmente é mais conveniente em aplicações.*

(ii) Quando  $L$  é um operador diferenciável elíptico, temos que a codimensão da  $\text{Im}(L)$  é igual a dimensão do  $\text{Nuc}(L^*)$ . Assim para tais operadores temos uma fórmula alternativa do índice:

$$i(L) = \dim \text{Nuc}(L) - \dim \text{Nuc}(L^*).$$

## 2.2 Mecanismo da Redução de Liapunov-Schmidt

Seja  $\Phi : \mathbb{X} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{Y}$ , com  $\Phi(0, 0) = 0$  uma aplicação  $C^\infty$  entre espaços de Hilbert. Queremos usar a Redução de Liapunov-Schmidt para resolver a equação

$$\Phi(u, \alpha) = 0, \tag{2.4}$$

para  $u$  como função de  $\alpha$ , numa vizinhança da origem. A derivada de  $\Phi$ , na origem, aplicada em um vetor  $u$ , é dada por

$$Lu = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(hu, 0) - \Phi(0, 0)}{h}.$$

De agora por diante, vamos assumir que  $L$  é Fredholm de índice zero.

Relembramos agora os 5 passos principais da Redução de Liapunov-Schmidt.

1. Decompor os espaços  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$ ,

$$(a) \mathbb{X} = \text{Nuc}(L) \oplus M, \quad (b) \mathbb{Y} = N \oplus \text{Im}(L). \tag{2.5}$$

2. Dividir o problema (2.4) no par de equações equivalentes,

$$(a) E\Phi(u, \alpha) = 0, \quad (b) (I - E)\Phi(u, \alpha) = 0, \tag{2.6}$$

onde  $E : \mathbb{Y} \rightarrow \text{Im}(L)$  é a projeção associada a decomposição (2.5b).

3. Usar (2.5a) para escrever  $u = v + w$ , onde  $v \in \text{Nuc}(L)$  e  $w \in M$ . Aplicar agora o Teorema da Função Implícita para resolver (2.6a) obtendo  $w$  em

função de  $v$  e  $\alpha$ , numa vizinhança  $\Omega$  de  $(v, \alpha) = (0, 0)$ . Isso gera a função  $W : \Omega \subset \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow M$  tal que

$$E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) = 0 \text{ para todo } (v, \alpha) \in \Omega. \quad (2.7)$$

4. Definir  $\phi : \Omega \subset \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow N$  por

$$\phi(v, \alpha) = (I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha). \quad (2.8)$$

5. Escolher as bases  $\{v_1, \dots, v_n\}$  para  $\text{Nuc}(L)$  e  $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$  para  $(\text{Im}(L))^\perp$ . Definir  $g : B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$g_i(x, \alpha) = \langle v_i^*, \phi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \alpha) \rangle. \quad (2.9)$$

onde  $B$  é uma bola pequena o suficiente para que se o vetor  $(x, \alpha) \in B$ , então o vetor  $(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \alpha) \in \Omega$ .

Vamos agora discutir os 5 passos da Redução de Liapunov-Schmidt citados acima.

No primeiro passo, a hipótese que  $L$  é Fredholm garante que as decomposições de (2.5) são possíveis. Além disso,  $\text{Nuc}(L)$  e  $N$  tem dimensões finitas.

Para o passo 3, primeiramente mostraremos que podemos aplicar o Teorema da Função Implícita em (2.6a). Definamos a aplicação  $F : \text{Nuc}(L) \times M \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \text{Im}(L)$  por

$$F(v, w, \alpha) = E\Phi(v + w, \alpha). \quad (2.10)$$

Usando a regra da cadeia, temos que a derivada de  $F$ , com respeito a  $w$ , na origem é

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial E}{\partial w}(\Phi(0, 0)) \circ L = EL = L.$$

**Lema 2.5.**  $L|_M : M \rightarrow \text{Im}(L)$  é invertível.

**Demonstração:** Seja  $w \in M$  tal que  $L|_M(w) = 0$ , então  $w \in \text{Nuc}(L) \cap M$ , ou seja,  $w = 0$ . Logo  $\text{Nuc}(L|_M) = \{0\}$  e  $L|_M$  é invertível.  $\blacksquare$

Portanto, o Lema anterior e o Teorema da Função Implícita garantem que (2.6) pode ser resolvido para  $w = W(v, \alpha)$ .

No passo 5, escrevemos  $(\text{Im}(L))^\perp$ , lembrando que  $\mathbb{Y}$  está munido com produto interno (2.1). Como,  $L$  é Fredholm com índice zero, temos que

$$\dim \text{Nuc}(L) = \dim(\text{Im}(L))^\perp$$

e ambas dimensões são finitas. Assim, as bases para  $\text{Nuc}(L)$  e  $(\text{Im}(L))^\perp$  possuem o mesmo número de vetores. Vamos resumir o resultado da Redução de Liapunov-Schmidt no seguinte teorema.

**Teorema 2.6.** *Se a derivada de  $\Phi(u, \alpha)$  é um operador de Fredholm de índice zero, então as soluções de (2.4) estão (localmente) em correspondência biunívoca com as soluções do sistema em dimensão finita.*

$$g_i(x, \alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

onde  $g_i$  é definido por (2.9).

## 2.3 Os cálculos das derivadas de $g$

Para aplicações da Redução de Liapunov-Schmidt muitas vezes é necessário conhecer as derivadas da função  $g$  da seção anterior. Nesta seção vamos supor que  $W$  e  $g_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , sejam suficientemente diferenciáveis e calculemos as seguintes derivadas:

**Proposição 2.7.** (a)  $D_v W(0, 0) = 0$

$$(b) D_v^2 W(0, 0) = -L^{-1} E D_x^2 \Phi(0, 0)$$

$$(c) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0, 0) = 0.$$

$$(d) \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_j}(0, 0) = \langle v_i^*, D_x^2 \Phi(0, 0)(v_k, v_j) \rangle.$$

$$(e) \frac{\partial^3 g_i}{\partial x_l \partial x_k \partial x_j}(0, 0) = \langle v_i^*, V \rangle,$$

$$\text{onde } V = D_x^3 \Phi(0, 0)(v_l, v_k, v_j) + D_x^2 \Phi(0, 0)(W_{kl}, v_j) + D_x^2 \Phi(0, 0)(v_k, W_{lj}) +$$

$$+ D_x^2 \Phi(0, 0)(v_l, W_{jk}).$$



$$(f) \quad \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_i}(0, 0) = \langle v_i^*, D_{\alpha_i} \Phi(0, 0) \rangle.$$

$$(g) \quad \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial \alpha_i}(0, 0) = \langle v_i^*, D_x^2 \Phi(0, 0)(v_j, -L^{-1}E(D_{\alpha_1} \Phi(0, 0)) + D_x D_{\alpha_1} \Phi(0, 0)(v_j)) \rangle.$$

Para nossos cálculos, vamos lembrar como é a função reduzida  $g : B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , que tem a  $i$ -ésima coordenada dada por:

$$g_i(x, \alpha) = \langle v_i^*, \phi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \alpha) \rangle \quad (2.12)$$

Aplicando a definição de  $\phi$  segue que

$$g_i(x, \alpha) = \langle v_i^*, (I - E)\Phi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n + W(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \alpha), \alpha) \rangle \quad (2.13)$$

Como  $\text{Im}(\phi) \subset N$ , então  $(I - E)\Phi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n + W(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \alpha), \alpha) = \Phi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n + W(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \alpha), \alpha)$ , isso se deve a definição da projeção  $(I - E)$ . Logo, ficamos com

$$g_i(x, \alpha) = \langle v_i^*, \Phi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n + W(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \alpha), \alpha) \rangle, \quad (2.14)$$

onde  $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$  e  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

### Demonstração da proposição 2.7 :

(a) O resultado segue do Teorema da Função Implícita, pois  $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$  em (2.10).

(b) Sabemos que

$$E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) = 0. \quad (2.15)$$

Derivando (2.15) com respeito a  $v$  e aplicando em  $v_i \in \text{Nuc}(L)$  obtemos

$$ED_x \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)(v_i + D_v W(v, \alpha)(v_i)) = 0. \quad (2.16)$$

Derivando (2.16) novamente com respeito a  $v$  e aplicando em  $v_j$  temos

$$E[D_x^2 \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)(v_j + D_v W(v, \alpha)), (v_i + D_v W(v, \alpha)(v_i)) + D_x \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)(D_v^2 W(v, \alpha)(v_i, v_j))] = 0.$$

Aplicando no ponto  $(0,0)$  temos

$$E[D_x^2\Phi(0,0)(v_j + D_vW(0,0)), (v_i + D_vW(0,0)(v_i)) + D_x\Phi(0,0)(D_v^2W(0,0)(v_i, v_j))] = 0.$$

Usando (a) e o fato que  $EL = L$  temos

$$E[D_x^2\Phi(0,0)(v_j, v_i)] + L(D_v^2W(0,0)(v_i, v_j)) = 0,$$

e portanto

$$L(D_v^2W(0,0)(v_i, v_j)) = -E[D_x^2\Phi(0,0)(v_j, v_i)].$$

Aplicando  $L^{-1}$  em ambos os lados segue que

$$D_v^2W(0,0)(v_i, v_j) = -L^{-1}E[D_x^2\Phi(0,0)(v_j, v_i)]$$

para todo  $v_j, v_i \in \text{Nuc}(L)$ , e finalmente

$$D_v^2W(0,0) = -L^{-1}ED_x^2\Phi(0,0).$$

(c) Derivando a equação (2.14) com respeito a  $x_j$  temos

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x, \alpha) = \langle v_i^*, D_x\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) \cdot (v_j + D_vW(v, \alpha))(v_j) \rangle, \quad (2.17)$$

pois  $D_\alpha W(v, \alpha) = 0$ . Aplicando então no ponto  $(0,0)$  temos

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0,0) = \langle v_i^*, L(v_j + D_vW(0,0)(v_j)) \rangle$$

e como  $v_i^* \in N = (\text{Im}(L))^\perp$ , segue que  $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0,0) = 0$ .

(d) Derivando a equação (2.17) com respeito a  $x_k$  temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_j}(x, \alpha) &= \langle v_i^*, D_x^2\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)(v_k + D_vW(v, \alpha)(v_k), v_j + \\ &D_vW(v, \alpha)(v_j) + D_x\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)(D_v^2W(v, \alpha))(v_j, v_k)) \rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_j}(0, 0) &= \langle v_i^*, D_x^2 \Phi(0, 0)(v_k + D_v W(0, 0)(v_k), v_j + \\
&+ D_v W(0, 0)(v_j)) + L(D_v^2 W(0, 0)(v_j, v_k)) \rangle \\
&= \langle v_i^*, D_x^2 \Phi(0, 0)(v_k + D_v W(0, 0)(v_k), v_j + D_v W(0, 0)(v_j)) \rangle + \\
&+ \langle v_i^*, L(D_v^2 W(0, 0)(v_j, v_k)) \rangle.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Como  $v_i^* \in N$ , temos que o segundo produto interno é nulo, restando então

$$\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_j}(0, 0) = \langle v_i^*, D_x^2 \Phi(0, 0)(v_k + D_v W(0, 0)(v_k), v_j + D_v W(0, 0)(v_j)) \rangle,$$

mas como  $W(0, 0) = 0$ , segue que

$$\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_j}(0, 0) = \langle v_i^*, D_x^2 \Phi(0, 0)(v_k, v_j) \rangle.$$

(e) Derivando (2.18) em relação a  $x$  temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 g_i}{\partial x_l \partial x_k \partial x_j}(x, \alpha) &= \langle v_i^*, D_x^3 \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)[v_l + D_v W(v, \alpha)(v_l), v_k \\
&+ D_v W(v, \alpha)(v_k), v_j + D_v W(v, \alpha)(v_j)] + D_x^2 \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)[D_v^2 W(v, \alpha) \\
&(v_k, v_l), v_j + D_v W(v, \alpha)(v_j)] + D_x^2 \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)[v_k + D_v W(v, \alpha)(v_k), \\
&D_v^2 W(v, \alpha)(v_l, v_j)] + D_x^2 \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)[v_l + D_v W(v, \alpha)(v_l), D_v^2 W(v, \alpha) \\
&(v_j, v_k)] + D_x \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)[D_v^3 W(v, \alpha)(v_j, v_k, v_l)].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 g_i}{\partial x_l \partial x_k \partial x_j}(0, 0) &= \langle v_i^*, D_x^3 \Phi(0, 0)(v_l + D_v W(0, 0)(v_l), v_k \\
&+ D_v W(0, 0)(v_k), v_j + D_v W(0, 0)(v_j)) + D_x^2 \Phi(0, 0)(D_v^2 W(0, 0) \\
&(v_k, v_l), v_j + D_v W(0, 0)(v_j)) + D_x^2 \Phi(0, 0)(v_k + D_v W(0, 0)(v_k), \\
&D_v^2 W(0, 0)(v_l, v_j)) + D_x^2 \Phi(0, 0)(v_l + D_v W(0, 0)(v_l), D_v^2 W(0, 0) \\
&(v_j, v_k)) + L(D_v^3 W(0, 0)(v_j, v_k, v_l)) \rangle.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Usando que  $D_v W(0, 0) = 0$  e que  $v_i^* \in (\text{Im}(L))^\perp$  segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 g_i}{\partial x_l \partial x_k \partial x_j}(0, 0) &= \langle v_i^*, D_x^3 \Phi(0, 0)(v_l, v_k, v_j) + D_x^2 \Phi(0, 0)(W_{kl}, v_j), + \\
&+ D_x^2 \Phi(0, 0)(v_k, W_{lj}) + D_x^2 \Phi(0, 0)(v_l, W_{jk}) \rangle,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

onde  $W_{rs} = D_v^2 W(0, 0)(v_r, v_s)$ .

(f) Derivando a equação (2.14) com respeito a  $\alpha_1$  temos

$$\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_l}(x, \alpha) = \langle v_i^*, D_x \Phi(v+W(v, \alpha), \alpha)(D_{\alpha_l} W(v, \alpha)) + D_{\alpha_l} \Phi(v+W(v, \alpha), \alpha) \rangle. \tag{2.23}$$

Na origem temos

$$\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_l}(0, 0) = \langle v_i^*, D_x \Phi(W(0, 0), 0)(D_{\alpha_l} W(0, 0)) + D_{\alpha_l} \Phi(W(0, 0), 0) \rangle. \tag{2.24}$$

Usando que  $W(0, 0) = 0$  e que  $D_x \Phi(0, 0) = L$ , segue que

$$\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_l}(0, 0) = \langle v_i^*, LD_{\alpha_l} W(0, 0) + D_{\alpha_l} \Phi(0, 0) \rangle. \tag{2.25}$$

Por propriedade do produto interno  $\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_l}(0, 0) = \langle v_i^*, LD_{\alpha_l} W(0, 0) \rangle + \langle v_i^*, D_{\alpha_l} \Phi(0, 0) \rangle$ , e usando o fato que  $v_i^*$  e  $\text{Im}(L)$  são ortogonais e temos

o resultado

$$\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_l}(0, 0) = \langle v_i^*, D_{\alpha_l} \Phi(0, 0) \rangle.$$

(g) Derivando a equação (2.23) com respeito a  $x_j$  segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial \alpha_l}(x, \alpha) &= \langle v_i^*, D_x^2 \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)(v_j \\ &+ D_v W(v, \alpha)(v_j), D_{\alpha_l} W(v, \alpha)) + D_x \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) \\ &(D_v D_{\alpha_l} W(v, \alpha)(v_j)) + D_x D_{\alpha_l} \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)(v_j + D_v W(v, \alpha)(v_j)) \rangle. \end{aligned}$$

Na origem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial \alpha_l}(0, 0) &= \langle v_i^*, D_x^2 \Phi(0, 0)(v_j + D_v W(0, 0)(v_j), D_{\alpha_l} W(0, 0) + \\ &+ L(D_v D_{\alpha_l} W(0, 0)(v_j)) + D_x D_{\alpha_l} \Phi(0, 0)(v_j + D_v W(0, 0)(v_j)) \rangle. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Segue de (a) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial \alpha_l}(0, 0) &= \langle v_i^*, D_x^2 \Phi(0, 0)(v_j, D_{\alpha_l} W(0, 0)) \\ &+ L(D_v D_{\alpha_l} W(0, 0)(v_j)) + D_x D_{\alpha_l} \Phi(0, 0)(v_j) \rangle. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Portanto, usando (b) e o fato que  $v_i \in (\text{Im}(L))^\perp$  temos

$$\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial \alpha_l}(0, 0) = \langle v_i^*, D_x^2 \Phi(0, 0)(v_j, -L^{-1}E(D_{\alpha_l} \Phi(0, 0)) + D_x D_{\alpha_l} \Phi(0, 0)(v_j)) \rangle$$

concluindo finalmente a demonstração da proposição 2.7. ■

## Capítulo 3

# A Elástica: Um Exemplo de Dimensão Infinita

Neste capítulo faremos uma primeira aplicação da Redução de Liapunov-Schmidt para entender um problema de dimensão infinita. Trata-se de um problema físico envolvendo uma barra flexível, na qual é aplicada uma força compressiva  $\lambda$ . A pergunta natural que surge é “quantas soluções de equilíbrio o sistema possui em função de  $\lambda$ ?”. Na busca da resposta para essa pergunta, com o auxílio da Redução de Liapunov-Schmidt, concluiremos que para  $\lambda = 1$  ocorre uma bifurcação do tipo pitchfork, ou seja, o número de soluções “salta” de uma solução para três soluções.

O capítulo se dividirá em cinco seções, são elas:

- 3.1 Descrição do problema.
- 3.2 Análise do problema para  $0 < \lambda < 1$ .
- 3.3 Entendendo a redução para  $\lambda = 1$ .
- 3.4 Calculando as derivadas da função reduzida
- 3.5 Análise das soluções da função reduzida  $g$ .

### 3.1 Descrição do Problema

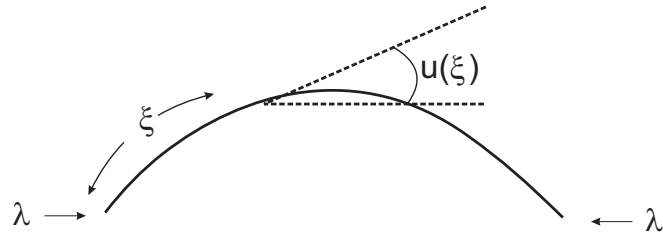


Figura 3.1: Elástica.

A configuração da barra, assumida planar, é melhor descrita se utilizarmos  $u(\xi)$  como sendo o ângulo que a barra faz com o eixo horizontal, no ponto do arco de tamanho  $\xi$ , veja a figura 3.1. Vamos normalizar a barra para ter tamanho  $\pi$ .

As coordenadas  $(x(\xi), y(\xi))$  são dadas por

$$x(\xi) = \int_0^\xi \cos u(\xi') d\xi'; \quad y(\xi) = \int_0^\xi \text{sen } u(\xi') d\xi'.$$

De fato, observe que  $x(\xi)$  é dado pela expressão

$$x(\xi) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |\Delta\xi_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i,$$

conforme a figura 3.2. Chamando  $\Delta\xi_i = \xi_i - \xi_{i-1}$  temos

$$\cos(u(\xi_i)) = \frac{\Delta x_i}{\Delta\xi_i}, \quad (3.1)$$

pois para  $\Delta\xi_i$  suficientemente pequeno, a hipotenusa do triângulo destacado na figura 3.2 aproxima-se do tamanho do arco  $\Delta\xi_i$ .

Dai,

$$x(\xi) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |\Delta\xi_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \cos(u(\xi_i)) \Delta\xi_i = \int_0^\xi \cos(u(\xi')) d\xi'. \quad (3.2)$$

De modo análogo temos que

$$y(\xi) = \int_0^\xi \text{sen}(u(\xi')) d\xi'. \quad (3.3)$$

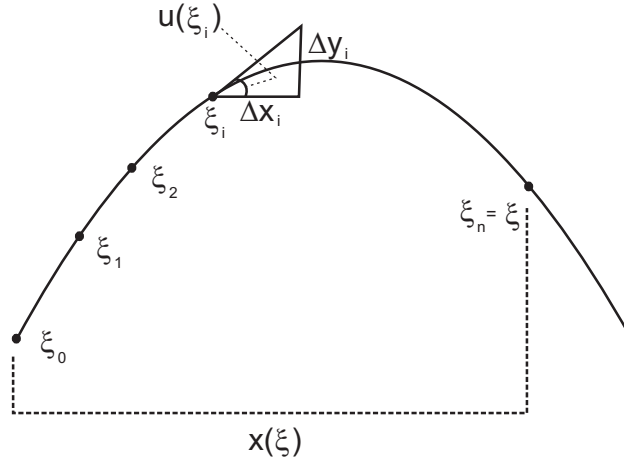


Figura 3.2: Coordenadas na elástica.

Utilizando a hipótese de Reiss, a energia  $U$  da barra é determinada apenas pela sua curvatura  $\kappa = \frac{du}{d\xi}$ , através da relação:

$$U = \int_0^\pi \kappa^2 d\xi \quad (3.4)$$

Pode-se então determinar a equação que estabelece a configuração de equilíbrio da barra em função da força  $\lambda$  minimizando a energia do sistema, ou seja, minimizando o funcional:

$$U(\xi) = \int_0^\pi \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 d\xi \quad (3.5)$$

O processo de minimização deve ser realizado mantendo-se as extremidades da região curva da barra constantes, portanto deve-se inserir o seguinte vínculo:

$$\int_0^\pi \cos(u) d\xi = cte \quad (3.6)$$

Utilizando a técnica dos multiplicadores indeterminados de *Lagrange*, obtém-se a relação que determina a configuração da barra no estado de equilíbrio:

$$\delta \int_0^\pi \left[ \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 + \alpha \cos(u) \right] d\xi = 0 \quad (3.7)$$

onde  $\alpha$  é um *multiplicador de Lagrange*.

Sabe-se do cálculo de variações que a relação (3.7) é satisfeita quando a função  $G = \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 + \alpha \cos(u)$  obedece a equação de *Euler-Lagrange*:



$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial G}{\partial u'} \right) = 0 \quad (3.8)$$

Assim, substituindo  $G$  na equação de *Euler-Lagrange*, considerando que  $\alpha$  é necessariamente um múltiplo de  $\lambda$ , obtemos a equação que governa o comportamento da barra:

$$-\frac{d^2 u}{d\xi^2} - \lambda \operatorname{sen} u = 0; \quad (3.9)$$

com condições de contorno

$$u'(0) = u'(\pi) = 0$$

onde  $\lambda$  é a força compressiva aplicada na barra.

Nossa meta neste capítulo é mostrar que:

- (i) a solução de (3.9) é isolada para  $0 < \lambda < 1$ ;
- (ii) para  $\lambda = 1$  a equação (3.9) tem outras soluções além da trivial;

Aplicando o método de Redução de Liapunov-Schmidt em (3.9) chegamos a uma única equação real  $g(x, \lambda) = 0$ , a qual no ponto de bifurcação  $x = 0$ ,  $\lambda = 1$  satisfaz

$$g = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial x} < 0. \quad (3.10)$$

Todos os cálculos serão feitos adiante.

## 3.2 Análise do problema para $0 < \lambda < 1$

Primeiramente escrevemos (3.9) na forma “abstrata”

$$\Phi(u, \lambda) = 0, \quad (3.11)$$

onde  $\Phi : \mathbb{X} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Y}$  é uma aplicação entre espaços de Banach. Seu domínio é

$$\mathbb{X} = \{u \in C^2[0, \pi] : u'(0) = u'(\pi) = 0\},$$

onde  $C^2[0, \pi]$  é o espaço das funções reais contínuas, tendo como domínio o intervalo  $[0, \pi]$  e com derivadas até segunda ordem contínuas, e  $\mathbb{Y} = C^0[0, \pi]$  o

espaço das funções reais contínuas definidas no intervalo  $[0, \pi]$ . Naturalmente,

$$\Phi(u, \lambda) = -u'' - \lambda \operatorname{sen} u. \quad (3.12)$$

Observemos que  $\Phi(0, \lambda) = 0$  para todo  $\lambda$ , em outras palavras, a barra flexível mantém-se em equilíbrio para quaisquer força  $\lambda$ . Para investigar a possibilidade de soluções múltiplas vamos usar o Teorema da Função Implícita. Começamos então analisando a derivada de  $\Phi$ .

$$D_u \Phi(u, \lambda)v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + hv, \lambda) - \Phi(u, \lambda)}{h}. \quad (3.13)$$

Como  $\Phi(0, \lambda) = 0$  e  $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \rightarrow 1$  quando  $x \rightarrow 0$ , temos que a derivada de  $\Phi$  no ponto  $(0, \lambda)$  é dada por:

$$\begin{aligned} D_u \Phi(0, \lambda)v &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(hv, \lambda) - \Phi(0, \lambda)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(hv)'' - \lambda \operatorname{sen}(hv)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-hv'' - \lambda \operatorname{sen}(hv)}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{hv''}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda v \operatorname{sen}(hv)}{vh} \\ &= -v'' - \lambda v. \end{aligned} \quad (3.14)$$

**Lema 3.1.** *A derivada de  $\Phi$  no ponto  $(0, \lambda)$  é invertível a menos que  $\lambda$  seja da forma  $\mu = k^2$ , com  $k \in \mathbb{N}$ .*

**Demonstração:** Notemos que  $v \in \operatorname{Nuc}(D\Phi(0, \lambda))$  se, e somente se,  $v$  satisfaz o problema de Sturm-Liouville

$$v'' + \lambda v = 0; \quad v'(0) = v'(\pi) = 0. \quad (3.15)$$

De acordo com a teoria de equações diferenciais, a equação característica

para o problema dado em (3.15) é dada por

$$r^2 + \lambda = 0,$$

a qual possui soluções  $r = \pm i\sqrt{\lambda}$ , e portanto uma solução geral é dada por

$$v(t) = A\cos(\sqrt{\lambda}t) + B\sin(\sqrt{\lambda}t).$$

Utilizando a condição de contorno  $v'(0) = 0$  temos que  $B = 0$ . Nesse caso,

$$v'(t) = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}t).$$

Avaliando em  $\pi$  temos que se  $\sqrt{\lambda}$  não for inteiro, então  $A = 0$ . A conclusão é que se  $\lambda$  é da forma  $\mu = k^2$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , então o problema (3.15) tem solução diferente da trivial. Caso contrário, a única solução do problema (3.15) é a trivial e a derivada de  $\Phi$  no ponto  $(0, \lambda)$  é invertível. ■

Então o  $\text{Nuc}(D_u\Phi(0, \lambda))$  tem dimensão igual a 1 quando  $\lambda = k^2$  para algum  $k \in \mathbb{N}$  e dimensão igual a 0, caso contrário. Mas como nesta seção estamos considerando o caso  $0 < \lambda < 1$ , segue que  $\dim \text{Nuc}(D_u\Phi(0, \lambda)) = 0$ .

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita,  $u = 0$  é solução única de (3.11) numa vizinhança da origem para  $0 < \lambda < 1$ .

### 3.3 Entendendo a Redução para $\lambda = 1$

Nessa seção, com o auxílio da Redução de Liapunov-Schmidt, estudaremos a multiplicidade das soluções de (3.11) numa vizinhança de  $u = 0$ ,  $\lambda = 1$ . Vamos tomar  $L = D_u\Phi(0, 1)$ . Notemos que  $\dim \text{Nuc}(L) = 1$ , em que uma base para o núcleo é  $\{\cos \xi\}$ .

Decompomos o domínio de  $\Phi$  na soma direta dos seguintes subespaços

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}\{\cos\} \oplus M, \tag{3.16}$$

onde  $\mathbb{R}\{\cos\}$  denota o espaço vetorial sobre os números reais, gerado pela função cosseno, e  $M = \{u \in \mathbb{X} : \int_0^\pi \cos(\xi)u(\xi)d\xi = 0\}$ ; em outras palavras,  $M$

é o complemento ortogonal de  $\mathbb{R}\{\cos\}$  em  $\mathbb{X}$  com respeito ao produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_0^\pi u(\xi)v(\xi)d\xi. \quad (3.17)$$

Do mesmo modo, decompomos  $\mathbb{Y}$  na seguinte soma direta

$$\mathbb{Y} = N \oplus \text{Im}(L), \quad (3.18)$$

onde  $N = (\text{Im}(L))^\perp$ .

A próxima proposição dará uma expressão equivalente para o espaço complementar  $N$  anterior.

**Proposição 3.2.**  $(\text{Im}(L))^\perp = \text{Nuc}(L^*)$ .

**Demonstração da proposição 3.2:** Observamos que  $v \in \text{Nuc}(L^*)$  se, e somente se,  $L^*v = 0$ . Mas  $L^*v = 0$  se, e somente se,  $\langle u, L^*v \rangle = 0$  para todo  $u \in \text{Im}(L)$ . Pela definição de operador adjunto temos que  $\langle u, L^*v \rangle = 0$  para todo  $u \in \text{Im}(L)$  se, e somente se,  $\langle Lu, v \rangle = 0$  para todo  $v \in \text{Im}(L)$ , ou seja,  $v \in (\text{Im}(L))^\perp$ . ■

**Proposição 3.3.**  $L$  é auto-adjunta, isto é,  $\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle$  para todo  $u, v$ . Portanto vale a seguinte expressão:

$$N = \text{Nuc}(L^*) = \text{Nuc}(L) = \mathbb{R}\{\cos\}. \quad (3.19)$$

**Demonstração** Usando (3.14), para provar que  $\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle$ , basta demonstrar a igualdade

$$\int_0^\pi [u''(\xi) + \lambda u(\xi)]v(\xi)d\xi = \int_0^\pi [v''(\xi) + \lambda v(\xi)]u(\xi)d\xi, \text{ ou seja,}$$

$$\int_0^\pi u''(\xi)v(\xi)d\xi + \lambda \int_0^\pi u(\xi)v(\xi)d\xi = \int_0^\pi u(\xi)v''(\xi)d\xi + \lambda \int_0^\pi u(\xi)v(\xi)d\xi.$$

Resta então verificarmos que

$$\int_0^\pi u''(\xi)v(\xi)d\xi = \int_0^\pi u(\xi)v''(\xi)d\xi. \quad (3.20)$$

De fato, usando integração por partes, temos

$$\int_0^\pi u''(\xi)v(\xi)d\xi = v(\xi)u'(\xi)|_0^\pi - \int_0^\pi v'(\xi)u'(\xi)d\xi \quad (3.21)$$

resolvendo agora, também por partes, a integral do segundo membro, temos

$$\int_0^\pi v'(\xi)u'(\xi)d\xi = v'(\xi)u'(\xi)|_0^\pi - \int_0^\pi v''(\xi)u(\xi)d\xi. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.21) e usando as condições de contorno  $u'(0) = u'(\pi) = v'(0) = v'(\pi) = 0$  concluímos que

$$\int_0^\pi u''(\xi)v(\xi)d\xi = \int_0^\pi u(\xi)v''(\xi)d\xi \quad (3.23)$$

■

Isso completa o passo 1 da Redução. Observamos que os passos 2, 3 e 4 não requerem dados específicos do problema estudado.

Para o passo 5, escolhemos

$$v_1 = v_1^* = \cos.$$

Todos os dados necessitados para a Redução de Liapunov-Schmidt de (3.11) estão agora especificados. No entanto, soluções para (3.11) numa vizinhança de  $u = 0, \lambda = 1$ , estão em correspondência biunívoca com as soluções da equação real

$$g(x, \lambda) = 0,$$

onde  $g$  é dada por (2.9).

### 3.4 Calculando as Derivadas da Função Reduzida

Para obtermos as derivadas de  $g$  vamos utilizar a proposição 2.7. Além disso, neste caso  $\Phi$  é uma função ímpar com respeito a  $u$ , isto é,

$$\Phi(-u, \lambda) = -\Phi(u, \lambda), \quad (3.24)$$

pois a função seno é uma função ímpar.

No entanto, quando  $u = 0$  temos

$$D_u^2\Phi(0, \lambda) = 0, \quad D_\lambda\Phi = 0.$$

Assim, no ponto de bifurcação  $x = 0$ ,  $\lambda = 1$ , utilizando a proposição 2.7, temos

$$\begin{aligned} (a) \quad g &= \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0, \\ (b) \quad \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} &= \langle \cos, D_u^3\Phi(\cos, \cos, \cos) \rangle, \\ (c) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial x} &= \langle \cos, D_\lambda\Phi(\cos) \rangle. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Agora calculemos as derivadas acima, mostrando que  $\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} > 0$  e  $\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial x} < 0$ . Primeiramente mostremos que

$$D_u^3\Phi(0, 1).(v_1, v_2, v_3) = v_1v_2v_3. \tag{3.26}$$

De fato,

$$\begin{aligned} D_u^3\Phi(0, 1).(v_1, v_2, v_3) &= -\frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3} [(t_1v_1'' + t_2v_2'' + t_3v_3'') \\ &\quad + \text{sen}(t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3)]_{t_1=t_2=t_3=0} \\ &= v_1v_2v_3\cos(0) = v_1v_2v_3. \end{aligned}$$

Observemos que  $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(u, \lambda) = -\text{sen } u$ , e então  $D_u \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(0, 1).v = -v$ . Assim

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial x} = \langle \cos, -\cos \rangle = -\int_0^\pi \cos^2 \xi d\xi.$$

Antes de resolvermos a integral acima, observemos que

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - [1 - \cos^2 x] \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - 1 + \cos^2 x \\ \cos^2 x &= \frac{\cos(2x) + 1}{2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$-\int_0^\pi \cos^2 \xi d\xi = -\int_0^\pi \frac{1}{2} d\xi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2\xi) d\xi,$$

fazendo a substituição  $u = 2\xi$  e  $du = 2d\xi$  temos

$$-\int_0^\pi \cos^2 \xi d\xi = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos u du = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} [\text{sen } u]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{2} < 0.$$

Agora substituindo (3.26) em (3.25b) resulta que

$$\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = \langle \cos, \cos^3 \rangle = \int_0^\pi \cos^4 \xi d\xi.$$

Antes dos cálculos da integral acima, notemos que:

$$\cos^4 \xi = \left[ \frac{\cos(2\xi) + 1}{2} \right] \left[ \frac{\cos(2\xi) + 1}{2} \right] = \frac{1}{4} [\cos^2(2\xi) + 2\cos(2\xi) + 1].$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos^4 \xi d\xi &= \frac{1}{4} \int_0^\pi [\cos^2(2\xi) + 2\cos(2\xi) + 1] d\xi = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \int_0^\pi \cos^2(2\xi) d\xi + 2 \int_0^\pi \cos(2\xi) d\xi + \int_0^\pi d\xi \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\pi}{2} + 0 + \pi \right] = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8} > 0.\end{aligned}$$

### 3.5 Análise das soluções da função reduzida $g$

A expansão de Taylor da função  $g$  numa vizinhança de  $(x, \lambda) = (0, 1)$  é

dada por

$$g(x, \lambda) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}(\lambda - 1) + a_{20}x^2 + a_{11}x(\lambda - 1) + a_{02}(\lambda - 1)^2 + a_{30}x^3 + \dots \quad (3.27)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} g(0, 1) &= a_{00}, & \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1) &= a_{10}, & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 1) &= 2a_{20}, \\ \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 1) &= a_{01}, & \frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0, 1) &= 6a_{30} & \text{e} & \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial x}(0, 1) = a_{11}. \end{aligned}$$

Usando o fato que

$$g = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = \frac{3\pi}{8} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial x} = -\frac{\pi}{2},$$

temos que

$$\begin{aligned} a_{00} &= 0, & a_{10} &= 0, & a_{20} &= 0, \\ a_{01} &= 0, & a_{30} &= \frac{\pi}{16} & \text{e} & a_{11} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Deste modo,  $g$  assume a forma

$$g(x, \lambda) = -\frac{\pi}{2}x(\lambda - 1) + \frac{\pi}{16}x^3 + \dots \quad (3.28)$$

Concluimos então que

$$g(x, \lambda) = 0 \iff \frac{\pi}{2}x[-(\lambda - 1) + \frac{x^2}{8} + \dots] = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ -(\lambda - 1) + \frac{x^2}{8} + \dots = 0. \end{cases}$$

A primeira equação do sistema acima corresponde a solução trivial. Para descrever a soluções dadas pela segunda equação do sistema acima vamos tomar  $\mu = \lambda - 1$  e definir  $f(x, \mu) = -\mu + \frac{x^2}{8} + \dots$

Calculando a derivada parcial de  $f$  em relação a  $\mu$  e aplicando no ponto  $(0, 0)$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = -1 \quad (3.29)$$

Logo, pelo Teorema da Função Implícita, segue que numa vizinhança  $V$



da origem existe uma única aplicação  $h : V \subset \mathbb{R} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}$  tal que  $\mu = h(x) = \frac{x^2}{8} + \dots$

Podemos concluir então que os zeros para a função reduzida  $g$  são:

$$x = 0, \quad \text{se } \lambda \leq 1,$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda - 1 = \frac{x^2}{8} + \dots, \end{cases} \quad \text{se } \lambda > 1.$$

Na figura 3.3 podemos ver o conjunto dos zeros de  $g$  em função do parâmetro  $\lambda$ . Esse tipo de comportamento, quando em um determinado valor do parâmetro o número de soluções salta de um para 3 é conhecido como *Bifurcação Pitchfork*. Podemos dizer então que o problema da elástica apresenta uma bifurcação do tipo pitchfork para o valor do parâmetro  $\lambda = 1$ .

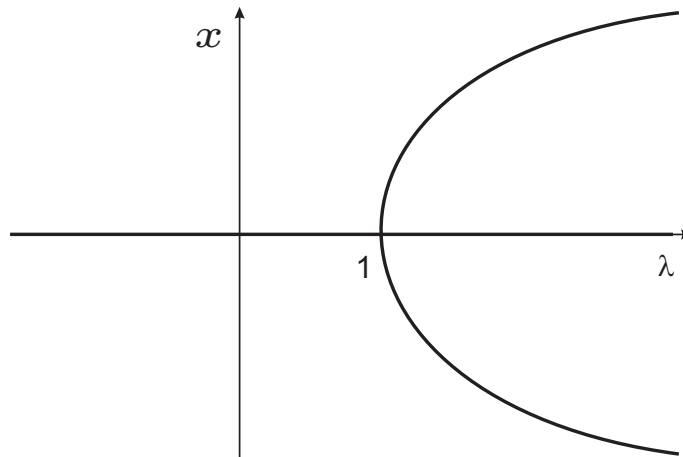


Figura 3.3: A Bifurcação tipo Pitchfork da Elástica.

# Capítulo 4

## A Bifurcação de Hopf

### 4.1 Primeiros Exemplos de Bifurcação de Hopf

Nesta seção, introduzimos o fenômeno da Bifurcação de Hopf e apresentamos alguns exemplos. Consideremos um sistema autônomo de EDO's dado por

$$\frac{du}{dt} + F(u, \lambda) = 0, \quad (4.1)$$

onde  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é  $C^\infty$  e  $\lambda$  é o parâmetro de bifurcação. Suponhamos que

$$F(0, \lambda) \equiv 0;$$

então  $u = 0$  é uma solução constante para (4.1) para qualquer valor de  $\lambda$ .

Hopf mostrou que existe uma família a um-parâmetro de soluções periódicas para (4.1) “nascendo” de  $(u, \lambda) = (0, 0)$ , se duas hipóteses sobre  $F$  são satisfeitas. Seja  $A(\lambda) = (dF)_{0,\lambda}$  a derivada de  $F$  em relação à variável  $u$ , no ponto  $(u, \lambda) = (0, \lambda)$ . A primeira hipótese de Hopf é:

$$\begin{aligned} A(0) \text{ tem autovalores simples } \pm i, \text{ e} \\ A(0) \text{ não tem outros autovalores sobre o eixo imaginário.} \end{aligned} \quad (4.2)$$

#### Observações:

- (i) Notemos que se “rescalamos” o tempo  $t$  em (4.1) por  $t = \gamma s$  para um

valor fixo de  $\gamma > 0$ , temos que

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{ds}.$$

E como  $\frac{dt}{ds} = \gamma$ , segue que

$$\frac{du}{ds} = \gamma \frac{du}{dt}.$$

Logo, a equação (4.1) assume a seguinte forma

$$\frac{du}{ds} + \gamma F(u, \lambda) = 0. \quad (4.3)$$

Com essa mudança, a matriz  $A(\lambda)$  fica multiplicada por  $\gamma$ . Dessa forma, fica claro que a primeira hipótese de Hopf poderia ser enfraquecida impondo apenas que  $A(0)$  possui um par de autovalores imaginários puros, não-nulos. Uma simples normalização, como mostrada acima, conduziria para uma nova matriz cujos autovalores seriam  $\pm i$ .

- (ii) Não haveria nenhuma dificuldade em provar que existem órbitas periódicas para (4.1), mesmo se  $A(0)$  possuísse outros autovalores no eixo imaginário, contanto que nenhum desses sejam múltiplos inteiros de  $\pm i$ .

Por uma questão de simplicidade, ao longo do restante deste trabalho vamos assumir esta hipótese. Portanto, temos que  $A(\lambda)$  possui autovalores simples da forma  $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$ , onde  $\sigma(0) = 0$ ,  $\omega(0) = 1$ , e  $\sigma$  e  $\omega$  são diferenciáveis com relação a  $\lambda$ . Essas considerações seguem do fato que  $A(\lambda)$  tem entradas reais, as quais dependem diferenciavelmente de  $\lambda$  e ainda do fato que os autovalores  $\pm i$  de  $A(0)$  são simples.

A segunda hipótese de Hopf é

$$\sigma'(0) \neq 0; \quad (4.4)$$

isto é, os autovalores imaginários de  $A(\lambda)$  cruzam o eixo imaginário com velocidade não nula, quando  $\lambda$  cruza o zero.

O teorema de Hopf afirma, como veremos adiante, que se as hipóteses (4.2) e (4.4) são satisfeitas, então existe uma família a um-parâmetro de soluções periódicas para (4.1).

Um primeiro exemplo elementar e instrutivo desse teorema é o exemplo linear no plano definido por

$$F(u, \lambda) = - \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} u. \quad (4.5)$$

Calculando os autovalores da matriz  $A(\lambda)$ , temos

$$\begin{vmatrix} \lambda - \mu & -1 \\ 1 & \lambda - \mu \end{vmatrix} = 0$$

que nos leva em  $(\lambda - \mu)^2 = -1$ , assim os autovalores são  $\mu_1 = \lambda + i$  e  $\mu_2 = \lambda - i$ .

Calculemos agora o autovetor associado ao autovalor  $\mu_1 = \lambda + i$ . A equação matricial

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

conduz ao sistema equivalente

$$\begin{cases} ik_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 + ik_2 = 0 \end{cases}.$$

Da primeira equação temos  $k_2 = -ik_1$  (a segunda é simplesmente  $i$  vezes a primeira). Escolhendo  $k_1 = 1$ , concluímos então que um autovetor é

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, para  $\mu_2 = \lambda - i$ , encontramos o outro autovetor

$$K_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Conseqüentemente, utilizando a teoria de EDO's lineares, duas soluções para (4.5) são dadas por

$$X_1(t) = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{sen}(t) \right] e^{\lambda t} \text{ e}$$

$$X_2(t) = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) \right] e^{\lambda t}.$$

A solução geral será  $u(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$ . Usando a condição inicial  $u(0) = (a, 0)$ , temos

$$u(0) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que nos diz que  $\alpha = a$  e  $\beta = 0$ . Logo temos a solução  $u(t) = ae^{\lambda t}(\cos(t), \sin(t))$ .

O retrato de fase para esse sistema, para diferentes valores de  $\lambda$ , é dado pela figura 4.1.

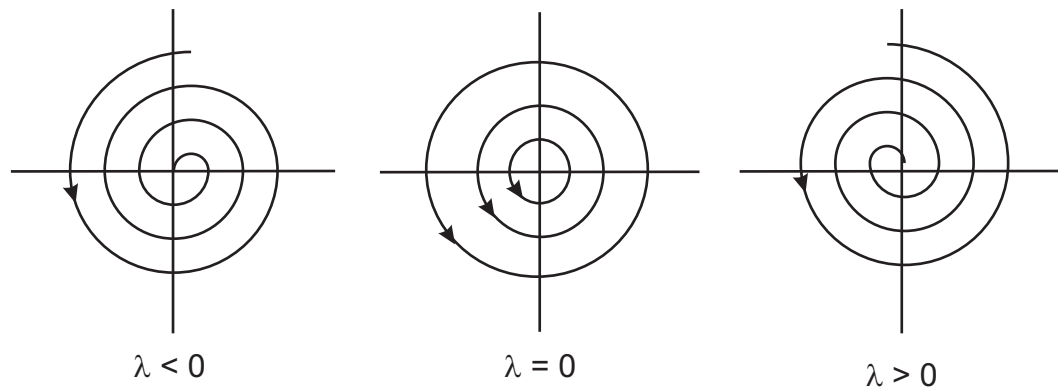


Figura 4.1: Hopf Linear.

Para  $\lambda < 0$  a solução constante  $u = 0$  é estável, enquanto que para  $\lambda > 0$  a solução constante  $u = 0$  é instável. Contudo, para  $\lambda = 0$ , a solução constante  $u = 0$  é neutra, e toda órbita é  $2\pi$ -periódica. Para esse caso linear, vimos que a família a um-parâmetro de órbitas periódicas, garantida pelo Teorema de Hopf, ocorre para um único valor de  $\lambda$ . Veremos mais adiante que, em geral, a família a um-parâmetro de órbitas periódicas possui uma órbita periódica para cada valor de  $\lambda$ . Nesse caso linear, podemos fazer o diagrama de bifurcação representando a existência de soluções  $2\pi$ -periódicas no plano  $\lambda\delta$ , onde  $\lambda$  é o parâmetro de bifurcação e  $\delta$  é a amplitude da órbita periódica, conforme a figura 4.2.

Na figura 4.2, a reta  $\delta = 0$  no plano  $\lambda\delta$  corresponde à solução estacionária  $u = 0$ , e a reta  $\lambda = 0$  corresponde às órbitas periódicas com amplitude maior do que zero.

De fato, a situação genérica ocorre quando são acrescentados termos de

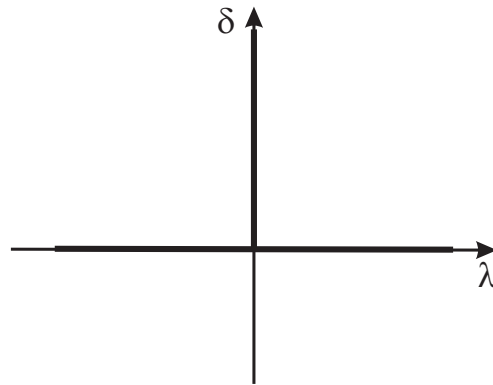


Figura 4.2: Diagrama de Bifurcação do Hopf Linear.

ordem superior em  $F$ , veremos que para cada  $\lambda$  fixo existe no máximo uma órbita periódica permanecendo numa vizinhança da origem.

Por exemplo, considere o sistema definido por

$$F(u, \lambda) = - \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} u + |u|^2 u. \quad (4.6)$$

Tomando  $u = (u_1, u_2)$  temos o seguinte sistema para resolver

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -\lambda u_1 + u_2 + u_1(u_1^2 + u_2^2) \\ \dot{u}_2 = -u_1 - \lambda u_2 + u_2(u_1^2 + u_2^2) \end{cases}. \quad (4.7)$$

Fazendo a mudança de coordenadas  $u_1 = r\cos(\theta)$  e  $u_2 = r\sin(\theta)$  o sistema (4.7) assume a forma

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \dot{r}\cos(\theta) - r\dot{\theta}\sin(\theta) \\ \dot{u}_2 = \dot{r}\sin(\theta) + r\dot{\theta}\cos(\theta) \end{cases}. \quad (4.8)$$

Multiplicando a primeira equação por  $(\cos(\theta))$  e a segunda equação por  $(\sin(\theta))$  e somando-as, temos

$$\dot{r} = \dot{u}_1\cos(\theta) + \dot{u}_2\sin(\theta) \quad (4.9)$$

Multiplicando agora a primeira equação por  $(-\sin(\theta))$  e a segunda equação por  $(\cos(\theta))$  e somando-as novamente obtemos

$$r\dot{\theta} = -\dot{u}_1\sin(\theta) + \dot{u}_2\cos(\theta). \quad (4.10)$$

Substituindo então (4.7) em (4.9) chegamos em

$$\dot{r} = \cos(\theta)[- \lambda r \cos(\theta) + r \sin(\theta) + r^3 \cos(\theta)] + \sin(\theta)[- r \cos(\theta) - \lambda r \sin(\theta) + r^3 \sin(\theta)],$$

ou seja,

$$\dot{r} = r^3 - \lambda r = r(r^2 - \lambda). \quad (4.11)$$

Analogamente, substituindo (4.7) em (4.10), temos

$$r\dot{\theta} = -\sin(\theta)[- \lambda r \cos(\theta) + r \sin(\theta) + r^3 \cos(\theta)] + \cos(\theta)[- r \cos(\theta) - \lambda r \sin(\theta) + r^3 \sin(\theta)],$$

ou seja,

$$r\dot{\theta} = -r \implies \dot{\theta} = -1. \quad (4.12)$$

Logo, de (4.11) e (4.12) chegamos no sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - \lambda) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}. \quad (4.13)$$

O retrato de fase desse sistema é dado pela figura 4.3.

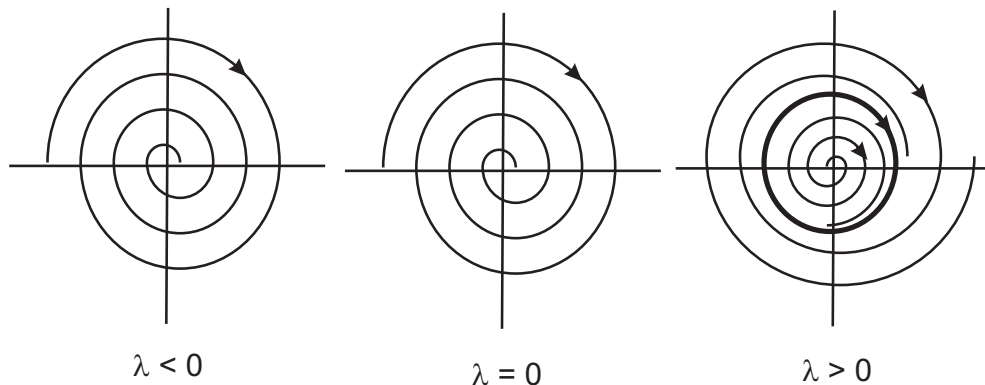


Figura 4.3: Bifurcação de Hopf.

O fenômeno que ocorre neste exemplo é que para cada  $\lambda > 0$  existe exatamente uma solução periódica de (4.6). Além do mais, essa solução periódica é estável, no sentido que toda órbita que está numa vizinhança da solução é atraída para a solução periódica. Tal solução periódica é dita *ciclo limite estável*. Em outras palavras, existe uma troca de estabilidade da solução constante  $u = 0$ , quando  $\lambda$  muda de sinal, com o surgimento de uma nova solução periódica.

## 4.2 Encontrando soluções periódicas através da Redução de Liapunov-Schmidt

Seja  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , e consideremos a equação

$$\frac{du}{dt} + F(u, \alpha) = 0 \quad (4.14)$$

onde  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  é um conjunto de parâmetros sendo  $\lambda = \alpha_0$  um parâmetro distinguido e os demais  $k$  parâmetros sendo parâmetros auxiliares. Em toda seção, vamos supor que

$$F(0, \alpha) \equiv 0, \quad (4.15)$$

e que  $A(\alpha) = (dF)_{0, \alpha}$  satisfaça as hipóteses (4.2).

Essa seção será dividida em duas subseções, são elas:

4.2.1 Definição do operador  $\Phi$ ,

4.2.2 Enunciado e prova do teorema principal da seção 4.2.

### 4.2.1 A definição do Operador $\Phi$

Nosso objetivo é definir um operador  $\Phi$  com a propriedade que as soluções de  $\Phi = 0$  correspondem as soluções  $2\pi$ -periódicas de (4.14).

De qualquer modo, existe um problema técnico no espaço das funções periódicas. A soma de duas funções com períodos distintos pode não ser periódica. No entanto, é possível superar esse problema introduzindo um parâmetro extra  $\tau$ , correspondente a uma rescala do tempo. Especificamente, seja

$$s = (1 + \tau)t.$$

Assim, como

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{ds}$$

e

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{1 + \tau} \quad \left(t = \frac{s}{1 + \tau}\right),$$



segue que

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \frac{1}{1 + \tau},$$

isto é,

$$\frac{du}{dt} = (1 + \tau) \frac{du}{ds}.$$

Deste modo, podemos reescrever (4.14) da seguinte forma:

$$(1 + \tau) \frac{du}{ds} + F(u, \alpha) = 0, \quad (4.16)$$

uma vez que  $F(u, \alpha)$  não depende explicitamente de  $s$ .

Notemos que soluções  $2\pi$ -periódicas para (4.16) correspondem as soluções  $\frac{2\pi}{1+\tau}$ -periódicas para (4.14). As soluções periódicas de pequena amplitude de (4.14) têm período próximo de  $2\pi$ , assim temos que  $\tau \approx 0$ .

Seja  $C_{2\pi}$  o espaço de Banach das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , contínuas e  $2\pi$ -periódicas, onde a norma é definida por

$$\|u\| = \max_s |u(s)|;$$

Notemos que existe  $\max_s |u(s)|$  pois  $u$  é contínua e periódica.

Seja  $C_{2\pi}^1$  o espaço de Banach das aplicações  $2\pi$ -periódicas com derivadas de primeira ordem contínuas. Neste espaço é definido a seguinte norma:

$$\|u\|_1 = \|u\| + \left\| \frac{du}{ds} \right\|.$$

Observamos aqui que se considerarmos o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(s)^t u(s) ds. \quad (4.17)$$

temos que  $C_{2\pi}^0$  e  $C_{2\pi}^1$  são espaços de Hilbert.

Definimos então

$$\Phi : C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R} \longrightarrow C_{2\pi} \quad (4.18)$$

onde

$$\Phi(u, \alpha, \tau) = (1 + \tau) \frac{du}{ds} + F(u, \alpha) \quad (4.19)$$

Deste modo, soluções para a equação  $\Phi(u, \alpha, \tau) = 0$  estão em correspondência com as soluções  $2\pi$ -periódicas de (4.16) e por conseqüência com as soluções  $2\pi$ -

periódicas de (4.14). Notemos que,

$$\Phi(0, \alpha, \tau) \equiv 0 \quad \forall \alpha, \tau. \quad (4.20)$$

Uma importante e indispensável observação é que o grupo  $S^1$  atua sobre  $C_{2\pi}$ , através da ação mudança de fase.

**Definição 4.1.** *Sejam  $\mathbb{X}$  um espaço topológico e  $G$  um grupo. Dizemos que  $G$  atua em  $\mathbb{X}$  se existe uma aplicação contínua*

$$\theta : G \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$$

tal que  $\theta(g, x) = gx$ .

**Exemplo 4.2.** *Sejam  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{X}$  e  $G$  o grupo das matrizes de rotação do  $\mathbb{R}^2$ , isto é,*

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}; \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Então, temos que

$$\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Isto é, a ação  $\theta$  rotaciona o ponto  $(x, y)$  em  $\theta$  graus no sentido anti-horário. Como na figura 4.4.

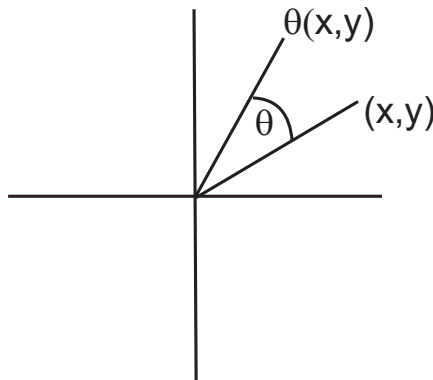


Figura 4.4: Ação de  $S^1$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Vamos definir a ação que será útil na análise das simetrias das órbitas periódicas.

**Definição 4.3.** Definimos a ação de  $S^1$  em  $C_{2\pi}$  por  $\theta : S^1 \times C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$  onde

$$(\theta u)(s) = u(s - \theta).$$

Temos a seguinte proposição:

**Proposição 4.4.** O operador  $\Phi$  comuta com a ação de grupo  $\theta$ .

**Demonstração:** De fato,

$$\begin{aligned} \Phi(\theta.u, \alpha, \tau) &= (1 + \tau) \frac{d(\theta.u)}{ds} + F(\theta.u, \alpha) \\ &= (1 + \tau) \frac{du}{ds} + F(u, \alpha) = \theta.\Phi(u, \alpha, \tau). \end{aligned}$$

uma vez que  $\frac{d(\theta.u)}{ds} = \frac{du}{ds}$  e  $F(\theta.u, \alpha) = F(u, \alpha)$ , pois  $F$  é autônomo, ou seja, não depende explicitamente de  $s$ . ■

## 4.2.2 Enunciado e prova do teorema principal da seção 4.2

Tendo caracterizado as soluções periódicas de (4.14) com as soluções da equação

$$\Phi(u, \alpha, \tau) = 0, \tag{4.21}$$

resolveremos então (4.21) usando a Redução de Liapunov-Schmidt.

A derivada de  $\Phi$  com respeito a  $u$  avaliada no ponto  $(u, \alpha, \tau) = (0, 0, 0)$  é dada por

$$Lu = \frac{du}{ds} + A_0 u,$$

onde  $A_0$  é a matriz quadrada de ordem  $n$   $(dF)_{0,0}$ . De fato,

$$\begin{aligned}
D\Phi_{0,0,0} \cdot u &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(tu, 0, 0) - \Phi(0, 0, 0)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d(tu)}{ds} + F(tu, 0)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \frac{du}{ds} + F(tu, 0)}{t} \\
&= \frac{du}{ds} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(tu, 0)}{t} \\
&= \frac{du}{ds} + \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{F(tu, 0) - F(0, 0)}{t}}_{(dF)_{0,0} \cdot u} \\
&= \frac{du}{ds} + A_0 u
\end{aligned}$$

O operador  $L : C_{2\pi}^1 \rightarrow C_{2\pi}$ , de acordo com o apêndice A, é Fredholm de índice zero.

**Teorema 4.5.** *Se o sistema (4.14) satisfaz a hipótese de autovalores simples (4.2), então existe uma função diferenciável  $g(x, \alpha)$ , da forma*

$$g(x, \alpha) = r(x^2, \alpha)x, \quad r(0, 0) = 0,$$

tal que as soluções locais de  $g(x, \alpha) = 0$ , com  $x > 0$ , estão em correspondência biunívoca com órbitas que são soluções  $2\pi$ -periódicas de pequena amplitude para o sistema (4.14).

Antes de demonstrarmos esse teorema, necessitamos de alguns Lemas.

**Lema 4.6.** *Se (4.14) satisfaz as hipóteses de autovalores simples (4.2), então*

(a)  $\dim \text{Nuc}(L) = 2$ .

(b) *Existe uma base  $\{v_1, v_2\}$  para  $\text{Nuc}(L)$  com a seguinte propriedade: Se identificarmos  $\text{Nuc}(L)$  com  $\mathbb{R}^2$  pela aplicação*

$$(x, y) \longmapsto xv_1 + yv_2, \quad (4.22)$$

então, a ação de  $S^1$  sobre  $\text{Nuc}(L)$  é dada por

$$\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Em outras palavras,  $\theta$  age sobre  $\mathbb{R}^2$  por uma rotação anti-horária de um ângulo  $\theta$ .

(c) Existe uma decomposição invariante de  $C_{2\pi}$  dada por

$$C_{2\pi} = \text{Im}(L) \oplus \text{Nuc}(L). \quad (4.24)$$

Essa decomposição induz uma decomposição de  $C_{2\pi}^1$

$$C_{2\pi}^1 = \text{Nuc}(L) \oplus M, \quad (4.25)$$

onde  $M = (\text{Im}(L)) \cap C_{2\pi}^1$ .

### Demonstração do Lema 4.6

(a) Consideremos o sistema linear de EDO's com coeficientes constantes

$$Lu = 0, \quad u \in C_{2\pi}^1,$$

onde  $L = \frac{d}{ds} + A_0$ .

Sabe-se que os autovalores (pela hipótese (4.2)) são  $\pm i, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$  onde os  $\alpha_j$  não estão no eixo imaginário, para todo  $j = 3, 4, \dots, n$ . Isso implica, usando a teoria de EDO's lineares, que existe uma base de soluções  $\{u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)\}$  tal que  $u_1(s)$  e  $u_2(s)$  (associados aos autovalores  $\pm i$ ) são  $2\pi$ -periódicos e os outros não são  $2\pi$ -periódicos devido a hipótese (4.2). Observemos que se  $(\alpha + i\beta)$  é autovalor e  $(u_1 + iu_2)$  é seu autovetor correspondente, temos que

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)s}(u_1 + iu_2) &= [e^{\alpha s}\cos(\beta s) + ie^{\alpha s}\text{sen}(\beta s)](u_1 + iu_2) \\ &= e^{\alpha s}\cos(\beta s).u_1 - e^{\alpha s}\text{sen}(\beta s).u_2 + i[e^{\alpha s}\cos(\beta s).u_2 + e^{\alpha s}\text{sen}(\beta s).u_1] \\ &= \underbrace{e^{\alpha s}[\cos(\beta s).u_1 - \text{sen}(\beta s).u_2]}_{v_1} + i \underbrace{e^{\alpha s}[\cos(\beta s).u_2 + \text{sen}(\beta s).u_1]}_{v_2} \quad (4.26) \end{aligned}$$

Notemos que a última expressão será uma solução  $2\pi$ -periódica se  $\alpha = 0$  e  $\beta \in \mathbb{Z}$ . Logo, somente os autovalores  $\pm i$  induzem soluções  $2\pi$ -periódicas. Nesse momento, fica claro que se a hipótese de “não possuir outros autovalores no eixo imaginário” poderia ser enfraquecida. Podemos aceitar que existam outros autovalores no eixo imaginário, porém impedir que sejam múltiplos de  $i$ . Nesse caso, também teríamos que somente duas soluções seriam  $2\pi$ -periódicas e teríamos os mesmos resultados.

Seja  $c \in \mathbb{C}^n$  satisfazendo

$$A_0 c = -ic, \quad \bar{c}^t \cdot c = 2, \quad (4.27)$$

isto é,  $c$  é o autovetor correspondente ao autovalor  $-i$ . O vetor linha  $\bar{c}^t$  é formado pela transposta do vetor  $c$  com entradas sendo os seus complexos conjugados.

Então, tomando  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$  na equação (4.26) segue que

$$v_1(s) = \operatorname{Re}(e^{is}c), \quad v_2(s) = \operatorname{Im}(e^{is}c) \quad (4.28)$$

formam uma base para  $\operatorname{Nuc}(L)$ . Em particular,  $\dim \operatorname{Nuc}(L) = 2$ .

- (b) Consideremos a base para  $\operatorname{Nuc}(L)$  formada pelos vetores  $v_1$  e  $v_2$  dados em (4.28). Como

$$\begin{aligned} v_1(s) &= \operatorname{Re}(e^{is}c) = \cos(s)\operatorname{Re}(c) - \operatorname{sen}(s)\operatorname{Im}(c) \\ v_2(s) &= \operatorname{Im}(e^{is}c) = \cos(s)\operatorname{Im}(c) + \operatorname{sen}(s)\operatorname{Re}(c), \end{aligned} \quad (4.29)$$

temos que

$$\begin{aligned} \theta v_1(s) &= v_1(s - \theta) = \cos(s - \theta)\operatorname{Re}(c) - \operatorname{sen}(s - \theta)\operatorname{Im}(c) \\ &= [\cos(s)\cos(\theta) + \operatorname{sen}(s)\operatorname{sen}(\theta)]\operatorname{Re}(c) - [\operatorname{sen}(s)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)\cos(s)]\operatorname{Im}(c) \\ &= \cos(\theta)\underbrace{[\cos(s)\operatorname{Re}(c) - \operatorname{sen}(s)\operatorname{Im}(c)]}_{v_1(s)} + \operatorname{sen}(\theta)\underbrace{[\operatorname{sen}(s)\operatorname{Re}(c) + \cos(s)\operatorname{Im}(c)]}_{v_2(s)}. \end{aligned}$$

Assim, com cálculos análogos para  $\theta v_2(s)$  concluímos que

$$\begin{aligned}\theta v_1(s) &= \cos(\theta)v_1(s) + \text{sen}(\theta)v_2(s), \\ \theta v_2(s) &= -\text{sen}(\theta)v_1(s) + \cos(\theta)v_2(s).\end{aligned}$$

Para descobrirmos como  $\theta$  age em  $\mathbb{R}^2$ , aplicamos  $\theta$  no vetor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned}\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \theta(xv_1(s) + yv_2(s)) \\ &= x(\theta v_1)(s) + y(\theta v_2)(s) \\ &= x[v_1(s)\cos(\theta) + v_2(s)\text{sen}(\theta)] + y[-v_1(s)\text{sen}(\theta) + v_2(s)\cos(\theta)] \\ &= v_1(s)[x\cos(\theta) - y\text{sen}(\theta)] + v_2(s)[x\text{sen}(\theta) + y\cos(\theta)] \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(c) Primeiramente vamos construir uma base para  $\text{Nuc}(L^*)$ , onde  $L^*$  é o operador adjunto com respeito ao produto interno

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{v(s)^t} u(s) ds. \quad (4.30)$$

**Afirmção 1:**  $L^*$  é dado por

$$L^*w = -\frac{dw}{ds} + A_0^t w. \quad (4.31)$$

De fato, sendo  $Lu = u' + A_0 u$ , temos

$$\langle Lu, w \rangle = \langle u' + A_0 u, w \rangle = \langle u', w \rangle + \langle A_0 u, w \rangle. \quad (4.32)$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned}\langle u', w \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{w(s)^t} \cdot u'(s) ds = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\overline{w(s)^t} \cdot u(s)}_{(*)} \Big|_0^{2\pi} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{w'(s)^t} \cdot u(s) ds = -\langle w', u \rangle.\end{aligned} \quad (4.33)$$

O fato de  $u$  e  $w$  serem  $2\pi$ -periódicas, implica que  $(*) = 0$ . Notemos também que para todo  $u, w$  temos

$$\begin{aligned}\langle A_0 u, w \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{A_0 u(s)}^t \cdot w(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\overline{A_0 u(s)})^t \cdot w(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{u(s)}^t \overline{A_0}^t \cdot w(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{u(s)}^t [A_0^t w(s)] ds = \langle u, A_0^t w \rangle.\end{aligned}$$

Substituindo a equação anterior e (4.33) em (4.32), segue que

$$\langle Lu, w \rangle = -\langle u, w' \rangle + \langle u, A_0^t w \rangle = \langle u, -w' + A_0^t w \rangle = \langle u, L^* w \rangle.$$

Portanto,  $L^* w = -\frac{dw}{ds} + A_0^t w$  é o operador adjunto de  $L$ .

**Afirmção 2:** *Considerando funções somente de valores reais, temos que  $A_0$  e  $A_0^t$  possuem os mesmos autovalores.*

De fato, seja  $\lambda$  autovalor de  $A_0$ , tal que  $A_0 u = \lambda u$ . Temos que

$$\langle Lu, w \rangle = \langle u, L^* w \rangle. \quad (4.34)$$

Por um lado,

$$\begin{aligned}\langle Lu, w \rangle &= \langle u' + A_0 u, w \rangle \\ &= \langle u', w \rangle + \langle \lambda u, w \rangle = \langle u', w \rangle + \langle u, \lambda w \rangle,\end{aligned}$$

e por outro lado, usando (4.31), segue que

$$\begin{aligned}\langle u, L^* w \rangle &= \langle u, -w' \rangle + \langle u, A_0^t w \rangle \\ &= \langle u', w \rangle + \langle u, A_0^t w \rangle.\end{aligned}$$

Portanto  $A_0^t w = \lambda w$ .

A conclusão que tiramos dessa afirmação 2 é que se  $A_0$  satisfaz a hipótese (4.2), então  $A_0^t$  também satisfaz.

Seja  $d$  um vetor, não-nulo, pertencente a  $\mathbb{C}^n$  satisfazendo

$$A_0^t d = id, \quad (4.35)$$



e seja

$$v_1^*(s) = \operatorname{Re}(e^{is}d), \quad v_2^*(s) = \operatorname{Im}(e^{is}d). \quad (4.36)$$

Então, com cálculos análogos aos feitos no item (a), concluímos que  $\{v_1^*, v_2^*\}$  é base para  $\operatorname{Nuc}(L^*)$ . É de nosso interesse normalizar  $d$  de acordo com a seguinte afirmação.

**Afirmação 3:** *O autovetor  $d$  pode ser escolhido tal que*

$$(a) \bar{d}^t c = 2, \quad (b) d^t c = 0. \quad (4.37)$$

De fato, seja  $a$  um autovetor qualquer de  $A_0^t$ . Temos que  $A_0^t a = \mu a$ .

Então

$$-ia^t c = a^t(A_0 c) = [A_0^t a]^t c = \mu a^t c \quad (4.38)$$

Assim  $a^t c = 0$  se  $\mu \neq -i$ . Em particular segue (4.37b). Queremos que  $\bar{d}^t c \neq 0$ . Suponhamos, por contradição que  $\bar{d}^t c = 0$ . Então  $c$  é ortogonal para todo autovetor de  $A_0^t$ . Por hipótese,  $c$  é ortogonal a  $\bar{d}$ , o qual é autovetor de  $A_0^t$  associado ao autovetor  $-i$ , por (4.38)  $c$  é ortogonal a todos os outros. Isso nos diz que  $c = 0$ , o que é um absurdo! Logo  $\bar{d}^t c \neq 0$  e podemos normalizar  $d$  de modo que  $\bar{d}^t c = 2$ . Isso conclui a prova da afirmação 3.

Com essa normalização para  $d$ , temos as seguintes fórmulas para os produtos internos entre  $v_j$  e  $v_k^*$ , com  $j, k = 1, 2$ .

$$\begin{aligned} (a) \langle v_j^*, v_k^* \rangle &= \frac{\bar{d}^t d \delta_{jk}}{2}, \\ (b) \langle v_j^*, v_k \rangle &= \delta_{jk}, \\ (c) \langle v_j, v_k \rangle &= \delta_{jk}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde  $\delta_{ij} = 1$ , se  $i = j$ , e  $\delta_{ij} = 0$ , se  $j \neq i$ .

Para tais cálculos usamos as seguintes relações trigonométricas:

- (i)  $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$ .
- (ii)  $\operatorname{cos}(2x) = \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ .
- (iii)  $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\operatorname{cos}(x)$ .
- (iv)  $2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{cos}(2x)$ .

$$(v) \quad 2\cos^2 x = 1 + \cos(2x).$$

Além disso, vamos tomar  $c = c_1 + ic_2$ , lembrando que  $c_1$  e  $c_2$  são vetores em  $\mathbb{C}^n$ . Desse modo, usando (4.27) segue que

$$\begin{cases} c_1^t c_1 + c_2^t c_2 = 2 \\ c_1^t c_2 - c_2^t c_1 = 0 \end{cases}$$

Para o item (a) temos:

$$\begin{aligned} \langle v_1^*, v_1^* \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d_1^t \cos(s) - d_2^t \sin(s))(d_1 \cos(s) - d_2 \sin(s)) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_1^t d_1 \cos^2(s) - d_1^t d_2 \cos(s) \sin(s) \\ &\quad - d_2^t d_1 \cos(s) \sin(s) + d_2^t d_2 \sin^2(s)] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1 + \cos(2s)}{2} d_1^t d_1 - (d_1^t d_2 + d_2^t d_1) \cos(s) \sin(s) \right. \\ &\quad \left. + d_2^t d_2 \frac{1 - \cos(2s)}{2} \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{d_1^t d_1}{2} + d_1^t d_1 \frac{\cos(2s)}{2} - (d_1^t d_2 + d_2^t d_1) \frac{\sin(2s)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_2^t d_2}{2} - d_2^t d_2 \frac{\cos(2s)}{2} \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{d_1^t d_1}{2} \int_0^{2\pi} ds + d_1^t d_1 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2s)}{2} ds - (d_1^t d_2 \right. \\ &\quad \left. + d_2^t d_1) \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2s)}{2} ds + \frac{d_2^t d_2}{2} \int_0^{2\pi} ds \right. \\ &\quad \left. - d_2^t d_2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2s)}{2} ds \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{d_1^t d_1}{2} s \Big|_0^{2\pi} + \frac{d_2^t d_2}{2} s \Big|_0^{2\pi} + d_1^t d_1 \frac{\sin(2s)}{4} \Big|_0^{2\pi} - d_2^t d_2 \frac{\sin(2s)}{4} \Big|_0^{2\pi} \right. \\ &\quad \left. + (d_1^t d_2 + d_2^t d_1) \frac{\cos(2s)}{4} \Big|_0^{2\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2} [d_1^t d_1 + d_2^t d_2] = \frac{\vec{d}^t d}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle v_1^*, v_2^* \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d_1^t \cos(s) - d_2^t \sin(s))(d_2 \cos(s) + d_1 \sin(s)) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_1^t d_2 \cos^2(s) + d_1^t d_1 \cos(s) \sin(s) - d_2^t d_2 \cos(s) \sin(s) \\
&\quad - d_2^t d_1 \sin^2(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1 + \cos(2s)}{2} d_1^t d_2 + d_1^t d_1 \frac{\sin(2s)}{2} - d_2^t d_2 \frac{\sin(2s)}{2} \right. \\
&\quad \left. - d_2^t d_1 \frac{1 - \cos(2s)}{2} \right] ds \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [d_1^t d_2 - d_2^t d_1 + (d_1^t d_2 + d_2^t d_1) \cos(2s) + d_1^t d_1 \sin(2s) \\
&\quad - d_2^t d_2 \sin(2s)] ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \left[ d_1^t d_2 \int_0^{2\pi} ds - d_2^t d_1 \int_0^{2\pi} ds + (d_1^t d_2 + d_2^t d_1) \int_0^{2\pi} \cos(2s) ds \right. \\
&\quad \left. + d_1^t d_1 \int_0^{2\pi} \sin(2s) ds - d_2^t d_2 \int_0^{2\pi} \sin(2s) ds \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ d_1^t d_2 s \Big|_0^{2\pi} - d_2^t d_1 s \Big|_0^{2\pi} + [d_1^t d_2 + d_2^t d_1] \frac{\sin(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} \right. \\
&\quad \left. - d_1^t d_1 \frac{\cos(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} + d_2^t d_2 \frac{\cos(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} [2\pi(d_1^t d_2 - d_2^t d_1)] = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle v_2^*, v_2^* \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d_2^t \cos(s) + d_1^t \sin(s))(d_2 \cos(s) + d_1 \sin(s)) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_2^t d_2 \cos^2(s) + d_1^t d_1 \sin^2(s) + d_2^t d_1 \cos(s) \sin(s) \\
&\quad + d_1^t d_2 \cos(s) \sin(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1 + \cos(2s)}{2} d_2^t d_2 + \frac{1 - \cos(2s)}{2} d_1^t d_1 \right. \\
&\quad \left. + \cos(s) \sin(s) (d_2^t d_1 + d_1^t d_2) \right] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ (d_2^t d_2 + d_1^t d_1) \frac{1}{2} + (d_2^t d_2 - d_1^t d_1) \frac{\cos(2s)}{2} \right. \\
&\quad \left. + (d_2^t d_1 + d_1^t d_2) \frac{\sin(2s)}{2} \right] ds \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ (d_2^t d_2 + d_1^t d_1) + (d_2^t d_2 + d_1^t d_1) \cos(2s) \right. \\
&\quad \left. + (d_2^t d_1 + d_1^t d_2) \sin(2s) \right] ds \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ (d_2^t d_2 + d_1^t d_1) \int_0^{2\pi} ds + (d_2^t d_2 + d_1^t d_1) \int_0^{2\pi} \cos(2s) ds \right. \\
&\quad \left. + (d_2^t d_1 + d_1^t d_2) \int_0^{2\pi} \sin(2s) ds \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ (d_2^t d_2 + d_1^t d_1) s \Big|_0^{2\pi} + (d_2^t d_2 + d_1^t d_1) \frac{\sin(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} \right. \\
&\quad \left. - (d_2^t d_1 + d_1^t d_2) \frac{\cos(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} [(d_2^t d_2 + d_1^t d_1) 2\pi] \\
&= \frac{1}{2} (d_2^t d_2 + d_1^t d_1) = \frac{\bar{d}^t d}{2}.
\end{aligned}$$

Para o item (b) usaremos as seguintes relações:

(i)  $\bar{d}^t c = 2$ , isto é:

$$\begin{cases} d_1^t c_1 + d_2^t c_2 = 2 \\ d_1^t c_2 - d_2^t c_1 = 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

(ii)  $d^t c = 0$ , isto é:

$$\begin{cases} d_1^t c_1 - d_2^t c_2 = 0 \\ d_1^t c_2 + d_2^t c_1 = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

Logo, de (4.40) e (4.41) temos que:

$$d_1^t c_2 = d_2^t c_1 = 0$$

$$d_1^t c_1 = d_2^t c_2 = 1$$

Com isso temos:

$$\begin{aligned} \langle v_1^*, v_1 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d_1^t \cos(s) - d_2^t \sin(s))(c_1 \cos(s) - c_2 \sin(s)) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_1^t c_1 \cos^2(s) - d_1^t c_2 \cos(s) \sin(s) \\ &\quad - d_2^t c_1 \cos(s) \sin(s) + d_2^t c_2 \sin^2(s)] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_2^t c_2 \cos^2(s) + d_2^t c_2 \sin^2(s) - (d_1^t c_2 \\ &\quad + d_2^t c_1) \cos(s) \sin(s)] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_2^t c_2 (\cos^2(s) + \sin^2(s)) - 0] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds = \frac{1}{2\pi} (s) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} (2\pi) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle v_2^*, v_2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d_2^t \cos(s) + d_1^t \sin(s))(c_2 \cos(s) + c_1 \sin(s)) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_2^t c_2 \cos^2(s) + d_2^t c_1 \cos(s) \sin(s) \\
&\quad + d_1^t c_2 \cos(s) \sin(s) + d_1^t c_1 \sin^2(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_2^t c_2 \cos^2(s) + d_2^t c_2 \sin^2(s) \\
&\quad + (d_2^t c_1 + d_1^t c_2) \cos(s) \sin(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_2^t c_2 (\cos^2(s) + \sin^2(s)) + 0 \cdot \cos(s) \sin(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds = \frac{1}{2\pi} (s) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} (2\pi) = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle v_1^*, v_2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d_1^t \cos(s) - d_2^t \sin(s))(c_2 \cos(s) + c_1 \sin(s)) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_1^t c_2 \cos^2(s) + d_1^t c_1 \cos(s) \sin(s) \\
&\quad - d_2^t c_2 \cos(s) \sin(s) - d_2^t c_1 \sin^2(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_1^t c_2 \cos^2(s) - d_2^t c_2 \sin^2(s) \\
&\quad + d_1^t c_1 \cos(s) \sin(s) - d_2^t c_1 \cos(s) \sin(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_1^t c_2 (\cos^2(s) - \sin^2(s))] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0 ds = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle v_2^*, v_1 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d_2^t \cos(s) + d_1^t \sin(s))(c_1 \cos(s) - c_2 \sin(s)) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_2^t c_1 \cos^2(s) - d_2^t c_2 \cos(s) \sin(s) \\
&\quad + d_1^t c_1 \cos(s) \sin(s) - d_1^t c_2 \sin^2(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_2^t c_1 \cos^2(s) - d_2^t c_1 \sin^2(s) \\
&\quad - d_1^t c_1 \cos(s) \sin(s) + d_1^t c_1 \cos(s) \sin(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [d_2^t c_1 (\cos^2(s) - \sin^2(s))] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0 ds = 0.
\end{aligned}$$

Para o caso (c) temos:

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_1 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (c_1^t \cos(s) - c_2^t \sin(s))(c_1 \cos(s) - c_2 \sin(s)) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_1^t c_1 \cos^2(s) - c_1^t c_2 \cos(s) \sin(s) \\
&\quad - c_2^t c_1 \cos(s) \sin(s) + c_2^t c_2 \sin^2(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_1^t c_1 \cos^2(s) + (2 - c_1^t c_1) \sin^2(s) \\
&\quad - (c_1^t c_2 + c_2^t c_1) \cos(s) \sin(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_1^t c_1 \cos^2(s) + 2 \sin^2(s) - c_1^t c_1 \sin^2(s) \\
&\quad - 2c_1^t c_2 \cos(s) \sin(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_1^t c_1 \cos(2s) + 2 \sin^2(s) - c_1^t c_2 \sin(2s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ c_1^t c_1 \int_0^{2\pi} \cos(2s) ds + 2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2s)) ds \right. \\
&\quad \left. - c_1^t c_2 \int_0^{2\pi} \sin(2s) ds \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ c_1^t c_1 \frac{\sin(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} + s \Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} + c_1^t c_2 \frac{\cos(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi + \frac{c_1^t c_2}{2} - \frac{c_1^t c_2}{2} \right] = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle v_2, v_2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (c_2^t \cos(s) + c_1^t \sin(s))(c_2 \cos(s) + c_1 \sin(s)) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_2^t c_2 \cos^2(s) + c_2^t c_1 \cos(s) \sin(s) + c_1^t c_2 \cos(s) \sin(s) \\
&\quad + c_1^t c_1 \sin^2(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_2^t c_2 \cos^2(s) + (2 - c_2^t c_2) \sin^2(s) \\
&\quad + (c_2^t c_1 + c_2^t c_1) \cos(s) \sin(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_2^t c_2 \cos^2(s) + 2 \sin^2(s) - c_2^t c_2 \sin^2(s) \\
&\quad + 2c_2^t c_1 \cos(s) \sin(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_2^t c_2 \cos(2s) + 1 - \cos(2s) + c_2^t c_1 \sin(2s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ c_2^t c_2 \int_0^{2\pi} \cos(2s) ds + \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2s)) ds \right. \\
&\quad \left. + c_2^t c_1 \int_0^{2\pi} \sin(2s) ds \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ c_2^t c_2 \frac{\sin(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} + s \Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} - c_2^t c_1 \frac{\cos(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} [2\pi - c_2^t c_1 + c_2^t c_1] = 1.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (c_1^t \cos(s) - c_2^t \sin(s))(c_2 \cos(s) + c_1 \sin(s)) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_1^t c_2 \cos^2(s) + c_1^t c_1 \cos(s) \sin(s) - c_2^t c_2 \sin(s) \cos(s) \\
&\quad - c_2^t c_1 \sin^2(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_1^t c_2 \cos^2(s) - c_2^t c_1 \sin^2(s) + (2 - c_2^t c_2) \cos(s) \sin(s) \\
&\quad - c_2^t c_2 \cos(s) \sin(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_1^t c_2 (\cos^2(s) - \sin^2(s)) + 2 \cos(s) \sin(s) \\
&\quad - c_2^t c_2 \cos(s) \sin(s) - c_2^t c_2 \cos(s) \sin(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_1^t c_2 \cos(2s) + \sin(2s) - 2c_2^t c_2 \cos(s) \sin(s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [c_1^t c_2 \cos(2s) + \sin(2s) - c_2^t c_2 \sin(2s)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ c_1^t c_2 \int_0^{2\pi} \cos(2s) + \int_0^{2\pi} \sin(2s) - c_2^t c_2 \int_0^{2\pi} \sin(2s) \right] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ c_1^t c_2 \frac{\sin(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} + c_2^t c_2 \frac{\cos(2s)}{2} \Big|_0^{2\pi} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} [-1 + c_2^t c_2 + 1 - c_2^t c_2] = 0.
\end{aligned}$$

Para verificarmos a decomposição (4.24), usamos a hipótese de  $L$  ser Fredholm de índice zero,

$$\text{codim Im}(L) = \dim \text{Nuc}(L) = 2,$$

ou seja,  $\text{Nuc}(L)$  tem a mesma dimensão de um subespaço complementar da  $\text{Im}(L)$ .

**Afirmção 4:** *Sendo  $L$  Fredholm de índice zero, então  $\text{Im}(L) \cap \text{Nuc}(L) = \{0\}$ .*

De fato, da alternativa de Fredholm, segue que

$$\text{Im}(L) = (\text{Nuc}(L^*))^\perp. \quad (4.42)$$

Suponha  $v \in \text{Im}(L) \cap \text{Nuc}(L)$ . Se  $v \in \text{Nuc}(L)$ , então, pelo item (a) do Lema 4.6, temos que  $v = xv_1 + yv_2$ . Por outro lado, se  $v \in \text{Im}(L)$ , por (4.42) temos  $\langle v, v_j^* \rangle = 0$ . Daí, por (4.39b) concluímos que

$$x = y = 0,$$

e a afirmação 4 está demonstrada.

**Afirmção 5:** *Seja  $W \subset C_{2\pi}$  subespaço tal que*

$$(a) \text{Im}(L) \oplus W = C_{2\pi}$$

$$(b) \dim W = \dim \text{Nuc}(L) = 2$$

$$(c) \text{Im}(L) \cap \text{Nuc}(L) = \{0\}$$

Então,

$$\text{Im}(L) \oplus \text{Nuc}(L) = C_{2\pi}.$$

De fato, seja  $\{v_1, v_2\}$  uma base do  $\text{Nuc}(L)$ . Como  $v_1, v_2 \in C_{2\pi}$ , utilizando o item (a), temos que existem  $w_1, w_2 \in W$  tais que

$$\begin{aligned} v_1 &= L(u_1) + w_1 \\ v_2 &= L(u_2) + w_2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que

$$aw_1 + bw_2 = 0. \quad (4.44)$$

Multiplicando a primeira linha de (4.43) por  $a$ , a segunda linha por  $b$  e somando-as obtemos  $av_1 + bv_2 = aL(u_1) + bL(u_2) + aw_1 + bw_2$ . Usando (4.44) e o fato que  $L$  é linear, segue que

$$av_1 + bv_2 = L(au_1 + bu_2).$$

Como  $\text{Im}(L) \cap \text{Nuc}(L) = \{0\}$ , segue que  $av_1 + bv_2 = 0$ , o que nos diz que  $a = b = 0$ . Portanto,  $\{w_1, w_2\}$  é base de  $W$ .

Sendo assim, dado  $x \in C_{2\pi}$ , temos  $x = L(y) + z$ , com  $z \in W$ . Logo existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que  $x = L(y) + \alpha w_1 + \beta w_2$ , e portanto temos

$$x = L(y) + \alpha(v_1 - L(u_1)) + \beta(v_2 - L(u_2)) = L(y - \alpha u_1 - \beta u_2) + \alpha v_1 + \beta v_2.$$

Como  $\alpha v_1 + \beta v_2 = v' \in \text{Nuc}(L)$ , segue que  $C_{2\pi} = \text{Im}(L) \oplus \text{Nuc}(L)$ . Isso conclui a demonstração da afirmação 5.

Com relação a decomposição (4.25), notamos que da alternativa de Fredholm

$$M = \{u \in C_{2\pi}^1 : \langle u, v_1^* \rangle = \langle u, v_2^* \rangle = 0\}.$$

A decomposição (4.25) segue de um argumento análogo a justificativa de (4.24). Fica assim concluído a demonstração do lema 4.6.  $\blacksquare$

Vamos agora nos referir aos 5 passos da Redução discutidos no capítulo 2. No passo 1, escolhemos  $M$  e  $N$  de acordo com as decomposições (4.24) e (4.25), isto é,

$$M = (\text{Im}(L))^\perp \cap C_{2\pi}^1, \quad N = \text{Nuc}(L). \quad (4.45)$$

Os passos 2, 3 e 4 não requerem informações específicas para a presente aplicação. Paramos após o passo 4 com as coordenadas livres da aplicação reduzida  $\phi$  dada por (2.8). Pela nossa escolha em (4.45), temos que

$$\phi : \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \text{Nuc}(L),$$

isto é, o mesmo espaço  $\text{Nuc}(L)$  aparece em ambos o domínio e a imagem de  $\phi$ . Na verdade, esta é a razão de não usarmos o complemento ortogonal em (4.45). Além do mais,  $M$  e  $N$  são complementos invariantes. Assim segue o seguinte lema:

**Lema 4.7.** *Se os espaços são invariantes pela ação, então as projeções comutam com a ação.*

**Demonstração** Seja  $E : \mathbb{Y} \rightarrow \text{Im}(L)$  a projeção com  $\text{Nuc}(L)$ . Queremos que  $E$  comute com  $\theta \in S^1$ . Suponhamos que  $u = v + w$ , onde  $v \in \text{Im}(L)$  e  $w \in \text{Nuc}(L)$ . Pela linearidade da projeção, temos que

$$\theta E(u) = \theta v = E(\theta v) = E(\theta v + \theta w) = E(\theta u),$$

pois ambos  $\text{Im}(L)$  e  $\text{Nuc}(L)$  são subespaços invariantes pela ação. Disso segue que  $(I - E)$  também comuta com a ação  $\theta$ . Seja agora  $W : \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow M$  a função definida em (2.7).

**Afirmção:** *A função  $W$  comuta com  $\theta$ , isto é,*

$$W(\theta v, \alpha) = \theta W(v, \alpha) \quad \forall \theta \in S^1.$$

De fato, fixemos  $\theta \in S^1$  e definamos

$$W_\theta(v, \alpha) = \theta^{-1} W(\theta v, \alpha).$$

Assim,

$$\begin{aligned} E\Phi(v + W_\theta(v, \alpha)) &= E\Phi(\theta^{-1}(\theta v + W(\theta v, \alpha))) \\ &= \theta^{-1} E\Phi(\theta v + W(\theta v, \alpha)). \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato que (2.7) vale para qualquer  $v$ , em particular para  $\theta v$ .

Deste modo,  $W_\theta$  também é solução da equação implícita (2.6a), sendo claro que  $W_\theta(0, 0) = 0$ . Pela unicidade da solução do Teorema da Função Implícita, concluímos que

$$W_\theta(v, \alpha) = W(v, \alpha).$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \phi(\theta v, \alpha, \tau) &= (I - E)\Phi(\theta v + W(\theta v, \alpha), \alpha, \tau) \\ &= (I - E)\Phi(\theta(v + W(v, \alpha)), \alpha, \tau) \\ &= \theta(I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha, \tau) = \theta\phi(v, \alpha, \tau). \end{aligned}$$

■

**Lema 4.8.** *Assumindo as coordenadas de  $\text{Nuc}(L)$  em (4.22), a aplicação reduzida  $\phi$  tem a seguinte forma:*

$$\phi(x, y, \alpha, \tau) = p(x^2 + y^2, \alpha, \tau) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + q(x^2 + y^2, \alpha, \tau) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

onde  $p$  e  $q$  são aplicações diferenciáveis satisfazendo

$$\begin{aligned}
(a) \quad p(0, 0, 0) &= 0, & (b) \quad q(0, 0, 0) &= 0, \\
(c) \quad \frac{\partial p}{\partial \tau}(0, 0, \tau) &= 0 & (d) \quad \frac{\partial q}{\partial \tau}(0, 0, \tau) &= -1.
\end{aligned}
\tag{4.47}$$

**Demonstração:** Para a demonstração deste lema, necessitamos provar inicialmente a seguinte afirmação.

**Afirmação:** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação diferenciável que comuta com a ação (4.23). Então existem funções diferenciáveis  $p(z)$ ,  $q(z)$  de uma variável real, tais que*

$$\phi(x, y) = p(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + q(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

De fato, escrevemos  $\phi$  da seguinte forma

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)).$$

Sabemos que  $\phi$  comuta com qualquer  $\theta \in S^1$ , em particular comuta com  $\theta = \pi$ . Sendo  $\pi(x, y) = (-x, -y)$ , temos que

$$\phi(-x, -y) = (-\phi_1(x, y), -\phi_2(x, y)).$$

Logo, se  $x = 0$  e  $y = 0$ , então

$$\phi_j(-s, 0) = -\phi_j(s, 0), \quad j = 1, 2.$$

Em outras palavras, cada componente  $\phi_j(s, 0)$  é uma função ímpar na variável  $s$ . Sendo assim, podemos escrever

$$\phi_1(s, 0) = p(s^2)s; \quad \phi_2(s, 0) = q(s^2)s,$$

para funções diferenciáveis  $p$  e  $q$ .

De modo geral, para qualquer ponto  $(x, y)$  do plano, podemos encontrar

um ângulo  $\theta$  tal que  $\theta(s, 0) = (x, y)$ , onde  $s^2 = x^2 + y^2$ . Disso segue que

$$\begin{aligned}
\phi(x, y) &= \phi(\theta(s, 0)) = \theta\phi(s, 0) \\
&= \theta(p(s^2)s, q(s^2)s) \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(s^2)s \\ q(s^2)s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(s^2)s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q(s^2)s \end{bmatrix} \\
&= p(s^2) \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} + q(s^2) \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} \\
&= p(x^2 + y^2)[\theta(s, 0)] + q(x^2 + y^2)[\theta(0, s)].
\end{aligned}$$

Sabemos que  $\frac{\pi}{2}(s, 0) = (0, s)$ , e temos também que

$$\frac{\pi}{2}\theta(s, 0) = \theta\frac{\pi}{2}(s, 0) = \theta(0, s)$$

Logo,

$$\theta(0, s) = \frac{\pi}{2}(x, y) = (-y, x).$$

Com isso, temos que

$$\phi(x, y) = p(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + q(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Isso conclui a demonstração da afirmação, e portanto (4.46) do lema 4.8 está demonstrado, a menos de parâmetros auxiliares.

Para concluir a demonstração do lema, basta verificamos agora (4.47) usando as fórmulas da proposição 2.7 para as derivadas da função reduzida. Na seqüência, realizamos o passo 5 da Redução de Liapunov-Schmidt. Especificamente, para  $j = 1, 2$ , seja

$$\phi_j(x, y, \alpha, \tau) = \langle v_j^*, \phi(xv_1 + yv_2, \alpha, \tau) \rangle. \quad (4.49)$$

Então, de (4.48) temos

$$(a) \phi_1(x, 0, \alpha, \tau) = p(x^2, \alpha, \tau)x \quad (4.50)$$

$$(b) \phi_2(x, 0, \alpha, \tau) = q(x^2, \alpha, \tau)x, \quad (4.51)$$

assim,

$$p(0, 0, 0) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(0, 0, 0, 0),$$

$$q(0, 0, 0) = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(0, 0, 0, 0),$$

e usando o item (a) da proposição 2.7, concluímos que

$$p(0, 0, 0) = q(0, 0, 0) = 0.$$

Também de (4.50) e (4.51) temos que

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}(0, 0, \tau) = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial \tau}(0, 0, 0, \tau),$$

$$\frac{\partial q}{\partial \tau}(0, 0, \tau) = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial \tau}(0, 0, 0, \tau),$$

pelo item (g) da proposição 2.7, sabemos que

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial \tau} = \langle v_j^*, d(\Phi_\tau)v_1 - d^2\Phi(v_1, L^{-1}E\Phi_\tau) \rangle \quad (4.52)$$

onde  $\Phi_\tau = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$ . Mas de (4.19), segue que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(u, \alpha, \tau) = \frac{du}{ds}.$$

E é trivial que  $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(0, \alpha, \tau) = 0$ , então o segundo termo em (4.52) desaparece. Para o primeiro termo temos

$$\begin{aligned} d(\Phi_\tau)v_1 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_\tau(0 + tv_1, 0, \tau) - \Phi_\tau(0, 0, \tau)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d(tv_1)}{ds}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \frac{dv_1}{ds}}{t} = \frac{dv_1}{ds}. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$v_1(s) = \operatorname{Re}(c)\cos(s) - \operatorname{Im}(c)\sin(s) \quad \text{e} \quad v_2(s) = \operatorname{Im}(c)\cos(s) + \operatorname{Re}(c)\sin(s),$$

segue que

$$\frac{dv_1}{ds} = -[\operatorname{Im}(c)\cos(s) + \operatorname{Re}(c)\sin(s)] = -v_2. \quad (4.53)$$

Substituímos então (4.53) em (4.52) e usamos (4.39b) para provarmos (4.47c,d). ■

Em nosso caso particular, temos as seguintes fórmulas:

$$(a) \quad \frac{dv_1}{ds} = -v_2,$$

$$(b) \quad \frac{dv_1^*}{ds} = -v_2^*,$$

$$(c) \quad \frac{dv_2}{ds} = v_1,$$

$$(d) \quad \frac{dv_2^*}{ds} = v_1^*.$$

O caso (a) já foi feito, e os demais casos são de verificação análoga.

**Demonstração do teorema 4.5:** Agora que estamos com todas as ferramentas necessárias para a demonstração, observe que, da forma explícita de  $\phi$  em (4.46), temos que  $\phi = 0$  se, e somente se, são válidas as seguintes relações:

$$(a) \quad x = y = 0, \quad (4.54)$$

$$(b) \quad p = q = 0. \quad (4.55)$$

De fato,

$$\begin{cases} px - qy = 0 \\ py + qx = 0 \end{cases} \iff (px - qy) + i(py + qx) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} p - iq = 0 \\ x + iy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = 0 \\ \text{ou} \\ p = q = 0 \end{cases}.$$

As soluções de (4.54) correspondem a solução constante trivial  $u = 0$ , já as soluções de (4.55) correspondem as soluções  $2\pi$ -periódicas do sistema (4.16).



A última é não-constante se  $z = x^2 + y^2 > 0$ . Com objetivo de eliminar a redundância das soluções de (4.55) associada a ação do  $S^1$  vamos assumir que  $y = 0$  e  $x \geq 0$ . Depois dessa simplificação, as expressões (4.54) e (4.55) ficam com a seguinte forma.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x = 0, \\ \text{(b)} \quad & p(x^2, \alpha, \tau) = q(x^2, \alpha, \tau) = 0. \end{aligned}$$

Agora queremos que numa vizinhança da origem a equação

$$q(x^2, \alpha, \tau) = 0 \tag{4.56}$$

possa ser resolvida para  $\tau = \tau(x^2, \alpha)$ . De fato, (4.47b,d) nos permite aplicar o Teorema da Função Implícita. Definamos então

$$r(z, \alpha) = p(z, \alpha, \tau(z, \alpha)), \quad g(x, \alpha) = r(x^2, \alpha)x. \tag{4.57}$$

Então a equação

$$\phi(x, y, \alpha, \tau) = 0 \tag{4.58}$$

tem solução com  $x^2 + y^2 > 0$  se, e somente se,  $r(x^2 + y^2, \alpha) = 0$  possui solução. Além disso, toda solução de (4.58) pode ser obtida das soluções de

$$g(x, \alpha) = 0,$$

com  $x \geq 0$ , por uma rotação apropriada.

Concluindo, as soluções de (4.58) estão em correspondência biunívoca com soluções de (4.14), finalizando assim a demonstração do teorema 4.5. ■

### 4.3 Existência e unicidade das soluções

Nessa seção vamos usar a Redução feita para discutir soluções periódicas do sistema de EDO's,

$$\frac{du}{dt} + F(u, \alpha) = 0 \tag{4.59}$$

onde  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  é um conjunto de parâmetros sendo  $\lambda = \alpha_0$  um parâmetro distinguido e os demais  $k$  parâmetros sendo parâmetros auxiliares.

Nosso objetivo é provar o primeiro Teorema de Hopf, que dá condições suficientes para existência de um família de órbitas periódicas. Com objetivo de tornar a notação mais enxuta, a partir desse momento vamos considerar  $k = 0$ , ou seja,  $\alpha = \lambda$ .

Assim nosso objetivo é encontrar soluções periódicas para

$$\frac{du}{dt} + F(u, \lambda) = 0. \quad (4.60)$$

**Teorema 4.9 (Teorema de Hopf).** *Seja o sistema de EDO's (4.60) tal que as seguintes hipóteses são satisfeitas:*

(H1) *A condição de autovalores simples (4.2),*

(H2) *A condição (4.4).*

*Então existe uma família a um-parâmetro de órbitas periódicas de (4.60) bifurcando da solução trivial  $u = 0$  em  $\lambda = 0$ .*

**Demonstração:** O teorema 4.5 nos diz que podemos encontrar órbitas periódicas de (4.14) resolvendo equação

$$g(x, \lambda) = 0. \quad (4.61)$$

O teorema 4.5 também garante que  $g(x, \lambda) = r(x^2, \lambda)x$  para alguma função  $r$ . Sabemos porém que, encontrar soluções não-triviais de (4.61) se resume a resolver

$$r(x^2, \lambda) = 0.$$

Expandindo a função  $r$  em série de Taylor, numa vizinhança do  $(0, 0)$  temos

$$r(x^2, \lambda) = r(0, 0) + \frac{\partial r}{\partial z}(0, 0)x^2 + \frac{\partial r}{\partial \lambda}(0, 0)\lambda + o(x^2, \lambda), \quad (4.62)$$

sendo  $r(0, 0) = 0$  pelo teorema 4.5.

**Lema 4.10.**  $\frac{\partial r}{\partial \lambda}(0, 0) = \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0, 0)$ .

**Demonstração do Lema:** De acordo com (4.57) temos que

$$r(z, \alpha) = p(z, \alpha, \tau(z, \alpha)).$$

Aplicando a regra da cadeia vem

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda}(z, \lambda) = \frac{\partial p}{\partial \lambda}(z, \lambda, \tau(z, \lambda)) + \frac{\partial p}{\partial \tau}(z, \lambda, \tau(z, \lambda)) \frac{\partial \tau}{\partial \lambda}(z, \lambda),$$

e em  $(z, \lambda) = (0, 0)$  temos

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda}(0, 0) = \frac{\partial p}{\partial \lambda}(0, 0, 0),$$

pois o lema 4.8 garante que  $\frac{\partial p}{\partial \tau}(0, 0, 0) = 0$ .

De (4.50) e (4.49) temos que

$$\phi_1(x, 0, \lambda, \tau) = p(x^2, \lambda, \tau)x \quad (4.63)$$

onde  $\phi_1(x, y, \lambda, \tau) = \langle v_1^*, \phi(xv_1 + yv_2, \lambda, \tau) \rangle$ .

Derivando (4.63) em relação a  $x$  obtemos

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, y, \lambda, \tau) = \frac{\partial p}{\partial x}(x^2, \lambda, \tau)2x^2 + p(x^2, \lambda, \tau),$$

e derivando novamente em relação a  $\lambda$  agora e substituindo em  $(x, y, \lambda, \tau) = (0, 0, 0, 0)$  temos

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda}(0, 0) = \frac{\partial p}{\partial \lambda}(0, 0, 0) = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda \partial x}(0, 0, 0, 0).$$

E pela proposição 2.7 da página 24 temos que

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda \partial x} = \langle v_1^*, d(\Phi_\lambda).v_1 - d^2\Phi(v_1, L^{-1}E\Phi_\lambda) \rangle. \quad (4.64)$$

O operador  $\Phi$  é definido por (4.19), e derivando em relação a  $\lambda$  obtemos

$$\Phi_\lambda(u, \lambda, \tau) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(u, \lambda),$$

e em particular temos que

$$\Phi_\lambda(0, \lambda, \tau) = 0, \quad d(\Phi_\lambda)v_1 = A_\lambda(0)v_1.$$

Portanto (4.64) torna-se

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda \partial x}(0, 0, 0, 0) = \langle v_1^*, A_\lambda(0)v_1 \rangle. \quad (4.65)$$

Como  $A_\lambda(0)v_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0)v_1$  e  $\langle v_1^*, v_1 \rangle = 1$ , segue que

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda}(0, 0) = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda \partial x}(0, 0, 0, 0) = \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0).$$

E com isso concluímos a demonstração do lema. ■

Utilizando o lema anterior, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita e obter que a solução para a equação  $r(x^2, \lambda) = 0$  pode ser expressa por  $\lambda = \lambda(x^2)$ , em uma vizinhança de  $(x, \lambda) = (0, 0)$ . Isso significa que para cada valor de  $x > 0$ , próximo de  $x = 0$ , existe um único  $\lambda = \lambda(x^2)$  de forma que  $r(x^2, \lambda) = 0$ , ou seja, existe uma órbita periódica de amplitude maior que zero. Com isso encontramos a família a um-parâmetro (parametrizada por  $x > 0$ ), que bifurca da solução trivial  $u = 0$ . ■

**Corolário 4.11.** *Se além das hipóteses  $(H_1)$  e  $(H_2)$ , o sistema (4.60) satisfaz a hipótese adicional*

$$(H3) \quad \frac{\partial r}{\partial z}(0, 0) \neq 0,$$

*então ocorre uma bifurcação do tipo pitchfork em  $\lambda = 0$ .*

**Demonstração:** Seja

$$m = \frac{\frac{\partial r}{\partial z}(0, 0)}{\frac{\partial r}{\partial \lambda}(0, 0)} \neq 0.$$

Então as soluções de  $r(x^2, \lambda)x = 0$  são dadas por

$$\left[ \frac{\partial r}{\partial z}(0, 0)x^2 + \frac{\partial r}{\partial \lambda}(0, 0)\lambda + o(x^2, \lambda) \right] x = 0, \quad (4.66)$$

ou seja,

$$mx^3 + \lambda x + o(x^3, \lambda) = 0.$$

Para valores próximos de  $(x, \lambda) = (0, 0)$  podemos desprezar os termos  $o(x^3, \lambda)$  e temos a bifurcação do tipo pitchfork, conforme vimos na figura 3.3 da página 41. ■

## Referências Bibliográficas

- [B77] Berger, M., *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1977.
- [H69] Hale, J. K., *Ordinary Differential Equations*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XXI, Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [MM76] Marsden, J. e McCracken, M., *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Applied Mathematical Sciences, **19**, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [C81] Carr, J., *Applications of Centre Manifold Theory*, Applied Mathematical Sciences, **35**, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [H81] Hassard, B., Kazarinoff, N. e Wan, Y. -H., *Theory and Applications of Hopf Bifurcations*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, **41**, Cambridge University press, Cambridge, 1981.
- [CH82] Chow, S. N. e Hale, J. K., *Methods of Bifurcation Theory*. Grundlehren, **251**, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [GS85] Golubitsky, M. e Schaeffer, D. G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences, **51**, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [TL80] Taylor, A. E. e Lay, D. C., *Introduction to functional analysis*, 2a ed., John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [BL05] Buzzi, C. A. e Lamb, J. S. W., Reversible equivariant Hopf bifurcation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol **175**, no 1, pp 39-84, 2005.

# Apêndice A

## Algumas Propriedades dos Operadores Diferenciais Elípticos Lineares.

Seja  $L$  um operador diferencial parcial linear de segunda ordem sobre o  $\mathbb{R}^n$ , dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \sum_{j=1}^n b_j(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_j} + c(\xi)u \quad (\text{A.1})$$

onde  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ . Suponhamos que  $a_{ij}(\xi)$  é uma matriz simétrica, isto é,  $a_{ij}(\xi) = a_{ji}(\xi)$ . Deste modo, dizemos que  $L$  é *elíptico* se para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$  a matriz  $a_{ij}(\xi)$  é positiva definida, isto é,  $x^t \{a_{ij}(\xi)\} x \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se  $L$  tem a forma

$$Lu = \Delta u + \sum_{j=1}^n b_j(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_j} + c(\xi)u \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2}$$

é o Laplaciano, então  $L$  é elíptico. Vamos nos restringir a operadores da forma (A.2) e assumimos que  $b_i(\xi)$ ,  $c(\xi)$  são funções diferenciáveis sobre  $\xi$ .

**Proposição A.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  dife-*

renciável e sejam

$$\begin{aligned} (a) \mathbb{X} &= \{u \in C^2(\Omega) : u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}, \\ (b) \mathbb{Y} &= C^0(\Omega). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Então o operador (A.2) entre os espaços (A.3) é Fredholm de índice zero.

Esse resultado é provado em Berger [B77]. Para as aplicações que foram feitas neste trabalho, basta a seguinte versão simplificada da proposição acima.

**Proposição A.2.** *Considerando*

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &= \{u \in C^1([0, b], \mathbb{R}^k) : u(0) = u(b)\}, \\ \mathbb{Y} &= \{u \in C^0([0, b], \mathbb{R}^k) : u(0) = u(b)\} \text{ e} \\ Lu &= u' + Au \end{aligned}$$

onde  $A$  é uma matriz  $k \times k$  constante, então  $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  é um operador Fredholm de índice zero.

**Demonstração:** Para a demonstração, observe inicialmente que  $Nuc(L)$  é o subespaço de  $\mathbb{X}$  formado pelas soluções de uma EDO linear, e portanto pela teoria clássica de equações diferenciais temos que  $Nuc(L)$  possui dimensão finita. Por outro lado, pela afirmação 1 da página 55, temos que o operador adjunto de  $L$  é dado por  $L^*w = -w' + A^t w$ . Pelo mesmo motivo temos que a dimensão de  $Nuc(L^*)$  é finita. Utilizando agora o fato que

$$(Im(L))^\perp = Nuc(L^*)$$

segue que a codimensão de  $Im(L)$  é finita. O fato de  $A$  e  $A^t$  possuir os mesmos autovalores implica que a dimensão de  $Nuc(L)$  e dimensão de  $Nuc(L^*)$  são iguais, ou seja, o índice é zero. Resta apenas provar que  $Im(L)$  é um subespaço fechado em  $\mathbb{Y}$ . Para isso fazemos  $M = (Im(L))^\perp$  no teorema abaixo. Isso é possível pois  $Nuc(L^*)$  tem dimensão finita, logo é fechado, ou seja,  $M$  é fechado e também  $Im(L) \oplus (Im(L))^\perp = \mathbb{Y}$ . ■

**Teorema A.3.** *Sejam  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$  espaços de Banach e  $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  um operador linear com  $graf(T)$  fechado em  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ . Se existe um subespaço fechado  $M$  de  $\mathbb{Y}$  tal que  $Im(T) \cap M = \{0\}$  e  $Im(T) \oplus M$  é fechado em  $\mathbb{Y}$ , então  $Im(T)$  é fechado em  $\mathbb{Y}$ .*

A demonstração desse teorema encontra-se em [TL80], página 217.

# Apêndice B

## Resultados e Conceitos Básicos.

Neste Capítulo vamos apenas enunciar alguns conceitos fundamentais da Análise e Álgebra Linear. Tais conceitos são de extrema importância para o desenvolver desta dissertação tais como o Teorema da Função Implícita e as definições de Espaços de Banach e de Hilbert.

**Teorema B.1 (Teorema da Função Implícita).** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$  um aberto,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação de classe  $C^1$ , e  $(p_0, q_0) \in D$ , com  $f(p_0, q_0) = 0$ ; se a matriz  $\frac{\partial f}{\partial q}(p_0, q_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_{n+j}}(p_0, q_0) \right)$  é não-singular, então existem abertos  $V \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $p_0$  e  $W \subset \mathbb{R}^m$  contendo  $q_0$ , tal que para cada  $p \in V$ , existe um único  $\phi(p) \in W$  com  $f(p, \phi(p)) = 0$ . A função  $\phi : V \rightarrow W$  é de classe  $C^1$  e*

$$J\phi(p) = \left[ \frac{\partial f}{\partial q}(p, \phi(p)) \right]^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial p}(p, \phi(p)), \forall p \in V.$$

**Definição B.2 (Espaço de Banach).** *Um Espaço de Banach é um espaço vetorial normado  $(E, \|\cdot\|)$  que é completo com respeito à métrica  $d$  induzida por sua norma, ou seja,  $d(v, w) := \|v - w\|$ .*

**Definição B.3 (Espaço de Hilbert).** *Um Espaço de Hilbert é um espaço vetorial com um produto interno  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , que é completo com a métrica  $d$  induzida pelo produto interno, ou seja,  $d(v, w) = \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}$ .*



**Teorema B.4 (Teorema do Núcleo e da Imagem).** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais de dimensão finita sobre  $\mathbb{R}$ . Dada uma transformação linear  $F : U \longrightarrow V$ , então*

$$\dim U = \dim \text{Nuc}(F) + \dim \text{Im}(F).$$