

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JULHO DE MESQUITA FILHO”**  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

---

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

---

Vinicius Machacheski Marchi

Atividades Investigativas no Ensino da Matemática Financeira: as estratégias  
empregadas com uso de planilhas eletrônicas

Rio Claro (SP)  
2014

Vinicius Machacheski Marchi

Atividades Investigativas no Ensino da Matemática Financeira: as estratégias empregadas com uso de planilhas eletrônicas.

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

**Orientador(a):** Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sueli Liberatti Javaroni

Rio Claro (SP)  
2014



Vinicius Machacheski Marchi

Atividades Investigativas no Ensino da Matemática Financeira: as estratégias empregadas com uso de planilhas eletrônicas.

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

**Orientador(a):** Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sueli Liberatti Javaroni

### Comissão Examinadora

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sueli Liberatti Javaroni (Orientadora)  
UNESP/Bauru, SP.

---

Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi  
UNESP/Rio Claro, SP.

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Norma Suely Gomes Allevato  
Universidade Cruzeiro do Sul/São Paulo, SP.

Rio Claro, SP \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2014.

Resultado: Aprovado

*Aos meus pais **Moacir** e **Suzana**.*

## **AGRADECIMENTO**

Agradeço a uma inteligência suprema, causa primeira de todas as coisas, que chamo de *Deus*, e a TODOS que direta ou indiretamente contribuíram com esse trabalho.

## RESUMO

Essa pesquisa tem por objetivo identificar e analisar as estratégias adotadas pelos alunos ao realizarem tarefas investigativas acerca de conceitos de Matemática Financeira. Para desenvolver tal proposta, foi elaborado e executado no Laboratório de Informática e Educação Matemática (LIEM) vinculada ao GPIMEM, um curso de extensão universitária intitulado “Tópicos de Matemática Financeira”, no qual estudantes do curso de Matemática da UNESP (campus de Rio Claro) participaram, organizados em duplas e com o uso de planilha eletrônica realizaram Atividades Investigativas sobre conteúdos de Matemática Financeira. Esse curso foi o cenário da produção dos dados dessa pesquisa que utilizou filmagens através de câmera digital, bem como do *software Camtasia Studio* que possibilitou a captura de imagens, sons e o desenvolvimento das tarefas efetuadas pelos alunos, junto à planilha eletrônica. Ancorado na pesquisa qualitativa para o desenvolvimento dos procedimentos metodológicos dessa pesquisa, concluiu-se que os alunos produziram conceitos sobre acréscimos e descontos, juros simples e juros compostos, evidenciando dessa forma estratégias por meio da organização de dados e busca por resultados; análise e validação de conjecturas e, a exploração na reorganização de abordagens, promovidas pela interação com o *software* da Planilha Eletrônica Excel no processo de investigação matemática.

**PALAVRAS CHAVES:** Educação Matemática. Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC). Investigação Matemática. Seres-humanos-com-mídias.

## **ABSTRACT**

This research aims to identify and analyze the strategies adopted by students to perform investigative tasks on concepts of financial mathematics. To develop such a proposal was prepared and carried out in the Laboratory of Informatics and Mathematics Education (LIEM) GPIMEM linked to a university extension course titled "Topics in Financial Mathematics", in which students of Mathematics at UNESP (Rio Claro campus) participated, organized in pairs and using spreadsheet Investigative Activities conducted on content of Mathematical Finance. This course was the scene of the production of data from this survey that used footage using digital camera as well as the Camtasia Studio software that enabled the capture of images, sounds and the development of the tasks performed by the students, with the spreadsheet. Anchored in qualitative research for the development of methodological procedures of this research, it was concluded that students produced concepts of accruals and discounts, simple interest and compound interest, thereby demonstrating strategies by organizing data and search results; analysis and validation of conjectures and exploration in the reorganization of approaches promoted by interacting with the software Excel Spreadsheet in the process of mathematical research.

**Keywords:** Mathematics Education, Information and Communication Technology, Investigation Mathematics, humans-with-media.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: <i>Layout do software Camtasia Studio</i> .....	34
Figura 2: Imagem capturada do vídeo gerado pelo <i>software Camtasia Studio</i> .....	34
Figura 3: Detalhe do recurso de escrita na Lousa Digital .....	36
Figura 4: Sistematização ideias expostas pelos alunos .....	44
Figura 5: Dados do problema .....	45
Figura 6: Cálculo do “valor da comissão” .....	46
Figura 7: Produção dupla Alex e Juliana.....	47
Figura 8: Produção dupla Mirela e Natália .....	48
Figura 9: Produção dupla Fábio e Vinícius.....	49
Figura 10: Sugestões (I), (II) e (III) de fórmulas para o cálculo da <i>Porcentagem</i> .....	50
Figura 11: Cálculo da <i>Porcentagem</i> com uso da Planilha Excel .....	52
Figura 12: Primeira abordagem do item 1, indicado como Exercício A.....	55
Figura 13: Primeira abordagem do item 2, indicado como Exercício B.....	57
Figura 14: Verificação da fórmula estabelecida na célula <i>F3</i> .....	58
Figura 15: Tentativa de estabelecer outra relação para o Exercício A.....	59
Figura 16: Organização e relações envolvendo os dados do item 1 .....	62
Figura 17: Sequência da verificação da resolução proposta por Vinicius. ....	62
Figura 18: Anotações de Vinicius para o cálculo do <i>desconto</i> .....	64
Figura 19: Organização e cálculos dos Itens 1 e 2 na Planilha Eletrônica .....	65
Figura 20: Esboçando uma fórmula para o item 3.....	66
Figura 21: Ajuste da fórmula do <i>Valor Futuro</i> com <i>acrécimo</i> .....	67
Figura 22: Manipulação dos dados .....	68
Figura 23: Modificações feitas pela dupla Fábio e Vinicius .....	72
Figura 24: Primeira tentativa de cálculo dos <i>descontos</i> .....	75
Figura 25: Cálculo dos <i>descontos</i> em partes .....	76
Figura 26: Relação proposta por Juliana.....	76
Figura 27: Proposta de Alex sobre <i>descontos sucessivos</i> .....	77
Figura 28: Cálculos realizados por Juliana.....	78
Figura 29: Argumentação de Juliana sobre <i>descontos sucessivos</i> .....	80
Figura 30: Complementação do argumento de Juliana.....	80
Figura 31: Relação final estabelecida pela dupla para o <i>desconto sucessivo</i> .....	81

Figura 32: Resposta aos subitens (a) e fórmula do <i>desconto sucessivo</i> .....	83
Figura 33: Abordagem da dupla Luís e Natália para o item 4 .....	86
Figura 34: Discussão sobre a fórmula do <i>Valor Final</i> .....	88
Figura 35: Esquema explicativo para o uso da <i>taxa de acréscimo e desconto</i> .....	89
Figura 36: Abordagem inicial proposta por Diego e Fernanda .....	91
Figura 37: Verificação da relação para o cálculo da <i>Taxa Percentual</i> total .....	93
Figura 38: Cálculo dos Juros Simples por meses .....	96
Figura 39: Segundo momento da abordagem para Juros Simples .....	97
Figura 40: Fórmula estabelecida para o cálculo do <i>Montante</i> em Juros Simples.....	98
Figura 41: Primeira abordagem dos <i>Juros Compostos</i> .....	100
Figura 42: Cálculo do <i>Juro Simples</i> para comparação .....	101
Figura 43: Desenvolvimento da fórmula do <i>Montante</i> para <i>Juros Compostos</i> .....	102
Figura 44: Verificação da fórmula $J_3 = C \times [(i \times i_1 + 1) \times (i \times i_2 + 1)]$ .....	103
Figura 45: Reinterpretação da fórmula .....	106
Figura 46: Exemplo do processo heurístico .....	112
Figura 47: Primeiras abordagens de Alex e Juliana .....	113
Figura 48: Primeiras Abordagens de Fábio e Vinicius.....	114
Figura 49: O <i>feedback</i> proporcionado pela Planilha Eletrônica.....	120
Figura 50: Explorando a relação de <i>acréscimo e desconto</i> .....	122

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Primeiras tarefas propostas .....	43
Quadro 2 - Enunciado das tarefas de <i>descontos</i> e <i>acrécimos</i> .....	54
Quadro 3 - Sistematização da produção junto à turma .....	70
Quadro 4 - Tarefas de <i>acrécimos</i> e <i>descontos sucessivos</i> .....	73
Quadro 5 - Enunciado do item 4, referente a <i>descontos sucessivos</i> .....	74
Quadro 6 - Possível formalização para <i>descontos sucessivos</i> .....	83
Quadro 7 - Tarefas sobre <i>acrécimo</i> e <i>descontos sucessivos</i> .....	85
Quadro 8 - Resultado ao final da <i>Regra de Três</i> .....	87
Quadro 9 - Fórmulas estabelecidas na lousa .....	88
Quadro 10 - Enunciado do item 5.....	89
Quadro 11 - Tarefas 7, 8 e 9 .....	90
Quadro 12 - Detalhes das relações estabelecidas por Diego .....	92
Quadro 13 - Notas de aula sobre Juros e Juros Simples .....	94
Quadro 14 - Problema 1 sobre Juros Simples.....	95
Quadro 15 - Notas de aula sobre <i>Juros Compostos</i> .....	99
Quadro 16 - Tarefa investigativa sobre <i>Juros Compostos</i> .....	99
Quadro 17 - Desenvolvimento da fórmula dos <i>Juros Compostos</i> .....	102
Quadro 18 - Momentos na realização de uma investigação.....	116
Quadro 19 - Análise e validação feita por Alex e Juliana .....	118

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Sistematização e Mediação .....	71
Tabela 2 - Cálculos do <i>desconto sucessivo</i> na Planilha Eletrônica.....	79
Tabela 3 - Relação entre células versos Fórmula .....	98

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>A PESQUISA.....</b>	<b>15</b>
1.1	Primeiros Passos .....	15
1.2	A questão de Pesquisa .....	19
1.3	Organização da Dissertação .....	21
<b>2</b>	<b>METODOLOGIA DE PESQUISA .....</b>	<b>21</b>
2.1	Introdução .....	21
2.2	A Opção Metodológica.....	21
2.2.1	<i>Proposta Pedagógica do Curso</i> .....	26
2.3	Procedimentos Metodológicos .....	29
2.3.1	<i>Curso de Extensão</i> .....	29
2.3.2	<i>Instrumentos de Coleta de Dados</i> .....	30
2.3.2.1	<i>Registro em Vídeo</i> .....	31
2.3.2.2	<i>Camtasia Studio</i> .....	33
2.3.2.3	<i>Lousa Digital</i> .....	35
2.3.3	<i>As Atividades</i> .....	37
2.3.4	<i>A Organização e Análise dos Dados</i> .....	39
<b>3.</b>	<b>APRESENTAÇÃO DOS DADOS E ANÁLISE .....</b>	<b>40</b>
3.1	Introdução .....	40
3.2	<b>Bloco 2: Matemática Comercial .....</b>	<b>42</b>
3.2.1	<i>Acréscimos e Descontos</i> .....	54
3.2.1.2	<i>Dupla: Vinicius e Fábio</i> .....	61
3.2.2	<i>Acréscimos e Descontos Sucessivos</i> .....	73
3.2.2.1	<i>Dupla: Alex e Juliana</i> .....	74
3.2.2.2	<i>Sistematização: Acréscimos e Descontos Sucessivos</i> .....	85
3.3	<b>Bloco 3: Matemática Financeira.....</b>	<b>94</b>
3.3.1	<i>Juros Simples</i> .....	94
3.3.1.1	<i>Dupla: Vinicius e Fábio</i> .....	95
3.3.2	<i>Juros Compostos</i> .....	99
3.3.2.1	<i>Dupla: Diego e Fernanda</i> .....	99

<b>4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>109</b>
<b>4.1 Introdução .....</b>	<b>109</b>
<b>4.2 Busca por resultados e a organização de dados .....</b>	<b>111</b>
<b>4.3 Análise e validação de conjecturas.....</b>	<b>115</b>
<b>4.4 Explorações: reorganização de abordagens.....</b>	<b>121</b>
<b>5. CONSIDERAÇÕES SOBRE A PESQUISA .....</b>	<b>125</b>
<b>5.1 A tarefa de investigar em sala de aula .....</b>	<b>125</b>
<b>5.2 As Planilhas Eletrônicas .....</b>	<b>128</b>
<b>5.3 Contribuições para Educação Matemática .....</b>	<b>129</b>
<b>5.4 Por fim.....</b>	<b>131</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>132</b>
<b>APÊNDICE A - Tarefas Investigativas.....</b>	<b>136</b>
<b>ANEXO A - Autorizações .....</b>	<b>141</b>

## 1 A PESQUISA

*A curiosidade epistemológica é elemento indispensável à formação do/a educador/a, cuja experiência profissional deverá promover o exercício sistemático da curiosidade no processo de pensar e de estudar a própria prática (FREITAS, 2008, p. 108).*

### 1.1 Primeiros Passos

Ao concluir minha graduação, em 2001, no Curso de Matemática Licenciatura Plena, pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), no Rio Grande do Sul, iniciei minha atuação como professor em diferentes níveis de ensino. Dentre as experiências que tive, destaco minha atuação como professor substituto na UFSM/RS, no ano de 2002, e minha atuação na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), no ano de 2005, onde atuei nos cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia, em disciplinas ligadas à formação de professores. De 2004 a 2010, trabalhei, também, como professor do Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial (SENAC/RS), em especial na Faculdade de Tecnologia (FATEC SENAC/RS), onde lecionei Matemática para diversos níveis, dentre eles, para os cursos de formação Profissional Técnica<sup>1</sup> de nível médio, desenvolvendo atividades de ensino da Matemática Financeira nos laboratórios de informática, com o auxílio de Planilhas Eletrônicas Excel<sup>2</sup>.

Nesse período trabalhei com o ensino da Matemática Financeira e pude perceber, ainda mais, o papel social da Matemática. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), esse papel deve ser desenvolvido de maneira que

[...] permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido, desenvolver suas capacidades cognitivas e sua confiança para enfrentar desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício de cidadania, ao longo do seu processo de aprendizagem (BRASIL, 1998, p. 60).

---

<sup>1</sup> O Artigo 5º do Decreto nº 2.208/97 define que “a Educação Profissional de nível técnico terá organização curricular própria e independente do Ensino Médio, podendo ser oferecida de forma concomitante ou sequencial a este”.

<sup>2</sup> O Microsoft Office Excel (nome popular Microsoft Excel) é um programa de planilha eletrônica escrito e produzido pela Microsoft para computadores que utilizam o sistema operacional Microsoft Windows e também computadores Macintosh da Apple Inc.. Para mais informações acesse: <http://www.dssresources.com/history/sshistory.html>

Essa experiência proporcionou-me a confirmação da crença de que a Matemática Financeira deve fazer parte da Educação Matemática dos estudantes, pois está relacionada à vida cotidiana da maioria das pessoas e está diretamente ligada ao exercício de uma prática cidadã.

[...] é grande a importância que essa parte da matemática tem na vida das pessoas, as quais estão permanentemente cercadas pelos problemas de sobrevivência financeira, necessitando de clareza e autonomia para tomar decisões frente às situações diárias e para que possam compreender as transações comerciais e bancárias das quais se utilizam com frequência (MARASINI, 2001, p. 11).

O Ensino da Matemática Financeira, conforme colocado por Marasini (2001), levou-me a reflexões acerca da atuação como professor, aumentando o desconforto em relação a minha prática pedagógica. Esse processo reflexivo desencadeou constantes e paulatinas avaliações sobre as consequências de minhas ações e de meus posicionamentos a respeito da adoção de tecnologias informáticas, especificamente o uso das Planilhas Eletrônicas Excel, em sala de aula. Reflexões acerca do tipo de atividades a serem trabalhadas com a tecnologia e acerca das consequências desse trabalho, o que poderia gerar uma zona de risco, colocando-me em situações nas quais eu não possuiria total domínio dos resultados, nem dos possíveis problemas técnicos, nem dos diversos caminhos que os alunos poderiam adotar para solucionar atividades com recursos tecnológicos. O trabalho com uma mídia informática, em sala de aula, oportuniza aos estudantes não só discussões sobre suas experiências e curiosidades nessa área, como também formulações sobre suas próprias conjecturas, levando o professor a lidar com situações não habituais (BORBA; PENTEADO, 2003).

Como professor de cursos técnicos de nível médio, pude constatar que os estudantes que tinham o Ensino Médio concluído, em sua maioria, não evidenciavam conhecimento sobre os conteúdos relacionados à Matemática Financeira e nem às Planilhas Eletrônicas. Acredito que tais conteúdos e recursos tecnológicos possam contribuir para a “tarefa de preparar cidadãos para uma sociedade cada vez mais permeada por novas tecnologias, e de possibilitar o ingresso de parcelas significativas de seus cidadãos a patamares mais elaborados do saber” (BRASIL, 2010, p. 16). Além disso,

[...] o ensino de Matemática Financeira é de extrema importância quando se objetiva à formação de alunos críticos e capazes de reconhecer as relações comerciais existentes em nosso dia-a-dia, já que se faz sempre necessário aprender a lidar com dinheiro em suas diferentes formas (HERMÍNIO, 2008, p. 4).

O mesmo verifica-se com os cálculos de porcentagem, juros compostos, amortização, variação da taxa em relação ao tempo, leitura e interpretação de fluxos de caixa, bem como a realização de análises baseada em informações de gráficos que estão presentes nesse ramo da Matemática. Por mais que a Matemática Financeira se mostre um componente curricular com grande aplicação no cotidiano dos estudantes, aplicá-la de forma correta, segura e ágil certamente compreende o domínio da mesma, assim como o uso de recursos tecnológicos, pois esses auxiliam a calcular e expressar os resultados encontrados.

[...] por meio do uso de uma Tecnologia Informática juntamente com a Matemática Financeira, o professor poderá desenvolver atividades com situações próximas do contexto vivenciado por seu aluno, nas quais poderá levá-los a pensar criticamente e a desenvolver possíveis mudanças durante a sua existência (GOUVEA, 2006, p. 14).

A utilização de recursos tecnológicos como, por exemplo, calculadoras financeiras e computadores com seus aplicativos voltados para os cálculos financeiros, é uma realidade presente na sociedade. Saber dominar esses recursos se faz necessário, pois são de grande valia. As Planilhas Eletrônicas, por exemplo, realizam cálculos e possibilitam não só expressar as informações graficamente, mas também organizar dados por meio de demonstrativos. Além disso, “é com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática” (BRASIL, 2006, p. 90).

Em minhas aulas, quando atuava como docente da disciplina de Matemática Financeira, além do uso da lousa e giz para desenvolver os tópicos em Matemática Financeira, permitia o uso de calculadoras<sup>3</sup>, assim como propiciava o uso do laboratório de informática com acesso à Internet e desenvolvia atividades com as Planilhas Eletrônicas. No exercício da profissão de professor, quando decidimos pelo uso de algum recurso tecnológico, em sala de aula, devemos, segundo Borba e Penteadó (2003), levar em consideração qual o objetivo da atividade que se

---

<sup>3</sup> Os alunos eram orientados no uso de calculadoras simples, científicas e a Financeira HP 12C.

pretende realizar e analisar a adequação da tecnologia para a realização da mesma. Sob esse olhar, percebo que o uso das Planilhas Eletrônicas se torna adequado nas atividades que envolvem a Matemática Financeira.

As planilhas eletrônicas, mesmo sendo ferramentas que não foram pensadas para propósitos educativos, também podem ser utilizadas como recursos tecnológicos úteis à aprendizagem matemática. Planilhas oferecem um ambiente adequado para experimentar sequências numéricas e explorar algumas de suas propriedades, por exemplo, comparar o comportamento de uma sequência de pagamentos sob juros simples e juros compostos. Também oferecem um ambiente apropriado para trabalhar com análises de dados extraídos de situações reais (BRASIL, 2006, p. 89).

Ao longo de minha prática docente, constatei que os estudantes geralmente demonstravam grande interesse na utilização das Planilhas Eletrônicas, mesmo que não apresentassem domínio sobre elas, e, por este motivo, requeriam uma introdução ao estudo das principais funções desse *software*.

Percebi, também, que o entusiasmo dos alunos em aplicar os conhecimentos de Matemática Financeira desenvolvidos em sala de aula era confrontado com questionamentos do tipo “*mas por que tem que ser assim?*”, referente ao uso de fórmulas transformadas em outra linguagem, no caso a da Planilha Eletrônica. Em outros casos, ocorria uma surpresa ao observar que os mesmos problemas propostos em sala de aula, antes trabalhosos, tornavam-se mais simples quando resolvidos no computador. Além disso, pude perceber o surgimento de diferentes soluções por parte dos alunos ao resolverem um determinado problema.

Essa dinâmica encontrada no uso de Planilhas Eletrônicas pode ser justificada por algumas de suas características. Beare (1993) cita, entre outras, as seguintes: interatividade, *feedback* instantâneo na alteração de dados e fórmulas, articulação dos dados de saída e fórmulas simultaneamente, resolução de problemas complexos e com grande quantidade de dados. Algumas dessas características encontram-se no processo de simulação e são de grande valia no estudo da Matemática em geral e, em especial, por exemplo, no estudo de empréstimos, presente na Matemática Financeira.

Diante dessas angústias relacionadas com o ensino da Matemática Financeira, do uso de tecnologias e da minha atuação como professor, encontrei na Educação Matemática um caminho a ser trilhado. Meus questionamentos e minha curiosidade epistemológica, como Freitas (2008) descreve na epígrafe deste

capítulo, levou-me a agir sobre minha realidade de prática docente, para transformá-la. Nesse sentido, busquei envolvimento com cursos relacionados à área e, durante esse processo, tive meu primeiro contato com pesquisas em Educação Matemática, através do curso de extensão à distância, “Tendências em Educação Matemática” oferecido pelo GPIMEM<sup>4</sup>, grupo ao qual me vinculei após ingressar como aluno do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Esse contato transformou a qualidade da minha própria curiosidade que culminou na elaboração desta dissertação.

## 1.2 A questão de Pesquisa

Com base em minhas vivências no ensino de Matemática Financeira com o uso das Planilhas Eletrônicas e na dinâmica estabelecida pelos alunos diante do uso desse recurso tecnológico é que me disponho a dissertar acerca da seguinte questão:

*Como se apresentam as estratégias empregadas pelos alunos ao fazerem uso de planilhas eletrônicas, no desenvolvimento de atividades investigativas em Matemática Financeira?*

A partir dessa pergunta, é possível identificar os conceitos basilares para esta pesquisa, a saber, Atividades Investigativas e Estratégias. De modo geral, para Ponte, Brocado e Oliveira (2003, p. 13): “Investigar é procurar conhecer o que não se sabe”. O termo “investigar” pode ser utilizado em diferentes contextos como, por exemplo, para caracterizar uma pesquisa de mercado que busca levantar o menor preço de determinada mercadoria ou a busca de informações de um determinado assunto utilizando a Internet. No caso desta pesquisa, trabalhei com a noção de Investigações Matemáticas que, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2003), configura-se em um processo no qual se parte de questões mais gerais ou de um conjunto de dados pouco estruturados visando chegar a um refinamento e formulações de conjecturas mais precisas e/ou melhor estruturadas. Nesse processo tais conjecturas são verificadas podendo ser aceitas ou refutadas.

O conceito de investigação matemática pode ser utilizado como base para a elaboração de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, visando o ensino

---

<sup>4</sup> <http://www.rc.unesp.br/gpimem/>

e a aprendizagem da Matemática. Desse modo, pode constituir uma abordagem pedagógica em que “o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na representação de resultados e argumentação com seus colegas e professores” (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

Na realização de tarefas investigativas, acredita-se que os alunos possam, de forma mais ou menos, consistente utilizar-se de vários processos que caracterizam a Atividade Investigativa em Matemática. Esses processos podem ser compostos por momentos como a exploração e a formulação de questões, quando há o reconhecimento e exame de uma situação problema. Além disso, esse comportamento investigativo aparece nas conjecturas, quando o aluno elabora questões e organiza dados; nos testes de reformulação que propiciam o refinamento das conjecturas; e, por fim, no esclarecimento e na avaliação dessas conjecturas, do raciocínio e seus resultados (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003). Por conseguinte, podemos entender que essas ações fazem parte de estratégias elaboradas pelos alunos para realizar as tarefas propostas.

Nesse sentido, quando falo de estratégias, refiro-me a esses processos que estão envolvidos na realização de Atividades de Investigação em Matemática Financeira com o uso da Planilha Eletrônica.

Retomando a pergunta de pesquisa, é importante deixar claro que ela representa a sumarização do seguinte objetivo: identificar e analisar as estratégias adotadas pelos alunos na realização das Atividades Investigativas, durante um curso de extensão para acadêmicos do primeiro ano do curso de graduação<sup>5</sup> em Matemática, em que o foco foi o estudo de tópicos de Matemática Financeira com o uso de Planilhas Eletrônicas.

O curso de extensão, que foi palco da produção dos dados dessa pesquisa, foi realizado durante o segundo semestre letivo do ano de 2011, sob a coordenação do Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba. Nesse curso, ocorreu o desenvolvimento de Atividades Investigativas que exploravam tópicos de Matemática Comercial e Financeira com o auxílio de Planilhas Eletrônicas.

O conjunto de dados, gerados nessa pesquisa, foi coletado por gravações em vídeo da dinâmica das atividades no Laboratório de Informática e Educação

---

<sup>5</sup> A graduação em Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP, campus Rio Claro) apresenta entrada única, com escolha de Licenciatura e Bacharelado após o segundo ano de curso.

Matemática (LIEM), pela produção escrita dos alunos durante as aulas, pelo armazenamento pormenorizado em vídeo do desenvolvimento e discussão das tarefas junto às Planilhas Eletrônicas, em cada computador em que os alunos trabalharam. Considerando que tais Atividades Investigativas ocorreram em um coletivo composto por duplas de estudantes e que incluíam material didático impresso, lápis, papel e recursos tecnológicos como o computador e a lousa digital é que assumo uma visão de conhecimento que é produzido por um coletivo composto por seres humanos-com-mídias, ou seres humanos-com-tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005) para a observação e análise das estratégias usadas por estes alunos na realização das tarefas.

Diante do exposto, até aqui, saliento que esse trabalho está centrado na análise das tarefas com foco nas estratégias usadas pelos estudantes durante a realização das Atividades de Investigação em Matemática Financeira.

### **1.3 Organização da Dissertação**

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos, além das referências, apêndice e anexos. No próximo capítulo, o foco é metodologia da pesquisa, no qual apresento a visão de conhecimento que sustenta essa investigação, a descrição do âmbito no qual foi realizado o estudo e os procedimentos de coleta e análise dos dados realizados.

No capítulo 3, os dados da pesquisa são apresentados e analisados com base nos fundamentos teóricos que a sustentam. No capítulo seguinte, retomo a pergunta de pesquisa com o objetivo de tecer algumas aproximações que possibilitem sintetizar as compreensões e algumas conclusões que foram evidenciadas no decorrer desta investigação.

No Capítulo 5, trago reflexões acerca das minhas experiências como professor pesquisador durante a coleta de dados e faço uma análise crítica sobre os processos dessa pesquisa, explicitando dessa forma as contribuições que esta pesquisa trouxe à Educação Matemática. Do mesmo modo, discuto as principais limitações do estudo e as direciono para futuras investigações que possam ser realizadas a partir delas.

## 2 METODOLOGIA DE PESQUISA

*Ensinar é, antes de mais nada, fabricar artesanalmente os saberes tornando-os ensináveis, exercitáveis e passíveis de avaliação no quadro de uma turma, de um ano, de um horário, de um sistema de comunicação e trabalho (PERRENOUD, 1993, p. 25).*

### 2.1 Introdução

Nesse capítulo, detenho-me a apresentar a opção metodológica de pesquisa num esforço para tornar mais claros os passos desta investigação, pois, segundo Goldenberg (2004), tal descrição se faz necessária, uma vez que:

Um dos problemas da pesquisa qualitativa é que os pesquisadores geralmente não apresentam os processos através dos quais suas conclusões foram alcançadas. O pesquisador deve tornar essas operações claras para aqueles que não participaram da pesquisa, através de uma descrição explícita e sistemática de todos os passos do processo, desde a seleção e definição dos problemas até os resultados finais pelos quais as conclusões foram alcançadas e fundamentadas (GOLDENBERG, 2004, p.49).

Portanto, seguindo as recomendações de Goldenberg (2004), a seguir apresento os procedimentos metodológicos adotados para a realização da pesquisa, o contexto da produção dos dados e o referencial teórico que sustenta a análise destes.

### 2.2 A Opção Metodológica

Conforme já apresentado anteriormente, esta pesquisa tem por objetivo identificar e compreender as estratégias empregadas pelos alunos no decorrer do desenvolvimento de Atividades Investigativas acerca de conteúdos de Matemática Financeira com a Planilha Eletrônica Excel. Para atingir esse objetivo, elaboramos e ministramos um curso de extensão universitária para alunos do Curso de Matemática. Esse curso foi o cenário para a produção dos dados dessa pesquisa, onde busquei observar os processos de reorganização do pensamento dos alunos, a dinâmica das interações entre os alunos e entre os alunos e o professor ao trabalhar

com o *software*, formando, assim, um coletivo de humanos e não humanos para produção de conhecimento em conteúdos de Matemática Financeira.

Dessa forma, faz-se necessário esclarecer o que entendo por “estratégia”, que tem seu significado pautado em: aplicar e explorar com coerência os recursos disponíveis que sejam favoráveis ao alcance de determinado objetivo, que por vez podem gerar

[...] táticas, métodos, caminhos, técnicas, manobras, tramas e outras formas conscientes de as pessoas realizarem várias coisas. [...] Os alunos empregam estratégias para passar nos testes, para conhecerem amigos ou para negociarem exigências conflituosas (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 227).

Portanto, nessa dissertação, identificar e compreender as estratégias dos alunos significa analisar as tomadas de decisões e as ações executadas pelos alunos durante o desenvolvimento das Atividades Investigativas, propostas no decorrer do curso por mim ministrado.

Esta pesquisa não levará em consideração a quantificação numérica do grupo de indivíduos pesquisados e nem de suas produções, mas sim a compreensão em profundidade de suas ações nesta produção. Isto nos leva ao que Goldenberg (2004) afirma quanto à abordagem qualitativa:

Enquanto os métodos quantitativos supõem uma produção de objetos comparáveis, os métodos qualitativos enfatizam as particularidades de um fenômeno em termos de seu significado para o grupo pesquisado (GOLDENBERG, 2004, p.49).

Assim, para o desenvolvimento dessa pesquisa adotei a metodologia qualitativa, cuja preocupação do pesquisador, segundo Goldenberg (2004, p.14) é “com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc”. Além disso, em pesquisas qualitativas como esta, a delimitação da questão de pesquisa vem se formando na medida em que a mesma foi se desenvolvendo, em conjunto aos meus estudos, pois, “os planos evoluem à medida que se familiarizam com o ambiente, pessoas e outras fontes de dados, os quais são adquiridos através da observação directa” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 83). Ainda, conforme esses autores, em investigações qualitativas deve haver um esforço, por parte do pesquisador, em eliminar pré-conceitos e ter como

pressuposto que pouco se sabe das pessoas e ambientes que irão constituir o objeto de pesquisa.

De acordo com Araújo e Borba (2004, p. 29), “o processo de construção da pergunta diretriz é, na maioria das vezes, um longo caminho, cheio de idas e vindas, mudanças de rumos, retrocessos, até que, após certo período de amadurecimento, surge a pergunta”. Processo semelhante a esse ocorreu em minha pesquisa, uma vez que a pergunta norteadora sofreu modificações devido a reflexões acerca do tema, das observações durante a produção e a análise dos dados.

Dessa forma, considerando esse processo de idas e vindas, a pergunta diretriz que orienta a pesquisa relatada nesta dissertação, ficou assim delineada: “*Como se apresentam as estratégias empregadas pelos alunos, ao fazerem uso de planilhas eletrônicas, no desenvolvimento de atividades investigativas em Matemática Financeira?*”. Com base nessa questão, busquei estabelecer a harmonia entre a opção metodológica, os procedimentos metodológicos e a visão de conhecimentos que constituem a pesquisa (LINCOLN; GUBA, 1985), pois é importante que essa coerência fique explicitada, evitando que o leitor componha entendimentos que não sejam próprios desse estudo (ALVES-MAZZOTI, 2004).

Assim, considerando esta pesquisa de cunho educacional, tomo como foco o estudo dos fenômenos educacionais que, segundo Triviños (1987), são fenômenos sociais que podem apresentar-se de uma forma ampla, incerta, difícil de delimitar e analisar. Na tentativa de delimitar o fenômeno social, salientam-se seus traços característicos que se constituem de “atos, atividades, significados, participação, relação e situação” (TRIVIÑOS, 1987, p. 126). O objeto desta pesquisa, portanto, deve ser entendido como um fenômeno educacional caracterizado pelas interações produzidas em um ambiente informatizado, entre os alunos, alunos e professor, e alunos e computadores, ao utilizarem o *software* Excel para a exploração e desenvolvimento de Atividades Investigativas envolvendo Matemática Financeira.

É possível entender que a interação entre os atores que compõem a pesquisa (alunos, professor, planilhas, lápis, papel e outras mídias) é desencadeada por questões pertinentes ao estudo da Matemática Financeira, pelo uso específico da planilha ou pela troca de ideias entre alunos em um determinado momento da sessão de estudo (aula). Essa troca de ideias pode ser caracterizada por *ato(s)* como a realização de uma tarefa por parte dos alunos. Por exemplo, quando são

orientadas pelas *atividades* propostas, no caso as tarefas investigativas, sobre um tópico de Matemática Financeira.

Desta forma, os atos ou atividades podem dar origem a *significados*, que surgem das discussões na realização das tarefas. Nesse processo, foi observada a *participação* dos alunos ou duplas de alunos que se destacaram na realização das Atividades Investigativas por liderar as discussões e produção de conhecimento ou por sua simples adaptação no processo que se desenvolveu.

Ainda nesse contexto, pode perceber o surgimento de inter-relações, ou seja, o estabelecimento de *relações* em diversos momentos, tais como aluno e professor, aluno e aluno (duplas), e aluno e Planilha Eletrônica. Configura-se, assim, a *situação* que é foco do presente estudo, em especial a análise das estratégias empregadas no uso de Planilhas Excel quando os alunos estão desenvolvendo Atividades Investigativas.

### 2.2.1 Visão de Conhecimento

Ao estruturar os traços característicos dos fenômenos sociais presentes nesta pesquisa, sobretudo os educacionais, apresento-os como parte do processo que me ajudou na análise de como se apresentam as estratégias empregadas pelos alunos ao fazerem uso de Planilhas Eletrônicas, no desenvolvimento de Atividades Investigativas em Matemática Financeira. Para essa análise, faço uso de uma concepção de conhecimento que está focada nas interações humanas mediadas por mídias computacionais, em especial, pelo *software* das Planilhas Eletrônicas Excel.

Com base nisso, faz-se necessário refletir acerca de algumas relações estabelecidas entre a produção do conhecimento, em especial o conhecimento matemático, e o uso das TIC. Para isso baseio-me nas ideias de Tikhomirov (1981), entre elas, de que o pensamento criativo baseia-se no uso de conhecimentos anteriormente organizados na forma de livros, artigos, revistas, etc. formando assim uma “memória artificial humana”, dessa forma ao recorreremos a essas informações na memória externa temos uma tarefa independente, que por vez acarreta em um dispêndio de tempo em sua busca desconcentrando o usuário do foco solucionar problemas. Contudo com o uso dos computadores, propicia além do

armazenamento de informação, uma maior velocidade em sua busca assim como seu refinamento e cruzamento de informações. Evidenciando dessa forma

um novo estágio no desenvolvimento do que Vygotsky chamou de “memória artificial da raça humana”. O uso efetivo de computadores para a busca de informação nesta memória, reorganiza a atividade humana no sentido de tornar possível focalizar na resolução de problemas criativos verdadeiros (TIKHOMIROV, 1981, p. 267).

E assim cria-se uma relação entre o homem e computador, definida pelo autor como sistema “homem-computador”. Nessa relação, Tikhomirov (1981) propõe que as ações no uso do computador influenciam o pensamento humano e assim geram sua reorganização. Em outras palavras, o computador reorganiza o modo como o ser humano pensa. Essa noção de reorganização baseia-se na teoria de Vygotsky que concebe a linguagem como mediadora da atividade humana. O computador para Tikhomirov (1981) também faz parte da mediação da atividade humana, caracterizando-se, em particular, por oferecer um retorno imediato.

Assim pode-se notar o papel que o computador possui no desenvolvimento das atividades: como de facilitador das contas; ampliando a memória dos alunos e, possibilitando a reorganização do pensamento dos alunos. (TIKHOMIROV, 1981; BORBA; VILLARREAL, 2005).

Em Educação Matemática, podemos, segundo Borba (1999, p. 287), estender as ideias de Tikhomirov, pois, com o desenvolvimento das novas interfaces computacionais, teremos processos mediados por som e imagem “e outros meios que se encontram em amplo processo de desenvolvimento e possibilitam *feedback* muito mais intenso do que os analisados por Tikhomirov”. Ao perceber uma dualidade entre seres humanos e as tecnologias, Borba (2004, p. 305) estabelece “que o conhecimento produzido é condicionado pelas tecnologias e, em particular, pelas tecnologias da inteligência” que o autor denomina como mídias, pelo seu aspecto comunicacional.

O tipo de conhecimento produzido em sociedades que têm a oralidade como principal ferramenta é distinto daquele de sociedades que têm algum tipo de escrita. De forma análoga, ao estarmos lidando com uma tecnologia da inteligência, qualitativamente diferente como informática, novos coletivos, incluindo humano e não humanos, são formados. Ou seja, novos coletivos ‘seres-humanos-com-mídias’ se constituem como atores desta produção do conhecimento (BORBA, 2004, p. 305).

Entendemos que a oralidade e a escrita, pelo seu caráter comunicacional, são consideradas mídias, assim como o lápis, o papel, a própria informática e outros elementos que apresentam esse objetivo (BORBA, 1999). Esse conjunto de mídias tem seu papel no que Lévy (1993, p. 171) define como coletivos pensantes, pois, esse “sistema instável e pululante das coisas participa integralmente da inteligência dos grupos”. Podemos, dessa forma, entender que esse pensamento coletivo produz conhecimento baseado na relação entre seres humanos e mídias, pois segundo Lévy (1993):

O computador, ou ainda o arranjo composto pelo papel, o lápis e o alfabeto formam micromódulos relativamente coerentes que vêm juntar-se, como nós suplementares, a numerosos outros nós semi-independentes de uma rede cognitiva ao mesmo tempo pessoal e transpessoal (LÉVY, 1993, p. 174/175).

Desse modo acredito que a produção de conhecimento está associada a um coletivo pensante formado por atores humanos e não humanos, ou seja, pela relação do humano com uma determinada tecnologia da inteligência. Confirmando assim como Borba e Villarreal (2005), que o computador molda o ser humano ao mesmo tempo em que é moldado por ele, e o conhecimento é produzido por um coletivo composto por seres-humanos-com-mídias, ou seres-humanos-com-tecnologias.

A partir dessa visão, a seguir passo a apresentar a proposta pedagógica que foi dotada na produção dos dados dessa pesquisa.

### *2.2.2 Proposta Pedagógica do Curso*

O curso de extensão oferecido aos alunos da graduação em Matemática da UNESP, campus Rio Claro/SP contou com uma proposta pedagógica baseada em Atividades Investigativas.

Para a elaboração e desenvolvimento de Atividades investigativas, Ponte (2010, p. 15) considera que “investigar, em Matemática, inclui a formulação de questões, que frequentemente evoluem à medida que o trabalho avança. Investigar envolve, também, a produção, a análise e o refinamento de conjecturas sobre essas mesmas questões”. Essas questões, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2003), são usualmente desenvolvidas de um ou mais problemas e a determinação dos

mesmos, de modo geral, é o primeiro e fundamental passo para qualquer investigação.

Quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outra vez, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p.17).

Desta forma, tomado como ponto de partida para uma investigação, podemos ter um problema matemático ou uma situação não matemática, oriundos de outras ciências, como da organização social ou da vida diária, e que envolvam a demonstração e a comunicação dos resultados (PONTE, 2010).

Para o desenvolvimento de uma investigação matemática, são apresentados quatro principais momentos:

A primeira respeita ao reconhecimento da situação, a sua exploração prévia e a formulação de questões. A segunda é referente ao processo de formulação de conjecturas. A terceira envolve a fase de testes e refinamento de conjecturas. E, finalmente, a última, diz respeito à argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado (PONTE et al, 1999, p. 84).

Esses momentos podem, muitas vezes, ocorrer simultaneamente. Por exemplo, a formulação das questões e a conjectura inicial, ou a conjectura e o teste, assim como o refinamento de uma conjectura e sua justificativa, entre outras, pois

Esse trabalho de formulação de questões, elaboração de conjecturas, testes, refinamento das questões e conjecturas anteriores, demonstração, refinamento da demonstração e comunicação dos resultados aos seus pares esta ao alcance dos alunos na sala de aula de Matemática (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA 2003, p. 22).

Assim como Ponte, Brocado e Oliveira (2003), considero que as Investigações Matemáticas são um tipo de atividade que todos os alunos podem experimentar, uma vez que, nessa Atividade Investigativa, existe uma variedade de percursos a serem tomados pelos próprios alunos. Da mesma forma, seus progressos, as discussões que surgem entre eles e suas diversas percepções e interpretações acerca do que é exposto pelo professor são elementos que

constituem um mosaico inesperado de situações durante uma investigação matemática.

Para que os alunos possam experimentar essas e outras situações, as Atividades Investigativas desenvolvem-se em uma aula ou em um conjunto de aulas e caracterizam-se, habitualmente, por apresentar três fases:

(i) Introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (PONTE; BROCCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 25).

Tendo como base estas fases das Atividades Investigativas, tomei esta estrutura para o desenvolvimento do curso de extensão que vem a ser o cenário de minha pesquisa, assim como a produção dos alunos, que gerou um conjunto de dados os quais analiso, procurando evidenciar como as estratégias foram empregadas pelos alunos ao fazerem uso de Planilhas Eletrônicas no desenvolvimento de Atividades Investigativas em Matemática Financeira.

## 2.3 Procedimentos Metodológicos

Como ressaltar, meu envolvimento com o tema desta pesquisa se tornou algo importante, pois tanto minha formação acadêmica quanto minhas experiências pessoais e profissionais relacionam-se ao contexto e aos sujeitos desta pesquisa, possibilitando, assim, a interpretação dos fenômenos observados (ALVES-MAZZOTTI, 2004). E, por acreditar na importância de gerar um ambiente de investigação o mais próximo possível de uma sala de aula – com elementos característicos a ela, ou seja, com alunos trabalhando, em duplas, sobre tópicos de Matemática Financeira com o uso de Planilhas Eletrônicas e com uma proposta pedagógica que dê suporte ao estudo desses conteúdos, – é que propus e executei o desenvolvimento de um curso de extensão.

### 2.3.1 *Curso de Extensão*

Para a coleta de dados desta pesquisa, foi oferecido um Curso de Extensão Universitária aos alunos do Curso de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da UNESP, campus de Rio Claro. Minha atuação no curso se deu como professor pesquisador, apresentando e orientando as atividades junto ao grupo de alunos e como membro participante, efetivamente. Dessa forma, vivenciei a afirmativa de Alves-Mazzotti (2004, p. 166): “o pesquisador se torna parte da situação observada, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando partilhar o seu cotidiano para sentir o que significa estar naquela situação”.

O curso teve como objetivos desenvolver junto aos alunos o estudo de tópicos em Matemática Financeira associada ao uso das Planilhas Eletrônicas em Atividades Investigativas, propiciando, assim, o uso de tecnologia no estudo da matemática e complementando a formação inicial dos graduandos.

O local do curso e a coleta dos dados ocorreram no LIEM. O curso teve duração de 35 horas e foi dividido em 14 encontros de 2,5 horas cada. Os encontros ocorreram às terças-feiras e quintas-feiras das 19h às 21h30min, no período de 23/8/2011 a 13/10/2011.

O curso foi organizado em cinco blocos:

- O primeiro bloco, composto de três encontros, teve o objetivo de introduzir o uso das Planilhas Eletrônicas entre os participantes.
- O segundo bloco, composto por dois encontros, abordou a temática relacionada à Matemática Comercial, tendo como objetivo central trabalhar assuntos relacionados à *Porcentagem*, *Valor Principal* (Valor atual ou *Capital*) e *Taxa Percentual* e suas relações, tratando, ainda, de *Descontos* e *Acréscimos* nesse contexto.
- O terceiro bloco, que chamei de Matemática Financeira, teve como objetivo definir as relações entre *Capital* e *Taxa* de Juros ao longo do *Tempo*, abordando-os em dois temas centrais: os Juros Simples e os Juros Compostos. Esse terceiro bloco contou com um total de quatro encontros.
- O quarto bloco teve o objetivo de explorar o tema Séries Financeiras com foco nos Sistemas de Amortizações e Empréstimos, e contou com um total de três encontros.
- O quinto e último bloco teve como foco o uso e aplicações das funções financeiras específicas da Planilha Excel, abrangendo os tópicos abordados ao longo do curso.

O curso contou com a participação de 17 alunos e, apesar do número ímpar, a turma foi dividida, geralmente, ao longo do curso, em duplas, ou, em alguns momentos, pela eventual falta de um ou outro participante, constituíram-se trios. A composição das duplas se deu por livre escolha dos alunos.

### 2.3.2 Instrumentos de Coleta de Dados

No início das aulas, os alunos foram informados de que esse curso fazia parte de minha pesquisa. Solicitei aos participantes a assinatura do termo de consentimento para participação, bem como para o registro de suas falas e imagens, as quais seriam utilizadas cientificamente para fins da pesquisa.

Também apliquei um questionário que teve por propósito o delineamento do perfil dos participantes. A partir das respostas, pude verificar que dos dezessete alunos, na ocasião, nove estavam cursando o primeiro ano, cinco estavam no

segundo ano e três estavam cursando o terceiro ano do curso de Matemática. Além disso, foi possível observar que 10, entre os 17 participantes, não possuíam conhecimento acerca da Planilha Eletrônica.

Com relação aos recursos que foram utilizados na coleta dos dados durante as aulas do curso, destaco: filmagem do ambiente, registrando a dinâmica do curso; a captura das imagens da tela do computador e as imagens e áudio dos alunos trabalhando nas tarefas via *software Camtasia Studio*; assim como os vídeos contendo a exposição das atividades com o auxílio da Lousa Digital. Nas seções seguintes, passo a descrever esses recursos.

Para a exploração das tarefas, foram utilizadas as Planilhas Eletrônicas, além da calculadora existente no próprio sistema operacional de cada computador, o acesso à Internet e lápis e papel. Uma pasta arquivo foi disponibilizada a cada dupla de alunos, contendo as tarefas propostas e também folhas pautadas para que pudessem efetuar eventuais cálculos, esboçar suas estratégias ou ainda fazer as anotações que julgassem pertinentes, durante os encontros, constituindo assim um portfólio<sup>6</sup>.

### 2.3.2.1 Registro em Vídeo

Como relatado anteriormente, o curso contou com um total de 14 encontros, dos quais 11 se destinaram, especificamente, a trabalhar tópicos de Matemática Financeira. Durante todo este período, foram feitos registros em vídeo. Um aspecto importante da gravação de uma aula é o quanto a presença da câmera de vídeo e de quem a manipula pode interferir na sequência da mesma.

O primeiro cuidado é acostumar a classe com a pessoa que vai gravar e com a função da gravação. Assim, devemos iniciar as gravações algumas aulas antes das planejadas para obtenção de dados, de modo que os alunos e o professor já vejam essa função como parte da aula e toda a curiosidade já tenha sido acalmada (CARVALHO, 2011, p. 31).

Para tanto, os três primeiros encontros tiveram o propósito, de orientar os alunos para o uso das Planilhas Eletrônicas, de apresentar os recursos de captura

---

<sup>6</sup> Portfólio é uma lista de trabalhos de um profissional, empresa ou estudante, no caso de ambientes educacionais. [<http://pt.wikipedia.org/wiki/Portfólio>].

de dados como a câmera de vídeo, manipulada com o apoio do técnico do LIEM e o gerenciamento do *software Camtasia Studio*.

As gravações com a filmadora ocorreram, em grande parte, em um plano geral, ou seja, do LIEM como um todo, mostrando a composição das duplas nos computadores e a dinâmica dos trabalhos no laboratório. Em outro plano, um pouco mais específico, ocorreu a captura das discussões pertinentes aos assuntos entre as duplas e com a turma, assim como a interação do grupo comigo e vice-versa, ocorrendo, também, registros específicos da interação entre professor e dupla.

Para que os discursos dos alunos e do professor possam ser associados, é fundamental o registro em vídeo da aula completa e se possível de toda uma sequência de aulas, uma vez que é impossível prever em que momento da mesma ocorrerão eventos relevantes (CARVALHO, 2011, p. 30).

Assim, as gravações geraram grande quantidade de informações constituindo-se como fonte principal de dados da pesquisa. Para analisar estas informações foi usada uma sequência sugerida por Powel (2004, p. 98), que é composta por sete fases *interativas e não lineares*: “1. Observar atentamente os dados do vídeo; 2. Descrever os dados do vídeo; 3. Identificar eventos críticos; 4. Transcrever; 5. Codificar; 6. Construir o enredo; 7. Compor a narrativa”.

Baseando-me nessa sequência, foi possível traçar um roteiro que compõe a descrição e a análise dos dados. Segundo Powell (2004), de forma preliminar, *observar atentamente os dados do vídeo* possibilita a familiarização com os mesmos, pois é possível assisti-los várias vezes; já ao *descrever os dados do vídeo* é possível fazer anotações descritivas de atividades ao longo do tempo, possibilitando a localização de episódios, assim podendo-se *identificar eventos críticos*, em relação à questão de pesquisa, presentes em explicações matemáticas dos alunos, que estão relacionadas ao emprego das estratégias no uso das Planilhas Eletrônicas no desenvolvimento das Atividades Investigativas. Com essa possível identificação, faz-se necessário *transcrever* esses momentos, permitindo a sincronização com outros artefatos: no caso desta pesquisa, registros mais precisos, como os obtidos através do *software Camtasia Studio*, bem como a produção escrita e registrada nos portfólios de cada dupla. Com a obtenção dos resultados das transcrições, tem-se a *Codificação*, uma forma de identificação de temas relacionados à questão da pesquisa. Com base nessas informações, pode-se

*construir o enredo* que se constituiu na organização rigorosa de eventos críticos. Observamos que, ao *compor a narrativa*, ela foi organizada por partes de um todo com base nas questões de pesquisa que estão sendo abordadas, ou seja, permeando toda a sequência proposta por Powell (2004).

Em minha pesquisa, considerando que viso à análise do desenvolvimento de cada dupla, o *software Camtasia Studio* acabou por desempenhar um papel essencial no sentido de possibilitar um suporte técnico maior. O curso de extensão contou, em média, com oito duplas. Para atingir o propósito da pesquisa, seria necessária a utilização de uma câmera para cada dupla. As gravações que foram feitas contavam apenas com uma câmera de vídeo e, filmando globalmente, não seria possível registrar as atividades desenvolvidas por todas as duplas em seus respectivos computadores. Dessa forma, foi o *software* o responsável por permitir uma análise mais detalhada do trabalho dos alunos e, logo, por auxiliar no aumento da capacidade de alcance da pesquisa.

#### 2.3.2.2 *Camtasia Studio*

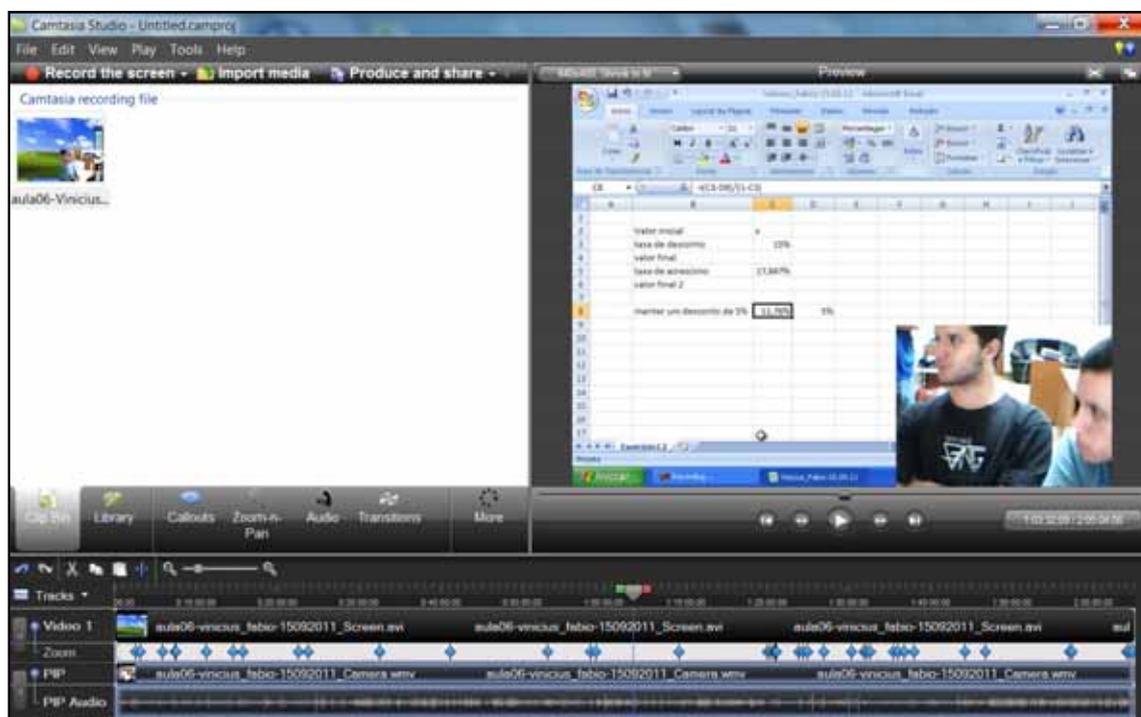
O *software Camtasia Studio*, instalado em cada computador, foi utilizado nessa pesquisa, possibilitando o registro de todos os processos pertinentes ao desenvolvimento das atividades relativas ao curso. O *software* possibilita a gravação do conteúdo presente na tela do computador e, através da *Webcam* e do microfone, registra a imagem dos participantes e suas discussões acerca das tarefas. Com o *Camtasia Studio*, é possível gerar vídeos com detalhes específicos do que ocorre em cada computador e, assim, acompanhar cada procedimento desenvolvido e o passo a passo nas atividades realizadas pelos alunos. Para o registro de dados, os

Videoclipes, gerados por esse *software*, trazem uma maneira diferenciada de coleta dos dados e, possivelmente, uma forma diferenciada de análise dos dados, pois temos a possibilidade de ver o caminho que os alunos desenvolveram determinada tarefa no computador, juntamente com suas falas na discussão deste caminho e temos ainda suas expressões faciais. Podemos assim dizer que conseguimos realizar uma triangulação dos dados (JAVARONI, 2007, p. 65).

Podemos observar na Figura 1, o *layout* da interface do *software* para edição do vídeo e na Figura 2, temos uma imagem do vídeo capturado em um determinado

instante, em especial, no momento em que os alunos Alex e Juliana estavam verificando a fórmula estabelecida para o *desconto* simples.

**Figura 1:** Layout interface do software *Camtasia Studio*



Fonte: Dados da pesquisa

**Figura 2:** Imagem capturada do vídeo gerado pelo software *Camtasia Studio*

Fonte		Alinhamento		Número	
=(A10*B10)+					
B	C	D			
Exercício A					
Principal(P)	Porcentagem(p)	Valor final com acrescimo		Vf=(P*i)+P	
R\$ 123,00	R\$ 9,84	R\$ 132,84		R\$ 132,84	
Exercício B					
Principal(P)	Porcentagem(p)	Valor final com abatimento		conclusão	
R\$ 321,00	R\$ 14,45	R\$ 306,56		Vf=(P*i)-P	
		=(A10*B10)+			

Fonte: Dados da pesquisa

### 2.3.2.3 Lousa Digital

Com o intuito de apresentar as tarefas que foram desenvolvidas – o funcionamento de algumas ferramentas da Planilha Eletrônica, por exemplo –, alguns conceitos específicos referentes à Matemática Financeira – assim como possibilitar aos alunos compartilhar com seus colegas a realização de suas atividades – foram utilizados, além do projetor multimídia, a Lousa Digital.

A Lousa Digital<sup>7</sup> permite escrever, desenhar, editar, gravar e, caso o usuário tenha acesso à Internet, visualizar páginas e enviar *e-mails*. O modelo de lousa digital usado no curso de extensão possui uma tela conectada ao computador e ao projetor multimídia do usuário. A superfície dessa tela é sensível ao toque, ou seja, quando se executa algum movimento sobre ela, o computador registra o que se fez em um *software* específico que acompanha a Lousa Digital, possibilitando escolher opções de ações e, até mesmo, desenhar e escrever. A Lousa Digital em questão possui acessórios como: canetas com pontas emborrachadas, cada uma delas reproduz uma cor própria (vermelho, azul, preto e verde), juntamente com um apagador especial que não danifica a superfície da lousa. Possui também um teclado virtual alfabético e numérico sensível ao toque que permite ao usuário inserir dados na tela interativa.

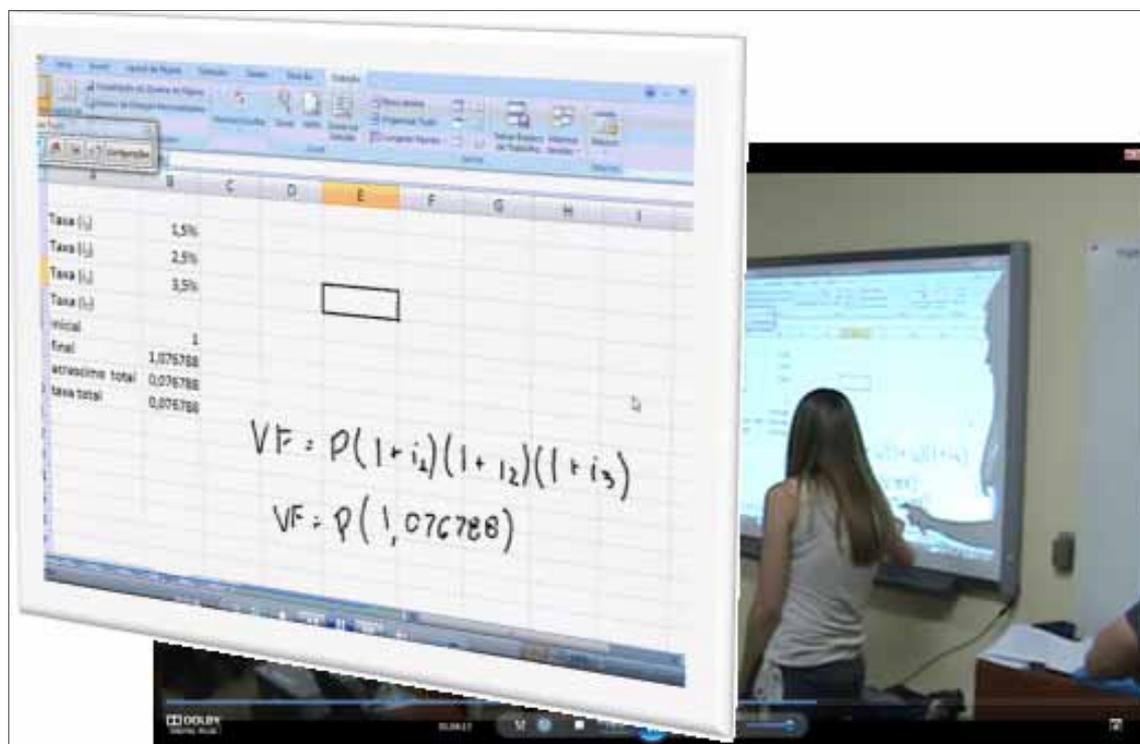
Entre os diversos recursos presentes no *software* de gerenciamento que acompanha a Lousa Digital, destacam-se dois que auxiliaram na coleta de dados para a pesquisa. Um deles é a lente de aumento que permite ampliar o tamanho do conteúdo ou da imagem selecionada, a fim de verificar seus detalhes; o outro é a possibilidade de gerar um vídeo com o conteúdo que está sendo trabalhado na Lousa Digital durante a aula.

O usuário da Lousa Digital tem a possibilidade de utilizar qualquer aplicativo do *Windows*, assim como qualquer outro *software* instalado no computador. Na Figura 3, temos uma sobreposição de imagens, que nos mostra o momento em que uma aluna utiliza a Planilha Eletrônica e o recurso de escrita da Lousa Digital para compartilhar com seus colegas o que sua dupla realizou em relação à tarefa proposta.

---

<sup>7</sup> Modelo: SMART Board. [<http://smarttech.com/smartboard>]

**Figura 3:** Detalhe do recurso de escrita na Lousa Digital



Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que a Figura 3 é composta por duas imagens: em um primeiro plano, temos o que é exposto pela lousa, no caso a produção escrita de uma fórmula acerca de *acréscimos sucessivos*, feita com a caneta própria da lousa e, em segundo plano, notamos a aluna, Agatha, utilizando a lousa digital em um momento capturado pela câmera filmadora.

A Lousa Digital propicia o uso de vários *softwares*; para essa pesquisa foi usado a *software* da Planilha Excel em conjunto com recursos da própria Lousa como a escrita sobre a planilha, que segundo Nakashima, Barros e Amaral (2009, p.169) “[permite] a interação entre o professor e os alunos, favorecendo a construção coletiva do conhecimento”.

### 2.3.3 As Atividades

Como vimos anteriormente, o Curso de Extensão foi organizado em cinco blocos temáticos e, para cada bloco, foram elaboradas tarefas investigativas com o intuito de trabalhar tópicos de Matemática Financeira. Dessa forma as Atividades Investigativas compõem-se basicamente de tarefas que inicialmente propiciam aos alunos um primeiro contato com elas, tendo como objetivo a investigação e a experimentação, ou seja, tendo o objetivo de possibilitar aos alunos, com a utilização da Planilha Eletrônica, a coleta, manipulação e interpretação dos dados na resolução de problemas. Na sequência essas tarefas investigativas possuem um objetivo mais específico: tem-se o propósito de que os alunos investiguem as possibilidades na elaboração de relações mais genéricas a partir das experimentações inicialmente exploradas, formalizando alguns dos conceitos abordados no estudo da Matemática Financeira.

Com o intuito de explicitar como as tarefas foram trabalhadas pelos alunos, apresento-as para que se possa ter uma visão de como se constituem os dados desta pesquisa. As atividades foram desenvolvidas ao longo do curso, em diversas aulas, conforme a duração de cada bloco temático.

O primeiro grupo de tarefas, correspondente ao segundo bloco, abordou a temática Matemática Comercial. Ao distribuir o material contendo as tarefas, faço inicialmente a caracterização da Matemática Comercial como sendo um estudo de base, em que não trabalhamos com o fator *Tempo*, que possui uma característica fundamental no restante dos estudos em Matemática Financeira. Além dessa caracterização, também é apresentado o significado do símbolo % e seu uso. Dessa forma, o foco neste bloco é o estudo de *Porcentagem*, *Taxa Percentual*, *Valor Principal (Valor Atual ou Capital)*, *Acréscimos* e *Descontos*.

Para esse estudo, foram propostos quatro grupos de tarefas, assim caracterizados: (1) Caracterização do uso e cálculo da *Porcentagem*; (2) *Acréscimos* e *Descontos* na resolução de problemas e formalização das relações estabelecidas; (3) *Acréscimos* e *Desconto Sucessivos* na resolução de problemas e formalização das relações estabelecidas; (4) Aplicação dos itens anteriores na resolução de problemas diversos e formalização das possíveis relações estabelecidas.

O segundo grupo de tarefas está relacionado ao estudo da Matemática Financeira e corresponde ao estudo de Juros Simples e Composto. Ao distribuir o material contendo as tarefas, inicialmente foi apresentada a definição de Juros como sendo a compensação em dinheiro pelo uso de um *Capital*, por determinado período de *Tempo*; e *Montante* como sendo a soma do *Capital* aos Juros obtidos. Na sequência, foram apresentadas as definições de Juros Simples e Compostos. Com base nessas definições, foram desenvolvidas atividades com a Planilha Eletrônica com o objetivo de investigar e explorar as relações entre *Taxas de Juros* e o *Período* de aplicação dos juros, bem como formalizar relações entre os elementos envolvidos nos problemas propostos.

O terceiro grupo compreende o quarto bloco de tarefas, e corresponde ao estudo de Séries Financeiras. Nesse grupo, proponho aos alunos a seguinte situação: “*Você se propõe a depositar mensalmente a quantia de R\$ 100,00 em uma aplicação de juros compostos, com rendimento de 1% ao mês. Como determinar o montando ao longo do tempo?*”. Com essa proposta, são desenvolvidas atividades com o auxílio da Planilha Eletrônica que exploram e investigam as possibilidades de resolução de problemas relacionados a essa temática. A partir desse estudo, surgiu a necessidade de estabelecer algumas definições relacionadas a Séries Financeiras <sup>8</sup> Uniformes, para que no decorrer das atividades houvesse a determinação dos *Valores Futuros (Montantes)* ou *Presentes (Capital)* e os demais elementos envolvidos nesses cálculos. O objetivo dessas atividades, além da criação e formalização de relações pertinentes às Séries Financeiras foi o de usar as fórmulas preestabelecidas pela Planilha Excel para o cálculo das mesmas.

O quarto grupo de tarefas possibilitou aos alunos a exploração dos recursos presentes nas “*fórmulas financeiras*” para as demais tarefas presentes nos blocos temáticos, possibilitando a verificação dos resultados e estabelecendo comparações sobre a aplicação da Planilha Eletrônica.

---

<sup>8</sup> As séries financeiras correspondem a toda e qualquer sequência de entradas ou saídas de valores iguais e constantes de um caixa, tendo os seguintes objetivos: amortização de uma dívida ou a *Capitalização* de um montante.

### 2.3.4 A Organização e Análise dos Dados

Como vimos nas seções anteriores, os alunos utilizaram, durante o curso de extensão, as Planilhas Eletrônicas, o portfólio contendo as tarefas investigativas que possibilitaram a eles a realização de anotações sobre as atividades desenvolvidas, com esboços e registros de suas estratégias, bem como do acesso à Internet e à calculadora presente no sistema operacional dos computadores. Esse conjunto de recursos gerou certa quantidade de dados, que foram complementados por outros recursos para o registro das atividades desenvolvidas pelos alunos, como a gravação das aulas em vídeo, utilização do *software Camtasia Studio* e da Lousa Digital. Esses recursos completaram e geraram os dados em sua integralidade. Para tanto, foi necessário organizar esses dados de forma *conveniente* para esta pesquisa. O *conveniente* ao qual me refiro contempla a necessidade de gerar ou evidenciar os dados que mais se aproximam da resposta à pergunta norteadora da pesquisa.

A partir da análise dos vídeos gravados pelo *software Camtasia Studio* e das evidências de registros na elaboração dos portfólios, foram selecionados abordagens que dão indícios para responder a pergunta diretriz desta pesquisa. Essas abordagens se referem a eventos e cenas, configuram os dados desta pesquisa e compõem o próximo capítulo deste trabalho.

Vale ressaltar, aqui, que os dados escolhidos para análise foram divididos em dois *blocos temáticos*, a saber, Bloco Matemática Comercial e Bloco Matemática Financeira. De modo análogo, tem-se a abordagem das tarefas investigativas com o uso das Planilhas Eletrônicas presentes no desenvolvimento das Atividades Investigativas. As abordagens contam, também, com figuras capturadas de cenas a partir dos vídeos gerados pela câmera e pelo *software Camtasia Studio*, tabelas e quadros explicativos.

Sendo assim, tais abordagens evidenciam os fatos que aconteceram no ambiente em que se realizou o curso de extensão bem como as ações dos alunos junto ao computador. Dessa forma, como relatei, anteriormente, os alunos, ao empregarem estratégias com uso das Planilhas Eletrônicas, tornam-se os personagens principais do processo.

### 3. APRESENTAÇÃO DOS DADOS E ANÁLISE

*Certamente, o social pensa nas atividades cognitivas dos sujeitos. Mas, inversamente, os indivíduos contribuem para a construção e a reconstrução das máquinas pensantes que são as instituições. Tanto é assim que toda estrutura social só pode manter-se ou transforma-se através da interação inteligente de pessoas singulares (LEVY, 1993, p. 146).*

#### 3.1 Introdução

Os dados desta pesquisa foram coletados, basicamente, a partir da produção dos alunos em sala de aula, no decorrer do curso de extensão. Esses dados se constituem do portfólio com anotações que os estudantes fizeram no desenvolvimento das atividades e, principalmente, das gravações do desenvolvimento das atividades realizadas pelas duplas no decorrer do curso, feitas pelo *software Camtasia Studio*, conforme já apresentado no capítulo anterior.

Os assuntos e conteúdos abordados durante o curso estão organizados em cinco blocos temáticos relacionados ao estudo da Matemática Financeira que foi proposto nessa pesquisa. As tarefas propostas aos alunos, advém desses blocos temáticos. O primeiro bloco tem como objetivo de sistematizar o uso das Planilhas Eletrônicas; o segundo bloco aborda uma temática relacionada à Matemática Comercial, tendo como foco os *Acréscimos* e *Descontos*; o terceiro bloco, o qual chamei de “Matemática Financeira”, aborda dois temas centrais: os Juros Simples e os Juros Compostos; já o quarto bloco explora o tema “Séries Financeiras”, com foco nos Sistemas de Amortizações e Empréstimos e, por fim, o quinto bloco utiliza-se de aplicações das funções financeiras, específicas da Planilha Eletrônica nos assuntos abordados ao longo do curso.

Para a organização deste capítulo, parti da análise inicial dos vídeos que me possibilitaram elaborar, organizar e separar os dados em “abordagens”. Essas abordagens estão relacionadas aos blocos temáticos Matemática Comercial e Matemática Financeira. Identifiquei os dados, dividindo-os em itens, pelo conteúdo referente aos blocos temáticos e, em subitens, as abordagens no desenvolvimento das atividades propostas por cada dupla, a qual identifiquei com o nome dos participantes.

Dessa forma, os blocos temáticos, apresentados como dados, partem de elementos presentes e de fatos ocorridos no LIEM no decorrer do curso de extensão. Em outras palavras, os alunos participantes do curso, suas ações no desenvolvimento das atividades, as relações com as mídias que foram utilizadas, em especial *software* Planilha Excel e o professor-pesquisador constituem os principais atores desta pesquisa.

Levo em consideração, principalmente, os dados que, de alguma forma, são úteis para melhor entender o desenvolvimento das atividades, ou seja, as abordagens dadas pelos alunos, que foram obtidas pelo *software Camtasia Studio*, pois as imagens e as falas por eles capturadas são componentes importantes na análise desses dados, já que possibilitam o acesso, a todo o momento que julguei necessário, aos diálogos com gestos, expressões faciais e comentários dos alunos no desenvolvimento das atividades.

Os blocos escolhidos, assim como as duplas para análise, seguem a visão do pesquisador sobre seu objeto, buscando “responder” a questão central:

*Como se apresentam as estratégias empregadas pelos alunos ao fazerem uso de planilhas eletrônicas, no desenvolvimento de atividades investigativas em Matemática Financeira?*

Na sequência, estão colocados os blocos temáticos dois e três. As transcrições apresentadas são trechos da discussão entre as duplas de alunos no desenvolvimento das atividades. Também fica evidenciada minha interação com eles nesses momentos. Alguns comentários descritivos se fazem necessários para o entendimento da transcrição dos diálogos.

### 3.2 Bloco 2: Matemática Comercial

Para o início das Atividades Investigativas, Ponte, Brocado e Oliveira (2003) sugerem que se discorra, primeiramente, sobre a forma como o professor propôs aos alunos a atividade e as tarefas que eles deverão realizar. Em minha pesquisa, todas as propostas de tarefas são apresentadas por escrito.

Ao introduzir o Bloco 2: “Matemática Comercial”, comecei por caracterizá-lo como sendo um estudo das operações comerciais, ou seja, esse estudo não levará em conta o fator *Tempo*.

Na abordagem inicial dos principais elementos que compõem esse estudo foi apresentado o seguinte problema: **“Uma revenda de carros cobra 10% de comissão sobre a venda de cada automóvel. Suponha que um automóvel é vendido por R\$ 52.000,00, qual o valor da comissão?”**.

Esse tipo de problema caracteriza o estudo da Matemática Comercial, pois não leva em conta o fator *Tempo*. Com a intenção de introduzir uma discussão, apresenta-se o significado da palavra percentagem, retirado do novo dicionário Aurélio da língua portuguesa: **“Percentagem**. [Do lat. *per centum*, ‘por cento’, + -agem] *Parte proporcional calculada sobre uma quantidade de 100 unidades*” (FERREIRA, 2000, p. 256).

A apresentação dessa definição levantou a discussão sobre as formas de escrita com que a mesma aparece nos problemas, assim como na fala cotidiana das pessoas. Um dos alunos, Alex, questionou se o correto é “*Porcentagem*” ou “*Percentagem*”. Argumentei que as duas formas estão corretas, pois a palavra *percentagem*, mais comum em Portugal do que no Brasil, tem origem no inglês *percentage*, enquanto a forma *Porcentagem*, mais usual no Brasil, é formada por justaposição e sufixação da locução *por cento*. A palavra inglesa *percentage* deriva das palavras latinas *per* e *centum*, que estão também na origem dos portugueses *por* e *cento* (LEITE; CALLOU, 2002).

Seguindo a abordagem do problema proposto, é chamada a atenção para algumas tarefas presentes no material distribuído às duplas, conforme o Quadro 1. Além disso, questiono a turma sobre qual o significado que a *Porcentagem* lhes suscita.

**Quadro 1** - Primeiras tarefas propostas

- a. A partir desta definição dê uma solução para o problema.
- b. Se você tivesse que “*formalizar*” o cálculo feito no item anterior, para ser aplicado a qualquer situação, como ficaria?
- c. Qual o significado do símbolo “%”?
- d. A Quais outras situações podem ocorrer a *Porcentagem*?

Fonte: Dados da pesquisa

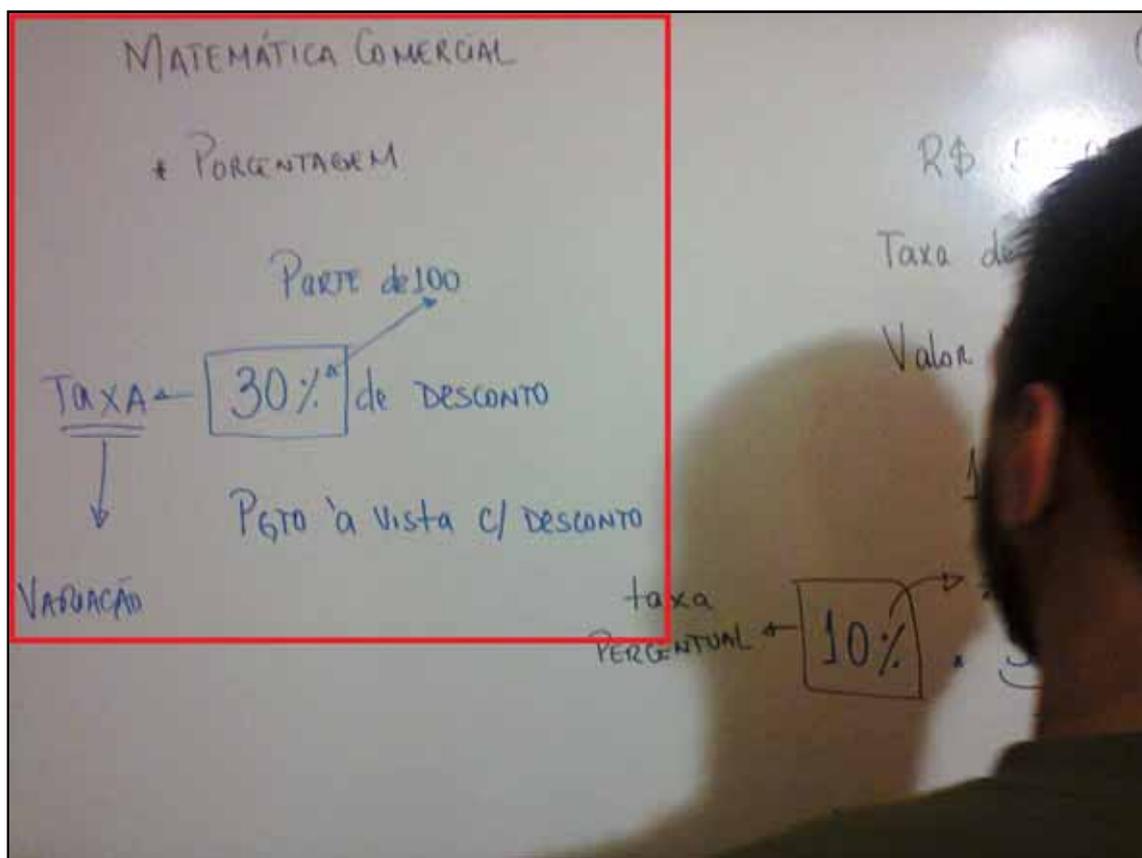
Timidamente, a discussão começa com a aluna Fernanda dizendo que *Porcentagem* é uma parte de 100. Porém essa é a definição apresentada no material distribuído aos alunos. Percebendo isso, solicito a eles exemplos de situações onde a *Porcentagem* aparece. Alguns exemplos aparecem como:

***Vinicius:*** 30% de desconto na compra de um produto.

***Mirela:*** Pagamento à vista com desconto

A partir das ideias dos alunos Fernanda, Vinicius e Mirela, procurei articular essas situações com o problema proposto, propiciando uma explicação e, ao mesmo tempo, possibilitando aos alunos uma compreensão dos significados dos parâmetros presentes no cálculo da *Porcentagem*.

**Figura 4:** Sistematização ideias expostas pelos alunos



Fonte: Dados da pesquisa

Ao tomar o exemplo dado pelo aluno Vinícius, ou seja, “30% de desconto ...”, assim como as sugestões das alunas Fernanda e Mirela, como pode ser observado, Figura 4, comecei a questionar os alunos acerca do significado de cada elemento que compõe o cálculo da *Porcentagem*.

Um dos primeiros questionamentos que fiz aos alunos, visando o entendimento do conceito de *Porcentagem*, é: “30 % é a porcentagem?”. A esse questionamento, obtive a resposta da aluna Natália que nos disse que 30% representa uma taxa. A partir da colocação da aluna, questionei sobre qual a ideia que eles têm sobre taxa e se podemos generalizá-la. Algumas respostas foram dadas a esse questionamento:

**Natália:** É o valor estipulado para tirar ou aumentar alguma coisa.

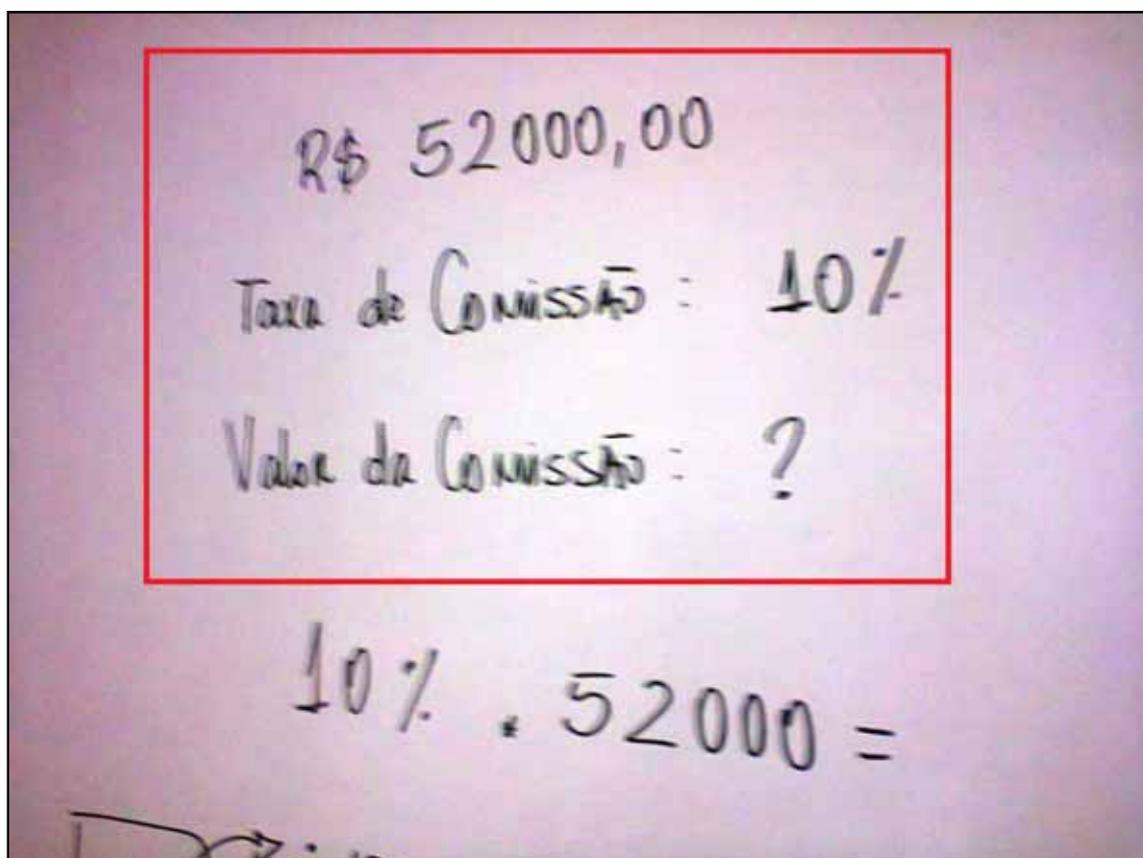
**Mirela:** Um erro?

**Luana:** Variação!

Partindo dessas respostas, chamei a atenção para os dados do problema inicialmente proposto na tentativa de delimitar os conceitos de *Porcentagem* e *Taxa*

*Percentual*. Para tanto, coloquei na lousa os dados do problema, como pode ser observado na Figura 5, no destaque em vermelho na lousa.

**Figura 5:** Dados do problema



Fonte: Dados da pesquisa

Os dados do problema são o valor do carro de “R\$ 52.000,00”, a “taxa de comissão de 10%” e a questão central do problema, ou seja, o “valor da comissão”. Com base nesses dados, retomo o que estamos procurando com o problema proposto, ou seja, o “valor da comissão” e quais são as possíveis relações que podem ser estabelecidas com o que foi sugerido anteriormente pelos alunos.

A partir do que os alunos haviam dito sobre *Porcentagem* e *Taxa Percentual*, destaco que o valor da comissão é parte do todo e que essa parte pode variar conforme o valor total considerado. Após essas considerações, questiono de que forma podemos articular essas ideias na realização do cálculo desse valor.

Ao solicitar sugestões de cálculo para determinar o “valor da comissão”, ou seja, a *Porcentagem*, algumas sugestões são dadas:

**Mirela:** Multiplica o valor de base [...]

**Vinicius M<sup>9</sup>:** Multiplica quem por quem?

**Mirela:** A taxa vezes o valor da venda

**Alex:** 10% que multiplica o valor da venda R\$ 52.000,00.

Após colocar na lousa essas informações, questiono como será efetuado o cálculo. Na sequência, a aluna Natália complementa: “temos que reescrever o 10% na forma de fração centesimal.” Conforme podemos observar, no destaque na lousa, na Figura 6.

**Figura 6:** Cálculo do “valor da comissão”

Handwritten work on a chalkboard showing the calculation of a 10% commission on R\$ 52,000.00. The work includes the initial problem statement, the calculation  $10\% \cdot 52000 =$ , and a boxed section showing the conversion of 10% to the fraction  $\frac{10}{100}$  and the final result 5200 labeled as "Parte".

Fonte: Dados da pesquisa

Partindo do que estava exposto na lousa, que pode ser observado na Fig. 6, questiono qual seria o significado de cada elemento envolvido no cálculo. E, ao conversar com a turma, estabelecemos que R\$ 52.000,00 é o Todo a ser considerado, “10%” representa a *Taxa Percentual* e que R\$ 5.200,00 corresponde a uma parte do todo, ou seja, a *Porcentagem*. As ideias conceituais designadas como *Todo*, *Taxa Percentual* e *Porcentagem* trabalhadas junto aos alunos constam da obra *Matemática financeira*<sup>10</sup> (VERAS, 2001).

Após estabelecer esses conceitos, retorno às tarefas iniciais presentes no material, Quadro 1, e solicito que os alunos as respondam articulando-as com o que

<sup>9</sup> **Vinicius M.** é o nome que uso para expressar minhas falas junto às duplas

<sup>10</sup> *Matemática financeira: uso de calculadoras financeiras, aplicações ao mercado financeiro, introdução à engenharia econômica, 300 exercícios resolvidos e propostos com resposta.*

foi discutido até o momento. Abaixo segue o material escrito das duplas, Alex e Juliana (Fig. 7), Mirela e Natália (Fig. 8), e Alex e Vinicius (Fig. 9) com suas respostas e articulações sobre o que havia sido discutido anteriormente.

**Figura 7:** Produção dupla Alex e Juliana

a-) A solução para o problema, é a multiplicação da porcentagem pelo valor total:

$$10\% \cdot 52.000 = \frac{10}{100} \cdot 52.000 = 5.200\%$$

Obs = Porcentagem é um "por cento" do valor total e porcentagem é a taxa generalizada em cima do valor

b-) valor total taxa  $\Rightarrow P = \frac{Vt}{100} \cdot Tx$

c-) O símbolo % significa por cento, significa que existe um valor dividido por um.

d-) Juros, Descontos, Taxas, Lucros, notação

Fonte: Dados da pesquisa

Na produção escrita da dupla, Alex e Juliana, destaco o primeiro item (a) (Quadro 1), no qual é solicitado que, a partir das definições trabalhadas, se dê uma solução para o problema. Pode-se observar que a dupla não possui os conceitos de *Porcentagem* e *Taxa Percentual* bem definidos. Eles, então, propõem a solução como sendo "a multiplicação da porcentagem pelo valor total" e expressam os cálculos como " $10\% \times 52.000 = \frac{10}{100} \times 52.000 = 5.200\%$ ". Nota-se também que eles colocam uma observação (Obs) indicando o que possivelmente entenderam sobre tais conceitos.

O conceito de *Porcentagem* e *Taxa Percentual*, ou simplesmente *Percentual*, é comumente confundido, como visto aqui com o “10%”, que ora é usado como *Porcentagem* e ora é usado como *Taxa Percentual*. A definição de *Porcentagem* do dicionário nos diz: “*Parte proporcional calculada sobre uma quantidade de 100 unidades*”. Isso nos indica que é uma parte, ou seja, uma quantidade, e logo ela seguirá a natureza do todo, especificamente, nesse caso, a Moeda a qual se refere o problema e a *Taxa Percentual* nos garantem a proporcionalidade obtida sobre cada uma das 100 partes em que o Todo foi dividido.

**Figura 8:** Produção dupla Mirela e Natália

a. A partir desta definição dê uma solução para o problema.

b. Se você tivesse que “formalizar” o cálculo feito no item anterior, para ser aplicado a qualquer situação, como ficaria?  
 sendo  $x$  a porcentagem,  $x = \text{valor total} \times \text{Taxa Percentual (\%)}$

c. Qual o significado do símbolo “%”?  
 divide por cem  
 $x = VT \times TP$   
 $P = P \times (i) \Delta \%$

d. A Quais outras situações podem ocorrer a Porcentagem?  
 eleição, promoções, vestibular, tur álcool

Fonte: Dados da pesquisa

Na produção escrita da dupla Mirela e Natália, destaco o segundo item (b), no qual a dupla, ao formalizar o cálculo, coloca-o em etapas, nas quais se observa um refinamento da escrita, partindo de uma forma escrita “ $x = \text{valor total} \times \text{taxa Percentual (\%)}$ ”, até chegar a uma forma reduzida “ $x = VT \times TP$ ”.

Figura 9: Produção dupla Fábio e Vinícius

① a  $10\%$  de comissão  
 $52.000,00$  em automóvel  
 $52.000 \cdot 10\% = \frac{52.000 \cdot 10}{100} =$   
 $= 5.200$  de comissão.

↳ “%” significa dividir por cem

Obs: Taxa Percentual (Ex: 10%; 12%; 52,33%)  
 Porcentagem = Percentagem

(p) TAXA UNITÁRIA : ex: 0,2  
 (i) n PERCENTUAL : ex: 10%

②  $n = \text{VTA} \cdot \text{TP}$  ou  $P = P \cdot i$

③ H<sup>1</sup> eleições  
 mercado (preços)  
 distribuição

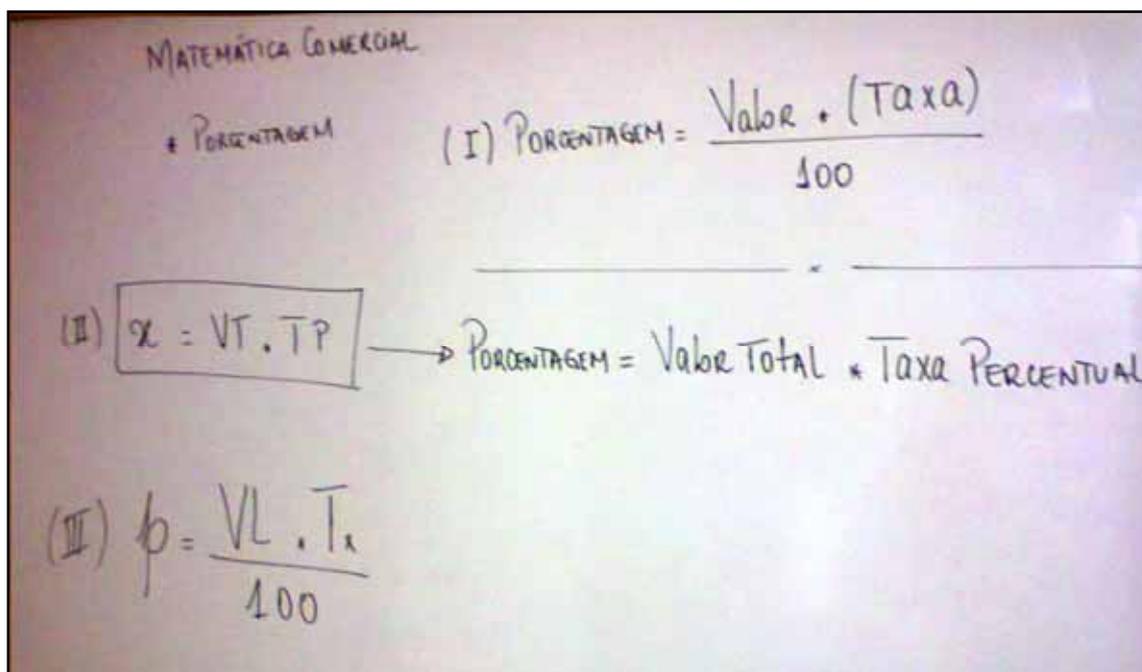
Fonte: Dados da pesquisa

O destaque na produção da dupla, Fábio e Vinícius, se refere ao fato de que os mesmos apresentam os conceitos de *Porcentagem* e *Taxa Percentual* de forma exemplificada, com destaque para o item “a” com a finalização indicando “5.200 de comissão” e para o item “c”, onde aparecem exemplos de *Taxas Percentuais*.

Ao retornar à discussão dos itens, tomo como foco o item b, que diz: “**Se você tivesse que “formalizar” o cálculo feito no item anterior, para ser aplicado a qualquer situação, como ficaria?**”. E passo a sistematizar o que foi produzido nesse sentido pelas duplas.

A primeira sugestão (I) foi dada pela dupla Vinícius e Fábio. A hipótese deles se constitui em expressar o cálculo da *Porcentagem* como sendo o produto do *Valor* pela *Taxa* e dividir esse produto por 100, como podemos observar na Figura 10.

**Figura 10:** Sugestões (I), (II) e (III) de fórmulas para o cálculo da *Porcentagem*



Fonte: Dados da pesquisa

A segunda sugestão (II) foi dada pela dupla Mirela e Natália, como sendo o produto do Valor Total pela *Taxa Percentual* que passa a ser representada na sequência por “*Porcentagem = Valor Total x Taxa Percentual*” ou pela forma reduzida “ $\chi = VT \times VP$ ”.

A terceira sugestão (III), dada pela dupla Alex e Juliana, apresenta, de forma reduzida, uma fórmula na qual a *Porcentagem* é igual ao produto entre *Valor* (VL) e *Taxa* (Tx) dividido por 100, ou seja, essas sugestões geraram uma discussão acerca da representação da *Taxa Percentual*.

A aluna Mirela questionou por que as sugestões (I) e (III) apresentam uma divisão por 100, uma vez que elas indicam o produto por uma taxa.

Em resposta a esse questionamento, argumentei que somente a segunda sugestão (II) especificou o tipo de taxa, ou seja, *Taxa Percentual*. Nos demais casos, as expressões contam somente com a representação dada por *Taxa* ou “Tx”, assim como a representação do Valor Total é apresentada apenas na sugestão (II), ou seja, “VT”. As demais indicações fazem referência simplesmente ao *Valor*, representado em (I), ou por “VL” em (III).

Nessa discussão o aluno Luís questionou qual o significado do número que acompanha o símbolo de %. Retomei a definição inicial apresentada no material e

relembrei que o numeral que acompanha o símbolo de % representa quantas partes de 100 será tomada. Acrescentei ainda à discussão as possíveis representações para taxa nos cálculos dessa natureza. A mais comum é a *Taxa Percentual*, tomada por 100 unidades e a outra como sendo a *Taxa Unitária*<sup>11</sup>, tomada por uma unidade.

Após essas discussões, direcionei as argumentações para finalizar o estudo de *Porcentagem* com o intuito de estabelecer uma fórmula para o cálculo da mesma. Para tanto, chamei a atenção dos alunos que no estudo da Matemática Comercial não teremos a variável *Tempo*, mas que no estudo da Matemática Financeira esse elemento se fará presente e, portanto, o uso de uma simbologia como “Tx” em (III) ou “TP” em (II) poderia ser confundida com o fator *Tempo*. Dessa forma, questiono por qual símbolo podemos representar a *Taxa Percentual*.

Como resposta, a aluna Natália sugere que usemos o “i”, que é o símbolo usual para a representação dessa taxa. Nesse momento percebi que a aluna tinha algum conhecimento sobre o estudo da Matemática Financeira. Questionei se ela sabia o porquê do uso da letra “i” para essa representação; a aluna disse desconhecer a razão desse uso. Explico, então, que tem origem na língua inglesa para determinar taxa de interesse (*interest rate*), indicando assim o interesse das partes em realizar tais operações financeiras.

Finalizando o tópico, chamei atenção que o símbolo “VL” em (III) pode ser confundido com *Valor Líquido*, conceito que aparecerá no estudo de *Capitalização*. Portanto, para não causar confusão futuramente, sugeri uma representação que contemple todos os elementos usados nos cálculos, ou seja, uma representação em que “p” é a *Porcentagem*, “P” indicará o *Valor Principal* ou *Valor Total* e “i” representará a *Taxa Percentual*.

Ao estabelecer essa notação, realizei o cálculo da *Porcentagem*, referente ao problema proposto, junto à Planilha Excel (Fig. 11), e assim indiquei o cálculo da *Porcentagem* (p) na célula B5 por meio do produto do conteúdo das células B3, representando o *Valor Total* (P) e B4 que corresponde à *Taxa* (i), estabelecendo assim o cálculo da *Porcentagem* (p), ou seja, “= B3\*B4”, como pode ser observado na barra de fórmulas. Chamei a atenção dos alunos para o uso do símbolo de %, pois o mesmo, ao ser usado na Planilha Excel, assume o papel de uma operação matemática, realizando a divisão por 100.

<sup>11</sup> Comumente representada por *r* (rate).

**Figura 11:** Cálculo da *Porcentagem* com uso da Planilha Excel

	A	B	C
1	Cálculo da Porcentagem		
2			
3	Valor Total (P)	R\$ 52.000,00	
4	Taxa (i)	10%	
5	Porcentagem (p)	R\$ 5.200,00	
6			

Fonte: Dados da pesquisa

Desta forma temos o cálculo da *Porcentagem* realizado pelos alunos que corresponde a:

$$p = P \times i$$

$$p = 52000 \times \frac{10}{100}$$

$$p = 5200$$

Ao introduzir esse “Bloco 2: Matemática Comercial” com o estudo específico do cálculo da *Porcentagem*, tive como objetivo: a sistematização de alguns conhecimentos básicos como o significado dos termos envolvidos nesses cálculos; a leitura e interpretação adequada dos símbolos, assim como os contextos que podem aparecer. Da mesma forma, pretendi explorar e articular, junto aos alunos, suas ideias referentes a esse estudo, fazendo com que expressassem seus pensamentos e tentando promover uma discussão com a turma a respeito de suas ideias.

O sucesso de uma investigação depende, também, tal como de qualquer outra proposta do professor, do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula. É fundamental que o aluno se sinta à vontade, lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas. O aluno deve sentir que suas ideias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, não sendo necessária a validação constante por parte do professor (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 28).

Foi com esse intuito que chamei os alunos para discussões acerca das aplicações do uso da *Porcentagem*; das ideias que tinham sobre *Taxa Percentual*; de exemplos práticos de onde esse uso pode ocorrer e de suas formas de expressar essas ideias. Assim, ao formalizar o cálculo da *Porcentagem*, expus o que as duplas haviam produzido em relação à criação de uma fórmula que resumisse o cálculo da *Porcentagem*. Dessa forma, nessa fase inicial das atividades, promovi esse ambiente de aprendizagem assim como informei os alunos sobre o papel que deveriam desempenhar, deixando claro que podiam contar com o apoio do professor, mas que a atividade seria desenvolvida, primordialmente, por iniciativa deles (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003).

Ficou evidente minha participação nesse primeiro momento; tive a intenção, em conjunto com os alunos, de introduzi-los ao estudo da Matemática Comercial, porém essa participação teve o propósito de evidenciar aos alunos o que lhes é pedido, em termos de produto final, ao iniciar uma investigação, mostrando-lhes “que aquilo que ele vai fazer vai ser mostrado aos colegas, confere ao seu trabalho um caráter público, o que constitui para ele, simultaneamente, um estímulo e uma valorização pessoal” (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 29).

### 3.2.1 Acréscimos e Descontos

Ainda dentro da proposta do “Bloco 2: Matemática Comercial” foram apresentadas tarefas de *acréscimos* e *descontos*. Na sequência apresento, algumas das atividades desenvolvidas pelas duplas: Alex e Juliana, e Vinicius e Fábio. Descrevo aqui as discussões das duplas no desenvolvimento das tarefas 1, 2 e 3 (Quadro 2), envolvendo a tarefa relacionada a esses assuntos.

#### Quadro 2 - Enunciado das tarefas de *descontos* e *acréscimos*

Resolva os seguintes problemas registrando suas estratégias para cada problema.

1. Uma mercadoria no valor de R\$ 123,00 sofre um acréscimo de 8%.
  - a. Qual o valor do acréscimo?
  - b. Qual o valor da mercadoria após o acréscimo?
2. Uma mercadoria no valor de R\$ 321,00 tem um abatimento de 4,5%.
  - a. Qual o valor do desconto?
  - b. Qual o valor da mercadoria após o desconto?
3. Qual ou quais as “*formalizações*” possíveis a partir dos cálculos feitos nos itens 1 e 2, para que se possa aplicar a qualquer situação de mesma natureza?

Fonte: Dados da pesquisa

As tarefas apresentadas aos alunos estão basicamente divididas em duas partes: itens 1 e 2, caracterizados por problemas específicos e que tem o objetivo de oportunizar a organização e a articulação dos dados e suas possíveis respostas, fazendo com que os alunos tenham a vivência do cálculo que envolve os assuntos em questão. O item 3 apresenta uma questão aberta na qual não se espera do aluno uma resposta exata ou colocada de forma numérica, com “mais ou menos cálculos, mas [que tenha], ele próprio, de formular as suas questões com base na situação que lhe é apresentada” (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p 26).

### 3.2.1.1 Dupla: Alex e Juliana

A dupla organizou sua Planilha Eletrônica dividindo os itens 1 e 2 da tarefa, (Quadro 2), em Exercícios A e B. Em sua abordagem do Exercício A estabeleceram relações entre as células, como podemos observar em destaque pelas letras (a) e (b) na Figura 12 que segue.

**Figura 12:** Primeira abordagem do item 1, indicado como Exercício A

	A	B	C	D	E	F
1	Exercício A					
2	Taxa(i)	Principal(P)	Porcentagem(p)	Valor final com acréscimo		conclusão
3	0,08	R\$ 123,00	R\$ 9,84	R\$ 132,84		Vf=(P*i)+p

Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que a dupla organiza os dados do problema utilizando as Colunas A, B, C e D e nas Linhas 2 e 3 da Planilha Eletrônica Excel. Com isso eles colocam a *Taxa* ( $i$ )<sup>12</sup> na célula A2 e seu respectivo valor (0,08) em A3; em B2 é colocado o *Principal* ( $P$ ) e seu valor em B3; em C2 é colocada a *Porcentagem* ( $p$ ) e seu valor em C3 e por último o *Valor Final com acréscimo* ( $VF$ ) é indicado em D2 e seu cálculo é realizado em D3.

O primeiro cálculo realizado pela dupla foi para encontrar o valor da *Porcentagem* ( $p$ ), indicado em B3, utilizando a fórmula “ $p = P \times i$ ”. Para esse cálculo a dupla operou os valores inseridos em A3 ( $i$ ) e B3 ( $P$ ), obtendo o valor de ( $p$ ), R\$ 9,84, indicado em C3.

Na sequência foi realizado o cálculo do *Valor Futuro com acréscimo* na célula D3, na qual a dupla somou o *Principal* com a *Porcentagem*, como podemos ver na Figura 12 em destaque pelas letras (a) e (b), ou seja, o *Valor Futuro* ( $VF$ ) com

<sup>12</sup> A taxa representada por  $i$  refere-se à Taxa Percentual, contudo a dupla usa na Planilha Eletrônica a Taxa Unitária ( $r$ ).

*acrécimo* de R\$ 132, 84 foi obtido somando as células B3 com C3 ( $=B3+C3$ ). Observa-se que o cálculo do VF com *acrécimo* foi obtido estabelecendo uma soma entre o valor resultante do cálculo da *Porcentagem* e o *Principal*.

Nota-se que a estratégia utilizada do cálculo do VF com *acrécimo* foi: organizar os dados na Planilha Eletrônica Excel, identificando-os; efetuar cálculos que geram novos dados como o valor da *Porcentagem* e, por fim, por meio de uma soma, encontrar o resultado final pretendido.

Cientes das possibilidades de cálculos que a Planilha Eletrônica propicia, os alunos usam uma sequência organizada de dados e cálculos para obterem seus objetivos. Com isso, percebemos a noção de reorganização do pensamento proposta por Tikhomirov (1981), pois a experiência em testar suas hipóteses e conjecturas, estabelecer relações e analisá-las, influencia a forma com que os estudantes buscam e adquirem as informações ao usarem uma dada tecnologia para resolver um problema, levando-os, dessa forma, a pensar com o auxílio do computador (BORBA; VILLARREAL, 2005).

A exemplo disso temos, nesse caso, a aplicação direta de um ou mais procedimentos anteriormente aprendidos, assim como a utilização da Planilha Eletrônica que oferece a visualização dos dados envolvidos no problema e proporciona mais agilidade na realização dos cálculos, o que possibilitou a análise das relações<sup>13</sup> estabelecidas e de seus resultados.

Nesse sentido a Planilha Eletrônica é de grande relevância na validação da fórmula elaborada pela dupla para o cálculo do *Valor Futuro* com *acrécimo*, como podemos observar em F3, no destaque (c), na Figura 12. No diálogo a seguir, notamos a linguagem estabelecida entre a dupla e suas análises sobre o que está sendo elaborado.

**Alex:** *Coloca aí [...] VF vai ser o valor final, vai ser igual a 'P' vezes 'i', P-zão vezes i, [...] P-zão vezes "i" dividido. Isso entre parênteses tá?*

**Juliana:** *Dividido?*

**Alex:** *Dividido por p-zinho [...] pode dar "enter". [...] Agora faz o de baixo.*

**Juliana:** *Copiar?*

**Alex:** *Não! Valor Final com Acrécimo [...] Não é dividido! É mais. Vai ser a Taxa, vai ser 'i' vezes 'P' mais p-zinho.*

<sup>13</sup> Refiro-me à expressão "relação" como sendo as operações matemáticas estabelecidas entre os dados do problema presentes nas células da Planilha Eletrônica assim como nos registros dos portfólios.

Nota-se que houve um equívoco na fala de Alex, sugerindo inicialmente " $VF = \frac{(P \times i)}{p}$ ", e Juliana fica em dúvida, mas não leva adiante a discussão. Com mais atenção, percebem que não se trata de uma divisão e sim de uma soma e a fórmula é mudada para " $VF = (P \times i) + p$ ". A dupla copia a formalização, feita anteriormente para o item 2, identificando-o junto a Planilha Eletrônica como Exercício B, e Alex comenta que alguma coisa irá mudar. Juliana então muda o sinal de "+" para subtração "-" representando o *desconto* (Fig. 13).

**Figura 13:** Primeira abordagem do item 2, indicado como Exercício B

Exercício B					
Taxa(i)	Principal(P)	Porcentagem(p)	Valor final com abatimento	conclusão	
0,045	R\$ 321,00	R\$ 14,45	R\$ 306,56	Vf=(P*i)-p	

Callouts in the image:

- $p = P \times i$
- $VF = P - p$
- (c)

Fonte: Dados da pesquisa

Observa-se que a abordagem no Exercício B segue os mesmos procedimentos do Exercício A.

Ao notar que a dupla concluiu a referida tarefa, dirigi-me até eles para conferir o que foi feito. Verifiquei que fora criada uma fórmula para *VF* com *acrécimo* indicada por " $VF = (p \times i) + p$ " e outra para o *VF* com *desconto* " $VF = (p \times i) - p$ " e questionei, apontando para as células F3 e F7 da Planilha Eletrônica Excel, se eles haviam aplicado o que estava formalizado nas respectivas células.

**Alex:** Sim!

**Vinicius M.:** Deixa-me ver então! Clica ali em cima da célula D3.

Então Juliana clica sobre a célula que consta o "*Valor final com acréscimo*".

**Vinicius M.:** Ok! Isso aí tudo bem! Agora quero que vocês apliquem embaixo, na célula de baixo exatamente aquilo que vocês escreveram ali. Da Conclusão! [...] Escrevam na célula de baixo.

Pode-se observar na Figura 12, que a fórmula estabelecida para encontrar o “Valor final com acréscimo” é indicada pela soma das células B3 e C3 (a). Nota-se também a fórmula estabelecida na célula F3 (c), difere da relação indicada em (a). Ao observar que valor indicado na célula D3 (b), não seria gerado pela fórmula estabelecida em F3 (c), solicitei à dupla:

**Vinicius M.:** *Agora escrevam aquilo lá (c), usando os valores. Veja se aquela fórmula estará certa!*

Alex inicia a verificação digitando os valores, seguindo a fórmula estabelecida. Então sugeri que ele usasse as células, ou seja, que ao invés de digitar os valores novamente clicasse sobre estas utilizando o endereço de cada valor. Alex começa a utilizar as células correspondentes aos dados do problema e esse recurso possibilita que, posteriormente, somente os valores das células sejam modificados.

Então Juliana insere a fórmula na célula D4 como pode ser observado na Figura 14.

**Figura 14:** Verificação da fórmula estabelecida na célula F3

	A	B	C	D	E	F
1	Exercicio A					
2	Taxa(i)	Princinpal(P)	Porcentagem(p)	Valor final com acrescimo		conclusão
3	0,08	R\$ 123,00	R\$ 9,84	R\$ 132,84		Vf=(P*i)+p
4				R\$ 19,68		
5	Exercicio B					
9	Porcentagem(p)			Valor final com abatimento		conclusão
10			R\$ 14,45	R\$ 306,56		Vf=(P*i)-p

Fonte: Dados da pesquisa

Observamos, nessa figura, a utilização da fórmula “ $VF = (P \times i) + p$ ” que está na célula F3, e o resultado do cálculo dessa fórmula, na célula D4. A dupla percebeu que não encontrou o valor esperado. Dessa forma, sugeri que conferissem os procedimentos.

A dupla prossegue com a análise do que foi feito:

**Alex:** *Aqui vai ser A3 a taxa vezes o Principal, mais Porcentagem.*

**Juliana:** *mas não! [...] Aqui em vez de p-zinho é P-zão.*

**Alex:** *Ah entendi! Aqui é P-zão e não p-zinho.*

Assim Alex confere a sequência de dados, e Juliana chama a atenção para a troca de  $p$  por  $P$  e a fórmula é modificada utilizando, agora, a célula correspondente ao *Principal (P)*. Ao conferirem o resultado correto e esperado, eles comemoram e alteram a conclusão feita anteriormente para “ $VF = (P \times i) + P$ ”.

Alex propõe fazer o mesmo procedimento para o problema corresponde ao item 2, ou seja, aplicar a nova fórmula. Em um primeiro momento, aplica-se a fórmula feita para o problema de *acrécimo* e então Juliana chama a atenção para troca de sinal, assim Alex altera o sinal para subtração “-“ e ainda percebe que havia usado a *Porcentagem (p)*, e não o *Principal (P)*.

Ao efetuar essas trocas, a dupla encontra o valor - R\$ 306,56 e acredita que ele esteja correto, pois o valor encontrado em sua primeira abordagem do problema foi o mesmo. Volto à dupla e questiono se conseguiram escrever uma expressão matemática para a fórmula. Confiro o que foi feito e pergunto se existe outra forma de expressar aquela fórmula encontrada.

A dupla tenta outra forma, mas não se convence de que está correta. Essa nova tentativa, Figura 15, constitui-se em: “ $=(2*B3)*A3$ ”.

**Figura 15:** Tentativa de estabelecer outra relação para o Exercício A

Exercício A					conclusão
Taxa(i)	Principal(P)	Porcentagem(p)	Valor final com acréscimo		Vf=(P*i)+P
	R\$ 123,00	R\$ 9,84	R\$ 132,84		
			R\$ 132,84		
Exercício B					conclusão
Taxa(i)	Principal(P)	Porcentagem(p)	Valor final com abatimento		Vf=(P*i)-P
0,045	R\$ 321,00	R\$ 14,45	R\$ 306,56		
			-R\$ 306,56		

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla testa a hipótese baseando-se no fato de o *Valor Principal (P)* aparecer duas vezes na fórmula, “ $VF = (P \times i) + P$ ”. Logo estabelecem a fórmula indicada por “ $vf = (2 \times P) \times i$ ”, na célula D5, (Fig.15). Contudo, ao efetuarem o cálculo, utilizando-se da Planilha Eletrônica, o valor encontrado é diferente do encontrado na célula D10. Porém a dupla não verifica as razões dessa nova fórmula

não resultar em um valor correto. A Planilha Eletrônica também ajudou na análise do que foi feito, Exercício B (FIG. 15), pois ao retornar à dupla questiono o porquê do item 2 ter dado um valor negativo, referente às células D10 (R\$ 306,56) e D11 (-R\$ 306,56). Como diz:

**Juliana:** *É por que aqui o valor é maior que o outro.*

Talvez pelo fato do uso da subtração e a ordem do item em questão requerer o cálculo do *Valor Final* com **desconto**, o valor “-R\$ 306,56” não gerou dúvida, pois poderia ter sido feita a associação de que se o valor está diminuindo de algo, logo poderia gerar um valor negativo.

Comento que eles diminuíram o *Principal (P)* da *Porcentagem (p)* e que isso é uma questão de ordem dos termos. Juliana, ao trocar a posição dos termos, encontrou o valor de “R\$ 306,56”. Na sequência, questiono como ficaram as formalizações dessas conclusões, o que corresponde ao item 3 das tarefas. A dupla altera e apresenta uma nova fórmula para o *Valor Final* com *desconto*, “ $VF = P - (P \times i)$ ”.

Nota-se que a fórmula do *Valor Final* com *acréscimo* foi adaptada para gerar a fórmula do *VF* com *desconto*. A estratégia do uso de um conhecimento adquirido e sua adaptação para resolução de um problema se fez presente nesse caso.

As Investigações Matemáticas avançam frequentemente em torno de um ou mais problemas, e pode-se dizer que “o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em Matemática, exista uma relação estreita entre problemas e investigação” (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 16).

Nota-se que a interação entre os alunos e a Planilha Eletrônica propiciou discussões entre eles, assim como uma possível oportunidade de reorganização dos conceitos matemáticos estudados. Além disso, creio que essa interação pode ter ajudado os estudantes a estabelecer novas relações e a perceber, de outra forma, os conceitos contidos nesse estudo. Essas conclusões e especulações são baseadas no fato de que temos a verificação do resultado, realizado com o uso da Planilha Eletrônica, e de alguns aspectos como: a troca do sinal da operação entre os dados não resultou em uma solução correta; e a análise do valor negativo encontrado gerou a execução de um retrospecto com o exame da solução encontrada.

Analisando a interação entre os alunos e a Planilhas Eletrônicas percebe-se as discussões e reorganizações de conceitos e, possivelmente também, a reelaboração de conceitos com relação aos termos *Acréscimo* e *Descontos*.

### 3.2.1.2 Dupla: Vinicius e Fábio

Descrevo aqui as discussões da dupla, Vinicius e Fábio, no desenvolvimento dos problemas indicado pelos itens 1, 2 e 3 (Quadro 2), envolvendo as tarefas relacionadas a *acréscimos* e *desconto*.

#### **Quadro 2** - Enunciado das tarefas de *descontos* e *acréscimos*

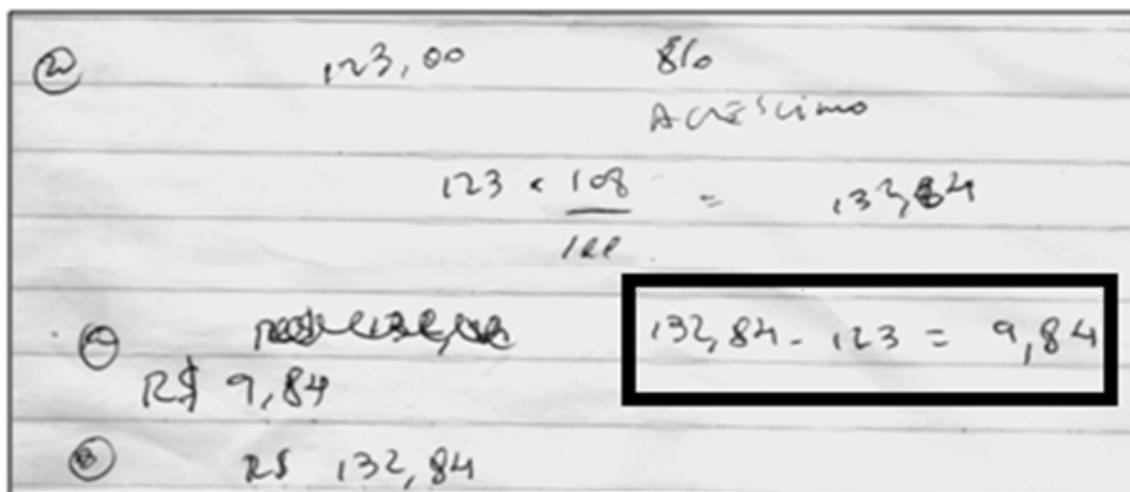
Resolva os seguintes problemas registrando suas estratégias para cada problema.

1. Uma mercadoria no valor de R\$ 123,00 sofre um acréscimo de 8%.
  - a. Qual o valor do acréscimo?
  - b. Qual o valor da mercadoria após o acréscimo?
2. Uma mercadoria no valor de R\$ 321,00 tem um abatimento de 4,5%.
  - a. Qual o valor do desconto?
  - b. Qual o valor da mercadoria após o desconto?
3. Qual ou quais as “*formalizações*” possíveis a partir dos cálculos feitos nos itens 1 e 2, para que se possa aplicar a qualquer situação de mesma natureza?

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla inicialmente utiliza-se de papel e caneta para estabelecer uma relação e na sequência faz a verificação na Planilha Eletrônica. Observamos na figura a seguir, a organização dos dados no papel assim como algumas relações.

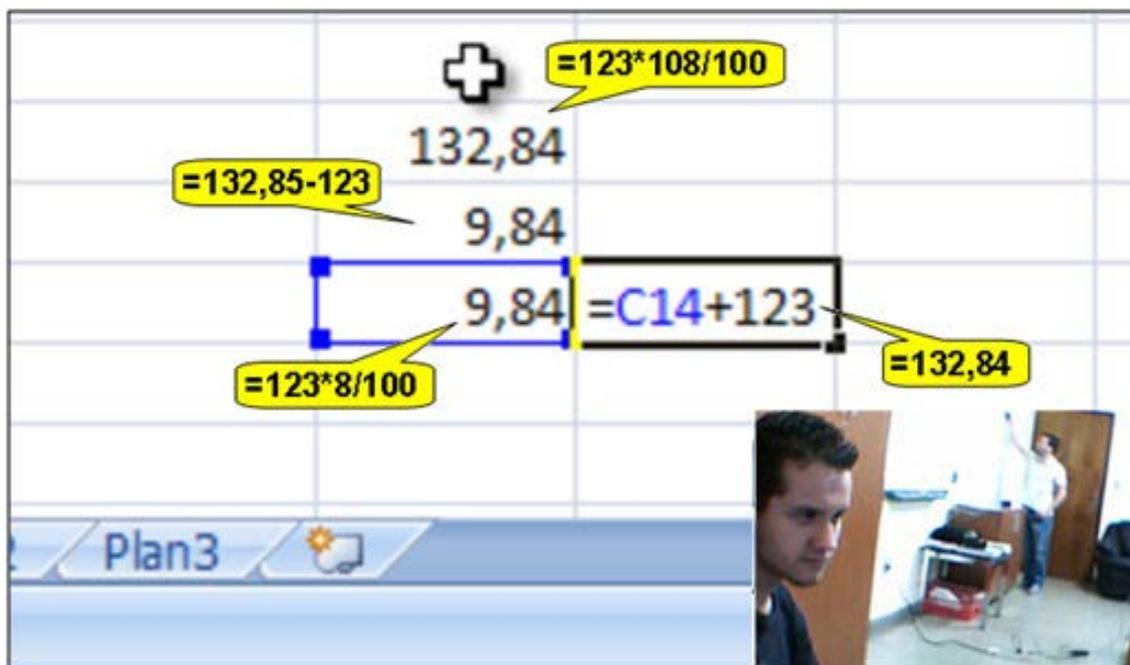
**Figura 16:** Organização e relações envolvendo os dados do item 1



Fonte: Dados da pesquisa

A discussão sobre a resolução do problema, relativo ao item 1, começa com a proposta do aluno Vinicius de multiplicar R\$ 123,00 por  $\frac{108}{100}$ . Fábio verifica o resultado desse procedimento com o auxílio da Planilha Eletrônica, conforme pode ser observado na Figura 17.

**Figura 17:** Sequência da verificação da resolução proposta por Vinicius.



Fonte: Dados da pesquisa

Essa abordagem direta faz com que Fábio fique em dúvida sobre o que está sendo feito, e sobre o que está sendo pedido no problema (item 1).

**Fábio:** *A porcentagem é essa? [...] O valor que tava era R\$ 123,00. [...] 8% você calculou como?*

**Vinicius:** 108%. Seria 8% do valor. Certo? Mais o valor total que corresponde a 100%.

**Fábio:** Ah! Tu já fez direto.

Na sequência, Vinicius argumenta mostrando que o valor do *acrécimo* seria “ $132,84 - 123 = 9,84$ ”. O valor de “9,84” é obtido pelo cálculo junto à célula C13 (Fig. 17).

Fábio demonstra preocupação em como apresentar tais cálculos junto a Planilha Eletrônica, pois, em sua opinião, os cálculos foram feitos “*de cabeça*”. Vinicius explica que:

**Vinicius:** *R\$123,00 vezes 108%, mas 108% é 100 mais 8. Você quer saber quanto é 8% disso. Certo? Então vai fazer vezes 8 dividido por 100. Certo? Então tu vai saber o 8%. Só que aí tu acrescentou no valor total, que é 100%.*

Vinicius, para tranquilizar Fábio quanto ao uso da Planilha Eletrônica, insere nas células o que havia explicado em cálculos: em C14 ( $=123,00*8/100$ ), a *Porcentagem de acréscimo* e em D14 ( $=C14+123$ ), o *Valor Final com acréscimo* (Fig. 17).

Nessa abordagem, a dupla, em especial o aluno Vinicius, utilizou lápis e papel para estruturar a resolução do item 1 e, de forma perspicaz, percebeu que o *Valor Final com acréscimo* seria o produto entre *Principal (P)* e ( $100\%+8\%$ ), ou, 108%. A Planilha Eletrônica oportunizou a verificação do proposto, mostrando nas células C13 e C14 (Fig. 17) os cálculos que validam os argumentos em sua explicação.

Com essa abordagem, fica evidenciado o conceito de Investigação Matemática como atividade de ensino-aprendizado análoga à preconizada por Ponte, Brocado e Oliveira (2003, p. 23), pois, segundo o autor, “o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor”. O mesmo ocorre na relação entre seres-humanos e o *software* da Planilha Eletrônica que evidencia o construto seres-humanos-com-mídias

[considerando] que as tecnologias reorganizam e moldam o pensamento das pessoas, em particular, reorganizam e moldam o pensamento matemático dos alunos. Neste sentido, elas permitem que os alunos reflitam sobre aspectos relacionados aos conceitos matemáticos que dificilmente estariam evidentes caso não trabalhassem com a tecnologia (SOARES, 2012, p. 234).

Observa-se discussões análogas para o *desconto*, como pode ser visto na Figura 18, dessa vez com um cuidado maior no desenvolvimento das ideias.

**Figura 18:** Anotações de Vinicius para o cálculo do *desconto*

$$\textcircled{A} \quad 321 \quad 824,00 \quad 4,5\%$$

$$\downarrow \text{na}$$

$$(a) \left[ \begin{aligned} & 321 - \frac{4,5}{100} \\ & \frac{321 \cdot 100 - 4,5}{100} = \frac{32100 - 4,5}{100} = \\ & = 306,55 \Rightarrow R\$ 306,55 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} & 321 \cdot \frac{(100 - 4,5)}{100} \\ & 321 \cdot \frac{95,5}{100} \end{aligned} \quad (b)$$

$$\textcircled{a} R\$ 14,45$$

$$\textcircled{B} R\$ 306,55$$

$$\text{Valor} = \text{Produto} \cdot (100 + \%) \quad (c) \quad \text{Valor} = \text{Produto} \times (100 + \%)$$

Fonte: Dados da pesquisa

Por iniciativa de Vinicius, o registro escrito é mais detalhado, como vemos no desenvolvimento dos itens, em (a), e ainda, em (b), onde o cálculo da *Taxa* é evidenciado. Percebe-se ainda uma fórmula (c) indicada por “*Valor = Produto × (100 + %)*”.

Com base nessas verificações, a dupla organiza os itens 1 e 2 na Planilha Eletrônica, como observamos na Figura 19 a seguir.

Figura 19<sup>14</sup>: Organização e cálculos dos Itens 1 e 2 na Planilha Eletrônica

SE	A	B	SE	A	B	C1	A	B	C
1			1			1			
2	Principal(P)	R\$ 52.000,00	2	Principal(P)	R\$ 52.000,00	2		Principal(P)	R\$ 52.000,00
3	Taxa(i)	10%	3	Taxa(i)	10%	3	Exercício	Taxa(i)	10%
4	Porcentagem(p)	R\$ 5.200,00	4	Porcentagem(p)	R\$ 5.200,00	4		Porcentagem(p)	R\$ 5.200,00
5			5			5			
6	Principal	R\$ 123,00	6	Principal	R\$ 123,00	6		Principal	R\$ 123,00
7	Taxa	8%	7	Taxa	8%	7	Exercício 1	Taxa	8%
8		=B6*B7	8		R\$ 9,84	8		Acréscimo	R\$ 9,84
9			9		=B8+B6	9		valor final	R\$ 132,84
10			10			10			
11	principal	R\$ 321,00	11	principal	R\$ 321,00	11		principal	R\$ 321,00
12	Taxa	4,5%	12	Taxa	4,5%	12	Exercício 2	Taxa	4,5%
13	desconto	=B11*B12	13	desconto	R\$ 14,45	13		desconto	R\$ 14,45
14	Valor final		14	Valor final	=B11-B13	14		Valor final	R\$ 306,56

Fonte: Dados da pesquisa

Ao realizarem os itens 1 e 2, identificados como exercícios 1 e 2 (Fig. 19), a dupla optou pela estratégia de organizar os dados em células, calculando o *acréscimo* em B7 ( $=B6*B7$ ) e o *desconto* em B13 ( $=B11*B12$ ), que corresponde ao cálculo da *Porcentagem*,  $p = P \times i$ , e posteriormente efetuou o cálculo dos respectivos valores com *acréscimo* em B9 ( $=B8+B6$ ) e com *desconto* em B14 ( $=B11+B13$ ), correspondendo respectivamente a  $VF = P + p$  e  $VF = P - p$ .

Para o item 3, que corresponde a possíveis “formalizações” que podem ser obtidas a partir dos itens 1 e 2, a dupla elabora uma relação baseada nos dados e nas anotações feitas em seu material (Fig. 18). Notamos que, no interior da célula E9, Figura 20, foi inserida a seguinte relação “ $=F8*(100+F9)$ ” e que, na sequência, a dupla articula com os valores do problema que iniciou o estudo de *Porcentagem*: “Uma revenda de carros cobra 10% de comissão sobre a venda de cada automóvel. Se um automóvel é vendido por R\$ 52.000,00, qual o valor da comissão?”. Eles indicaram o *Valor Principal (P)* de R\$ 52.000,00 para célula F8 e a *Taxa (i)* de 10% à célula F9, porém o valor encontrado é de R\$ 5.205.200,00, o que faz com que dupla teste a relação estabelecida para os dados dos itens contidos na Planilha Eletrônica.

<sup>14</sup> Notamos que os dados e as operações realizadas se encontram inicialmente na coluna B e que posteriormente com a inserção da identificação das tarefas seus resultados aparecem na coluna C.

**Figura 20:** Esboçando uma fórmula para o item 3

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Principal(P)	R\$ 52.000,00			
3	Exercício	Taxa(i)	10%			
4		Porcentagem(p)	R\$ 5.200,00			
5						
6		Principal	R\$ 123,00			
7	Exercício 1	Taxa	8%			
8		Acréscimo	R\$ 9,84			R\$ 52.000,00
9		valor final	R\$ 132,84		5205200	10%
10						
11		principal	R\$ 321,00			
12	Exercício 2	Taxa	4,5%			
13		desconto	R\$ 14,45			
14		Valor final	R\$ 306,56			
15						
16						
17						

Fonte: Dados da pesquisa

Em uma primeira abordagem para determinar uma fórmula para o item 3, a dupla insere na célula *E9* uma relação “= **F8\*(100+F9)**”, observa-se que as células *F8* e *F9* foram usadas para inserir os dados correspondente ao *Valor Principal (P)* e a *Taxa Percentual (i)*, ou seja, *R\$ 52000,00* e *10%*, contudo a dupla não obtém o valor encontrado no Exercício, célula *C4*, (Fig. 20).

Na sequência, Figura 21, observamos três instantes: (A) momento em que a dupla testou a fórmula “= **F8\*(100+F9)**” para os dados do Exercício 1. Como podemos ver, novamente, não encontraram o resultado esperado, e perceberam que ele estava muito “alto” e era “parecido” com o valor desejado; no instante (A’) dividem a fórmula por *100*, “= **F8\*(100+F9)/100**”, obtendo *R\$ 123,10* na célula *E9* e creem ter encontrado o valor correto, contudo quando convidado a turma para discutirmos os resultados encontrados, a dupla percebe que o valor não está exato e procedem a alteração do formato da *Taxa Percentual*, retirando o símbolo de %, e assim encontram o valor exato como visto no instante (A”).

**Figura 21:** Ajuste da fórmula do *Valor Futuro* com *acréscimo*

The figure consists of three screenshots of an Excel spreadsheet, each showing a table of financial data and a formula in the formula bar. Red arrows indicate the flow of information and corrections.

**Top Screenshot (E9):** Formula bar:  $=F8*(100+F9)$ . The table shows:
 

5					
6		Principal	R\$ 123,00		
7	Exercício 1	Taxa	8%		
8		Acréscimo	R\$ 9,84		R\$ 123,00
9		valor final	R\$ 132,84	(A)	R\$ 12.309,84
10					8%

**Middle Screenshot (E9):** Formula bar:  $=F8*(100+F9)/100$ . The table is identical to the top screenshot, but the value in cell E9 is now R\$ 123,10. A red arrow points from the formula bar to cell E9, and another red arrow points from the value in E9 to the value in E9 of the top screenshot.

**Bottom Screenshot (F10):** Formula bar:  $VF = \frac{P \times (100 + F9)}{100}$ . The table shows:
 

6		Principal	R\$ 123,00		
7	Exercício 1	Taxa	8%		
8		Acréscimo	R\$ 9,84		R\$ 123,00
9		valor final	R\$ 132,84	(A'')	R\$ 132,84
10					8%

 A yellow callout box contains the formula  $VF = P + p$ . A red arrow points from the value in E9 of the middle screenshot to the value in E9 of this screenshot.

Fonte: Dados da pesquisa

Nota-se que inicialmente a estratégia usada foi construir, com os dados dos problemas, relações, utilizando lápis e papel (Fig. 16 e Fig. 18), e, na sequência, usar a Planilha Eletrônica para realizar os cálculos, validando as relações estabelecidas no material escrito.

Contudo, ao utilizarem a Planilha Eletrônica para resolver os problemas, a dupla não usa, de imediato, o que foi produzido em seu portfólio, e organiza os cálculos, como pode ser visto na Figura 29. A estratégia nesse caso é dispor os

dados em células, efetuar cálculos e arranjá-los como resposta final em uma determinada célula.

Notamos também que a dupla utilizou sua produção escrita como base para elaboração de uma fórmula que satisfaça o item 3, como vimos nas Figuras 20 e 21. e utilizam-se da estratégia de *simulação*, estabelecendo uma relação entre *Valor Principal (P)* e *Taxa Percentual (i)*, testando-a para os dados presentes nos itens da tarefa. Além disso houve a manipulação e o ajuste desses nas células, como pode ser observado nas Figura 22, instante B e B'.

**Figura 22:** Manipulação dos dados

	A	B	C	D	E
1					
2		Principal(P)	R\$ 52.000,00		
3	Exercício	Taxa(i)	10%		
4		Porcentagem(p)	R\$ 5.200,00		
5					
6		Principal	R\$ 123,00		
7	Exercício 1	Taxa	8%		
8		Acréscimo	R\$ 9,84		(B)
9		valor final	R\$ 132,84	R\$ 306,56	-4,5
10					
11		principal	R\$ 321,00		
12	Exercício 2	Taxa	4,5%		
13		desconto	R\$ 14,45		
14		Valor final	R\$ 306,56		

	A	B	C	D	E
1					
2		Principal(P)	R\$ 52.000,00		
3	Exercício	Taxa(i)	10%		
4		Porcentagem(p)	R\$ 5.200,00		
5					
6		Principal	R\$ 123,00		
7	Exercício 1	Taxa	8%		
8		Acréscimo	R\$ 9,84		(B')
9		valor final	R\$ 132,84	R\$ 5.200,00	-90
10					
11		principal	R\$ 321,00		
12	Exercício 2	Taxa	4,5%		
13		desconto	R\$ 14,45		
14		Valor final	R\$ 306,56		

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse sentido observamos que foi retirado o símbolo de % da *Taxa*, ficando representada pela célula *F9*, na fórmula  $VF = P \times \frac{(100+F9)}{100}$ . Essa ação pode ser relacionada com a percepção da dupla de que já existe uma divisão por 100, ou seja, uma razão centesimal. Outro ponto, importante, que podemos observar é a manipulação da *Taxa* enquanto o seu sinal e a sua equivalência a outro valor conforme a ordem da tarefa: no instante (B) temos a taxa representada por “-4,5”, correspondendo a um *desconto* (Exercício 2), e no instante (B’) temos uso de uma *Taxa* equivalente representada por “-90”,  $FV = P \times \frac{(100+(-90))}{100} \rightarrow FV = P \times \frac{(10)}{100}$ , correspondendo ao cálculo da comissão de 10%, resultando no valor correto.

Nessa abordagem notamos a relação homem-computador proposta por Tikhomirov (1981), pois o computador reorganizou o modo como os alunos pensam, o modo como eles concebem suas ideias. Essa reorganização se mostra mais eficiente se pensarmos nos resultados que os alunos teriam usando apenas lápis e papel.

O construto seres-humanos-com-mídias, apresentados por Borba e Villarreal (2005), nos leva a refletir sobre o uso da Planilha Eletrônica, nessa situação com aspectos de visualização e teste dos resultados em diferentes casos, ou seja, propiciando a experimentação e conseqüentemente a elaboração de conjecturas matemáticas. Isso reforça a ideia de que a exploração que os alunos realizaram, mediadas pela Planilha Eletrônica, lhes possibilitou a reorganização de conceitos acerca de conteúdos de Matemática Financeira, por eles estudados ao realizarem as Atividades Investigativas. Ou seja, o uso da Planilha Eletrônica fez com que os alunos reorganizassem ou, de alguma forma, produzissem significado às relações matemáticas por eles concebidas.

### 3.2.1.3 Sistematização: acréscimos e descontos

Ao longo das abordagens realizadas pelas duplas, Alex e Juliana e Fábio e Vinicius, observamos formas distintas de estabelecer relações matemáticas entre os dados dos problemas encontrados nos itens 1 e 2 da tarefa referente a *acrécimos* e *descontos* bem como na apresentação de fórmulas para estes estudos em especial junto ao item 3. Nesse caso fica evidenciada a importância, dentro das aulas de Investigação em Matemática, da discussão das atividades. Ponte destaca que

No final de uma investigação, o balanço do trabalho realizado constitui um momento importante de partilha de conhecimentos. Os alunos podem pôr em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de moderador (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 41).

Ciente disso convidei a turma para organizarmos e discutirmos, junto à lousa, o que foi produzido por eles nos itens 1, 2 e 3. A sistematização dessa produção coletiva pode ser observada no Quadro 3, a seguir.

**Quadro 3** - Sistematização da produção junto à turma

<b>VF com acréscimo</b>	
$VF = P + p$	$VF = P \times \frac{(100 + i)}{100}$
$VF = P + P \times i$	ou
$VF = P \times (1 + i)$	$VF = P \times (1 + i)$
<b>VF com desconto</b>	
$VF = P - p$	$VF = P \times \frac{(100 - i)}{100}$
$VF = P - P \times i$	ou
$VF = P \times (1 - i)$	$VF = P \times (1 - i)$

Fonte: Dados da pesquisa

A produção geral dos alunos na turma foi diversa, contudo opto em destacar a produção das duplas em questão, por terem apresentado resultado mais significativo na realização na Atividade Investigativa presente em todos os itens. Ponte (2003) destaca que:

O professor deve garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Essa fase deve permitir também uma sistematização das principais ideias e uma reflexão sobre o trabalho realizado (PONTE; BROGADO; OLIVEIRA, 2003, p. 41).

Nesse sentido, sistematizei o que foi produzido pela dupla Fábio e Vinicius, (Fig. 22), chamando atenção para o refinamento das fórmulas apresentadas e para o fato de que elas são equivalentes (Tab. 1), mesmo que seu processo de elaboração não apresente exatamente os mesmos passos. Na Tabela 1, apresento os resultados mais importantes e minha mediação junto a estes.

**Tabela 1 - Sistematização e Mediação**

Tópicos	Dupla	
	Alex e Juliana	Fábio e Vinicius
Valor com Acréscimo	$VF = P + p$	$VF = P \times \frac{(100 + taxa)}{100}$
	$VF = (P \times i) + P$	
Valor com Desconto	$VF = P - p$	$VF = P \times \frac{(100 - taxa)}{100}$
	$VF = P - (P \times i)$	
	Mediação	
Valor com Acréscimo e Desconto	evidenciando P.	simplificação de $\left[ \frac{(100 \pm taxa)}{100} \right]$
	$VF = P \times (1 + i)$	$VF = P \times (1 + i)$
	$VF = P \times (1 - i)$	$VF = P \times (1 - i)$

Fonte: Dados da pesquisa

A sistematização e mediação propiciaram reflexões quanto à representação e uso dos dados dos problemas. Um exemplo dessa situação pode ser observado quando a dupla Fábio e Vinicius realizam modificações (Fig. 23) e propõem simplificações (Quadro 3 e Tab. 1). A análise dessa simplificação levou os alunos a usarem a *Taxa Percentual* e que culminou na respectiva alteração da relação estabelecida entre as células.

Figura 23<sup>15</sup>: Modificações feitas pela dupla Fábio e Vinicius

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Principal(P)	R\$ 52.000,00			
3	Exercício	Taxa(i)	10%			
4		Porcentagem(p)	R\$ 5.200,00			
5						
6		Principal	R\$ 123,00			
7	Exercício 1	Taxa	8%			
8		Acréscimo	R\$ 9,84			
9		valor final	R\$ 132,84	R\$ 306,56	R\$ 321,00	-5%
10						
11		principal	R\$ 321,00			
12	Exercício 2	Taxa	4,5%			
13		desconto	R\$ 14,45			
14		Valor final	R\$ 306,56			
15						

Formula bar:  $=F8*(1+F9)$

Callout:  $VF = P \times (1 + i)$

Fonte: Dados da pesquisa

<sup>15</sup> A taxa usada para o Exercício 2, de Desconto, corresponde a 4,5%, contudo está visível na célula F9 como 5%, pois está configurada para não exibir casas decimais, fazendo assim um arredondamento.

### 3.2.2 Acréscimos e Descontos Sucessivos

Dando sequência ao estudo da Matemática Comercial, são apresentadas novas tarefas aos alunos, referentes ao estudo de Acréscimos e Descontos Sucessivos, Quadro 4, seguindo o mesmo padrão de apresentação e objetivos das anteriores.

#### Quadro 4 - Tarefas de *acréscimos e descontos sucessivos*

4. Uma mercadoria no valor de R\$ 250,00 sofre dois descontos sucessivos de 2,5% e 3%, respectivamente.

- a. Qual o valor total do desconto?
- b. Qual a taxa final de desconto?

5. Uma mercadoria sofre dois acréscimos sucessivos de 3,5% e 1,25%, respectivamente passando a valer R\$ 99,00.

- a. Qual o valor antes do acréscimo?
- b. Qual a taxa total de acréscimo?

6. Qual ou quais as *“formalizações”* possíveis a partir dos cálculos feito nos itens 4 e 5, para que se possa aplicar a qualquer situação de mesma natureza?

Fonte: Dados da pesquisa

O próximo item apresenta a abordagem da dupla Alex e Juliana para Descontos Sucessivos.

### 3.2.2.1 Dupla: Alex e Juliana

Descrevo, na sequência, as discussões da dupla Alex e Juliana no desenvolvimento do item 4, Quadro 5, envolvendo a tarefa relacionada a *desconto sucessivos*.

#### Quadro 5 - Enunciado do item 4, referente a *descontos sucessivos*

4. Uma mercadoria no valor de R\$ 250,00 sofre dois descontos sucessivos de 2,5% e 3%, respectivamente.
- Qual o valor total do desconto?
  - Qual a taxa final de desconto?

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa primeira tentativa, a dupla organizou os dados do item 4 seguindo os moldes das tarefas de *acrécimo* e *desconto*, nas linhas 15, 16 e 17; fizeram uma primeira interpretação do termo *sucessivo* partindo da ideia de que se deveria encontrar a *Porcentagem* total de *descontos* e, na sequência, diminuí-la do *Principal*. Para tanto estabelecem uma relação entre *Principal* ( $P$ ) e *Taxas* ( $i_1$  e  $i_2$ ) no interior da célula C16: “=B16\*A16+B16\*A17”, (Fig. 24).

**Figura 24:** Primeira tentativa de cálculo dos *descontos*

	A	B	C	D
7				
8	Exercicio B			
9	Taxa(i)	Principal(P)	Porcentagem(p)	Valor final com abatimento
10	0,045	R\$ 321,00	R\$ 14,45	R\$ 306,56
11				R\$ 306,56
12				R\$ 306,56
13				
14				
15	Taxa(i)	Principal(P)	Porcentagem(p)	
16	0,025	R\$ 250,00	=B16*A16+B16*A17	
17	0,0			
18				
19				
20				
21				
22				

Fonte: Dados da pesquisa

Ao elaborarem essa abordagem, Juliana argumenta que não poderia ser feito dessa maneira e indica que as porcentagens de *desconto* precisariam ser calculadas separadamente. Em contrapartida, Alex argumenta sobre a necessidade da elaboração de um esquema que propicie a criação de uma fórmula geral. Nota-se que Juliana está focada em resolver o item em questão, e Alex, por sua vez, além disso, deseja a elaboração de uma fórmula, antecipando o item 6 da tarefa.

Seguindo a indicação dada por Juliana, a dupla elabora um novo esquema separando os *acréscimos* em “*Porcentagem (p1)*” e “*Porcentagem (p2)*”, Figura 25.

**Figura 25:** Cálculo dos *descontos* em partes

	A	B	C	D
14				
15	Taxa(i)	Principal(P)	Porcentagem(p1)	Porcentagem(p2)
16	0,025	R\$ 250,00	R\$ 6,25	=C16*A17
17	0,03			
18				

Fonte: Dados da pesquisa

Diante dessa proposta, Alex retorna à argumentação sobre a criação de uma fórmula em que se obtenha um resultado final e direto. A partir disso, a dupla volta a interpretar a tarefa em questão e expõe seu entendimento.

Juliana propõe uma relação entre *Taxa (i)* e *Valor Principal (P)*, célula C16, “=(B16\*A16)-B16-(A17\*B16)”, Figura 26, resultando no valor “-R\$ 251,25”. A proposta está baseada em sua ideia de “*sucessivo*”, pois ela construiu a relação explicando que foi realizado o primeiro *desconto*, “=(B16\*A16)-B16...”, para  $i_1 = 2,5\%$  e, na sequência, aplicou o segundo *desconto*, “=... -(A17\*B16)”, para  $i_2 = 3\%$ . Essa relação entre *Taxas (i)* e *Principal (p)* pode ser vista como a fórmula:  $VF = (P \times i_1) - P - (i_2 \times P)$ .

**Figura 26:** Relação proposta por Juliana

	A	B	C	D
14				
15	Taxa(i)	Principal(P)		
16	0,025	R\$ 250,00	-R\$ 251,25	
17	0,03			
18				

Fonte: Dados da Pesquisa

Alex argumenta: “Tu tem dois descontos [...] significa que tu está subtraindo dois valores e mesmo assim o valor tá dando maior”. Ele está comparando o Valor Principal, R\$ 250,00, ao valor “-R\$ 251,25”, encontrado como resposta.

Em contrapartida, Alex propõe outra abordagem que está baseada no seu entendimento da ideia de Descontos Sucessivo e propõe que seja efetuado o cálculo do desconto, usando  $i_1 = 2,5\%$ , Valor Principal ( $P$ ), e  $i_2 = 3\%$  (Fig.27).

**Figura 27:** Proposta de Alex sobre *descontos sucessivos*

	A	B	C	D
14				
15	Taxa(i)	Principal(P)		
16	0,025	R\$ 250,00	R\$ 0,19	
17	0,03			
18				
19				
20				
21				
22				

Fonte: Dados de pesquisa

Notamos (Fig. 27) que foi inserido na célula C16, “ $=(B16*A16)*A17$ ”, obtendo como resposta, R\$ 0,19, e argumenta:

**Alex:** 0,19. Sabe por quê? Olha, é só parar e pensar [...] Quanto que vai ser? [...] O que eu quero saber? Vai ser a taxa do primeiro desconto. Como fazer o primeiro desconto? Vai ser 0,025 vezes 250 e o segundo desconto mais 0,03 em cima do segundo desconto, que vai repetir o primeiro, que vai ser 0,19.

Essa relação entre Taxas ( $i$ ) e Principal ( $P$ ) pode ser vista como a fórmula:  $VF = (P \times i_1) \times i_2$ . Nota-se que Alex parece ter a ideia de que *descontos sucessivos* ocorrem de forma que a primeira Taxa incide sobre o Valor Principal e a segunda Taxa incide sobre o valor da primeira Porcentagem de desconto.

Juliana diz que isso está errado e argumenta explanando o que pensou:

**Juliana:** *Sabe o que eu pensei em fazer. [...] Eu pensei assim em colocar, já, esse valor com desconto e aí tirar esse desconto.*

Então Alex volta à célula C16 e insere a seguinte relação: “=B16\*A16” e...

**Juliana:** *menos o Valor Principal. Tu vai ter que por tudo em parênteses.*

**Alex:** *mas esse segundo desconto de 0,03 não posso colocar aqui dentro. Aqui dentro eu “tô” fazendo o primeiro[...]*

Na sequência Juliana realiza alguns cálculos, junto a Planilha Eletrônica, com os dados do problema e seus resultados, (Fig. 28), encontrando o valor de R\$ 236,44 que lhe parece ser mais condizente como o *Valor Final com desconto*. Essa estratégia nos mostra situações em que o computador, em especial as Planilhas Eletrônicas “[podem] desempenhar o papel de facilitador de contas, em outras, [eles surgem] como um ampliador de memória dos alunos e, em outras situações, ainda, ele possibilita a reorganização do pensamento dos alunos” (JAVARONI, 2007, p.164).

**Figura 28:** Cálculos realizados por Juliana

	A	B	C	D	E	F	G
12				R\$ 306,56			
13							
14							
15	Taxa(i)	Principal(P)					
16	0,025	R\$ 250,00					
17	0,03					R\$ 6,25	R\$ 243,75
18						R\$ 7,31	
19						R\$ 236,44	
20							
21							
22							

Fonte: Dados da pesquisa

Notamos que ela procede aos cálculos realizando-os da seguinte forma:

**Tabela 2** - Cálculos do *desconto sucessivo* na Planilha Eletrônica

Dados	Célula	Procedimentos	Resultado
$i_1 = 0,025$ , (A16); $P = R\$ 250,00$ , (B16)	F17	Cálculo do primeiro <i>desconto</i> ( $p_1$ ): $F17 \rightarrow "=B16*A16"$	R\$ 6,25
$P = R\$ 250,00$ , (B16); $p_1 = R\$ 6,25$ , (F17).	G17	Cálculo do <i>Valor Final</i> após o primeiro <i>desconto</i> ( $VF_1$ ): $G17 \rightarrow "=B16-F17"$	R\$ 243,73
$VF_1 = R\$ 243,73$ , (G17); $i_2 = 0,03$ , (A17).	F19	Cálculo do segundo <i>desconto</i> ( $p_2$ ): $F19 \rightarrow "=G17*A17"$	R\$ 7,31
$VF_1 = R\$ 243,73$ , (G17); $p_2 = R\$ 7,31$ , (F19).	F20	Cálculo do <i>Valor Final</i> após o segundo <i>desconto</i> ( $VF_2$ ): $F20 \rightarrow "=G17-F19"$	R\$ 236,44

Fonte: Dados da pesquisa

Alex não entende a proposta, pois está com a ideia de elaborar uma fórmula geral. Dessa forma, Juliana deixa sua ideia de lado, porém ela propõe ler com mais atenção o que é pedido no item 4.

A dupla, após a leitura, tem entendimentos distintos. Alex ainda acha que a segunda taxa será aplicada sobre o valor do primeiro *desconto* e Juliana explica seu entendimento:

**Juliana:** *Esse valor sofrerá esse desconto, [...] e depois [...] o outro desconto. [...] É a mesma coisa que de você tirar do valor descontado "mais" 3%.*

**Alex:** *Eu vou pensar, um minuto. Só me dá um tempo. Então isso aqui vai ser igual [...].*

**Juliana:** *É a mesma coisa que de você tirar do valor descontado "mais" 3%.*

**Alex:** *mas esse segundo desconto de 0,03 não posso colocar aqui dentro. Aqui dentro eu 'tô' fazendo o primeiro[...]*

Juliana retoma seu argumento de calcular o primeiro *desconto* e toma o controle da planilha, organizando o conteúdo da célula C16 (Fig. 29). Na sequência, ela continua complementando a relação indicando que está calculando o percentagem de *desconto* referente à segunda taxa.

**Figura 29:** Argumentação de Juliana sobre *descontos sucessivos*

		C16		fx		=(B16-(B16*A16))	
	A	B	C	D			
14							
15	Taxa(i)	Principal(P)					
16	0,025	R\$ 250,00	R\$ 243,75				
17	0,03						
		C16		fx		=(B16-(B16*A16))*A17	
	A	B	C	D			
14							
15	Taxa(i)	Principal(P)					
16	0,025	R\$ 250,00	R\$ 7,31				
17	0,03						
18							
19							

Fonte: Dados da pesquisa

A pedido de Alex, ela efetua um “enter” para verificar o resultado da relação “ $=(B16-(B16*A16))*A17$ ” e, juntos, encontram o valor de R\$ 7,31, confirmando assim que estão no caminho correto, pois já encontram esse valor na célula F19 (Fig. 26 e Tab. 2). Ao continuar complementando a relação, Juliana acha muito trabalhoso escrever a segunda parte da relação e acaba por copiar e colar a expressão “ $((B16-(B16*A16)))$ ”, subtraindo-a da sequência já inserida (Fig. 30).

**Figura 30:** Complementação do argumento de Juliana

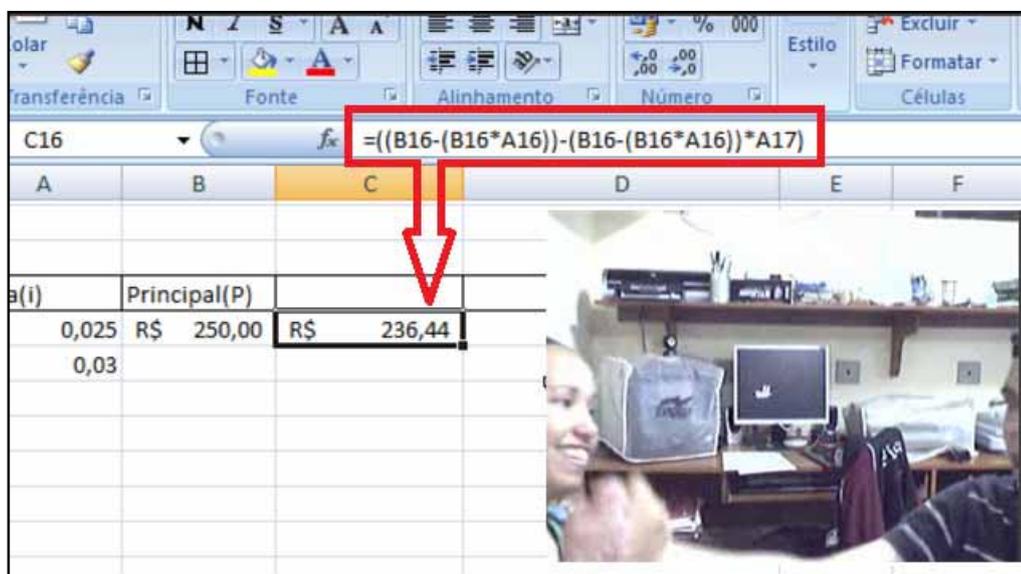
		C16		fx		=((B16-(B16*A16))*A17)-(B16-(B16*A16))	
	A	B	C	D			
14							
15	Taxa(i)	Principal(P)					
16	0,025	R\$ 250,00	-R\$ 236,44				
17	0,03						
18							

Fonte: Dados da pesquisa

Após terminar de inserir os dados na célula, a dupla obtém um resultado esperado, porém Alex chama atenção que o resultado final está negativo. Após uma

breve análise, Alex altera a ordem das parcelas na subtração, obtendo, dessa forma, o valor R\$ 236,44, conforme pode ser observado na Figura 31.

**Figura 31:** Relação final estabelecida pela dupla para o *desconto sucessivo*



Fonte: Dados da pesquisa

Após encontrarem o valor, Alex pergunta à dupla ao lado: “*Vocês fizeram de pouquinho em pouquinho ou montaram uma equação geral?*”. Isso indica que eles estão cientes de que é possível estabelecer diversas relações entre as células contendo os dados e agrupá-los em um resultado final, assim como é possível estabelecer uma única relação que lhes dará o resultado pretendido.

A realização desse item nos mostra como os alunos progrediram no desenvolvimento das ideias e dos conceitos pertinentes ao estudo dos *descontos sucessivos* e de como esse processo ocorre mais facilmente com a interação com as Planilhas Eletrônicas, afinal os alunos utilizam as planilhas para realizar cálculos preliminares e, a partir deles, traçar novas estratégias em busca de um resultado que satisfaça seus objetivos. Nessa abordagem, como na anterior, a interação entre os alunos e as mídias instiga o surgimento de diferentes discussões entre os alunos e, possivelmente, propicia a eles a oportunidade de reorganização dos conceitos matemáticos estudados.

Percebemos que a reorganização dos conceitos e das ideias que levam a realização de novas ações por parte dos alunos, nesse item, decorre das suas experimentações e de validações junto à Planilha Eletrônica, pois se aliarmos o objetivo central eleito pelos alunos ao foco a ser atacado no problema, e às tomadas

de decisões junto ao problema durante uma Atividade de Investigação com as Planilhas Eletrônicas, temos um conjunto de seres-humanos-com-mídias, o que propiciará a reorganização das atividades dos alunos no desenvolvimento de investigações de conteúdos matemáticos (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Na sequência, Alex e Juliana explicam-me o que fizeram e eu questiono se é possível organizar o que foi feito de outra forma ou de forma mais reduzida. A dupla esboça uma formalização em termos gerais do *Valor Final (VF)*, *Principal (P)* e *Taxas (i)*, porém, pelo adiantado da hora, eles abandonaram a formalização.

Para a tarefa de *acréscimo* e *descontos* simples, a dupla inicialmente parte das estratégias que se baseiam na organização dos dados do problema; em cálculos preliminares; em seus resultados nas várias células, e, posteriormente os mesmos são arranjados como resposta final. Contudo não procedem com a validação da fórmula apresentada e, ao serem solicitados que verifiquem tal fórmula, começam a analisá-la em comparação aos resultados encontrados e assim acabam por modificá-la.

Isso, em parte, também pode ser observado na sequência com a tarefa relativa a *descontos sucessivos*, no item 4, contudo, os alunos, além de encontrar o *Valor Final* com *desconto*, almejam uma fórmula que será usada para o item 6 (Quadro 4).

Após algumas tentativas, a dupla utiliza-se novamente da estratégia de resolver o problema em células separadas, porém não deixam de analisá-las para compor uma relação que expresse o resultado final. Pode-se observar que a relação estabelecida pela dupla fica em termos das células usadas, e não em relação à nomenclatura adotada para cada elemento envolvido no problema.

Chama atenção o fato de que dupla não segue a ordem do item 4, subitens (a) (b) e, ao perceberem isso, criam uma nova organização para os dados. Assim como tentam criar uma fórmula para a relação encontrada na célula C16.

**Figura 32:** Resposta aos subitens (a) e fórmula do *desconto sucessivo*

Taxa(i)	Principal(P)				
0,025	R\$ 250,00	R\$	236,44		
0,03					
Taxas(i1)	Principal(P1)	Porcentagem(p1)	Valor final com abatimento(1)	Taxa(i2)	Porcentagem(p2)
0,025	R\$ 250,00	R\$ 6,25	R\$ 243,75	0,03	R\$ 7,31

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla não finalizou a fórmula iniciada na célula E15, (Fig. 32), contudo podemos supor que ao final eles poderiam encontrar uma formalização que representaria o *Valor Final* com *descontos sucessivos* para  $i_1$  e  $i_2$  (Quadro 6).

**Quadro 6** - Possível formalização para *descontos sucessivos*

Relação:  $= (B16 - (B16 * A16)) - (B16 - (B16 * A16) * A17)$

Fórmula:  $VF = (P - (P \times Tx_1)) - (P - (P \times Tx_1) \times Tx_2)$

Fonte: Dados da pesquisa

A falta de empenho da dupla em terminar suas propostas de finalização para a tarefa em questão pode ter origem no fato de que eu já me encontrava fazendo a sistematização dos itens junto à lousa.

Contudo cabe uma análise sobre a abordagem dada pela dupla para essa tarefa. Mesmo aplicando uma estratégia já utilizada, como a de resolver o problema em partes, eles tinham um objetivo maior que se constituía em achar uma fórmula que expressasse o *Valor Final* com *desconto*.

Nesse processo de busca pela fórmula, ficou evidente que os alunos realizaram uma Investigação Matemática ao fazerem o reconhecimento da situação, explorações prévias e formulação de questões. Dando sequência à elaboração de conjecturas e por consequência aos testes das mesmas e por último fazem argumentações e a validação do que foi produzido (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003).

São perceptíveis, também, nesse processo a problematização que se refere ao ato de criar perguntas ou problemas e a investigação que busca a seleção, a

organização, a manipulação de informações e a reflexão sobre elas. Nota-se uma articulação desses processos na abordagem da atividade proposta, propiciando a elaboração de questões e a realização de investigações que atinjam o âmbito do conhecimento reflexivo e, dessa forma, como coloca Barbosa (2004), podendo ser associado a um ambiente de modelagem.

O desenvolvimento da tarefa pela dupla indica a presença de uma questão aberta, indicada pelo item 6, capaz de suscitar a investigação pelo aluno que pode ser “entendida como um processo de busca por estratégias cujo caminho é definido pelo(s) aluno(s) sob orientação do professor, caracterizando atividades de cunho mais aberto” (BARBOSA, 2010, p. 7).

As ações em prol da formalização ao longo da atividade estimulam o aparecimento do conteúdo de matemática presente na Modelagem e nas Investigações Matemáticas. Tais características permitem “a busca por estratégias pelo aluno, a utilização de conhecimentos já adquiridos e a percepção de que novos conhecimentos são necessários à resolução” (BARBOSA, 2010, p. 7).

Notamos em especial nessa tarefa que a dupla se utilizou de premissas presentes na Investigação assim como na Modelagem, desenvolvendo estratégias para estabelecer uma fórmula que descrevesse uma situação problema. Mesmo que a dupla não tenha concluído suas formalizações (Quadro 6), Bassanezi (2002) defende que:

Mais importante que os modelos obtidos é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural. O fenômeno modelado deve ser de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática (BASSANEZI, 2002, p. 38).

Ao propor as tarefas de Investigação Matemática foi adotada uma temática, e as atividades desenvolveram-se inicialmente em torno de problemas específicos progredindo para problemas mais amplos. Durante a realização das Investigações Matemáticas percebem-se similaridades com o que Borba e Villarreal (2005) discutem sobre situações problemas de Modelagem Matemática posta pelo professor, onde é sugerido um tema ou problema para ser investigado, cabendo aos alunos, com orientação do professor, encontrar soluções, e ainda que o uso do *software* da Planilha Eletrônica, nesta categoria, permite aos alunos que manipulem os dados, gerem conjecturas e avaliem as decisões.

### 3.2.2.2 Sistematização: Acréscimos e Descontos Sucessivos

As abordagens das tarefas por parte da grande maioria dos alunos seguiu o que foi proposto em seus itens (Quadro 7). A estratégia usual nessas tarefas baseou-se no uso da Planilha Eletrônica para a realização de cálculos parciais e posteriormente na composição do resultado final pretendido (Fig. 33).

**Quadro 7** - Tarefas sobre *acrécimo e descontos sucessivos*

4. Uma mercadoria no valor de R\$ 250,00 sofre dois descontos sucessivos de 2,5% e 3%, respectivamente.

- a. Qual o valor total do desconto?
- b. Qual a taxa final de desconto?

5. Uma mercadoria sofre dois acréscimos sucessivos de 3,5% e 1,25%, respectivamente passando a valer R\$ 99,00.

- a. Qual o valor antes do acréscimo?
- b. Qual a taxa total de acréscimo?

6. Qual ou quais as “*formalizações*” possíveis a partir dos cálculos feito nos itens 4 e 5, para que se possa aplicar a qualquer situação de mesma natureza?

7. Uma mercadoria sofre acréscimos sucessivos de 1,5%, 2,5% e 3,5%, respectivamente.

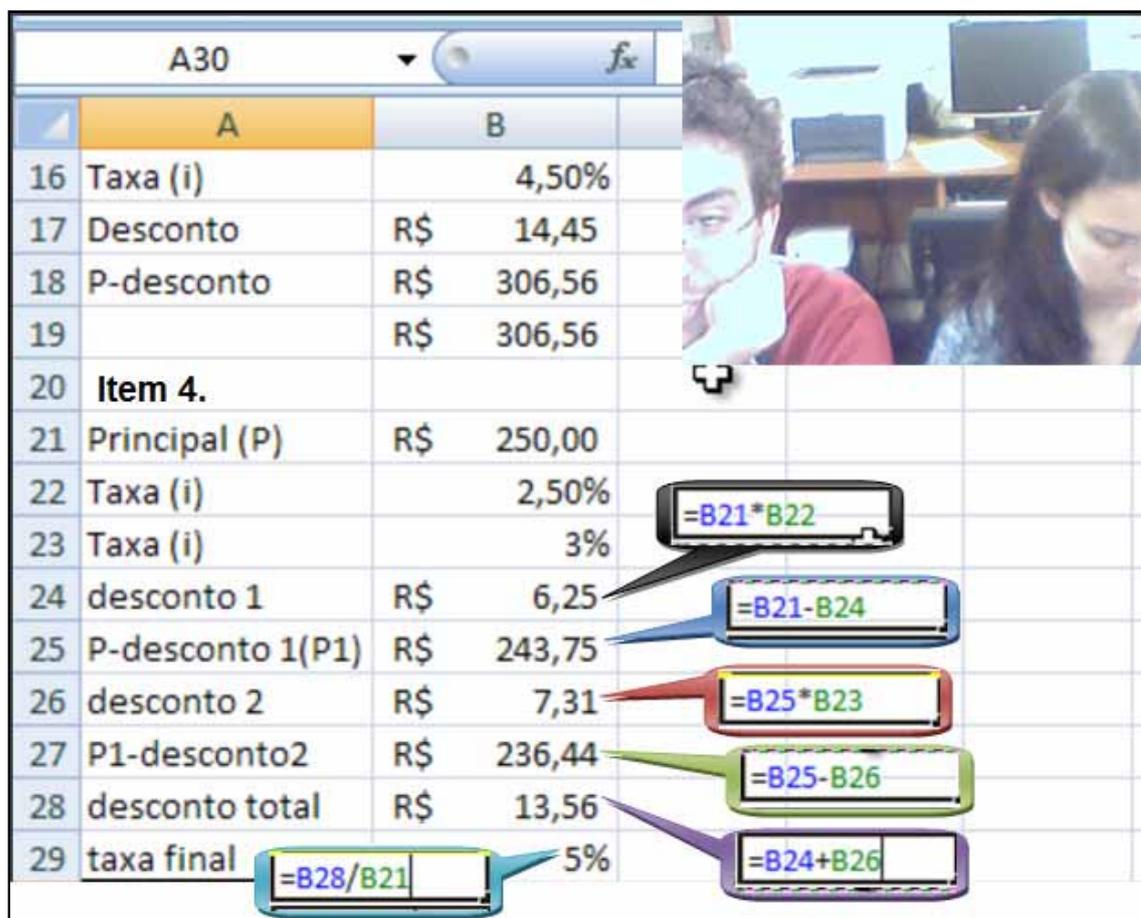
- a. Qual a taxa total de acréscimo?

8. Uma mercadoria sofre descontos sucessivos de 1%, 3,25% e 1,25%, respectivamente.

- a. Qual a taxa total de desconto?

9. Qual ou quais “*formalizações*” são possíveis a partir dos cálculos feitos nos itens 7 e 8, para que se possa aplicar a qualquer situação de mesma natureza?

**Figura 33:** Abordagem da dupla Luís e Natália para o item 4



	A	B
16	Taxa (i)	4,50%
17	Desconto	R\$ 14,45
18	P-desconto	R\$ 306,56
19		R\$ 306,56
20	<b>Item 4.</b>	
21	Principal (P)	R\$ 250,00
22	Taxa (i)	2,50%
23	Taxa (i)	3%
24	desconto 1	R\$ 6,25
25	P-desconto 1(P1)	R\$ 243,75
26	desconto 2	R\$ 7,31
27	P1-desconto2	R\$ 236,44
28	desconto total	R\$ 13,56
29	taxa final	5%

Formulas shown in callouts:

- Cell B24:  $=B21*B22$
- Cell B25:  $=B21-B24$
- Cell B26:  $=B25*B23$
- Cell B27:  $=B25-B26$
- Cell B28:  $=B24+B26$
- Cell B29:  $=B28/B21$

Fonte: Dados da pesquisa

Observamos na abordagem da dupla Luís e Natália a organização dos dados e as relações estabelecidas entre esses dados. Essas relações geraram novos dados, como vemos nas células B24, B25, B26 e B27 e estes são utilizados nos cálculos presentes nas células B28 e B29 que correspondem aos subitens (a e b) solicitados no item 4. A estratégia na organização dos dados e os diversos cálculos realizados se fazem presentes em grande número das abordagens por parte das duplas.

Ao longo do desenvolvimento da Atividade Investigativa, que a mesma não está atendendo suas prerrogativas e, diante disso, convido a turma para realizar as sistematizações dos itens.

Na tentativa de estabelecer formalizações para as tarefas que remetem à *Taxa Percentual* total de *desconto*, relembro das primeiras fórmulas que estabelecemos para o cálculo da *Porcentagem* e o que poderíamos obter em termos dela:

$$p = P \times i \begin{cases} P = \frac{p}{i} \\ i = \frac{p}{P} \end{cases}$$

Em contrapartida, a Dupla Mirela e Natália C. argumentam terem usado a regra de três para o cálculo da *Taxa Percentual*. A partir dessa colocação, aproveito para questionar o que foi obtido ao final da Regra de Três, ou seja, chamo a atenção da turma para o fato de que a razão estabelecida ao final desse procedimento será entre *Porcentagem* e *Principal*, e saliento também que para essa abordagem haverá uma multiplicação por 100, indicando a natureza da taxa, ou seja, *Taxa Percentual*, (Quadro 8).

**Quadro 8** - Resultado ao final da *Regra de Três*

Regra de Três	Fórmula
$\begin{array}{l} 100 \rightarrow R\$ 2500 \\ x \rightarrow R\$ 13,56 \end{array} \Rightarrow \underbrace{x}_{i} = \frac{\overbrace{13,56}^p}{\underbrace{2500}_P} \times \overbrace{100}^{\%}$	$i = \frac{p}{P} \times 100$

Fonte: Dados da pesquisa

Para essa questão, as discussões ficam em torno do conceito de variação dado à taxa. Onde se usou a variação da *Porcentagem* ( $p$ ) ou *desconto* sobre o *Valor Principal* ( $P$ ), e não houve discussões sobre as possibilidades de como determinar a *Taxa Percentual* usando os demais dados que compõem o problema.

Na sequência questiono a turma sobre como obter o *Valor Final* ( $VF$ ) referindo-me ao item 6 que remete às possíveis formalizações para os *Valores Finais* com *desconto* e *acréscimos*.

Indico o trabalho realizado pela dupla Alex e Juliana como uma possível formalização e os convido para discussão. Contudo a dupla não se mostra inteiramente certa do que realizou, argumentando que foi encontrado um “valor absurdo”, uma vez que a relação estabelecida por eles, Quadro 6 (pag. 79), não foi reestruturada em uma fórmula usando a nomenclatura acordada durante os encontros.

Na tentativa de incentivá-los, começo a esboçar a fórmula na lousa, contudo a dupla em questão não consegue associar os termos usuais ( $P$ ,  $p$  e  $i$ ) com as células usadas na relação elaborada em conjunto com minhas argumentações e acabo por

definir a fórmula diretamente. Nessa tentativa, argumento que a dupla apenas não refinou sua relação, mas que ela representa corretamente o *Valor Final*, mostrando na lousa um possível encaminhamento para a fórmula, como pode ser visto na Figura 34 e no Quadro 9.

**Figura 34:** Discussão sobre a fórmula do *Valor Final*

$$p = P \cdot i$$

$$P = \frac{p}{i} \quad ; \quad i = \frac{p}{P}$$

$$VF = P \cdot (1 - i_1)$$

$$P' \cdot (1 - i_2)$$

$$VF = P \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2)$$

Fonte: Dados da pesquisa

**Quadro 9 -** Fórmulas estabelecidas na lousa

<b>Porcentagem</b>	$p = P \times i$
$P = \frac{p}{i}$	$i = \frac{p}{P}$
<b>Valor Final com descontos sucessivos</b>	
$VF = P \times (1 - i_1)$	
$P' \times (1 - i_2)$	
$VF = P \times (1 - i_1) \times (1 - i_2)$	

Fonte: Dados da pesquisa

A fórmula estabelecida para o Valor Final com *descontos sucessivos* também serve de base para o Valor Final com *acréscimos sucessivos* “ $VF = P \times (1 + i_1) \times (1 + i_2)$ ” que consta do problema 5. Contudo, para esse item, houve uma discussão sobre a interpretação do que é solicitado no problema. Notei, de modo geral, que os alunos aplicaram as *Taxas Percentuais* ( $i_1$  e  $i_2$ ) na forma de *desconto* sobre o Valor Final com *acréscimo*, com o intuito de que esse retornaria ao seu valor original. Observemos o que é solicitado pelo problema 5, Quadro 10.

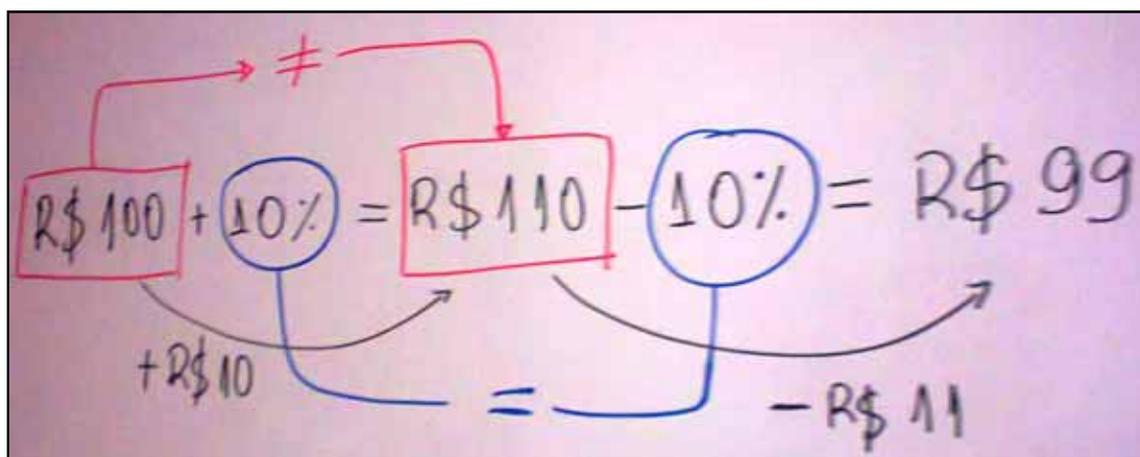
**Quadro 10** - Enunciado do problema 5

5. Uma mercadoria sofre dois acréscimos sucessivos de 3,5% e 1,25%, respectivamente passando a valer R\$ 99,00.
- Qual o valor antes do acréscimo?
  - Qual a taxa total de acréscimo?

Fonte: Dados da pesquisa

Em resposta ao item (a.) do problema 5, foi recorrente a ação de aplicar operação inversa, ou seja, foram realizados dois *descontos* referentes às *Taxas*  $i_1 = 3,5\%$  e  $i_2 = 1,25\%$ . Ao perceber essa recorrência, precipito-me em chamar a atenção da turma quanto a esse fato construindo um esquema junto à lousa, Figura 35, para que percebam o que está ocorrendo.

**Figura 35:** Esquema explicativo para o uso da *taxa de acréscimo* e *desconto*



Fonte: Dados da pesquisa

Com esse esquema, chamo a atenção de que a *Taxa Percentual* usada para um *acréscimo* não poderá ser usada como *taxa de desconto* para retornar ao valor inicial, ou seja, as *Taxas* não são equivalentes nas operações de *acréscimos* e

*desconto*, pois o valor da base de cálculo mudará. Como pode ser observado nesse esquema, ao aplicarmos uma *taxa de acréscimo* de 10% ao valor de R\$100,00, o *Valor Final* será de R\$110,00. Ao passo que, se aplicarmos um *desconto* de 10% ao valor de R\$110,00, obteremos um *Valor Final* de R\$ 99,00.

Diante disto, o aluno Vinicius argumenta que por esse motivo não podemos somar as *Taxas Percentuais* nos *descontos* e *acrécimos sucessivos*, pois ao aplicarmos as *taxas* os valores mudaram, gerando uma nova base de cálculo para a taxa seguinte. Ao confirmar sua argumentação, chamo a atenção para o fato de que existem casos em que os *acrécimos* e *descontos* podem ocorrer na forma simultânea e assim permitindo a soma das *Taxas*.

Nos problemas 7, 8 e 9 (Quadro 11), referentes às tarefas de *acrécimo* e de *descontos sucessivos* tem-se como tarefa investigativa determinar possíveis formalizações para *Taxa Percentual* total.

**Quadro 11** - Problemas 7, 8 e 9

7. Uma mercadoria sofre acréscimos sucessivos de 1,5%, 2,5% e 3,5%, respectivamente.

a. Qual a taxa total de acréscimo?

8. Uma mercadoria sofre descontos sucessivos de 1%, 3,25% e 1,25%, respectivamente.

a. Qual a taxa total de desconto?

9. Qual ou quais “*formalizações*” são possíveis a partir dos cálculos feitos nos itens 7 e 8, para que se possa aplicar a qualquer situação de mesma natureza?

Fonte: Dados da pesquisa

A sistematização das fórmulas ocorreu junto a Lousa Digital, seguindo a abordagem da dupla Diego e Fernanda, como vemos na Figura 36.

**Figura 36**<sup>16</sup>: Abordagem inicial proposta por Diego e Fernanda

	A	B	C	D	E	F
2						
3	Taxa ( $i_1$ )	1,5%				
4	Taxa ( $i_2$ )	2,5%				
5	Taxa ( $i_3$ )	3,5%				
	Taxa ( $i_T$ )					
	inicial	x				
8	final	#VALOR!				
9	acrescimento total	#VALOR!				
10	taxa total	=B9/B8				
11						
12						

Fonte: Dados da pesquisa

Diego insere os dados organizando-os na Planilha Eletrônica e constrói relações entres os mesmos. Na célula  $B7$ , foi inserida uma incógnita “ $\chi$ ” representando o *Principal* ( $P$ ), denominado pela dupla como “inicial”; na célula  $B8$  foi inserida a fórmula do *Valor Futuro* com *acréscimos sucessivos* para três taxas, na célula  $B9$  foi inserida uma relação para o cálculo da *Porcentagem* total de *acréscimo* e, por último, é construída na célula  $B10$  a relação para a divisão da *Porcentagem* total de *acréscimo* ( $B9$ ) pelo o *Principal*, “inicial”, ( $B7$ ). Os detalhes dessas operações podem ser visualizados no Quadro 12 a seguir:

<sup>16</sup> Ao inserir as taxas nas relações apresentadas Diego utiliza  $i_1$  e  $i_2$  no formato numérico e para  $i_3$  o endereço de célula B5

**Quadro 12** - Detalhes das relações estabelecidas por Diego

Células	Dados	Relações	Explicações e Fórmulas
B7	inicial "χ" ( <i>P</i> )		Valor qualquer
B8	Final ( <i>VF</i> )	=B7*(1+1,5%)*(1+2,5%)*(1+B5)	$VF = P \times (1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3)$
B9	acréscimo total ( <i>p</i> )	=B7*((1+1,5%)*(1+2,5%)*(1+B5)-1)	$p = VF - P$ $p = P \times (1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3) - P$ $p = P \times [(1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3) - 1]$
B10	taxa total ( <i>i<sub>t</sub></i> )	=B8/B9	$i = \frac{p}{P}$ $i_t = \frac{P \times [(1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3) - 1]}{P \times (1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3)}$ $i_t = 1 - \frac{1}{(1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3)}$

Fonte: Dados da pesquisa

Diego ainda argumenta que o valor inicial (*P*) não terá relevância no cálculo da *Taxa Percentual* total, e para tanto, propõe a substituição do valor inicial por outros valores, como pode ser visto na Figura 37.

**Figura 37:** Verificação da relação para o cálculo da *Taxa Percentual* total

	A	B	C	D
2				
3	Taxa ( $i_1$ )	1,5%		
4	Taxa ( $i_2$ )	2,5%		
5	Taxa ( $i_3$ )	3,5%		
	Taxa ( $i_T$ )			
	inicial	1		
8	final	1,076788		
9	acrescimento total	0,076788		
10	taxa total	0,076788		
11				
12				

	A	B	C	D
2				
3	Taxa ( $i_1$ )	1,5%		
4	Taxa ( $i_2$ )	2,5%		
5	Taxa ( $i_3$ )	3,5%		
	Taxa ( $i_T$ )			
	inicial	1000000		
8	final	1076788		
9	acrescimento total	76788,12		
10	taxa total	0,076788		
11				

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao finalizar essa discussão, chamei a atenção da turma para o fato de que a dupla usou a Planilha Eletrônica como um simulador e, dessa forma, pôde ser testado para qualquer *Taxa Percentual*, desde que se tenha o cuidado de usar o endereço das células.

As sistematizações feitas para os itens que compõem as tarefas referentes aos *acréscimos* e *descontos sucessivos* ocorreram de forma direta e, de certa forma, negligenciando o que Ponte, Brocado e Oliveira (2003) preconizam dentro das Atividades Investigativas, ou seja, a comunicação dos resultados mais significativos e a promoção de questionamentos e reflexões sobre as ideias apresentadas. Esses e outros percalços ocorridos durante as Atividades Investigativas compõem o tema do 5º capítulo no qual serão feitas as considerações sobre a pesquisa.

### 3.3 Bloco 3: Matemática Financeira

Conforme apresentado anteriormente, optei por abordar primeiramente no curso de extensão, cenário da pesquisa aqui apresentada, os conceitos de Matemática Comercial, onde o fator *Tempo* não é considerado nas aplicações e, posteriormente propus o desenvolvimento de Atividades Investigativas sobre os conceitos propriamente ditos de Matemática Financeira, onde o fator *Tempo* nas aplicações faz-se presente. Assim, nas próximas seções passo a apresentar e analisar como se configuram as estratégias dos alunos no desenvolvimento das Atividades Investigativas com os temas Juros Simples e Compostos, mediadas pela Planilha Eletrônica.

#### 3.3.1 Juros Simples

A apresentação dos Juros Simples ocorreu de forma conceitual aliada à noção geral de Juros, por meio de material impresso (Quadro 13).

#### Quadro 13 - Notas de aula sobre Juros e Juros Simples

<p>1.2.JUROS</p> <p>Entendemos por regime de <i>Capitalização</i> o processo de formação do juro. Há dois regimes de <i>Capitalização</i>: <i>a juro simples</i> e <i>a juro composto</i>.</p> <p>O valor do <u>juro</u> a ser cobrado ou recebido é determinado por meio de uma <u>taxa percentual</u>, referida a um intervalo de <u>tempo</u>, denominada <u>taxa de juros</u>.</p> <p>1.2.1. <u>Juro Simples</u></p> <p>No regime de <i>Capitalização</i> a <u>juro simples</u>, por convenção, apenas o <i>Capital</i> inicial rende juros, isto é, o juro formado no final de cada período a que se refere a taxa não é incorporado ao <i>Capital</i> para, também, render juros no período seguinte.</p> <p>Pela definição, o juro simples é diretamente proporcional ao <i>Capital</i> inicial e ao tempo de aplicação, sendo a taxa de juro por período o fator de proporcionalidade.</p>
--

Fonte: Dados da pesquisa

### 3.3.1.1 Dupla: Vinicius e Fábio

Inicialmente é apresentado às duplas o “Problema 1” de caráter mais específico, e na sequência, uma questão mais genérica, indicada pelo item (a.), como podemos observar na Quadro 14.

**Quadro 14** - Problema 1 sobre Juros Simples

Problema 1.

*Toma-se a importância de R\$ 1.200, pelo prazo de 6 meses, à taxa de 7,5% ao mês. Qual será o valor a ser pago?*

- a. Qual ou quais “*generalizações*” são possíveis a partir dos cálculos feitos neste problema.

Fonte: Dados do problema

A abordagem da dupla para o referido problema apresenta-se em dois momentos, nos quais as percepções das possibilidades de cálculos junto à Planilha Eletrônica os levam a reorganizar suas abordagens.

O primeiro momento da abordagem se caracteriza pela organização dos dados referentes ao problema em questão e pelo cálculo pormenorizado de juros a cada período de *Tempo*, ou seja, o *Valor Futuro* ou *Montante (VF)* foi calculado mensalmente como vemos na Figura 38.

**Figura 38:** Cálculo dos Juros Simples por meses

	A	B	C
1			
2		Valor inicial	R\$ 1.200,00
3		taxa percentual por mês	7,5%
4		mes1	R\$ 1.290,00
5		mes2	R\$ 1.386,75
6		mes3	=
7		mes4	
8		mes5	
9		mes6	
10			
11			

Fonte: Dados da pesquisa

Nota-se a relação estabelecida entre as células no cálculo do *Montante* para cada mês, ou seja, para o “mês1”, na célula C4, foi estabelecido um *acréscimo* sobre o valor inicial de R\$ 1200,00, célula C2, usando “a taxa percentual por mês” de 7,5% inserida em C3. Para o “mês2”, esse processo se repete, utilizando como valor inicial o *Montante* encontrado no “mês1”, célula C4. Isso sugere um encadeamento entre as células e os respectivos cálculos dos meses que seguem. Contudo ao iniciar o cálculo do *Montante* (VF) para o terceiro mês, o aluno Vinicius faz uma pausa e começa a analisar o que está sendo feito. Decidindo que é preciso fazer uma abordagem que os levem, além do VF, mas também que propicie o estabelecimento de uma generalização conforme está solicitado no item (a.) do problema.

Assim, para o segundo momento, a dupla reestrutura em parte os dados do problema e implementa outras relações com as células, como pode ser observado na Figura 39.

**Figura 39:** Segundo momento da abordagem para Juros Simples

	A	B	C
1			
2		Valor inicial	R\$ 1.200,00
3		taxa percentual por mês	7,5%
4		aumento em R\$ por mês	R\$ 90,00
5		tempo (em Mês)	6
6		Valor Final	R\$ 1.740,00
7			

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando o que foi proposto pela dupla, verificamos que surgem outros elementos junto à Planilha Eletrônica, em substituição dos apresentados em sua primeira abordagem. O cálculo mensal do *VF*, que antes ocuparia seis células, foi reorganizado na célula *C6*, utilizando uma relação entre o “*aumento em R\$ por mês*” que corresponde a *Porcentagem* de aumento mensal, calculada na célula *C4*, e o fator “*tempo (em mês)*” inserido em *C5*. Estabelecendo-se a relação, “ $=C2+(C4*C5)$ ”, que os leva ao *Montante (VF)*.

A partir dessa lógica de trabalho, pode-se notar que o uso das Planilhas Eletrônicas influenciou na forma como o aluno estruturou sua resolução para o problema, nas modificações feitas para chegar ao resultado final e até na reestruturação dos dados e na forma como eles são relacionados. Com base nesse procedimento, observamos a questão da reorganização do pensamento colocada por Tikhomirov (1981)

A ideia de reorganização do pensamento está imbricada a uma reciprocidade entre homem e computador, por exemplo, quando os alunos abordam o item (a.), que solicita a criação de uma generalização para as relações estabelecidas nessa abordagem. Nesse caso, nota-se o enfrentamento de ideias e objetivos na realização dessa tarefa investigativa, seja pelo simples cálculo do *VF*, pela forma como estruturar os dados juntos a Planilha Eletrônica ou ainda pela obtenção de informações que os levem a uma possível fórmula. Dessa forma essa reciprocidade

pode ser observada se compararmos a fórmula estabelecida na Figura 40 com o segundo momento da abordagem junto à Planilha Eletrônica, (Fig. 39), onde temos a adaptação da relação entre as células que correspondem aos dados do problema para uma fórmula que apresenta a mesma ordem para os respectivos dados.

**Figura 40:** Fórmula estabelecida para o cálculo do *Montante* em Juros Simples

Problema 3

$$VF = V_i + (V_i * i * t)$$

Valor final = ~~R\$~~ R\$ 1.740,00

Fonte: Dados da pesquisa

Nota-se que a fórmula do **VF** foi obtida da relação, “= **C2+(C4\*C3)**”, com a devida substituição de **C4** pela relação “= **C2\*C3**” e a associação aos parâmetros estipulados pela dupla, como podemos ver na Tabela 3.

**Tabela 3** - Relação entre células versos Fórmula

Célula	Dados	Relação	Fórmula
C2	valor inicial ( $V_i$ )	---	---
C3	taxa percentual por mês ( $i$ )	---	---
C4	aumento em R\$ por mês	= <b>C2*C3</b>	$p = V_i \times i$
C5	tempo (em Mês) ( $t$ )	---	---
C6	valor final ( $VF$ )	= <b>C2+(C4*C5)</b>	$VF = V_i + (p \times t)$ $VF = V_i + (V_i \times i \times t)$

Fonte: Dados da pesquisa

A reciprocidade entre homem e computador que Borba e Villarreal (2005) propõem transcende a ideia de que o computador molda o ser humano, pois o inverso também ocorre: o ser humano molda o computador. Isso pode ser notado na estratégia utilizada pela dupla para determinar o  $VF$  e a fórmula que o representa, pois ao fazerem uso do *software* com o objetivo de estabelecer relações para solução do problema, ele propiciou momentos distintos na organização dos dados,

moldando suas ações para elaboração de novas relações, assim como na elaboração de hipóteses que os levaram à fórmula apresentada.

### 3.3.2 *Juros Compostos*

As atividades para o tema Juros Compostos foram iniciadas com a introdução do conceito pelo material impresso entregue às duplas.

#### **Quadro 15** - Notas de aula sobre *Juros Compostos*

##### 1.2.1. JURO COMPOSTO

No regime de *Capitalização a juro composto*, o juro obtido no fim de cada período é incorporado ao *Capital* que tínhamos no início desse período, passando esse *Montante* a render juro no período seguinte.

Pela definição **Juro Composto** é aquele que em cada período financeiro, a partir do segundo, é calculado sobre o *Montante* relativo ao período anterior.

Fonte: Dados da pesquisa

#### 3.3.2.1 *Dupla: Diego e Fernanda*

A tarefa de investigação para Juros Compostos segue o padrão das apresentadas para os tópicos anteriores, ou seja, um problema específico e um subitem aberto (Quadro 16).

#### **Quadro 16** - Tarefa investigativa sobre *Juros Compostos*

Baseado nas definições de Juro Composto resolva os problemas abaixo. Você pode utilizar a planilha eletrônica para resolvê-los

Problema 1.

*Toma-se a importância de R\$ 1.200, pelo prazo de 6 meses, à taxa de 7,5% ao mês. Qual será o valor a ser pago?*

- a. Qual ou quais “*generalizações*” são possíveis a partir dos cálculos feitos neste problema.

Fonte: Dados do problema

A abordagem realizada por Diego e Fernanda para a tarefa de Juros Compostos gerou discussão de ideias e de pontos de vista com a dupla Luis e Natália e com a aluna Agatha.

Em sua primeira abordagem a dupla, sob a liderança de Diego, organiza os dados do problema na Planilha Eletrônica e cria uma relação entre eles, baseando-se na interpretação da definição de **Juro Composto**, presente no material: “é aquela que em cada período financeiro, a partir do segundo, é calculado sobre o Montante relativo ao período anterior”, conforme exposto no Quadro 16. Essa interpretação é apresentada junto à Planilha Eletrônica, como podemos observar na Figura que segue.

**Figura 41:** Primeira abordagem dos *Juros Compostos*

	A	B	C	D	E	F	G
1	Capital	R\$ 1.200,00					
2	tempo/m	6					
3	taxa/m	7,5	0,075				
4	Juros	R\$ 2,20					
5	Montante						
6							

Fonte: Dados da pesquisa

Ao montar a relação, “ $=B1(1+C3)*C3*2*C3*3*C3*4*C3*5*C3*6$ ”, a partir dos dados *Capital* (B1), “*taxa/m*” (C3) e o “*tempo/m*” designado de 1 até 6, a dupla obteve como resposta numérica R\$ 2,20, o que foi motivo de surpresa e desencadeou uma discussão com o colega Luis da dupla ao lado.

**Diego:** Nossa ele ficou bem “pequeninho”, não parece ser isso mesmo não!

**Luis:** Mas não é só a primeira parte?

**Diego:** Então o que eu tinha feito: Nos juros um (1) é “Capital” vezes a “taxa” vezes o tempo; os juros dois (2) vai ser esse juros um (1), Montante né!?, [...] mais o juros um (1) vezes o “i” vezes o tempo dois (2). O juro três (3) vai ser o Montante disso aqui vezes o “i” vezes o  $t_3$  [...].

**Luis:** Não vai ter um fatorial aí?

**Diego:** Então, pode até ter! um fator do tempo [...].

**Luis:** Um fatorial do tempo?!

**Diego:** [...], mas o “i” será elevado a “n”, elevado a 6. “Vamos” ver, quer ver?! Faz o simples aí, por que o simples é bem menor que o composto. (Fig. 42).

**Luís:** Deu R\$ 540.

**Diego:** R\$ 540! Então tá errado esse aqui.

**Figura 42:** Cálculo do *Juro Simples* para comparação

5	4	17,50%	R\$ 303,33	R\$ 5.200,00	taxa ao ano
6					
7					
8	Tempo	Taxa	Rendimento	Quantia aplicada	
9	6	7,5%	R\$ 540,00	R\$ 1.200,00	
10					

Fonte: Dado da pesquisa

Ao encontrarem o valor R\$ 540,00 com aplicação da fórmula de Juro Simples, Diego se convence de que resultado obtido por meio da relação “ $=B1(1+C3)*C3*2*C3*3*C3*4*C3*5*C3*6$ ” não é o correto e começa a rascunhar uma possível fórmula para o cálculo do Juro Composto, partindo de sua interpretação do conceito e da ideia que o *Taxa* ( $i$ ) estará elevado a “ $n$ ”, ou, no caso desse problema, na sexta potência.

Observamos na Figura 43 um recorte do material escrito do aluno que pensou ter desenvolvido uma fórmula para o cálculo dos Juros Compostos até o terceiro período (mês) de aplicação, indicado por  $J_3$ . A partir do segundo período, em  $J_2$ , Diego nota a possibilidade de evidenciar o fator correspondente ao *Capital* ( $C$ ) obtendo formula  $J_3 = \dots = \dots = C \times [(i \times t_1 + 1) \times (i \times t_2 + 1)]^{17}$ .

<sup>17</sup> Na realidade o aluno não elabora a fórmula até  $t_3$ .

**Figura 43:** Desenvolvimento da fórmula do *Montante* para *Juros Compostos*

Problemas 01

$$J_1 = C \cdot i \cdot t_1$$

$$J_2 = (C \cdot i \cdot t_1 + C) \cdot i \cdot t_2$$

$$J_3 = [(C \cdot i \cdot t_1 + C) \cdot i \cdot t_2 + C] \cdot i \cdot t_3 = [C \cdot (i \cdot t_1 + 1) \cdot i \cdot t_2 + C] = C \cdot [(i \cdot t_1 + 1) \cdot (i \cdot t_2 + 1)]$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao desenvolver a fórmula para Juros Compostos, o aluno Diego parte da fórmula já estabelecida para o cálculo dos Juros Simples. Nota-se que a primeira fórmula indicada por  $J_1 = C \times i \times t_1$  corresponde ao cálculo dos Juros Simples, com a indicação do fator *Tempo* por  $t_1$ . Tomo a liberdade de explicar o desenvolvimento da fórmula proposta pelo aluno Diego no Quadro 17 que segue.

**Quadro 17<sup>18</sup>** - Desenvolvimento da fórmula dos *Juros Compostos*

Proposta do aluno Diego	
Desenvolvimento	$J_1 = C \times i \times t_1$ <p>Fórmula dos Juros Simples para o primeiro período de <i>Tempo</i>.</p>
	$J_2 = (C \times i \times t_1 + C) \times i \times t_2$ <p>A expressão <math>(C \times i \times t_1 + C)</math>, corresponde ao <i>Montante</i> após o primeiro período, e sobre esse são calculados os Juros correspondentes ao segundo período.</p>
	$J_3 = [(C \times i \times t_1 + C) \times i \times t_2 + C] \times i \times t_3$ <p>A expressão entre colchetes corresponde ao <i>Montante</i> após o segundo período e sobre esse é calculado os Juros correspondente ao terceiro período.</p>
	$= [C \times (i \times t_1 + 1) \times i \times t_2 + C]$ <p>Os ajustes à fórmula concentram-se na expressão anterior onde o <i>Capital</i> "C" é colocado em evidência.</p>
	$= C \times [(i \times t_1 + 1) \times (i \times t_2 + 1)]$ <p>Novamente o "C" foi posto em evidência em relação à expressão anterior, resultando em uma expressão que representa a fórmula do <i>Montante</i> até o segundo período (<math>t_2</math>).</p>

Fonte: Dados da pesquisa

<sup>18</sup> Esse desenvolvimento está baseado no manuscrito apresentado na Figura 43.

Ao chegar à fórmula<sup>19</sup>  $J_3 = C \times [(i \times t_1 + 1) \times (i \times t_2 + 1)]$ , o aluno argumenta que a relação estabelecida na Planilha Eletrônica (Fig. 53) estava errada, pois estava faltando o termo (+1) resultante da evidência em relação a  $C$  e convida os colegas para verificarem a nova fórmula na Planilha Eletrônica (Fig. 44).

**Figura 44:** Verificação da fórmula  $J_3 = C \times [(i \times t_1 + 1) \times (i \times t_2 + 1)]$

	A	B	C
1	Capital	R\$ 1.200,00	
2	tempo/m	6	
3	taxa/m	7,5	0,075
4	Juros	R\$ 1.297,30	
5	Montante	R\$ 2.497,30	
6			
7			
8			
9			

Fonte: Dados da pesquisa

Ao achar o valor do Juro Composto, Diego estabelece uma relação entre esse valor e o *Capital*, determinando assim o *Montante*, como está indicado na célula B5 “=B4+B1”, na figura anterior.

<sup>19</sup> A referida fórmula representa o Montante para  $t_2$ , no decorrer das discussões isso foi evidenciado.

Na sequência Diego pergunta à colega Agatha, membro de outra dupla, se ela havia feito o “Problema 1” relativo a juros compostos e qual o valor encontrado.

**Agatha:** *O juros deu R\$ 651,91.*

**Diego:** *[...] então não sei fazer não!*

**Agatha:** *Por que, como você tá fazendo? [...] Como você fazia antes, antes de começar a falar de juros? Você não coloca taxa sobre taxa? Você não fazia: valor inicial [...] vezes, um (1) mais a taxa; vezes, um (1) mais a próxima taxa? Só que agora a taxa é a mesma, pois agora você tem que fazer várias vezes, você faz o número de tempo. Entendeu?*

**Diego:** *Eu entendi mais ou menos.*

**Agatha:** *É só usar essa fórmula que da certinho.*

O aluno tem dificuldade de relacionar a fórmula do *acrécimo sucessivo* que sua colega sugeriu, pois não participou do encontro em que esse tema foi trabalhado e pede a ela que analise sua fórmula.

**Diego:** *E essa aqui, da uma olhada nessa aqui.*

**Agatha:** *O que você está fazendo? [...] Capital vezes  $i$ , vezes tempo um ( $t_1$ ). Que tempo um ( $t_1$ ) é esse? Um mês?*

**Diego:** *É.*

**Agatha:** *Vezes um (1)? Mas não precisa por.*

**Diego:** *Ok, tudo bem, mas aí [...] só tá indicado.*

**Agatha:** *Aí você pega isso e faz [...] vezes  $i$  [...]*

**Diego:** *Mais  $C$ , que é o Montante, vezes  $i$ , vezes tempo 2 ( $t_2$ ).*

**Agatha:** *E qual o  $t_2$  agora? Dois (2)?*

**Diego:** *Dois. Isso! Tá indo para “ $n$ ” igual a 6.*

**Agatha:** *Não, não faz sentido isso.*

**Diego:** *Ah! Eu não sei.*

Agatha insiste ainda que Diego retome o conceito de *acrécimos sucessivos* visto nos encontros anteriores e ele argumenta que faltou nesse dia e em tom de brincadeira disse que deixaria assim, pois havia gostado do valor.

Na sequência a dupla solicita minha atenção. Assim, peço ao aluno Diego que me explique o que havia pensado ao elaborar a fórmula em seu portfólio e junto à Planilha Eletrônica.

**Diego:** *Juros um ( $J_1$ ) é igual ao Capital ( $C$ ) vezes o  $i$ , vezes o tempo  $t_1$ .*

**Vinicius M:** *Está ok.*

**Diego:** *Juros dois ( $J_2$ ) vai ser o Montante aplicado à taxa, vezes o  $t_2$ . Não é o que você tinha dito?*

**Vinicius M:** *Sim.*

**Diego:** *Então Montante é isso ( $C \times i \times t_1$ ) mais o  $C$ . Não é? E assim por diante, eu fiz até o 3 (terceiro período). Daí do 3 eu cheguei num negócio assim:  $J_3 = [(C \times i \times t_1 + C) \times i \times t_2 + C] \times i \times t_3$ .*

**Vinicius M:** *Só que aqui tu estás calculando o juro direto.*

**Diego:** *Isso, Juros.*

Após essa explicação, o aluno mostra a aplicação da fórmula junto à Planilha Eletrônica: “=B1\*(((C3\*1+1)\*C3\*2+1)\*C3\*3+1)\*C3\*4+1)\*C3\*5+1)\*C3\*6+1)”.

**Diego:** *Aqui vai ser Capital (B1) vezes taxa (C3), vezes o mês que um (1) [...]*

**Vinicius M:** *[...] Se tu fizeres o Capital vezes a taxa mais um (1), tu irás encontrar o Montante.*

**Diego:** *Tá, mas não era sobre o Montante que você estava falando?*

**Vinicius M:** *Ok, tem a fórmula do Montante e a fórmula dos Juros.*

**Diego:** *Sim, mas você não falou que o  $J_2$  não seria em cima do Montante um (1)?*

**Vinicius M:** *Os Juros, sim!*

**Diego:** *Então não entendi.*

**Vinicius M:** *É o rendimento, o que “passa”, o que acrescenta, o extra é em cima do Montante um (1).*

A aluna Agatha acompanha essa discussão e intervém:

**Agatha:** *Então é o que tem aí.*

**Vinicius M:** *Onde? Aqui tu estás garantido que será somando (aponto para o +1).*

**Diego:** *Não! Por que eu coloquei em evidência aqui. Aqui ia ficar o Montante vezes a taxa vezes o tempo ( $J_1 = C \times i \times t_1$ ). [...] Mas aqui eu vou querer o do outro também ( $J_2 = (C \times i \times t_1 + C) \times i \times t_2$ ). [...] Isso aqui é o Juros, mas como eu estou aplicando sobre o Montante eu somo mais C.*

Na tentativa de mudar o foco da discussão questiono:

**Vinicius M:** *O que é esse  $t_2$ ?*

**Diego:** *É o  $t_2$ .*

**Agatha:** *Ele tá dividindo tempo em  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  até o 6.*

**Diego:** *Até o tempo n igual a 6.*

**Vinicius M:** *Mas qual será o valor de cada t?*

**Agatha:** *Um, vai sempre um (1).*

A partir disso, Diego alterou a relação junto a Planilha Eletrônica, substituindo todos os tempos pelo valor 1 obtendo: “=B1\*(((C3\*1+1)\*C3\*1+1)\*C3\*1+1)\*C3\*1+1)\*C3\*1+1)\*C3\*1+1)”. Na sequência, percebe que a multiplicação por 1 (um) não terá efeito e altera novamente a relação para: “=B1\*(((C3+1)\*C3+1)\*C3+1)\*C3+1)\*C3+1)\*C3+1)”. Percebendo que o (C3+1) está repetindo 6 vezes, e altera a relação para: “=B1\*(C3+1)^6”.

Ao verificar o resultado R\$ 1851,96 em B4, que indica Juros, ele o compara com o resultado encontrado em B5, R\$ 3051,96, que indica o Montante, e argumenta que ainda não está correto o cálculo realizado. Nesse momento chamo atenção para o meu argumento anterior junto à discussão do Montante, ou seja, que ao somar C ao final da fórmula teríamos o Montante correspondente ao período

seguinte, mesmo ele aparecendo somente uma vez, pelo recurso de cálculo da evidência.

Para o desenvolvimento dessa Atividade Investigativa, percebemos o aluno formulando e testando conjecturas que podem surgir de diversas formas:

por exemplo, por observação directa dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas. Esse trabalho indutivo tende, por vezes, a ficar confinado ao pensamento do aluno, não existindo uma formulação explícita da conjectura [...]. Outras conjecturas são apenas parcialmente verbalizadas, existindo uma linguagem gestual que completa aquilo que não é dito. [...]. Daqui decorre a importância da realização de um registro escrito do trabalho de investigação. É somente quando se dispõem a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 33).

Percebemos o aluno Diego utilizando-se do registro escrito na análise do que estava propondo aos demais colegas com a convicção de que estes perceberiam o mesmo resultado. Da mesma forma usou a Planilha Eletrônica como estratégia para convencer seus pares de sua proposta por meio da validação de suas conjecturas. Em outras palavras, estas ações são apropriadas para mostrar como o pensamento é reorganizado com a presença das tecnologias da informação, nesse caso as Planilhas Eletrônicas, e os tipos de problemas gerados por grupos que incluem os seres humanos e mídias, como papel e lápis, ou várias tecnologias de informação (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Na sequência Diego se volta à colega Fernanda e explica o que foi realizado, alterando suas anotações no portfólio, como pode ser visto na Figura 45.

**Figura 45:** Reinterpretação da fórmula

Problemas 01

$$J_1 = C \cdot t$$

$$J_2 = (C \cdot t_1 + C) \cdot t_2$$

$$J_3 = [(C \cdot t_1 + C) \cdot t_2 + C] \cdot t_3 = [C \cdot (t_1 + 1) \cdot t_2 + C] = C \cdot [(t_1 + 1) \cdot (t_2 + 1)]$$

$$M = C \cdot [i + 1]^t$$

Fonte: Dados da Pesquisa

Na última linha do desenvolvimento da fórmula (Fig. 45) existe um espaço em branco, onde suponho que tenha havido parte do desenvolvimento da fórmula, e que

possivelmente foi apagado, após a verificação junto à Planilha Eletrônica da fórmula e as discussões entres os colegas e professor, levando o aluno a associar as ocorrências do fator de *acréscimo*  $[i + 1]$  ao prazo  $t$ , ou seja, na forma de uma potência  $[i + 1]^t$ .

Nesse caso percebe-se que, no desenvolver da Atividade Investigativa, o sucesso obtido ao final da mesma está ligado ao ambiente de aprendizagem criado em sala de aula, o que oportuniza ao aluno momentos para explorar suas ideias e exprimi-las a seus colegas e professor, dando-lhe tempo para pensar e colocar questões pertinentes ao assunto (PONTE; BROCCADO; OLIVEIRA, 2003). Nesse sentido, também, nota-se que as Planilhas Eletrônicas ou, em termos gerais, as tecnologias utilizadas “estão estruturando, ao mesmo tempo em que são estruturadas pelo grupo que as usam” (BORBA, 1999), ou seja, nesse caso houve a reorganização do pensamento por parte do aluno possibilitando-o refletir e alterar suas conjecturas e estruturar relações estabelecidas em sua fórmula.

Com a apresentação e análise dos dados, aqui realizada, finalizo esse capítulo que teve por objetivo buscar indícios para ressaltar como se configuram as estratégias empregadas pelos alunos ao desenvolverem Atividades Investigativas acerca de conceitos de Matemática Financeira, mediadas pelas Planilhas Eletrônicas.

Após todas as situações apresentadas neste capítulo, algumas reflexões relevantes surgem na análise dos dados. Resumidamente, pode-se elencar algumas dessas reflexões. Em primeiro lugar, fica clara a importância do desenvolvimento de Atividades Investigativas, pois acredito que temos evidências para pensar que o processo de investigação matemática é significativamente mais profícuo quando se pode explorar e formular questões, quando se pode examinar uma situação problema, elaborar conjecturas e organizar dados. Além disso, os testes de reformulação propiciam um maior refinamento das hipóteses elaboradas pelos alunos, esse refinamento beneficia a avaliação dessas hipóteses e os seus resultados. E ainda, ao utilizarem mídias como lápis e papel para esboçar rascunhos e cálculos em seus portfólios e ao utilizarem a Planilha Eletrônica para criar estratégias na elaboração e testes de relações e de um considerável número de hipóteses, os alunos foram mais ágeis tanto na realização quanto na análise dos cálculos. Por fim, como resultado didático, importante para a prática docente, notou-

se que a comunicação entre os alunos, professor e as mídias foi um acontecimento relevante e positivo. Essa interação proporcionou discussões e a reorganização de conceitos e, possivelmente, a produção de conceitos em relação às temáticas da Matemática Financeira.

## 4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

*Ora, está longe de ser óbvio de um ponto de vista lógico, haver justificativa no inferir enunciados universais de enunciados singulares, independentemente de quão numerosos sejam estes; com efeito, qualquer conclusão colhida desse modo sempre pode revelar-se falsa; independentemente de quantos cisnes brancos possamos observar, isso não justifica a conclusão de que todos os cisnes são brancos (POPPER, 1985, p. 27/28).*

### 4.1 Introdução

Este capítulo é destinado à discussão dos dados e resultados, apresentados no capítulo anterior. Tal discussão está pautada pela teoria de reorganização do pensamento proposta por Tikhomirov (1981) e pelo construto teórico seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005), onde as tecnologias, em particular softwares computacionais, possuem um papel central no processo de produção do conhecimento, levando também em consideração o cenário das Atividades Investigativas (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003).

Essa discussão de resultados, baseada na análise dos dados, tem como objetivo responder a questão diretriz dessa pesquisa.

*Como se apresentam as estratégias empregadas pelos alunos ao fazerem uso de planilhas eletrônicas, no desenvolvimento de atividades investigativas em Matemática Financeira?*

A análise inicial e exploratória dos dados que ocorreu ao longo da organização do Capítulo 3 está centrada nas abordagens feitas pelos alunos na realização de tarefas investigativas onde descrevo as ações e as interpretações durante a Atividade Investigativa que levou os alunos a apresentarem estratégias no uso de Planilhas Eletrônicas. Esse processo de organização e compreensão dos dados como afirma Alves-Mazzotti (2004),

se faz através de um processo continuado em que se procura identificar dimensões, categorias, tendências, padrões, relações, desvendando-lhes o significado. Este é um processo complexo, não-linear, que implica um trabalho de redução, organização e interpretação dos dados que se inicia já na fase exploratória e acompanha toda a investigação (ALVES-MAZZOTTI 2004, p.170).

Dessa forma, neste Capítulo, aprofundo a análise para caracterizar como ocorreu o emprego de estratégias no uso de Planilhas Eletrônicas diante dos entendimentos dos alunos ao realizarem as tarefas investigativas baseadas no estudo de tópicos da Matemática Financeira.

Uma ocorrência que surge, na análise dos dados dessa pesquisa, é a que se refere à organização das informações e dos dados numéricos das tarefas investigativas junto a Planilha eletrônica tendo como objetivo a busca por resultados. Acredito que esse fato esteja ligado à apresentação das tarefas, ou seja, ao formato das questões a serem investigadas, uma vez que em um primeiro momento se constituem de problemas específicos contendo dados numéricos, evoluindo para questões abertas com o objetivo de formalizar o conhecimento apreendido durante o processo investigativo. Outra influência para tal ocorrência pode estar ligada a uma prática cultural que tem origem na escola, ou seja, por experiências já vividas pelos estudantes durante a escolarização e, assim como Javaroni (2007),

Acredito que esse fato tem origem em experiências relacionadas com a mídia “lápiz e papel” e com o formalismo do tratamento matemático, frequentemente empregados nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, de forma geral, em toda a graduação (JAVARONI, 2007, p. 151).

Outra característica presente nas abordagens analisadas está ligada ao processo investigativo a partir da elaboração de conjecturas realizadas pelos alunos nas discussões das Atividades Investigativas. Essas discussões têm origem nas tarefas abertas de formalização do conhecimento onde suas conjecturas são testadas, refutadas ou confirmadas, tendo em alguns casos o uso exclusivo da Planilha Eletrônica e em outros a utilização de um planejamento valendo-se do “lápiz e papel” e da Planilha Eletrônica para formalização de suas ideias.

Outro fato apresentado, presente nas estratégias empregadas pelos alunos, ao fazerem uso de Planilhas Eletrônicas é a reorganização de suas abordagens evoluindo para a criação de recorrências matemáticas. Esse fato decorreu da consciência das possibilidades do uso dos recursos presentes na Planilha Eletrônica, aliado às experiências com a mesma e aos conhecimentos matemáticos validados por elas.

Dessa forma centro a discussão nas seguintes temáticas: busca por resultados e organização dos dados; análise e validação de conjecturas, e

experimentação com a reorganização de abordagens. Destaco, ainda, que a partir da leitura da descrição analítica dos dados apresentada no capítulo anterior, poderão surgir novas interpretações e serem observadas, outras temáticas que possam ser julgadas relevantes partindo da visão de cada leitor.

#### **4.2 Busca por resultados e a organização de dados**

Uma das características dos alunos que participaram dessa pesquisa é que são provenientes, em sua maioria, do primeiro ano do curso da graduação em Matemática da UNESP, campus Rio Claro/SP. Isso pode suscitar um grande entusiasmo na realização de um curso com o uso das TIC, em especial o computador e o *software* das Planilhas Eletrônicas Excel.

Outra característica que pode ser observada em boa parte desses alunos é a dualidade entre o *Espírito Contemporâneo da Matemática* que é o da complexidade e da incerteza, e que cada vez mais ocupa-se de modelos não determinísticos, com o do *Espírito da Matemática Escolar* que é o da unicidade de caminhos e da exatidão, onde se cultiva a crença de que os resultados matemáticos são sempre únicos e definitivos (RUIZ, 2001).

Analisando os dados, nota-se o ir e vir entre essas duas formas de perceber a Matemática. Isso pode ser observado a partir das tarefas investigativas com um foco específico, as quais se caracterizam por problemas. Tem-se, assim, a grande maioria dos alunos optando por organizar os dados pertencentes aos problemas nas células da Planilha Eletrônica e posteriormente realizando cálculos entre essas. Essa estratégia certamente cumpre com objetivo principal que seria o de encontrar uma resposta, com procedimentos lógicos que os levem a um resultado válido para o problema proposto.

Com isso percebe-se um processo heurístico que, para Bruner (1976), é um método não rigoroso de conseguir soluções para problemas mesmo que esse processo leve diversas vezes a uma solução, o mesmo não oferece garantia alguma de fazê-lo. Contudo, com o uso de um algoritmo, o processo de resolver um problema pode ser garantido, sempre que o seguirmos com precisão e que a solução do mesmo também exista. Os processos heurísticos estão presentes na elaboração dos algoritmos e seu domínio garante agilidade na construção desses.

Podemos observar na Figura 46, lado esquerdo, a organização dos dados e o uso de um processo heurístico e, do lado direito, o uso do algoritmo para o cálculo do Valor Final com *acréscimo*. Em um primeiro momento somos levados a crer que com o emprego dessa estratégia, a Planilha Eletrônica apresenta o mesmo processo heurístico do pensamento humano, ou seja, computador parece assumindo o lugar do ser-humano. Contudo, Tikhomirov (1981) discorda da ideia de substituição, pois em seus estudos as heurísticas do computador se parecem às humanas, são mais simples e são comparáveis em seus fundamentos. Um ponto a ser observado para essa contestação se baseia em uma visão de conhecimento onde a escolha do problema tem importância e está relacionada com seus contextos socioculturais (BORBA, 1999).

**Figura 46:** Exemplo do processo heurístico

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		<b>Processo Heurístico</b>				<b>Uso do Algoritmo</b>		
2		Exercício 2						
3						Fórmulas		
4		Principal	R\$	123,00	<b>=C5*C6</b>	Va=P+(P*i)	Va=P*(1+i)	
5		Taxa		8%				
6		Acréscimo	R\$	9,84				<b>=C5*(1+C6)</b>
7		Valor com Ac	R\$	132,84	<b>=C5+C7</b>		R\$ 132,84	
8								
9		Exercício 3						
10						Fórmulas		
11		Principal	R\$	321,00	<b>=C13*C14</b>	Va=P-(P*i)	Va=P*(1-i)	
12		Taxa		4,5%				<b>=C13*(1+C14)</b>
13		Acréscimo	R\$	14,45				
14		Valor com De	R\$	306,56	<b>=C13-C15</b>		R\$ 306,56	
15								
16								
17								

Fonte: Dados da pesquisa.

A estratégia de organização dos dados e busca por resultados apresentou-se com frequência nas primeiras abordagens das duplas. Como podem ser observadas, no terceiro capítulo, principalmente nas abordagens das duplas Alex e Juliana, e Vinicius e Fábio.

A dupla Alex e Juliana evidencia essa estratégia com a organização dos dados e o cálculo do resultado do *Valor Final (VF)* com *acréscimo*, assim como a ocorrência do processo heurístico nas células C3 e D3, como pode ser visto na Figura 47.

**Figura 47:** Primeiras abordagens de Alex e Juliana

	A	B	C	D
1	Exercicio A			
2	Taxa(i)	Principal(P)	Porcentagem(p)	Valor final com acrescimo
3	0,08	R\$ 123,00	R\$ 9,84	R\$ 132,84

Fonte: Dados da pesquisa

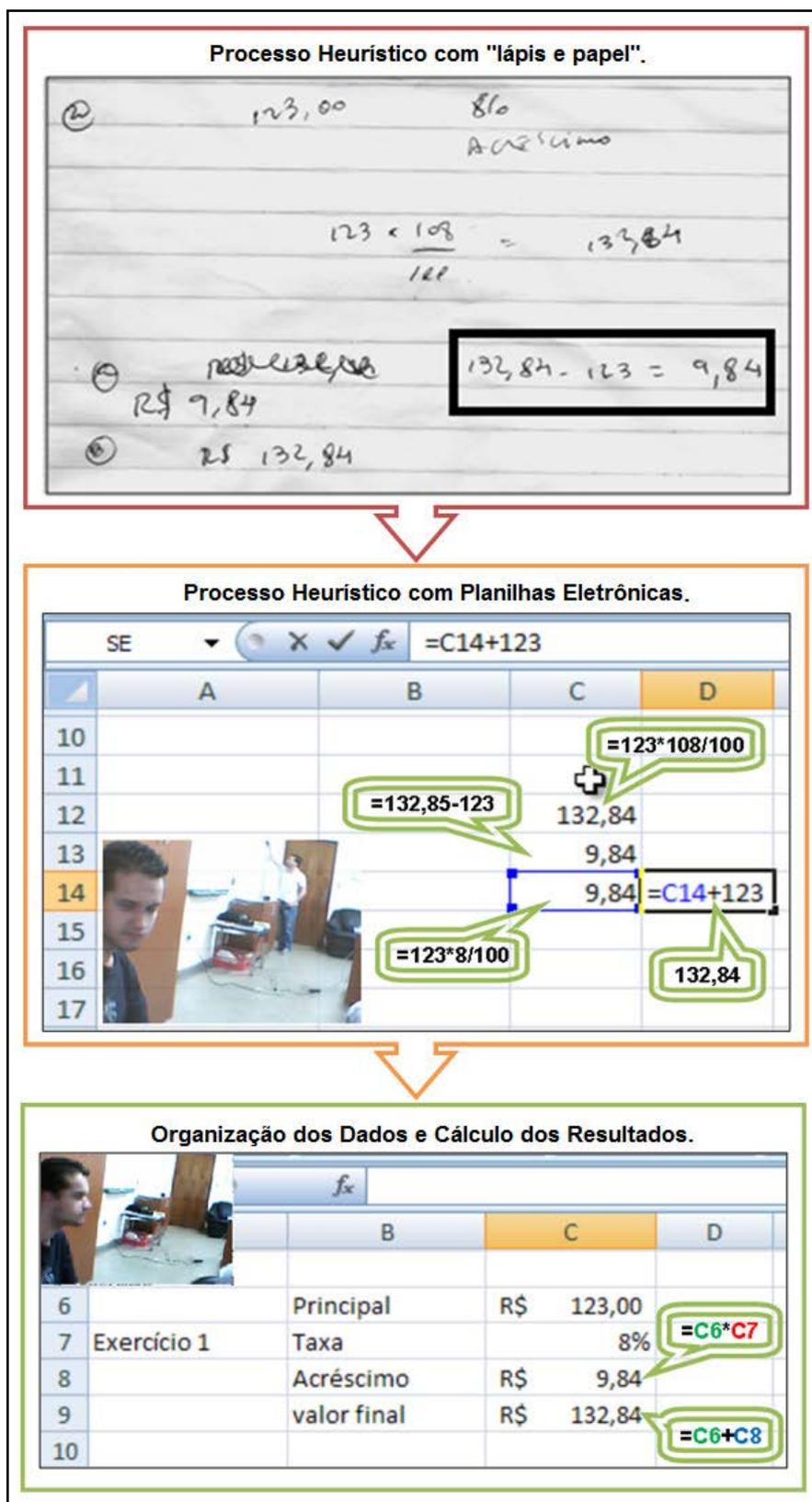
Nota-se que a estratégia utilizada para o cálculo do VF com *acréscimo* foi: organizar e identificar os dados na Planilha Eletrônica Excel, efetuar cálculos que geram novos dados, como o valor da *Porcentagem*, e por fim, por meio de uma soma, encontrar o resultado final pretendido.

De forma semelhante, a dupla Fábio e Vinicius utilizou a mesma estratégia, onde o processo heurístico ocorre primeiramente no portfólio, com o uso de “lápiz e papel”, e na sequência esse processo é verificado junto à Planilha Eletrônica. Isso ocorre com a mediação e explicação dos cálculos realizados pelo aluno Vinicius e seu colega Fábio da seguinte forma:

**Vinicius:** *R\$123,00 vezes 108%, mas 108% é 100 mais 8. Você quer saber quanto é 8% disso. Certo? Então vai fazer vezes 8 dividido por 100. Certo? Então tu vai saber o 8%. Só que aí tu acrescentou no valor total, que é 100%.*

A abordagem da dupla culmina com a organização dos dados e cálculo do resultado pretendido junto à Planilha Eletrônica, pois os alunos demonstram interesse em usá-la de forma que seus procedimentos sejam facilmente explicados e compreendidos. Essas etapas podem ser observadas na Figura 48 a seguir.

**Figura 48:** Primeiras Abordagens de Fábio e Vinicius



Fonte: Dados da pesquisa

Finalizando tem-se que a estratégia de usar as Planilhas Eletrônicas para organizar dados e encontrar resultados permanece ao longo das demais abordagens sobre os tópicos da Matemática Financeira, contudo o objetivo dos alunos mudou, passando de achar uma resposta a encontrar uma fórmula que lhes desse a resposta; para isso a organização dos dados junto à Planilha Eletrônica se fez presente na criação e verificação de conjecturas.

### **4.3 Análise e validação de conjecturas**

Para Ponte, Brocado e Oliveira (2003), a investigação vista pelos matemáticos profissionais é um processo de “descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (p. 13). Nesse sentido, nota-se que ao desenvolverem as tarefas os alunos se apropriam desse processo mesmo que inconscientemente, pois ao longo das Atividades Investigativas suas abordagens foram se modificando. Inicialmente temos os alunos na busca simples de um resultado numérico em vista de um problema específico e essa postura se modifica à medida que percebem problemas mais gerais. Ou seja, há uma busca por uma generalização que lhes permita chegar ao resultado numérico pretendido não somente para um dado problema, mas para qualquer outro que se refira ao estudo em questão.

Esse processo de investigação matemática é dinâmico e sugere quatro momentos em sua realização:

O primeiro envolve o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. Estes momentos surgem, muitas vezes, em simultâneo: a formulação das questões e a conjectura inicial, ou a conjectura e o seu teste, etc. (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 20).

Os dados apresentados no terceiro capítulo nos mostram esse processo, pois os alunos se envolvem no reconhecimento das situações a serem investigadas em abordagens preliminares. Com o aparecimento de uma questão mais ampla, com a intenção de formalização, se começa um processo de formulação de questões e

conjecturas e, conseqüentemente, surge a necessidade de testes e refinamento dessas. Os autores esquematizam em um quadro esses momentos:

Quadro 18 - Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Reconhecer uma situação problemática</li> <li>▪ Explorar a situação problemática</li> <li>▪ Formular questões</li> </ul>
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Organizar dados</li> <li>▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)</li> </ul>
Testes e reformulação	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Realizar testes</li> <li>▪ Refinar uma conjectura</li> </ul>
Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Justificar uma conjectura</li> <li>▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio</li> </ul>

Fonte: (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 21)

Notamos, no item 4.2 desse capítulo, que a organização dos dados possibilitou aos alunos desenvolver um processo heurístico na resolução dos problemas. De forma análoga Ponte, Brocado e Oliveira (2003) aliam a organização dos dados com a formulação de conjecturas e, na seqüência, com testes e refinamentos que permitam sua validação. Esses momentos podem ser mediados por mídias eletrônicas, em especial, as Planilhas Eletrônicas.

Para Tikhomirov (1981), o computador possibilita *feedback* imediato com a realização de cálculos, promovendo a organização de informações sobre resultados diretos para as atividades humanas que muitas vezes não podem ser observados externamente, modificando dessa forma a produção de conhecimento. Esse processo modifica a estrutura da atividade intelectual humana, reorganizando os processos de pensamento notados em ações como na busca e tratamento de informações e a confirmação e validação de conjecturas.

Nesse sentido, Borba e Villarreal (2005) propõem uma abordagem experimental-com-tecnologias onde o problema deve possibilitar que conjecturas surjam, assim como a realização de procedimentos de experimentação, para que se possa conceber argumentações, validar ou refutar as hipóteses inicialmente concedidas. Essa abordagem pode se fazer presente em todos os momentos de

uma investigação e, em especial, ocorreu na elaboração de conjecturas e seus testes e validação por meio das Planilhas Eletrônicas, presentes nesse trabalho. Souto (2013) defende, ainda, que

Essa abordagem está em harmonia com a noção de seres-humanos-com-mídias, pois o *feedback* dado pelas mídias informáticas durante uma experimentação pode gerar debates, discussões, questionamentos, ideias e diferentes possibilidades para a solução do problema em questão. Tudo isso, permeado por uma perspectiva de trabalho coletivo e colaborativo, já que, nessa visão, humanos e mídias formam uma unidade que produz conhecimento (SOUTO, 2013, p. 103/104).

Portanto a análise e validação de conjecturas apresentam-se como uma estratégia que se evidencia em algumas abordagens dos alunos na realização das tarefas investigativas com uso das Planilhas Eletrônicas ao longo do capítulo anterior.

Prova disso é a discussão sobre a elaboração da fórmula do *Valor Final (VF)* com *acréscimo* promovida pela dupla Alex e Juliana. A hipótese foi testada e refutada, levando os alunos a uma análise do que foi elaborado e, na sequência, a criação de uma fórmula que é validada, também, com o uso da Planilha Eletrônica. Podemos observar esse processo no quadro a seguir contendo uma sequência resumida de imagens das Planilhas e do diálogo dos alunos.

**Quadro 19** - Análise e validação feita por Alex e Juliana

Refutação da fórmula  $VF = (P \times i) + p$

Análise da fórmula  $VF = (P \times i) + p$ :

**Alex:** *Aqui vai ser A3, a taxa vezes o Principal, mais Porcentagem.*

**Juliana:** *mas não! [...] Aqui em vez de p-zinho é P-zão.*

**Alex:** *Ah entendi! Aqui é P-zão e não p-zinho.*

Validação da fórmula  $VF = (P \times i) + P$

Fonte: Dados da pesquisa

Com essa abordagem percebemos os momentos do processo de investigação onde se tem a exploração da situação problema, a organização dos dados e formulação de conjecturas, teste e refinamento de hipóteses e discussão para avaliar e validar o raciocínio. Esse processo ocorre com a mediação da Planilha Eletrônica e por meio de um coletivo formado por humanos e mídias em uma unidade que produz conhecimento.

Evidência disso ocorre, também, no cálculo do Valor Final com *acréscimos Sucessivos*. A dupla certificou-se do valor, por meio de uma série de processos heurísticos junto à Planilha Eletrônica e, na sequência, desencadeiam a criação de conjecturas que são aprimoradas, resultando em uma relação entre os dados e fornecendo o valor correto. A criação de hipóteses e sua validação ocorrem junto à Planilha Eletrônica, como podemos observar pelo diálogo a seguir:

**Juliana:** *Sabe o que eu pensei em fazer. [...] Eu pensei assim em colocar, já, esse valor com desconto e aí tirar esse desconto. [...] menos o Valor Principal. Tu vai ter que por tudo em parênteses.*

**Alex:** *mas esse segundo desconto de 0,03 não posso colocar aqui dentro. Aqui dentro eu “tô” fazendo o primeiro [...]*

Analisando a discussão temos que os argumentos usados passam por imediata validação junto à Planilha Eletrônica, pois os termos “colocar” e “dentro” referem-se às células que contém os dados do problema. Dessa forma, ocorre uma rápida validação que remete a um *feedback* imediato com a realização dos cálculos, gerando novos argumentos e, conseqüentemente, uma reorganização do pensamento (TIKHOMIROV, 1981).

O *feedback* proporcionado pela Planilha Eletrônica pode ser percebido na Figura 49, a seguir, onde está presente a construção de uma relação válida para obtenção do *Valor Final* após dois *descontos sucessivos*, em que as conjecturas são validadas e ajustadas conforme os cálculos obtidos junto às células da Planilha Eletrônica. Temos em seqüência: (1º) o cálculo do  $VF_1$  após o primeiro *desconto* com a *Taxa* de 2,5% ( $i_1$ ); (2º) o cálculo do segundo *desconto*  $p_2$  para a *Taxa* de 3% ( $i_2$ ); (3º) o cálculo do  $VF_2$  após o segundo *desconto*; e, na quarta etapa, o ajuste da relação para correção do sinal para o  $VF_2$ .

Figura 49: O feedback proporcionado pela Planilha Eletrônica

C16		fx		=(B16-(B16*A16))	
A	B	C	D		
13	(1°)	$VF_1 = P - (P \times i_1)$			
14					
15	Taxa(i)	Principal(P)			
16	0,025	R\$ 250,00	R\$ 243,75		
17	0,03				

C16		fx		=(B16-(B16*A16))*A17	
A	B	C	D		
13	(2°)	$p_2 = (P \times (P \times i_1))$			
14					
15	Taxa(i)	Principal(P)			
16	0,025	R\$ 250,00	R\$ 7,31		
17	0,03				

C16		fx		=((B16-(B16*A16))*A17)-(B16-(B16*A16))	
A	B	C	D		
12	(3°)	$VF_2 = (P - (P \times i_1) \times i_2) - \overbrace{(P - (P \times i_1))}^{VF_1}$			
13		$p_2$			
14					
15	Taxa(i)	Principal(P)			
16	0,025	R\$ 250,00	-R\$ 236,44		
17	0,03				
18					

C16		fx		=((B16-(B16*A16))-(B16-(B16*A16))*A17)	
A	B	C	D		
12	(4°)	$VF_2 = \overbrace{(P - (P \times i_1))}^{VF_1} - (P - (P \times i_1) \times i_2)$			
13		$p_2$			
14					
15	Taxa(i)	Principal(P)			
16	0,025	R\$ 250,00	R\$ 236,44		
17	0,03				

Fonte: Dados da pesquisa

#### 4.4 Explorações: reorganização de abordagens

A abordagem experimental-com-tecnologia, proposta por Borba e Villarreal (2005), além de propiciar uma agilidade no tratamento das informações levando a um rápido *feedback*, promove diferentes tipos de representações de uma dada situação com mais facilidade, assim como uma abordagem pedagógica ressonante com a Modelagem Matemática. A similaridade dessa abordagem pedagógica com a das Atividades Investigativas em Matemática em conjunto com o uso dos recursos do *software* da Planilha Eletrônica, foram utilizados de modo que, ao pensar com eles, os alunos elaboraram conjecturas e refletiram sobre os conceitos matemáticos.

Nesse processo, temos a exploração do modelo informático de forma interativa, pois ele “é essencialmente plástico, dinâmico, dotado de uma certa autonomia de ação e reação” (LÉVY, 1993, p. 122). As explorações podem ocorrer ao longo de processos de tentativa e erro que desenvolvem habilidades no manuseio do modelo digital proporcionando seu maior aproveitamento. Para além disso, o mais relevante nesse processo certamente é o benefício cognitivo, pois para Lévy (1993)

A manipulação dos parâmetros e a simulação de todas as circunstâncias possíveis dão ao usuário do programa uma espécie de intuição sobre relações de causa e efeito presente nos modelos. Ele adquire um *conhecimento por simulação* do sistema modelado, que não se assemelha nem a um conhecimento teórico, nem a uma experiência prática, nem ao acúmulo de uma tradição oral (LÉVY, 1993, p. 123/124).

A abordagem experimental-com-tecnologia possibilita aos alunos desenvolverem Atividades Investigativas relacionadas aos conteúdos de suas tarefas com a manipulação de *softwares*, que, por sua vez, poderá caracterizar a produção um *conhecimento por simulação*, gerando, assim, oportunidades aos estudantes de elaborarem conjecturas, propiciando situações que os levem a reflexões sobre o objeto de estudo.

Nesse sentido nota-se que à medida em que os alunos foram se familiarizando com os recursos do *software* da Planilha Eletrônica Excel e incorporando o propósito da investigação matemática, suas ações foram modificadas, passando de um estágio elementar do uso do *software*, ou seja, da busca por uma resposta numérica ou por validação de suas propostas para uma situação de exploração das possibilidades presentes no modelo digital, Planilha

Eletrônica, desenvolvendo estruturas diretamente relacionadas a “aquilo que consideramos, intuitivamente, como sendo os atores efetivos em um ambiente ou situação dados” (LÉVY, 1993, p. 125), reorganizando suas abordagens iniciais.

Exemplo disso têm-se nas abordagens desenvolvidas pela dupla Fábio e Vinicius ao realizarem as tarefas de *porcentagem*, *acréscimos* e *descontos*. Vinicius parte de uma abordagem heurística explicando a Fábio seu pensamento:

**Vinicius:** 108%. Seria 8% do valor. Certo? Mais o valor total que corresponde a 100%.

**Fábio:** Ah! Tu já fez direto.

**Vinicius:** R\$123,00 vezes 108%, mas 108% é 100 mais 8. Você quer saber quanto é 8% disso. Certo? Então vai fazer vezes 8 dividido por 100. Certo? Então tu vai saber o 8%. Só que aí tu acrescentou no valor total, que é 100%.

Os alunos inicialmente organizam os dados e encontram os valores corretos. Em seguida usam os dados organizados para a construção de uma fórmula, testando suas conjecturas. Por fim, percebem que a relação estabelecida entre os dados inseridos nas células pode ser interpretada de outra forma, ou seja, por meio de cálculos equivalentes, como podemos observar na figura abaixo:

**Figura 50:** Explorando a relação de *acrécimo* e *desconto*

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Principal(P)	R\$ 52.000,00			$= F3 * \left( \frac{100 + F4}{100} \right)$
3	Exercício	Taxa(i)	10%	$= B2 * B3$		R\$ 52.000,00
4		Porcentagem(p)	R\$ 5.200,00		R\$ 5.200,00	-90
5						
6		Principal	R\$ 123,00			
7	Exercício 1	Taxa	8%	$= B6 * B7$		$= F8 * \left( \frac{100 + F9}{100} \right)$
8		Acrécimo	R\$ 9,84	$= B6 + B9$		R\$ 123,00
9		valor final	R\$ 132,84		R\$ 132,84	8
10						
11		principal	R\$ 321,00			
12	Exercício 2	Taxa	4,5%	$= B11 * B12$		$= F12 * \left( \frac{100 + F13}{100} \right)$
13		desconto	R\$ 14,45	$= B11 + B13$		R\$ 321,00
14		Valor final	R\$ 306,56		R\$ 306,56	-4,5

Fonte: Dados da pesquisa

Temos representado na coluna “C” a abordagem pela estratégia de organização dos dados e cálculo de resultados. Na sequência, na coluna “E” temos a criação de uma relação entre o *Principal* e a *Taxa*, e a mesma foi explorada nos

casos: do cálculo da *Porcentagem* correspondente a uma *Taxa 10%* com uma equivalência com o *desconto* de *90%* (-90); do *acrécimo*, explicado por Vinicius, com uma equivalência à *Taxa* de *108%*; e no *desconto*, equiparando a *Taxa* de *4,5%* a uma *Taxa* de *94,5%*.

A exploração do modelo informático do *software* da Planilha Eletrônica permitiu aos alunos o estabelecimento de resultados com a manipulação dos parâmetros e a simulação de cenários possíveis para essa temática, sinalizando uma espécie de intuição sobre a relação estabelecida, em uma análise de causa e efeito sobre as possibilidades do modelo (LÉVY, 1993).

A intuição caracteriza-se, em alguns casos, como ponto de partida para exploração dos modelos informáticos, pois, para Bruner (1976), a intuição

[...] implica o ato de captar o sentido, o alcance ou a estrutura de um problema ou situação, sem dependência explícita do aparato analítico do ofício de quem o faz. Se uma intuição está correta ou errada decide-se, finalmente, não pela própria intuição, porém pelos métodos usuais de prova. Contudo, é o modo intuitivo que gera hipóteses rapidamente e que atinge a combinação de ideias, antes que de conheça o seu valor (BRUNER, 1976, p. 55/56).

No caso das Atividades Investigativas analisadas nota-se que a estratégia de exploração e organização da abordagem está ligada ao processo intuitivo, pois os alunos partem de suas interpretações e do alcance que seus conhecimentos permitem ter dos problemas e das estruturas das situações. Exemplo disso tem-se no caso do estabelecimento de uma fórmula para o cálculo dos Juros Compostos, protagonizado pelos alunos Diego e Luis partindo da relação: “ $=B1(1+C3)^{C3*2}*C3^3*C3^4*C3^5*C3^6$ ”.

**Diego:** Nossa ele ficou bem “pequeninho”, não parece ser isso mesmo não!

**Luis:** Mas não é só a primeira parte?

**Diego:** Então o que eu tinha feito: Nos juros um (1) é “Capital” vezes a “taxa” vezes o tempo; os juros dois (2) vai ser esse juros um (1), Montante né!?, [...] mais o juros um (1) vezes o “i” vezes o tempo dois (2). O juro três (3) vai ser o Montante disso aqui vezes o “i” vezes o  $t_3$  [...].

**Luis:** Não vai ter um fatorial aí?

**Diego:** Então, pode até ter! um fator do tempo [...].

**Luis:** Um fatorial do tempo?!

**Diego:** [...], mas o “*t*” será elevado a “*n*”, elevado a 6. “Vamo” ver, quer ver?! Faz o simples ai, por que o simples é bem menor que o composto. (Fig. 54).

**Luís:** Deu R\$ 540.

**Diego:** R\$ 530! Então tá errado esse aqui.

No diálogo nota-se que Diego não está certo do valor e ao explicar o que foi feito a Luiz, este “intui” uma “termo fatorial”. Diante disso, as suposições são postas de lado e os alunos partem para estratégias de análise e validação de conjecturas; porém antes disso, os alunos perpassam hipóteses intuitivamente. Desse modo percebe-se que

[...] a intuição, por si mesma, dá origem a uma ordenação provisória de um corpo de conhecimentos que, embora possa gerar um sentimento de que a ordenação dos fatos é evidente por si mesma, auxilia principalmente por fornecer-nos uma base a partir da qual podemos avançar em nossa investigação sobre a realidade (BRUNER, 1976, p. 55-56).

Esse conjunto de conhecimentos ou a ordenação de fatos que auxiliam na elaboração de uma base para investigação, pode mudar de um status provisório para algo que se faz presente a qualquer instante que seja necessário, com o uso do computador fornecendo não somente um *feedback* das informações, mas promovendo a reorganização do pensamento diante das novas evidências fornecidas (TIKHOMIROV, 1981; BORBA; VILLARRREAL, 2005). Em uma abordagem experimental-com-tecnologia, podemos nos deparar como vimos, com a *simulação por computador*, em que uma pessoa pode “[explorar] modelos mais complexos e em maior número do que se estivesse reduzido aos recursos de sua imagística mental e de sua memória de curto prazo, mesmo se esforçadas por estes auxiliares por demais estático que é o papel” (LEVY, 1993, p. 127).

As estratégias de Exploração dos recursos do software da Planilha Eletrônica podem oportunizar uma espécie de intuição na criação de relações e no aparecimento de hipóteses no que diz respeito a causas e efeitos dos modelos. Nesse sentido, simulação não tem o propósito de nos guiar por situações irreais do conhecimento ou a situações inexistentes do nosso cotidiano, mas sim de potencializar nossa imaginação e intuição (LÉVY, 1993).

## 5. CONSIDERAÇÕES SOBRE A PESQUISA

*...consideraram o professor ou o educador um inventor, um pesquisador, um improvisador, um aventureiro que percorre caminhos nunca antes trilhados e que pode se perder caso não reflita de modo intenso sobre o que faz e caso não aprenda rapidamente com a experiência (PERRENOUD, 2002, p. 13).*

Nesse capítulo, trago reflexões acerca das minhas experiências como professor durante a pesquisa e sua coleta de dados tecendo uma análise crítica sobre os processos dessa pesquisa, explicitando, dessa forma, as contribuições que ela trouxe para a minha formação enquanto pesquisador e professor de Matemática, bem como também as possíveis contribuições para a área de Educação Matemática.

### 5.1 A tarefa de investigar em sala de aula

A pesquisa que apresentei se propôs a analisar as abordagens dos alunos diante de tarefas investigativas com um foco específico nas estratégias empregadas no processo das Atividades Investigativas mediadas por Planilhas Eletrônicas. Outra característica importante a ser considerada é que as tarefas investigativas ocorreram durante um curso de extensão universitária que abordou o estudo da Matemática Financeira, contando dessa forma com o interesse e participação espontâneo dos alunos.

Diante do foco de minha pesquisa e do interesse dos alunos em participar do curso em um ambiente informatizado cabe tecer algumas reflexões sobre a tarefa de investigar em sala de aula.

Ao longo da análise dos dados nota-se que as tarefas investigativas sugerem a resolução de problemas, levando em conta que na matemática essas ideias estão estreitamente ligadas. Para tanto, Ponte Brocado e Oliveira (2003) chamam atenção que ao trabalharmos um problema se espera resolvê-lo e que, além disso, temos um caminho de descobertas e esse processo pode se tornar mais significativo que a sua solução, ainda que não se garanta a resposta, mas sim um conjunto de descobertas.

A forma como os alunos se posicionaram diante das tarefas investigativas, se revela crivo de análise, pois vimos que as primeiras abordagens se caracterizaram em achar uma resposta e isso pode estar intimamente ligado ao tipo de tarefa

apresentada, ou ainda à forma no tratamento matemático, empregado nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática durante a vida escolar dos alunos.

À medida que as tarefas de investigação foram percebidas como tais, houve mudanças nesse processo, com uma abordagem mais centrada em determinar relações matemáticas que pudessem ser traduzidas em fórmulas. Esse fato pode ser resumido na fala do aluno Alex ao “concluir” a atividade de Acréscimos Sucessivos, que pergunta à dupla ao lado: “*Vocês fizeram de pouquinho em pouquinho ou montaram uma equação geral?*”, pois ao concluir a tarefa a dupla estabeleceu uma relação entre os dados do problema em uma “única” célula, mostrando assim que o objetivo da dupla foi de encontrar uma “forma” ou a “melhor forma” para uma possível formalização. Esse processo mostra que houve por parte da dupla um empenho em estruturar uma relação matemática que traduzisse os objetivos da Atividade Investigativa, ou seja, houve discussões, argumentações e criação de conjecturas que constituíram um conjunto de descobertas que superaram uma resposta correta a um problema.

Outro aspecto que fez parte da tarefa de investigar foi o uso das Planilhas Eletrônicas baseado em uma abordagem experimental-com-tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005), oportunizando outras possibilidades aos alunos, como de concentrarem estudos na criação de estruturas argumentativas que validassem suas conjecturas e uma experimentação diferenciada das formas usuais de produção matemática. O uso afirmar que o “*pensar com*” Planilhas Eletrônicas influenciou no raciocínio dos alunos, principalmente na obtenção de rápidos *feedbacks* para a validação de suas conjecturas, assim como na manipulação dos dados junto às células, evidenciando as potencialidades de como o pensar matematicamente pode ser reorganizado de forma qualitativa, se comparado com o uso do lápis-e-papel.

Contudo, a tarefa de investigar, por mais que apresente significativos ganhos no processo de construção do conhecimento, não foi adotada por todos e nem por todo o tempo na realização das atividades propostas. Houve duplas que não procederam com Investigações Matemáticas, assumindo um papel de “*passividade*” diante das atividades e do uso das Planilhas Eletrônicas, ou seja, ficando no aguardo de que eu, como professor, lhes mostrasse como proceder ou, ainda, da sistematização e discussões ao final das tarefas investigativas. Essa postura

causou-me certo desconforto diante do desenvolvimento do curso, mesmo que isso esteja ligado a “uma tensão estrutural em uma rede de sistemas de atividades mais ampla, que envolve outros fatores, entre eles, as políticas organizacionais que compõem nossa base curricular” (SOUTO, 2013, p. 195).

Por mais que essas tensões não indiquem um responsável direto, tomo aqui como responsabilidade, por meio de um processo reflexivo, o meu papel de professor e pesquisador durante o curso. Dessa maneira, parto do meu envolvimento com a formação inicial de professores, como apresentei no primeiro capítulo, que vem a tona com uma análise reflexiva dessa postura diante do curso de extensão e das renúncias de aspectos que julguei necessários durante o curso, para tanto assim como Perrenoud (2002) acredito que algumas considerações devam ser feitas.

Em primeiro lugar, é necessário aceitar algumas perdas: para que os alunos aprendam a se tornar profissionais reflexivos, é preciso renunciar à atitude de sobrecarregar o *currículo* da formação inicial de saberes disciplinares e metodológicos; é preciso reservar tempo e espaço para realizar um procedimento clínico, com resolução de problemas, com a aprendizagem prática da reflexão profissional, em uma articulação entre tempo de intervenção em campo e tempo de análise. Mais que fornecer ao futuro professor todas as respostas possíveis, uma formação orientada para a prática reflexiva multiplica as oportunidades de que os estudantes-estagiários elaborem esquemas de reflexão e ajustes (PERRENOUD, 2002, p. 44, Grifo do autor).

Nesse sentido acredito que a ânsia de cumprir com toda a proposta de curso oferecida aos alunos assim como manter o interesse do grupo nas aulas para não haver perda quantitativa de dados me levou a negligenciar em **alguns** momentos aspectos metodológicos, das Atividades Investigativas, como: a sistematização dos conhecimentos desenvolvidos pelas duplas, que, em alguns momentos, foi apressada, causando em algumas duplas o rompimento do processo da investigação; intervindo de forma direta na orientação de procedimentos e fornecendo, dessa forma, respostas “prontas”; em uma avaliação dos alunos no que diz respeito aos conhecimentos apreendidos durante os tópicos desenvolvidos; em momentos de discussão e análise sobre as contribuições da investigação matemática e no uso das TIC nesse contexto.

Busquei aqui interpretar o que ocorreu durante as aulas do curso de extensão, no sentido de interpretar a relação entre a ementa disciplinar do curso,

minhas ações e a aprendizagem dos alunos, bem como de buscar novas maneiras de ministrar a Matemática Financeira, sem a pretensa intenção de implementar ou criar uma metodologia. Para Poletini (1999, p. 252) isso pode caracterizar um professor pesquisador; além disso é importante “[prestar] mais atenção às estratégias de solução adotadas pelos alunos e às razões dadas por eles para utilização de tais estratégias”, e a disposição constante para a reflexão de sua prática e de seu pensamento.

## 5.2 As Planilhas Eletrônicas

Ao longo da pesquisa evidenciei aspectos acerca do uso das Planilhas Eletrônicas, tendo como foco as potencialidades no desenvolvimento cognitivo dos alunos que as usam diante das tarefas investigativas, entre eles destaco possibilidades como: o aumento da capacidade de trabalhar com diversos dados assim como sua organização e articulação; a verificação imediata de hipóteses, e a exploração do *software* com a criação de outras formas de percepção da situação pesquisada.

Relembrando que o objetivo que assumo nessa pesquisa é de identificar e analisar as estratégias adotadas pelos **alunos** na realização das Atividades Investigativas, no estudo de tópicos de Matemática Financeira com o uso de Planilhas Eletrônicas, busco reiterar que o foco centra-se no uso, dado pelos **alunos**, das Planilhas Eletrônicas em um **ambiente cognitivo**, pois “é preciso deslocar a ênfase do objeto (o computador, o programa, este ou aquele módulo técnico) para o projeto (ambiente cognitivo, a rede de relações humanas que se quer instruir)” (LÉVY, 1993, 54).

Nesse sentido, creio que minha pesquisa atendeu ao objetivo a que se propunha e enfatizou os processos cognitivos representados nas estratégias adotadas pelos alunos. Contudo, cabe ressaltar que as Planilhas Eletrônicas, em especial o *software* Excel, apresentam potencialidades a serem exploradas dentro de um ambiente cognitivo, que não se fizeram presentes em minha pesquisa.

Ao refletir sobre os tópicos estudados e apresentados nesse trabalho, destaco os de Juros Simples e Compostos, estudo que ficou centrado num viés algébrico, ou seja, de encontrar fórmulas, tanto pela ênfase da tarefa investigativa de elaborar

“formalizações” quanto na busca por respostas para os problemas. Contudo, o *software* proporciona, também, a criação de gráficos que podem ser analisados que segundo Borba e Villarreal (2005), enfatizam a elaboração de hipóteses com base nos elementos visuais que eles fornecem.

Dessa forma, tanto Juros Simples e Compostos poderiam, respectivamente, ser expressos por gráficos das funções lineares e exponenciais levando a uma representações algébricas caracterizando-se como uma estratégia no uso das Planilhas Eletrônicas.

### **5.3 Contribuições para Educação Matemática**

Nesse item levanto considerações ligadas às minhas percepções diante das experiências vividas nessa pesquisa e nas perspectivas do que entendo como contributivas para o ensino junto da Educação Matemática. Um dos pontos que evidencio é a contribuição das Atividades de Investigação Matemática e do papel que o professor assume diante dessa proposta, pois durante a realização da investigação o professor tem como objetivo: estimular os alunos a progredir nas atividades; promover a produção de uma visão geral dos vários aspectos da situação e das diversas estratégias usadas para explorá-la, e mediar o envolvimento das ideias já conhecidas no sentido de desenvolver novos conceitos. Dessa forma, Ponte et. al (1999, p. 78) destacam que é preciso “considerar dois aspectos: a exploração matemática da tarefa proposta e a gestão da situação didáctica, promovendo a participação equilibrada de todos os alunos no trabalho”.

Com isso se constitui uma relação aluno-professor, onde o professor assume um papel de orientador e o aluno de investigador, ou seja, de agente da construção do seu conhecimento, seguindo dessa forma as orientações do professor, encontrando seu próprio caminho para resolver o problema e definindo seus próprios objetivos de acordo com a situação investigada (PONTE et. al, 1999).

Evidencio, também, o papel das TIC nesse contexto, pois as tecnologias permitem perspectivas no ensino da Matemática de modo inovador, com ênfase na dinâmica das verificações de conjecturas e nas formas de representação, em contra ponto à importância do cálculo e da manipulação simbólica, permitindo que o professor dedique maior atenção ao desenvolvimento intelectual dos alunos,

valorizando, dessa forma, as possibilidades de realização de atividades ou projetos de exploração e investigação (PONTE, 1995). E ainda, o uso de *softwares* com o propósito de tornar a matemática mais evidente, menos abstrata, como por exemplo, no uso das Planilhas eletrônicas remete à “interatividade, ao movimento e o realismo das representações que poderão ser a chave para o sucesso dos alunos” (PONTE; OLIVEIRA; VARANDA, 2001, p.1).

Outro aspecto importante que acredito ter ficado evidenciado em minha pesquisa é a percepção do papel das *tecnologias intelectuais* que para Lévy (1993, p. 54) “reorganizam, de uma forma ou outra, a visão de mundo de seus usuários e modificam seus reflexos mentais”; em especial, nesta pesquisa, o uso de mídias eletrônicas e sua influência na reorganização do pensamento (TIKHOMIROV, 1981; BORBA; VILLARREAL, 2005).

O que pode ser comprovado nas estratégias evidenciadas a seguir:

- **Organização dos dados e busca por resultados:** está estratégia foi mais a comum utilizada nas primeiras tarefas investigativas possibilitando aos estudantes organizar os dados, envolvidos nos problemas, e articulá-los na busca de resultados tornando esse processo dinâmico e confiante.
- **Análise e validação de conjectura:** destaca-se pelas possibilidades que as Planilhas Eletrônicas propiciam alteração de dos dados e respostas imediatas possibilitando aos estudantes uma análise para validação ou não de suas conjecturas;
- **Exploração e reorganização de abordagem:** permite ao aluno revistar suas abordagens com outro olhar a medida que adquiriu conteúdo matemático e desenvolveu experimentações com as Planilhas Eletrônicas fazendo com que o mesmo tenha outra visão sobre as abordagem e dando-lhe a possibilidade de explorá-las e reorganizá-las.

Dessa forma fica evidente que a análise das estratégias empregadas com o uso das Planilhas Eletrônicas pode possibilitar aos alunos um desenvolvimento matemático articulando e reorganizando seu pensamento durante o processo de investigação matemática.

#### 5.4 Por fim...

Esse trabalho sintetiza uma etapa importante em minha jornada profissional e acadêmica; com ele pude realizar reflexões sobre minha prática como professor e me lançar ao universo da pesquisa.

Percebi, também, que a tomada de consciência do meu papel como educador está em um processo constante de construção assim como minha identidade profissional; que se ampliaram diante desta pesquisa, que me possibilitou uma percepção externa das minhas ações através das análises realizadas junto ao conjunto de dados contidos em vídeos.

Fica evidente que uma pesquisa gera uma quantidade de dados que podem ser analisados por diferentes vieses teóricos, sob outras abordagens metodológicas, resultando dessa forma novas perguntas, interpretações e respostas.

Ao usar as teorias da reorganização do pensamento (TIKHOMIROV, 1981), noção de coletivo pensante (LÉVY, 1993) e de seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005) muito pode ser explicado durante a análise dos dados e que contribuíram significativamente para definir as estratégias usadas pelos alunos ao usarem as Planilhas Eletrônicas. Assim, indicam também outras possibilidades como na abordagem visual gráfica presente na abordagem experimental-com-tecnologia (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Creio, também, que seja possível investigar o papel das mídias eletrônicas em estudos analisando a intuição matemática; a questão de gênero e sua influência nas discussões das ideias matemáticas em um ambiente informatizado e, ainda, a automação das Planilhas Eletrônicas com uso do Visual Basic for Applications (VBA)<sup>20</sup> desenvolvendo estudos em programação computacional associados para os sistemas de simulação presente no *software* da Planilha Eletrônica Excel, melhorando também a simulação da interação natural com elas. Fica aqui lançada a ideia para futuras pesquisas.

---

<sup>20</sup> O VBA estende as capacidades de anteriormente existentes linguagens de programação de macros específicos para as aplicações e pode ser usado para controlar a quase totalidade dos aspectos da aplicação anfitriã, incluindo a manipulação de aspectos do interface do usuário tais como menus e barra das ferramentas e o trabalho com formulários desenhados pelo usuário ou com caixas de diálogo. Disponível em: [http://pt.wikipedia.org/wiki/Visual\\_Basic\\_for\\_Applications](http://pt.wikipedia.org/wiki/Visual_Basic_for_Applications).

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. Cap.1, p.25-45. 120 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- ALVES-MAZZOTI, A. J. O Método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. 2ª. ed. São Paulo: Pioneira, 2004.
- BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática**: o que é? por que? Como? Veritati, n. 4, p. 73- 80, 2004.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.
- BEARE, R. How spreadsheets can aid a variety of mathematical learning activities from primary to tertiary level. In: Jaworski, B. (Ed.). **Technology in Mathematics Teaching: a Bridge Between Teaching and Learning**. Bromley (UK): Chartwell-Bratt, p. 117 à124, 1993.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M. J. Alvarez; S. B. Santos; T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.
- BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M.A.V. (org). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 285-295.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. 3ª. ed., Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2003.
- BORBA, M. C. Dimensões da Educação Matemática a Distância. In: BICUDO, M. A.; BORBA, M. C. **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.
- BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998. 148 p.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: v.2, 2006, 135 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2011: matemática (anos finais do ensino fundamental)**. Brasília: MEC, 2010. 96 p.

BRUNER, J. S. **O processo da educação**. Tradução de Lólio Lourenço de Oliveira. 6ª. ed. São Paulo, Ed Nacional, 1976. (atualidades pedagógicas, v. 126).

CARVALHO, A. M. P. Uma metodologia de pesquisa para estudar os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula. In: SANTOS, F. M. T.; GRECA, I. M. (org.) **A Pesquisa em Ensino de Ciências no Brasil e suas Metodologias**. Ijuí (RS): Editora Unijuí, 2006. p. 13-48.

FERREIRA, A. B. H. **Miniaurélio século XXI: O ninidicionário da língua portuguesa**. 4ª ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000.

FREITAS, A. L. S. Curiosidade epistemológica. In: REDIN, D.R.S. E.; ZITKOSKI, J.J. (orgs.). **Dicionário Paulo Freire**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

GOUVEA, S. A. S. **Novos caminhos para o ensino e aprendizagem de matemática financeira: construção e aplicação de webquest**. 166f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 2006.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais**. Mirian Goldenberg. – 8ª ed. - Rio de Janeiro: Record, 2004.

HERMÍNIO, P. H. **Matemática financeira: um enfoque da resolução de problemas como metodologia**. 139f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 2008.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. 231f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

LEITE, Y; CALLOU, D. **Como falam os brasileiros**, Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor , 2002. (Descobrimdo o Brasil).

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. Tradução de C. I. Costa. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1993.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. **Naturalistic Inquiry**. Newbury Park: Sage Publications, 1985.

MARASINI, Sandra Mara. **A matemática financeira na escola e no trabalho**: uma abordagem histórico-cultural. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo (RS), 2001.

NAKASHIMA, R. H. R.; BARROS, D. M. V.; AMARAL, S. F. O uso pedagógico da lousa digital associado à teoria dos estilos de aprendizagem. v.4, n.4, 2009. p. 169-178. Disponível em [http://www.uned.es/revistaestilosdeaprendizaje/numero\\_4/Artigos/lsr\\_4\\_articulo\\_12.pdf](http://www.uned.es/revistaestilosdeaprendizaje/numero_4/Artigos/lsr_4_articulo_12.pdf). Acessado: 13 jul 2013.

PERRENOUD, P. **Práticas pedagógicas, profissão docente e formação**: perspectivas sociológicas. Lisboa: Publicações D. Quixote/Instituto de Inovação Educacional, 1993.

PERRENOUD, P. **A prática reflexiva no ofício do professor: profissionalização e razão pedagógica**. Tradução de Cláudia Schilling. Porto Alegre: Artmed Editora, 2002.

POLETTINNI, A. F. F. Análise das experiências vividas determinando o desenvolvimento profissional do professor de matemática In: BICUDO, M.A.V. (org). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 247-261.

PONTE, J. P. **Novas tecnologias na aula de matemática**. Lisboa: Educação e Matemática, 34, 1995. p. 2-7

PONTE, J. P; FERREIRA, C.; VARANDAS, J.M.; BRUNHEIRA, L.; OLIVEIRA, H. **A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999. p. 1-95.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In: D. Fiorentini (Org.). **A formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: Mercado das Letras. 2003. p. 159-192.

PONTE, J. P.; BROCADO, J; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P. **Explorar e investigar em matemática**: uma Actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. In: Revista Iberoamericana de Educación Matemática – UNIÓN. Nº 21, 2010. p. 13–30.

POPPER, K. R. **Lógica da pesquisa científica**. São Paulo: EDUSP, 1985.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER; C.A. **Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes**. Rio Claro (SP): Boletim de Educação Matemática, BOLEMA, Ano 17, n. 21, 2004. p. 81-140

RUIZ, A. R. **Matemática, matemática escolar e o nosso quotidiano**. Teoria e Prática da Educação, 4(8), 2001. p. 125-138.

SOARES, D. L. P. **Uma abordagem pedagógica baseada na análise de modelos para alunos de biologia**: qual o papel do *software*?. 341f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

SOUTO, D. L. P. **Transformações expansivas em um curso de educação matemática a distância online**. 279f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

TIKHOMIROV, O.K. The Psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J.V. (Ed.) **The concept of activity in soviet psychology**. New York: M. E Sharpe. Inc, 1981, p. 256-278.

TRIVIÑOS, A; N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VERAS, L. L. **Matemática Financeira**: uso de calculadoras financeiras, aplicações ao mercado financeiro, introdução à engenharia econômica, 300 exercícios resolvidos e propostos com respostas. 4<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Atlas, 2001.

## APÊNDICE A – TAREFAS

Neste apêndice, apresento as notas de aula referente ao estudo da matemática financeira e as tarefas presentes nessa pesquisa propostas aos alunos participantes do curso de extensão Tópicos em Matemática Financeira.

### 1. Matemática Comercial e Financeira.

É bastante antigo o conceito de juros, sido amplamente divulgado e utilizado ao longo da História. Esse conceito surgiu naturalmente quando o homem percebeu a existência de uma estreita relação entre o dinheiro e o tempo. Processos de acumulação de *Capital* e desvalorização da moeda levariam normalmente a ideia de juros, pois se realizavam devido ao valor **temporal** do dinheiro.

Segundo uma pesquisa realizada pelo professor Jean Pítton Gonçalves, do departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos-UFSCAR/SP, os juros e os impostos existem desde a época dos primeiros registros de civilizações. Um dos primeiros indícios apareceu na Babilônia no ano de 2000 aC. Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou de outras conveniências emprestadas. Muitas das práticas existentes originaram-se dos antigos costumes de empréstimos e devoluções de sementes e de outros produtos agrícolas.

Farei aqui a distinção entre Matemática Comercial e Financeira. Onde **Matemática Comercial** não levará em consideração o fator *tempo*, por outro lado em **Matemática Financeira** o fator tempo é *essencial*.

Exemplos de problemas envolvendo **Matemática Comercial**:

1. João pagou 12% de multa por atraso.
2. Camila recebeu 3% de desconto pelo pagamento à vista.
3. O reajuste no valor do aluguel em Agosto/2011 foi de 8,36%, segundo Índice de Preços ao Consumidor (IPC).

Exemplos de Problemas envolvendo **Matemática Financeira**.

1. Um empréstimo de R\$ 7.000,00, com prestações fixas de R\$ 237,00 será pago **60 meses**. Qual o *Montante* Final e a *Taxa* de Juros desta operação Financeira?
2. Qual a taxa **anual** de Juros, supondo que taxa **mensal** seja de 0,5% ao **mês**?
3. Se aplicar **mensalmente** R\$ 100,00 na caderneta de poupança. Qual será o *Montante* ao final de um **ano**?

## 1.1 Matemática comercial.

### 1.1.1 Porcentagem.

Problema.

*Uma revenda de carros cobra 10% de comissão sobre a venda de cada automóvel. Se um automóvel custa R\$ 52.000,00 qual o valor da comissão?*

Pelo Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa, temos:

**“Porcentagem.** [Do lat. *per centum*, ‘por cento’, + *-agem*] *Parte proporcional calculada sobre uma quantidade de 100 unidades.*

- a. A partir desta definição dê uma solução para o problema.
- b. Se você tivesse que “*formalizar*” o cálculo feito no item anterior, para ser aplicado a qualquer situação, como ficaria?
- c. Qual o significado do símbolo “%”?
- d. A Quais outras situações podem ocorrer a *Porcentagem*?

### 1.1.2 Porcentagem no Excel.

Abra a Planilha Eletrônica. Observe que na aba **Início** no menu **Número** existe o ícone [%] qual sua função nos cálculos da *porcentagem*?

Baseando-se no problema e nos itens anteriores como podemos aplicar esses cálculos nas Planilhas Eletrônicas?

Ainda nas Planilhas Eletrônicas...

Resolva os seguintes problemas registrando suas estratégias para cada problema.

1. Uma mercadoria no valor de R\$ 123,00 sofre um acréscimo de 8%.
  - a. Qual o valor do acréscimo?
  - b. Qual o valor da mercadoria após o acréscimo?
2. Uma mercadoria no valor de R\$ 321,00 tem um abatimento de 4,5%.
  - a. Qual o valor do desconto?
  - b. Qual o valor da mercadoria após o desconto?
3. Qual ou quais as “*formalizações*” possíveis a partir dos cálculos feitos nos itens 1 e 2, para que se possa aplicar a qualquer situação de mesma natureza?

4. Uma mercadoria no valor de R\$ 250,00 sofre dois descontos sucessivos de 2,5% e 3%, respectivamente.
  - a. Qual o valor total do desconto?
  - b. Qual a taxa final de desconto?
  
5. Uma mercadoria sofre dois acréscimos sucessivos de 3,5% e 1,25%, respectivamente passando a valer R\$ 99,00.
  - a. Qual o valor antes do acréscimo?
  - b. Qual a taxa total de acréscimo?
  
6. Qual ou quais as “*formalizações*” possíveis a partir dos cálculos feito nos itens 4 e 5, para que se possa aplicar a qualquer situação de mesma natureza?

## 2. JUROS

Entendemos por regime de *Capitalização* o processo de formação do juro. Há dois regimes de *Capitalização*: a *juro simples* e a *juro composto*.

O valor do juro a ser cobrado ou recebido é determinado por meio de uma taxa percentual, referida a um intervalo de tempo, denominada taxa de juros.

### 2.1 Juro Simples

No regime de *Capitalização* a juro simples, por convenção, apenas o *Capital* inicial rende juros, isto é, o juro formado no final de cada período a que se refere a taxa não é incorporado ao *Capital* para, também, render juros no período seguinte.

Pela definição, o juro simples é diretamente proporcional ao *Capital* inicial e ao tempo de aplicação, sendo a taxa de juro por período o fato de proporcionalidade. Baseado nas definições de juro simples resolva os problemas abaixo. Você pode utilizar a planilha eletrônica para resolvê-los

Problema 1.

*Toma-se a importância de R\$ 1.200, pelo prazo de 6 meses, à taxa de 7,5% ao mês. Qual será o valor a ser pago?*

- a. Qual ou quais “*generalizações*” são possíveis a partir dos cálculos feitos neste problema.

Problema 2.

*Aplicou-se a quantia de R\$ 2.350, pelo prazo de 7 meses e obteve-se um rendimento de R\$ 650,00. Qual o valor da taxa de juros praticada nesta operação financeira?*

- a. Qual ou quais “*generalizações*” são possíveis a partir dos cálculos feitos neste problema.

Problema 3.

Aplicou-se certa quantia pelo prazo de 1 ano, à taxa de juros de 1,5% ao mês obtendo-se um rendimento de R\$ 950,00. Qual o valor da quantia aplicada nesta operação financeira?

- a. Qual ou quais “generalizações” são possíveis a partir dos cálculos feitos neste problema.

NOTA:

Outro conceito usado no regime de *Capitalização* de juros é o de *Montante*, que nada mais é do que o valor total ao final do prazo da operação financeira, ou seja, é a soma do *Capital* com os juros obtidos neste período.

Problema 4.

Calcule o *Montante* para os problemas anteriores.

- a. Qual ou quais “generalizações” são possíveis a partir dos cálculos feitos neste problema.

Atividade 1:

Elabore um resumo das *generalizações* feitas a partir dos problemas 1, 2 e 3 e comente aspectos que no seu entendimento são importantes para o sucesso dos cálculos.

Atividade 2:

Baseado no que vimos de juros simples, elabore um esquema gráfico que relacione os principais elementos que compõem este estudo.

## 2.2 JURO COMPOSTO

No regime de *Capitalização* a *juro composto*, o juro obtido no fim de cada período é incorporado ao *Capital* que tínhamos no início desse período, passando esse *Montante* a render juro no período seguinte.

Pela definição **Juro Composto** é aquele que em cada período financeiro, a partir do segundo, é calculado sobre o *Montante* relativo ao período anterior.

Baseado nas definições de juro Composto resolva os problemas abaixo. Você pode utilizar a planilha eletrônica para resolvê-los

Problema 1.

Toma-se a importância de R\$ 1.200, pelo prazo de 6 meses, à taxa de 7,5% ao mês. Qual será o valor a ser pago?

- a. Qual ou quais “generalizações” são possíveis a partir dos cálculos feitos neste problema.

Problema 2.

*Aplicou-se a quantia de R\$ 2.350, pelo prazo de 7 meses e obteve-se um rendimento de R\$ 650,00. Qual o valor da taxa de juros praticada nesta operação financeira?*

- a. Qual ou quais “*generalizações*” são possíveis a partir dos cálculos feitos neste problema.

Problema 3.

*Aplicou-se certa quantia pelo prazo de 1 ano, à taxa de juros de 1,5% ao mês obtendo-se um rendimento de R\$ 950,00. Qual o valor da quantia aplicada nesta operação financeira?*

- a. Qual ou quais “*generalizações*” são possíveis a partir dos cálculos feitos neste problema.

Atividade 1:

Elabore um resumo das formalizações feitas a partir dos problemas 1, 2 e 3 e comente aspectos que no seu entendimento são importantes para o sucesso dos cálculos.

Atividade 2:

Elabore um quadro comparativo entre Juro Simples e Juro Composto a partir dos itens obtidos das formalizações feitas e tente associar a cada um, algum “conteúdo” matemático que você já tenha estudado em qualquer nível de ensino.

**ANEXO A - AUTORIZAÇÃO**

Modelo usado para autorização do uso de imagem e dados gerados pelos alunos participantes do curso de extensão Tópicos em Matemática Financeira.

**AUTORIZAÇÃO**

Eu, \_\_\_\_\_,  
portador do RG nº. \_\_\_\_\_, **autorizo**  
Vinicius Machacheski Marchi, aluno de Mestrado do PGEM, UNESP, Campus  
de Rio Claro, a utilizar, para fins de sua pesquisa de mestrado, meu nome,  
minha imagem, bem como todos os dados gerados durante a minha  
participação no curso de extensão TÓPICOS EM MATEMÁTICA FINANCEIRA,  
que foi de responsabilidade do Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba.

Rio Claro, 23 de Agosto de 2011.

\_\_\_\_\_  
Assinatura