



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Enrico Sonvenso Ambrosio

Um estudo do Espectro de Fučík Σ_p para o
Operador p-Laplaciano

São José do Rio Preto
2022

Enrico Sonvenso Ambrosio

Um estudo do Espectro de Fučík Σ_p para o
Operador p-Laplaciano

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2022

A496e Ambrosio, Enrico Sonvenso
Um estudo do espectro de Fucik para o operador p-laplaciano /
Enrico Sonvenso Ambrosio. -- São José do Rio Preto, 2022
75 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
Preto
Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Operador p-laplaciano. 3.
Espectro de Fucik. 4. Teorema do Passo da Montanha. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Enrico Sonvenso Ambrosio

Um estudo do Espectro de Fučík Σ_p para o
Operador p-Laplaciano

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Orientador

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
ICEN, Faculdade de Matemática - UFPA

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves
IBILCE, Departamento de Matemática - UNESP

São José do Rio Preto
02 de Setembro de 2022

*Para os meus pais,
que não pouparam esforços
para que eu chegasse até aqui.*

AGRADECIMENTOS

Durante o período de desenvolvimento desse trabalho muitas coisas aconteceram e foram tempos difíceis para todos, por isso agradeço a algumas pessoas especiais por de alguma forma me ajudar a chegar e concluir o mestrado.

À minha família, que não poupou esforços para que eu minhas irmãs seguíssemos os nossos sonhos e alcançássemos nossos objetivos, que nunca faltasse educação e oportunidades, a conquista é deles.

Ao Professor Marcos Pimenta, meu orientador, me acolheu e ensinou durante todo o período de mestrado, agradeço pela oportunidade que é trabalhar com quem durante toda a graduação admirei e tive como espelho, um exemplo de matemático, professor e pessoa. À Professora Patricia Tacuri e ao Professor Roberto Prado por todo o acompanhamento e aprendizado durante as iniciações científicas da graduação.

À pandemia tirou muitas coisas, uma delas foi o convívio pessoal e por isso devo agradecer por ter reforçado e feito algumas amizades especiais mesmo durante esse período. Aos meus amigos do grupo "*Estou acompanhando*", Marcos, Maycon e Vitor, por terem sido meus companheiros de disciplinas e vivenciarem as tristezas e felicidades da pós graduação comigo. Aos amigos do grupo "*Suruba Quinta*", Carol, João (agora do outro lado do globo), Letícia e Thaiana, por terem sido meu ponto de apoio em tantos momentos e por sempre estarmos juntos desde a época da escola, mesmo que nunca tenhamos estudado juntos.

À Pâmela, por ser minha parceira e ter feito esse período mais leve, me dando forças para não desistir e conseguir terminar.

Obrigado Fundikasa, estando presente em quase metade da minha vida!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Universidade Virtual do Estado de São Paulo (UNIVESP).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Todos os voos começam com uma queda.
George R. R. Martin

RESUMO

Neste trabalho estudaremos o Espectro de Fučík para o p-laplaciano Σ_p , o qual é definido pelos pontos $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ para os quais o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \alpha (u^+)^{p-1} - \beta (u^-)^{p-1} & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{PF})$$

tem solução não trivial. Partindo de resultados já conhecidos para o Problema de Autovalor do Operador p-Laplaciano provamos a existência de duas curvas triviais para o espectro de Fucik, bem como mostramos algumas de suas propriedades. Além disso, utilizando de uma versão do Teorema do Passo da Montanha para uma C^1 variedade conseguimos o primeiro ponto não trivial e partindo dele construímos uma curva no plano que pertence ao Espectro de Fučík. O resultado mais importante desse trabalho garante que essa curva é a primeira curva não-trivial do Espectro de Fučík. Estudamos também ao final do texto algumas propriedades e comportamentos da curva obtida como o fato dela ser contínua, estritamente decrescente e nos limite convergir para as linhas triviais.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais. Operador p-Laplaciano. Espectro de Fučík. Teorema do Passo da Montanha.

ABSTRACT

In this work we going to be studying the Fučík Spectrum for the p -Laplacian Σ_p , which is defined as the points $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ that the following problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \alpha (u^+)^{p-1} - \beta (u^-)^{p-1} & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{over } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{PF})$$

has a non-trivial solution. Starting from the well-known results for the Eigenvalue Problem of the p -Laplacian Operator, we got the initial results for the Fučík Spectrum proving the existence of two trivial curves, as well as show some of their properties. Furthermore, using a version of the Mountain Pass Theorem for a C^1 manifold, we are able to get the first non-trivial point and starting from it we will build a curve in the plane that belongs to the Fučík Spectrum. The most important result of this work assures that this curve is the first non-trivial curve of the Fučík Spectrum. We also will have studied at the end of the text some properties and behaviors of the obtained curve, such as the fact that it is continuous, strictly decreasing and, in the limit, converges to trivial lines.

Keywords: *Partial Differential Equations. p -Laplacian Operator. Fučík Spectrum. Mountain Pass Theorem.*

Lista de Figuras

2.1	Linhas triviais em Σ_p .	32
2.2	Conjuntos de pontos não pertencentes ao Σ_p	33
2.3	Reta r_s paralela a diagonal principal	34
2.4	Curva $\mathcal{C}$	46
3.1	Hipótese de contradição Teorema 3.1	54
3.2	Caminho em Γ	62

Sumário

Simbologia	17
Introdução	19
1 Preliminares.	25
1.1 Teoria de Pontos Críticos	25
1.2 Espaços de Sobolev	27
2 Construção de uma Curva em Σ_p	29
2.1 Resultados técnicos	31
2.2 Propriedades do Σ_p	32
2.3 O terceiro ponto crítico do funcional.	45
3 A primeira curva não-trivial do Σ_p	47
3.1 Resultados técnicos	47
3.2 O primeiro ponto não trivial de Σ_p	53
4 Estudo das propriedades da curva $\mathcal{C}$	63
4.1 Lemas preliminares	63
4.2 Monotocidade da curva	64
4.3 Análise assintótica de $\mathcal{C}$	67
Referências	71

Simbologia

$ \Omega $	Medida de Lebesgue do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Conjunto $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, com $\overline{\Omega'}$ compacto;
$u_n \rightharpoonup u$	Convergência fraca;
$u_n \longrightarrow u$	Convergência forte;
C^1	$C^1 = C^1(\Omega, \mathbb{R})$;
$\mathcal{P}(X)$	Conjuntos das partes do conjunto X ;
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev;
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$;
$o_n(1)$	sequência real que converge para 0 quando $n \rightarrow \infty$;
p'	$p' = \frac{p}{p-1}$;
p^*	$p^* = \frac{pN}{N-p}$;
$\Delta_p u$	$-\Delta_p u = \operatorname{div}(\nabla u ^{p-2} \nabla u)$;
$\ u\ _p$	$\ u\ _p = (\int_{\Omega} u ^p)^{\frac{1}{p}}$
(PS)	Palais-Smale;
$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} L^k(\Omega)$;
$C^\infty(\Omega)$	$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$;
$C_0^\infty(\Omega)$	$C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^k(\Omega)$;
u^+	$u^+ = \max\{u, 0\}$;
u^-	$u^- = \max\{-u, 0\}$.

Introdução

O Problema de Autovalor (PA),

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{p-2} & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{PA})$$

ja é bem conhecido e foi amplamente estudado, como continuação aos estudos do espectro do operador laplaciano usual.

Em [32] prova-se o primeiro autovalor do operador $-\Delta_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ é caracterizado variacionalmente por

$$\lambda_1 := \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p ; u \in W_0^{1,p}(\Omega) , \int_{\Omega} |u|^p = 1 \right\}.$$

Em [7], obtêm-se uma sequência de autovalores λ_n tal que quando $n \rightarrow +\infty$ temos que

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Em [2], Anane e Tsoul caracterizam o segundo autovalor do Problema (PA) como sendo

$$\lambda_2 := \min \{ \lambda > \lambda_1 ; \lambda \text{ é um autovalor de (PA)} \}$$

e garantem a não existência de nenhum outro autovalor entre o primeiro e o segundo autovalor.

A partir do espectro usual do operador $-\Delta$, denotado por σ_2 , na década de 70, Svatopluk Fučík em [25], estudou uma generalização, considerando pesos distintos na parte positiva e negativa da função u . Dancer foi quem deu início aos estudos do caso em que temos as chamadas "*jumping non-linearities*". Desde então, começaram os primeiros resultados para o Espectro de Fučík Σ_p .

Em [15], garante que, localmente, Σ_2 é formado por curvas que partem de (λ_l, λ_l) , onde $\{\lambda_l\}$ são autovalores distintos de $-\Delta$.

Em [38], garante que Σ_2 contém curvas contínuas e estritamente decrescentes. Quando $p = 2$, $N = 1$, nos mostra que Σ_p tem o mesmo comportamento que o caso semilinear unidimensional estudado em [24].

Em [17], usa uma abordagem variacional para o estudo da primeira curva não-trivial de Σ_2 . Essa curva, para o caso em que $p = 2$, coincide com a obtida em [14] e [38], mesmo que a abordagem variacional usada neste trabalho difira da usada nos outros trabalhos. Outros trabalhos trataram de Σ_2 durante a década de 90, veja [4, 35].

Nesse trabalho, apresentamos os resultados publicados por Cuesta, de Figueiredo e Gossez em [13], onde, de maneira pioneira, é estudado o espectro de Fučík do operador $-\Delta_p$. Apresentaremos a construção e um estudo qualitativo da primeira curva não-trivial de Σ_p .

O Capítulo 1 contém uma breve recapitulação sobre Teoria dos Pontos Críticos e Espaços de Sobolev afim de tornar esse texto auto contido.

O Capítulo 2 trata do estudo do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \alpha (u^+)^{p-1} - \beta (u^-)^{p-1} & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{PF})$$

chamado de Problema de Fučík (PF) e do Espectro de Fučík Σ_p , que é o conjunto dos pontos (α, β) , para os quais (PF) admite uma solução não-trivial. Através de uma abordagem variacional construiremos no plano $\mathbb{R}^2$ a curva $\mathcal{C}$ onde cada ponto pertence a Σ_p e está associado a um ponto crítico do seguinte funcional

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_s : M \subset W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \widetilde{J}_s(u) := \int_{\Omega} |\nabla u|^p - s \int (u^+)^p, \end{aligned}$$

onde

$$M = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) ; \int_{\Omega} |u|^p = 1 \right\}. \quad (1)$$

Para construirmos a curva $\mathcal{C}$ utilizaremos os resultados já conhecidos do Problema (PA) junto aos conceitos do capítulo anterior, para assim obtermos as primeiras propriedades e resultados do Espectro de Fučík.

Na Seção 2.2, mostramos as primeiras propriedades do Espectro de Fučík e conseguimos provar que φ_1 e $-\varphi_1$ são os dois primeiros pontos críticos do funcional $\widetilde{J}_s$, respectivamente ponto de mínimo global e mínimo local estrito. Através dos resultados dessa seção junto a uma versão do Teorema do Passo da Montanha para uma C^1 variedade, conseguimos o terceiro ponto crítico do funcional, descrito no principal resultado do capítulo:

Teorema 2.16. *Para cada $s \geq 0$, $(s + c(s), c(s)) \in \Sigma_p$, onde $c(s) > \lambda_1$ é definido pela seguinte formula minimax*

$$c(s) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_s(u).$$

O Capítulo 3 dedica-se a explorar algumas propriedades da curva $\mathcal{C}$ afim de provar que ela é a primeira curva não-trivial no Espectro de Fučík. Mostraremos que as linhas triviais são isoladas em Σ_p e exploramos uma condição para encontrarmos pontos críticos do funcional $\widetilde{J}_s$.

O resultado mais importante deste capítulo, é o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Seja $s \geq 0$. O ponto $(s + c(s), c(s))$ é o primeiro ponto não trivial de Σ_p na reta paralela a diagonal passando por $(s, 0)$.*

A demonstração do resultado precedente se dá por contradição, obtida através da construção de um caminho em M , utilizando-se de propriedades topológicas desse conjunto.

Por fim, no Capítulo 4 exploramos algumas propriedades da curva $\mathcal{C}$, estudando o seu comportamento assintótico, mostrando que perto do infinito com respeito a cada eixo, $\mathcal{C}$ se aproxima decrescentemente das linhas triviais de Σ_p . Mostramos ainda que $\mathcal{C}$ é uma curva contínua.

1 Preliminares.

Visando a boa compreensão deste trabalho, durante esse capítulo apresentaremos conceitos e resultados utilizados ao longo do texto. Divido em duas seções, primeiramente desenvolvemos a Teoria de Pontos Críticos e por fim, a segunda seção é dedicada aos Espaços de Sobolev. Durante esse capítulo, consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto não-vazio.

1.1 Teoria de Pontos Críticos

Com base em [1, 21, 37], apresentamos nessa seção definições e resultados da teoria dos pontos críticos que serão utilizados ao longo do texto.

Definição 1.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Dizemos que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função de Carathéodory* quando

- $f(\cdot, s)$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$.
- $f(x, \cdot)$ é contínua para quase todo $x \in \overline{\Omega}$.

Definição 1.2. Sejam X um Espaço de Banach, X' seu dual topológico e $I : X \rightarrow \mathbb{R}$. I possui derivada de *Fréchet* I' no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$ tal que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{I(u+v) - I(u) - T(v)}{\|v\|} = 0.$$

A derivada de Fréchet no ponto u quando existir é única e denotaremos por $I'(u)$. I é dito ser de classe C^1 em Ω , ou $I \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ quando existe a derivada de Fréchet em todo ponto $u \in \Omega$ e $I' : \Omega \rightarrow X'$ for contínua.

Definição 1.3. Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um *valor crítico* de I quando existe $u \in X$ tal que $I'(u) = 0$ e $I(u) = c$.

Definição 1.4. Uma *variedade diferenciável* de dimensão m e classe C^k é um par ordenado $(M, \mathfrak{U})$ onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\mathfrak{U}$ é um atlas máximo de dimensão m e classe C^k sobre M .

Teorema 1.5 (Multiplicadores de Lagrange). *Sejam X um espaço de Banach, $J, I \in C^1(X, \mathbb{R})$, e x_0 um extremo local de $J|_M$, onde $M = \{x \in X ; I(x) = I(x_0)\}$. Se $I'(x_0) \neq 0$ então existe $t \in \mathbb{R}$ tal que*

$$J'(x_0)v = tI'(x_0)v$$

para todo $v \in X$.

Demonstração. Ver [21] Teorema 3.1. ■

Corolário 1.6. A derivada de $J|_M$, tem norma dada por:

$$\|J'|_M(u)\|_* := \min_{t \in \mathbb{R}} \|J'(u) - tI'(u)\|_{X'}.$$

Demonstração. Ver [21] Corolário 3.1. ■

Definição 1.7. Um ponto $u \in M$ é um ponto crítico de J sujeito ao vínculo M quando $\|J'|_M(u)\|_* = 0$.

Definição 1.8. Um funcional $J : X \rightarrow \mathbb{R}$, X um espaço de Banach, é dito ser um *Funcional Semicontínuo Inferiormente* se $J^{-1}\{(a, +\infty)\}$ é aberto em X para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Definição 1.9. Uma função J satisfaz a condição de *Palais-Smale em M* , (abreviado como (PS)), se qualquer sequência $(u_n) \subset M$ tal que $J(u_n)$ é limitada e $\|J'(u_n)\|_* \rightarrow 0$, possui uma subsequência fortemente convergente para um ponto de M .

Definição 1.10. Sejam E um Espaço de Banach e $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 . Se existirem $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset E$ tal que

$$J(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad J'(u_n) \rightarrow 0,$$

dizemos que (u_n) é uma *sequência $(PS)_c$ para J* . Se tal sequência possui uma subsequência convergente, diz-se J satisfaz a condição $(PS)_c$.

Teorema 1.11 (Princípio Variacional de Eklund). *Sejam X um espaço métrico completo e $\Phi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ um funcional semicontínuo inferiormente. Se Φ for limitado inferiormente e sejam $\epsilon > 0$, $\lambda > 0$ e $u \in X$ dados de forma que*

$$\Phi(u) \leq \inf_X \Phi + \frac{\epsilon}{2}$$

então existe $v_\epsilon \in X$ tal que

$$(a) \quad \Phi(v_\epsilon) \leq \Phi(u);$$

$$(b) \quad d(u, v_\epsilon) \leq \frac{1}{\lambda};$$

$$(c) \quad \text{para cada } w \neq v_\epsilon \in X$$

$$\Phi(v_\epsilon) < \Phi(w) + \epsilon\lambda d(v_\epsilon, w).$$

Demonstração. Ver [16] Teorema 4.2 ■

Proposição 1.12. *Sejam E um Espaço de Banach e $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ funcional de classe C^1 limitado inferiormente. Se I satisfaz a condição de (PS) no nível c com $c = \inf_{u \in E} I(u)$, então c é atingido em um ponto $u_0 \in E$ e u_0 é um ponto crítico de I .*

Teorema 1.13 (Teorema do Passo da Montanha em uma C^1 variedade). *Seja M uma variedade de classe C^1 , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $u_0, u_1 \in M$ e $\epsilon > 0$ tais que*

$$(G1) \quad \|u_1 - u_0\|_E > \epsilon;$$

$$(G2) \quad \inf \{f(u) ; u \in M \text{ e } \|u - u_0\|_E = \epsilon\} > \max \{f(u_0), f(u_1)\}.$$

Se:

(M1) *f satisfaz a condição (P.S) em M ;*

(M2) $\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([-1, +1], M) ; \gamma(-1) = u_0 \text{ e } \gamma(1) = u_1\} \neq \emptyset$.

então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1,1]} f(u)$$

é um valor crítico de f .

Demonstração. Ver [27], segue do Teorema 3.2. ■

1.2 Espaços de Sobolev

Os espaços de Sobolev são objetos de extrema importância para este trabalho. Nessa seção apresentamos definições e resultados com base em [9].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p \leq \infty$.

Definição 1.14. Dado $1 < p < \infty$, $i = 1, 2, \dots, N$, denotaremos por $W^{1,p}(\Omega)$ o *Espaço de Sobolev* definido por

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tal que vale (1.1)}\},$$

onde

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \phi \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.1)$$

Denotaremos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$,

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_c^1(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, definimos $\frac{\partial u}{\partial x_1} = g_1$ e denotaremos por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Definição 1.15. O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é munido da norma

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_p + \|\nabla u\|_p.$$

Observação 1.16. $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável para todo $1 \leq p \leq \infty$ e reflexivo para $1 < p < \infty$. Quando $p = 2$ é um espaço de Hilbert separável.

Definição 1.17. Sejam E_1, E_2 espaços normados com $E_1 \subset E_2$. Dizemos que E_1 está imerso continuamente em E_2 ou que a imersão $E_1 \hookrightarrow E_2$ é contínua quando a aplicação identidade $i : E_1 \rightarrow E_2$, tal que $i(x) = x$ para todo $x \in E_1$ é uma aplicação contínua.

Corolário 1.18 (Imersões de Sobolev). *Sejam Ω um aberto de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então temos as seguintes imersões contínuas.*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) && \text{se } p < N \\ W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) && \forall q \in [p, +\infty), \quad \text{se } p = N \\ W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^\infty(\Omega) && \text{se } p > N. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [9] Corolário 9.14. ■

Definição 1.19. Sejam E_1, E_2 espaços normados com $E_1 \subset E_2$. Dizemos que E_1 está imerso compactamente em E_2 ou que a imersão $E_1 \hookrightarrow E_2$ é compacta quando a aplicação identidade $i : E_1 \rightarrow E_2$, tal que $i(x) = x$ para todo $x \in E_1$ é uma aplicação compacta.

Teorema 1.20 (Rellich-Kondrachov). *Supondo que Ω é limitado e de classe C^1 . Então temos as seguintes imersões compactas:*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) && \forall q \in [1, p^*), \quad \text{se } p < N \\ W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) && \forall q \in [p, +\infty), \quad \text{se } p = N \\ W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow C(\overline{\Omega}) && \text{se } p > N. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [9] Teorema 9.16. ■

Lema 1.21. *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Supondo que $\text{supp } u$ é um subconjunto compacto de Ω , então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [9] Lema 9.5 ■

Teorema 1.22. *Supondo que Ω seja de classe C^1 . Seja*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

com $1 \leq p < \infty$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:

- (i) $u = 0$ em $\partial\Omega$;
- (ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [9] Teorema 9.17. ■

Corolário 1.23 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $1 \leq p < \infty$ e Ω um aberto limitado. Então existe uma constante $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_p \leq C \|u\|_{1,p}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [9] Corolário 9.19. ■

2 Construção de uma Curva em Σ_p

Na literatura, já é bem conhecido o Problema de Autovalor do $-\Delta_p$, a saber:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{p-2} & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{PA})$$

Uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é dita uma solução fraca do problema (PA) se

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} \nabla u \nabla \phi = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \phi \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Definição 2.1. Dizemos que λ é um *autovalor* de (PA), se existir $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$, tal que u satisfaz (PA) no sentido fraco. Nesse caso, u é dito uma *autofunção* associada a λ .

Definição 2.2. O *espectro* do operador $-\Delta_p$ é definido como o conjunto σ_p , onde

$$\sigma_p := \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \text{ é autovalor de } -\Delta_p\}.$$

Da Teoria de Regularidade para equações quasilineares elípticas, temos que soluções do Problema de Autovalor (PA) pertencem a $L^\infty(\Omega)$ e são de classe $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega)$, veja [36].

De acordo com [32], o primeiro autovalor pode ser caracterizado variacionalmente como

$$\lambda_1 := \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p ; u \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_{\Omega} |u|^p = 1 \right\} \quad (2.1)$$

e também o ínfimo acima é igual à

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^p}{\int_{\Omega} |v|^p}. \quad (2.2)$$

Seja

$$M := \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) ; \int_{\Omega} |u|^p = 1 \right\}.$$

A seguir, listamos alguns resultados clássicos conhecidos para o operador $-\Delta_p$.

- Para todo $v \in M$, o ínfimo é atingido em (2.1) se, e somente se, v é autofunção associada a λ_1 ;
- $\lambda_1 > 0$, λ_1 é simples no sentido de que o seu autoespaço associado é unidimensional;
- Qualquer autofunção associada a um autovalor positivo $0 < \lambda \neq \lambda_1$ muda de sinal;

- Existe uma autofunção φ_1 associada a λ_1 , tal que $\varphi_1 > 0$ e $\int_{\Omega} |\varphi_1|^p = 1$;
- λ_1 é isolado.

Veja [36].

Definição 2.3. Dizemos que $(\alpha, \beta) \in \Sigma_p$, ou que pertence ao *Espectro de Fučík*, se $u \neq 0$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \alpha (u^+)^{p-1} - \beta (u^-)^{p-1} & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{PF})$$

Uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é dita uma solução fraca do Problema de Fučík se

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = \int_{\Omega} \alpha (u^+)^{p-1} \phi - \int_{\Omega} \beta (u^-)^{p-1} \phi \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.3)$$

Observação 2.4. Note que $(\lambda, \lambda) \in \Sigma_p$, para todo $\lambda \in \sigma_p$. De fato,

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} \iff -\Delta_p u = \lambda (u^+)^{p-1} - \lambda (u^-)^{p-1}.$$

Como $u = u^+ - u^-$, $|u| = u^+ + u^-$ e usando $u^+, u^- \geq 0$,

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{p-2} u \\ &= \lambda |u|^{p-2} u^+ - \lambda |u|^{p-2} u^- \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} &= \lambda (u^+)^{p-2} u^+ - \lambda (u^-)^{p-2} u^- \\ &= \lambda (u^+)^{p-1} - \lambda (u^-)^{p-1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nos cálculos acima, usamos os seguintes fatos:

- onde $u > 0$ temos

$$|u|^{p-2} = (u^+)^{p-2} \quad \text{e} \quad |u|^{p-2} u^- = 0.$$

- onde $u < 0$ temos

$$|u|^{p-2} = (u^-)^{p-2} \quad \text{e} \quad |u|^{p-2} u^+ = 0.$$

Observação 2.5. Note que

$$\sigma_p = \{\lambda \in \mathbb{R}; (\lambda, \lambda) \in \Sigma_p\}.$$

2.1 Resultados técnicos

Lema 2.6. *Seja $(v_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, $v_n \neq 0$ de forma que $v_n \geq 0$ q.s. e $|v_n| > 0 \rightarrow 0$. Então*

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla v_n|^p}{\int_{\Omega} v_n^p} \rightarrow +\infty.$$

Demonstração. Seja (w_n) dado por

$$w_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_p}.$$

Supondo por contradição que (w_n) admite uma subsequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então segue da reflexividade de $W_0^{1,p}(\Omega)$ que existe $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de maneira que, a menos de uma subsequência,

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Das Imersões de Sobolev Compactas,

$$w_n \rightarrow w \quad \text{em } L^p(\Omega),$$

então, $w \geq 0$ q.s. em Ω . Como $v_n \geq 0$ q.s. em Ω , então $w_n \geq 0$ q.s. em Ω e daí $w \geq 0$ q.s. em Ω , mas como $\|w_n\|_p = 1$ segue então que

$$\|w\|_p = 1 = \int_{\Omega} |w|^p = \int_{\Omega} w^p.$$

Afirmção: *Existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$|w > \varepsilon| := |\{x \in \Omega; w(x) > \varepsilon\}| > 0.$$

De fato, pois do contrário teríamos que para todo $\varepsilon > 0$,

$$|\{x \in \Omega; w(x) > \varepsilon\}| = 0 \tag{2.6}$$

atentando-se que $|w > \varepsilon|$ não pode ser negativo, visto que é a medida de um conjunto. Podemos reescrever como

$$\{x \in \Omega; w(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in \Omega; w(x) > \frac{1}{n}\right\}.$$

Então pela sub-aditividade da medida de Lebesgue

$$|\{x \in \Omega; w(x) > 0\}| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \left\{x \in \Omega; w(x) > \frac{1}{n}\right\} \right|,$$

mas de (2.6), com $\varepsilon = \frac{1}{n}$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \left\{x \in \Omega; w(x) > \frac{1}{n}\right\} \right| = 0 &\implies |\{x \in \Omega; w(x) > 0\}| = 0 \\ &\implies w = 0 \text{ q.s. em } \Omega \end{aligned}$$

entrando em contradição com o fato de que $\|w\|_p = 1$. Então de fato existe $\varepsilon > 0$ de forma que a afirmação é verdadeira. ■

2.2 Propriedades do Σ_p

Essa seção dedica-se a estudar algumas das propriedades do Espectro de Fučík Σ_p .

Proposição 2.7. *As linhas triviais $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ estão contidas em Σ_p .*

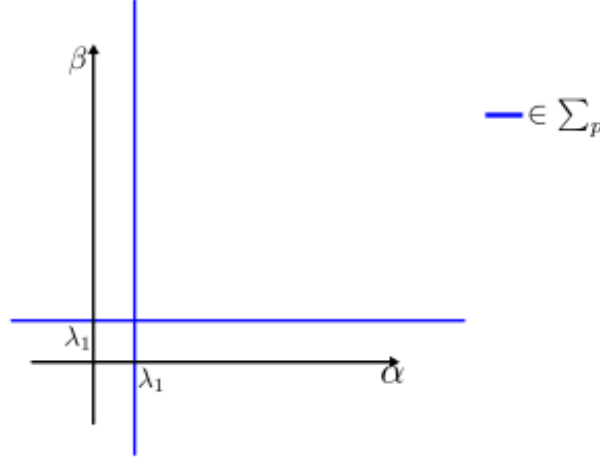


Figura 2.1: Linhas triviais em Σ_p .

Demonstração. De fato, usando que as autofunções associadas a λ_1 tem sinal definido, mostraremos que $(\lambda_1, \beta) \in \Sigma_p$ onde $\beta \in \mathbb{R}$.

Considerando $u = \varphi_1$, temos que $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\varphi_1 > 0$ em Ω , logo $\varphi_1^- = 0$ e $|\varphi_1| = \varphi_1^+$. Assim, da forma fraca do problema (PA), para todo $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^{p-1} \nabla \varphi_1 \nabla \phi &= \lambda_1 \int_{\Omega} |\varphi_1|^{p-2} \varphi_1 \phi \\ &= \int_{\Omega} \lambda_1 (\varphi_1^+)^{p-1} \phi + \int_{\Omega} \beta (\varphi_1^-)^{p-1} \phi \end{aligned}$$

para todo $\beta \in \mathbb{R}$, mostrando que $(\lambda_1, \beta) \in \Sigma_p$. Para concluirmos que $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\} \subset \Sigma_p$, basta considerarmos $u = -\varphi_1$ e procedermos de forma análoga. ■

A Figura 2.2, na próxima página, é uma forma de visualização do próximo resultado.

Proposição 2.8. $\Sigma_p \setminus ((\{\lambda_1\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{\lambda_1\})) \subset \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha > \lambda_1, \beta > \lambda_1\}$.

Demonstração. Suponhamos por contradição que exista $(\alpha, \beta) \in \Sigma_p \setminus ((\{\lambda_1\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{\lambda_1\}))$, com $\alpha < \lambda_1$. Então existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$ tal que para todo $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = \int_{\Omega} \alpha (u^+)^{p-1} \phi - \int_{\Omega} \beta (u^-)^{p-1} \phi.$$

Se $u^+ \neq 0$, então, considerando $\phi = u^+$ na forma fraca de (PF), temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^p = \alpha \int_{\Omega} (u^+)^p \implies \alpha = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u^+|^p}{\int_{\Omega} (u^+)^p} \geq \lambda_1,$$

o que é uma contradição.

Logo $u^+ = 0$ e $u = -u^-$. Além disso, para todo $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi &= \int_{\Omega} \alpha (u^+)^{p-1} \phi - \int_{\Omega} \beta (u^-)^{p-1} \phi \\ &= - \int_{\Omega} \beta (u^-)^{p-1} \phi \\ &= \int_{\Omega} \beta |u|^{p-2} u \phi, \end{aligned}$$

o que implica que $\beta \in \sigma_p$. Como λ_1 é o único autovalor com autofunções que não mudam de sinal, segue que $\beta = \lambda_1$, o que contraria a nossa hipótese. O caso em que $\beta < \lambda_1$ é análogo.

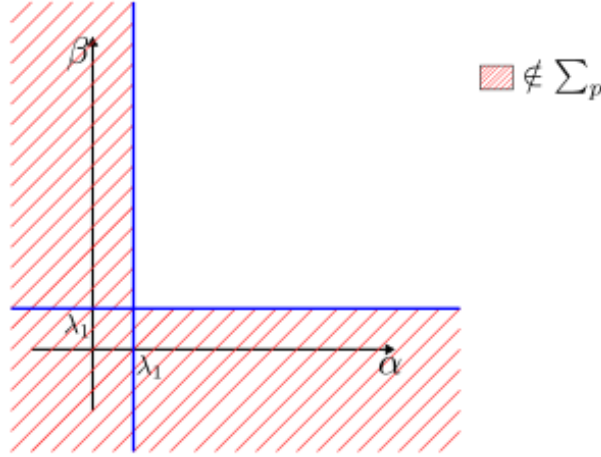


Figura 2.2: Conjuntos de pontos não pertencentes ao Σ_p

■

Vamos definir os seguintes funcionais

$$\begin{aligned} J_s : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J_s(u) := \int_{\Omega} |\nabla u|^p - s \int_{\Omega} (u^+)^p. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto I(u) := \int_{\Omega} |u|^p. \end{aligned}$$

$$M = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) ; I(u) = 1\} = I^{-1}\{1\}, \quad (2.7)$$

$$\widetilde{J}_s := J_s|_M.$$

Como consequência do Teorema 1.5 e do Corolário 1.6, para o funcional definido acima, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.9. u é um ponto crítico de $\widetilde{J}_s$ se, e somente, se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\widetilde{J}'_s(u) v = t I'(u) v \quad (2.8)$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Seja u ponto crítico de $\widetilde{J}_s$. Note que $J_s, I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I'(u) u = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^{p-2} u u = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p = \frac{1}{p} \neq 0. \quad (2.9)$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um Espaço de Banach, pelo Teorema 1.5, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\widetilde{J}'_s(u) v = t I'(u) v$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Por outro lado, suponha que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ vale (2.8), então

$$\widetilde{J}'_s(u) v - t I'(u) v = 0 \implies \|\widetilde{J}'_s(u) - t I'(u)\|_{-1,p'} = 0.$$

Portanto, do Corolário 1.6

$$\|J'|_M(u)\|_{\star} = 0$$

e u é um ponto crítico sujeito ao vínculo M . ■

Lema 2.10. Os pontos de Σ_p que passam por $(s, 0)$ e é paralela a diagonal são exatamente da forma $(s + \widetilde{J}_s(u), \widetilde{J}_s(u))$ onde u é ponto crítico de $\widetilde{J}_s$.

Demonstração. Seja $s \in \mathbb{R}$ fixo, u um ponto crítico de $\widetilde{J}_s$ e consideremos a reta r_s como sendo a reta que passa por $(s, 0)$ e é paralela a diagonal do plano (α, β) .

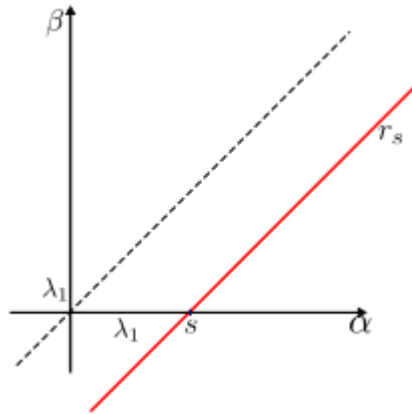


Figura 2.3: Reta r_s paralela a diagonal principal

Queremos então mostrar que os pontos de Σ_p que estão na reta r_s são da forma $(s + c, c)$ onde c é valor crítico de $\widetilde{J}_s$.

Como u é um ponto crítico de $\widetilde{J}_s$, pelo Proposição 2.9 para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$J'_s(u) v = t I'(u) v \iff \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v - s \int_{\Omega} (u^+)^{p-1} v = t \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v. \quad (2.10)$$

Do lado direito de (2.10) temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v &= \int_{\Omega} s (u^+)^{p-1} v + \int_{\Omega} t |u|^{p-2} uv \\
 &= \int_{\Omega} \left(s (u^+)^{p-1} v + t |u|^{p-2} uv \right) \\
 &= \int_{\Omega} \left(s (u^+)^{p-1} v + t |u|^{p-2} (u^+ - u^-) v \right) \\
 &= \int_{\Omega} \left(s (u^+)^{p-1} v + t |u|^{p-2} u^+ v - t |u|^{p-2} u^- v \right) \\
 &= \int_{\Omega} \left(s (u^+)^{p-1} v + t (u^+)^{p-1} v - t (u^-)^{p-1} v \right) \\
 &= \int_{\Omega} (s + t) (u^+)^{p-1} v - \int_{\Omega} t (u^-)^{p-1} v,
 \end{aligned}$$

mostrando que u é solução fraca do Problema (PF). Portanto $(s + t, t) \in \Sigma_p$.

Agora, seja $u \in M$ e considerando $u = v$ em (2.10)

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u - s \int_{\Omega} (u^+)^{p-1} u = t \int_{\Omega} |u|^{p-2} uu \iff \int_{\Omega} |\nabla u|^p - s \int_{\Omega} (u^+)^p = t \int_{\Omega} |u|^p$$

o que implica em

$$\widetilde{J}_s(u) = t.$$

Logo,

$$\widetilde{J}'_s(u) - tI'(u) = 0 \iff \widetilde{J}_s(u) = t.$$

Portanto o multiplicador de Lagrange t de J_s é exatamente o valor critico do ponto crítico $u \in M$. Concluindo que todos os pontos de Σ_p que estão em r_s são da forma

$$(s + \widetilde{J}_s(u), \widetilde{J}_s(u))$$

com u ponto crítico de J_s . ■

Com o próximo resultado teremos o primeiro ponto crítico do funcional, um ponto de mínimo global.

Proposição 2.11. φ_1 é um ponto de mínimo global de $\widetilde{J}_s$ com $\widetilde{J}_s(\varphi_1) = \lambda_1 - s$. O ponto corresponde em Σ_p é da forma $(\lambda_1, \lambda_1 - s)$ que se encontra na reta trivial vertical passando por (λ_1, λ_1) .

Demonstração. Primeiro mostremos que para todo $u \in M$,

$$\widetilde{J}_s(u) \geq \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^p - s \int_{\Omega} (u^+)^p. \quad (2.11)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla u|^p - s \int_{\Omega} (u^+)^p &\geq \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^p - s \int_{\Omega} (u^+)^p \\
 \int_{\Omega} |\nabla u|^p &\geq \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^p \\
 \lambda_1 &\leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p}{\int_{\Omega} |u|^p}
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde (2.12) é verdade por (2.2). De (2.11), se $u \in M$, como

$$\int_{\Omega} (u^+)^p \leq \int_{\Omega} |u|^p = 1 \quad (2.13)$$

temos que

$$\widetilde{J}_s(u) \geq \lambda_1 - s. \quad (2.14)$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_s(\varphi_1) &= \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^p - s \int_{\Omega} (\varphi_1^+)^p \\ &= \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^p - s. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Usando que φ_1 é auto função associada ao autovalor λ_1 do $-\Delta_p$, tomando φ_1 como função teste, temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^p = \lambda_1 \int_{\Omega} |\varphi_1|^p = \lambda_1. \quad (2.16)$$

Assim, por (2.16) em (2.15) garantimos que

$$\widetilde{J}_s(\varphi_1) = \lambda_1 - s. \quad (2.17)$$

Por fim, do Lema 2.10, com $u = \varphi_1$, o ponto correspondente de Σ_p na reta r_s é exatamente da forma

$$\begin{aligned} (s + \widetilde{J}_s(\varphi_1), \widetilde{J}_s(\varphi_1)) &= (s + \lambda_1 - s, \lambda_1 - s) \\ &= (\lambda_1, \lambda_1 - s) \end{aligned}$$

e $(\lambda_1, \lambda_1 - s)$ está na intersecção da reta r_s com a reta vertical $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$. ■

Um propriedade muito importante do Espectro de Fučík é o fato dele ser simétrico em relação a diagonal principal, provamos a seguir.

Proposição 2.12. Σ_p é simétrico em relação a diagonal principal.

Demonstração. Supondo que $(\alpha, \beta) \in \Sigma_p$, então existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ onde u é solução no sentido fraco de

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \alpha (u^+)^{p-1} - \beta (u^-)^{p-1} & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Considerando $v = -u$, observe que

$$\begin{aligned} -\Delta_p(v) &= \Delta_p(u) \\ &= -\left(\alpha (u^+)^{p-1} - \beta (u^-)^{p-1}\right) \\ &= \beta (v^+)^{p-1} - \alpha (v^-)^{p-1}. \end{aligned}$$

Logo $(\beta, \alpha) \in \Sigma_p$, provando Σ_p ser simétrico em relação a diagonal. ■

O segundo ponto crítico do funcional que encontraremos é um ponto de mínimo local conforme temos na proposição a seguir.

Proposição 2.13. $-\varphi_1$ é um ponto de mínimo local estrito de $\widetilde{J}_s$ com $\widetilde{J}_s(\varphi_1) = \lambda_1$. O ponto corresponde em Σ_p é da forma $(\lambda_1 + s, \lambda_1)$ e se encontra na reta trivial horizontal passando por (λ_1, λ_1) .

Demonstração. Quando $s = 0$, os dois valores críticos $\widetilde{J}_s(\varphi)$ e $\widetilde{J}_s(-\varphi_1)$ coincidem assim como os pontos correspondentes em Σ_p .

Suponhamos por contradição que existe uma sequência $(u_n) \subset M$ com $u_n \neq -\varphi_1$, tal que

$$u_n \longrightarrow -\varphi_1 \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega)$$

e

$$\widetilde{J}_s(u_n) \leq \lambda_1.$$

Primeiro, notemos que para um n suficientemente grande, (u_n) troca de sinal. De fato, como $-\varphi_1 < 0$ e $u_n \rightarrow -\varphi_1$ q.s., então u_n deve ser < 0 em algum conjunto de medida positiva.

Ainda, se $u_n \leq 0$ q.s em Ω , então

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_s(u_n) &= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p - s \int_{\Omega} (u_n^+)^p \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p > \lambda_1, \end{aligned}$$

pois $u_n \neq \pm\varphi_1$, o que contradiz $\widetilde{J}_s(u_n) \leq \lambda_1$. Portanto, (u_n) troca de sinal.

Definimos

$$r_n = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_n^+|^p}{\int_{\Omega} (u_n^+)^p}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_s(u_n) &= \int_{\Omega} |\nabla u_n^+|^p + \int_{\Omega} |\nabla u_n^-|^p - s \int_{\Omega} (u_n^+)^p \\ &= (r_n - s) \int_{\Omega} (u_n^+)^p + \int_{\Omega} |\nabla u_n^-|^p \\ &\geq (r_n - s) \int_{\Omega} (u_n^+)^p + \lambda_1 \int_{\Omega} (u_n^-)^p. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Por outro lado,

$$\widetilde{J}_s(u_n) \leq \lambda_1 = \lambda_1 \int_{\Omega} |u_n|^p = \lambda_1 \int_{\Omega} (u_n^+)^p + \lambda_1 \int_{\Omega} (u_n^-)^p. \tag{2.19}$$

Usando o fato que

$$\int_{\Omega} (u_n)^p > 0,$$

de (2.18) e (2.19) temos que

$$\begin{aligned} (r_n - s) \int_{\Omega} (u_n^+)^p + \lambda_1 \int_{\Omega} (u_n^-)^p &\leq \lambda_1 \int_{\Omega} (u_n^+)^p + \lambda_1 \int_{\Omega} (u_n^-)^p \\ r_n - s &\leq \lambda_1. \end{aligned}$$

Logo, (r_n) é limitada.

Agora, pelas Imersões de Sobolev,

$$u_n \longrightarrow -\varphi_1 \quad \text{em } L^p(\Omega)$$

e como (u_n) troca de sinal,

$$|u_n > 0| \longrightarrow 0.$$

Pelo Lema 2.6,

$$r_n \longrightarrow +\infty,$$

contradizendo (r_n) ser limitado.

Portanto, $-\varphi_1$ é um ponto de mínimo local estrito e pelo Lema 2.10

$$(s + \widetilde{J}_s(-\varphi_1), \widetilde{J}_s(-\varphi_1)) = (\lambda_1, \lambda_1 - s)$$

é o ponto correspondente em Σ_p . ■

Até então temos dois pontos críticos do funcional $\widetilde{J}_s$, obtidos nas Proposições 2.11 e 2.13. A partir de agora buscaremos o terceiro ponto crítico. O seguinte Lema nos garante uma das hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, Proposição 1.13.

Lema 2.14. J_s satisfaz a condição (PS) em M .

Demonstração. Mostraremos que uma sequência Palais-Smale de J_s qualquer converge a menos de uma subsequência.

Considerando $(u_n) \subset M$ sequência (P.S) para J_s , temos que $J_s(u_n)$ é limitada e

$$\|\widetilde{J}_s(u_n)\|_* = \min_{t \in \mathbb{R}} \|\widetilde{J}_s(u_n) - tI'(u_n)\|_{E'} \longrightarrow 0.$$

Seja $(t_n) \in \mathbb{R}$ sequência de forma que

$$\left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi - s \int_{\Omega} (u^+)^{p-1} \phi - t_n \int_{\Omega} |u_n|^{p-2} u_n \phi \right| < \epsilon_n \|\phi\|_{1,p} \quad (2.20)$$

para todo $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $\epsilon_n \rightarrow 0$.

Como $\widetilde{J}_s(u_n)$ é limitado, então existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} C &\geq \widetilde{J}_s(u_n) \\ &\geq \|u_n\|_{1,p}^p - s \|u_n^+\|_p^p. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como

$$\|u_n^+\|_p^p \leq \|u_n\|_p^p = 1,$$

temos de (2.21) que

$$C \geq \|u_n\|_{1,p}^p - s,$$

concluindo então que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Agora pelas Imersões de Sobolev, como (u_n) é limitada, existe subsequência que converge fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e fortemente em $L^r(\Omega)$, isto é

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega) \\ u_n &\longrightarrow u \quad \text{em } L^r(\Omega), \quad p \leq r < p^*. \end{aligned}$$

Note que, por (2.20) (t_n) é limitada e, portanto $t_n \rightarrow t$ a menos de uma subsequência.

Por outro lado,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi - s \int_{\Omega} (u_n^+)^{p-1} \phi - t_n \int_{\Omega} |u_n|^{p-2} u_n \phi + = O_n(1)$$

e, portanto, pelo Lema de Brezis-Lieb (veja [10], Teorema 2) e a convergência em $L^r(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi - s \int_{\Omega} (u^+)^{p-1} \phi - t \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \phi = 0 \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.22)$$

Sabemos, por outro lado que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u - \nabla u_n) = O_n(1). \quad (2.23)$$

De [21], página 108, como $\nabla u_n, \nabla u \in \mathbb{R}^N$, existe $C_p > 0$ tal que

$$C_p |\nabla u_n - \nabla u|^p \leq \langle |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla u_n - \nabla u \rangle \quad \text{se } p \geq 2$$

e

$$C_p \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^2}{(|\nabla u_n| - |\nabla u|)^{2-p}} \leq \langle |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla u_n - \nabla u \rangle \quad \text{se } 1 < p < 2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} C_p \|u_n - u\|_{1,p}^p &= C_p \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^p \\ &\leq \int_{\Omega} \langle |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla u_n - \nabla u \rangle \\ &= \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p - \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u \right) - \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_n + \int_{\Omega} |\nabla u|^p \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Usando em (2.22) $\phi = u_n$ e $\phi = u$, temos, respectivamente,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u_n = s \int_{\Omega} (u^+)^{p-1} u_n + t \int_{\Omega} |u|^{p-2} u u_n \quad (2.25)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p = s \int_{\Omega} (u^+)^p + t \int_{\Omega} |u|^p \quad (2.26)$$

Logo, de (2.23), (2.24), (2.25) e (2.26), mais o fato de que $u_n \rightarrow u$ em $L^r(\Omega)$, $p \leq r < p^*$,

$$C_p \|u_n - u\|_{1,p}^p \leq O_n(1) + O_n(1)$$

então

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

■

O seguinte lema nos garante a hipótese (M2) do Teorema do Passo da Montanha, Proposição 1.13.

Lema 2.15. *Seja $\varepsilon_0 > 0$ tal que*

$$\widetilde{J}_s(u) > \widetilde{J}_s(-\varphi_1) \quad (2.27)$$

para todo $u \in B(\varphi_1, \varepsilon_0) \cap M$ com $u \neq -\varphi_1$, sendo a bola em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Então para qualquer $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\inf \left\{ \widetilde{J}_s(u) ; u \in M \text{ e } \|u - (-\varphi_1)\|_{1,p} = \varepsilon \right\} > \widetilde{J}_s(-\varphi_1). \quad (2.28)$$

Demonstração. Suponhamos por contradição que exista um ε tal que $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e

$$\inf \left\{ \widetilde{J}_s(u) ; u \in M \text{ e } \|u - (-\varphi_1)\|_{1,p} = \varepsilon \right\} = \widetilde{J}_s(-\varphi_1).$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in M$ de forma que

$$\|u_n - (-\varphi_1)\|_{1,p} = \varepsilon$$

e tal que

$$\widetilde{J}_s(u_n) \leq \lambda_1 + \frac{1}{2n^2}.$$

Definamos C como

$$C := \left\{ u \in M ; \varepsilon - \delta \leq \|u - (-\varphi_1)\|_{1,p} \leq \varepsilon + \delta \right\},$$

onde $\delta > 0$ é dado de forma que

$$0 < \varepsilon - \delta \text{ e } \varepsilon + \delta < \varepsilon_0.$$

Observe que C é um espaço métrico completo e $\widetilde{J}_s$ é limitado inferiormente em C . Assim, pelo Princípio Variacional de Ekeland, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $v_n \in C$ de forma que:

$$(i) \quad \widetilde{J}_s(v_n) \leq \widetilde{J}_s(u_n); \quad (2.29)$$

$$(ii) \quad \|v_n - u_n\|_{1,p} \leq \frac{1}{n}; \quad (2.30)$$

$$(iii) \quad \widetilde{J}_s'(v_n) = \widetilde{J}_s'(u_n) + \frac{1}{n} \|v_n - u_n\|_{1,p}. \quad (2.31)$$

Mostremos agora que $(v_n) \subset C$ é (PS) para $\widetilde{J}_s$.

Precisamos mostrar que:

- $\widetilde{J}_s'(v_n)$ é limitado;
- $\|\widetilde{J}_s(v_n)\|_* \rightarrow 0$.

Por (2.29), temos que

$$\lambda_1 = J_s(-\varphi_1) < \widetilde{J}_s(v_n) \leq \widetilde{J}_s(u_n)$$

portando $\widetilde{J}_s(v_n)$ é limitado.

Mostremos agora que

$$\|\widetilde{J}_s'(v_n)\|_* \rightarrow 0.$$

Sejam $n > \frac{1}{\delta}$ e $w \in W_0^{1,p}$ tal que $w \in T_{v_n}M$, ou seja

$$\langle I'(v_n), w \rangle = \int_{\Omega} |v_n|^{p-2} v_n w = 0. \quad (2.32)$$

Seja $t \in \mathbb{R}$ e definamos u_t como

$$u_t = \frac{v_n + tw}{\|v_n + tw\|_p}. \quad (2.33)$$

Precisamos mostrar que $u_t \in C$ para t suficientemente pequeno, pois assim poderemos usar a desigualdade (2.31). Separando em partes, segue

1. $u_t \in M$ pois o consideramos como sendo um vetor normalizado com a norma $\|\cdot\|_p$
2. Para t suficientemente pequeno:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \|u_t - (-\varphi_1)\|_{1,p} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{v_n + tw}{\|v_n + tw\|_p} - (-\varphi_1) \right\|_{1,p} \\ &= \left\| \frac{v_n}{\|v_n\|_p} - (-\varphi_1) \right\|_{1,p} \\ &= \|v_n - (-\varphi_1)\|_{1,p}. \end{aligned}$$

3. Estimando $\|v_n - (-\varphi_1)\|_{1,p}$

$$\begin{aligned} \|v_n - (-\varphi_1)\|_{1,p} &= \|v_n - u_n + u_n - (-\varphi_1)_{1,p}\| \\ &\leq \|v_n - u_n\|_{1,p} + \|u_n - (-\varphi_1)_{1,p}\| \\ &\leq \underbrace{\|v_n - u_n\|_{1,p}}_{\leq \frac{1}{n} \text{ por (2.30)}} + \underbrace{\|u_n - (-\varphi_1)_{1,p}\|}_{=\varepsilon \text{ por (H2)}} \\ &= \frac{1}{n} + \varepsilon \\ &< \delta + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, de forma análoga conseguimos

$$\begin{aligned} \|v_n - (-\varphi_1)\|_{1,p} &= \|(-\varphi_1) - u_n + u_n - v_n\|_{1,p} \\ &\geq \|(-\varphi_1) - u_n\|_{1,p} - \|u_n - v_n\|_{1,p} \\ &\geq \varepsilon - \frac{1}{n} \\ &> \varepsilon - \delta. \end{aligned}$$

Portanto, para t suficientemente pequeno, $u_t \in C$ e daqui em diante consideremos $u = u_t$ em (2.31).

Seja $r(t) := \|v_n + tw\|_p$ e note que

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_s(u_t) &= J_s(u_t) \\ &= J_s\left(\frac{v_n + tw}{\|v_n + tw\|_p}\right) \\ &= \frac{1}{\|v_n + tw\|_p^p} J_s(v_n + tw) \\ &= \frac{1}{r(t)^p} J_s(v_n + tw). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Como $v_n \in M$, substituindo a igualdade acima em (2.31) dividindo por t em ambos os lados temos:

$$\frac{J_s(v_n)}{t} - \frac{1}{tr(t)^p} J_s(v_n + tw) \leq \frac{1}{nt} \|u_t - v_n\|_{1,p}. \quad (2.35)$$

Então,

$$\begin{aligned} \|u_t - v_n\|_{1,p} &= \left\| \frac{v_n + tw}{\|v_n + tw\|_p} - v_n \right\|_{1,p} \\ &= \left\| \frac{v_n + tw - v_n \|v_n + tw\|_p}{\|v_n + tw\|_p} \right\|_{1,p} \\ &= \frac{\|v_n + tw - r(t)v_n\|_{1,p}}{r(t)} \\ &= \frac{1}{r(t)} \|(1 - r(t))v_n + tw\|_{1,p}. \end{aligned}$$

Substituindo a igualdade acima em (2.35), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{J_s(v_n)}{t} - \frac{1}{tr(t)^p} J_s(v_n + tw) &\leq \frac{1}{ntr(t)} \|(1 - r(t))v_n + tw\|_{1,p} \\ \frac{J_s(v_n)}{t} &\leq \frac{1}{ntr(t)} \|(1 - r(t))v_n + tw\|_{1,p} + \frac{1}{tr(t)^p} J_s(v_n + tw). \end{aligned}$$

Subtraindo $\frac{J_s(v_n + tw)}{t}$ em ambos os lados da desigualdade segue

$$\begin{aligned} \frac{J_s(v_n) - J_s(v_n + tw)}{t} &\leq \frac{1}{ntr(t)} \|(1 - r(t))v_n + tw\|_{1,p} \\ &\quad + \frac{1}{tr(t)^p} J_s(v_n + tw) - \frac{J_s(v_n + tw)}{t} \\ &= \frac{1}{ntr(t)} \|(1 - r(t))v_n + tw\|_{1,p} + \left(\frac{1}{tr(t)^p} - \frac{1}{t} \right) J_s(v_n + tw). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Vamos trabalhar agora com o termo que acompanha $J_s(v_n + tw)$,

$$\frac{1}{tr(t)^p} - \frac{1}{t} = \frac{1 - r(t)^p}{tr(t)^p} = -\frac{1}{r(t)^p} \left(\frac{r(t)^p - 1}{t} \right) \quad (2.37)$$

onde o termo em evidência é exatamente o quociente diferencial de $r(t)^p$ próximo de $t = 0$. De fato,

$$\left. \frac{d}{dt} r(t)^p \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)^p - r(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)^p - 1}{h}. \quad (2.38)$$

Separando (2.36) em três termos, respectivamente da direita para a esquerda definimos por $A(t), B(t), C(t)$

$$\begin{aligned} A(t) &:= \left(\frac{1}{tr(t)^p} - \frac{1}{t} \right) J_s(v_n + tw). \\ B(t) &:= \frac{1}{ntr(t)} \|(1 - r(t))v_n + tw\|_{1,p} \\ C(t) &:= \frac{J_s(v_n) - J_s(v_n + tw)}{t} \end{aligned}$$

Trabalhando com $A(t)$ usando (2.37), temos:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} A(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{tr(t)^p} - \frac{1}{t} \right) J_s(v_n + tw) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} - \left(\frac{r(t)^p - 1}{t} \right) \frac{J_s(v_n + tw)}{r(t)^p}.\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)^p - 1}{t} = \left. \frac{d}{dt} r(t)^p \right|_{t=0} = \langle I'(v_n), w \rangle = 0 \quad (2.39)$$

e

$$\frac{J_s(v_n + tw)}{r(t)^p}$$

é limitado conforme $t \rightarrow 0$ segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} A(t) = 0. \quad (2.40)$$

Para $B(t)$, note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{ntr(t)} \|(1 - r(t))v_n + tw\|_{1,p} &\leq \frac{1}{ntr(t)} \|(1 - r(t))v_n\|_{1,p} + \frac{1}{ntr(t)} \|tw\|_{1,p} \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{r(t)} \frac{1 - r(t)}{t} \|v_n\|_{1,p} + \frac{t}{ntr(t)} \|w\|_{1,p}.\end{aligned}$$

Note que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t) - 1}{t} = \left(\int_{\Omega} |v_n|^p \right)^{\frac{1-p}{p}} \cdot \langle I'(v_n), w \rangle = 0.$$

Então,

$$\lim_{t \rightarrow 0} B(t) \leq \frac{1}{n} \|w\|_{1,p}. \quad (2.41)$$

Por outro lado,

$$\lim_{t \rightarrow 0} C(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_s(v_n) - J_s(v_n + tw)}{t} = \langle J'_s(v_n), w \rangle. \quad (2.42)$$

Usando (2.40), (2.41), (2.42) e Cauchy-Schwartz conseguimos

$$|\langle J'_s(v_n), w \rangle| \leq \frac{1}{n} \|w\|_{1,p}, \quad (2.43)$$

para todo $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $w \in T_{v_n}M$.

Agora, consideremos o caso mais geral. Seja $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e consideremos α_n de forma que $(w - \alpha_n v_n)$ satisfaça a equação (2.32), ou seja, tal que

$$\langle I'(v_n), w - \alpha_n v_n \rangle = 0.$$

Note que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |v_n|^{p-2} v_n (w - \alpha_n v_n) &= 0 \\ \int_{\Omega} |v_n|^{p-2} v_n w - \int_{\Omega} |v_n|^{p-2} v_n v_n \alpha_n &= 0 \\ \int_{\Omega} |v_n|^{p-1} w &= \int_{\Omega} |v_n|^p \alpha_n.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $v_n \in M$, temos que

$$\alpha_n = \int_{\Omega} |v_n|^{p-1} w = \langle I'(v_n), w \rangle. \quad (2.44)$$

Agora, vamos usar a Desigualdade de Hölder em α_n com $\frac{p}{p-1}$ e p conjugados de Hölder entre si.

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_{\Omega} |v_n|^{p-1} w \leq \left(\int_{\Omega} (|v_n|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega} |w|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |v_n|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega} |w|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|w\|_p \end{aligned} \quad (2.45)$$

Como $J_s(v_n)$ é limitado,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^p - s \int_{\Omega} (v_n^+)^p &\leq C \implies \int_{\Omega} |\nabla v_n|^p \leq C + s \int_{\Omega} (v_n)^p \\ &\leq C + s \int_{\Omega} v_n^p \\ &= C + s, \end{aligned}$$

logo (v_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Agora estimando $\|\alpha_n v_n\|_{1,p}$,

$$\begin{aligned} \|\alpha_n v_n\|_{1,p} &\leq |\alpha_n| \|v_n\|_{1,p} \\ &\leq C \|w\|_{1,p} \|v_n\|_{1,p} \\ &\leq \tilde{C} \|w\|_{1,p} \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde $\tilde{C} := C(C + s)$. Mostramos que

$$\langle I'(v_n), w - \alpha_n v_n \rangle = 0$$

e portanto $w - \alpha_n v_n \in T_{v_n} M$. Logo, usando (2.44) e (2.43)

$$\begin{aligned} \left| \langle \widetilde{J}_s'(v_n), w - \alpha_n v_n \rangle \right| &= \left| \langle \widetilde{J}_s'(v_n), w \rangle - \alpha_n \langle \widetilde{J}_s'(v_n), v_n \rangle \right| \\ &= \left| \langle \widetilde{J}_s'(v_n), w \rangle - \langle I'(v_n), w \rangle \langle \widetilde{J}_s'(v_n), v_n \rangle \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \|w - \alpha_n v_n\|_{1,p} \\ &\leq \varepsilon_n \|w\|_{1,p} \end{aligned}$$

onde usamos (2.46) com $\varepsilon_n = \frac{\tilde{C}}{n}$. Definindo

$$\tau_n = \langle \widetilde{J}_s'(v_n), v_n \rangle,$$

temos

$$\left| \langle \widetilde{J}_s'(v_n), w \rangle - \tau_n \langle I'(v_n), w \rangle \right| \leq \varepsilon_n \|w\|_{1,p}$$

onde $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Portanto concluímos que

$$\left\| \widetilde{J}_s'(v_n) \right\|_{\star} = \min_{\tau_n \in \mathbb{R}} \left\| \widetilde{J}_s'(v_n) - \tau_n I'(v_n) \right\|_{1,p} \longrightarrow 0.$$

Logo, (v_n) é sequência (PS) para J'_s em M . ■

2.3 O terceiro ponto crítico do funcional.

Com as propriedades que temos até então do Espectro de Fučík, o resultado dessa seção nos fornece um terceiro ponto crítico do funcional $\widetilde{J}_s$ através de uma formula minimax.

Teorema 2.16. *Para cada $s \geq 0$, $(s + c(s), c(s)) \in \Sigma_p$, onde $c(s) > \lambda_1$ é definido pela seguinte fórmula minimax*

$$c(s) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_s(u). \quad (2.47)$$

Demonstração. Afim de aplicarmos o Teorema do Passo da Montanha, considerando $\varphi_1, -\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existe $\varepsilon > 0$ de forma que

$$\|\varphi_1 - (-\varphi_1)\|_{1,p} > \varepsilon$$

pois $\varphi_1 \neq -\varphi_1$. Isso garante a primeira hipótese do Teorema do Passo da Montanha.

Agora, da Proposição 2.13, $-\varphi_1$ é mínimo local estrito do funcional $\widetilde{J}_s$. Por outro lado, da Proposição 2.11, φ_1 é mínimo global de $\widetilde{J}_s$, então

$$\max \{ \widetilde{J}_s(\varphi_1), \widetilde{J}_s(-\varphi_1) \} = \widetilde{J}_s(-\varphi_1).$$

Enquanto, por (2.28) temos

$$\inf \{ \widetilde{J}_s(u) ; u \in M \text{ e } \|u - (-\varphi_1)\|_{1,p} = \varepsilon \} > \widetilde{J}_s(-\varphi_1) = \max \{ \widetilde{J}_s(\varphi_1), \widetilde{J}_s(-\varphi_1) \}.$$

Portanto a segunda hipótese do Teorema do Passo da Montanha é satisfeita.

O Lema 2.14 garante que $\widetilde{J}_s$ satisfaz a condição de Palai-Smale em M e notemos que considerando $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e o caminho γ dado por

$$\gamma(t) := \frac{t\varphi_1 + (1 - |t|)\phi}{\|t\varphi_1 + (1 - |t|)\phi\|_p},$$

temos que $\gamma \in C([-1, 1], M)$ onde

$$\gamma(-1) = -\varphi_1 \quad \text{e} \quad \gamma(1) = \varphi_1.$$

Portanto

$$\Gamma = \{ \gamma \in \mathcal{C}([-1, +1], M) ; \gamma(-1) = -\varphi_1 \text{ e } \gamma(1) = \varphi_1 \} \neq \emptyset.$$

Então pela Proposição 1.13

$$c(s) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_s(u)$$

é um valor crítico do funcional $\widetilde{J}_s$.

Ainda,

$$c(s) > \max \{ \widetilde{J}_s(-\varphi_1), \widetilde{J}_s(\varphi_1) \} = \lambda_1. \quad (2.48)$$

■

Para $s > 0$, o Lema 2.10 nos diz que o terceiro ponto $(s + c(s), c(s)) \in \Sigma_p$ está na paralela a diagonal passando por $(s, 0)$. Considerando para $s \geq 0$, construímos a curva

$$\begin{aligned}\mathcal{C} : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ s &\longmapsto (s + c(s), c(s)).\end{aligned}$$

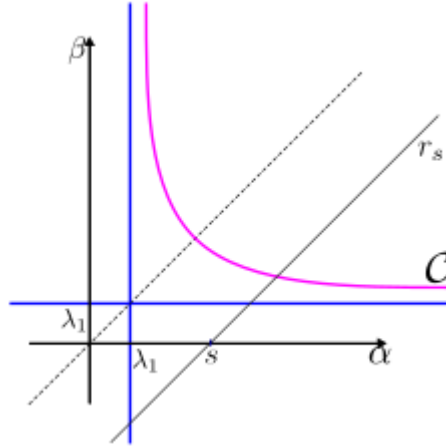


Figura 2.4: Curva $\mathcal{C}$

Durante o próximo capítulo, estudaremos varias propriedades dessa curva $\mathcal{C}$.

3 A primeira curva não-trivial do Σ_p

Durante esse capítulo, provaremos que as linhas triviais no Espectro de Fučík, são isoladas em Σ_p e que Σ_p é fechado. O objetivo deste Capítulo é demonstrar o Teorema 3.1, que nos diz que a curva $\mathcal{C}$ construída no final do Capítulo 2 é a primeira curva não-trivial no Espectro de Fučík Σ_p , no sentido de ser definida a partir do primeiro ponto crítico do funcional fora das curvas triviais.

3.1 Resultados técnicos

O próximo resultado nos diz que as curvas triviais no Espectro de Fučík,

$$\{\lambda_1\} \times \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$$

são isoladas.

Proposição 3.1. *Não existe uma sequência no Espectro de Fučík, $(\alpha_n, \beta_n) \in \Sigma_p$, com $\alpha_n > \lambda_1$ ou $\beta_n > \lambda_1$ de forma que*

$$(\alpha_n, \beta_n) \longrightarrow (\alpha, \beta),$$

com $\alpha = \lambda_1$ ou $\beta = \lambda_1$.

Demonstração. Suponhamos por contradição **(HC)**.

(HC) Existe uma sequência $(\alpha_n, \beta_n) \in \Sigma_p$, $\alpha_n > \lambda_1$ ou $\beta_n > \lambda_1$ onde

$$(\alpha_n, \beta_n) \longrightarrow (\alpha, \beta),$$

com $\alpha = \lambda_1 = J_s(-\varphi_1)$.

Como $(\alpha_n, \beta_n) \in \Sigma_p$, para cada (α_n, β_n) , existe $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que u_n é solução não trivial de

$$-\Delta_p u_n = \alpha_n (u_n^+)^{p-1} - \beta_n (u_n^-)^{p-1} \quad \text{em } \Omega. \quad (3.1)$$

Como a equação é homogênea de grau $(p-1)$, se u_n satisfaz a equação, qualquer múltiplo de u_n também satisfará.

Suponhamos sem perda de generalidade que $u_n \in M$. Trabalhemos com a forma fraca de (3.1),

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi = \alpha_n \int_{\Omega} (u_n^+)^{p-1} \phi - \beta_n \int_{\Omega} (u_n^-)^{p-1} \phi \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (3.2)$$

Considerando $\phi = u_n$, conseguimos a estimativa

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p &= \alpha_n \int_{\Omega} (u_n^+)^p - \beta_n \int_{\Omega} (u_n^-)^p \\
 &\leq \alpha_n \int_{\Omega} (u_n^+)^p + \beta_n \int_{\Omega} (u_n^-)^p \\
 &\leq C \left(\int_{\Omega} (u_n^+)^p + \int_{\Omega} (u_n^-)^p \right) \\
 &= C \int_{\Omega} |u_n|^p \\
 &= C.
 \end{aligned}$$

Logo (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e, tal como na demonstração do Lema 2.14, mostra-se que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega). \quad (3.3)$$

Usando (3.3) junto com **(HC)** temos que

$$(\alpha_n, \beta_n) \longrightarrow (\lambda_1, \beta).$$

Considerando o lado esquerdo da forma fraca (3.2) como sendo um elemento do dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, i.e., definindo

$$\begin{aligned}
 T : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 u_n &\longrightarrow T(u_n) := \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi
 \end{aligned}$$

com $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fixo, sabemos que T é um funcional contínuo e $T \in W_0^{-1,p'}(\Omega)$. Como u_n converge fortemente para u em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$T(u_n) = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi \longrightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = T(u). \quad (3.4)$$

Agora, trabalhando com o lado direito da forma fraca (3.2), passando o limite e usando **(HC)** com a convergência em $L^p(\Omega)$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha_n \int_{\Omega} (u_n^+)^{p-1} \phi - \beta_n \int_{\Omega} (u_n^-)^{p-1} \phi \right) = \lambda_1 \int_{\Omega} (u^+)^{p-1} \phi - \beta \int_{\Omega} (u^-)^{p-1} \phi. \quad (3.5)$$

Logo de (3.4) e (3.5) segue que, para todo $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = \lambda_1 \int_{\Omega} (u^+)^{p-1} \phi - \beta \int_{\Omega} (u^-)^{p-1} \phi,$$

que é exatamente a forma fraca de

$$-\Delta_p u = \lambda_1 (u^+)^{p-1} - \beta (u^-)^{p-1} \quad (3.6)$$

onde consideramos o caso $\alpha = \lambda_1$.

Dividiremos o resto da demonstração em duas partes.

1ª Parte:

Analisando a forma fraca de (3.6) com $\phi = u^+$ temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^p = \lambda_1 \int_{\Omega} (u^+)^p.$$

Isso, por outro lado, implica que ou $u^+ = 0$ ou $u^+ = \varphi_1$. Note porém que, se $u^+ = \varphi_1$, como $u \in M$, então $u^- = 0$ e, nesse caso, $u = \varphi_1$. Logo, ou $u^+ = 0$, ou $u = \varphi_1$.

O mesmo argumento que possibilitou provarmos que (2.5) é igual a (2.4), nos permite observar que

$$-\Delta_p u = \alpha (u^+)^{p-1} - \beta (u^-)^{p-1}$$

é equivalente a

$$-\Delta_p u = \alpha |u|^{p-2} u^+ - \beta |u|^{p-2} u^-. \quad (\text{P})$$

Considerando o caso em que $u^+ \equiv 0$, como $u = u^+ - u^-$, temos que $u = -u^-$. Usando que $u \leq 0$ na forma fraca do problema (P), segue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi &= \alpha \int_{\Omega} |u|^{p-2} u^+ \phi - \beta \int_{\Omega} |u|^{p-2} u^- \phi \\ &= -\beta \int_{\Omega} |u|^{p-2} u^- \phi \\ &= \beta \int_{[u \leq 0]} -|u|^{p-2} u^- \phi \\ &= \beta \int_{[u \leq 0]} |u|^{p-2} u \phi \\ &= \beta \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \phi \end{aligned}$$

pois como $u^+ \equiv 0$, $[u \leq 0] = \Omega$. Assim,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = \beta \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \phi$$

para toda $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo u é solução fraca do Problema (PA) e portanto u é autofunção associada ao autovalor β .

Portanto, concluímos que, ou $u_n \rightarrow \varphi_1$, ou $u_n \rightarrow -\varphi_1$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo se $u_n \rightarrow \varphi_1$ em L^p , como $\varphi_1 > 0$, então no conjunto dos x onde $u_n(x) < 0$ a sua medida deve ir para zero, i.e., concluímos

$$\text{se } u_n \rightarrow \varphi_1 \text{ em } L^p \implies |u_n < 0| \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Analogamente,

$$\text{se } u_n \rightarrow -\varphi_1 \text{ em } L^p \implies |u_n > 0| \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

2ª Parte:

Como (α_n, β_n) não pertencem as linhas triviais $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ de Σ_p , então u_n troca de sinal.

Pela Desigualdade de Hölder com os expoente $\frac{q}{p}$ e $(\frac{q}{p})'$, onde

$$\left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{q}{q-p}$$

temos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_n^+)^p dx &= \int_{[u_n > 0]} (u_n^+)^p \cdot 1 dx \\ &\leq \left(\int_{[u_n > 0]} |(u_n^+)^p|^{\frac{q}{p}} dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{[u_n > 0]} 1^{(\frac{q}{p})'} dx \right)^{\frac{1}{(\frac{q}{p})'}} \\ &= \left(\int_{[u_n > 0]} |(u_n^+)^p|^{\frac{q}{p}} dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{[u_n > 0]} 1^{\frac{q}{q-p}} dx \right)^{\frac{q-p}{q}} \\ &= \left(\int_{[u_n > 0]} |(u_n^+)^p|^{\frac{q}{p}} dx \right)^{\frac{p}{q}} |u_n > 0|^{1-\frac{p}{q}} \\ &= \|u_n^+\|_q^p |u_n > 0|^{1-\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder junto das imersões de Sobolev, temos

$$\|u_n^+\|_{1,p}^p \leq \alpha_n |u_n > 0|^{1-\frac{p}{q}} C \|u_n^+\|_{1,p}^p.$$

Portanto

$$1 \leq \alpha_n C |u_n > 0|^{1-\frac{p}{q}} \iff |u_n > 0| \geq \alpha_n^\sigma C'$$

onde $C' := \left(\frac{1}{C}\right)^\sigma$ e $\sigma = -\frac{1}{1-\frac{p}{q}} < 0$.

De forma análoga, conseguimos uma estimativa que vale para $|u_n < 0|$, partindo da forma fraca de (3.1) com função teste u_n^- . Assim, obtemos a seguinte desigualdade

$$|u_n < 0| \geq \beta_n^\sigma C^\sigma,$$

onde $\sigma < 0$.

Então da (**1ª Parte:**), trabalhando com a hipótese de contradição (**HC**), chegamos que é verdade

$$\text{ou } |u_n < 0| \longrightarrow 0 \text{ ou } |u_n > 0| \longrightarrow 0,$$

enquanto da (**2ª Parte:**), chegamos em

$$|u_n > 0| \leq C \alpha_n^\sigma \text{ e } |u_n < 0| \geq \beta_n^\sigma C'$$

com C, C' dependendo de Ω, N, p com $\sigma < 0$.

Chegamos então na contradição que buscávamos, garantindo que não existe sequência $(\alpha_n, \beta_n) \in \Sigma_p$ com $\alpha_n > \lambda_1$ e $\beta_n > \lambda_1$ tal que

$$(\alpha_n, \beta_n) \longrightarrow (\alpha, \beta)$$

com $\alpha = \lambda_1$ ou $\beta = \lambda_1$. Assim, concluímos que de fato, as curvas triviais do Espectro de Fučík são isoladas. ■

O próximo resultado é de caráter topológico e usaremos nas próximas demonstrações.

Lema 3.2.

- (i) M é localmente conexo por arcos.
- (ii) Qualquer subconjunto conexo e aberto $\mathcal{O} \subset M$ é conexo por arcos.
- (iii) Se $\mathcal{O}'$ é uma componente (subconjunto maximal, aberto e conexo) de um aberto $\mathcal{O} \subset M$, então $\partial\mathcal{O}' \cap \mathcal{O} = \emptyset$.

Demonstração. Ver [13] Lema 3.5. ■

No próximo Lema mostraremos como encontrar pontos críticos do funcional $\widetilde{J}_s$ em componentes conexas de um determinado conjunto.

Lema 3.3. Qualquer componente conexa de $\mathcal{O}$, para um r fixo e arbitrário,

$$\mathcal{O} := \{u \in M; \widetilde{J}_s(u) < r\}$$

contém um ponto crítico de $\widetilde{J}_s$.

Demonstração. $\mathcal{O}$ é um aberto diferente do vazio, onde podemos assumir que $r > \lambda_1 - s$. Caso contrario, se $r < \lambda_1 - s$ então aconteceria de $\mathcal{O} = \emptyset$, visto que $\lambda_1 - s$ é o valor de menor energia global do funcional $\widetilde{J}_s$ pela Proposição 2.11.

Consideremos $\mathcal{O}_1$ uma componente conexa, i.e. um subconjunto aberto, conexo, maximal e diferente do vazio. Seja $\overline{\mathcal{O}_1}$ o fecho de $\mathcal{O}_1$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Como $\mathcal{O}_1 \neq \emptyset$, seja

$$d = \inf \{ \widetilde{J}_s(u) ; u \in \overline{\mathcal{O}_1} \}. \quad (3.9)$$

Pelo Lema 3.2 (iii), de $\overline{\mathcal{O}_1}$ ser uma componente de um aberto $\mathcal{O}$, vale

$$\partial\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O} = \emptyset.$$

Dividiremos o resto da demonstração em partes.

1ª Parte: Se o ínfimo em (3.9) é atingido, então esse ponto é um ponto crítico do funcional $\widetilde{J}_s$.

Suponhamos que exista $u_0 \in \overline{\mathcal{O}_1}$ tal que

$$\widetilde{J}_s(u_0) = d = \inf \{ \widetilde{J}_s(u) ; u \in \overline{\mathcal{O}_1} \}.$$

Logo, $\widetilde{J}_s(u_0) < r$ pois $u_0 \in \mathcal{O}$, visto que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 \subset \overline{\mathcal{O}_1} \implies \inf \{ \widetilde{J}_s(u) ; u \in \overline{\mathcal{O}_1} \} &\leq \inf \{ \widetilde{J}_s(u) ; u \in \mathcal{O}_1 \} \\ &< r \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da definição de $\mathcal{O}$. Logo $u_0 \in \mathcal{O}$.

Notemos que pelo Lema 3.2 (iii)

$$\partial\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O} = \emptyset,$$

o que garante que não aconteça de $u_0 \in \partial\mathcal{O}_1$. Logo $u_0 \in \mathcal{O}$, é um ponto de mínimo em um aberto e portanto é um ponto crítico de $\widetilde{J}_s$, provando a **(1ª Parte)**.

2ª Parte: Nosso objetivo é de garantir que de fato o ínfimo é atingido.

Tomemos $u_n \in \mathcal{O}_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, sendo uma sequência onde

$$\widetilde{J}_s(u_n) \leq d + \frac{1}{2n^2}. \quad (3.10)$$

Notemos que: $\overline{\mathcal{O}_1}$ é um espaço métrico completo e $\widetilde{J}_s$ é um funcional semicontínuo inferiormente limitado inferiormente pela Proposição 2.11. Pelo Princípio Variacional de Eklund, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $v_n \in \overline{\mathcal{O}_1}$ tal que

$$\widetilde{J}_s(v_n) \leq \widetilde{J}_s(u_n); \quad (3.11)$$

$$\|v_n - u_n\|_{1,p} \leq \frac{1}{n}; \quad (3.12)$$

e para cada $u \in \overline{\mathcal{O}_1}$, com $u \neq v_n$

$$\widetilde{J}_s(v_n) < \widetilde{J}_s(u) + \frac{1}{n} \|u - v_n\|_{1,p}. \quad (3.13)$$

A ideia de usarmos o Princípio Variacional de Eklund é construirmos uma sequência que assim como u_n ainda é minimizante mas como a propriedade adicional, o qual a u_n não possuía, de que a derivada dela está indo para zero.

Afirmção: (v_n) é uma sequência (PS) para $\widetilde{J}_s$.

「Precisamos mostrar que:

- $\widetilde{J}_s(v_n)$ é limitado;
- $\|\widetilde{J}_s'(v_n)\|_{\star} \rightarrow 0$.

Da Proposição 2.11, junto com (3.11) temos

$$\widetilde{J}_s(\varphi_1) = \lambda_1 - s \leq \widetilde{J}_s(v_n) \leq \widetilde{J}_s(u_n),$$

garantindo assim que $\widetilde{J}_s(v_n)$ é limitada.

Para mostrarmos que a norma estrela vai para zero, consideremos um n fixo suficientemente grande. Como $u_n \in \mathcal{O}_1$ temos por (3.11)

$$\widetilde{J}_s(v_n) < r. \quad (3.14)$$

Então $v_n \in \mathcal{O}_1$, pois $\mathcal{O}_1$ é um aberto e logo $\text{int}(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}$. Daí $\overline{\mathcal{O}_1} = \mathcal{O}_1 \cup \partial\mathcal{O}_1$.

Caso $v_n \notin \mathcal{O}_1$, teríamos necessariamente que $v_n \in \partial\mathcal{O}_1$ e portanto $\widetilde{J}_s(v_n) = r$ pelo Lema 3.2, o que é impossível por (3.14), onde a desigualdade (3.14) é válida quando n é suficientemente grande.

Agora, consideremos $w \in T_{v_n}M$ e definamos u_t assim como em (2.33) por

$$u_t := \frac{v_n + tw}{\|v_n + tw\|_p}.$$

Segue que $u_t \in \overline{\mathcal{O}_1}$. De fato, como $\mathcal{O}_1$ é um subconjunto conexo e aberto e $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O} \subset M$, pelo Lema 3.2 (ii), $\mathcal{O}_1$ é conexo por arcos. Como $v_n \in \mathcal{O}_1$, a conexidade por arcos nos garante que $u_t \in \mathcal{O}_1$ para um t suficientemente pequeno, visto que quando $t = 0$

$$u_t = u_0 = v_n.$$

Com isso, usando u_t na desigualdade (3.13), o resto da demonstração segue de forma idêntica à feita no Lema 2.15, seguindo a partir de (2.34) e considerando $r(t) := \|v_n + tw\|_p$. Concluimos então que

$$\|\widetilde{\mathcal{J}}_s(v_n)\|_* \longrightarrow 0,$$

o que prova a **Afirmção**. ┘

Como v_n é uma sequência (PS) para $\widetilde{\mathcal{J}}_s$, o Lema 2.14 garante a existência de um $v \in M$ tal que, a menos de uma subsequência

$$v_n \longrightarrow v \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Por fim, de (3.12) temos

$$u_n \longrightarrow v \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega)$$

e então

$$\widetilde{\mathcal{J}}_s(v_n) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{J}}_s(v) = d,$$

provando que de fato o ínfimo d é atingido. Isso conclui a **(2ª Parte)**.

Da **(1ª Parte)** como garantimos que o ínfimo é atingido, temos então que esse ponto é um ponto crítico. Isso finaliza a prova de que qualquer componente de $\mathcal{O}$ contém um ponto crítico do funcional $\widetilde{\mathcal{J}}_s$. ■

3.2 O primeiro ponto não trivial de Σ_p

No próximo resultado, mostramos que Σ_p é um conjunto fechado.

Proposição 3.4. *O Espectro de Fučík é fechado.*

Demonstração. Seja $(\alpha_n, \beta_n) \in \Sigma_p$ de forma que

$$(\alpha_n, \beta_n) \longrightarrow (\alpha, \beta).$$

Disso, sabemos que $\alpha \geq \lambda_1$ e $\beta \geq \lambda_1$, pois da Proposição 2.8

$$\Sigma_p \setminus ((\{\lambda_1\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{\lambda_1\})) \subset \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha > \lambda_1, \beta > \lambda_1\}.$$

Se acontecer de ou $\alpha = \lambda_1$ ou $\beta = \lambda_1$, terminamos a prova, pois pela Proposição 2.7 sabemos

$$(\alpha, \beta) \in (\lambda_1 \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \lambda_1) \subset \Sigma_p.$$

Sem perda de generalidade podemos supor que $\alpha > \lambda_1$ e $\beta > \lambda_1$. Agora como $(\alpha_n, \beta_n) \in \Sigma_p$, existe $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u_n\|_p = 1$, o qual é solução de (PF). Das Imersões de Sobolev, a menos de uma subsequência, u_n é fracamente convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, logo para todo $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi = \int_{\Omega} \alpha (u_n^+)^{p-1} \phi - \int_{\Omega} \beta (u_n^-)^{p-1} \phi.$$

Passando o limite acima, chegamos em

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = \int_{\Omega} \alpha (u^+)^{p-1} \phi - \int_{\Omega} \beta (u^-)^{p-1} \phi, \quad (3.15)$$

onde a convergência no lado esquerdo de (3.15) é obtida assim como feito na demonstração do Lema 2.14. Concluindo que $(\alpha, \beta) \in \Sigma_p$. Portanto $\overline{\Sigma_p} = \Sigma_p$, então Σ_p é fechado. ■

Os resultados demonstrados até então nos dão a base para conseguir provar o resultado mais importante deste Capítulo, que garante o fato de que a curva $\mathcal{C}$ construída ao final do Capítulo 2 é a *primeira curva não-trivial* em Σ_p , conforme mostramos no próximo Teorema.

Teorema 3.1. *Seja $s \geq 0$. O ponto $(s + c(s), c(s))$ é o primeiro ponto não trivial de Σ_p na reta paralela a diagonal passando por $(s, 0)$.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que existe um ponto da forma $(s + \mu, \mu) \in \Sigma_p$ com

$$\lambda_1 < \mu < c(s).$$

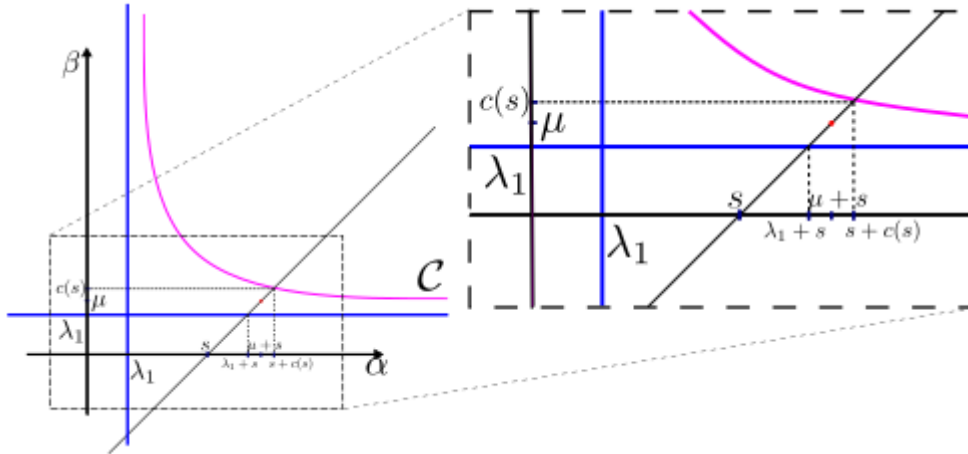


Figura 3.1: Hipótese de contradição Teorema 3.1

A Proposição 3.1 junto da Proposição 3.4 nos garante a seguinte afirmação.

Afirmação: *Podemos escolher $(s + \mu, \mu) \in \Sigma_p$ com $\lambda_1 < \mu < c(s)$ de forma que μ seja mínimo no sentido de ser o menor número entre λ_1 e $c(s)$ e que em $] \lambda_1, \mu[$ não tenha nenhum outro valor crítico de $\widetilde{J}_s$.*

⌈ De fato, suponhamos por contradição que existe sequência (μ_n) , de forma que $\lambda_1 < \mu_n < c(s)$, $\mu_n \rightarrow \lambda_1$ e $(s + \mu_n, \mu_n) \in \Sigma_p$. Então temos uma contradição com a Proposição 3.1, pois não poderia existir

$$(s + \mu_n, \mu_n) \in \Sigma_p \setminus \left(\{\lambda_1\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{\lambda_1\} \right)$$

tal que

$$(s + \mu_n, \mu_n) \longrightarrow (s + \lambda_1, \lambda_1).$$

Portanto para todo n , μ_n deve ser maior que um certo $\mu_0 = \mu$.

Agora, como o ponto $(s + \mu, \mu) \in \Sigma_p$, temos que μ é a energia de uma certa função $u \in M$ pelo funcional $\widetilde{J}_s$. Como μ é o valor de mínimo de que satisfaz as condições acima, provamos a **Afirmção**. $\lrcorner$

Pelo Lema 2.10, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisfaz em Ω

$$-\Delta_p u = (s + \mu) (u^+)^{p-1} - \mu (u^-)^{p-1}.$$

Da forma fraca do problema acima, com função teste $\phi = u^+$, segue

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^p = (s + \mu) \int_{\Omega} (u^+)^p - \mu \int_{\Omega} (u^-)^{p-1} u^+ = (s + \mu) \int_{\Omega} (u^+)^p = (s + \mu) \|u^+\|_p^p. \quad (3.16)$$

Da mesma forma, considerando como função teste u^- , temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u^-|^p = (s + \mu) \int_{\Omega} (u^+)^{p-1} u^- - \mu \int_{\Omega} (u^-)^p = \mu \int_{\Omega} (u^-)^p = \mu \|u^-\|_p^p. \quad (3.17)$$

Assim como na demonstração da Proposição 2.13, sabemos que a única forma de uma função associada a um ponto no Espectro de Fučík não trocar de sinal é se

$$(\alpha, \beta) \in \left(\{\lambda_1\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{\lambda_1\} \right).$$

Logo u troca de sinal. Daí sabemos que $u^+, u^- \neq 0$ em um conjunto de medida positiva. Por (3.16) segue

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^p - s \int_{\Omega} (u^+)^p = \mu \|u^+\|_p^p. \quad (3.18)$$

Notemos que $\frac{u^+}{\|u^+\|_p} \in M$ e avaliando no funcional $\widetilde{J}_s$:

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_s \left(\frac{u^+}{\|u^+\|_p} \right) &= \frac{1}{\|u^+\|_p^p} \left(\int_{\Omega} |\nabla(u^+)|^p - s \int_{\Omega} ((u^+)^+)^p \right) \\ &= \frac{1}{\|u^+\|_p^p} \left(\int_{\Omega} |\nabla u^+|^p - s \int_{\Omega} (u^+)^p \right) \\ &\stackrel{(3.18)}{=} \frac{1}{\|u^+\|_p^p} \left(\mu \|u^+\|_p^p \right) \\ &= \mu, \end{aligned}$$

onde usamos respectivamente o fato do funcional ser p -harmônico e que $(u^+)^+ = u^+$. Ainda, como $u^- = \max\{-u, 0\}$, então $(-u)^- = \max\{u, 0\} = u^+$ e junto ao fato de que

$$\frac{-u}{\|u^-\|_p} = \frac{-u}{\| -u^- \|_p} \in M, \text{ temos:}$$

$$\widetilde{J}_s(u) = \widetilde{J}_s \left(\frac{u^+}{\|u^+\|_p} \right) = \widetilde{J}_s \left(\frac{-u}{\|u^-\|_p} \right) = \mu.$$

Agora, analisando a energia de $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$ pelo funcional $\widetilde{J}_s$,

$$\begin{aligned}
 \widetilde{J}_s\left(\frac{u^-}{\|u^-\|_p}\right) &= \frac{1}{\|u^-\|_p} \left(\int_{\Omega} |\nabla(u^-)|^p - s \int_{\Omega} ((u^-)^+)^p \right) \\
 &= \frac{1}{\|u^-\|_p} \left(\int_{\Omega} |\nabla u^-|^p - s \int_{\Omega} (u^-)^p \right) \\
 &= \frac{1}{\|u^-\|_p} \left(\int_{\Omega} |\nabla u^-|^p - s \int_{\Omega} |u^-|^p \right) \\
 &\stackrel{(3.17)}{=} \frac{1}{\|u^-\|_p} \left(\mu \|u^-\|_p^p - s \|u^-\|_p^p \right) \\
 &= \mu - s,
 \end{aligned}$$

onde usamos o fato do funcional ser p-harmônico junto com $(u^-)^+ = u^-$. Portanto

$$\widetilde{J}_s\left(\frac{u^-}{\|u^-\|_p}\right) = \mu - s.$$

Agora consideremos os seguintes caminhos em M :

$$\begin{aligned}
 * \text{ de } u \text{ até } \frac{u^+}{\|u^+\|_p}, \quad & u_1(t) := \frac{tu + (1-t)u^+}{\|tu + (1-t)u^+\|_p}; \\
 * \text{ de } \frac{u^+}{\|u^+\|_p} \text{ até } \frac{u^-}{\|u^-\|_p}, \quad & u_2(t) := \frac{tu^+ + (1-t)u^-}{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p}; \\
 * \text{ de } \frac{-u^-}{\|u^-\|_p} \text{ até } u, \quad & u_3(t) := \frac{-tu^- + (1-t)u}{\|-tu^- + (1-t)u\|_p}.
 \end{aligned}$$

Utilizando esses caminhos, transitaremos por alguns níveis de energia, portanto devemos estimar a energia do funcional $\widetilde{J}_s$ ao longo dos caminhos.

- Começando pelo caminho u_1 , trabalhando com o termo $tu + (1-t)u^+$

$$\begin{aligned}
 tu + (1-t)u^+ &= tu^+ - tu^- + u^+ - tu^+ \\
 &= u^+ - tu^-.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Seja $x \in \Omega$, nos seguintes conjuntos temos:

- Em $[x; u(x) > 0]$,

$$u^+ - tu^- = u^+ > 0$$

então

$$\begin{cases} (u^+ - tu^-)^+ &= u^+ \\ (u^+ - tu^-)^- &\equiv 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

- Em $[x; u(x) < 0]$,

$$u^+ - tu^- = -tu^- < 0$$

então

$$\begin{cases} (u^+ - tu^-)^+ &\equiv 0 \\ (u^+ - tu^-)^- &= tu^-. \end{cases} \tag{3.21}$$

Agora, estudando as normas

$$\begin{aligned}
\|u^+ - tu^-\|_p^p &= \int_{\Omega} |u^+ - tu^-|^p \\
&= \int_{\Omega} ((u^+ - tu^-)^+)^p + \int_{\Omega} ((u^+ - tu^-)^-)^p \\
&= \int_{\Omega} (u^{++})^p + \int_{\Omega} (tu^{--})^p \\
&= \|u^+\|_p^p + t^p \|u^-\|_p^p.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

De forma análoga, como o suporte de u^+ e u^- são disjuntos, segue para a norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\|u^+ - tu^-\|_{1,p}^p &= \int_{\Omega} |\nabla u^+|^p + t^p \int_{\Omega} |\nabla u^-|^p \\
&= \|u^+\|_{1,p}^p + t^p \|u^-\|_{1,p}^p.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Estimando o funcional $\widetilde{J}_s$ ao longo de $u_1(t)$

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_s(u_1(t)) &= \widetilde{J}_s\left(\frac{tu + (1-t)u^+}{\|tu + (1-t)u^+\|_p}\right) \\
&\stackrel{(3.19)}{=} \widetilde{J}_s\left(\frac{u^+ - tu^-}{\|u^+ - tu^-\|_p}\right) \\
&\stackrel{\text{p-hom.}}{=} \frac{1}{\|u^+ - tu^-\|_p^p} \left(\int_{\Omega} |\nabla(u^+ - tu^-)|^p - s \int_{\Omega} ((u^+ - tu^-)^+)^p \right) \\
&\stackrel{(3.20)}{=} \frac{1}{\|u^+ - tu^-\|_p^p} \left(\|u^+ - tu^-\|_{1,p}^p - s \int_{\Omega} (u^{++})^p \right) \\
&\stackrel{(3.21)}{=} \frac{1}{\|u^+ - tu^-\|_p^p} \left(\|u^+ - tu^-\|_{1,p}^p - s \int_{\Omega} (u^{++})^p \right) \\
&\stackrel{(3.23)}{=} \frac{1}{\|u^+ - tu^-\|_p^p} \left(\int_{\Omega} |\nabla u^+|^p + t^p \int_{\Omega} |\nabla u^-|^p - s \|u^+\|_p^p \right) \\
&\stackrel{(3.16)}{=} \frac{1}{\|u^+ - tu^-\|_p^p} \left((s + \mu) \|u^+\|_p^p + t^p \mu \|u^-\|_p^p - s \|u^+\|_p^p \right) \\
&\stackrel{(3.17)}{=} \frac{1}{\|u^+ - tu^-\|_p^p} \left(s \|u^+\|_p^p + \mu \left(\|u^+\|_p^p - t^p \|u^-\|_p^p \right) - s \|u^+\|_p^p \right) \\
&= \frac{1}{\|u^+ - tu^-\|_p^p} \left(s \|u^+\|_p^p + \mu \left(\|u^+\|_p^p - t^p \|u^-\|_p^p \right) - s \|u^+\|_p^p \right) \\
&\stackrel{(3.22)}{=} \frac{\mu \left(\|u^+ - tu^-\|_p^p \right)}{\|u^+ - tu^-\|_p^p} \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

- Ao longo do caminho $u_2(t)$, de forma análoga ao item anterior, estudando o termo em comum da curva, conseguimos que

$$(tu^+ + (1-t)u^-)^+ = tu^+ + (1-t)u^-. \tag{3.24}$$

Analisando as normas, como as funções u^+ , u^- possuem suporte disjuntos:

$$\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p = t^p \|u^+\|_p^p + (1-t)^p \|u^-\|_p^p \tag{3.25}$$

$$\|tu^+ + (1-t)u^-\|_{1,p}^p = t^p \|u^+\|_{1,p}^p + (1-t)^p \|u^-\|_{1,p}^p. \tag{3.26}$$

Portanto segue que

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_s(u_2(t)) &= \frac{1}{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p} \left(\|tu^+ + (1-t)u^-\|_{1,p}^p - s \|(tu^+ + (1-t)u^-)^+\|_p^p \right) \\
&\stackrel{(3.24)}{=} \frac{1}{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p} \left(\|tu^+ + (1-t)u^-\|_{1,p}^p - s \|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p \right) \\
&\stackrel{(3.26)}{=} \frac{t^p \|u^+\|_{1,p}^p + (1-t)^p \|u^-\|_{1,p}^p}{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p} - s \\
&\stackrel{(3.16)}{=} \frac{t^p(s + \mu) \|u^+\|_p^p + (1-t)^p \mu \|u^+\|_p^p}{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p} - s \\
&\stackrel{(3.17)}{=} \mu \frac{t^p \|u^+\|_p^p (1-t)^p \|u^-\|_p^p}{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p} + \frac{t^p s \|u^+\|_p^p}{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p} - s \\
&\stackrel{(3.25)}{=} \mu \frac{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p}{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p} + \frac{t^p s \|u^+\|_p^p - s \|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p}{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p} \\
&\stackrel{(3.25)}{=} \mu + \frac{t^p s \|u^+\|_p^p - t^p s \|u^+\|_p^p - (1-t)^p s \|u^-\|_p^p}{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p} \\
&= \mu - s \frac{(1-t)^p \|u^-\|_p^p}{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p} \\
&\leq \mu
\end{aligned}$$

pois

$$\frac{(1-t)^p \|u^-\|_p^p}{\|tu^+ + (1-t)u^-\|_p^p} > 0.$$

- Para estimar ao longo de $u_3(t)$, seguiremos a mesma ideia do primeiro item. Estudando o termo abaixo

$$-tu^- + (1-t)u = (1-t)u^+ - u^-,$$

para $x \in \Omega$ temos:

– Em $[x; u(x) > 0]$,

$$(1-t)u^+ - u^- = (1-t)u^+ > 0$$

então

$$\begin{cases} ((1-t)u^+ - u^-)^+ = (1-t)u^+ \\ ((1-t)u^+ - u^-)^- \equiv 0. \end{cases}$$

– Em $[x; u(x) < 0]$,

$$(1-t)u^+ - u^- = -u^- < 0$$

então

$$\begin{cases} ((1-t)u^+ - u^-)^+ \equiv 0 \\ ((1-t)u^+ - u^-)^- = u^-. \end{cases}$$

Portanto

$$\left((1-t)u^+ - u^-\right)^+ = (1-t)u^+. \quad (3.27)$$

Como as funções u^+, u^- possuem suporte disjuntos, temos:

$$\|(1-t)u^+ - u^-\|_p^p = (1-t)^p \|u^+\|_p^p + \|u^-\|_p^p \quad (3.28)$$

$$\|(1-t)u^+ - u^-\|_{1,p}^p = (1-t)^p \|u^+\|_{1,p}^p + \|u^-\|_{1,p}^p. \quad (3.29)$$

Calculando a energia do funcional $\widetilde{J}_s$ ao longo de $u_3(t)$,

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_s(u_3(t)) &= \frac{1}{\|(1-t)u^+ - u^-\|_p^p} \left(\|(1-t)u^+ - u^-\|_{1,p}^p - s \left\| \left((1-t)u^+ - u^- \right)^+ \right\|_p^p \right) \\ &\stackrel{(3.29)}{=} \frac{1}{\|(1-t)u^+ - u^-\|_p^p} \left((1-t)^p \|u^+\|_{1,p}^p + \|u^-\|_{1,p}^p - s \|(1-t)u^+\|_p^p \right) \\ &\stackrel{(3.16)}{=} \frac{1}{\|(1-t)u^+ - u^-\|_p^p} \left((1-t)^p (s + \mu) \|u^+\|_p^p \right. \\ &\quad \left. + \mu \|u^-\|_p^p - s \|(1-t)u^+\|_p^p \right) \\ &= \frac{1}{\|(1-t)u^+ - u^-\|_p^p} \left((1-t)^p s \|u^+\|_p^p + (1-t)^p \mu \|u^+\|_p^p \right. \\ &\quad \left. + \mu \|u^-\|_p^p - (1-t)^p s \|u^+\|_p^p \right) \\ &= \mu \frac{(1-t)^p \|u^+\|_p^p + \|u^-\|_p^p}{\|(1-t)u^+ - u^-\|_p^p} \\ &\stackrel{(3.28)}{=} \mu \frac{\|(1-t)u^+ - u^-\|_p^p}{\|(1-t)u^+ - u^-\|_p^p} \\ &= \mu. \end{aligned}$$

Chegamos que

$$\begin{cases} \widetilde{J}_s(u_1(t)) = \mu \\ \widetilde{J}_s(u_2(t)) \leq \mu \\ \widetilde{J}_s(u_3(t)) = \mu. \end{cases} \quad (3.30)$$

Utilizando os caminhos u_1, u_2, u_3 vamos sair de u , que possui energia μ , indo para $\frac{u^+}{\|u^+\|_p}$ e depois para $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$, chegando por fim em $\frac{-u^-}{\|u^-\|_p}$, que possui energia $\mu - s$. Por (3.30) garantimos que durante esse caminho não saímos do nível de energia $\leq \mu$. Continuaremos criando o caminho em Γ

$$\Gamma = \{\gamma \in C([-1, 1], M) ; \gamma(-1) = -\varphi_1 \text{ e } \gamma(1) = \varphi_1\}.$$

Agora vamos analisar o nível de energia abaixo de $\mu - s$, considerando

$$\mathcal{O} = \{v \in M ; \widetilde{J}_s(v) < \mu - s\}.$$

Pela Proposição 2.11, $\widetilde{J}_s(\varphi_1) = \lambda_1 - s$ e como $\lambda_1 < \mu$, segue

$$\widetilde{J}_s(\varphi_1) < \mu - s, \quad (3.31)$$

logo $\varphi_1 \in \mathcal{O}$. Já da Proposição 2.13, temos que $\widetilde{J}_s(-\varphi_1) = \lambda_1$ e portanto $-\varphi_1 \in \mathcal{O}$ se $\lambda_1 < \mu - s$.

Como $\varphi_1, -\varphi_1$ são respectivamente mínimo global e mínimo local estrito, caso houvesse algum outro ponto crítico em $\mathcal{O}$, ele teria que ser um $w \in \mathcal{O}$ tal que

$$\widetilde{J}_s(\varphi_1) < \widetilde{J}_s(-\varphi_1) < \widetilde{J}_s(w) < \widetilde{J}_s(u) = \mu,$$

o que contraria o fato de μ ser um valor de mínimo. Logo sabemos que $u \notin \mathcal{O}$ e os únicos pontos críticos possíveis de $\widetilde{J}_s$ em $\mathcal{O}$ são $\varphi_1, -\varphi_1$.

Estamos no final de $u_2(t)$, no ponto $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$ com energia $\mu - s$ pelo caminho em Γ .

Observemos que esse ponto não é um ponto crítico, pois se fosse, como $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$ não muda de sinal, este estaria associada a um ponto nas retas triviais e seria, portanto um múltiplo de φ_1 . Porém $\varphi_1 > 0$ em Ω , enquanto $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$ se anula no conjunto de medida positiva $[x; u > 0]$, o que é uma contradição. Portanto $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$ é um ponto regular de $\widetilde{J}_s$.

Consequentemente, podemos considerar um caminho C^1

$$\sigma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow M$$

onde

$$\sigma(0) = \frac{u^-}{\|u^-\|_p} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \widetilde{J}_s(\sigma(t)) \neq 0.$$

Com esse caminho σ , podemos tanto ir para um sentido positivo quanto para um sentido negativo. Vamos então definir um caminho de $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$ para um ponto $v = \sigma(\varepsilon_0)$ por um caminho em M , o qual, com exceção de seu ponto inicial $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$, encontra-se em um nível inferior a $\mu - s$. Em particular temos que $v \in \mathcal{O}$.

Pelo fato de que componente são conjuntos maximais, todo elemento de M está contido em uma componente. Consideremos a componente de $\mathcal{O}$ que contém v . Pelos Lema 3.2 e Lema 3.3, essa componente possui um ponto crítico de $\widetilde{J}_s$. Como os únicos possíveis de $\mathcal{O}$ são φ_1 e $-\varphi_1$, continuaremos então no movimento de v para o ponto crítico φ_1 . Ainda, por (3.31) o caminho percorrido até então nos mantém num nível $< \mu - s$ devido a conexidade por arcos da componente, garantida pelo Lema 3.2 (ii).

Seja $u_4(t)$ a última parte do caminho, de $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$ até φ_1 e $-u_4(t)$ como sendo o caminho simétrico, que nos leva de $-\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$ até $-\varphi_1$. Temos $u_4, -u_4$ definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_4(t) &:= \frac{tu^- + (1-t)\varphi_1}{\|tu^- + (1-t)\varphi_1\|_p}, \\ -u_4(t) &:= \frac{t(-u^-) + (1-t)(-\varphi_1)}{\|t(-u^-) + (1-t)(-\varphi_1)\|_p}. \end{aligned}$$

Note que

$$u_4(0) = \varphi_1, \quad u_4(1) = \frac{u^-}{\|u^-\|_p}, \quad -u_4(0) = -\varphi_1, \quad -u_4(1) = \frac{-u^-}{\|u^-\|_p}.$$

Estimando o nível de energia do funcional sobre $-u_4(t)$, vamos primeiro observar que para quaisquer $w \in M$ vale

$$|\widetilde{J}_s(w) - \widetilde{J}_s(-w)| \leq s. \quad (3.32)$$

Para garantir a desigualdade acima, mostremos rapidamente a Afirmação a seguir.

Afirmação: $|w^+(x)^p - w^-(x)^p| = |w(x)|^p$.

「Seja $x \in \Omega$, então

– Em $[x; w(x) > 0]$,

$$\begin{aligned} |(w^+(x))^p - (w^-(x))^p| &= |(w^+(x))^p| \\ &= |w^+(x)|^p \\ &= |w^+(x) - w^-(x)|^p \\ &= |w(x)|^p \end{aligned}$$

– Em $[x; w(x) < 0]$,

$$w^+(x) - w^-(x) = -(w^-(x))^p \implies |w^+(x)^p - w^-(x)^p| = w^-(x)^p$$

e também

$$|w^+(x) - w^-(x)|^p = |-w^-(x)|^p = w^-(x)^p.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |w^+(x)^p - w^-(x)^p| &= |w^+(x) - w^-(x)|^p \\ &= |w(x)|^p. \end{aligned}$$

Provando a **Afirmação**. ┘

Agora, conseguimos garantir a desigualdade (3.32). De fato,

$$\begin{aligned} |\widetilde{J}_s(w) - \widetilde{J}_s(-w)| &= \left| \int_{\Omega} |\nabla w|^p - s \int_{\Omega} (w^+)^p - \int_{\Omega} |\nabla(-w)|^p - s \int_{\Omega} ((-w)^+)^p \right| \\ &= \left| \|w\|_{1,p}^p - \|-w\|_{1,p}^p - s \int_{\Omega} (w^+)^p - (w^-)^p \right| \\ &= s \left| \int_{\Omega} (w^+)^p - (w^-)^p \right| \\ &\leq s \int_{\Omega} |(w^+) - (w^-)|^p \\ &= s \int_{\Omega} |w|^p \\ &\leq s. \end{aligned}$$

Como $-u_4(t), u_4(t) \in M$, pela conexidade por arcos segue que

$$\begin{aligned}
 |\widetilde{J}_s(u_4(t)) - \widetilde{J}_s(-u_4(t))| \leq s &\iff \widetilde{J}_s(-u_4(t)) - \widetilde{J}_s(u_4(t)) \leq s \\
 &\iff \widetilde{J}_s(-u_4(t)) \leq \widetilde{J}_s(u_4(t)) + s \\
 &\iff \widetilde{J}_s(-u_4(t)) \leq (\mu - s) + s \\
 &\iff \widetilde{J}_s(-u_4(t)) \leq \mu.
 \end{aligned}$$

Logo, $-u_4(t)$ nos permite sair de $-\varphi_1$ indo até $\frac{-u^-}{\|u^-\|_p}$ mantendo-nos abaixo do nível de energia $\leq \mu$.

Por fim, podemos usar o caminho $u_3(t)$ para nos levar até u mantendo o nível de energia $< \mu$.

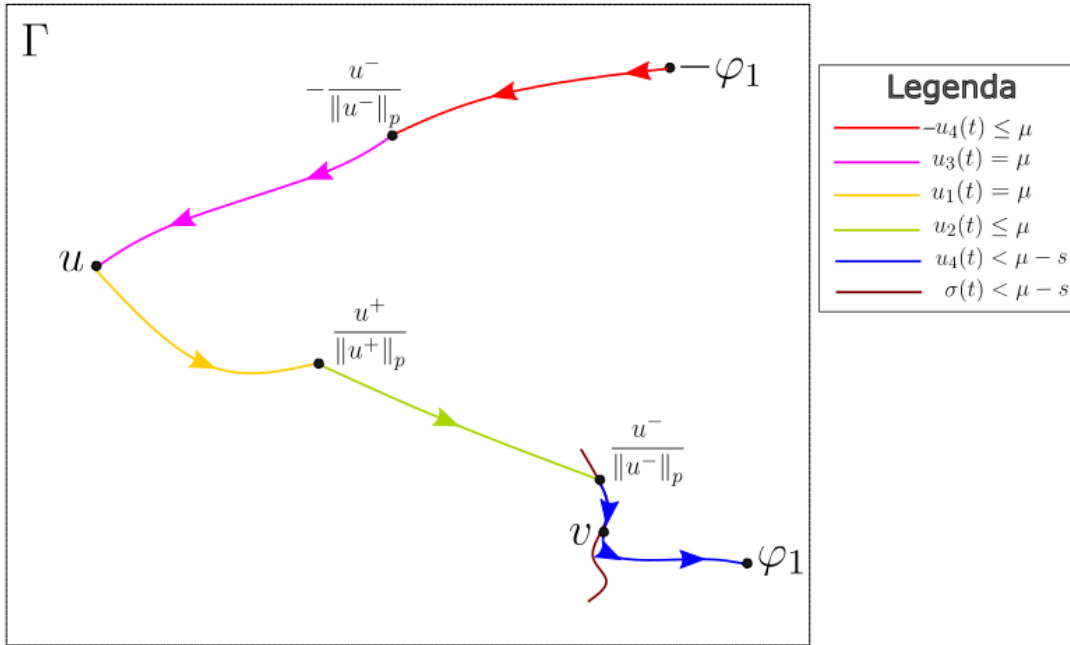


Figura 3.2: Caminho em Γ

Conseguimos então um caminho contínuo em M de $-\varphi_1$ até φ_1 mantendo-nos em um nível de energia $\leq \mu$. Assim, pela definição de $c(s)$, temos que $c(s) \leq \mu$, o que contradiz a escolha de μ .

■

4 Estudo das propriedades da curva $\mathcal{C}$

Nesse capítulo estudaremos algumas propriedades da curva $\mathcal{C}$, como a monotocidade, regularidade e também faremos a análise assintótica da curva.

4.1 Lemas preliminares

Consideremos o seguinte Problema,

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \alpha(x) (u^+)^{p-1} - \beta(x) (u^-)^{p-1} & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Lema 4.1. *Seja $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}$ e seja $\alpha(x), \beta(x)$ funções L^∞ satisfazendo*

$$\lambda_1 \leq \alpha(x) \leq \alpha \quad e \quad \lambda_1 \leq \beta(x) \leq \beta \quad q.s. \text{ em } \Omega. \quad (4.2)$$

Supondo que

$$\lambda_1 < \alpha(x) \quad e \quad \lambda_1 < \beta(x) \quad \text{em um subconjunto de medida positiva} \quad (4.3)$$

então qualquer u solução não trivial do Problema (4.1) muda de sinal e é tal que

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha \quad q.s. \text{ em } \{x; u(x) > 0\}, \\ \beta(x) &= \beta \quad q.s. \text{ em } \{x; u(x) < 0\}. \end{aligned}$$

Consequentemente, u é uma autofunção associada ao ponto (α, β) da $\mathcal{C}$.

Demonstração. Veja [13] Lema 5.4. ■

Corolário 4.2. *Seja $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}$. Supondo (4.2), (4.3) e ou $\alpha(x) < \alpha$ q.s. em Ω ou $\beta(x) < \beta$ q.s. em Ω , então o Problema (4.1) admite somente solução trivial.*

Demonstração. Veja [13] Corolário 5.4. ■

Definição 4.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, conexo e limitado. Ω é dito ser *regular* se para todo $z \in \partial\Omega$, existe um plano tangente, contínuo e dependendo de z . Dizemos que Ω satisfaz a '*condição da esfera interior*' em z , se existe uma bola aberta $B \subset \Omega$ com $z \in \partial B$.

4.2 Monotocidade da curva

Nesta seção nos dedicamos a provar a monotocidade da curva $\mathcal{C}$.

Proposição 4.4. *Seja $s \in \mathbb{R}^+$, então a curva*

$$s \longmapsto (s + c(s), c(s))$$

é:

(i) *contínua;*

(ii) *estritamente decrescente.*

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que a curva é contínua. Mostremos que a curva

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto c(s) \end{aligned}$$

é não crescente, ou seja, se $s < s'$, $c(s) \geq c(s')$.

Considerando $s < s'$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_s(u) - \widetilde{J}_{s'}(u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^p - s \int_{\Omega} (u^+)^p - \int_{\Omega} |\nabla u|^p - s' \int_{\Omega} (u^+)^p \\ &= -s \int_{\Omega} (u^+)^p + s' \int_{\Omega} (u^+)^p \\ &= \int_{\Omega} (u^+)^p (s' - s) \geq 0. \end{aligned}$$

Garantimos $\widetilde{J}_s \geq \widetilde{J}_{s'}$, junto com (2.47) garantimos

$$c(s) \geq c(s').$$

De (2.47), dado qualquer $\epsilon > 0$, escolhemos $\gamma \in \Gamma$ de forma que

$$\max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_{s'}(u) \leq c(s') + \epsilon \implies -c(s') \leq -\max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_{s'}(u) + \epsilon. \quad (4.4)$$

Logo

$$\begin{aligned} 0 &\leq c(s) - c(s') \\ &\leq c(s) - \max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_{s'}(u) + \epsilon \\ &\leq \max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_s(u) - \max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_{s'}(u) + \epsilon. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como γ é contínua e $[-1, 1]$ é limitado, então $\gamma([-1, 1])$ é um compacto no domínio do funcional, como $\widetilde{J}_s(u)$ é também contínuo ele assume um máximo na imagem do funcional pelo compacto. Seja $u_0 \in \gamma[-1, 1]$ esse elemento onde $\widetilde{J}_s$ atinge o máximo em $\gamma[-1, 1]$. Logo

$$\widetilde{J}_s(u_0) = \max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_s(u) \quad (4.6)$$

e ainda, temos

$$\max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_{s'}(u) \geq \widetilde{J}_{s'}(u_0) \implies -\max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_{s'}(u) \leq -\widetilde{J}_{s'}(u_0).$$

De (4.5) usando (4.6) junto com a desigualdade acima

$$0 \leq c(s) - c(s') \leq \widetilde{J}_s(u_0) - \widetilde{J}_{s'}(u_0) + \epsilon.$$

Estimando, segue

$$\begin{aligned} 0 &\leq c(s) - c(s') \\ &\leq \widetilde{J}_s(u_0) - \widetilde{J}_{s'}(u_0) + \epsilon \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_0|^p - s \int_{\Omega} (u_0^+)^p - \left(\int_{\Omega} |\nabla u_0|^p - s' \int_{\Omega} (u_0^+)^p \right) + \epsilon \\ &= (s' - s) \int_{\Omega} (u_0^+)^p + \epsilon \\ &\leq (s' - s) \int_{\Omega} |u_0|^p + \epsilon \\ &= (s' - s) + \epsilon, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que

$$\int_{\Omega} (u_0^+)^p \leq \int_{\Omega} |u_0|^p = 1.$$

Chegando que existe $\epsilon > 0$ de maneira onde

$$0 \leq c(s) - c(s') \leq (s' - s) + \epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que $s \mapsto c(s)$ é Lipschitz. Isso, por sua vez, implica por linearidade que a curva

$$s \longmapsto s + c(s)$$

é também Lipschitz e portanto ambas são contínuas. Concluindo a prova do item (i), visto que mostramos

$$s \longmapsto (s + c(s), c(s))$$

é contínua. Agora, mostraremos que a curva é estritamente decrescente, no sentido de querer que se

$$s < s' \implies \begin{cases} s + c(s) < s' + c(s) \\ c(s) > c(s') \end{cases}.$$

Seja $s < s'$, supondo que ou

$$s + c(s) \geq s' + c(s') \tag{a}$$

vale, ou

$$c(s) \leq c(s'). \tag{b}$$

vale. No caso (a), como $s' > s$

$$s + c(s) \geq s' + c(s') > s + c(s') \tag{4.7}$$

daí segue

$$c(s) > c(s'). \tag{4.8}$$

Queremos usar o Corolário 4.2, com $(\alpha, \beta) = (s + c(s), c(s))$ e para isso precisamos garantir que:

- (i) $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}$;
- (ii) $\lambda_1 \leq s' + c(s') \leq \alpha$ q.s. em Ω ;
- (iii) $\lambda_1 \leq c(s') \leq \beta$ q.s. em Ω ;
- (iv) $\lambda_1 < s' + c(s')$ e $\lambda_1 < c(s')$ em um conjunto de medida positiva;
- (v) ou $s' + c(s') < \alpha$ ou $c(s') < \beta$ q.s. em Ω .

O item (i) é garantido pelo Lema 2.10, os itens (ii) e (iii) são dados por (2.48). Note que (iv) segue pelo fato de que $(s' + c(s'), c(s'))$ é um ponto não trivial do espectro de Fučík. Logo, $s' + c(s') > \lambda_1$ e $c(s') > \lambda_1$. Já (v), por outro lado, é garantido por (4.7) e (4.8). Logo,

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= (s' + c(s'))(v^+)^{p-1} - c(s')(v^-)^{p-1} & \text{em } \Omega \\ v &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

só admite a solução trivial.

De forma análoga, para com o caso (b), observemos que $s + c(s) < s' + c(s')$. A curva $(\alpha, \beta) = (s' + c(s'), c(s'))$, pelo Corolário 4.2, chegamos que

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= (s + c(s))(v^+)^{p-1} - c(s)(v^-)^{p-1} & \text{em } \Omega \\ v &= 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.10)$$

admite somente a solução trivial.

Logo, mostramos que quando estamos no caso (a) o fato de (4.9) admitir somente solução trivial é uma contradição com o fato de que $(s' + c(s'), c(s')) \in \Sigma_p$. Por outro lado, quando estamos no caso (b), o problema (4.10) admitir somente solução trivial por sua vez contradiz o fato de que $(s + c(s), c(s)) \in \Sigma_p$. Portanto, termos suposto que a curva não era estritamente decrescente nos levou a contradições. ■

Observação 4.5. Para o caso linear em que $p = 2$, a curva $\mathcal{C}$ coincide com a curva construída por Figueiredo em [17].

4.3 Analise assintótica de $\mathcal{C}$

Esta sessão é dedicada a fazer uma análise do comportante da nossa curva $\mathcal{C}$ no limite.

Quando estamos nos Espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $p \leq N$, temos regularidade suficiente para conseguir estudar a curva $\mathcal{C}$. Quando $p > N$, vamos supor a seguinte hipótese adicional.

- **(HIP)** Quando $p > N$, assumiremos que para algum $x_0 \in \partial\Omega$ e $\varepsilon > 0$ temos que $\partial\Omega \cap B(x_0, \varepsilon)$ é regular.

A seguir, apenas enunciamos um resultado técnico.

Lema 4.6. *Supondo que vale **(HIP)** então existe $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que não existe $r \in \mathbb{R}$ que satisfaça*

$$\varphi(x) \leq r\varphi_1(x) \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Demonstração. Ver [13] Lema 4.3. ■

Proposição 4.7. *Supondo que vale **(HIP)**, então o limite de $c(s)$ conforme $s \mapsto +\infty$ é igual a λ_1 .*

Demonstração. Supondo **(HIP)**, queremos chegar na igualdade

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} c(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_s(u) = \lambda_1 = \widetilde{J}_s(-\varphi_1).$$

Supondo por contradição, que existe $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_s(u) > \lambda_1,$$

então para toda $\gamma \in \Gamma$ e $s \geq 0$ temos

$$\max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_s(u) \geq \lambda_1 + \delta. \quad (4.11)$$

Do Lema 4.6,

$$\nexists r \in \mathbb{R} ; \varphi(x) \leq r\varphi_1(x) \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Como (4.11) vale para todo $\gamma \in \Gamma$, considerando então o caminho $\gamma \in \Gamma$ da seguinte forma

$$\gamma(t) := \frac{t\varphi_1 + (1 - |t|)\varphi}{\|t\varphi_1 + (1 - |t|)\varphi\|_p}, \quad t \in [-1, 1].$$

Onde

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([-1, 1], M) ; \gamma(-1) = -\varphi_1, \gamma(1) = \varphi_1\}.$$

Como γ é contínua e $[-1, 1]$ é limitado, então $\gamma([-1, 1])$ é um compacto no domínio do funcional, como o funcional é também contínuo ele assume um máximo na imagem do funcional contínuo pelo compacto.

Considerando sem perda de generalidade que esse máximo seja atingido em $t = t_s$. Definindo $v_{t_s} \in \gamma([-1, 1])$ da seguinte forma

$$v_{t_s} := t_s\varphi_1 + (1 - |t_s|)\varphi.$$

Estimando o máximo do funcional $\widetilde{J}_s$

$$\begin{aligned}
 \max_{u \in \gamma[-1,1]} \widetilde{J}_s(u) &= J_s \left(\frac{v_{t_s}}{\|v_{t_s}\|_p} \right) \\
 &= \frac{1}{\|v_{t_s}\|_p^p} J_s(v_{t_s}) \\
 &= \frac{1}{\|v_{t_s}\|_p^p} \int_{\Omega} |\nabla v_{t_s}|^p - s \int_{\Omega} (v_{t_s}^+)^p \\
 &\stackrel{(4.11)}{\geq} (\lambda_1 + \delta).
 \end{aligned}$$

Temos que para todo $s \geq 0$

$$\int_{\Omega} |\nabla v_{t_s}|^p - s \int_{\Omega} (v_{t_s}^+)^p \geq (\lambda_1 + \delta) \int_{\Omega} |t_s \varphi_1 + (1 - |t_s|) \varphi|^p. \quad (4.12)$$

Conforme $s \rightarrow \infty$ em (4.12), podemos considerar, a menos de uma subsequencia, que

$$t_s \rightarrow \bar{t} \in [-1, 1]. \quad (4.13)$$

Sabemos que $v_{t_s} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se mantém limitado conforme $s \rightarrow +\infty$, ou seja, existe $K > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla v_{t_s}|^p = \|v_{t_s}\|_{1,p}^p \leq K.$$

Estimando em (4.12)

$$K - s \int_{\Omega} (v_{t_s}^+)^p \geq \int_{\Omega} |\nabla v_{t_s}|^p - s \int_{\Omega} (v_{t_s}^+)^p \geq (\lambda_1 + \delta) \int_{\Omega} |t_s \varphi_1 + (1 - |t_s|) \varphi|^p.$$

Quando fazemos $s \rightarrow +\infty$ na desigualdade acima segue que

$$\int_{\Omega} (v_{t_s}^+)^p \rightarrow 0, \quad (4.14)$$

pois caso contrario o lado esquerdo da desigualdade iria para menos infinito, contradizendo o fato de $\widetilde{J}_s$ ser limitado.

Por sua vez segue com $-1 \leq \bar{t} \leq 1$ que

$$0 \leftarrow \int_{\Omega} (v_{t_s}^+)^p = \int_{\Omega} ((t_s \varphi_1 + (1 - |t_s|) \varphi)^+)^p$$

e usando (4.13) temos

$$\int_{\Omega} ((t_s \varphi_1 + (1 - |t_s|) \varphi)^+)^p \rightarrow \int_{\Omega} ((\bar{t} \varphi_1 + (1 - |\bar{t}|) \varphi)^+)^p. \quad (4.15)$$

Logo

$$\int_{\Omega} ((\bar{t} \varphi_1 + (1 - |\bar{t}|) \varphi)^+)^p \rightarrow 0,$$

onde só pode acontecer quando $\bar{t} = -1$, pois caso contrario se $\bar{t} = 1$ teríamos

$$\int_{\Omega} ((\varphi_1 + (1 - |1|) \varphi)^+)^p \rightarrow 0 \implies \varphi_1^+ \rightarrow 0,$$

uma contradição com $\varphi_1 > 0$. Se $-1 < \bar{t} < 1$ aconteceria

$$\begin{aligned} (\bar{t}\varphi_1 + (1 - |\bar{t}|)\varphi)^+ &= 0 \quad \text{q.s. em } \Omega \\ \implies \bar{t}\varphi_1 + \overbrace{(1 - |\bar{t}|)\varphi}^{>0} &< 0 \quad \text{q.s. em } \Omega \\ \implies \varphi &< -\frac{\bar{t}}{1 - \bar{t}}\varphi_1 \quad \text{q.s. em } \Omega \end{aligned}$$

oque seria uma contradição com o Lema 4.6 usando

$$r = -\frac{\bar{t}}{1 - \bar{t}}.$$

Chegamos então que conforme $s \rightarrow \infty$, $t_s \rightarrow -1$ a menos de uma subsequência, e daí

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +\infty} v_{t_s} &= \lim_{s \rightarrow +\infty} t_s \varphi_1 + (1 - |t_s|)\varphi \\ &= -1\varphi_1 + (1 - 1)\varphi = -\varphi_1. \end{aligned}$$

Usando (4.14) e (4.15), passando o limite em

$$\int_{\Omega} |\nabla v_{t_s}|^p - s \int_{\Omega} (v_{t_s}^+)^p \geq (\lambda_1 + \delta) \int_{\Omega} |t_s \varphi_1 + (1 - |t_s|)\varphi|^p \quad (4.16)$$

chegamos em

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_{\Omega} |\varphi_1|^p &= \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^p \\ &\geq (\lambda_1 + \delta) \int_{\Omega} |-\varphi_1|^p \\ &= (\lambda_1 + \delta) \int_{\Omega} |\varphi_1|^p. \end{aligned}$$

Como $\delta > 0$,

$$\lambda_1 \int_{\Omega} |\varphi_1|^p \geq (\lambda_1 + \delta) \int_{\Omega} |\varphi_1|^p.$$

é uma contradição, logo

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} c(s) = \lambda_1.$$

■

O resultado anterior está nos dizendo que conforme s vai para infinito, o ponto $c(s)$ tende ao valor de mínimo local estrito λ_1 , portanto a curva $\mathcal{C}$ converge em direção a linha trivial $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ enquanto da simetria em relação a diagonal principal do Espectro de Fučík, Proposição 2.12, concluímos que a curva $\mathcal{C}$ também converge para a linha trivial $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$. Pela Proposição 3.1, as linhas triviais são isoladas no Espectro de Fučík portanto a curva não a tangencia as linhas triviais.

Referências

- [1] A. Ambrosetti; A. Malchiodi. *Nonlinear Analysis with Applications to Semilinear Elliptic Problems*. Cambridge University Press, 2007.
- [2] A. Anane and N. Tsouli. On the second eigenvalue of the p -Laplacian. In *Nonlinear partial differential equations (Fès, 1994)*, volume 343 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 1–9. Longman, Harlow, 1996.
- [3] D. Arcoya and L. Orsina. Landesman-Lazer conditions and quasilinear elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, 28(10):1623–1632, 1997.
- [4] M. Arias and J. Campos. Radial Fučík spectrum of the Laplace operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 190(3):654–666, 1995.
- [5] M. Arias, J. Campos, and J.-P. Gossez. On the antimaximum principle and the Fučík spectrum for the Neumann p -Laplacian. *Differential Integral Equations*, 13(1-3):217–226, 2000.
- [6] M. Arias, J. Campos, and J.-P. Gossez. On the antimaximum principle and the fučík spectrum for the neumann p -laplacian. *Differential and Integral Equations*, 13, 01 2000.
- [7] J. G. Azorero and I. P. Alonso. Existence and nonuniqueness for the p -laplacian. *Communications in Partial Differential Equations*, 12(12):126–202, 1987.
- [8] A. Bonnet. A deformation lemma on a c^1 manifold. *Manuscripta mathematica*, 81(3-4):339–360, 1993.
- [9] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [10] H. Brézis and E. Lieb. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88(3):486–490, 1983.
- [11] F. E. Browder. Nonlinear eigenvalues problems and group invariance. In *Functional Analysis and Related Fields (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968)*, pages 1–58. Springer, New York, 1970.
- [12] N. P. Căc. On nontrivial solutions of a Dirichlet problem whose jumping nonlinearity crosses a multiple eigenvalue. *J. Differential Equations*, 80(2):379–404, 1989.
- [13] M. Cuesta, D. de Figueiredo, and J.-P. Gossez. The beginning of the Fučík spectrum for the p -Laplacian. *J. Differential Equations*.

-
- [14] M. Cuesta and J.-P. Gossez. A variational approach to nonresonance with respect to the Fučík spectrum. *Nonlinear Anal.*, 19(5):487–500, 1992.
- [15] E. N. Dancer. Corrigendum: “On the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic partial differential equations” [Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **76** (1976/77), no. 4, 283–300; MR **58** #17506]. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 89(1-2):15, 1981.
- [16] D. G. de Figueiredo. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, volume 81 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [17] D. G. de Figueiredo and J.-P. Gossez. On the first curve of the Fučík spectrum of an elliptic operator. *Differential Integral Equations*, 7(5-6):1285–1302, 1994.
- [18] P. Drábek. *Solvability and bifurcations of nonlinear equations*, volume 264 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.
- [19] A. Elmoataz; M. Toutain; D. Tenbrinck. On the p -laplacian and ∞ -laplacian on graphs with applications in image and data processing. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 8:2412–2451, 2015.
- [20] L. C. Evans; R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Taylor & Francis Group, 2015.
- [21] G. M. Figueiredo. *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*. Notas de aula na UNB, 2016.
- [22] G. B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [23] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley and Sons, 2 edition, 1999.
- [24] S. Fučík. Boundary value problems with jumping nonlinearities. *Časopis Pěst. Mat.*, 101(1):69–87, 1976.
- [25] S. Fučík. *Solvability of nonlinear equations and boundary value problems*, volume 4 of *Mathematics and its Applications*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston, Mass., 1980. With a foreword by Jean Mawhin.
- [26] T. Gallouët and O. Kavian. Résultats d’existence et de non-existence pour certains problèmes demi-linéaires à l’infini. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5)*, 3(3-4):201–246 (1982), 1981.
- [27] N. Ghoussoub. *Duality and perturbation methods in critical point theory*, volume 107 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. With appendices by David Robinson.
- [28] S. Kesavan. *Topics in functional analysis and applications*. New Age International, 1989.

-
- [29] A. Lazer. Introduction to multiplicity theory for boundary value problems with asymmetric nonlinearities. In *Partial differential equations (Rio de Janeiro, 1986)*, volume 1324 of *Lecture Notes in Math.*, pages 137–165. Springer, Berlin, 1988.
 - [30] A. C. Lazer and P. J. McKenna. Critical point theory and boundary value problems with nonlinearities crossing multiple eigenvalues. *Comm. Partial Differential Equations*, 10(2):107–150, 1985.
 - [31] A. C. Lazer and P. J. McKenna. Critical point theory and boundary value problems with nonlinearities crossing multiple eigenvalues. II. *Comm. Partial Differential Equations*, 11(15):1653–1676, 1986.
 - [32] P. Lindqvist. On the equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 109(1):157–164, 1990.
 - [33] C. A. Magalhães. Semilinear elliptic problem with crossing of multiple eigenvalues. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(9):1265–1292, 1990.
 - [34] C. A. Margulies and W. Margulies. An example of the Fučík spectrum. *Nonlinear Anal.*, 29(12):1373–1378, 1997.
 - [35] A. M. Micheletti. A remark on the resonance set for a semilinear elliptic equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 124(4):803–809, 1994.
 - [36] K. Perera. On the Fučík spectrum of the p -Laplacian. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 11(2):259–270, 2004.
 - [37] K. Perera and M. Schechter. *Topics in critical point theory*, volume 198 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
 - [38] M. Schechter. The Fučík spectrum. *Indiana Univ. Math. J.*, 43(4):1139–1157, 1994.
 - [39] M. Willem. *Minimax Theorems*. Springer Science and Business Media, 1996.