IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.005/11

De Supergravidade em $\mathbf{AdS_5 \times S^5}$ a $\mathcal{N} = 4$ SYM via Superespaço Harmônico

Thales Agricola Calixto de Azevedo

Orientador

Prof. Dr. Nathan Jacob Berkovits

Março de 2011

Agradecimentos

Eu acredito que (quase) todos os pequenos eventos da vida são de alguma forma integrados (no sentido matemático da palavra), evidentemente com diferentes pesos, desde o nascimento (ou, quem sabe, até mesmo antes) até um dado instante, para produzir as circunstâncias em que um indivíduo se encontra naquele instante. Sendo assim, seria impossível listar aqui os nomes de todos aqueles que um dia, de algum modo, contribuíram para que eu chegasse até aqui. Entretanto, alguns agradecimentos incontestavelmente pertencem a esta página.

Primeiramente, agradeço à minha família e à minha namorada pelo amor e pelo carinho que sempre demonstraram, em qualquer situação, dando-me seu apoio e seus conselhos ao longo desta jornada. Em particular, agradeço aos meus pais pela educação que me deram e proporcionaram e pela liberdade que sempre tive para fazer minhas escolhas.

Agradeço também ao meu orientador, Prof. Dr. Nathan Berkovits, não só pela atenciosa orientação, mas também pela motivação, pelo encorajamento e pela inspiração. Agradeço ainda pelos vários eventos e escolas que ele (co)organizou neste período, que me permitiram estar em contato direto com pesquisadores como J. Polchinski, B. Zwiebach, J. Maldacena, E. Witten, P. van Nieuwenhuizen, A. Zee, dentre outros, além de conhecer outros estudantes de várias partes do Brasil e do mundo. Estas experiências certamente contribuíram para minha formação.

Ao "pessoal de cordas" do IFT, ou seja, Prof. Dr. Andrei Mikhailov, Prof. Dr. Horatiu Nastase, Renann Jusinskas e Thiago Fleury, meus agradecimentos pela constante solicitude ao tirar minhas dúvidas sobre o que quer que fosse.

Aos amigos, agradeço pelos bons momentos vividos e pelo apoio nos momentos não tão bons. Agradeço especialmente à Fatima, minha "colega de casa", com quem convivi agradavelmente na maior parte dos últimos doze meses e a quem certamente devo muito.

Devo ainda um agradecimento a todos meus professores, que são parte importante do que sou hoje como físico e como pessoa. Em especial, agradeço ao Prof. Dr. Nelson Braga, meu orientador durante a iniciação científica, que me possibilitou um primeiro contato com a teoria de cordas e sempre me apoiou durante a graduação.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

A correspondência AdS/CFT, da forma como foi conjecturada por Maldacena, sugere uma equivalência notável entre duas teorias aparentemente não relacionadas, quais sejam uma teoria de supercordas tipo IIB em um *background* $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ e uma teoria de super Yang–Mills (SYM) em quatro dimensões maximalmente supersimétrica ($\mathcal{N} = 4$). Nesta dissertação, estudamos a relação entre o espectro da teoria de supergravidade tipo IIB em $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ (limite de baixas energias da teoria de supercordas mencionada acima) e a família de operadores invariantes de *gauge* em $\mathcal{N} = 4$ SYM descrita em [P. Howe, P. West, Int. J. Mod. Phys. **A 14** (1999) 2659] através do uso de um superespaço harmônico, tendo como base principal o artigo [P. Heslop, P. Howe, Phys. Lett. **B 502** (2001) 259]. Fazemos ainda uma revisão do formalismo de *cosets*, que é amplamente utilizado neste trabalho.

Palavras Chaves: Supersimetria; Supergravidade; Correspondência AdS/CFT; Superespaço Harmônico.

Áreas do conhecimento: Ciências Exatas e da Terra; Física de Partículas e Campos; Teoria de Supercordas.

Abstract

The AdS/CFT correspondence, as conjectured by Maldacena, suggests a remarkable equivalence between two apparently unrelated theories, namely a type IIB superstring theory on an $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ background and a maximally supersymmetric ($\mathcal{N} = 4$) super Yang–Mills (SYM) theory in four dimensions. In this dissertation, we study the relation between the spectrum of the type IIB supergravity theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ (low-energy limit of the superstring theory mentioned above) and the family of gauge-invariant operators in $\mathcal{N} = 4$ SYM described in [P. Howe, P. West, Int. J. Mod. Phys. **A 14** (1999) 2659] by making use of a harmonic superspace, mostly based on [P. Heslop, P. Howe, Phys. Lett. **B 502** (2001) 259]. Moreover, we review the coset space formalism, which is largely used in the present work.

Índice

Capítulo 1

Introdução

A correspondência anti-de Sitter/Teoria de Campos Conforme (AdS/CFT), da forma como foi conjecturada por Maldacena [1], sugere uma equivalência notável entre duas teorias aparentemente não relacionadas. De um lado da correspondência (o lado AdS), temos uma teoria de supercordas tipo IIB em um *background* $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, na qual o fluxo da 5-forma através de S^5 é um número inteiro N, *i.e.*,

$$\int_{\mathrm{S}^5} F_{(5)} = N \,, \tag{1.1}$$

e os raios de AdS_5 e S^5 são iguais e dados por

$$L = \sqrt[4]{4\pi g_{\mathrm{s}} N \alpha'^2} \,, \tag{1.2}$$

onde g_{s} é a constante de acoplamento da supercorda e α' é o parâmetro de Regge, relacionado à tensão da supercorda T_0 por

$$T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'} \,. \tag{1.3}$$

Do outro lado (o lado da teoria de campos conforme), temos uma teoria de super Yang–Mills (SYM) em quatro dimensões maximalmente supersimétrica ($\mathcal{N} = 4$), com grupo de *gauge* $\mathrm{SU}(N)$ e constante de acoplamento $g_{\mathrm{YM}} = \sqrt{g_{\mathrm{s}}}$ na fase conforme.

Na forma mais forte da conjectura, a correspondência é dita válida para todo valor de N e todos os regimes da constante de acoplamento $g_{\mathrm{s}} = g_{\mathrm{YM}}^2$. Mesmo se não for este o caso, alguns limites já são bastante interessantes. O limite de 't Hooft no lado SYM, no qual $N \to \infty$ com $\lambda := g_{\mathrm{YM}}^2 N$ mantido fixo, corresponde à teoria de supercordas "clássica" (sem *loops* de cordas) em $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ no lado AdS. Se, em vez de manter λ fixo, tomamos o limite $\lambda \to \infty$, a teoria de supercordas se reduz à teoria de supergravidade tipo IIB em $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Assim, o regime de acoplamento forte em SYM é mapeado no regime de baixas energias das teorias de supergravidade e supercordas, um problema que oferece uma chance maior de solução.

A notabilidade da conjectura advém principalmente do fato de a correspondência se dar entre uma teoria de gravidade em dez dimensões e uma teoria em quatro dimensões totalmente sem gravidade; de fato, com partículas de spin igual ou inferior a 1, apenas.* Tal fato sugere que a dinâmica gravitacional no interior do espaço de anti-de Sitter seja resultante de uma imagem holográfica gerada pela dinâmica da teoria na fronteira de AdS_5. Por isso, muitas vezes se chama a correspondência de holográfica.

Parte do interesse na correspondência está na construção de modelos nela baseados que têm fornecido resultados sobre QCD. Esta linha de pesquisa é às vezes chamada AdS/QCD. Há também aplicações da correspondência à física dos sólidos, o que ficou conhecido como AdS/CMT (*condensed matter theory*).

Nesta dissertação, estudamos a relação entre o espectro da teoria de supergravidade tipo IIB em $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ e a família de operadores invariantes de *gauge* em $\mathcal{N} = 4$ SYM introduzida em [2] através do uso de um superespaço harmônico, tendo como base principal o artigo [3]. Não é feita aqui uma revisão sobre a correspondência AdS/CFT. Para tanto, ver, por exemplo, [5, 6].

No segundo capítulo, fazemos uma revisão sobre o poderoso formalismo de *cosets*, que é largamente usado ao longo da dissertação. Além disso, trabalhamos alguns exemplos para esclarecer as ideias e conceitos apresentados, bem como adiantar algumas propriedades do espaço de anti-de Sitter que serão úteis no próximo capítulo.

No terceiro capítulo, apresentamos a teoria de supergravidade tipo IIB. Mostramos que os campos componentes podem ser descritos em termos de um supercampo quiral $\mathbf{A}$ satisfazendo a um vínculo da forma $\mathcal{D}^4\mathbf{A} \sim \bar{\mathcal{D}}^4\bar{\mathbf{A}}$. Isto é verdade tanto para um *background* $\mathbb{M}^{10}$ como para um *background* $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Neste último caso, expandimos $\mathbf{A}$ em harmônicos de S^5 e passamos para a fronteira de AdS_5, obtendo um conjunto de supercampos quirais $\mathcal{N} = 4$ em quatro dimensões.

No quarto capítulo, introduzimos o superespaço harmônico $\mathcal{M}^{4|16} \times \mathrm{SU}(4)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(2))$, traduzimos o vínculo de quarta ordem satisfeito pelo supercampo $\mathbf{A}$ para a nova linguagem e mostramos que este pode ser facilmente resolvido em termos de uma família de supercampos prepotenciais que se acoplam a correntes de Noether generalizadas. Os vínculos impostos nestas últimas, oriundos das invariâncias de *gauge* dos prepotenciais, são precisamente aqueles satisfeitos pela família de operadores invariantes de *gauge* em $\mathcal{N} = 4$ SYM mencionada acima.

Finalmente, no quinto e último capítulo, apresentamos nossas conclusões e perspectivas para o futuro. Em seguida, o apêndice A revisa os principais aspectos

*Esta é a razão de $\mathcal{N} = 4$ SYM ser dita maximalmente supersimétrica. Fosse $\mathcal{N} > 4$, teríamos partículas com spin maior que 1.

do formalismo de espinores de duas componentes em quatro dimensões, além de fixar nossa notação e nossas convenções. No apêndice B, fazemos uma breve revisão sobre espinores e matrizes de Pauli em 10 dimensões. A lista das relações de (anti)comutação dos geradores do grupo $\mathrm{PSU}(2,2|4)$ é exposta no apêndice C, deixando explícitas as convenções utilizadas nos cálculos ao longo da dissertação.

Capítulo 2

Técnicas de espaços homogêneos

Formulações manifestamente invariantes de teorias de campos fazem uso de algum espaço (ou superespaço) em que uma dada simetria (ou supersimetria) é realizada geometricamente por transformações de coordenadas. Apresentamos aqui o formalismo de *cosets*, que nos permite construir tais espaços de forma sistemática e que será imprescindível para esta dissertação. Além disso, fornecemos exemplos de espaços homogêneos como aplicação do formalismo.

2.1 Formalismo de "cosets"

Seja G um grupo com geradores X_I e Y_A ($I = 1, \ldots, n$ e $A = n+1, \ldots, n+m$) e H um subgrupo de G com geradores X_I. A álgebra de Lie de G tem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} &[X_I, X_J] = f_{IJ}{}^K X_K\,, \qquad [X_I, Y_A] = f_{IA}{}^J X_J + f_{IA}{}^B Y_B\,, \\ &[Y_A, Y_B] = f_{AB}{}^I X_I + f_{AB}{}^C Y_C\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde os f's são as constantes de estrutura do grupo G. Podemos definir uma relação de equivalência entre dois elementos $g_1, g_2 \in G$ da seguinte maneira:

$$g_1 \sim g_2 \;:\Longleftrightarrow\; g_1^{-1} g_2 \in H\,. \tag{2.2}$$

As classes de equivalência de G pela relação definida acima são chamadas **"cosets"**.*
O conjunto de *cosets* define o **quociente de G por H**, o qual é usualmente denotado por G/H.

É sempre possível definir uma ação de G sobre G/H que age transitivamente em G/H, o que faz de G/H um **espaço homogêneo** de G. Naturalmente, o subgrupo $H \subset G$ é o **grupo de isotropia** do elemento $H \in G/H$ [7].

*A rigor, **"cosets" à esquerda**. Em toda a dissertação, *cosets* e ações de grupos serão sempre implicitamente definidos à esquerda.

O espaço G/H é parametrizado por coordenadas ξ^A, correspondendo aos geradores Y_A. Podemos definir um **representante do "coset"** como

$$\Omega := e^{i\xi^A Y_A} . \tag{2.3}$$

Esta definição implica que H corresponde à origem de G/H ($\xi = 0$), ou seja, $H \subset G$ é o grupo de isotropia da origem de G/H. O representante do *coset* é definido a menos da relação de equivalência

$$\Omega(\xi) \sim \Omega(\xi) h(\lambda) , \tag{2.4}$$

onde $h(\lambda) \in H$ é uma transformação local.

O grupo G age globalmente sobre G/H. A ação de um elemento $g \in G$ é definida da seguinte forma:

$$g\, e^{i\xi^A Y_A} = e^{i\xi'^A(\xi,g) Y_A}\, h(\xi, g) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Omega' = g\,\Omega\,h^{-1} , \tag{2.5}$$

onde $h(\xi, g) = \exp[i\lambda^I(\xi, g) X_I]$ é algum elemento do subgrupo H com parâmetros $\lambda^I(\xi, g)$. Os parâmetros ξ'^A e λ^I em (2.5) podem, em princípio, ser obtidos através da fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff

$$e^A e^B = \exp\left\{A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}\left([A, [A, B]] + [[A, B], B]\right) + \cdots\right\} \tag{2.6}$$

e da álgebra (2.1).

A partir do representante do *coset*, definimos a **1-forma de Cartan** como [8]

$$\mathcal{C}(\xi) = \mathcal{C}^M(\xi)\mathbf{g}_M = \mathrm{d}\xi^A \mathcal{C}_A{}^M \mathbf{g}_M := \Omega(\xi)^{-1}\mathrm{d}\Omega(\xi) , \tag{2.7}$$

onde $\mathbf{g}_M$ representa coletivamente os geradores do grupo G, *i.e.*, X_I e Y_A. Supondo $f_{IA}{}^J = 0$, podemos escrever a 1-forma de Cartan como

$$\mathcal{C}^M \mathbf{g}_M = i(E + \omega) = i(E^A Y_A + \omega^I X_I) . \tag{2.8}$$

Nesta expressão, E^A são as componentes do **"vielbein"**,[†] enquanto ω^I são as componentes da **conexão** para o subgrupo H, a qual generaliza a conexão espinorial. Da equação (2.5), podemos derivar as leis de transformação destes campos sob a ação de $g \in G$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
(\Omega^{-1}\mathrm{d}\Omega)' &= (g\Omega h^{-1})^{-1}\mathrm{d}(g\Omega h^{-1}) \\
&= h(\Omega^{-1}\mathrm{d}\Omega)h^{-1} + h\mathrm{d}h^{-1} \\
&= i(hEh^{-1} + h\omega h^{-1} - ih\mathrm{d}h^{-1}) \qquad (2.9)\\
&\overset{!}{=} i(E' + \omega') , \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

[†]Para evitar a introdução de mais notação, utilizamos os mesmos índices para as coordenadas da variedade e do espaço tangente. Não há risco de ambiguidade, uma vez que o contexto sempre nos permite inferir o tipo de índice que está sendo usado. Por exemplo, as componentes do *vielbein* sempre carregam um índice do espaço tangente.

onde usamos $\mathrm{d}g = 0$, já que g representa uma simetria global e, portanto, é independente de ξ^A. De (2.9) e (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} E' &= hEh^{-1} \\ \omega' &= h\omega h^{-1} - ih\mathrm{d}h^{-1}\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

O *vielbein* e a conexão são utilizados para definir a **derivada covariante** D no espaço G/H. Se $\psi_{\mathrm{r}}(\xi)$ (r é o índice da representação de H) é um objeto que se transforma homogeneamente sob a ação de G, então

$$(D\psi)_{\mathrm{r}} \equiv E^A (D_A\psi)_{\mathrm{r}} = [(\mathrm{d} + i\,\omega)\psi]_{\mathrm{r}} \tag{2.12}$$

também o é. É claro que a última expressão é apenas esquemática, a forma exata de $(\omega\psi)_{\mathrm{r}}$ dependendo do tipo de objeto que é ψ_{r}.

Ainda a partir do *vielbein* e da conexão, podemos definir a **torção**

$$T := DE = \mathrm{d}E - i\,E \wedge \omega - i\,\omega \wedge E \tag{2.13}$$

e a **curvatura**

$$R := \mathrm{d}\omega - i\,\omega \wedge \omega\,, \tag{2.14}$$

que caracterizam a geometria do espaço.[‡] Derivadas de ordem superior do *vielbein* e da conexão levam apenas a relações entre os objetos definidos acima. De fato,

$$\begin{aligned} DT &= \mathrm{d}T - i\,T \wedge \omega + i\,\omega \wedge T \\ &= -i\,E \wedge \mathrm{d}\omega + i\,\mathrm{d}E \wedge \omega - i\,\omega \wedge \mathrm{d}E + i\,\mathrm{d}\omega \wedge E - i\,\mathrm{d}E \wedge \omega \\ &\quad - (E \wedge \omega) \wedge \omega - (\omega \wedge E) \wedge \omega + i\,\omega \wedge \mathrm{d}E + \omega \wedge (E \wedge \omega) + \omega \wedge (\omega \wedge E) \\ &= -i\,(E \wedge R - R \wedge E) \end{aligned} \tag{2.15}$$

e

$$\begin{aligned} DR &= \mathrm{d}R - i\,R \wedge \omega + i\,\omega \wedge R \\ &= -i\,\omega \wedge \mathrm{d}\omega + i\,\mathrm{d}\omega \wedge \omega - i\,\mathrm{d}\omega \wedge \omega - (\omega \wedge \omega) \wedge \omega + i\,\omega \wedge \mathrm{d}\omega + \omega \wedge (\omega \wedge \omega) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

As equações (2.15) e (2.16) são chamadas **identidades de Bianchi**.

Aplicando duas vezes a derivada covariante a uma p-forma $\mathcal{F}$ tomando valores na álgebra de Lie de G, podemos derivar uma outra identidade:

$$\begin{aligned} D^2\mathcal{F} &= D\,[\mathrm{d}\mathcal{F} - i\,\mathcal{F} \wedge \omega + (-1)^p i\,\omega \wedge \mathcal{F}] \\ &= -i\,\mathcal{F} \wedge \mathrm{d}\omega - (\mathcal{F} \wedge \omega) \wedge \omega + (-1)^p(\omega \wedge \mathcal{F}) \wedge \omega \\ &\quad + i\,\mathrm{d}\omega \wedge \mathcal{F} - (-1)^p\omega \wedge (\mathcal{F} \wedge \omega) + \omega \wedge (\omega \wedge \mathcal{F}) \\ &= -i\,(\mathcal{F} \wedge R - R \wedge \mathcal{F})\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

[‡]No que diz respeito a formas diferenciais, nossas convenções são as mesmas de [9].

Esta identidade recebe o nome de **identidade de Ricci**. Note-se que a identidade de Bianchi (2.15) é um caso particular de (2.17), no qual $\mathcal{F} = E$. De modo análogo, podemos derivar a identidade de Ricci para um campo $\Psi_{\mathrm{r}}(\xi)$. Obtemos

$$D^2\Psi_{\mathrm{r}} = i\,(R\Psi)_{\mathrm{r}}\,, \tag{2.18}$$

ou seja,

$$D(E^A D_A \Psi_{\mathrm{r}}) = E^A \wedge E^B D_B D_A \Psi_{\mathrm{r}} + T^A D_A \Psi_{\mathrm{r}} = i\,(R\Psi)_{\mathrm{r}}\,, \tag{2.19}$$

donde

$$[D_A, D_B\}\Psi_{\mathrm{r}} = -T_{AB}{}^C D_C \Psi_{\mathrm{r}} + i\,(R_{AB}\Psi)_{\mathrm{r}}\,, \tag{2.20}$$

sendo $[\,,\}$ um anticomutador no caso de D_A e D_B serem ambos fermiônicos e um comutador nos demais casos. Este é um resultado assaz interessante, uma vez que nos permite obter as relações de (anti)comutação das derivadas covariantes sem que precisemos conhecer a forma explícita das mesmas.

As ideias e os conceitos apresentados aqui, bem como sua utilidade, ficarão mais claros quando aplicados aos exemplos da próxima seção.

2.2 Exemplos

2.2.1 Espaço de Minkowski

Talvez o exemplo mais simples e mais bem conhecido de um espaço homogêneo seja o espaço de Minkowski $\mathbb{M}^4$. Neste, G é o grupo de Poincaré $\mathrm{ISO}(1,3)$ e H é o grupo de Lorentz $\mathrm{SO}(1,3)$, *i.e.*,

$$\mathbb{M}^4 = \frac{\mathrm{ISO}(1,3)}{\mathrm{SO}(1,3)} =: \frac{\{P_a, M_{ab}\}}{\{M_{ab}\}}\,. \tag{2.21}$$

Na equação acima, introduzimos uma notação em que um grupo é identificado com o conjunto dos seus geradores. P_a são os geradores das translações e $M_{ab} = -M_{ba}$, os geradores das rotações de Lorentz $(a, b = 0, \ldots, 3)$. A álgebra do grupo de Poincaré tem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= 0\,, \\
[M_{ab}, P_c] &= 2i\eta_{c[b}P_{a]}\,, \\
[M_{ab}, M_{cd}] &= 2i(\eta_{c[b}M_{a]d} + \eta_{d[a}M_{b]c})\,,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

onde $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ e $_{[ab]} := \frac{1}{2}(_{ab} - {}_{ba})$. As coordenadas associadas aos geradores P_a são as usuais x^a, e o representante do *coset* pode ser escolhido como

$$\Omega = e^{ix^a P_a}\,. \tag{2.23}$$

Sob a ação de uma translação $\exp[ic^a P_a]$ ($c^a \in \mathbb{R}^4$), temos

$$e^{ic^a P_a}\, e^{ix^a P_a} = e^{i(x^a+c^a)P_a}\,, \tag{2.24}$$

ou seja, $x'^a = x^a + c^a$ e $h = \mathbf{1}$. Já uma rotação de Lorentz $\exp[\frac{i}{2}\lambda^{ab}M_{ab}]$, com parâmetros $\lambda^{ab} = -\lambda^{ba}$ reais, produz

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{2}\lambda^{ab}M_{ab}}\, e^{ix^a P_a} &= e^{\frac{i}{2}\lambda^{ab}M_{ab}}\, e^{ix^a P_a}\, e^{-\frac{i}{2}\lambda^{ab}M_{ab}}\, e^{\frac{i}{2}\lambda^{ab}M_{ab}} \\ &= e^{\frac{i}{2}\lambda^{ab}M_{ab}} \left(\mathbf{1} + ix^a P_a - \frac{1}{2!}x^a x^b P_a P_b + \cdots\right) e^{-\frac{i}{2}\lambda^{ab}M_{ab}}\, e^{\frac{i}{2}\lambda^{ab}M_{ab}} \\ &= e^{i\exp[\lambda^{ab}x_a\partial_b]x^c P_c} e^{\frac{i}{2}\lambda^{ab}M_{ab}}\,; \end{aligned} \tag{2.25}$$

logo, $x'^c = \exp[\lambda^{ab}x_a\partial_b]x^c =: \Lambda^c{}_d\, x^d$, onde Λ é a matriz de Lorentz na representação vetorial, e $h = \exp[\frac{i}{2}\lambda^{ab}M_{ab}]$. No cálculo acima, utilizamos o lema de Hadamard, segundo o qual

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \cdots\,. \tag{2.26}$$

Esta fórmula será utilizada por diversas vezes neste capítulo sem que façamos menção a ela.

Para calcular a 1-forma de Cartan, utilizamos o representante do *coset* (2.23), a definição (2.7) e a seguinte expressão para a derivada de uma exponencial:

$$\mathrm{d}e^A = \left(\mathrm{d}A + \frac{1}{2!}[A,\mathrm{d}A] + \frac{1}{3!}[A,[A,\mathrm{d}A]] + \cdots\right) e^A\,. \tag{2.27}$$

Obtemos

$$\begin{aligned} e^{-ix^a P_a}\mathrm{d}e^{ix^a P_a} &= e^{-ix^a P_a}(i\mathrm{d}x^a P_a)e^{ix^a P_a} \\ &= i\mathrm{d}x^a P_a\,, \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde o *vielbein*[§] $E^a = \mathrm{d}x^a$ e a conexão é nula, o que implica que, neste espaço, a derivada covariante é dada simplesmente pela derivada usual, *i.e.*, $D_a = \partial_a$. Podemos concluir ainda que também se anulam a torção e a curvatura.

O espaço de Minkowski também pode ser identificado com um outro quociente, considerando os geradores do grupo das transformações conformes $\mathrm{SO}(2,4)$. Temos

$$\mathbb{M}^4 = \frac{\mathrm{SO}(2,4)}{\mathrm{Span}(\mathrm{iso}(1,3)_K \oplus \Delta)} = \frac{\{P_a, M_{ab}, K_a, \Delta\}}{\{M_{ab}, K_a, \Delta\}}\,, \tag{2.29}$$

onde Δ é o gerador das dilatações e K_a são os geradores dos *boosts* conformes. A parte da álgebra envolvendo os novos geradores é

$$\begin{aligned} [\Delta, P_a] &= iP_a\,, & [\Delta, K_a] &= -iK_a\,, \\ [M_{ab}, K_c] &= 2i\eta_{c[b}K_{a]}\,, & [P_a, K_b] &= -2i(\eta_{ab}\Delta + M_{ab})\,, \\ [K_a, K_b] &= 0\,, & [\Delta, M_{ab}] &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

[§]Neste caso, também chamado *vierbein* ou tetrada.

Podemos, agora, estudar o efeito das novas transformações sobre as coordenadas x^a. Sob a ação de uma dilatação $\exp[i\log(\lambda)\Delta]$ $(\lambda > 0)$, temos

$$
\begin{aligned}
e^{i\log(\lambda)\Delta}e^{ix^aP_a} &= e^{i\log(\lambda)\Delta}e^{ix^aP_a}e^{-i\log(\lambda)\Delta}e^{i\log(\lambda)\Delta} \\
&= e^{i\frac{x^a}{\lambda}P_a}e^{i\log(\lambda)\Delta}\,,
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

donde $x'^a = x^a/\lambda$ e $h = \exp[i\log(\lambda)\Delta]$. A obtenção da ação de um *boost* conforme $\exp[iv^aK_a]$ $(v^a \in \mathbb{R}^4)$ é um pouco mais complicada. Considerando parâmetros v^a infinitesimais, temos

$$
\begin{aligned}
e^{iv^aK_a}e^{ix^aP_a} &= e^{ix^aP_a}e^{-ix^aP_a}e^{iv^aK_a}e^{ix^aP_a} \\
&= e^{ix^aP_a}e^{-ix^aP_a}\left[\mathbf{1} + iv^aK_a\right]e^{ix^aP_a} \\
&= e^{ix^aP_a}\left[\mathbf{1} + i\left(2(v\cdot x)x^aP_a - x^2v^aP_a + v^aK_a - 2(v\cdot x)\Delta - 2v^ax^bM_{ba}\right)\right] \\
&= e^{i(x^a+2(v\cdot x)x^a-x^2v^a)P_a}\left[\mathbf{1} + i\left(v^aK_a - 2(v\cdot x)\Delta - 2v^ax^bM_{ba}\right)\right]\,,
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

onde desprezamos termos da ordem de v^2. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\delta x^a &= 2(v\cdot x)x^a - x^2v^a\,, \\
h &= \mathbf{1} + i\left(v^aK_a - 2(v\cdot x)\Delta - 2v^ax^bM_{ba}\right) + \mathcal{O}(v^2)\,.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Este primeiro exemplo de espaço homogêneo, relativamente simples, já nos mostra o potencial deste poderoso formalismo. No próximo exemplo, vamos aplicá-lo a um quociente envolvendo geradores de supersimetria, obtendo resultados conhecidos de uma forma bastante elegante.

2.2.2 Superespaço de Minkowski

Uma importante aplicação do formalismo de *cosets* é a construção de um espaço em que a álgebra do grupo de super Poincaré possa ser realizada, da mesma forma que a álgebra do grupo de Poincaré é realizada no espaço de Minkowski. A maneira mais simples para fazer isto é estender $\mathbb{M}^4$ acrescentando ao grupo G os geradores de supersimetria (supertranslações) $Q_{\alpha i}$ e $\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}$, além dos automorfismos $\mathrm{SU}(\mathcal{N})$. O espaço resultante é chamado superespaço de Minkowski, e é denotado

$$
\mathcal{M}^{4|4\mathcal{N}} := \frac{\{P_a, M_{ab}, Q_{\alpha i}, \bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, \mathrm{su}(\mathcal{N})\}}{\{M_{ab}, \mathrm{su}(\mathcal{N})\}}\,.
\tag{2.34}
$$

A notação $m|n$ indica m variáveis bosônicas (comutantes) e n fermiônicas (anticomutantes), enquanto $\mathrm{su}(\mathcal{N})$ denota a álgebra de $\mathrm{SU}(\mathcal{N})$ e $i = 1, \ldots, \mathcal{N}$ é o índice de sua representação (anti)fundamental.

A álgebra do grupo de super Poincaré tem a seguinte estrutura:

$$
\begin{aligned}
[M_{ab}, Q_{\alpha i}] &= -\tfrac{1}{2}(\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta Q_{\beta i}\,, & [M_{ab}, \bar{Q}^i_{\dot\alpha}] &= \tfrac{1}{2}(\tilde\sigma_{ab})_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\bar{Q}^i_{\dot\beta}\,, \\
[Q_{\alpha i}, P_a] &= 0\,, & [\bar{Q}^i_{\dot\alpha}, P_a] &= 0\,, \\
\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} &= 0\,, & \{\bar{Q}^i_{\dot\alpha}, \bar{Q}^j_{\dot\beta}\} &= 0\,, \\
\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^j_{\dot\alpha}\} &= 2\delta_i^j(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}P_a\,,
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

além das relações (2.22) e da parte da álgebra envolvendo os geradores de SU($\mathcal{N}$). Por serem fermiônicos, os geradores das supertranslações satisfazem entre si a relações de anticomutação, em vez de relações de comutação. Eles formam $\mathcal{N}$ espinores de Majorana, *i.e.*, $\bar{Q}^i_{\dot\alpha} = (Q_{\alpha i})^\dagger$. Para mais detalhes sobre nossas convenções e notações, em particular as definições de σ^a, σ^{ab} e $\tilde\sigma^{ab}$, ver o apêndice A.

Quando $\mathcal{N} > 1$, a álgebra do grupo de super Poincaré é também conhecida como **álgebra de supersimetria $\mathcal{N}$-estendida** (com carga central nula). Quando $\mathcal{N} = 1$, a álgebra é comumente chamada **álgebra de supersimetria simples** (ou não estendida). Neste sentido, a álgebra do grupo de Poincaré corresponde à supersimetria $\mathcal{N} = 0$.

O superespaço $\mathcal{M}^{4|4\mathcal{N}}$ é parametrizado pelas coordenadas x^a (bosônicas), $\theta^{\alpha i}$ e $\bar\theta_i^{\dot\alpha}$ (fermiônicas), correspondendo aos geradores P_a, $Q_{\alpha i}$ e $\bar{Q}^i_{\dot\alpha}$, respectivamente. Sob conjugação complexa, estas coordenadas possuem as seguintes propriedades:

$$
\overline{x^a} = x^a\,, \qquad \overline{\theta^{\alpha i}} = \bar\theta_i^{\dot\alpha}\,. \tag{2.36}
$$

Escolhemos o representante do *coset* como

$$
\Omega = e^{i(x^a P_a + \theta^{\alpha i}Q_{\alpha i} + \bar\theta_{\dot\alpha i}\bar{Q}^{\dot\alpha i})}\,. \tag{2.37}
$$

Claramente, as coordenadas θ e $\bar\theta$ transformam-se como espinores quirais sob o grupo de Lorentz e de acordo com as representações fundamentais de SU($\mathcal{N}$). As transformações de supersimetria são geradas por

$$
g = e^{i(\varepsilon^{\alpha i}Q_{\alpha i} + \bar\varepsilon_{\dot\alpha i}\bar{Q}^{\dot\alpha i})}\,, \tag{2.38}
$$

que, quando age sobre Ω, produz (com parâmetros ε infinitesimais)

$$
\begin{aligned}
g\,\Omega &= e^{i[x^a P_a + (\theta^{\alpha i}+\varepsilon^{\alpha i})Q_{\alpha i} + (\bar\theta_{\dot\alpha i}+\bar\varepsilon_{\dot\alpha i})\bar{Q}^{\dot\alpha i}] - \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha j}\bar\theta_{\dot\alpha i}\{Q_{\alpha j}, \bar{Q}^{\dot\alpha i}\} - \frac{1}{2}\bar\varepsilon_{\dot\alpha i}\theta^{\alpha j}\{\bar{Q}^{\dot\alpha i}, Q_{\alpha j}\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} \\
&= e^{i[(x^a + i\theta^i\sigma^a\bar\varepsilon_i - i\varepsilon^i\sigma^a\bar\theta_i)P_a + (\theta^{\alpha i}+\varepsilon^{\alpha i})Q_{\alpha i} + (\bar\theta_{\dot\alpha i}+\bar\varepsilon_{\dot\alpha i})\bar{Q}^{\dot\alpha i}] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}\,,
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\delta x^a &= i(\theta^i\sigma^a\bar\varepsilon_i - \varepsilon^i\sigma^a\bar\theta_i)\,, \\
\delta\theta^{\alpha i} &= \varepsilon^{\alpha i}\,, \\
\delta\bar\theta_{\dot\alpha i} &= \bar\varepsilon_{\dot\alpha i}
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

e $h = \mathbf{1}$. A 1-forma de Cartan é dada por

$$\begin{aligned}
\Omega^{-1}\mathrm{d}\Omega &= i\Omega^{-1}\Big(\mathrm{d}x^a P_a + \mathrm{d}\theta^{\alpha i}Q_{\alpha i} + \mathrm{d}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}i}\bar{Q}^{\dot{\alpha}i} + \frac{i}{2}[\theta^{\alpha i}Q_{\alpha i}, \mathrm{d}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}j}\bar{Q}^{\dot{\alpha}j}] + \frac{i}{2}[\bar{\theta}_{\dot{\alpha}i}\bar{Q}^{\dot{\alpha}i}, \mathrm{d}\theta^{\alpha j}Q_{\alpha j}]\Big)\Omega \\
&= i\Omega^{-1}\Big[(\mathrm{d}x^a + i\mathrm{d}\theta^i\sigma^a\bar{\theta}_i - i\theta^i\sigma^a\mathrm{d}\bar{\theta}_i)P_a + \mathrm{d}\theta^{\alpha i}Q_{\alpha i} + \mathrm{d}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}i}\bar{Q}^{\dot{\alpha}i}\Big]\Omega\,, \\
&= i\Big[(\mathrm{d}x^a - i\mathrm{d}\theta^i\sigma^a\bar{\theta}_i + i\theta^i\sigma^a\mathrm{d}\bar{\theta}_i)P_a + \mathrm{d}\theta^{\alpha i}Q_{\alpha i} + \mathrm{d}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}i}\bar{Q}^{\dot{\alpha}i}\Big]\,,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

o que nos permite concluir que a conexão é nula (e, portanto, também é nula a curvatura) e as componentes do *vielbein* são

$$\begin{aligned}
E^a &= \mathrm{d}x^a - i(\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}}(\mathrm{d}\theta^{\alpha i}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_i + \mathrm{d}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_i\theta^{\alpha i})\,, \\
E^{\alpha i} &= \mathrm{d}\theta^{\alpha i}\,, \\
\bar{E}^{\dot{\alpha}}_i &= \mathrm{d}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_i\,.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

A partir do *vielbein*, podemos calcular a torção:

$$\begin{aligned}
T &= \mathrm{d}E \\
&= \mathrm{d}\theta^{\alpha i}\wedge\mathrm{d}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}j}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}j}}\Big[-i(\sigma^a)_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}_i\Big]P_a + \mathrm{d}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}j}\wedge\mathrm{d}\theta^{\alpha i}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha i}}\Big[-i\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}(\sigma^a)_{\beta\dot{\beta}}\theta^{\beta j}\Big]P_a \\
&= 2i(\sigma^a)_\alpha{}^{\dot{\alpha}}\mathrm{d}\theta^{\alpha i}\wedge\mathrm{d}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}i}P_a\,,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

o que implica que as únicas componentes não nulas são

$$T_{\alpha j}{}^{i}_{\dot{\alpha}}{}^{a} = T^{i}_{\dot{\alpha}\alpha j}{}^{a} = 2i\delta^i_j(\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}}\,. \tag{2.44}$$

Um campo no superespaço de Minkowski é chamado **supercampo**. Supercampos são funções $\Phi^{ij\ldots}_{\alpha\beta\ldots}(x,\theta,\bar{\theta})$ carregando índices de SL(2, C) e SU($\mathcal{N}$). Eles se transformam como escalares sob a ação de translações e supertranslações, *i.e.*,

$$(\Phi^{ij\ldots}_{\alpha\beta\ldots})'(x',\theta',\bar{\theta}') = \Phi^{ij\ldots}_{\alpha\beta\ldots}(x,\theta,\bar{\theta})\,, \tag{2.45}$$

e de acordo com sua estrutura de índices sob a ação do grupo de isotropia. Como as variáveis θ e $\bar{\theta}$ são anticomutantes, o quadrado de qualquer uma delas é identicamente nulo, de modo que a expansão de um supercampo em potências de θ e $\bar{\theta}$ é sempre finita. Por exemplo, para um supercampo escalar (de Lorentz e de SU($\mathcal{N}$)),

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = \phi(x) + \theta^{\alpha i}\psi_{\alpha i}(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}i}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}i}(x) + \cdots + \theta^{2\mathcal{N}}\bar{\theta}^{2\mathcal{N}}F(x)\,. \tag{2.46}$$

Assim, um supercampo escalar descreve um conjunto de $2^{4\mathcal{N}}$ campos componentes.

As transformações supersimétricas dos campos componentes em (2.46) podem ser obtidas a partir das leis de transformação (2.40). Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\delta\Phi &= \delta x^a\frac{\partial\Phi}{\partial x^a} + \delta\theta^{\alpha i}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta^{\alpha i}} + \delta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}i}\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}i}} \\
&= \varepsilon^{\alpha i}\psi_{\alpha i}(x) + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}i}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}i}(x) + \mathcal{O}(\theta,\bar{\theta}) \\
&\overset{!}{=} \delta\phi(x) + \theta^{\alpha i}\delta\psi_{\alpha i}(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}i}\delta\bar{\chi}^{\dot{\alpha}i}(x) + \cdots + \theta^{2\mathcal{N}}\bar{\theta}^{2\mathcal{N}}\delta F(x)\,,
\end{aligned} \tag{2.47}$$

ou seja,

$$\delta\phi(x) = \varepsilon^{\alpha i}\psi_{\alpha i}(x) + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha} i}\bar{\chi}^{\dot{\alpha} i}(x)\,. \tag{2.48}$$

Para encontrar as componentes da derivada covariante, utilizamos a definição (2.12) com um supercampo Φ qualquer:

$$\begin{aligned} D\Phi &= (E^a D_a + E^{\alpha i} D_{\alpha i} + \bar{E}_{\dot{\alpha} i}\bar{D}^{\dot{\alpha} i})\Phi \\ &= \Big[\mathrm{d}x^a D_a + \mathrm{d}\theta^{\alpha i}\Big(D_{\alpha i} - i(\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_i D_a\Big) + \mathrm{d}\bar{\theta}_{\dot{\alpha} i}\Big(\bar{D}^{\dot{\alpha} i} - i\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}(\sigma^a)_{\alpha\dot{\beta}}\theta^{\alpha i} D_a\Big)\Big]\Phi \\ &\overset{!}{=} \left(\mathrm{d}x^a\partial_a + \mathrm{d}\theta^{\alpha i}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha i}} + \mathrm{d}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_i}\right)\Phi\,, \end{aligned} \tag{2.49}$$

donde

$$\begin{aligned} D_a &= \partial_a\,, \\ D_{\alpha i} &= \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha i}} + i(\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_i\partial_a\,, \\ \bar{D}^i_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_i} - i\theta^{\alpha i}(\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_a\,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Definimos um **supercampo quiral** como aquele que satisfaz a

$$\bar{D}^i_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \tag{2.51}$$

e um **supercampo antiquiral** como aquele que satisfaz a

$$D_{\alpha i}\overline{\Phi} = 0\,. \tag{2.52}$$

A partir deste ponto, estaríamos prontos para seguir estudando o formalismo de supercampos no superespaço, construindo teorias manifestamente supersimétricas e analisando suas propriedades, mas isto está fora do escopo desta dissertação.

De modo análogo ao que fizemos para o espaço de Minkowski, também podemos descrever o superespaço de Minkowski por meio de um quociente envolvendo geradores do grupo superconforme. Para este fim, consideraremos doravante $\mathcal{N} = 4$. Temos

$$\mathcal{M}^{4|16} = \frac{\mathrm{PSU}(2,2|4)}{\{M_{ab}, \mathrm{su}(4), \Delta, K_a, S^i_\alpha, \bar{S}_{\dot{\alpha} i}\}}\,, \tag{2.53}$$

onde os geradores $S^i_\alpha, \bar{S}_{\dot{\alpha} i} = (S^i_\alpha)^\dagger$ correspondem à supersimetria “especial” ou conforme. A álgebra $\mathrm{psu}(2,2|4)$ está detalhada no apêndice C.

É interessante calcular a ação de um *boost* conforme $\exp[iv^a K_a]$, com parâmetros v^a reais. As formas explícitas das variações das coordenadas x^a, $\theta^{\alpha i}$ e $\bar{\theta}_{\dot{\alpha} i}$ sob esta transformação são bastante complicadas, mesmo considerando parâmetros v^a infinitesimais. De fato, não iremos mostrá-las aqui, uma vez que, para os nossos propósitos neste capítulo, vamos precisar da forma explícita da transformação local $h \in \{M_{ab}, \mathrm{su}(4), \Delta, K_a, S^i_\alpha, \bar{S}_{\dot\alpha i}\}$ apenas. Esquematicamente, temos

$$\begin{aligned} e^{iv^a K_a}\Omega &= e^{i(x^a+2(v\cdot x)x^a - x^2 v^a)P_a} h^{(\mathbb{M}^4)} e^{i(\theta^{\alpha i}Q_{\alpha i}+\bar\theta_{\dot\alpha i}\bar{Q}^{\dot\alpha i})} \\ &= e^{i(x^a+2(v\cdot x)x^a - x^2 v^a)P_a} e^{i(\theta^{\alpha i}Q_{\alpha i}+\bar\theta_{\dot\alpha i}\bar{Q}^{\dot\alpha i})} e^{-i(\theta^{\alpha i}Q_{\alpha i}+\bar\theta_{\dot\alpha i}\bar{Q}^{\dot\alpha i})} h^{(\mathbb{M}^4)} e^{i(\theta^{\alpha i}Q_{\alpha i}+\bar\theta_{\dot\alpha i}\bar{Q}^{\dot\alpha i})} \\ &= e^{i(x^a+\delta x^a)P_a} e^{i[(\theta^{\alpha i}+\delta\theta^{\alpha i})Q_{\alpha i}+(\bar\theta_{\dot\alpha i}+\delta\bar\theta_{\dot\alpha i})\bar{Q}^{\dot\alpha i}]} h\,, \end{aligned} \tag{2.54}$$

onde $h^{(\mathbb{M}^4)}$ é o elemento do grupo de isotropia de $\mathbb{M}^4$ que aparece em (2.33), δx^a, $\delta\theta^{\alpha i}$ e $\delta\bar\theta_{\dot\alpha i}$ são funções complicadas de x^a, $\theta^{\alpha i}$ e $\bar\theta_{\dot\alpha i}$, e

$$\begin{aligned} h &= h^{(\mathbb{M}^4)} - 4v^a\theta^j\sigma_a\bar\theta_i U^i_j + i\epsilon_{abcd}v^a\theta^j\sigma^b\bar\theta_j M^{cd} \\ &\quad - v^a\theta^i\sigma_a\bar{S}_i - v^a\bar\theta_i\tilde\sigma_a S^i + \mathcal{O}(v^2)\,, \end{aligned} \tag{2.55}$$

sendo $U_i^j = -(U^i_j)^\dagger$ os geradores de SU(4). Usaremos este resultado mais adiante.

2.2.3 Espaço AdS$_5$

O espaço de anti-de Sitter, importante no contexto da correspondência AdS/CFT, também constitui um exemplo de espaço homogêneo. No caso de cinco dimensões, $G = \mathrm{SO}(2,4)$ e $H = \mathrm{SO}(1,4)$, *i.e.*,

$$\mathrm{AdS}_5 = \frac{\mathrm{SO}(2,4)}{\mathrm{SO}(1,4)} = \frac{\{\frac{1}{2}(P_a+K_a), \Delta, \frac{1}{2}(P_a-K_a), M_{ab}\}}{\{\frac{1}{2}(P_a-K_a), M_{ab}\}}\,, \tag{2.56}$$

onde os geradores foram escritos em termos dos P_a, M_{ab}, K_a e Δ definidos anteriormente e a álgebra so(2,4) é dada por (2.22) e (2.30).

O espaço AdS$_5$ é parametrizado por quatro coordenadas da borda x^a e uma coordenada radial $r > 0$, correspondendo ao gerador Δ. Um representante do *coset* conveniente é dado por¶

$$\Omega = e^{ix^a P_a} e^{i\log(r)\Delta}\,. \tag{2.57}$$

Sob a ação de uma dilatação $\exp[i\log(\lambda)\Delta]$, $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} e^{i\log(\lambda)\Delta} e^{ix^a P_a} e^{i\log(r)\Delta} &= e^{i\frac{x^a}{\lambda}P_a} e^{i\log(\lambda)\Delta} e^{i\log(r)\Delta} \\ &= e^{i\frac{x^a}{\lambda}P_a} e^{i\log(\lambda r)\Delta}\,, \end{aligned} \tag{2.58}$$

onde usamos o resultado (2.31). Portanto, $x'^a = x^a/\lambda$, $r' = \lambda r$ e $h = \mathbf{1}$.

Mais uma vez, a obtenção da ação de um *boost* conforme $\exp[iv^a K_a]$ ($v^a \in \mathbb{R}^4$) se mostra um tanto mais complicada. Entretanto, o cálculo feito em (2.32) facilita

¶Uma escolha talvez mais natural seria $\widehat\Omega = \exp[ix^a(P_a+K_a) + i\log(r)\Delta]$. Pode-se mostrar que $\widehat\Omega$ é equivalente a Ω no sentido de (2.4).

bastante o nosso trabalho.[‖] Desprezando termos da ordem de v^2, temos

$$
\begin{aligned}
e^{iv^aK_a}\Omega &= e^{i(x^a+2(v\cdot x)x^a-x^2v^a)P_a}h^{(\mathbb{M}^4)}e^{i\log(r)\Delta} \\
&= e^{i(x^a+2(v\cdot x)x^a-x^2v^a)P_a}e^{i\log(r)\Delta}e^{-i\log(r)\Delta}h^{(\mathbb{M}^4)}e^{i\log(r)\Delta} \\
&= e^{i(x^a+2(v\cdot x)x^a-x^2v^a)P_a}e^{i\log(r)\Delta}\left[\mathbf{1}+i\left(\frac{v^a}{r}K_a-2(v\cdot x)\Delta-2v^ax^bM_{ba}\right)\right] \\
&= e^{i(x^a+2(v\cdot x)x^a-x^2v^a)P_a}e^{i\log(r)\Delta}\left[\mathbf{1}+i\left(\frac{v^a}{r}P_a-\frac{v^a}{r}(P_a-K_a)-2(v\cdot x)\Delta-2v^ax^bM_{ba}\right)\right] \\
&= e^{i\left(x^a+2(v\cdot x)x^a-x^2v^a+\frac{v^a}{r^2}\right)P_a}e^{i\log(re^{-2v\cdot x})\Delta}\left[\mathbf{1}-i\frac{v^a}{r}(P_a-K_a)-2iv^ax^bM_{ba}\right], \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

onde $h^{(\mathbb{M}^4)}$ é o elemento do grupo de isotropia de $\mathbb{M}^4$ que aparece em (2.33). Logo,

$$
\begin{aligned}
\delta x^a &= 2(v\cdot x)x^a-x^2v^a+\frac{v^a}{r^2}, \\
\delta r &= -2(v\cdot x)r, \qquad (2.60)\\
h &= \mathbf{1}-i\frac{v^a}{r}(P_a-K_a)-2iv^ax^bM_{ba}+\mathcal{O}(v^2).
\end{aligned}
$$

A primeira das equações acima implica que, na fronteira do espaço AdS_5, *i.e.*, quando $r\to\infty$, as coordenadas x^a se transformam da maneira usual sob a ação de um *boost* conforme (cf. (2.33)). Tal fato está em acordo com um dos principais ingredientes da correspondência AdS/CFT, que é a identificação da fronteira do espaço de anti-de Sitter com o espaço no qual a teoria de campos conforme é definida. No próximo exemplo, veremos a generalização supersimétrica deste fato.

Continuando o estudo geométrico de AdS_5, temos que a 1-forma de Cartan é dada por

$$
\begin{aligned}
\Omega^{-1}\mathrm{d}\Omega &= ie^{-i\log(r)\Delta}e^{-ix^aP_a}\left(\mathrm{d}x^aP_ae^{ix^aP_a}+e^{ix^aP_a}\frac{\mathrm{d}r}{r}\Delta\right)e^{i\log(r)\Delta} \\
&= i\left(e^{-i\log(r)\Delta}\mathrm{d}x^aP_ae^{i\log(r)\Delta}+\frac{\mathrm{d}r}{r}\Delta\right) \\
&= i\left(r\,\mathrm{d}x^aP_a+\frac{\mathrm{d}r}{r}\Delta\right) \\
&= i\left(\frac{1}{2}r\,\mathrm{d}x^a(P_a+K_a)+\frac{1}{2}r\,\mathrm{d}x^a(P_a-K_a)+\frac{\mathrm{d}r}{r}\Delta\right), \qquad (2.61)
\end{aligned}
$$

donde obtemos as componentes do *vielbein*

$$E^a=r\,\mathrm{d}x^a, \qquad E^r=\frac{\mathrm{d}r}{r}, \qquad (2.62)$$

e a conexão

$$\omega=\frac{1}{2}r\,\mathrm{d}x^a(P_a-K_a). \qquad (2.63)$$

[‖]Aqui fica clara a conveniência da escolha do representante (2.57).

De posse destes, procedemos ao cálculo da torção:

$$
\begin{aligned}
T &= \mathrm{d}E - i\,E\wedge\omega - i\,\omega\wedge E \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{d}x^a\wedge\mathrm{d}r(P_a+K_a) - \frac{i}{4}r^2\mathrm{d}x^a\wedge\mathrm{d}x^b\,\underbrace{[P_a+K_a,P_b-K_b]}_{=-2[P_{(a},K_{b)}]} - \frac{i}{2}\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}x^a\,\underbrace{[\Delta,P_a-K_a]}_{=i(P_a+K_a)} \\
&= 0\,,
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

onde $_{(ab)} := \frac{1}{2}(_{ab} + {}_{ba})$. Já o cálculo da curvatura dá:

$$
\begin{aligned}
R &= \mathrm{d}\omega - i\,\omega\wedge\omega \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{d}x^a\wedge\mathrm{d}r(P_a-K_a) - \frac{i}{8}r^2\mathrm{d}x^a\wedge\mathrm{d}x^b\,\underbrace{[P_a-K_a,P_b-K_b]}_{=4iM_{ab}} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{d}x^a\wedge\mathrm{d}r(P_a-K_a) + \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}x^a\wedge\mathrm{d}x^b M_{ab}\,,
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

ou seja, as componentes não nulas são

$$
R_{ar}{}^{b} = -\delta_a^b\,, \qquad R_{ab}{}^{cd} = -r^2\delta^c_{[a}\delta^d_{b]}\,. \tag{2.66}
$$

Para finalizar a discussão do espaço de anti-de Sitter de cinco dimensões, notamos que a métrica, que pode ser obtida a partir de (2.62), é dada, nestas coordenadas, por

$$
\mathrm{d}s^2 = r^2\,\eta_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b - \frac{\mathrm{d}r^2}{r^2}\,. \tag{2.67}
$$

As isometrias geradas por Δ e K_a podem ser verificadas explicitamente no elemento de linha acima. Além disso, utilizando (2.67), podemos mostrar que o espaço de anti-de Sitter realmente possui uma fronteira e que ela está localizada em $r\to\infty$, ou seja, a interpretação dada abaixo de (2.60) faz sentido. Com efeito, consideremos a geodésica de um fóton criado em $t := x^0 = 0$ e $r = 1$, para a qual $\mathrm{d}s^2 = 0$. Suponhamos, por simplicidade, que o fóton não se mova nas direções $\vec{x}$ de AdS_5. Temos

$$
0 = r^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{r^2}\,, \tag{2.68}
$$

de modo que o tempo que o fóton leva para chegar a $r\to\infty$ é dado por

$$
\Delta t = \int_0^t \mathrm{d}t' = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = 1 < \infty\,, \tag{2.69}
$$

i.e., o fóton leva um tempo finito para alcançar $r\to\infty$, o que implica que o espaço possui uma fronteira nesta região.

2.2.4 Superespaço $\mathrm{AdS}_{5,5|32}$

O último exemplo que estudaremos é o superespaço $\mathrm{AdS}_{5,5|32}$. Este pode ser visto como uma extensão supersimétrica do espaço de anti-de Sitter de cinco dimensões (para $\mathcal{N}=8$), semelhante à extensão do espaço de Minkowski $\mathbb{M}^4$ para o superespaço $\mathcal{M}^{4|4\mathcal{N}}$, acompanhada de uma extensão da parte bosônica (descrita por variáveis comutantes) de 5 para 10 dimensões, sendo as 5 novas dimensões compactificadas em uma 5-esfera. Em outras palavras, trata-se de um superespaço cuja parte bosônica é $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ e cuja parte fermiônica é descrita por 32 variáveis anticomutantes. Na forma de um quociente, temos

$$\mathrm{AdS}_{5,5|32} = \frac{\mathrm{PSU}(2,2|4)}{\mathrm{SO}(1,4)\times\mathrm{SO}(5)}\,. \tag{2.70}$$

Isto pode ser visto do fato de que a parte bosônica do grupo $\mathrm{PSU}(2,2|4)$ é dada por $\mathrm{SU}(2,2)\times\mathrm{SU}(4) \simeq \mathrm{SO}(2,4)\times\mathrm{SO}(6)$, enquanto o espaço AdS_5 é dado por (2.56) e uma n-esfera S^n pode ser identificada com o quociente $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$. Em termos dos geradores,

$$\mathrm{AdS}_{5,5|32} = \frac{\{\frac{1}{2}(P_a+K_a), \Delta, \frac{1}{2}(P_a-K_a), M_{ab}, Q_{\alpha i}, \bar{Q}^i_{\dot\alpha}, S^i_\alpha, \bar{S}_{\dot\alpha i}, U^i_j\}}{\{\frac{1}{2}(P_a-K_a), M_{ab}, \widetilde{M}_{mn}\}}\,, \tag{2.71}$$

onde $\widetilde{M}_{mn} = -\frac{1}{2}(\rho_{mn})_i^{\,j}\, U^i_j$ $(m,n=5,\ldots,9)$ são os geradores do grupo de isotropia de S^5. As matrizes ρ estão relacionadas com os coeficientes de Clebsch–Gordan de $\mathrm{SU}(4)$. Sua definição precisa e suas propriedades podem ser encontradas no apêndice 11.D de [10].

As coordenadas que parametrizam este superespaço são x^a, r, ϕ^m (bosônicas), $\theta^{\alpha i}$, $\bar\theta_{\dot\alpha i} = \overline{\theta^i_\alpha}$, φ^α_i e $\bar\varphi^i_{\dot\alpha} = \overline{\varphi_{\alpha i}}$ (fermiônicas), correspondendo aos geradores $\frac{1}{2}(P_a+K_a)$, Δ, $\widetilde{P}_m = -\frac{1}{2}(\rho_{m10})_i^{\,j}\, U^i_j$, $Q_{\alpha i}$, $\bar{Q}^{\dot\alpha i}$, S^i_α e $\bar{S}^{\dot\alpha}_i$, respectivamente. Um representante do *coset* que é conveniente para os nossos propósitos aqui é dado por

$$\Omega = e^{i(x^a P_a + \theta^{\alpha i} Q_{\alpha i} + \bar\theta_{\dot\alpha i}\bar{Q}^{\dot\alpha i})} e^{i\log(r)\Delta} e^{i(\varphi^\alpha_i S^i_\alpha + \bar\varphi^i_{\dot\alpha}\bar{S}^{\dot\alpha}_i)} e^{i\phi^m \widetilde{P}_m}\,. \tag{2.72}$$

Outra vez, é interessante estudar a ação de um *boost* conforme $g=\exp[iv^a K_a]$, com parâmetros v^a reais infinitesimais. Com a ajuda de (2.54), obtemos

$$g\,\Omega = e^{i(x^a+\delta x^a)P_a} e^{i[(\theta^{\alpha i}+\delta\theta^{\alpha i})Q_{\alpha i} + (\bar\theta_{\dot\alpha i}+\delta\bar\theta_{\dot\alpha i})\bar{Q}^{\dot\alpha i}]} h^{(\mathcal{M}^{4|16})} e^{i\log(r)\Delta} e^{i(\varphi^\alpha_i S^i_\alpha + \bar\varphi^i_{\dot\alpha}\bar{S}^{\dot\alpha}_i)} e^{i\phi^m\widetilde{P}_m}\,, \tag{2.73}$$

com $h^{(\mathcal{M}^{4|16})}$ dado por (2.55). Passando $h^{(\mathcal{M}^{4|16})}$ através dos geradores Δ, S e $\bar{S}$ da forma usual, ficamos com

$$g\,\Omega = e^{i(x^a+\delta x^a)P_a} e^{i[(\theta^{\alpha i}+\delta\theta^{\alpha i})Q_{\alpha i} + (\bar\theta_{\dot\alpha i}+\delta\bar\theta_{\dot\alpha i})\bar{Q}^{\dot\alpha i}]} e^{i\log(r)\Delta} e^{i(\tilde\varphi^\alpha_i S^i_\alpha + \tilde{\bar\varphi}^i_{\dot\alpha}\bar{S}^{\dot\alpha}_i)} \widetilde{h}^{(\mathcal{M}^{4|16})} e^{i\phi^m\widetilde{P}_m}\,, \tag{2.74}$$

onde $\tilde{\varphi}_i^\alpha$ ($\tilde{\bar{\varphi}}_{\dot\alpha}^i$) é uma função de x, r, θ, $\bar\theta$ e φ ($\bar\varphi$) e

$$\begin{aligned}\widetilde{h}^{(\mathcal{M}^{4|16})} &= \mathbf{1} - 2i(v\cdot x)\Delta + \left(2v^a x^b + i\epsilon^{abcd}v_c\theta^j\sigma_d\bar\theta_j\right)M_{ab} - 4v^a\theta^j\sigma_a\bar\theta_i U_j^i \\ &\quad + i\left(\frac{v^a}{r} + \frac{v^b}{\sqrt{r}}\theta^i\sigma_b\tilde\sigma^a\varphi_i + \frac{v^b}{\sqrt{r}}\bar\varphi^i\tilde\sigma^a\sigma_b\bar\theta_i\right)K_a + \mathcal{O}(v^2)\,.\end{aligned} \tag{2.75}$$

Agora escrevemos $K_a = P_a - (P_a - K_a)$, passamos P_a para a esquerda e agrupamos os termos de cada gerador. O resultado final é da forma

$$g\,\Omega = e^{i(x'^a P_a + \theta'^{\alpha i}Q_{\alpha i} + \bar\theta'_{\dot\alpha i}\bar Q^{\dot\alpha i})}e^{i\log(r')\Delta}e^{i(\varphi_i'^\alpha S_\alpha^i + \bar\varphi_{\dot\alpha}'^i\bar S_i^{\dot\alpha})}e^{i\phi'^m\widetilde{P}_m}h\,, \tag{2.76}$$

onde (desprezando termos da ordem de v^2)

$$\begin{aligned} x'^a &= x^a + \delta x^a + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{r^{3/2}}\right)\,, \\ \theta'^{\alpha i} &= \theta^{\alpha i} + \delta\theta^{\alpha i} + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{r}\right)\,, \\ \bar\theta'_{\dot\alpha i} &= \bar\theta_{\dot\alpha i} + \delta\bar\theta_{\dot\alpha i} + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{r}\right)\,, \\ r' &= [1 - 2(v\cdot x)]r\,, \\ \varphi_i'^\alpha &= \varphi_i^\alpha - iv^a x^b\varphi_i^\beta(\sigma_{ab})_\beta{}^\alpha + v^a\theta^j\sigma^b\bar\theta_j\varphi_i^\beta(\sigma_{ab})_\beta{}^\alpha + 4iv^a\theta^j\sigma_a\bar\theta_i\varphi_j^\alpha - iv^a\theta^j\sigma_a\bar\theta_j\varphi_i^\alpha + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{r}}\right)\,, \\ \bar\varphi_{\dot\alpha}'^i &= \overline{\varphi'_{\alpha i}}\,, \end{aligned} \tag{2.77}$$

ϕ' é alguma função de ϕ e a forma explícita de $h \in \mathrm{SO}(1,4)\times\mathrm{SO}(5)$ não será necessária para nossa análise.

As equações (2.77) nos permitem chegar a importantes conclusões. Primeiramente, vemos que as transformações de x, θ e $\bar\theta$ se reduzem às transformações obtidas em (2.54) quando $r\to\infty$. Além disso, vemos que $\varphi = \bar\varphi = 0$ e $r\to\infty \implies \delta\varphi = \delta\bar\varphi = 0$. Portanto, podemos dizer consistentemente que, na fronteira do superespaço $\mathrm{AdS}_{5|32}$, definida por $\varphi = \bar\varphi = 0$ e $r\to\infty$, metade das supersimetrias se desacoplam e ficamos com um superespaço $\mathcal{M}^{4|16}$. Este resultado generaliza aquele obtido no exemplo anterior e dá suporte à correspondência AdS/CFT.

Para a discussão feita no próximo capítulo, é útil calcular as componentes da torção e da curvatura de $\mathrm{AdS}_{5,5|32}$. Em princípio, poderíamos proceder como nos outros exemplos, calculando a 1-forma de Cartan através da definição (2.7), encontrando as componentes do *vielbein* e da conexão e, então, usando as definições (2.13) e (2.14). Entretanto, isto seria muito trabalhoso, além de supérfluo, uma vez que não vamos precisar das componentes de E e ω. Felizmente, existe uma maneira de encontrar as componentes da torção e da curvatura que não usa a forma explícita da 1-forma de Cartan, a qual mostraremos a seguir.

Como no início deste capítulo, seja $H = \{X_I\}$ um subgrupo de $G = \{X_I, Y_A\}$. Vamos supor que a estrutura da álgebra de Lie de G seja dada por (2.1) com ${f_{IA}}^J = 0$ (como na maioria dos exemplos que estudamos). Derivando a 1-forma de Cartan, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\Omega^{-1}\mathrm{d}\Omega) &= (\Omega^{-1}\mathrm{d}\Omega) \wedge (\Omega^{-1}\mathrm{d}\Omega) \\
&= -(E^A Y_A + \omega^I X_I) \wedge (E^B Y_B + \omega^J X_J) \\
&= -\frac{1}{2} E^A \wedge E^B (f_{AB}{}^C Y_C + f_{AB}{}^I X_I) - \omega^I \wedge E^A f_{IA}{}^B Y_B - \frac{1}{2}\omega^I \wedge \omega^J f_{IJ}{}^K X_K \\
&\stackrel{!}{=} i(\mathrm{d}E^A Y_A + \mathrm{d}\omega^I X_I)\,,
\end{aligned}
\tag{2.78}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\tfrac{i}{2} E^A \wedge E^B f_{AB}{}^C &= \mathrm{d}E^C - i\,\omega^I \wedge E^A f_{IA}{}^C\,, \\
\tfrac{i}{2} E^A \wedge E^B f_{AB}{}^K &= \mathrm{d}\omega^K - \tfrac{i}{2}\omega^I \wedge \omega^J f_{IJ}{}^K\,.
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

Comparando as equações acima com as definições (2.13) e (2.14), vemos que as componentes da torção e da curvatura (na base do *vielbein*) de um espaço homogêneo podem ser obtidas a partir das constantes de estrutura do grupo G da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
T_{AB}{}^C &= i f_{BA}{}^C\,, \\
R_{AB}{}^K &= i f_{BA}{}^K\,.
\end{aligned}
\tag{2.80}
$$

Agora podemos aplicar este resultado ao superespaço $\mathrm{AdS}_{5,5|32}$. Temos

$$
\begin{aligned}
[\tfrac{1}{2}(P_a + K_a), \tfrac{1}{2}(P_b + K_b)] = -iM_{ab} &\quad\Longrightarrow\quad R_{ab}{}^{cd} = -\delta^c_{[a}\delta^d_{b]}\,, \\
[\tfrac{1}{2}(P_a + K_a), \Delta] = -\tfrac{i}{2}(P_a - K_a) &\quad\Longrightarrow\quad R_{ar}{}^{b} = -\delta^b_a\,, \\
[\tfrac{1}{2}(P_a + K_a), Q_{\alpha i}] = \tfrac{1}{2}(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}\bar S^{\dot\alpha}_i &\quad\Longrightarrow\quad T_{a\alpha i}{}^{j}{}_{\dot\alpha} = -\tfrac{i}{2}(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}\delta^j_i\,, \\
[\tfrac{1}{2}(P_a + K_a), \bar Q^i_{\dot\alpha}] = -\tfrac{1}{2}(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}S^{\alpha i} &\quad\Longrightarrow\quad T_a{}^{i}{}_{\dot\alpha\alpha j} = \tfrac{i}{2}(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}\delta^i_j\,, \\
[\tfrac{1}{2}(P_a + K_a), S^i_\alpha] = \tfrac{1}{2}(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}\bar Q^{\dot\alpha i} &\quad\Longrightarrow\quad T_a{}^{i}{}_{\alpha\dot\alpha j} = -\tfrac{i}{2}(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}\delta^i_j\,, \\
[\tfrac{1}{2}(P_a + K_a), \bar S_{\dot\alpha i}] = -\tfrac{1}{2}(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}Q^\alpha_i &\quad\Longrightarrow\quad T_{a\dot\alpha i}{}^{j}{}_{\alpha} = \tfrac{i}{2}(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}\delta^j_i\,, \\
[\Delta, Q_{\alpha i}] = \tfrac{i}{2}Q_{\alpha i} &\quad\Longrightarrow\quad T_{r\alpha i}{}^{\beta j} = \tfrac{1}{2}\delta^\beta_\alpha\delta^j_i\,, \\
[\Delta, \bar Q^i_{\dot\alpha}] = \tfrac{i}{2}\bar Q^i_{\dot\alpha} &\quad\Longrightarrow\quad T_r{}^{i}{}_{\dot\alpha j}{}^{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\delta^i_j\,, \\
[\Delta, S^i_\alpha] = -\tfrac{i}{2}S^i_\alpha &\quad\Longrightarrow\quad T_r{}^{i}{}_{\alpha j}{}^{\beta} = -\tfrac{1}{2}\delta^\beta_\alpha\delta^i_j\,, \\
[\Delta, \bar S_{\dot\alpha i}] = -\tfrac{i}{2}\bar S_{\dot\alpha i} &\quad\Longrightarrow\quad T_{r\dot\alpha i}{}^{\dot\beta j} = -\tfrac{1}{2}\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\delta^j_i\,, \\
[\widetilde P_m, Q_{\alpha k}] = -\tfrac{i}{2}(\rho_{m10})^j_k Q_{\alpha j} &\quad\Longrightarrow\quad T_{m\alpha k}{}^{\beta j} = -\tfrac{1}{2}\delta^\beta_\alpha(\rho_{m10})^j_k\,, \\
[\widetilde P_m, \bar Q^k_{\dot\alpha}] = \tfrac{i}{2}(\rho_{m10})^k_i \bar Q^i_{\dot\alpha} &\quad\Longrightarrow\quad T_m{}^{k}{}_{\dot\alpha i}{}^{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}(\rho_{m10})^k_i\,, \\
[\widetilde P_m, S^k_\alpha] = \tfrac{i}{2}(\rho_{m10})^k_i S^i_\alpha &\quad\Longrightarrow\quad T_m{}^{k}{}_{\alpha i}{}^{\beta} = \tfrac{1}{2}\delta^\beta_\alpha(\rho_{m10})^k_i\,, \\
[\widetilde P_m, \bar S_{\dot\alpha k}] = -\tfrac{i}{2}(\rho_{m10})^j_k \bar S_{\dot\alpha j} &\quad\Longrightarrow\quad T_{m\dot\alpha k}{}^{\dot\beta j} = -\tfrac{1}{2}\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}(\rho_{m10})^j_k\,, \\
[\widetilde P_m, \widetilde P_n] = i\widetilde M_{mn} &\quad\Longrightarrow\quad R_{mn}{}^{pq} = \delta^p_{[m}\delta^q_{n]}\,, \\
\{Q_{\alpha i}, \bar Q^j_{\dot\alpha}\} = 2\delta^j_i(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}P_a &\quad\Longrightarrow\quad T_{\alpha i}{}^{j}{}_{\dot\alpha}{}^{a} = R_{\alpha i}{}^{j}{}_{\dot\alpha}{}^{a} = 2i\delta^j_i(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}\,, \\
\{S^i_\alpha, \bar S_{\dot\alpha j}\} = 2\delta^i_j(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}K_a &\quad\Longrightarrow\quad T^i_{\alpha\dot\alpha j}{}^{a} = -R^i_{\alpha\dot\alpha j}{}^{a} = 2i\delta^i_j(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}
\end{aligned}
\tag{2.81}
$$

e, finalmente,

$$
\begin{aligned}
\{Q_{\alpha i}, S^{\beta j}\} &= -\delta^j_i(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta M_{ab} + 2i\delta^\beta_\alpha(2U^j_i - \delta^j_i\Delta)\,, \\
\{\bar Q^i_{\dot\alpha}, \bar S^{\dot\beta}_j\} &= -\delta^i_j(\tilde\sigma^{ab})_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} M_{ab} + 2i\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}(2U^i_j + \delta^i_j\Delta)
\end{aligned}
\tag{2.82}
$$

implicam

$$
\begin{array}{rclcrcl}
T_{\alpha i \gamma}^{\ \ j\, m} & = & -2\epsilon_{\gamma\alpha}(\rho^{m10})_i^{\ j}\,, & \qquad & T_{\alpha i \gamma}^{\ \ j\, r} & = & 2\epsilon_{\gamma\alpha}\delta_i^j\,, \\
T^i_{\dot\alpha\dot\gamma j}{}^{m} & = & -2\epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}(\rho^{m10})^i_{\ j}\,, & & T^i_{\dot\alpha\dot\gamma j}{}^{r} & = & -2\epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}\delta^i_j\,, \\
R_{\alpha i \gamma}^{\ \ j\, ab} & = & -i\delta_i^j\epsilon_{\gamma\beta}(\sigma^{ab})_\alpha^{\ \ \beta}\,, & & R_{\alpha i \gamma}^{\ \ j\, mn} & = & -\epsilon_{\gamma\alpha}(\rho^{mn})_i^{\ j}\,, \\
R^i_{\dot\alpha\dot\gamma j}{}^{ab} & = & -i\delta^i_j\epsilon_{\dot\gamma\dot\beta}(\tilde\sigma^{ab})_{\dot\alpha}^{\ \ \dot\beta}\,, & & R^i_{\dot\alpha\dot\gamma j}{}^{mn} & = & -\epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}(\rho^{mn})^i_{\ j}\,.
\end{array}
\tag{2.83}
$$

Todas outras componentes da torção e da curvatura se anulam. Assim, encontramos todas as componentes não nulas da torção e da curvatura do superespaço $\mathrm{AdS}_{5,5|32}$. Este resultado será utilizado no próximo capítulo.

Capítulo 3

Supergravidade tipo IIB

Neste capítulo, apresentamos a teoria de supergravidade tipo IIB. Mostramos que, na aproximação linear, os campos componentes podem ser descritos em termos de um supercampo quiral $\mathbf{A}$ satisfazendo a um vínculo da forma $\mathcal{D}^4\mathbf{A} \sim \bar{\mathcal{D}}^4\bar{\mathbf{A}}$. Isto é verdade tanto para um *background* $\mathbb{M}^{10}$ como para um *background* $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Neste último caso, expandimos $\mathbf{A}$ em harmônicos de S^5 e passamos para a fronteira de AdS_5, obtendo um conjunto de supercampos quirais $\mathcal{N} = 4$ em quatro dimensões.

3.1 Supergravidade tipo IIB em $\mathbb{M}^{10}$

A redução dimensional da teoria de supergravidade em onze dimensões em um círculo S^1 dá origem a uma teoria em dez dimensões com duas supersimetrias ($\mathcal{N} = 2$) — a supergravidade tipo IIA. As duas supersimetrias têm quiralidades opostas, e a teoria possui uma simetria direita $\leftrightarrow$ esquerda, *i.e.*, ela é não quiral.

Existe, porém, uma outra teoria de supergravidade $\mathcal{N} = 2$ em dez dimensões na qual as duas supersimetrias possuem a mesma quiralidade. Esta teoria, chamada supergravidade tipo IIB, é obviamente quiral, ou seja, possui uma assimetria direita $\leftrightarrow$ esquerda. Ela não pode ser obtida a partir de redução dimensional ou truncamento de uma teoria em um número maior de dimensões. Além disso, ela descreve o limite de baixas energias da ação efetiva da teoria de supercordas tipo IIB, o que torna a formulação explícita da teoria de supergravidade particularmente interessante [10].

O espectro de partículas da teoria inclui no setor bosônico o gráviton $g_{\mu\nu}$, um escalar complexo a, uma 2-forma complexa $b_{\mu\nu}$ e uma 4-forma real $c_{\mu\nu\rho\sigma}$ cujo *field strength* $f_{\mu\nu\rho\sigma\tau} = 5\partial_{[\mu}c_{\nu\rho\sigma\tau]}$ é autodual, *i.e.*,

$$f_{\mu_1\ldots\mu_5} = \frac{1}{5!}\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_{10}}f^{\mu_6\ldots\mu_{10}}\,. \tag{3.1}$$

O setor fermiônico contém um gravitino complexo $\psi_\mu^{\hat{\alpha}}$ na representação quiral de esquerda de $\mathrm{SO}(1,9)$ e um espinor complexo $\chi_{\hat{\alpha}}$ na representação quiral de direita de $SO(1,9)$.*

Inicialmente, consideramos a teoria em um *background* $\mathbb{M}^{10}$. Isto quer dizer que trabalharemos em um superespaço de Minkowski $\mathcal{M}^{10|32}$, com propriedades semelhantes às do superespaço de Minkowski em quatro dimensões discutido na subseção 2.2.2.

Na aproximação linear, os campos que descrevem as partículas do espectro da teoria podem ser postos juntos em um supercampo escalar quiral† $\mathbf{A}$ satisfazendo aos vínculos [11, 3]

$$\bar{\mathcal{D}}_{\hat{\alpha}}\mathbf{A} = 0\,, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}^4_{(770)}\right)^{\mu\nu\rho\sigma}\mathbf{A} &= \left(\bar{\mathcal{D}}^4_{(770)}\right)^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\mathbf{A}}\,, \\ \left(\mathcal{D}^4_{(1050)}\right)^{\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon}\mathbf{A} &= -\left(\bar{\mathcal{D}}^4_{(1050)}\right)^{\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon}\bar{\mathbf{A}}\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}^4_{(770)}\right)^{\mu\nu\sigma\tau} &:= \mathcal{D}_{\hat{\alpha}}(\gamma^{\mu\nu\rho})^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\mathcal{D}_{\hat{\beta}}\mathcal{D}_{\hat{\gamma}}(\gamma^{\sigma\tau}{}_{\rho})^{\hat{\gamma}\hat{\delta}}\mathcal{D}_{\hat{\delta}}\,, \\ \left(\mathcal{D}^4_{(1050)}\right)^{\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} &:= \mathcal{D}_{\hat{\alpha}}(\gamma^{\mu\nu\rho})^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\mathcal{D}_{\hat{\beta}}\mathcal{D}_{\hat{\gamma}}(\gamma^{\sigma\tau\upsilon})^{\hat{\gamma}\hat{\delta}}\mathcal{D}_{\hat{\delta}} - (\text{traços})\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\hat{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial\theta^{\hat{\alpha}}} + i(\gamma^{\mu})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\bar{\theta}^{\hat{\beta}}\mathcal{D}_{\mu}\,, \\ \bar{\mathcal{D}}_{\hat{\beta}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\hat{\beta}}} - i\theta^{\hat{\alpha}}(\gamma^{\mu})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\mathcal{D}_{\mu} \end{aligned} \tag{3.5}$$

e, neste caso, $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu$. Os números entre parênteses indicam a dimensão da representação do grupo de Lorentz $SO(1,9)$ a que pertencem os objetos definidos acima.

A equação (3.2) implica que, escrito em uma base apropriada, o supercampo $\mathbf{A}$ é independente de metade das variáveis fermiônicas, enquanto as equações (3.3) implicam que os campos componentes que aparecem a partir da ordem θ^5 na expansão de $\mathbf{A}$ podem ser escritos em função dos campos que aparecem em ordens mais baixas, ou seja, não são independentes. Com efeito, podemos escrever a expansão de $\mathbf{A}$ em campos componentes (esquematicamente) como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= a + \theta^{\hat{\alpha}}\chi_{\hat{\alpha}} + \theta^{\hat{\alpha}}(\gamma^{\mu\nu\rho})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\theta^{\hat{\beta}}h_{\mu\nu\rho} + \theta^{\hat{\alpha}}(\gamma^{\mu\nu\rho})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\theta^{\hat{\beta}}\theta^{\hat{\gamma}}(\gamma_{\rho})_{\hat{\gamma}\hat{\delta}}\psi_{\mu\nu}{}^{\hat{\delta}} \\ &+ \left(\theta^4_{(770)}\right)^{\mu\nu\sigma\tau}w_{\mu\nu\sigma\tau} + \left(\theta^4_{(1050)}\right)^{\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon}g_{\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} + \mathcal{O}(\theta^5)\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $\theta^4_{(770)}$ ($\theta^4_{(1050)}$) é definido de modo análogo a $\mathcal{D}^4_{(770)}$ ($\mathcal{D}^4_{(1050)}$), $h_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu}b_{\nu\rho]}$, $\psi_{\mu\nu}{}^{\hat{\alpha}}$ é o *field strength* do gravitino (tal que $\gamma^\mu\psi_{\mu\nu} = 0$), $g_{\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} = \partial_\mu f_{\nu\rho\sigma\tau\upsilon}$ e $w_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor de Weyl, definido em termos do tensor de Riemann $r_{\mu\nu\rho\sigma}$ como [12]

$$w_{\mu\nu\rho\sigma} := r_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{4}(g_{\mu[\rho}r_{\sigma]\nu} - g_{\nu[\rho}r_{\sigma]\mu}) + \frac{1}{36}g_{\mu[\rho}g_{\sigma]\nu}\,r\,. \tag{3.7}$$

*A notação e as convenções utilizadas aqui podem ser encontradas no apêndice B.

†Na verdade, apesar da semelhança com o caso quadridimensional, "quiral" não é um termo apropriado aqui, uma vez que $\mathcal{D}_{\hat{\alpha}}$ e $\bar{\mathcal{D}}_{\hat{\alpha}}$ têm a mesma quiralidade. Contudo, este abuso de linguagem é comum na literatura e antecipa o fato de que este supercampo é mapeado em supercampos quirais $\mathcal{N}=4$ na fronteira do superespaço $AdS_{5|32}$, de modo que também iremos cometê-lo aqui.

Note-se que o tensor de Weyl em dez dimensões possui exatamente 770 componentes independentes.

Os vínculos (3.3) também implicam, levando em conta (3.2), as seguintes identidades e equações de movimento [11]:

$$\begin{aligned}
&\Box a = 0\,, \qquad \gamma^\mu \partial_\mu \chi = 0\,, \\
&\partial^\mu h_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu} h_{\nu\rho\sigma]} = 0\,, \\
&\partial_{[\mu} \psi_{\nu\rho]} = 0\,, \qquad \partial_{[\mu} w_{\nu\rho]\sigma\tau} = 0\,, \\
&\partial_{[\lambda} g_{\mu]\nu\rho\sigma\tau\upsilon} = 0\,,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ou seja, o supercampo $\mathbf{A}$ é *on-shell*.

Os campos que aparecem nas componentes do supercampo $\mathbf{A}$ representam flutuações do *background*. Este, por sua vez, é caracterizado pelos tensores geométricos do superespaço plano, *i.e.*, a torção e a curvatura. Portanto, devemos relacionar o supercampo $\mathbf{A}$ à torção e à curvatura. Na verdade, a identidade de Bianchi (2.15) pode ser usada para expressar a curvatura em função da torção e de suas derivadas, de modo que a torção é um objeto mais fundamental na geometria do superespaço, e é a ela que devemos relacionar o supercampo $\mathbf{A}$. Um estudo semelhante àquele feito na subseção 2.2.2 nos permite concluir que, neste *background*, as únicas componentes não nulas da torção são

$$(T_0)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}^{\mu} = 2i(\gamma^\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\,, \tag{3.9}$$

enquanto a curvatura se anula identicamente. Na aproximação linear, temos

$$T_{AB}{}^{C} = (T_0)_{AB}{}^{C} + t_{AB}{}^{C}\,, \tag{3.10}$$

onde t corresponde a uma pequena flutuação de T_0.

Podemos determinar as componentes de dimensão mais baixa da torção por meio de análises dimensionais e de simetrias. De fato, a teoria possui uma simetria global $\mathrm{SU}(1,1)$ [10], e os campos componentes que aparecem em (3.6) possuem "cargas" sob a ação do subgrupo $\mathrm{U}(1) \subset \mathrm{SU}(1,1)$ dadas de acordo com a seguinte tabela [11]:

$$\begin{array}{rcccccc}
\text{Campo}: & g_{\mu\nu} & a & \chi & b_{\mu\nu} & c_{\mu\nu\rho\sigma} & \psi_\mu{}^{\hat{\alpha}} \\
\text{“Carga” sob U}(1): & 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1
\end{array} \tag{3.11}$$

Além disso, campos físicos bosônicos têm dimensão zero, enquanto campos físicos fermiônicos têm dimensão $\frac{1}{2}$. A carga e a dimensão de uma dada componente da torção podem ser inferidas de (2.20), já que x^μ tem carga zero e dimensão -1, ao passo que $\theta^{\hat{\alpha}}$ ($\bar{\theta}^{\hat{\alpha}}$) tem carga $+1$ (-1) e dimensão $-\frac{1}{2}$.

As componentes de T de dimensão zero são $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}^{\mu}$, $T_{\underline{\hat{\alpha}\hat{\beta}}}{}^{\mu}$ e $T_{\hat{\alpha}\underline{\hat{\beta}}}{}^{\mu}$, com cargas -2, $+2$ e zero, respectivamente.[‡] Como não há campos covariantes com estas propriedades em (3.11),[§] devemos ter

$$t_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}^{\mu} = t_{\underline{\hat{\alpha}\hat{\beta}}}{}^{\mu} = t_{\hat{\alpha}\underline{\hat{\beta}}}{}^{\mu} = 0\,. \tag{3.12}$$

As componentes de T de dimensão $\frac{1}{2}$ são $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}^{\hat{\gamma}}$, $T_{\hat{\alpha}\mu}{}^{\nu}$, $T_{\hat{\alpha}\underline{\hat{\beta}}}{}^{\underline{\hat{\gamma}}}$, $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}^{\underline{\hat{\gamma}}}$, com cargas -1, -1, -1 e -3, respectivamente, além de seus conjugados complexos. Portanto,

$$t_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}^{\hat{\gamma}} = t_{\hat{\alpha}\mu}{}^{\nu} = t_{\hat{\alpha}\underline{\hat{\beta}}}{}^{\underline{\hat{\gamma}}} = 0\,, \tag{3.13}$$

enquanto

$$t_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}^{\underline{\hat{\gamma}}} = k_1(\gamma^{\mu})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\gamma_{\mu})^{\hat{\gamma}\hat{\delta}}\overline{X}_{\hat{\delta}} + k_2\,\delta^{\hat{\gamma}}_{(\hat{\alpha}}\overline{X}_{\hat{\beta})}\,, \tag{3.14}$$

onde $X_{\hat{\alpha}}$ é um supercampo cuja componente de ordem θ^0 é $\chi_{\hat{\alpha}}$ e a relação entre as constantes k_1 e k_2 pode ser determinada a partir da identidade de Bianchi (2.15) (desprezando termos de segunda ordem nas flutuações), mas para nossos propósitos aqui ela não é importante.

Passando agora para as componentes de dimensão 1, temos $T_{\mu\hat{\beta}}{}^{\hat{\gamma}}$, $T_{\mu\hat{\beta}}{}^{\underline{\hat{\gamma}}}$, $T_{\mu\nu}{}^{\rho}$, com cargas 0, -2 e 0, respectivamente, além de seus conjugados complexos. Podemos sempre impor $T_{\mu\nu}{}^{\rho} = 0$ como um vínculo convencional, de modo que devemos ter

$$\begin{array}{rcl} t_{\mu\nu}{}^{\rho} & = & 0\,, \\ t_{\mu\hat{\beta}}{}^{\hat{\gamma}} & = & i\,Z_{\mu\nu\rho\sigma\tau}(\gamma^{\nu\rho\sigma\tau})_{\hat{\beta}}{}^{\hat{\gamma}}\,, \\ t_{\mu\hat{\beta}}{}^{\underline{\hat{\gamma}}} & = & k_3(\gamma^{\nu\rho})_{\hat{\beta}}{}^{\hat{\gamma}}\bar{H}_{\mu\nu\rho} + k_4(\gamma_{\mu\nu\rho\sigma})_{\hat{\beta}}{}^{\hat{\gamma}}\bar{H}^{\nu\rho\sigma}\,, \end{array} \tag{3.15}$$

onde $H_{\mu\nu\rho}$ é um supercampo cuja componente de ordem θ^0 é $h_{\mu\nu\rho}$ e $Z_{\mu\nu\rho\sigma\tau}$ é um supercampo autodual cuja componente de ordem θ^0 é proporcional a $f_{\mu\nu\rho\sigma\tau}$ (o fator de i garante que Z seja real). As constantes k_3 e k_4 podem ser determinadas a partir da identidade de Bianchi (2.15), mas seus valores exatos não são importantes para esta discussão. De fato, (2.15) também implica

$$\mathcal{D}_{\hat{\alpha}}X_{\hat{\beta}} \propto (\gamma^{\mu\nu\rho})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}H_{\mu\nu\rho} \tag{3.16}$$

e

$$\bar{\mathcal{D}}_{\hat{\alpha}}X_{\hat{\beta}} = i(\gamma^{\mu})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}V_{\mu}\,, \tag{3.17}$$

[‡] Os índices $\underline{\hat{\alpha}}, \underline{\hat{\beta}}, \ldots$ são equivalentes aos índices não sublinhados, sendo introduzidos apenas para informar a componente da torção a que estamos nos referindo. Por exemplo, $\{\mathcal{D}_{\hat{\alpha}}, \bar{\mathcal{D}}_{\hat{\beta}}\} = (T_0)_{\hat{\alpha}\underline{\hat{\beta}}}{}^{C}\mathcal{D}_C$.

[§] Apesar de ter carga +2 e dimensão zero, $b_{\mu\nu}$ não é invariante de *gauge*. De fato, veremos que $b_{\mu\nu}$ aparece em uma componente da torção de dimensão 1 através do supercampo $H_{\mu\nu\rho}$, cuja componente de ordem θ^0 é $h_{\mu\nu\rho}$. Um raciocínio semelhante se aplica a $c_{\mu\nu\rho\sigma}$.

onde V_μ é um supercampo de dimensão 1 e carga +4 (o fator de i é para conveniência futura) . A equação (3.16) implica $\mathcal{D}_{(\hat{\alpha}}X_{\hat{\beta})} = 0$, donde podemos escrever

$$X_{\hat{\alpha}} = -\frac{1}{2}\mathcal{D}_{\hat{\alpha}}\widetilde{A}\,, \tag{3.18}$$

para algum supercampo escalar $\widetilde{A}$ de dimensão zero e carga +4. Como $\bar{\mathcal{D}}_{\hat{\alpha}}\widetilde{A}$ possui carga +5 e não há nenhum campo com esta propriedade em (3.11), devemos ter $\bar{\mathcal{D}}_{\hat{\alpha}}\widetilde{A} = 0$, *i.e.*, $\widetilde{A}$ é um supercampo quiral. Combinando esta informação com (3.17), obtemos

$$i(\gamma^\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}V_\mu = \bar{\mathcal{D}}_{\hat{\alpha}}X_{\hat{\beta}} = -\frac{1}{2}\bar{\mathcal{D}}_{\hat{\alpha}}\mathcal{D}_{\hat{\beta}}\widetilde{A} = -\frac{1}{2}\{\bar{\mathcal{D}}_{\hat{\alpha}}, \mathcal{D}_{\hat{\beta}}\}\widetilde{A} = i(\gamma^\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\partial_\mu\widetilde{A}\,, \tag{3.19}$$

ou seja,

$$V_\mu = \partial_\mu\widetilde{A}\,. \tag{3.20}$$

Assim, relacionamos o supercampo $\widetilde{A}$ aos supercampos que aparecem nas componentes da torção. Para podermos identificar $\widetilde{A}$ com $\mathbf{A}$, basta mostrar que $\widetilde{A}$ satisfaz aos vínculos (3.3), ou equivalentemente que os campos componentes satisfazem a (3.8). Isto também pode ser feito a partir das identidades de Bianchi [11].

3.2 Supergravidade tipo IIB em $\mathbf{AdS_5 \times S^5}$

Passamos agora ao objetivo principal deste capítulo, que é o estudo da supergravidade tipo IIB em um *background* $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

Verificou-se que é possível compactificar o modelo descrito na seção anterior em uma esfera S^5 por meio do seguinte *ansatz* [13]:

$$f_{abcde} = \epsilon_{abcde}\,, \qquad f_{mnpqr} = \epsilon_{mnpqr}\,, \tag{3.21}$$

sendo as outras componentes de $f_{\mu\nu\rho\sigma\tau}$ identicamente nulas.¶ Supondo que apenas a 4-forma $c_{\mu\nu\rho\sigma}$ e o gráviton sejam não nulos neste *background*, as equações de Einstein dão

$$r_{ab} = 4g_{ab}\,, \qquad r_{mn} = -4g_{mn}\,, \tag{3.22}$$

enquanto todas outras equações de campos em [11] são automaticamente satisfeitas. A solução maximalmente simétrica de (3.22) é aquela em que g_{ab} descreve um espaço de anti-de Sitter de cinco dimensões (AdS_5) e g_{mn} descreve uma 5-esfera S^5 de mesmo raio.

¶A notação aqui apresenta duas pequenas alterações em relação àquela adotada na subseção 2.2.4, quais sejam a mudança do intervalo dos índices $a, b, \ldots$ para $0, \ldots, 4$ e a renomeação do índice r para 4, *i.e.*, a coordenada r passa a ser chamada x^4.

Podemos agrupar os geradores Q, $\bar{Q}$, S e $\bar{S}$ de PSU$(2,2|4)$ em apenas dois geradores, $\mathcal{Q}_{\hat{\alpha}}$ e $\bar{\mathcal{Q}}_{\underline{\hat{\alpha}}}$, da seguinte maneira:

$$\mathcal{Q}_{\hat{\alpha}} = \begin{pmatrix} Q_{\alpha i} \\ \bar{S}_{\dot{\beta} j} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathcal{Q}}_{\underline{\hat{\alpha}}} = \begin{pmatrix} \bar{Q}^i_{\dot{\alpha}} \\ S^j_{\beta} \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Assim, as relações de anticomutação do grupo PSU$(2,2|4)$ implicam

$$\{\mathcal{Q}_{\hat{\alpha}}, \mathcal{Q}_{\hat{\beta}}\} = \{\bar{\mathcal{Q}}_{\underline{\hat{\alpha}}}, \bar{\mathcal{Q}}_{\underline{\hat{\beta}}}\} = 0 \tag{3.24}$$

e

$$\{\mathcal{Q}_{\hat{\alpha}}, \bar{\mathcal{Q}}_{\underline{\hat{\beta}}}\} = 2(\gamma^\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\mathcal{P}_\mu + \mathcal{H}\,, \tag{3.25}$$

onde $\mathcal{P}_a = \frac{1}{2}(P_a + K_a)$ $(P_4 + K_4 := 2\Delta)$, $\mathcal{P}_m = \widetilde{P}_m$ e $\mathcal{H}$ representa uma combinação linear dos geradores do grupo de isotropia de $\mathrm{AdS}_{5,5|32}$. As matrizes γ e a forma explícita de $\mathcal{H}$ podem ser encontradas a partir de uma análise cuidadosa das relações de anticomutação de PSU$(2,2|4)$.

Na aproximação linear, este modelo também pode ser descrito em termos de um supercampo quiral $\mathbf{A}$. Além disso, combinando (3.24) com (2.80) e (2.20), concluímos que, assim como no superespaço plano,

$$\{\mathcal{D}_{\hat{\alpha}}, \mathcal{D}_{\hat{\beta}}\} = \{\bar{\mathcal{D}}_{\hat{\alpha}}, \bar{\mathcal{D}}_{\hat{\beta}}\} = 0\,. \tag{3.26}$$

Portanto, as derivadas de quarta ordem definidas em (3.4) pertencem às mesmas representações do grupo de Lorentz de antes, donde segue que os vínculos (3.3) também se aplicam.

Novamente, devemos relacionar o supercampo $\mathbf{A}$ à torção. Expandindo em torno do *background* $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ como em (3.10) (com as componentes $(T_0)_{AB}{}^C$ dadas por (2.81) e (2.83)), obtemos outra vez as equações de (3.12) até (3.15), pelos mesmos argumentos fornecidos na seção anterior. Na verdade, também se repete neste *background* o fato de que a identidade de Bianchi (2.15) implica (3.16) e (3.17). Com isso, seguindo o mesmo raciocínio de antes, relacionamos o supercampo $\mathbf{A}$ aos supercampos que aparecem nas componentes da torção. Atentamos, porém, para uma pequena diferença em relação ao superespaço plano. Definindo $\widetilde{A}$ como em (3.18), obtemos

$$i(\gamma^\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}V_\mu = \bar{\mathcal{D}}_{\hat{\alpha}}X_{\hat{\beta}} = -\frac{1}{2}\bar{\mathcal{D}}_{\hat{\alpha}}\mathcal{D}_{\hat{\beta}}\widetilde{A} = -\frac{1}{2}\{\bar{\mathcal{D}}_{\hat{\alpha}}, \mathcal{D}_{\hat{\beta}}\}\widetilde{A} = i(\gamma^\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\mathcal{D}_\mu\widetilde{A}\,, \tag{3.27}$$

ou seja,

$$V_\mu = \mathcal{D}_\mu\widetilde{A}\,, \tag{3.28}$$

onde, neste caso, $\mathcal{D}_\mu \neq \partial_\mu$.

Podemos expandir o supercampo $\mathbf{A}$ em harmônicos de S^5. A expansão tem a seguinte forma:

$$\mathbf{A}(x^\mu, \theta^{\hat{\alpha}}) = \sum_{n=0}^{\infty} y^{R_1} \dots y^{R_n} \mathcal{A}^{(n)}_{R_1 \dots R_n}(x^a, \theta^{\hat{\alpha}}) \,. \tag{3.29}$$

Aqui y^R $(R = 1, \dots, 6)$ são coordenadas em S^5, tais que $\sum_{R=1}^{6}(y^R)^2 = 1$, e, para cada n, $\mathcal{A}^{(n)}_{R_1 \dots R_n}$ é totalmente simétrico e tem traço nulo, ou seja, $\mathcal{A}^{(n)}_{R_1 \dots R_n} \delta^{R_p R_q} = 0$ $\forall p, q \in \{1, \dots, n\}$ $(p \neq q)$. Esta condição é necessária porque as autofunções do laplaciano de S^5 são da forma

$$\mathcal{Y}^{(n) R_1 \dots R_n} \sim y^{\{R_1} \dots y^{R_n\}} \,, \tag{3.30}$$

onde as chaves denotam um objeto totalmente simétrico e de traço nulo.

Passando para a fronteira de $\mathrm{AdS}_{5|32}$, *i.e.*, tomando $x^4 = r \to \infty$ e $\varphi = \bar{\varphi} = 0$, de acordo com o que vimos na subseção 2.2.4, a dependência dos supercampos quirais em relação a metade das variáveis fermiônicas desaparece, e ficamos com uma família de supercampos quirais $\{A^{(n)}_{R_1 \dots R_n}\}$ $\mathcal{N} = 4$ em quatro dimensões. Estes supercampos obedecem ao vínculo de quiralidade

$$\bar{D}^i_{\dot{\alpha}} A^{(n)}_{R_1 \dots R_n} = 0 \,, \tag{3.31}$$

onde passamos a utilizar a notação de $\mathcal{M}^{4|16}$ (cf. subseção 2.2.2 e apêndice A). É claro que este vínculo é o mesmo de (3.2), levando em conta a decomposição (3.23) e o fato de que, na fronteira de $\mathrm{AdS}_{5|32}$, tem-se efetivamente $S = \bar{S} = 0$.

Finalmente, os vínculos de quarta ordem se tornam [3]

$$D^4_{\{R_1 R_2} A^{(n)}_{R_3 \dots R_{n+2}\}} = \overline{D^4_{\{R_1 R_2} A^{(n)}_{R_3 \dots R_{n+2}\}}} \,. \tag{3.32}$$

A derivada D^4_{RS} é formada a partir de quatro derivadas $D_{\alpha i}$ contraídas com coeficientes de Clebsch–Gordan de SU(4) (cf. apêndice 11.D em [10]). Explicitamente,

$$D^4_{RS} := (\rho_R)^{ij} (\rho_S)^{kl} D^{(\alpha}_i D^{\beta)}_j D_{\alpha k} D_{\beta l} \,. \tag{3.33}$$

No próximo capítulo, vamos introduzir um superespaço harmônico que nos permitirá resolver facilmente o vínculo (3.32) em termos de supercampos prepotenciais.

Capítulo 4

Superespaço Harmônico e $\mathcal{N} = 4$ SYM

O uso de superespaços harmônicos no estudo de teorias com supersimetria estendida ($\mathcal{N} > 1$) tem se mostrado bastante frutífero. Este novo tipo de superespaço, proposto e desenvolvido por A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky e E. Sokatchev nos anos 1980 [14, 15], é hoje em dia geralmente reconhecido como o tratamento geométrico mais natural para tais teorias. A abordagem do superespaço harmônico fornece uma descrição concisa, *off-shell* e manifestamente covariante de todas teorias supersimétricas $\mathcal{N} = 2$, tanto no nível clássico como no quântico. Além disso, ela também fornece a única maneira para construir uma formulação *off-shell* da teoria $\mathcal{N} = 3$ super Yang–Mills (SYM) [16]. Infelizmente, o problema análogo para $\mathcal{N} = 4$ ainda não foi resolvido. Entretanto, é possível reformular os vínculos *on-shell* de $\mathcal{N} = 4$ SYM utilizando um superespaço harmônico baseado no quociente SU(4)/S(U(2)×U(2)). Esta reformulação se mostrou útil na análise de propriedades gerais das funções de correlação desta teoria no contexto da correspondência AdS/CFT.

Neste capítulo, apresentamos o superespaço harmônico mencionado e o utilizamos para resolver, em termos de supercampos prepotenciais, os vínculos de quarta ordem impostos nos supercampos quirais definidos no capítulo anterior. A conexão com $\mathcal{N} = 4$ SYM está no fato de que estes supercampos prepotenciais se acoplam naturalmente a operadores invariantes de *gauge* definidos naquela teoria, como mostramos na seção 4.4. Não abordamos aqui aspectos matemáticos do superespaço harmônico e, em particular, uma definição mais rigorosa do mesmo. Para tanto, ver, por exemplo, [17].

4.1 Superespaço Harmônico $\mathcal{M}^{4|16} \times$ SU(4)/S(U(2)×U(2))

O superespaço harmônico que utilizaremos é composto pelo superespaço de Minkowski com $\mathcal{N} = 4$, definido na subseção 2.2.2, e pelo espaço homogêneo

SU(4)/S(U(2)×U(2)), que é um espaço de oito dimensões com a topologia de um grassmanniano $G_2(C^4)$. Além das coordenadas usuais x^a, $\theta^{\alpha i}$ e $\bar{\theta}_{\dot{\alpha} i}$, este superespaço é parametrizado por novas coordenadas $u \in SU(4)$, chamadas **coordenadas harmônicas**. Em termos dos índices, escrevemos u como $u_I{}^i = (u_r{}^i, u_{r'}{}^i)$, e denotamos a inversa de u por $u_i{}^I = (u_i{}^r, u_i{}^{r'})$. O índice I é transformado pelo grupo de isotropia S(U(2)×U(2)) e, portanto, divide-se naturalmente em $r = 1, 2$ e $r' = 3, 4$. As coordenadas u possuem as seguintes propriedades:

$$\begin{gathered} \overline{u_i{}^r} = u_r{}^i \,, \qquad \overline{u_i{}^{r'}} = u_{r'}{}^i \,, \\ u_r{}^i u_i{}^s = \delta_r^s \,, \qquad u_{r'}{}^i u_i{}^{s'} = \delta_{r'}^{s'} \,, \qquad u_r{}^i u_i{}^{r'} = 0 \,, \\ \epsilon^{ijkl} u_i{}^1 u_j{}^2 u_k{}^3 u_l{}^4 = 1 \,, \end{gathered} \tag{4.1}$$

onde ϵ^{ijkl} é o tensor totalmente antissimétrico invariante de SU(4), com $\epsilon^{1234} = 1$. Os índices r e r' são abaixados e levantados por meio dos símbolos antissimétricos ϵ_{rs} e $\epsilon_{r's'}$, definidos por $\epsilon_{12} = \epsilon_{34} = \epsilon^{12} = \epsilon^{34} = 1$. Com a ajuda de u e sua inversa, podemos converter índices i de SU(4) em índices I do grupo de isotropia e vice-versa. Por exemplo, podemos definir as derivadas

$$D_{\alpha r} := u_r{}^i D_{\alpha i} \,, \qquad D_{\alpha r'} := u_{r'}{}^i D_{\alpha i} \,, \qquad \bar{D}^r_{\dot{\alpha}} := \bar{D}^i_{\dot{\alpha}} u_i{}^r \,, \qquad \bar{D}^{r'}_{\dot{\alpha}} := \bar{D}^i_{\dot{\alpha}} u_i{}^{r'} \,. \tag{4.2}$$

A diferenciação no grupo em si é feita através das derivadas $D_I{}^J$ e D_o, dadas por [17, 3]

$$\begin{aligned} D_r{}^s &= u_r{}^i \frac{\partial}{\partial u_s{}^i} - \frac{1}{2}\delta_r^s u_t{}^i \frac{\partial}{\partial u_t{}^i} \,, \\ D_{r'}{}^{s'} &= u_{r'}{}^i \frac{\partial}{\partial u_{s'}{}^i} - \frac{1}{2}\delta_{r'}^{s'} u_{t'}{}^i \frac{\partial}{\partial u_{t'}{}^i} \,, \\ D_r{}^{s'} &= u_r{}^i \frac{\partial}{\partial u_{s'}{}^i} \,, \qquad D_{r'}{}^s = u_{r'}{}^i \frac{\partial}{\partial u_s{}^i} \end{aligned} \tag{4.3}$$

e

$$D_o = \frac{1}{2}\left[u_r{}^i \frac{\partial}{\partial u_r{}^i} - u_{s'}{}^i \frac{\partial}{\partial u_{s'}{}^i} \right] . \tag{4.4}$$

As equações (4.3) implicam (para $I \neq J$)

$$\begin{aligned} D_I{}^J u_K{}^i &= \delta_K^J u_I{}^i \,, \\ D_I{}^J u_i{}^K &= -\delta_I^K u_i{}^J \,, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde

$$[D_I{}^J, D_K{}^L] = \delta_K^J D_I{}^L - \delta_I^L D_K{}^J \,. \tag{4.6}$$

As derivadas $D_I{}^J$ e D_o dividem-se em derivadas do grupo de isotropia $\{D_r{}^s, D_{r'}{}^{s'}, D_o\}$ e derivadas do *coset* $\{D_r{}^{s'}, D_{r'}{}^s\}$. Aproveitamos o fato de que S(U(2)×U(2)) $\simeq$

SU(2)×SU(2)×U(1) para escrever as derivadas do grupo de isotropia na notação de su(2)⊕su(2)⊕u(1), de forma que ${D_r}^r = {D_{r'}}^{r'} = 0$. Nossa convenção de normalização é tal que (cf. (4.4))

$$D_o {u_r}^i = \frac{1}{2} {u_r}^i \,, \qquad D_o {u_{r'}}^i = -\frac{1}{2} {u_{r'}}^i \,, \tag{4.7}$$

i.e., sob a ação do grupo U(1), ${u_r}^i$ (${u_{r'}}^i$) tem carga $+\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$).

A introdução de variáveis harmônicas permite a definição de supercampos que satisfazem a vínculos de quiralidade generalizados. Neste caso, as derivadas $D_{\alpha r}$ e $\bar{D}^{r'}_{\dot{\alpha}}$, definidas em (4.2), anticomutam uma com a outra e comutam com ${D_r}^{s'}$. Assim, podemos definir consistentemente dois tipos de analiticidade: um supercampo F no superespaço harmônico que satisfaz a

$$D_{\alpha r} F = \bar{D}^{r'}_{\dot{\alpha}} F = 0 \tag{4.8}$$

é chamado **Grassmann analítico**, ou **G-analítico**, enquanto um supercampo que satisfaz a

$${D_r}^{s'} F = 0 \tag{4.9}$$

é chamado **harmônico analítico**, ou **H-analítico**. Um supercampo que é tanto G- como H-analítico será chamado simplesmente **supercampo analítico**.

Para o que faremos na próxima seção, será conveniente definir o objeto $u^{ij} = -u^{ji}$ por

$$u^{ij} := \frac{1}{2} \epsilon^{rs} {u_r}^i {u_s}^j \,. \tag{4.10}$$

O fato de que $u \in \mathrm{SU}(4)$ implica, então, pela última das propriedades (4.1), que

$$\begin{aligned} u_{ij} &:= \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl} u^{kl} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{r's'} {u_i}^{r'} {u_j}^{s'} \,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Também é útil empregar as seguintes abreviações para as derivadas de Grassmann de quarta ordem que são escalares de Lorentz:

$$\begin{aligned} D^4 &:= D^{\alpha r} D^s_\alpha D^\beta_r D_{\beta s} \,, \qquad & D'^4 &:= D^{\alpha r'} D^{s'}_\alpha D^\beta_{r'} D_{\beta s'} \,, \\ \bar{D}^4 &:= \bar{D}^r_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha} s} \bar{D}_{\dot{\beta} r} \bar{D}^{\dot{\beta}}_s \,, \qquad & \bar{D}'^4 &:= \bar{D}^{r'}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha} s'} \bar{D}_{\dot{\beta} r'} \bar{D}^{\dot{\beta}}_{s'} \,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Finalmente, vamos precisar da noção de conjugação harmônica [16], que combina uma generalização do mapeamento antipodal de $\mathbb{CP}^1$ para o espaço SU(4)/S(U(2)×U(2)) $\sim$ $\mathrm{G}_2(\mathrm{C}^4)$ com a conjugação complexa. Denotaremos esta operação por um til. Para os u's, temos

$$\begin{aligned} \widetilde{{u_r}^i} &= {u_i}^{r'} \,, \qquad & \widetilde{{u_i}^r} &= {u_{r'}}^i \,, \\ \widetilde{{u_{r'}}^i} &= -{u_i}^r \,, \qquad & \widetilde{{u_i}^{r'}} &= -{u_r}^i \,, \end{aligned} \tag{4.13}$$

enquanto para qualquer objeto independente de u a conjugação harmônica é equivalente à complexa. Note-se que $\widetilde{\widetilde{u}} = -u$.

As equações (4.13) implicam que tanto a analiticidade G como a H são preservadas pela conjugação harmônica. Com efeito, seja F um supercampo analítico; temos

$$\begin{aligned} 0 = \widetilde{(D_{\alpha r} F)} = \widetilde{u_r{}^i}\widetilde{D_{\alpha i}}\widetilde{F} = \bar{D}^i_{\dot\alpha} u_i{}^{r'}\widetilde{F} = \bar{D}^{r'}_{\dot\alpha}\widetilde{F} \, , \\ 0 = \widetilde{(\bar{D}^{r'}_{\dot\alpha} F)} = \widetilde{\bar{D}^i_{\dot\alpha}}\widetilde{u_i{}^{r'}}\widetilde{F} = -u_r{}^i D_{\alpha i}\widetilde{F} = -D_{\alpha r}\widetilde{F} \, , \end{aligned} \tag{4.14}$$

ou seja, $\widetilde{F}$ é um supercampo G-analítico. Por outro lado,

$$0 = \widetilde{(D_r{}^{s'} F)} = \widetilde{u_r{}^i}\frac{\partial}{\widetilde{\partial u_{s'}{}^i}}\widetilde{F} = -u_i{}^{r'}\frac{\partial}{\partial u_i{}^s}\widetilde{F} = D_s{}^{r'}\widetilde{F} \tag{4.15}$$

implica que $\widetilde{F}$ é um supercampo H-analítico. Portanto, se F é um supercampo analítico, então $\widetilde{F}$ também o é. Esta é a principal motivação para definir a conjugação harmônica. De fato, o mesmo não vale para F e $\bar{F}$, em geral.

Por fim, analisamos o efeito da conjugação harmônica sobre os objetos u^{ij}. Obtemos

$$\widetilde{u^{ij}} = \frac{1}{2}\widetilde{\epsilon^{rs}}\widetilde{u_r{}^i}\widetilde{u_s{}^j} = \frac{1}{2}\epsilon_{r's'}u_i{}^{r'}u_j{}^{s'} = u_{ij} \, . \tag{4.16}$$

Agora que já temos os elementos necessários para trabalhar com o formalismo do superespaço harmônico, podemos aplicá-lo aos resultados obtidos anteriormente.

4.2 Solução do vínculo de quarta ordem

Na seção 3.2, vimos que os os campos componentes da supergravidade tipo IIB em $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ podem ser descritos em termos de um supercampo quiral $\mathbf{A}$ satisfazendo a um vínculo de quarta ordem do tipo $\mathcal{D}^4\mathbf{A} \sim \bar{\mathcal{D}}^4\bar{\mathbf{A}}$. Este supercampo foi expandido em harmônicos de S^5, dando origem à família de supercampos $\{\mathcal{A}^{(n)}_{R_1\ldots R_n}\}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Na fronteira do espaço $\mathrm{AdS}_{5|32}$, *i.e.*, fazendo $r \to \infty$, $\varphi = \bar\varphi = 0$, ficamos com uma família de supercampos quirais $\{A^{(n)}_{R_1\ldots R_n}\}$ $\mathcal{N} = 4$ em quatro dimensões, satisfazendo ao vínculo (3.32).

Utilizando o superespaço harmônico, podemos definir a seguinte família de objetos:

$$\begin{aligned} C^{(n)} \;&:=\; u^{i_1 j_1}\ldots u^{i_{n+2}j_{n+2}} D^4_{i_1 j_1, i_2 j_2} A^{(n)}_{i_3 j_3,\ldots,i_{n+2}j_{n+2}} \\ &\propto\; u^{i_1 j_1}\ldots u^{i_n j_n} D^4 A^{(n)}_{i_1 j_1,\ldots,i_n j_n} \, , \end{aligned} \tag{4.17}$$

onde convertemos os índices R de SO(6) em pares de índices de SU(4) antissimétricos e autoduais e, então, contraímos todos estes pares com os objetos u^{ij}. Demonstraremos a seguir que, para cada n, $C^{(n)}$ é analítico.

- *Analiticidade H.* Como os u^{ij}'s são H-analíticos, ou seja,

$$D_r{}^{s'} u^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{st} u_r{}^k \frac{\partial}{\partial u_{s'}{}^k}\left(u_s{}^i u_t^j\right) = 0\,, \tag{4.18}$$

  decorre imediatamente que $C^{(n)}$ também o é.

- *Analiticidade G.* Primeiramente, aplicamos a derivada $D_{\alpha r}$ a $C^{(n)}$:

$$\begin{aligned} D_{\alpha r} C^{(n)} &\propto u^{i_1 j_1} \dots u^{i_n j_n} D_{\alpha r} D^4 A^{(n)}_{i_1 j_1, \dots, i_n j_n} \\ &= u^{i_1 j_1} \dots u^{i_n j_n} D_{\alpha r} D^{\gamma t} D^s_\gamma D^\beta_t D_{\beta s} A^{(n)}_{i_1 j_1, \dots, i_n j_n}\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

  Como existem apenas quatro derivadas $D_{\alpha r}$ independentes, então necessariamente há repetição de derivadas em (4.19). Mas estas derivadas anticomutam entre si, de modo que o quadrado de qualquer uma delas é identicamente nulo; portanto, $D_{\alpha r} C^{(n)} = 0$.

  Já a aplicação de $\bar{D}^{r'}_{\dot\alpha}$ dá

$$\bar{D}^{r'}_{\dot\alpha} C^{(n)} \propto u^{i_1 j_1} \dots u^{i_n j_n} \bar{D}^{r'}_{\dot\alpha} D^4 A^{(n)}_{i_1 j_1, \dots, i_n j_n} = u^{i_1 j_1} \dots u^{i_n j_n} D^4 \bar{D}^{r'}_{\dot\alpha} A^{(n)}_{i_1 j_1, \dots, i_n j_n} = 0\,, \tag{4.20}$$

  uma vez que as derivadas $D_{\alpha r}$ e $\bar{D}^{r'}_{\dot\alpha}$ anticomutam e $A^{(n)}$ é um supercampo quiral. Assim, concluímos que $C^{(n)}$ é analítico, como queríamos demonstrar.

O vínculo de quarta ordem que deve ser satisfeito pelo supercampo $A^{(n)}$ pode, então, ser escrito na forma

$$C^{(n)} = \widetilde{C^{(n)}}\,. \tag{4.21}$$

Por se tratar de um vínculo não dinâmico, ele pode ser imposto por um supercampo multiplicador de Lagrange $V^{(n)}$, o qual pode ser tomado como G-analítico. Podemos, portanto, escrever a ação para o supercampo $A^{(n)}$ livre como [3]

$$S^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^8\theta\, (A^{(n)})^2 + \text{c.c.}\right) - \int \mathrm{d}\mu\, V^{(n)}(C^{(n)} - \widetilde{C^{(n)}})\,. \tag{4.22}$$

Nesta fórmula, a primeira integral é uma integral quiral $\mathcal{N} = 4$, enquanto a segunda é uma integral sobre o subsuperespaço harmônico analítico. A medida $\mathrm{d}\mu$ é definida por

$$\mathrm{d}\mu := \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}u\, D'^4 \bar{D}^4\,, \tag{4.23}$$

onde $\mathrm{d}u$ denota a medida de Haar no espaço SU(4)/S(U(2)×U(2)).

Procedemos agora à variação da ação acima com respeito a $A^{(n)}$. A variação do primeiro termo do lado direito da equação (4.22) produz

$$\begin{aligned} \delta S_1^{(n)} &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^8\theta \left[(\delta A^{(n) i_1 j_1, \dots, i_n j_n}) A^{(n)}_{i_1 j_1, \dots, i_n j_n} + A^{(n) i_1 j_1, \dots, i_n j_n} (\delta A^{(n)}_{i_1 j_1, \dots, i_n j_n})\right] \\ &= \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^8\theta\, A^{(n) i_1 j_1, \dots, i_n j_n} \delta A^{(n)}_{i_1 j_1, \dots, i_n j_n}\,. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Já a variação do segundo termo dá

$$\begin{aligned}
\delta S_2^{(n)} &= -\int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}u\, u^{i_1j_1}\dots u^{i_nj_n} D'^4 \bar{D}^4 \left[V^{(n)} D^4(\delta A^{(n)}_{i_1j_1,\dots,i_nj_n}) \right] \\
&\overset{(1)}{=} -\int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}u\, u^{i_1j_1}\dots u^{i_nj_n} D'^4 \bar{D}^4 D^4 \left[V^{(n)} \delta A^{(n)}_{i_1j_1,\dots,i_nj_n} \right] \\
&\overset{(2)}{=} -\int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}u\, u^{i_1j_1}\dots u^{i_nj_n} D'^4 D^4 \bar{D}^4 \left[V^{(n)} \delta A^{(n)}_{i_1j_1,\dots,i_nj_n} \right] + \text{t.s.} \\
&\overset{(3)}{=} -\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^8\theta \int \mathrm{d}u\, u^{i_1j_1}\dots u^{i_nj_n} (\bar{D}^4 V^{(n)}) \delta A^{(n)}_{i_1j_1,\dots,i_nj_n} + \text{t.s.}\,,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

onde as igualdades foram numeradas de maneira a facilitar a explicação de cada passo. A igualdade (1) se deve ao fato de $V^{(n)}$ ser G-analítico e, portanto, $D^4V^{(n)} = 0$. No passo (2), usamos que o anticomutador de $D_{\alpha r}$ com $\bar{D}^s_{\dot{\alpha}}$ é proporcional a $\partial/\partial x^a$ — o que pode ser verificado diretamente de (4.2) e (2.50) —, de modo que pudemos trocá-las de posição às custas da aparição de termos de superfície (t.s.). Finalmente, no último passo, escrevemos $D'^4 D^4$ como $\int \mathrm{d}^8\theta$ e usamos $\bar{D}^4 \delta A^{(n)} = 0$, uma vez que consideramos apenas variações de $A^{(n)}$ tais que $A'^{(n)} := A^{(n)} + \delta A^{(n)}$ também seja um supercampo quiral.

Somando as variações (4.24) e (4.25) e desprezando os termos de superfície, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta S^{(n)} &= \delta S_1^{(n)} + \delta S_2^{(n)} \\
&= \int \mathrm{d}^{4|8}X \left[A^{(n)i_1j_1,\dots,i_nj_n} - \int \mathrm{d}u\, u^{i_1j_1}\dots u^{i_nj_n} \bar{D}^4 V^{(n)} \right] \delta A^{(n)}_{i_1j_1,\dots,i_nj_n}\,,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

onde $\mathrm{d}^{4|8}X := \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^8\theta$; logo, a ação é extremizada, *i.e.*, $\delta S^{(n)} = 0$, para

$$A^{(n)i_1j_1,\dots,i_nj_n} = \int \mathrm{d}u\, u^{i_1j_1}\dots u^{i_nj_n} \bar{D}^4 V^{(n)}\,. \tag{4.27}$$

A variação da ação (4.22) com respeito a $\widetilde{A^{(n)}}$ produz um resultado análogo. Assim, foi resolvido o vínculo de quarta ordem para o supercampo $A^{(n)}$.

4.3 Propriedades do supercampo prepotencial

Agora que obtivemos a expressão do supercampo $A^{(n)}$ em termos do supercampo prepotencial $V^{(n)}$, podemos observar algumas propriedades deste último. Primeiramente, notamos que, sob a ação do grupo U(1), u^{ij} possui carga +1, ou seja, $D_o u^{ij} = u^{ij}$, o que implica que $C^{(n)}$ tem carga $n + 2$. Como as derivadas D^4, D'^4, $\bar{D}^4$ e $\bar{D}'^4$ têm cargas +2, −2, −2 e +2, respectivamente, concluímos que a carga da medida harmônica (4.23) é −4, de modo que $V^{(n)}$ deve possuir carga $2 - n$ para que a integral sobre SU(4)/S(U(2)×U(2)) não se anule identicamente por simetria.

Além disso, uma vez que $C^{(n)}$ é analítico, a ação (4.22) possui uma invariância de *gauge* da forma

$$V^{(n)} \longmapsto V^{(n)} + D_r{}^{s'} \Xi_{s'}^{(n)r} \,, \tag{4.28}$$

sendo $\Xi_{s'}^{(n)r}$ um supercampo G-analítico. Isto pode ser visto da seguinte maneira: sob uma transformação do tipo (4.28),

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{gauge}} S^{(n)} &= -\int \mathrm{d}\mu \, (D_r{}^{s'} \Xi_{s'}^{(n)r})(C^{(n)} - \widetilde{C^{(n)}}) \\
&= -\int \mathrm{d}^4x \, \mathrm{d}u \, D'^4 \bar{D}^4 D_r{}^{s'} \left[\Xi_{s'}^{(n)r} (C^{(n)} - \widetilde{C^{(n)}}) \right] \\
&= -\int \mathrm{d}^4x \, \mathrm{d}u \, D_r{}^{s'} \left[D'^4 \bar{D}^4 \Xi_{s'}^{(n)r} (C^{(n)} - \widetilde{C^{(n)}}) \right] \\
&= 0 \,,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde a troca de posição das derivadas se justifica pelo fato de o comutador de $D_r{}^{s'}$ com $D_{\alpha r'}$ ($\bar{D}^s_{\dot{\alpha}}$) ser proporcional a $D_{\alpha r}$ ($\bar{D}^{s'}_{\dot{\alpha}}$) e termos de superfície foram desprezados.

Os prepotenciais $V^{(n)}$ se acoplam naturalmente a correntes de Noether generalizadas $\mathcal{O}_{n+2}$ por meio do acoplamento

$$S^{(n)}_{\mathrm{Noether}} = \int \mathrm{d}\mu \, V^{(n)} \mathcal{O}_{n+2} \,. \tag{4.30}$$

Para que este termo seja não nulo e invariante de *gauge* no sentido de (4.28), a corrente $\mathcal{O}_{n+2}$ deve possuir as mesmas propriedades que o vínculo correspondente $C^{(n)}$. Em particular, $\mathcal{O}_n$ deve ter carga n.

Estas correntes podem ser realizadas explicitamente como operadores em $\mathcal{N} = 4$ SYM, como mostraremos na próxima seção.

4.4 Conexão com $\mathcal{N} = 4$ SYM

O espectro de partículas de $\mathcal{N} = 4$ SYM é formado por um vetor real A_a, seis escalares reais $\varphi_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl}\bar{\varphi}^{kl}$, quatro espinores quirais χ^i_α e suas antipartículas $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}i}$, todos na representação adjunta do grupo de *gauge*. Uma descrição *on-shell* pode ser dada em termos de um supercampo $W_{ij}(x, \theta, \bar{\theta})$ satisfazendo à condição de realidade [18]

$$\overline{W}^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijkl} W_{kl} \tag{4.31}$$

e aos vínculos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha i} W_{jk} &= \nabla_{\alpha [i} W_{jk]} \,, \\
\bar{\nabla}^i_{\dot{\alpha}} W_{jk} &= -\tfrac{2}{3} \delta^i_{[j} \bar{\nabla}^l_{\dot{\alpha}} W_{k]l} \,,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

onde $\nabla_{\alpha i}$ e $\bar{\nabla}^i_{\dot{\alpha}}$ são as derivadas covariantes em relação ao grupo de *gauge* e a antissimetrização é feita apenas nos índices de SU(4), obviamente. Os campos que representam as partículas acima aparecem nas componentes da expansão de W_{ij} em potências de θ e $\bar{\theta}$ (esquematicamente):

$$W_{ij} = \varphi_{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl}\theta^{\alpha k}\chi^l_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}[i}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}_{j]} + \cdots + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_i(\tilde{\sigma}^{ab})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}j}F_{ab} + \cdots \,, \tag{4.33}$$

onde $F_{ab} = 2\partial_{[a}A_{b]} + i[A_a, A_b]$.

Podemos definir no superespaço harmônico um supercampo $W := u^{ij}W_{ij}$. Este supercampo tem carga $+1$ ($D_o W = W$) e é real com respeito à conjugação harmônica, *i.e.*,

$$\begin{aligned}
\widetilde{W} &= \widetilde{u^{ij}}\widetilde{W_{ij}} \\
&= u_{ij}\overline{W}^{ij} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{ijkl}u_{ij}W_{kl} \\
&= u^{kl}W_{kl} \\
&= W \,,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

onde usamos (4.16), (4.31) e (4.11). Além disso, como visto em (4.18), u^{ij} é H-analítico, o que implica que W também é. A seguir, estudaremos as propriedades de W de acordo com o tipo do grupo de *gauge*.

4.4.1 Grupo de "gauge" abeliano

Se o grupo de *gauge* é abeliano, os vínculos (4.32) se tornam

$$\begin{aligned}
D_{\alpha i}W_{jk} &= D_{\alpha[i}W_{jk]} \,, \\
\bar{D}^i_{\dot{\alpha}}W_{jk} &= -\tfrac{2}{3}\delta^i_{[j}\bar{D}^l_{\dot{\alpha}}W_{k]l} \,,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

e podemos demonstrar que W é analítico. Já vimos que W é H-analítico. Para mostrar a G-analiticidade de W, primeiro atuamos com uma derivada $D_{\alpha r}$:

$$D_{\alpha r}W = \frac{1}{2}\epsilon^{st}u_s{}^i u_t{}^j u_r{}^k D_{\alpha k}W_{ij} \,. \tag{4.36}$$

Como, devido ao primeiro vínculo em (4.35), $D_{\alpha k}W_{ij}$ é totalmente antissimétrico nos índices de SU(4), é preciso que o produto das três variáveis harmônicas em (4.36) também o seja, para que $D_{\alpha r}W$ seja diferente de zero. Mas os índices r, s, t vão somente de 1 a 2, de modo que necessariamente aparecem termos como $u_r{}^j u_r{}^k$ (sem soma em r), que são simétricos em j e k. Logo, $D_{\alpha r}W = 0$. Vejamos agora o que a atuação de $\bar{D}^{r'}_{\dot{\alpha}}$ nos dá:

$$\bar{D}^{r'}_{\dot{\alpha}}W = \frac{1}{2}\epsilon^{rs}u_r{}^i u_s{}^j u_k{}^{r'} D^k_{\dot{\alpha}}W_{ij} \,. \tag{4.37}$$

Utilizando o segundo vínculo em (4.35), temos que $D^k_{\dot\alpha} W_{ij}$ produz termos com δ^k_i e δ^k_j, de modo que $\bar{D}^{r'}_{\dot\alpha} W \sim u_r{}^k u_k{}^{r'} + u_s{}^k u_k{}^{r'} = 0$, de acordo com (4.1). Assim, demonstramos que W também é G-analítico e, portanto, é um supercampo analítico.

Reciprocamente, podemos demonstrar que um supercampo analítico W no superespaço harmônico $\mathcal{M}^{4|16} \times$ SU(4)/S(U(2)×U(2)), com carga +1 sob a ação de U(1), define um supercampo W_{ij} em $\mathcal{M}^{4|16}$ satisfazendo aos vínculos (4.35). Para tanto, expandimos W em harmônicos de SU(4)/S(U(2)×U(2)). Como W é invariante de su(2)⊕su(2) (uma vez que não possui índices r ou r'), ele só pode depender dos u's através dos objetos u^{ij} e u_{ij}. Como u^{ij} ($\overline{u_{ij}}$) tem carga +1 (-1), temos que W deve ser da forma

$$W(x,\theta,\bar\theta,u) = \sum_{p=0}^{\infty} (u^{i_1 j_1} \ldots u^{i_{p+1} j_{p+1}})(\bar{u}^{i'_1 j'_1} \ldots \bar{u}^{i'_p j'_p}) W^{(p)}_{i_1 j_1 \ldots i_{p+1} j_{p+1}; i'_1 j'_1 \ldots i'_p j'_p}(x,\theta,\bar\theta)\,. \tag{4.38}$$

A H-analiticidade de W impõe $D_r{}^{s'} W = 0$. Temos que $D_r{}^{s'} u^{ij} = 0$, mas

$$\begin{aligned} D_r{}^{s'} \bar{u}^{ij} &= \frac{1}{2}\epsilon^{r't'} u_r{}^k \frac{\partial}{\partial u_{s'}{}^k}(u_{r'}{}^i u_{t'}{}^j) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{r't'} u_r{}^k (\delta^{s'}_{r'} \delta^i_k u_{t'}{}^j + \delta^{s'}_{t'} \delta^j_k u_{r'}{}^i) \\ &= \epsilon^{s't'} u_r{}^{[i} u_{t'}{}^{j]} \\ &\neq 0\,, \end{aligned} \tag{4.39}$$

em geral; logo, o único termo permitido na expansão de W é aquele com $p = 0$, que podemos denotar por $u^{ij} W_{ij}$.

Vejamos, agora, o que impõe sobre W a G-analiticidade. Primeiramente, analisemos a equação $D_{\alpha r} W = 0$. Temos

$$D_{\alpha r} W = 0 \iff \frac{1}{2}\epsilon^{st} u_r{}^i u_s{}^j u_t{}^k D_{\alpha i} W_{jk} = 0\,; \tag{4.40}$$

logo, por um argumento semelhante ao dado abaixo da equação (4.36), vemos que $D_{\alpha i} W_{jk}$ deve ser totalmente antissimétrico nos índices de SU(4). Portanto, a equação (4.40) é satisfeita se

$$D_{\alpha i} W_{jk} = D_{\alpha [i} W_{jk]}\,. \tag{4.41}$$

Esta equação é idêntica ao primeiro vínculo em (4.35). Dando prosseguimento ao estudo das implicações da G-analiticidade de W, analisemos a equação $\bar{D}^{r'}_{\dot\alpha} W = 0$. Temos

$$\bar{D}^{r'}_{\dot\alpha} W = 0 \iff \frac{1}{2}\epsilon^{st} u_s{}^j u_t{}^k u_i{}^{r'} \bar{D}^i_{\dot\alpha} W_{jk} = 0\,. \tag{4.42}$$

Por um argumento semelhante ao dado abaixo de (4.37), vemos que $\bar{D}^i_{\dot\alpha} W_{jk}$ deve ser igual a uma combinação de termos contendo deltas de Kronecker. Por consistência, como W_{jk} é antissimétrico (já que $u^{jk} = -u^{kj}$), devemos ter

$$\bar{D}^i_{\dot{\alpha}} W_{jk} = \zeta \delta^i_{[j} \bar{D}^l_{\dot{\alpha}} W_{k]l} \,, \tag{4.43}$$

onde ζ é uma constante a ser determinada. De fato, contraindo os dois lados da equação acima com δ^j_i, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{D}^i_{\dot{\alpha}} W_{ik} &= \frac{1}{2}\zeta(4\bar{D}^i_{\dot{\alpha}} W_{ki} - \bar{D}^i_{\dot{\alpha}} W_{ki}) \\ &= -\frac{3}{2}\zeta \bar{D}^i_{\dot{\alpha}} W_{ik} \,, \end{aligned} \tag{4.44}$$

donde $\zeta = -\frac{2}{3}$. Portanto,

$$\bar{D}^i_{\dot{\alpha}} W_{jk} = -\frac{2}{3} \delta^i_{[j} \bar{D}^l_{\dot{\alpha}} W_{k]l} \,, \tag{4.45}$$

equação idêntica ao segundo vínculo em (4.35).

Finalmente, a condição de realidade (4.31) é equivalente à imposição de que W seja real com respeito à conjugação harmônica, uma vez que

$$W = \widetilde{W} \iff u^{ij} W_{ij} = u_{kl} \overline{W}^{kl} = \frac{1}{2} \epsilon_{klij} u^{ij} \overline{W}^{kl} \,, \tag{4.46}$$

ou seja,

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl} \overline{W}^{kl} \,. \tag{4.47}$$

Assim, demonstramos a equivalência entre as descrições de $\mathcal{N} = 4$ SYM no superespaço harmônico e no superespaço usual, no caso de um grupo de *gauge* abeliano.

4.4.2 Grupo de "gauge" não abeliano

Os vínculos satisfeitos pela 2-forma (*field strength*) F em $\mathcal{N} = 4$ SYM, quais sejam [18]

$$\begin{aligned} F_{\alpha i \beta j} &:= -i\{\nabla_{\alpha i}, \nabla_{\beta j}\} = \epsilon_{\alpha\beta} W_{ij} \,, \\ F^{ij}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &:= -i\{\bar{\nabla}^i_{\dot{\alpha}}, \bar{\nabla}^j_{\dot{\beta}}\} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \overline{W}^{ij} \,, \\ F_{\alpha i}{}^j_{\dot{\beta}} &:= -i\{\nabla_{\alpha i}, \bar{\nabla}^j_{\dot{\beta}}\} = 0 \,, \end{aligned} \tag{4.48}$$

podem ser escritos na linguagem do superespaço harmônico como

$$\begin{aligned} F_{\alpha r \beta s} &= \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{rs} W \,, \\ F^{r's'}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{r's'} W \,, \\ F_{\alpha r}{}^{s'}_{\dot{\beta}} &= 0 \,, \end{aligned} \tag{4.49}$$

onde $F_{\alpha r \beta s} = u_r{}^i u_s{}^j F_{\alpha i \beta j}$, $F^{r's'}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = u_i{}^{r'} u_j{}^{s'} F^{ij}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ e assim por diante. A identidade de Jacobi (generalizada)

$$[\bar{\nabla}^{s'}_{\dot{\beta}}, \{\nabla_{\alpha r}, \bar{\nabla}^{r'}_{\dot{\alpha}}\}] + [\bar{\nabla}^{r'}_{\dot{\alpha}}, \{\bar{\nabla}^{s'}_{\dot{\beta}}, \nabla_{\alpha r}\}] + [\nabla_{\alpha r}, \{\bar{\nabla}^{r'}_{\dot{\alpha}}, \bar{\nabla}^{s'}_{\dot{\beta}}\}] = 0 \tag{4.50}$$

implica que

$$\nabla_{\alpha r}(iF^{r's'}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = i\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{r's'}\nabla_{\alpha r}W = 0\,, \tag{4.51}$$

ou seja, $\nabla_{\alpha r}W = 0$. Por outro lado, a identidade

$$[\nabla_{\gamma s}, \{\nabla_{\alpha r}, \bar{\nabla}^{r'}_{\dot{\alpha}}\}] + [\bar{\nabla}^{r'}_{\dot{\alpha}}, \{\nabla_{\gamma s}, \nabla_{\alpha r}\}] + [\nabla_{\alpha r}, \{\bar{\nabla}^{r'}_{\dot{\alpha}}, \nabla_{\gamma s}\}] = 0 \tag{4.52}$$

implica que

$$\bar{\nabla}^{r'}_{\dot{\alpha}}(iF_{\gamma s \alpha r}) = i\epsilon_{\gamma\alpha}\epsilon_{sr}\bar{\nabla}^{r'}_{\dot{\alpha}}W = 0\,, \tag{4.53}$$

ou seja, $\bar{\nabla}^{r'}_{\dot{\alpha}}W = 0$. Portanto, embora W não seja um supercampo G-analítico quando o grupo de *gauge* é não abeliano, podemos dizer que W é covariantemente G-analítico, *i.e.*, (compare com (4.8))

$$\nabla_{\alpha r}W = \bar{\nabla}^{r'}_{\dot{\alpha}}W = 0\,. \tag{4.54}$$

Se começamos com um supercampo W com carga $+1$ e covariantemente analítico no superespaço harmônico, podemos mostrar que ele define um supercampo W_{ij} em $\mathcal{M}^{4|16}$ satisfazendo aos vínculos (4.32). Para tanto, basta seguir o que fizemos na subseção anterior, trocando D's por ∇'s quando necessário.

A equação (4.54) implica que $\mathrm{tr}(W^n)$, onde o traço é tomado com relação ao grupo de *gauge*, é analítico no sentido usual. Assim, os operadores

$$\mathcal{O}_n = \mathrm{tr}(W^n) \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{4.55}$$

fornecem a família de correntes generalizadas que se acoplam aos prepotenciais $V^{(n)}$, introduzidas na seção 4.3. Portanto, existe uma correspondência biunívoca entre estes operadores e os estados de Kaluza–Klein da supergravidade tipo IIB em $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ [13], a qual pode ser esquematizada da seguinte maneira:

$$A^{(n)} \;\longleftrightarrow\; V^{(n)} \;\longleftrightarrow\; \mathrm{tr}(W^{n+2}) \qquad (n = 0, 1, \ldots)\,. \tag{4.56}$$

Este fato foi apontado pela primeira vez em [4], embora esta família de operadores já tivesse sido considerada em [2]. Aqui derivamos explicitamente a relação entre os multipletos da supergravidade e da teoria de campos através do uso do superespaço harmônico.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Neste último capítulo, fazemos um breve resumo do que foi feito neste trabalho, além de apresentarmos nossas perspectivas para o futuro.

Mostramos que a teoria de supergravidade tipo IIB pode ser descrita, na aproximação linear, em termos de um supercampo quiral $\mathbf{A}$ satisfazendo a um vínculo de quarta ordem da forma $\mathcal{D}^4\mathbf{A} \sim \bar{\mathcal{D}}^4\bar{\mathbf{A}}$. Este é o caso tanto para um *background* $\mathbb{M}^{10}$ como para um *background* $\mathrm{AdS}_{5,5|32}$. Neste último caso, pudemos expandir este supercampo em harmônicos de S^5, obtendo uma família de supercampos quirais em $\mathrm{AdS}_{5|32}$ que pertencem a representações simétricas e de traço nulo de SO(6), o grupo das isometrias de S^5. Passando para a fronteira de $\mathrm{AdS}_{5|32}$, *i.e.*, tomando $\varphi = \bar{\varphi} = 0$ e $r \to \infty$, com base no estudo do superespaço $\mathrm{AdS}_{5,5|32}$ feito no capítulo 2, obtivemos uma família de supercampos quirais $\mathcal{N} = 4$ no superespaço de Minkowski $\mathcal{M}^{4|16}$, também estudado em detalhe no capítulo 2. Estes supercampos são *off-shell* e também satisfazem a vínculos de quarta ordem. No quarto capítulo, mostramos que estes supercampos podem ser expressos em termos de uma família de supercampos prepotenciais Grassmann-analíticos em um superespaço apropriado, qual seja o superespaço harmônico $\mathcal{M}^{4|16} \times \mathrm{SU}(4)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(2))$, e que estes prepotenciais se acoplam naturalmente a operadores invariantes de *gauge* em $\mathcal{N} = 4$ SYM. De fato, estes operadores são da forma $\mathrm{tr}(W^n)$ $(n = 2, 3, \ldots)$, onde $W = u^{ij}W_{ij}$ e W_{ij} é o supercampo *field strength* de $\mathcal{N} = 4$ SYM. Esta identificação dos estados de Kaluza–Klein da supergravidade tipo IIB em $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ [13] com estes operadores foi feita pela primeira vez em [4], embora esta família de operadores já tivesse sido considerada em [2]. Aqui derivamos explicitamente a relação entre os multipletos da supergravidade e da teoria de campos através do uso do superespaço harmônico, com base no que foi feito em [3]. Podemos ver esta relação como mais uma corroboração da correspondência AdS/CFT.

A continuação natural deste estudo envolve uma generalização do artigo [3] da supergravidade para a supercorda. Esta generalização deve envolver o formalismo de espinores puros em um *background* $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ [19] e o superespaço harmônico descrito aqui. Com uma relação bem definida entre $\mathcal{N} = 4$ SYM e a supercorda no *background* $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, pode ser possível testar e talvez até demonstrar a correspondência AdS/CFT no limite perturbativo de SYM. Os primeiros passos para definir esta relação foram feitos nos artigos [20] e [21].

Apêndice A

Espinores de duas componentes

Nesta dissertação, sempre que discutimos uma teoria em um superespaço cuja parte bosônica (descrita por variáveis comutantes) tem dimensão 4, utilizamos o formalismo dos espinores de duas componentes.* O grupo de Lorentz $\mathrm{SO}(1,3)$ é localmente isomorfo ao grupo $\mathrm{SL}(2,\mathrm{C})$ das matrizes 2×2 complexas e de determinante 1. Este último possui duas representações fundamentais distintas. Uma delas é descrita por um par de números complexos

$$\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

com a lei de transformação

$$\psi'_\alpha = \Lambda_\alpha^\beta \psi_\beta\,, \qquad \Lambda \in \mathrm{SL}(2,\mathrm{C})\,, \tag{A.2}$$

e é chamada representação $\left(\frac{1}{2},0\right)$, ou espinorial quiral de esquerda.

A outra representação fundamental, chamada $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ou espinorial quiral de direita, é obtida por conjugação complexa:

$$\bar\psi'_{\dot\alpha} = \bar\psi_{\dot\beta}\bar\Lambda_{\dot\alpha}^{\dot\beta}\,, \qquad \bar\Lambda_{\dot\alpha}^{\dot\beta} = \overline{(\Lambda_\alpha^\beta)}\,. \tag{A.3}$$

O ponto em cima dos índices indica a representação a que estamos nos referindo.

Na notação do grupo $\mathrm{SL}(2,\mathrm{C})$, um espinor de Dirac de quatro componentes é representado por um par de espinores quirais:

$$\Psi_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar\chi^{\dot\alpha} \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Para um espinor de Majorana, $\bar\chi_{\dot\alpha} = \overline{(\psi_\alpha)}$.

*Na verdade, também utilizamos este formalismo quando estudamos o superespaço $\mathrm{AdS}_{5|32}\times \mathrm{S}^5$, devido à decomposição superconforme da álgebra $\mathrm{psu}(2,2|4)$, descrita no apêndice C.

Os índices com e sem ponto são levantados e abaixados da seguinte maneira:

$$\psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta}\,, \qquad \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\chi}_{\dot{\beta}}\,; \tag{A.5}$$

$$\psi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta}\,, \qquad \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\chi}^{\dot{\beta}}\,, \tag{A.6}$$

onde ϵ é o símbolo de Levi–Civita e tem as propriedades

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -\epsilon^{12} = -\epsilon^{\dot{1}\dot{2}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}\,, \qquad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}}\,. \tag{A.7}$$

A convenção para a contração de um par de índices espinoriais é

$$\psi^{\alpha}\lambda_{\alpha} =: \psi\lambda\,, \qquad \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\rho}^{\dot{\alpha}} =: \bar{\chi}\bar{\rho} \quad \Longrightarrow \quad \psi^2 = \psi^{\alpha}\psi_{\alpha}\,, \qquad \bar{\psi}^2 = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\,. \tag{A.8}$$

As matrizes σ_a $(a = 0, \ldots, 3)$ são definidas como

$$(\sigma_a)_{\alpha\dot{\alpha}} = (\mathbf{1}, \vec{\sigma})_{\alpha\dot{\alpha}}\,, \qquad (\tilde{\sigma}_a)^{\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}(\sigma_a)_{\beta\dot{\beta}} = (\mathbf{1}, -\vec{\sigma})^{\dot{\alpha}\alpha}\,, \tag{A.9}$$

onde $\vec{\sigma}$ representa as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.10}$$

e possuem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
&(\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}}(\tilde{\sigma}_a)^{\dot{\beta}\beta} = 2\delta_{\alpha}^{\beta}\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}\,, \qquad (\sigma_a)_{\alpha\dot{\alpha}}(\tilde{\sigma}^b)^{\dot{\alpha}\alpha} = 2\delta_a^b\,, \\
&\sigma^a\tilde{\sigma}^b = \eta^{ab} - i\sigma^{ab}\,, \qquad \tilde{\sigma}^a\sigma^b = \eta^{ab} - i\tilde{\sigma}^{ab}\,, \\
&\sigma^{ab} = -\sigma^{ba}\,, \qquad \tilde{\sigma}^{ab} = -\tilde{\sigma}^{ba}\,, \qquad (\sigma^{ab})_{\alpha}{}^{\alpha} = (\tilde{\sigma}^{ab})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\alpha}} = 0\,, \\
&\epsilon_{abcd}\,\sigma^{cd} = 2i\,\sigma_{ab}\,, \qquad \epsilon_{abcd}\,\tilde{\sigma}^{cd} = -2i\,\tilde{\sigma}_{ab}\,, \\
&(\sigma_{ab})_{\alpha}{}^{\beta}(\sigma_c)_{\beta\dot{\beta}} + (\sigma_c)_{\alpha\dot{\alpha}}(\tilde{\sigma}_{ab})_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}} = -2\epsilon_{abcd}(\sigma^d)_{\alpha\dot{\beta}}\,,
\end{aligned} \tag{A.11}$$

sendo $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ e ϵ_{abcd} o símbolo totalmente antissimétrico de Levi–Civita, definido de forma que $\epsilon_{0123} = 1$.

Um vetor x^a pertence à representação $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e pode ser substituído por uma matriz hermitiana:

$$x_{\alpha\dot{\alpha}} := (\sigma_a)_{\alpha\dot{\alpha}}x^a\,, \qquad x^{\dot{\alpha}\alpha} := (\tilde{\sigma}_a)^{\dot{\alpha}\alpha}x^a\,. \tag{A.12}$$

Por fim, escrevemos a forma infinitesimal das matrizes de $\mathrm{SL}(2, \mathrm{C})$ em (A.2) e (A.3):

$$\Lambda_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} + \frac{i}{2}\lambda^{ab}(\sigma_{ab})_{\alpha}{}^{\beta}\,, \qquad \bar{\Lambda}_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} - \frac{i}{2}\lambda^{ab}(\tilde{\sigma}_{ab})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}\,, \tag{A.13}$$

onde os parâmetros $\lambda^{ab} = -\lambda^{ba}$ são reais e infinitesimais.

Apêndice B

Espinores e matrizes de Pauli em 10 dimensões

É bem conhecido o fato de que, em um espaço de d dimensões (bosônicas), um espinor de Dirac possui $2^{\left[\frac{d}{2}\right]}$ componentes complexas, onde $[\xi]$ denota o maior inteiro que não supera ξ. Este resultado é válido para qualquer assinatura da métrica. Entretanto, este tipo de espinor não é, em geral, uma representação irredutível do grupo de Lorentz. De fato, quando d é par, podemos impor a condição de Weyl, que divide o espinor em suas componentes quirais de esquerda e de direita, as quais se transformam independentemente. Cada uma destas componentes (espinores de Weyl) possui metade dos graus de liberdade do espinor de Dirac original. Estes são os espinores que utilizamos na seção 3.1.

No caso em que $d = 10$, os espinores de Weyl possuem 16 componentes complexas, de modo que, em vez de trabalhar com matrizes de Dirac 32×32, podemos trabalhar com matrizes de Pauli (generalizadas) 16×16. Assim, usamos índices $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \ldots = 1, \ldots, 16$ em cima para denotar as componentes de um espinor de Weyl de esquerda $\psi^{\hat{\alpha}}$ e os mesmos índices embaixo para denotar as componentes de um espinor de Weyl de direita $\chi_{\hat{\alpha}}$. Isto é consistente porque, como não existem em dez dimensões objetos análogos aos símbolos $\epsilon_{\alpha\beta}$ e $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ definidos no apêndice A, os índices não podem ser levantados ou abaixados.

As matrizes de Pauli $(\gamma_\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ satisfazem à relação de anticomutação usual

$$(\gamma_\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\gamma_\nu)^{\hat{\beta}\hat{\gamma}} + (\gamma_\nu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\gamma_\mu)^{\hat{\beta}\hat{\gamma}} = 2\eta_{\mu\nu}\delta_{\hat{\alpha}}^{\hat{\gamma}} \qquad (\mu, \nu = 0, \ldots, 9)\,, \tag{B.1}$$

sendo

$$\begin{array}{rcl} (\gamma_\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} & = & (\mathbf{1}, \gamma_{\mathrm{i}})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \qquad (\mathrm{i} = 1, \ldots, 9)\,, \\ (\gamma_\mu)^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} & = & (\mathbf{1}, -\gamma_{\mathrm{i}})^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\,, \\ \{\gamma_{\mathrm{i}}, \gamma_{\mathrm{j}}\} & = & 2\delta_{\mathrm{ij}} \end{array} \tag{B.2}$$

e $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)$. As matrizes γ_{i} são hermitianas. Podemos definir os seguintes produtos antissimetrizados de matrizes γ:

$$\begin{aligned} (\gamma_{\mu\nu})_{\hat\alpha}{}^{\hat\gamma} &:= (\gamma_{[\mu})_{\hat\alpha\hat\beta}(\gamma_{\nu]})^{\hat\beta\hat\gamma}\,, & (\gamma_{\mu\nu})^{\hat\alpha}{}_{\hat\gamma} &:= (\gamma_{[\mu})^{\hat\alpha\hat\beta}(\gamma_{\nu]})_{\hat\beta\hat\gamma}\,, \\ (\gamma_{\mu\nu\rho})_{\hat\alpha\hat\beta} &:= (\gamma_{[\mu\nu})_{\hat\alpha}{}^{\hat\gamma}(\gamma_{\rho]})_{\hat\gamma\hat\beta}\,, & (\gamma_{\mu\nu\rho})^{\hat\alpha\hat\beta} &:= (\gamma_{[\mu\nu})^{\hat\alpha}{}_{\hat\gamma}(\gamma_{\rho]})^{\hat\gamma\hat\beta} \end{aligned} \tag{B.3}$$

e assim por diante, onde a antissimetrização é, obviamente, feita apenas nos índices vetoriais e é definida de modo que, se $O_{\mu_1\ldots\mu_n}$ é um objeto totalmente antissimétrico, então $O_{\mu_1\ldots\mu_n} = O_{[\mu_1\ldots\mu_n]}$. As matrizes γ_μ e $\gamma_{\mu\nu\rho\sigma\tau}$ são simétricas com respeito a seus índices espinoriais, enquanto $\gamma_{\mu\nu\rho}$ é antissimétrica. Além disso, $(\gamma_{\mu\nu\rho\sigma\tau})_{\hat\alpha\hat\beta}$ é autodual, enquanto $(\gamma_{\mu\nu\rho\sigma\tau})^{\hat\alpha\hat\beta}$ é antiautodual. Finalmente, listamos as identidades envolvendo traços de matrizes γ:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu)_{\hat\alpha\hat\beta}(\gamma_\nu)^{\hat\beta\hat\alpha} &= 16\,\delta^\mu_\nu\,, \\ (\gamma^{\mu\nu})^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta}(\gamma_{\rho\sigma})^{\hat\beta}{}_{\hat\alpha} &= 32\,\delta^{\mu\nu}_{\sigma\rho}\,, \\ (\gamma^{\mu\nu\rho})_{\hat\alpha\hat\beta}(\gamma_{\sigma\tau\upsilon})^{\hat\beta\hat\alpha} &= 96\,\delta^{\mu\nu\rho}_{\upsilon\tau\sigma}\,, \\ (\gamma^{\mu\nu\rho\sigma})^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta}(\gamma_{\tau\upsilon\omega\lambda})^{\hat\beta}{}_{\hat\alpha} &= 384\,\delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\lambda\omega\upsilon\tau}\,, \\ (\gamma^{\mu\nu\rho\sigma\tau})_{\hat\alpha\hat\beta}(\gamma_{\upsilon\omega\lambda\phi\psi})^{\hat\beta\hat\alpha} &= 1920\,\delta^{\mu\nu\rho\sigma\tau}_{\psi\phi\lambda\omega\upsilon} + 16\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau}{}_{\upsilon\omega\lambda\phi\psi}\,, \end{aligned} \tag{B.4}$$

onde $\delta^{\mu\nu}_{\sigma\rho} := \delta^\mu_{[\sigma}\delta^\nu_{\rho]}$, $\delta^{\mu\nu\rho}_{\upsilon\tau\sigma} := \delta^\mu_{[\upsilon}\delta^\nu_\tau\delta^\rho_{\sigma]}$ e assim por diante e $\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_{10}}$ é o símbolo totalmente antissimétrico de Levi–Civita, definido de forma que $\epsilon^{0123456789} = 1$. Contrações entre matrizes com diferentes números de índices vetoriais são nulas. Estas propriedades são importantes para a discussão feita no capítulo 3.

Apêndice C

A álgebra do grupo $\mathbf{PSU(2,2|4)}$

A álgebra $\mathrm{psu}(2,2|4)$ é uma extensão da álgebra conforme $\mathrm{so}(2,4) \simeq \mathrm{su}(2,2)$ e, ao mesmo tempo, uma extensão da álgebra de supersimetria 4-estendida ($\mathcal{N}=4$) (com carga central nula). Ela contém os geradores $P_a, M_{ab}, Q_{\alpha i}, \bar{Q}^i_{\dot\alpha} = (Q_{\alpha i})^\dagger$ do grupo de super Poincaré, $U_i^j = -(U_j^i)^\dagger$ de SU(4), K_a dos *boosts* conformes, Δ da dilatação e os geradores S^i_α, $\bar{S}_{\dot\alpha i} = (S^i_\alpha)^\dagger$ da supersimetria "especial" (ou conforme). Estes últimos são contrapartes dos geradores de supersimetria usuais $Q_{\alpha i}$, $\bar{Q}^i_{\dot\alpha}$, assim como os *boosts* conformes K_a são contrapartes dos geradores de translações P_a.

A estrutura completa da álgebra é:

$$
\begin{aligned}
[M_{ab}, M_{cd}] &= 2i(\eta_{c[b}M_{a]d} + \eta_{d[a}M_{b]c})\,, & [P_a, K_b] &= -2i(\eta_{ab}\Delta + M_{ab})\,,\\
[M_{ab}, P_c] &= 2i\eta_{c[b}P_{a]}\,, & [M_{ab}, K_c] &= 2i\eta_{c[b}K_{a]}\,,\\
[\Delta, P_a] &= iP_a\,, & [\Delta, K_a] &= -iK_a\,,\\
[\Delta, Q_{\alpha i}] &= \tfrac{i}{2}Q_{\alpha i}\,, & [\Delta, S^i_\alpha] &= -\tfrac{i}{2}S^i_\alpha\,,\\
[M_{ab}, Q_{\alpha i}] &= -\tfrac{1}{2}(\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta Q_{\beta i}\,, & [M_{ab}, S^i_\alpha] &= -\tfrac{1}{2}(\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta S^i_\beta\,,\\
[Q_{\alpha i}, K_a] &= -(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}\bar{S}^{\dot\alpha}_i\,, & [S^i_\alpha, P_a] &= -(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}\bar{Q}^{\dot\alpha i}\,,\\
\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^j_{\dot\alpha}\} &= 2\delta^j_i(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}P_a\,, & \{S^i_\alpha, \bar{S}_{\dot\alpha j}\} &= 2\delta^i_j(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}K_a\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{Q_{\alpha i}, S^{\beta j}\} &= -\delta^j_i(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta M_{ab} + 2i\delta^\beta_\alpha(2U^j_i - \delta^j_i\Delta)\,,\\
[U^i_j, Q_{\alpha k}] &= i(\delta^i_k Q_{\alpha j} - \tfrac{1}{4}\delta^i_j Q_{\alpha k})\,,\\
[U^i_j, S^{\alpha k}] &= -i(\delta^k_j S^{\alpha i} - \tfrac{1}{4}\delta^i_j S^{\alpha k})\,,\\
[U^i_j, U^k_l] &= i(\delta^i_l U^k_j - \delta^k_j U^i_l)\,,
\end{aligned}
$$

além de relações que são obtidas destas por conjugação hermitiana. Todos outros (anti)comutadores são nulos. Aqui $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ e ${}_{[ab]} := \frac{1}{2}({}_{ab} - {}_{ba})$.

A lista de geradores dada aqui constitui a **decomposição superconforme** da álgebra $\mathrm{psu}(2,2|4)$. Esta forma da álgebra é mais conveniente para o estudo do superespaço conforme, não sendo tão bem adaptada ao estudo do espaço $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Por exemplo, os geradores K_a não pertencem ao grupo de isotropia de AdS_5, mas as combinações lineares $\frac{1}{2}(P_a - K_a)$ sim.

Referências

[1] J. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231.

[2] P. Howe, P. West, Int. J. Mod. Phys. **A 14** (1999) 2659.

[3] P. Heslop, P. Howe, Phys. Lett. **B 502** (2001) 259.

[4] L. Andrianopoli, S. Ferrara, Phys. Lett. **B 430** (1998) 248.

[5] O. Aharony, S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, Phys. Rept. **323** (2000) 183.

[6] E. D'Hoker, D. Freedman, *Supersymmetric Gauge Theories and the AdS/CFT Correspondence* [arXiv:hep-th/0201253v2].

[7] P. Szekeres, *A course in modern mathematical physics: groups, Hilbert Space and differential geometry* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004).

[8] H. Ooguri, J. Rahmfeld, H. Robins, J. Tannenhauser, JHEP **0007** (2000) 045.

[9] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1992).

[10] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory: Volume 2, Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987).

[11] P. Howe, P. West, Nucl. Phys. **B 238** (1984) 181.

[12] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: an introduction to General Relativity* (Addison Wesley, São Francisco, 2004).

[13] H. Kim, L. Romans, P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. **D 32** (1985) 389.

[14] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, JETP Lett. **40** (1984) 912.

[15] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, Class. Quantum Grav. **1** (1984) 469.

[16] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky e E. Sokatchev, *Harmonic Superspace* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001).

[17] G. Hartwell, P. Howe, Int. J. Mod. Phys. **A 10** (1995) 3901.

[18] M. Sohnius, Nucl. Phys. **B 136** (1978) 461.

[19] N. Berkovits, JHEP **0503** (2005) 041.

[20] N. Berkovits, C. Vafa, JHEP **0803** (2008) 031.

[21] N. Berkovits, JHEP **0809** (2008) 088.