

Instituto de Física Teórica Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.001/2011

Aspectos Relativísticos da Teoria da Informação Quântica

André G. S. Landulfo

Orientador

George E. A. Matsas

Agradecimentos

À Aline, por todo seu amor, compreensão e ajuda durante todo esse tempo. Esse trabalho é dedicado a você.

Aos meus pais Ilton e Sueli, meus avós Vito e Adélia, meus irmãos Thiago e Carol além de meus tios Francisco, Maria Aparecida e Antônio.

À minha recém adquirida família, João Carlos, Conceição, Alais e Ana Karla.

Aos meus amigos da USP, Michel Navarro, Vinicius Busti e Dorival Gonçalves.

Ao Instituto de Física Teórica por todo o suporte durante esses anos e a todos os colegas de IFT. Um agradecimento especial, apesar de não estar mais no IFT, à minha amiga Patricia.

Aos atuais colegas de grupo, Adriano, Raissa e Katja e aos antigos colegas de grupo Clóvis, Bruno e Douglas.

Aos professores Daniel Vanzella, Alberto Saa e Reuven Opher pela prazerosa convivência ao longo desses anos.

Um profundo agradecimento ao George, por toda a amizade e orientação dedicada ao longo de todos esses anos. Um agradecimento especial por todo tempo dedicado às valiosas discussões sobre física.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Mesmo tratando a gravidade classicamente, a Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos (TQCEC) faz previsões impressionantes sobre o comportamento de campos quânticos na presença de campos gravitacionais. Entretanto, ao mesmo tempo em que nos revela efeitos surpreendentes, a TQCEC levanta uma série de questionamentos. O desenvolvimento de uma teoria na interface entre a teoria da relatividade, a mecânica quântica e a teoria da informação poderá não só lançar uma nova luz em tais questões como também nos permitir descobrir novos efeitos de gravitação quântica de baixas energias. Entretanto, os efeitos que a teoria da relatividade causa na teoria da informação quântica são não triviais já no espaço-tempo de Minkowski. Faz-se necessária portanto uma análise cuidadosa de tais efeitos já no contexto da relatividade especial. Sendo assim, estudamos primeiro o comportamento das desigualdades de Bell usando férmions de spin 1/2 e fótons quando os detetores que medem spin e polarização, respectivamente, movemse com certa velocidade. Além disso, usamos o limite de Holevo para estudar sistemas de comunicação quando as partes que trocam informação tem um movimento relativo. Como um desenvolvimento natural, estudamos diversos aspectos da teoria da informação quântica no contexto da teoria quântica de campos e, em particular, do efeito Unruh. Tais resultados nos permitiram prever o comportamento de qubits nas vizinhanças de um buraco negro de Schwarzschild.

Palavras Chaves: Informação Quântica; Emaranhamento; Relatividade; Efeito Unruh; Buracos Negros.

Àreas do conhecimento: Mecânica Quântica; Teoria da Informação Quântica; Teoria da Relatividade; Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos.

Abstract

Although it treats gravity classically, the Quantum Field Theory in Curved Spacetimes (QFTCS) makes remarkable predictions about de behavior of quantum fields in the presence of gravitational fields. However, these striking discoveries raises several issues. The development of a theory at the interface between the theory of relativity, quantum mechanics and information theory could not only shed new light on such questions as well as allow us to uncover new low-energy quantum gravity effects. However, relativity affects quantum information theory in a highly non-trivial way already in Minkowski spacetime. Therefore, a careful analysis of these effects in the context of special relativity is needed. For this purpose, we begin investigating how the movement of the spin and polarization detectors influences the Bell inequalities using spin 1/2 fermions and photons, respectively. Then, we use the Holevo bound to investigate quantum communication channels when the parts that trade information have a relative motion. As a natural development, we use quantum field theory and, in particular, the Unruh effect to analyze several aspects of quantum information theory. This enables us to predict the behavior of qubits in the vicinity of a Schwarzschild black hole. [The black hole] teaches us that space can be crumpled like a piece of paper into an infinitesimal dot, that time can be extinguished like a blown-out flame, and that the laws of physics that we regard as "sacred", as immutable, are anything but.

Behind it all is surely an idea so simple, so beautiful, that when we grasp it - in a decade, a century, or a millennium - we will all say to each other, how could it have been otherwise? How could we have been so stupid?

John Archibald Wheeler (1911-2008)

The reader should not be discouraged if...he does not have the prerequisites for reading the prerequisites.

Paul Halmos (1916-2006)

Quantum theory needs no interpretation.

Asher Peres (1934-2005)

Sumário

1	Introdução			1			
2	Teoria da Informação Clássica						
	2.1	Medid	as de Informação	9			
	2.2	2 Sistemas de Comunicação sem Ruídos					
3	Teoria da Informação Quântica						
	3.1	Mecâr	ica Quântica, POVM e Mapeamentos Quânticos	20			
		3.1.1	Os Postulados da Mecânica Quântica	21			
		3.1.2	Medições Generalizadas e POVM	22			
		3.1.3	Mapeamentos Quânticos	26			
	3.2	Medidas de Informação Quântica					
	3.3	Sistem	as Quânticos de Comunicação	30			
		3.3.1	O Limite de Holevo	30			
		3.3.2	O Teorema de Schumacher	32			
	3.4	3.4 Emaranhamento					
		3.4.1	Definição de Emaranhamento	33			
		3.4.2	Aplicações do Emaranhamento	34			
		3.4.3	Medidas de Emaranhamento	39			
	3.5	Correl	ações Clássica e Quântica	41			
4	\mathbf{Rel}	ativida	de Especial e a Teoria da Informação Quântica	45			
	4.1	As Re	presentações Unitárias Irredutíveis do Grupo de Poincaré	46			
		4.1.1	Classificação das Representações Irredutíveis de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_+$	49			
	4.2	A Influência do Movimento dos Detetores nas Desigualdades de Bell 51					
	4.3	A Influência do Movimento dos Detetores em Medidas com Fótons Emara-					
		nhado	s	60			
	4.4	O Limite de Holevo e Canais Quânticos Relativísticos					
5	O E	O Efeito Unruh e a Teoria da Informação Quântica 7					
	5.1	Teoria	Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos	73			

		5.1.1	Quantização do Campo Escalar Real em Espaços-Tempos Global-				
			mente Hiperbólicos	75			
		5.1.2	Transformações de Bogoliubov	77			
		5.1.3	Quantização em Espaços-Tempos Estáticos	79			
		5.1.4	O Efeito Unruh	81			
	5.2	Morte	Súbita do Emaranhamento e Perda de Fidelidade no Teletransporte				
		via o Efeito Unruh					
		5.2.1	O Qubit como um Detetor de Dois Níveis $\ .\ .\ .\ .\ .$	86			
		5.2.2	Qubit Emaranhado e o Efeito Unruh	89			
		5.2.3	Teletransporte e o efeito Unruh	96			
		5.2.4	Comentários	98			
	5.3	Mudança Súbita no Comportamento das Correlações Clássicas e Quânticas					
		e o Efeito Unruh					
		5.3.1	Dinâmica das Correlações Clássicas e Quânticas	100			
		5.3.2	Medida Simétrica de Correlação Quântica e a Discódia Quântica $% {\rm (Intermativa)}$.	103			
		5.3.3	Comentários	107			
6	Informação Quântica nas Vizinhanças de um Buraco Negro 10						
	6.1	O Efei	to Unruh no Espaço-Tempo de Schwarzschild	109			
	6.2 Qubits nas Vizinhanças de um Buraco Negro						
7	Con	sidera	ções Finais	116			
\mathbf{A}	Matriz Densidade e o Teorema da Não Clonagem						
	A.1	A.1 Matriz Densidade					
	A.2						
в	3 A Decomposição de Schimdt						
\mathbf{C}	Classificação das Representações Irredutíveis de $ ilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_+$						
D	Demonstração da Equação (5.15)						
Re	Referências Bibliográficas						

Capítulo 1

Introdução

A *Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos* (TQCEC) é uma teoria construída na interface entre Relatividade Geral e Mecânica Quântica e estuda a propagação de campos quânticos em um espaço-tempo de fundo fixo bem como sua retro-ação no espaço-tempo via a equação de Einstein semi-clássica [1]:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi \langle T_{ab} \rangle_{\omega}, \qquad (1.1)$$

onde R_{ab} é o tensor de Ricci, T_{ab} é o operador tensor energia-momento do campo e $\langle \rangle_{\omega}$ representa o valor esperado no estado ω . (Estaremos usando, durante todo o texto, unidades naturais onde $\hbar = c = G = k_B = 1$.) Como o espaço-tempo é tratado de acordo com a Relatividade Geral, ele será descrito por um par (M, g_{ab}) onde M é uma variedade diferenciável quadrimensional e g_{ab} é uma métrica Lorentziana [2, 3]. Os campos se propagando em um dado espaço-tempo (M, g_{ab}) são quantizados de acordo com as regras da Teoria Quântica de Campos (usando, por exemplo, quantização canônica). Apesar de tratar a gravidade classicamente, a TQCEC é responsável pelas previsões de baixas energias que temos atualmente de gravitação quântica. A mais impressionante delas provém de espaços-tempos que contém buracos negros. Em 1974, S. Hawking, estudando a quantização de campos em um espaço-tempo que descreve uma estrela que sofre colapso formando um buraco negro, mostrou que buracos negros irradiam a uma taxa *constante* (a tempos longos) e com espectro *térmico* com relação a observadores estáticos no infinito [4]. A temperatura medida por esses observadores é dada por

$$T_H = \kappa / 2\pi, \tag{1.2}$$

onde κ é a gravidade superficial do buraco negro [1, 5, 6] (para buracos negros estacionários sem carga e momento angular, $\kappa = 1/4M$, onde M é a massa do buraco negro). Esse resultado foi recebido com perplexidade já que mostrou que: (i) buracos negros não são negros, eles irradiam todas as espécies de partículas com um espectro térmico a uma temperatura $T_H = \kappa/2\pi$ e (ii) a quantidade

$$S_{BN} = \frac{1}{4} A_{BN}, \tag{1.3}$$

onde A_{BN} é a área do horizonte de eventos do buraco negro, deve ser interpretada como a *entropia* do buraco negro. Desde então, ficou claro que as leis mecânicas dos buracos negros [7]:

- 1. Para um buraco negro estacionário, gravidade superficial κ é constante;
- 2. Se M é a massa do buraco negro, J e Q seu momento angular e carga, respectivamente, então

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A_{BN} + \Omega \delta J + \Phi \delta Q,$$

onde Φ é o potencial eletrostático, κ é a gravidade superficial do horizonte, Ω sua velocidade angular e A_{BN} sua área;

3. $\delta A_{BN} \geq 0$,

são efetivamente as leis da termodinâmica aplicadas a buracos negros [8]. Tal interpretação é justificada ao se analisar a validade da chamada *segunda lei generalizada* que afirma que, em sistemas que contém matéria ordinária e um buraco negro, a entropia total,

$$S \equiv S_{BN} + S_{mat},\tag{1.4}$$

nunca decresce (veja por exemplo [8, 9] e suas referências).

Entretanto, os itens (i) e (ii) levantam diversas questões que vem intrigando a comunidade científica desde então. O item (i) está diretamente ligado ao chamado paradoxo da perda de informação em buracos negros [1]. Considere, por simplicidade, que o estado final do colapso seja um buraco negro neutro esfericamente simétrico com massa M. Ao levar em conta a retro-ação do campo quântico no espaço-tempo, o fluxo de energia que provém do buraco negro fará com que este perca massa. Como $T_H = 1/8\pi M$, ao perder massa o buraco negro se tornará mais quente, e com isso, emitirá partículas cada vez mais energéticas, o que o fará perder massa mais rapidamente. Esse processo poderá levar, eventualmente, à evaporação total do buraco negro. Entretanto, isso levaria o estado puro que descreve o sistema antes do colapso em um estado misto térmico. Com isso, informação contida no estado inicial seria perdida. A Figura 1.1 mostra um possível diagrama de Penrose [3] para o processo de evaporação. Como os seus estágios finais exigem o conhecimento da física na escala de Planck (ainda desconhecida), o processo de evaporação total do buraco negro, levando consigo parte da informação contida no estado inicial, é apenas uma das possibilidades. Outras possibilidades comumente propostas são: (1) a radiação Hawking não seria exatamente térmica e carregaria, ao final do processo de evaporação, toda a informação contida inicialmente e (2) o buraco negro não evaporaria completamente; haveria um remanescente (com escala de Planck) do buraco negro que teria estados internos suficientes para estarem correlacionados com a radiação emitida. O estado total então permaneceria puro apesar do estado fora do remanescente ser altamente misto. Entretanto, as alternativas (1) e (2) apresentam algumas dificuldades. E



Figura 1.1: Diagrama espaço-temporal do processo de colapso de uma estrela gerando um buraco negro que, por sua vez, evapora após um tempo finito (como medido por observadores estáticos no infinito).

difícil compatibilizar (1) com a descrição semi-clássica desse processo (que é válida por um longo período da evaporação se considerarmos um buraco negro inicial grande o suficiente para que efeitos quânticos sejam desprezíveis) [1]. Quanto a (2), como o buraco negro inicial pode ser arbitrariamente grande, o remanescente teria que conter um número arbitrariamente alto de estados internos para poderem estar correlacionados com a radiação emitida e com isso, garantir que a informação não seja perdida. Porém, o buraco negro remanescente terá dimensões de Planck (ou seja, sua área é $A_{rem} \sim 1$ em unidades naturais). Com isso, a formula (1.3) da entropia sugere que $S_{rem} \sim 1$, onde S_{rem} é a entropia remanescente do buraco negro. Isso sugere que esse estado final teria ~ 1 estado interno. Já com relação a (ii), i.e., que S_{BN} deve ser interpretada como a entropia física do buraco negro, sabemos de mecânica estatística que a entropia conta o número de micro-estados acessíveis ao sistema. Entretanto, o estado final (que não varia mais com o tempo) de um buraco negro não guarda nenhuma memória dos detalhes da estrela que o formou bem como de seu colapso. Ele depende apenas de três parâmetros: sua massa M, carga Q e momento angular J. Como consequência, a natureza dos micro-estados que levam à entropia S_{BN} se torna obscura.

Vemos então que qualquer tentativa de resolver as questões acima (entre outras) passa por um melhor entendimento da entropia, emaranhamento e processamento de informação em contextos relativísticos. A *teoria da informação quântica* oferece o arcabouço teórico necessário para o estudo do processamento e transmissão da informação bem como para o estudo do emaranhamento e sua dinâmica [10]. Entretanto, a teoria da informação quântica é aplicada, em geral, em contextos não relativísticos. Portanto se faz necessário estender a teoria da informação quântica para que ela leve em conta os efeitos da teoria da relatividade. Esse é o moto inspirador para essa tese de doutorado.

Recentemente, A. Peres, P. Scudo e D. Terno [11] estudaram o comportamento da entropia de von Neumann no espaço-tempo de Minkowski em diferentes referenciais inerciais. Usando como bit quântico os graus de liberdade de spin de uma partícula massiva de spin 1/2, eles mostraram que a entropia de von Neumann de spin *não é invariante de Lorentz* e que, em geral, não existe nenhuma lei de transformação que nos permita obter a matriz densidade de spin em um referencial inercial a partir da matriz densidade de spin em outro referencial. Isso mostra o quão não triviais são os efeitos relativísticos em informação quântica já no contexto da relatividade especial. Com isso, um entendimento profundo sobre entropia, emaranhamento, teletransporte, correlações, etc. em espaços-tempos curvos exige antes um estudo cuidadoso de seu comportamento em espaços planos. Isso por sua vez nos permite analisar a influência da relatividade em diversos contextos conhecidos em informação quântica, como por exemplo, nas desigualdades de Bell [12] e no teletransporte quântico [13]. A análise de tal influência torna-se especialmente relevante devido às novas tendências de testar a mecânica quântica e implementar protocolos de informação quântica em escalas globais usando satélites e estações terrestres [14, 15, 16].

Essa tese está organizada da seguinte maneira:

- No Capítulo 2, estudamos brevemente a *teoria da informação clássica*. Isso servirá para mostrar o que é uma teoria de informação bem como para introduzir conceitos que serão úteis durante todo o texto, como a entropia de Shannon e a informação mútua;
- No Capítulo 3, estudamos a teoria da informação quântica. Assim, poderemos mostrar suas diferenças com relação à teoria clássica bem como introduzir conceitos e efeitos que serão estudados depois no contexto relativístico, a saber, a entropia de von Neumann, informação mútua quântica, o limite de Holevo, o emaranhamento, as desigualdades de Bell, o teletransporte quântico e as correlações clássicas e quânticas presentes em sistemas quânticos;
- A partir do Capítulo 4, descreveremos a parte original da tese. Nesse capítulo, estudaremos as desigualdades de Bell com partículas de spin 1/2 em um contexto relativístico [17]. Em seguida, motivados pelas tendências atuais de se implementar protocolos de informação quântica em escalas globais, estudaremos como o movimento dos detetores influencia as medições em estados de fótons emaranhados [18]. Por fim, usaremos o limite de Holevo para analisarmos brevemente sistemas quânticos de comunicação quando as partes que se comunicam estão em movimento relativo [19];
- No Capítulo 5, estudaremos vários aspectos da teoria da informação quântica no contexto da teoria quântica de campos. Começaremos estudando o emaranhamento e o teletransporte, via o efeito Unruh, quando um dos qubits do par emaranhado

1 Introdução

acelera uniformemente por um tempo próprio finito Δ [20]. Em seguida, ainda nesse contexto, analisaremos o comportamento das correlações clássicas e quânticas [21];

- No Capítulo 6, mostraremos como os resultados do Capítulo 5 podem ser usados para fazer previsões sobre um par de qubits emaranhados (um em queda livre e o outro estático) nas vizinhanças do horizonte de eventos de um buraco negro. Isso nos permitirá começar a entender o comportamento do emaranhamento, das correlações, etc, em espaços-tempos curvos;
- O Capítulo 7 é reservado para conclusões e comentários finais.

Capítulo 2

Teoria da Informação Clássica

A teoria da informação tem por objetivo quantificar o conceito de informação bem como estudar seu armazenamento e transmissão. Mais precisamente, ela cria um modelo matemático para os chamados *sistemas de comunicação* [22, 23, 24], descritos esquematicamente na Figura 2.1. A teoria da informação clássica estuda sistemas de comunicação que podem ser descritos de acordo com as leis da física clássica. Fisicamente, cada um de seus blocos pode ser visto como:

- Fonte: Uma fonte gera a mensagem a ser transmitida. Esta pode ser uma sequência de letras, uma função do tempo f(t) como a que descreve variações de pressão em um telefone, três funções $f_i(x, y, t), i \in \{1, 2, 3\}$, associadas às cores vermelha, verde e azul, como em TV a cores, etc;
- Codificador: É qualquer aparelho que age na mensagem produzindo um sinal conveniente para a transmissão pelo canal. Um exemplo de codificador é o usado em telefonia que transforma diferenças de pressão em sinais elétricos;
- *Canal:* É a maneira ou o meio em que a mensagem, devidamente codificada, é transmitida. Pode ser, por exemplo, um par de cabos coaxiais;
- *Decodificador:* Realiza a operação inversa do codificador, recuperando (da melhor maneira possível) a mensagem original.

Como foi dito acima, a teoria da informação cria um modelo matemático para os sistemas de comunicação, ou seja, modela matematicamente cada um dos blocos da Figura 2.1 e a relação entre eles. A base matemática para a teoria da informação foi posta por Claude Shannon em seu trabalho seminal [25]. Os conceitos centrais nesse modelo matemático são o de entropia de Shannon (que é um limite inferior para o número de bits necessários para caracterizar uma mensagem) e o de informação mútua (que mede a correlação entre duas variáveis aleatórias). Tais conceitos serão estudados nas seções seguintes. Contudo, mesmo sem ainda dispor de suas definições, podemos fazer uma breve incursão sobre o modelo matemático dos sistemas de comunicação [22, 23, 24]:



Figura 2.1: Sistema de comunicação.

- Fonte: Uma fonte é geralmente definida por uma sequência de variáveis aleatórias $X_k, k \in \mathbb{N}$ que assumiremos como sendo independentes e identicamente distribuídas. O conjunto dos valores que as variáveis aleatórias assumem é chamado alfabeto. Uma variável aleatória discreta e finita é uma função X que toma os valores x_i com probabilidades $p_i \equiv P_X(x_i)$, onde P_X é a distribuição de probabilidades associada com a variável aleatória X^* e $i \in \{1, ..., N\}$. Os elementos X_k da sequência são independentes e identicamente distribuídos se todos assumem os mesmos valores e a probabilidade de ocorrência de $(z_1, ..., z_n), z_k \in \{x_1, ..., x_N\}$ é $\prod_{k=1}^n P_X(z_k), k \in \{1, ..., N\}$. Um exemplo simples de variável aleatória é a que descreve os possíveis resultados para o lançamento de uma moeda honesta. Quando o resultado é cara, X toma o valor $x_1 = 0$ e quando é coroa, X toma o valor $x_2 = 1$. A probabilidade de se obter cara ou coroa em um lançamento é $P_X(x_1) = 1/2$ ou $P_X(x_2) = 1/2$, respectivamente;
- Codificador: O processo de codificação tem por objetivo retirar todas as redundâncias da mensagem original para transmitir a informação da maneira mais econômica possível e depois (no caso de haver ruído na transmissão) adicionar redundâncias de maneira controlada para minimizar o efeito do ruído na transmissão da mensagem. Tais ações são realizadas associando a cada elemento (ou bloco de elementos) do alfabeto um caractere (chamado palavra código) de um certo conjunto fixo chamado alfabeto de códigos. Suponha, por exemplo, que desejamos transmitir o resultado do lançamento de uma moeda honesta. Esta, é descrita pela variável aleatória X definida no item anterior. Uma possível codificação, é usar as palavras código 000

^{*}Se (S, Ω, P) é um espaço de probabilidade e (M, Σ) é um espaço de medida, uma variável aleatória é uma função mensurável $X : S \to M$. Tomaremos sempre $M = \mathbb{R}$ e Σ como sendo a σ -álgebra de Borel. O *espaço de observação* é dado por $(\mathcal{K}, \mathfrak{E}_X, \hat{P}_X)$ onde $\mathcal{K} = X(S)$, \mathfrak{E}_X é a σ -álgebra induzida em \mathcal{K} por Σ e $\hat{P}_X = P \circ X^{-1}$. Uma variável aleatória é discreta quando \mathcal{K} é discreto (no caso que estamos interessados \mathcal{K} é finito e portanto $\mathcal{K} = \{x_1, ..., x_N\}$). Nesse caso definimos a função $P_X(x) \equiv \hat{P}_X(\{x\}), x \in \mathcal{K}$. Para mais detalhes ver [26, 27].



Figura 2.2: Sistema de comunicação sem ruído.

e 111 para codificar 0 e 1, respectivamente. Tal processo pode ser utilizado para diminuir a probabilidade de erro na transmissão quando há ruído;

- Canal: Um canal discreto é caracterizado pelas probabilidades $p(\mathbf{d}|\mathbf{c})$ de que ocorram as palavras código $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_n)$ na saída do canal dado que $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_n)$ entraram no canal. Ou seja, caracterizamos um canal pela sua probabilidade de erro na transmissão dos caracteres. Um exemplo são os canais sem memória, ou seja, $p(\mathbf{d}|\mathbf{c}) = \prod_i p(d_i|c_i);$
- Decodificador: Realiza a operação inversa do codificador, associando a cada palavra código na saída do canal, um elemento (ou bloco de elementos) do alfabeto. No exemplo da codificação e transmissão do resultado do lançamento de uma moeda honesta descrito anteriormente, decodificamos os resultados na saída do canal escolhendo o número que mais ocorre na sequência. Ou seja, se 000 (que está associado a 0) foi enviado pelo canal ruidoso e em sua saída obtemos 001, decodificamos a mensagem associando à 001 o caractere 0.

O exemplo mais simples de um sistema de comunicação é o de uma fonte binária de informação (cada dígito gerado assume o valor zero ou um, como por exemplo no lançamento de uma moeda) cuja sequência gerada é transmitida por um canal sem ruído, ou seja, p(0|0) = p(1|1) = 1 e p(1|0) = p(0|1) = 0, Figura 2.2. Vamos assumir que a probabilidade da fonte gerar zero é a mesma de gerar um e cada um dos dígitos é gerado independentemente a uma taxa constante. Um exemplo simples de um sistema de comunicação com ruído consiste em uma fonte binária de informação como a descrita acima cujas sequências geradas serão então transmitidas por um canal ruidoso caracterizado por p(0|0) = p(1|1) = 1 - p e p(1|0) = p(0|1) = p, ou seja, temos uma probabilidade p de transmitir um caractere com erro. Esse sistema de comunicação está descrito esquematicamente na Figura 2.3.

Durante as próximas seções iremos estudar os conceitos de entropia e informação mútua e analisar em detalhe um sistema de comunicação que consiste em uma fonte que gera variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e um canal sem ruído (que será suficiente não só para mostrar como modelar um sistema de comunicação como para o estudo de informação quântica incluindo os efeitos relativísticos, que é o objetivo dessa tese). Nesse caso, o processo de codificação consiste basicamente na *compressão* da mensagem (usar o menor número de bits possível para transmiti-la). Vamos mostrar que o menor número de bits (por caractere da mensagem) possível para transmissão da mensagem, com erro arbitrariamente baixo na descompressão, é dado pela *entropia de Shannon*.

2.1 Medidas de Informação

O que é informação? Vamos tomar uma definição operacional e definir informação como uma mensagem que ainda é desconhecida ao receptor. Mas como quantificar a informação contida em uma mensagem? Vamos tomar um exemplo de um dado honesto (todos os resultados são igualmente prováveis). Antes do lançamento temos uma certa *incerteza* sobre qual será seu resultado; sabemos apenas que os valores da variável aleatória X, que representa os possíveis resultados do lançamento, está no intervalo $1 \le X \le 6$. Agora, suponha que após o lançamento somos informados apenas que o valor obtido está no intervalo $1 \le X \le 3$. Então, a *incerteza* que temos sobre o valor da variável aleatória é claramente menor do que antes de recebermos a mensagem. O quanto essa *incerteza* diminuiu é devido à informação recebida sobre o lançamento, i.e., a informação ganha pela mensagem recebida. Vemos então que uma boa definição de medida de informação está diretamente relacionada com uma boa medida de incerteza, ou seja, definindo qual é a incerteza associada a uma variável aleatória X antes de sua medição, podemos definir a informação ganha após a medida como sendo o valor de sua incerteza.

Quais as propriedades que uma medida de incerteza deve satisfazer? Isso pode variar de acordo com o gosto pessoal de cada um. Porém, vamos mostrar que com algumas propriedades razoáveis podemos definir univocamente uma medida de incerteza associada a uma variável aleatória X. É claro que a incerteza relacionada com a variável aleatória X não pode depender dos valores que ela toma mas somente da sua distribuição de probabilidades. Para ver isso, tome uma moeda honesta. A variável X que descreve a moeda toma os valores $x_1 = 0$ ou $x_2 = 1$ com probabilidades $p_1 = p_2 = 1/2$. Se simplesmente renomearmos os resultados do lançamento, por exemplo, trocando 0 por 100 e 1 por 200, não mudamos a incerteza que temos sobre o resultado. Agora, se trocarmos a moeda



Figura 2.3: Sistema de comunicação com ruído.

honesta por uma não honesta diminuímos a incerteza sobre o resultado, afinal nesse caso um dos resultados é mais provável do que o outro. Portanto, voltando ao caso geral, vemos que a medida de incerteza deve ser uma função apenas das N probabilidades associadas com os valores da variável aleatória X, i.e., se H é a medida de incerteza então $H: K \subset [0,1]^N \to \mathbb{R}^+, K = \{(p_1, ..., p_N) \in [0,1]^N | \sum_{i=1}^N p_i = 1\}.$

É natural impor que essa função seja contínua, ou seja, pequenas variações nas probabilidades geram pequenas variações na incerteza. Com isso, impomos que, para N = 2, $H(p, 1 - p), p \in [0, 1]$, seja contínua (veremos em seguida que isso, junto com os outros axiomas da função de incerteza, implica que esta é uma função contínua das N variáveis no caso geral). Considere agora a incerteza em dois experimentos distintos. Os resultados do primeiro experimento são descritos por uma variável aleatória X que toma os valores $x_1, ..., x_N$ com probabilidades $P_X(x_1) = P_X(x_2) = ... = P_X(x_N) = 1/N$. Já os resultados do segundo experimento são descritos por uma variável aleatória Y que toma os valores $y_1, ..., y_M, M > N$, com probabilidades $P_Y(y_1) = P_Y(y_2) = ... = P_Y(y_M) = 1/M$. É de se esperar que a incerteza associada a Y seja maior do que a incerteza associada a X. Por exemplo, a incerteza sobre o resultado de escolher uma pessoa aleatoriamente em uma sala com 5 pessoas é muito menor do que a incerteza sobre o resultado de escolher uma pessoa aleatoriamente na cidade de São Paulo. Temos então a condição

$$H\underbrace{\left(\frac{1}{N},...,\frac{1}{N}\right)}_{N} < H\underbrace{\left(\frac{1}{M},...,\frac{1}{M}\right)}_{M}.$$
(2.1)

Considere agora um experimento com duas variáveis aleatórias independentes X e Z que tomam os valores $x_1, ..., x_N \in z_1, ..., z_K$, respectivamente, com probabilidades $P_X(x_1) = P_X(x_2) = ... = P_X(x_N) = 1/N \in P_Z(z_1) = P_Z(z_2) = ... = P_Z(z_K) = 1/K$. Suponha porém que somos informados apenas sobre o valor de X. Então, estaremos reduzindo nossa incerteza inicial pela incerteza relacionada com X (já que ganhamos apenas informação sobre X). Como as duas variáveis são independentes, conhecer o valor de X não nos traz nenhuma informação sobre o valor de Z. Com isso, a incerteza resultante (incerteza total menos a incerteza de X) não é nada mais do que a incerteza relacionada a Z. Chegamos então na condição

$$H\underbrace{\left(\frac{1}{NK},...,\frac{1}{NK}\right)}_{NK} - H\underbrace{\left(\frac{1}{N},...,\frac{1}{N}\right)}_{N} = H\underbrace{\left(\frac{1}{K},...,\frac{1}{K}\right)}_{K}.$$
(2.2)

A última propriedade que iremos impor é um pouco mais sutil. Para entendê-la, vamos analisar dois experimentos equivalentes para a variável aleatória X (portanto eles têm a mesma incerteza). O primeiro consiste em simplesmente observar o resultado do lançamento de X. Logo, a probabilidade do resultado do experimento ser x_i é p_i e a incerteza de qual será o resultado é $H(p_1, ..., p_N)$. O segundo experimento consiste em dividir o conjunto $\mathcal{K} = \{x_1, ..., x_N\}$ nos subconjuntos $A = \{x_1, ..., x_r\}$ e $B = \{x_{r+1}, ..., x_N\}$, de tal maneira que a probabilidade de se obter A ou B é $\sum_{i=1}^r p_i$ ou $\sum_{i=r+1}^N p_i$ respectivamente. Em seguida, se o conjunto A foi obtido, o experimento é construído de tal maneira que a probabilidade de se obter um elemento x_i de A é $p_i / \sum_{j=1}^r p_j, i \in \{1, ..., r\}$. Analogamente, se o conjunto B foi escolhido, a probabilidade de se obter x_i de B é, por construção, $p_i / \sum_{j=r+1}^N p_j, i \in \{r+1, ..., N\}$. Com isso, a probabilidade de obtermos, por exemplo, o resultado x_1 nesse experimento composto é $p_1 \equiv P_X(x_1) = P(A$ ser escolhido) $P(x_1 | A$ foi escolhido). A incerteza relacionada com esse experimento é

$$H(p_{1},...,p_{N}) = H\left(\sum_{i=1}^{r} p_{i},\sum_{i=r+1}^{N} p_{i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{r} p_{i}\right)H\left(p_{1}/\sum_{i=1}^{r} p_{i},...,p_{r}/\sum_{i=1}^{r} p_{i}\right) + \left(\sum_{i=r+1}^{N} p_{i}\right)H\left(p_{r+1}/\sum_{i=r+1}^{N} p_{i},...,p_{N}/\sum_{i=r+1}^{N} p_{i}\right), \qquad (2.3)$$

i.e., a incerteza de se escolher A ou B somada à probabilidade de A ser escolhido vezes a incerteza de se escolher um elemento em A somada à probabilidade de B ser escolhido vezes a incerteza de se escolher um elemento em B. Temos então a definição:

Definição 2.1.1. Seja X uma variável aleatória que assume os valores $x_1, ..., x_N$ com probabilidades $p_1, ..., p_N$. Uma função $H : K \subset [0, 1]^N \to \mathbb{R}^+$ é uma medida da incerteza sobre X se

- 1. H(p, 1-p) é uma função contínua;
- 2. Se para todo $i \in \{1, ..., N\}$, $p_i = 1/N$ então, $f(N) \equiv H(1/N, ..., 1/N)$ é uma função estritamente crescente, i.e., para todo $M, N \in \mathbb{N}$ tal que M > N, f(M) > f(N);
- 3. f(MN) = f(M) + f(N) para todo $M, N \in \mathbb{N}$;
- 4. $H(p_1, ..., p_N) = H(\sum_{i=1}^r p_i, \sum_{i=r+1}^N p_i) + (\sum_{i=1}^r p_i)H(p_1/\sum_{i=1}^r p_i, ..., p_r/\sum_{i=1}^r p_i) + (\sum_{i=r+1}^N p_i)H(p_{r+1}/\sum_{i=r+1}^N p_i, ..., p_N/\sum_{i=r+1}^N p_i).$

Surgem agora duas perguntas naturais. Será que existe uma função de incerteza que satisfaz 1-4 da definição 2.1.1? E se existir será que é única? A resposta para ambas as questões é afirmativa e está descrita no seguinte teorema [22]:

Teorema 2.1.2. Só existe uma função (a menos das constantes a e C definidas abaixo) $H: [0,1]^N \to \mathbb{R}^+$ que satisfaz as propriedades 1-4 da Defininição 2.1.1 e ela é dada por

$$H(p_1, ..., p_N) = -C \sum_{i=1}^N p_i \log_a p_i,$$

com $a > 1, C > 0 e \sum_{i} p_i = 1.$



Figura 2.4: Entropia de Shannon de uma moeda parcial em função da probabilidade de ocorrer 0

A função H é chamada entropia de Shannon. Muitas vezes denotaremos a incerteza $H(p_1, ..., p_N)$ relacionada com a variável aleatória X por H(X) ou ainda por $H(P_X)$ onde $P_X(x_i) = p_i, i \in \{1, ..., N\}$. Daqui por diante tomaremos a = 2 e C = 1. Com essas escolhas, a unidade de H é chamada de *bit*. Convém notar que escolhemos a = 2 e C = 1 para que haja um bit de incerteza associado ao lançamento de uma moeda honesta. Vemos na Figura 2.4 que usar uma moeda não honesta tende a diminuir a incerteza (como já era esperado pelas propriedades que impomos à H). Se agora tivermos duas variáveis aleatórias $X \in Y$, que tomam os valores $x_1, ..., x_N \in y_1, ..., y_M$, respectivamente, com distribuição de probabilidade conjunta $P_{X,Y}$, a *entropia conjunta* de X, Y é definida por

$$H(X,Y) = -\sum_{i,j} P_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 P_{X,Y}(x_i, y_j),$$
(2.4)

onde $i \in j$ são somadas até $N \in M$, respectivamente.

Vamos agora mostrar algumas propriedades importantes das funções de incerteza $H(X) \in H(X, Y)$ bem como a relação entre elas. Antes entretanto, será útil definirmos a chamada *entropia relativa*:

$$D(X||Q) = \sum_{i} P_X(x_i) \log_2 \frac{P_X(x_i)}{P_Q(x_i)}.$$
(2.5)

Aqui, X e Q são duas variáveis aleatórias que tomam os mesmos valores $x_1, ..., x_N$ porém com distribuição de probabilidades P_X e P_Q , respectivamente. Na expressão acima, convencionamos que, para p > 0, $0 \log_2 \frac{0}{p} \equiv 0$ e $p \log_2 \frac{p}{0} \equiv \infty$. A entropia relativa satisfaz

$$D(X||Q) \ge 0,\tag{2.6}$$

chamada desigualdade de Klein. Para ver isso, note que como $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2} \le \frac{x-1}{\ln 2}$, com a igualdade se e somente se x = 1, temos

$$D(X||Q) = -\sum_{i} P_X(x_i) \log_2 \frac{P_Q(x_i)}{P_X(x_i)}$$

$$\geq -\frac{1}{\ln 2} \sum_{i} P_X(x_i) \left(\frac{P_Q(x_i)}{P_X(x_i)} - 1\right)$$
(2.7)

e portanto

$$D(X||Q) \ge -\frac{(1-1)}{\ln 2} = 0, \tag{2.8}$$

com a igualdade se e somente se $P_X = P_Q$. Usando a desigualdade de Klein, podemos mostrar as seguintes propriedades:

1. $0 \le H(X) \le \log_2 N$, com a igualdade valendo somente quando $P_X(x_i) = 1/N$ para todo $i \in \{1, ..., N\}$;

Para ver isso, tome D(X||Q) com $P_Q(x_i) = 1/N$ para todo $i \in \{1, ..., N\}$, então

$$0 \leq D(X||Q) = \sum_{i} P_X(x_i) \log_2 \frac{P_X(x_i)}{P_Q(x_i)} = -H(X) + \sum_{i} p_i \log_2 N.$$
(2.9)

Logo,

$$H(X) \le \log_2 N.$$

Como $0 \le P_X(x_i) \le 1$ temos

$$H(X) = -\sum_{i} P_X(x_i) \log_2 P_X(x_i) = \sum_{i} P_X(x_i) \log_2 1/P_X(x_i) \ge 0$$
(2.10)

e portanto $0 \le H(X) \le \log_2 N;$

2. $H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$, com a igualdade se e só se X e Y são independentes; Como $P_X(x_i) = \sum_j P_{X,Y}(x_i, y_j)$ e $P_Y(y_j) = \sum_i P_{X,Y}(x_i, y_j)$ então

$$H(X) + H(Y) = -\sum_{i,j} P_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 P_X(x_i) - \sum_{i,j} P_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 P_Y(y_j)$$

= $-\sum_{i,j} P_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 P_X(x_i) P_Y(y_j).$ (2.11)

Já que $\sum_{i,j} P_X(x_i) P_Y(y_j) = 1$, podemos usar a equação (2.6) e a função de probabilidade $P_Q(x_i, y_j) \equiv P_X(x_i) P_Y(y_j)$ para escrever

$$-\sum_{i,j} P_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 P_Q(x_i, y_j) \ge -\sum_{i,j} P_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 P_{X,Y}(x_i, y_j),$$
(2.12)

onde a igualdade é valida somente para $P_{X,Y} = P_Q \equiv P_X P_Y$. Logo temos

$$H(X,Y) \le H(X) + H(Y),$$
 (2.13)

com a igualdade se e somente se as variáveis aleatórias $X \in Y$ são independentes.

A propriedade 1 acima afirma que a entropia de Shannon (incerteza) tem um limite superior e este só é atingido quando os eventos são equiprováveis. Já a propriedade 2 afirma que a incerteza total, a menos que X e Y sejam independentes, é sempre menor do que a soma das incertezas das partes. Isso sugere a presença de correlações entre X e Y, voltaremos a esse tema quando falarmos de informação mútua. Um conceito importante, principalmente para a definição de informação mútua, é o de *entropia condicional* (ou *incerteza condicional*) de uma variável aleatória X dada a variável aleatória Y. Ela é definida como

$$H(X|Y) = -\sum_{i,j} P_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 P_X(x_i|y_j), \qquad (2.14)$$

onde $p(x_i|y_j)$ é a probabilidade condicional, i.e., a probabilidade de se medir x_i dado que já obtemos o valor y_j . Queremos interpretar H(X|Y) como incerteza que resta sobre o valor X depois que Y foi medida, tal interpretação é garantida escrevendo a incerteza total, H(X,Y), como

$$H(X,Y) = -\sum_{i,j} P_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 P_{X,Y}(x_i, y_j) = -\sum_{i,j} P_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 P_X(x_i|y_j) P_Y(y_j)$$

$$= -\sum_{i,j} P_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 P_X(x_i|y_j) - \sum_j P_Y(y_j) \log_2 P_Y(y_j)$$

$$= H(X|Y) + H(Y), \qquad (2.15)$$

e portanto

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y).$$
 (2.16)

Como

$$H(X|Y) + H(Y) = H(X,Y) \le H(X) + H(Y),$$

onde usamos a equação (2.13), temos

$$H(X|Y) \le H(X), \tag{2.17}$$

com a igualdade se e somente se $X \in Y$ são independentes.

Tendo em mãos o conceito de entropia condicional podemos definir o importante conceito de *informação mútua*.

Definição 2.1.3. Sejam $X \in Y$ duas variáveis aleatórias. Então, a informação mútua entre $X \in Y$ é

$$I(X:Y) = H(X) - H(X|Y).$$

Ou seja, I(X : Y) mede a informação ganha sobre X medindo Y (já que ela é a diferença entre a incerteza inicial de X pela incerteza que resta em X medindo Y), isso sugere que I(X : Y) é uma medida das correlações entre X e Y (veja Figura 2.5). Como H(X,Y) = H(Y,X) (já que a entropia conjunta entre duas variáveis aleatórias depende apenas de sua distribuição conjunta de probabilidades),

$$I(X:Y) = I(Y:X).$$
 (2.18)



Figura 2.5: Informação Mútua.

Pela equação (2.15), H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y), então

$$I(X:Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \ge 0,$$
(2.19)

onde usamos a equação (2.13) para estabelecer a desigualdade acima. Então, vemos pela equação (2.19) que a informação mútua entre duas variáveis aleatórias é sempre positiva, a não ser no caso de variáveis aleatórias independentes (que não tem correlações) quando ela é zero. Além disso, vemos que a soma da incerteza das partes isoladamente é sempre maior ou igual à incerteza do todo (o que novamente sugere a presença de correlações). Tais características da informação mútua, junto com sua simetria, equação (2.18), justificam sua utilização como uma medida das correlações entre X e Y. A informação mútua (e sua versão quântica que veremos mais a frente) é um conceito de vital importância em teoria da informação e por isso aparecerá com frequência durante todo o texto. Em particular, poderemos utilizá-la para separar a parte clássica da parte quântica das correlações totais entre dois sistemas quânticos. Isso será possível, por exemplo, utilizando o fato (que provaremos no próximo capítulo) que se I_Q e \mathcal{J} são as versões quânticas de H(X) +H(Y) - H(X,Y) e H(X) - H(X|Y), respectivamente, então em geral $I_Q \neq \mathcal{J}$. Isso se deve ao caráter que medições têm em mecânica quântica.

2.2 Sistemas de Comunicação sem Ruídos

Vamos agora estudar um sistema de comunicação que consiste em uma fonte que gera variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, um codificador, um canal sem ruídos e um decodificador. Como não há ruído, não existe o problema da correção de eventuais erros de transmissão. Portanto, a maneira mais eficiente de transmitir a mensagem é comprimi-la da melhor maneira possível, i.e., enviar a mensagem utilizando o menor número de bits. Antes de estudar o processo de compressão, vamos definir de uma maneira matematicamente precisa o que é uma fonte e uma codificação.

Definição 2.2.1. Uma fonte é uma sequência X_i , $i \in \mathbb{N}$, de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), i.e., todos os X_i tomam os mesmos valores

 $x_1, ..., x_N$ com probabilidades $P_{X_i} = P_{X_j} \equiv P_X$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ e se $P_{X^n}(s_1, ..., s_n)$, $s_i \in \mathcal{K} \equiv \{x_1, ..., x_n\}$, é a probabilidade de ocorrência da sequência $(s_1, ..., s_n)$ temos que $P_{X^n}(s_1, ..., s_n) = \prod_{i=1}^n P_X(s_i)$, $i \in \{1, ..., n\}$. Em particular, vemos que $H(X_i) =$ $H(X_j) \equiv H(X)$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ e $H(X_1, ..., X_n) = nH(X)$, onde $H(X_1, ..., X_n)$ é a incerteza conjunta de $X_1, ..., X_n$, (veja a equação (2.4) para o caso n = 2).

Vemos que a cada uso, a fonte gera um caractere x_k , $k \in \{1, ..., N\}$, com probabilidade $P_X(x_k)$. Após n usos, a fonte gera a sequência $s_1...s_n$ com probabilidade $\prod_{i=1}^n P_X(s_i)$, onde $s_i \in \{x_1, ..., x_N\}$ e $i \in \{1, ..., n\}$. Um exemplo extremamente simples de fonte consiste no lançamento de uma moeda honesta a cada uso da fonte. Sendo assim, em cada utilização ela gera 0 (correspondente a cara) ou 1 (correspondente a coroa) com probabilidades $P_X(0) = P_X(1) = 1/2$.

Definição 2.2.2. Uma codificação em bloco (M, n) consiste nas aplicações $C^n : \mathcal{K}^n \to \mathfrak{A}^k \in D^n : \mathfrak{A}^k \to \mathcal{K}^n$ chamadas função de codificação e decodificação, respectivamente. Aqui $\mathcal{K} \equiv \{x_1, ..., x_N\}, \mathfrak{A} = \{a_1, ..., a_K\}, k \in \mathbb{N} e M = |C^n(\mathcal{K}^n)|, onde |A| indica o número de elementos de um conjunto <math>A e A^n \equiv \underbrace{A \times ... \times A}_{n \text{ vezes}}$. Vemos que $C^n(s_1, ..., s_n)$ corresponde a uma sequência de k elementos de um alfabeto de códigos \mathfrak{A} , chamada de palavra código. Portanto, M indica o número de palavras código sendo utilizadas no processo de codificação.

Um exemplo simples de codificação é C(cara) = 00 e C(coroa) = 11, onde $\mathfrak{A} = \{0, 1\}$ é o alfabeto binário. Daqui por diante iremos sempre usar o alfabeto binário, i.e., K = 2. Suponha que temos uma mensagem $x \equiv (s_1, ..., s_n), s_i \in \mathcal{K}$ e $i \in \{1, ..., n\}$, que é codificada e, após a transmissão, decodificada. A mensagem final é então $x' = D^n(C^n(x))$. Dizemos que a mensagem x' foi decodificada com erro se $x' \neq x$. Se $\{x \in \mathcal{K}^n | D^n(C^n(x)) \neq x\}$ é o conjunto das mensagens que são decodificadas com erro, $Pr\{x \in \mathcal{K}^n | D^n(C^n(x)) \neq x\}^{\dagger}$ indica a soma de todas as probabilidades $P_{X^n}(z), z \in \{x \in \mathcal{K}^n | D^n(C^n(x)) \neq x\}$. Com isso, definimos a probabilidade de erro, P_e^n , na decodificação como

$$P_e^n \equiv Pr\{x \in \mathcal{K}^n | D^n(C^n(x)) \neq x\}.$$

Podemos agora mostrar que a entropia de Shannon corresponde à maior taxa de compressão que podemos ter nas mensagens transmitidas (elementos de \mathcal{K}^n). Suponha que $k = \lfloor nR \rfloor$ onde $\lfloor \alpha \rfloor$ indica o maior inteiro menor que $\alpha \in \mathbb{R}$. O número R é chamado taxa de compressão da codificação $(2^{\lfloor nR \rfloor}, n)$, i.e., número de bits de codificação por caractere da mensagem. Então temos o seguinte teorema [22, 23, 24]:

Teorema 2.2.3 (Teorema da codificação de Shannon). Seja X_i , $i \in \mathbb{N}$, uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. Se R > H(X) existe uma sequência de códigos $(2^{\lfloor nR \rfloor}, n)$

[†]Seja Ω um conjunto finito e discreto (como, por exemplo, o conjunto dos valores que uma variável aleatória finita e discreta X toma) e $P(\omega)$ a probabilidade de cada $\omega \in \Omega$ ocorrer, onde $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. Então, se $E \subset \Omega$, $PrE \equiv \sum_{\omega \in E} P(\omega)$.

 $\begin{array}{l} com \; P_e^n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \; Reciprocamente, \; para \; R < H(X) \; qualquer \; sequência \; de \; códigos \; (2^{\lfloor nR \rfloor}, n) \\ satisfaz \; P_e^n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 1. \end{array}$

O teorema acima mostra que a entropia de Shannon nos dá o número mínimo de bits por caractere da mensagem necessários para transmitir a informação, já que qualquer tentativa de compressão maior gera erros arbitrariamente grandes na decodificação.

Capítulo 3

Teoria da Informação Quântica

Para transmitir informação precisamos codificá-la em um sistema físico. Por exemplo, podemos usar uma onda eletromagnética para transmitir uma mensagem. No capítulo anterior, estudamos o processo de codificação, transmissão e decodificação de informação quando o sistema físico pode ser descrito pelas leis da física clássica. Mas e se codificarmos e transmitirmos informação usando sistemas quânticos (cujo sistema fundamental, o de dois níveis, é chamado de sistema de qubits)? Quais modificações precisam ser introduzidas em relação à teoria clássica? Será que podemos transmiti-la de maneira mais eficiente e segura? Colocado em outros termos, queremos estudar o sistema de comunicação descrito na Figura 3.1. Ele consiste em: (i) uma fonte clássica, i.e., uma sequência X_i de variáveis aleatórias i.i.d.; (ii) um *codificador* que codifica cada valor x_i da variável aleatória em um estado quântico ρ_i com probabilidade $P_X(x_i)$ e portanto, prepara o estado $\rho = \sum_{i} P_X(x_i)\rho_i$. Além de codificar a mensagem em estados quânticos, o codificador realiza as operações de compressão e de adição de redundância (se há ruídos na transmissão) o que leva o estado ρ no estado $\tilde{\rho}$; (iii) um canal quântico que consiste em um operador \mathcal{E} que leva o estado codificado $\tilde{\rho}$ no estado $\mathcal{E}(\tilde{\rho})$; (iv) um decodificador que tenta recuperar, da melhor maneira possível, o estado original ρ no destino. Neste ponto, serão feitas *medições* para recuperar a mensagem original. Os resultados das medições são descritos por uma variável aleatória Y. Como veremos, a teoria da informação quântica [10, 28, 29, 30, 31] difere da teoria clássica em diversos aspectos; os principais talvez sejam:

- Ao contrário do que acontece em física clássica, medições em geral alteram o estado do sistema e não é possível distinguir entre estados quânticos não ortogonais;
- 2. Estados quânticos arbitrários não podem ser clonados [32];
- 3. Estados quânticos podem ser superpostos, i.e., se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são estados possíveis do sistema e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ então, $\alpha_1 |\psi_1\rangle + \alpha_2 |\psi_2\rangle$ também é um estado possível do sistema.



Figura 3.1: Sistema de comunicação quando a mensagem é codificada em estados quânticos.

Lembremos (veja a Definição 2.1.3), que I(X : Y) = H(X) - H(X|Y). Portanto, quando H(X|Y) = 0 (medir Y determina X) concluímos que I(X : Y) = H(X). Com isso, vemos que a indistinguibilidade de estados quânticos citada no item 1 acima mostra que, ao contrário do que acontece (ao menos idealmente) no caso clássico sem ruído, a correlação I(X:Y) entre a informação enviada, descrita pela variável aleatória X e os valores medidos, descritos pela variável aleatória Y, em geral não é H(X). Mostraremos mais adiante que a informação acessível no destino, definida como o máximo da informação mútua entre X e Y com relação às medições realizadas, é limitada superiormente por um número $\chi(\rho)$ chamado *limite de Holevo* [33]. Em particular, tal limite implica que o máximo de informação que extraímos de um qubit é um bit. O item 2 mostra que a ação de copiar, uma das ações mais comuns que realizamos com informação clássica (fazemos isso todo dia ao salvar um documento em nosso computador), não é possível para estados quânticos. Tal impossibilidade de cópia implica que não podemos usar praticamente nenhum protocolo clássico de correção de erros em informação quântica [10, 28]. Então, os itens 1 e 2 parecem sugerir que não há vantagem em usar estados quânticos para enviar informação. Porém, é na transmissão (codificação e segurança) e processamento (computação quântica) que a teoria da informação quântica mostra suas vantagens. Justamente por não ser possível copiar estados quânticos arbitrários e que ao realizar uma medição alteramos o estado do sistema, é que podemos transmitir informação com segurança (a isso dá-se o nome de criptografia quântica). Além disso, podemos aproveitar a não ortogonalidade dos estados em que codificamos a informação para realizar uma compressão na mensagem maior do que seria possível classicamente (tal procedimento recebe o nome de *codificação quântica*). Por fim, a superposição (aplicada a sistemas multipartites, o que leva ao importante conceito de estados emaranhados), item 3, é uma das principais características que torna a computação quântica muito mais eficiente do que a computação clássica.

A transmissão de informação clássica usando estados quânticos é somente uma das muitas possibilidades oferecidas em informação quântica. Como veremos, esta última é muito mais rica do que sua versão clássica. Podemos recuperar todos os resultados da teoria da informação clássica em um certo limite da teoria da informação quântica (basta usarmos estados quânticos ortogonais para codificar a informação). Esta última porém,



Figura 3.2: Sistema quântico de comunicação. Aqui, ao contrário da Figura 3.1, temos uma fonte que gera estados quânticos que, em princípio, não precisam estar relacionados com nenhuma informação clássica.

apresenta muito mais recursos estáticos ("tipos de informação") e dinâmicos (processamento de informação). Por exemplo, podemos transmitir informação quântica, ou seja, podemos transmitir estados quânticos arbitrários para o destino. Tal transmissão se dá através de um canal quântico (possivelmente ruidoso). Temos então a situação descrita na Figura 3.2. Muitas das novas possibilidades que surgem na teoria da informação quântica têm sua origem em um dos aspectos mais fascinantes da mecânica quântica, o emaranhamento. Estados puros emaranhados permitem mostrar, através das desigualdades de Bell [12], que nenhuma teoria realista e local pode reproduzir todos os resultados da mecânica quântica. Duas aplicações do emaranhamento em informação quântica são o teletransporte quântico [13], onde usando estados emaranhados juntamente com um canal clássico podemos transmitir de maneira perfeita um estado quântico, e a chamada codificação superdensa [34], que é a transmissão de dois bits clássicos enviando um qubit (de um par emaranhado) ao destino. O emaranhamento é um recurso tão importante em informação quântica que um dos seus principais ramos de pesquisa visa quantificá-lo e estudar a sua dinâmica.

Na Seção 3.1, estudaremos e estenderemos o conceito de medição e de evolução em mecânica quântica. Na Seção 3.2 estudaremos medidas de informação quântica, com ênfase na entropia de von Neumann, que exercerá o papel análogo ao da entropia de Shannon. Na Seção 3.3 analisaremos o limite de Holevo e o teorema de Schumacher, versão quântica do teorema da compressão de Shannon. A Seção 3.4 é reservada para o estudo do emaranhamento e suas consequências. Na Seção 3.5, mostraremos como quantificar o que é clássico e o que é quântico nas correlações de sistemas quânticos correlacionados. Veremos que há correlações quânticas que não provém de sistemas emaranhados.

3.1 Mecânica Quântica, POVM e Mapeamentos Quânticos

Nessa seção iremos enunciar os postulados usuais da mecânica quântica e discutir o conceito de medição e evolução estendendo-os ao caso em que o sistema é *aberto*. Tais extensões serão muito úteis na teoria da informação quântica usual e mais à frente quando a relatividade for levada em conta.

3.1.1 Os Postulados da Mecânica Quântica

Veremos a seguir que a mecânica quântica muda radicalmente nossas noções clássicas de estados, observáveis e medições. Antes de descrever os postulados, convém observar que não visamos aqui dar uma introdução sobre mecânica quântica mas somente estabelecer notação e discutir alguns pontos que nos serão úteis. Para mais detalhes sobre a estrutura matemática da mecânica quântica bem como suas aplicações ver por exemplo [10, 35, 36, 37]. Existem diversas versões dos postulados da mecânica quântica [28, 35, 37]. Os postulados que usaremos, nos restringindo a espaços vetoriais de dimensão finita (que serão suficientes para os nossos propósitos), são:

- 1. Os estados de um sistema quântico são descritos por vetores em um espaço de Hilbert \mathcal{H} , ou mais precisamente, classes de equivalência de vetores em \mathcal{H} onde $|\psi'\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ são equivalentes se e somente se existe $\alpha \in \mathbb{C}$, não nulo, tal que $|\psi'\rangle = \alpha |\psi\rangle$. Daqui por diante, vamos sempre considerar um representante *normalizado* de cada uma das classes de equivalência;
- 2. Observáveis físicos são descritos por operadores auto-adjuntos em \mathcal{H} ;
- 3. Uma medição é descrita pelo conjunto $\{P_{\lambda_1}, ..., P_{\lambda_n}\}$ de projetores ortogonais, i.e., $P_{\lambda_i}^{\dagger} = P_{\lambda_i}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $P_{\lambda_i} P_{\lambda_j} = \delta_{ij} P_{\lambda_i}$, para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$, que satisfaz $\sum_i P_{\lambda_i} = I$, onde I é o operador identidade e $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ representam os possíveis resultados do experimento. Se o sistema está no estado $|\psi\rangle$, a probabilidade de, ao se fazer uma medição, obter o valor λ_i é

$$p(\lambda_i) = \langle \psi | P_{\lambda_i} | \psi \rangle$$

e o estado do sistema após a medição é

$$|\psi_i\rangle = \frac{P_{\lambda_i}|\psi\rangle}{\sqrt{p(\lambda_i)}};$$

4. A evolução temporal de um sistema quântico inicialmente no estado $|\psi\rangle$ é dada por $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi\rangle$, onde U(t) é uma família de operadores unitários fortemente contínuos, i.e., $\lim_{t\to t_0} U(t)|\psi\rangle = U(t_0)|\psi\rangle$ para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ [38, 39].

O primeiro postulado mostra como descrever um estado puro em mecânica quântica, i.e., vetores em um espaço de Hilbert. O segundo postulado mostra como descrever os observáveis dentro desse formalismo. Ao contrário de funções reais, estes são definidos como operadores auto-adjuntos (e portanto com espectro real). O terceiro postulado é talvez o que mais diferencia a estrutura de uma teoria clássica da de uma teoria quântica. Nesta última, os resultados de medições são intrinsecamente probabilísticos e o ato da medição (mesmo idealmente) em geral altera o estado do sistema. O último postulado descreve a parte determinística da mecânica quântica, i.e., a evolução temporal dado o estado inicial. A imposição que U(t) é fortemente contínuo implica, pelo teorema de Stone [38, 39], que existe um operador auto-adjunto H, chamado Hamiltoniana do sistema, tal que $U(t) = e^{-itH}$. Muitas vezes durante o texto estaremos interessados em intervalos de tempo discretos, ou seja, temos um estado inicial $|\psi\rangle$ que evolui para um estado final $|\psi'\rangle$. Então temos um operador unitário U tal que $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$.

Vamos analisar mais a fundo a relação entre os observáveis físicos e seus possíveis valores em uma medição. Primeiro, tomemos uma medição como no postulado 3. Vemos facilmente que $\sum_i \lambda_i P_{\lambda_i}$ é um operador auto-adjunto e portanto define um observável físico. Tome agora o operador auto-adjunto A que descreve um certo observável. Então, pelo teorema espectral [40, 41, 42], A pode ser escrito de maneira única como $A = \sum_i \lambda_i P_{\lambda_i}$, com λ_i sendo os seus auto-valores distintos e P_{λ_i} uma família de projetores ortogonais que satisfazem $\sum_i P_{\lambda_i} = I$. Então, pelo postulado 3, ao medir um observável físico os únicos resultados possíveis são seus auto-valores, cada um com probabilidade $p(\lambda_i) = \langle \psi | P_{\lambda_i} | \psi \rangle$ de ocorrer. Vemos então que, a não ser que o estado do sistema seja um auto-vetor do observável sendo medido, não faz sentido dizer que um sistema quântico em um certo estado *possui* um dado valor para seus observáveis antes da medição, em contraste com o que acontece em física clássica. Citando o físico Asher Peres, *unperformed experiments have no results* [43]. Voltaremos a esse tema quando discutirmos as desigualdades de Bell.

3.1.2 Medições Generalizadas e POVM

Vamos analisar com mais cuidado o conceito de medição. Podemos definir uma medição como uma intervenção externa feita em um sistema quântico através do qual informação. na forma de um número real, é obtida no aparelho de medição. O postulado 3 mostra que as previsões sobre resultados de experimentos são probabilísticas e mostra, dentro do formalismo matemático da teoria, como calcular essas probabilidades e qual o efeito da medição no estado do sistema. Lá impusemos que uma medição é caracterizada por projetores ortogonais que, como discutimos no final da seção anterior, estão diretamente associados com a medição de observáveis físicos (operadores auto-adjuntos). Entretanto, podemos generalizar esse conceito de medição tirando a imposição de que os operadores que caracterizam a medição sejam projetores ortogonais. Veremos mais à frente um exemplo em que esse conceito mais geral de medição, que muitas vezes não está diretamente associada com medições de quantidades físicas (energia, momento, etc.), é mais útil que o de medidas projetivas. Antes de definir o conceito de medição generalizada, será instrutivo estudar o seguinte exemplo. Considere elétrons, cujos estados de spin são descritos por vetores no espaço de Hilbert \mathcal{H} de dimensão 2, e um aparato de medida (Stern-Gerlach) que consiste em uma região com um campo magnético inomogêneo na direção z (aproximadamente) e uma tela medidora que registra a posição do elétron. Devido à interação do spin com o campo magnético, os elétrons serão defletidos ao passarem pelo campo magnético. Quando o estado de spin for $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, os elétrons são defletidos para z > 0

ou z < 0, respectivamente. Aqui, $\sigma_3|0\rangle = |0\rangle$ e $\sigma_3|1\rangle = -|1\rangle$ são auto-vetores da matriz de Pauli σ_3 . Vamos fazer uma descrição simplificada e considerar que se o elétron é registrado em z > 0, o estado do aparato de medida é $|e_0\rangle \in \mathcal{H}_{aux}$ e se ele é registrado em z < 0, o estado do aparato de medida é $|e_1\rangle \in \mathcal{H}_{aux}$, onde \mathcal{H}_{aux} é o espaço de Hilbert, de dimensão 2, que descreve os estados do aparato e $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j \in \{0, 1\}$. No caso ideal, ao interagir com o aparato de medida, o sistema total (spin do elétron + aparato) evolui através da transformação unitária U dada por

$$U|0\rangle \otimes |0_{aux}\rangle = |0\rangle \otimes |e_0\rangle \tag{3.1}$$

$$U|1\rangle \otimes |0_{aux}\rangle = |1\rangle \otimes |e_1\rangle \tag{3.2}$$

onde $|0_{aux}\rangle \in \mathcal{H}_{aux}$ é o estado inicial do aparato de medida. No caso não ideal, há uma probabilidade do elétron ser registrado em z < 0 mesmo que o seu spin esteja no estado $|0\rangle$ e analogamente para z > 0 e $|1\rangle$. Então, a transformação unitária U que descreve a interação do elétron com o aparato é dada por

$$U|0\rangle \otimes |0_{aux}\rangle = |0\rangle \otimes \left(\sqrt{1-p_0}|e_0\rangle + \sqrt{p_0}|e_1\rangle\right)$$
(3.3)

$$U|1\rangle \otimes |0_{aux}\rangle = |1\rangle \otimes \left(\sqrt{p_1}|e_0\rangle + \sqrt{1-p_1}|e_1\rangle\right), \qquad (3.4)$$

onde $p_0, p_1 \in [0, 1]$. Vemos então que se os estados iniciais do spin do elétron e do aparato são $|\varphi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \in |0_{aux}\rangle$, respectivamente, o estado após a interação é

$$U|\varphi\rangle \otimes |0_{aux}\rangle = M_0|\varphi\rangle \otimes |e_0\rangle + M_1|\varphi\rangle \otimes |e_1\rangle, \qquad (3.5)$$

onde $M_0|\varphi\rangle \equiv \sqrt{1-p_0}c_0|0\rangle + \sqrt{p_1}c_1|1\rangle$ e $M_1|\varphi\rangle \equiv \sqrt{p_0}c_0|0\rangle + \sqrt{1-p_1}c_1|1\rangle$. Note que podemos escrever M_0 e M_1 como

$$M_0 = \sqrt{1 - p_0} |0\rangle \langle 0| + \sqrt{p_1} |1\rangle \langle 1|$$
(3.6)

$$M_1 = \sqrt{p_0} |0\rangle \langle 0| + \sqrt{1 - p_1} |1\rangle \langle 1|$$
(3.7)

e portanto vemos que

$$M_0^{\dagger} M_0 + M_1^{\dagger} M_1 = I. ag{3.8}$$

A medição realizada pelo aparato de medida consiste na observação de onde o elétron foi registrado (z > 0 ou z < 0), ou seja, é a medição do observável $\mathcal{O} = \sum_{j=0}^{1} a_j |e_j\rangle \langle e_j|$, onde $a_j \in \mathbb{R}$, no aparato de medida. Então, pelo Postulado 3 da mecânica quântica e usando a equação (3.5), a probabilidade de se medir o valor $m \in \{0, 1\}$ após a interação é dada por

$$p(m) = \langle 0_{aux} | \otimes \langle \varphi | U^{\dagger} P_m U | \varphi \rangle \otimes | 0_{aux} \rangle$$
$$= \langle \varphi | M_m^{\dagger} M_m | \varphi \rangle$$
(3.9)

onde $P_m \equiv I \otimes |e_m\rangle \langle e_m|$ e o estado final do sistema total é

$$\frac{P_m U|\varphi\rangle \otimes |0_{aux}\rangle}{\sqrt{p(m)}} = \frac{M_m|\varphi\rangle \otimes |e_m\rangle}{\sqrt{p(m)}}.$$
(3.10)

Com isso, o estado do spin do elétron após a medição de mé

$$|\varphi_m\rangle = \frac{M_m |\varphi\rangle}{\sqrt{p(m)}}.$$
(3.11)

Vemos então que se o aparato de medida for tratado como uma caixa preta que a cada medição nos dá um resultado $m \in \{0, 1\}$, a medição (em termos apenas do espaço de Hilbert \mathcal{H}) pode ser descrita por operadores M_m , que satisfazem a equação (3.8) e cuja probabilidade de medir o valor m e o estado final nesse caso são dados pelas equações (3.9) e (3.11), respectivamente.

O exemplo acima é útil para isolarmos as características principais desse conceito mais geral de medição. Em resumo temos: (i) uma medição generalizada é descrita por um aparelho de medida que, a cada medição, dá como resultado um certo valor m de um conjunto fixo \mathcal{M} de valores possíveis. Esses, podem ser associados com observáveis físicos relacionados com o aparelho de medida (no exemplo do Stern-Gerlach acima, posição do impacto na tela detetora); (ii) matematicamente, em termos apenas do sistema sendo estudado (no caso acima, o spin do elétron), a medição generalizada é descrita por operadores M_m , $m \in \mathcal{M}$, que satisfazem $\sum_m M_m^{\dagger} M_m = I$. Chegamos então à seguinte definição:

Definição 3.1.1. Uma medição generalizada é descrita por um conjunto $\{M_0, ..., M_{n-1}\}$ de operadores em um espaço de Hilbert \mathcal{H} que satisfazem $\sum_{i=0}^{n-1} M_i^{\dagger} M_i = I$. Se o sistema antes da medição está no estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, a probabilidade de obter o resultado $m \in \mathcal{M} \equiv$ $\{0, ..., n-1\}$ é

$$p(m) = \langle \psi | M_m^{\dagger} M_m | \psi \rangle \tag{3.12}$$

e o estado do sistema após a medição é

$$|\psi_m\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}.$$
(3.13)

Vemos que esse conceito de medição contém o caso de medidas projetivas. Nessas, como $P_{\lambda_i}P_{\lambda_j} = \delta_{ij}P_{\lambda_i}$, realizar duas medições idênticas consecutivamente gera o mesmo resultado. Entretanto, vemos que esse, em principio, não é o caso em uma medição generalizada. Essa repetibilidade das medições projetivas sugere que muitas das medições que realizamos em mecânica quântica não são projetivas [10, 31, 44, 45]. Na Definição 3.1.1 vemos que a distribuição de probabilidades dos possíveis resultados da medição depende apenas dos operadores $E_m \equiv M_m^{\dagger} M_m$, $m \in \mathcal{M}$ que satisfazem $\sum_m E_m = I$. Reciprocamente, se $\{E_m | m \in \mathcal{M}\}$ é um conjunto qualquer de operadores positivos^{*} que satisfazem

$$\sum_{m} E_m = I, \tag{3.14}$$

^{*}Lembramos que um operador A é positivo (denotado $A \ge 0$) se para todo vetor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \langle \psi|A|\psi\rangle \ge 0.$

os operadores $M_m \equiv \sqrt{E_m}$ satisfazem $E_m = M_m^{\dagger} M_m$ e $\sum_m M_m^{\dagger} M_m = I$ e com isso, definem uma medição generalizada. Um conjunto de operadores positivos que satisfazem a relação de completeza (3.14) é chamado de POVM (do inglês *positive operator valued measure*). Com isso, se estamos interessados apenas na distribuição de probabilidades dos possíveis resultados da medição (ou não temos como saber o estado pós medição, como por exemplo, após um elétron ser absorvido em um detetor Geiger), vamos descrever uma medição por um POVM (ao invés dos operadores $\{M_m | m \in \mathcal{M}\}$). Convém notar que os $\hat{M}_m \equiv U_m \sqrt{E_m}$, onde U_m é um operador unitário, geram o mesmo POVM que $M_m \equiv \sqrt{E_m}$. Isso mostra que existem infinitos aparelhos de medida que geram a distribuição de probabilidade $p(m) = \langle \psi | E_m | \psi \rangle$, porém, cada um gera um efeito diferente no estado do sistema sendo medido. No exemplo do Stern-Gerlach acima, podemos aplicar operações unitárias U_0 (para z > 0) e U_1 (para z < 0) antes dos elétrons atingirem a tela medidora. Isso mudará o estado final do elétron mas não sua probabilidade de ser detetado em z > 0ou z < 0.

Uma aplicação importante das medidas POVM é na distinguibilidade de estados quânticos. Os estados quânticos em $\mathcal{A} = \{|\psi_1\rangle, ..., |\psi_r\rangle\}$ são distinguíveis se existe alguma medição em que cada resultado nos permite prever, com probabilidade 1, qual estado foi medido. Em outras palavras, existe um POVM $\{E_0, ..., E_M\}, M \geq r$, tal que $\langle \psi_i | E_i | \psi_i \rangle = 1$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$. Quando os elementos de \mathcal{A} são ortogonais, basta construirmos um aparato de medida que meça, por exemplo, o observável $\sum_{j=1}^r a_j | \psi_j \rangle \langle \psi_j |, a_j \in \mathbb{R}$. Entretanto, quando os elementos de \mathcal{A} não são ortogonais, não haverá nenhuma medição (ou seja, POVM) capaz de distingui-los [10]. Mesmo assim, é possível construir um POVM que faça o seguinte [10]: quando o resultado da medição é $j \in \{1, ..., r\}$, então sabemos que o estado medido foi $|\psi_j\rangle \in \mathcal{A}$ a despeito do fato que, algumas vezes, o resultado da medição será 0 e não poderemos afirmar nada sobre qual estado foi medido.

Em muitos casos não sabemos exatamente qual o estado do sistema, sabemos apenas que seu estado é $|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i , $i \in \{1, ..., K\}$. Chamaremos $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ de uma mistura de estados puros. Tal mistura define um operador densidade ou matriz densidade

$$\rho = \sum_{i} p_{i} |\psi_{i}\rangle \langle \psi_{i}|.$$
(3.15)

(No Apêndice A, encontra-se a demonstração das diversas propriedades de matriz densidade que nos serão úteis.) Vemos que tr $\rho = 1$ e para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$,

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle = \sum_{i} p_{i} | \langle \psi_{i} | \psi \rangle |^{2} \ge 0,$$

o que mostra que ρ é um operador positivo. Reciprocamente, se ρ é um operador positivo que satisfaz tr $\rho = 1$, ele pode ser escrito como $\rho = \sum_i \xi_i |x_i\rangle \langle x_i|$, onde $0 \le \xi_i \le 1$, $\sum_i \xi_i = 1$ e os $|x_i\rangle$ formam uma base ortonormal de auto-vetores de ρ . Chegamos então à seguinte definição:

Definição 3.1.2. Uma matriz densidade é um operador $\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ em um espaço de Hilbert \mathcal{H} que satisfaz (i) tr $\rho = 1$ e (ii) $\rho \ge 0$.

Se o sistema (isolado) está no estado $\rho = \sum_{i=1}^{K} p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, pelo postulado 4 cada um dos estados da mistura evolui, através da transformação unitária U, como $U |\psi_i\rangle$, $i \in \{1, ..., K\}$. Então,

$$\rho \xrightarrow{U} \sum_{i=1}^{K} p_i U |\psi_i\rangle \langle \psi_i | U^{\dagger} = U \rho U^{\dagger}.$$
(3.16)

Realizando uma medição, descrita por um POVM $\{E_m | m \in \mathcal{M}\}$, cuja ação nos estados é dada por $M_m = U_m \sqrt{E_m}$, a probabilidade de se obter o resultado m quando o sistema está no estado ρ é

$$p(m) \equiv \operatorname{tr}(\rho E_m) \tag{3.17}$$

e o estado do sistema após a medição do valor m é dada por

$$\rho_m \equiv \frac{M_m \rho M_m^{\dagger}}{\text{tr}(\rho E_m)}.$$
(3.18)

Se realizarmos a medição mas, por alguma razão, ainda não sabemos seu resultado, o estado do sistema é descrito pela matriz densidade

$$\rho' = \sum_{m} p(m)\rho_m = \sum_{m} M_m \rho M_m^{\dagger}.$$
(3.19)

A equação (3.17) mostra que podemos prever todas as distribuições de probabilidades de possíveis experimentos sabendo a matriz densidade ρ que descreve o sistema. Portanto, vemos que ela descreve o estado físico de qualquer sistema quântico (o que generaliza o conceito de estado puro já que quando $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, a mistura se reduz ao estado puro $|\psi\rangle$).

Antes de terminar a seção, vamos definir alguns conjuntos que serão úteis daqui por diante. Se \mathcal{H} é um espaço de Hilbert de dimensão N, denotamos o espaço vetorial formado por todos os operadores lineares por $B(\mathcal{H})$. Munindo $B(\mathcal{H})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle_{HS} \equiv \operatorname{tr}(A^{\dagger}B)$, obtemos o espaço de Hilbert $(B(\mathcal{H}), \langle, \rangle_{HS})$ que tem dimensão N^2 . Vamos denotar o conjunto de todas as matrizes densidade por $\mathcal{C}(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H})$.

3.1.3 Mapeamentos Quânticos

Nessa seção, vamos desenvolver o conceito de mapeamento quântico. Ele permite descrever sistemas quânticos que em princípio estão abertos, i.e., sujeitos a influências externas. Suponha que temos um sistema físico S que passa a interagir com um ambiente externo S_E . O sistema total $S + S_E$ é fechado e portanto evolui unitariamente através do operador unitário $U : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E$, onde $\mathcal{H} \in \mathcal{H}_E$ são os espaços de Hilbert do sistema e do ambiente, respectivamente. Se o sistema S está inicialmente no estado ρ e o ambiente está no estado $\rho_{|0_E\rangle} = |0_E\rangle \langle 0_E|$, o sistema total, que inicialmente está no estado $\rho \otimes \rho_{|0_E\rangle}$, evolui para o estado $U\rho \otimes \rho_{|0_E\rangle} U^{\dagger}$. O estado final do sistema S é obtido tomando o traço nos graus de liberdade do ambiente, i.e., $\rho' = \operatorname{tr}_E(U\rho \otimes \rho_{|0_E\rangle} U^{\dagger})$. Se

$$\left\{ |e_k\rangle \in \mathcal{H}_E \middle| k \in \{1, ..., d = \dim \mathcal{H}_E\} \right\}$$

é uma base ortonormal de \mathcal{H}_E , temos

$$\rho' = \operatorname{tr}_{E}(U\rho \otimes \rho_{|0_{E}\rangle}U^{\dagger}) = \sum_{k} \langle e_{k} | U(\rho \otimes |0_{E}\rangle \langle 0_{E} |) U^{\dagger} | e_{k} \rangle$$
$$= \sum_{k} \langle e_{k} | U| 0_{E} \rangle \rho \langle 0_{E} | U^{\dagger} | e_{k} \rangle = \sum_{k} V_{k} \rho V_{k}^{\dagger}, \qquad (3.20)$$

onde $V_k \equiv \langle e_k | U | 0_E \rangle$ é um operador em \mathcal{H} . Como tr $\rho' = 1$, vemos que $\sum_k V_k^{\dagger} V_k = I$. Definimos assim o mapeamento $\mathcal{E} : \rho \to \rho' = \mathcal{E}(\rho)$ como

$$\mathcal{E}(\rho) = \operatorname{tr}_E(U\rho \otimes \rho_{|0_E\rangle}U^{\dagger}) = \sum_k V_k \rho V_k^{\dagger}, \qquad (3.21)$$

com $\sum_{k} V_{k}^{\dagger} V_{k} = I$. Reciprocamente, é possível mostrar [10] que todo mapeamento da forma $\mathcal{E}(\rho) \equiv \sum_{k} V_{k} \rho V_{k}^{\dagger}$, com $\sum_{k} V_{k}^{\dagger} V_{k} = I$, pode ser obtido através da interação do sistema físico com um ambiente (o que torna o sistema fechado e a evolução unitária) descartando os graus de liberdade do ambiente após a evolução.

Sendo assim, vamos definir um *mapeamento quântico* como um operador linear \mathcal{E} : $B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ que pode ser posto na forma

$$\mathcal{E}(A) \equiv \sum_{k} V_k A V_k^{\dagger}, \qquad (3.22)$$

com $\sum_{k} V_{k}^{\dagger} V_{k} = I$, onde $A \in B(\mathcal{H})$. Tais mapeamentos, além de serem lineares e preservarem o traço, são completamente positivos, i.e., para todo operador positivo $\Gamma \in B(\mathbb{C}^{k} \otimes \mathcal{H})$, o operador $[I^{k} \otimes \mathcal{E}](\Gamma)$ também é positivo para todo $k \in \mathbb{Z}^{+}$ [10, 29]. Em informação quântica, se assume em geral que a evolução de sistemas abertos se dá através de mapeamentos quânticos, equação (3.22). Com isso, vamos definir um canal quântico, i.e., o operador que associa o estado enviado ao receptor com o estado que este efetivamente recebe, como sendo um mapeamento quântico. Entretanto, como veremos adiante, quando a relatividade é levada em conta, os mapeamentos não serão completamente positivos e portanto não poderemos nos restringir apenas a mapeamentos quânticos.

3.2 Medidas de Informação Quântica

Vimos no Capítulo 2 que a entropia de Shannon desempenha um papel fundamental na teoria da informação clássica. Ela quantifica a incerteza relacionada com uma variável aleatória X antes da sua medição, ou equivalentemente, a informação ganha após esta. Queremos definir uma quantidade análoga em informação quântica, i.e., queremos uma

função que quantifique a incerteza associada a uma mistura $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, onde $i \in \{1, ..., K\}$ e $\sum_{i} p_i = 1$. Como vimos no final da Seção 3.1.2, tal mistura é completamente caracterizada por sua matriz densidade $\rho = \sum_i p_i |\psi\rangle \langle \psi_i|$. Porém, existem diversas misturas diferentes que geram a mesma matriz densidade e portanto todas elas são fisicamente equivalentes. Entretanto, dada uma matriz densidade ρ , ela pode ser decomposta univocamente, via o teorema espectral, como $\rho = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j P_{\lambda_j}$. Consequentemente, como mostrado também no Apêndice A, $\rho = \sum_{k=1}^{N} \xi_k |x_k\rangle \langle x_k|$, onde os $|x_i\rangle$ formam uma base ortonormal de autovetores de ρ , $\xi_i = \lambda_j$ para algum $j \in \{1, ..., d\}$ e N é a dimensão do espaço de Hilbert. Com isso, temos uma decomposição privilegiada de ρ em uma mistura $\{\xi_k, |x_k\rangle\}$ (a menos da liberdade de escolher os vetores $|x_k\rangle$ associados com um auto-valor degenerado, porém isso não altera a conclusão a seguir). Como os $|x_k\rangle$ são ortogonais, há uma medição que os distingue. Com isso, podemos saber com certeza qual estado da mistura foi medido e portanto, a incerteza associada à mistura antes da medição desaparece. Tal fato é análogo à medição de uma variável aleatória X que toma os valores $x_1, ..., x_N$ com probabilidades $\xi_1, ..., \xi_N$. Portanto, a incerteza associada à mistura $\{\xi, |x_i\rangle\}$ nada mais é que a entropia de Shannon da distribuição $\{\xi_i | i \in \{1, ..., N\}\}$, ou seja, $H(\xi_1, ..., \xi_N) = -\sum_k \xi_k \log_2 \xi_k$ que pode ser rescrita, apenas em termos da matriz densidade ρ , como

$$H(\xi_1, \dots, \xi_N) = -\operatorname{tr} \rho \log_2 \rho \equiv S(\rho). \tag{3.23}$$

Chegamos assim na seguinte definição:

Definição 3.2.1 (Entropia de von Neumann). Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $\rho \in C(\mathcal{H})$, então a entropia de von Neumann associada ao estado misto ρ é

$$S(\rho) = -\mathrm{tr}\rho \log_2 \rho.$$

A entropia de von Neumann mede a incerteza associada a um estado misto ρ e, como mostraremos ao longo desse capítulo, ela desempenhará um papel em informação quântica análogo ao da entropia de Shannon em informação clássica. Entretanto, cabe aqui uma ressalva. Enquanto a entropia de Shannon pode ser interpretada como a quantidade de informação ganha ao se medir o valor da variável aleatória X, a entropia de von Neumann não tem uma interpretação análoga. Isso se deve ao fato que não conseguimos identificar qual estado da mistura $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ foi medido (a menos, como visto acima, que os estados da mistura sejam ortogonais). Porém, como mostraremos na próxima seção, o limite de Holevo associado com a matriz densidade $\rho = \sum_i p_i |\psi\rangle \langle \psi_i|$ implica que a entropia de von Neumann $S(\rho)$ é um *limite superior* para a quantidade de informação que podemos extrair de ρ .

Outra quantidade importante, que será útil na demonstração de diversos resultados, é a versão quântica da entropia relativa [10, 28, 46, 47]:

$$S(\rho||\sigma) \equiv \operatorname{tr}[\rho(\log_2 \rho - \log_2 \sigma)], \qquad (3.24)$$

onde $\sigma \in \rho$ são matrizes densidade. Assim como sua versão clássica,

$$S(\rho||\sigma) \ge 0 \tag{3.25}$$

com a igualdade se e somente se $\rho = \sigma$ [10]. A desigualdade (3.25) é chamada de desigualdade de Klein quântica.

Com a desigualdade acima, podemos provar algumas propriedades importantes da entropia de von Neumann. Que $S(\rho) \ge 0$ para todo estado ρ em um espaço de Hilbert \mathcal{H} de dimensão N está claro da equação (3.23). Se $S(\rho) = 0$ então $-\sum_k \xi_k \log_2 \xi_k = 0$, o que é válido se e somente se $\xi_k \log_2 \xi_k = 0$ para todo k e isso é satisfeito se e somente se existe l tal que $\xi_l = 1$ (e portanto $\xi_{k\neq l} = 0$), logo $\rho = |x_l\rangle\langle x_l|$. Agora, tome $\sigma = I/N$, onde I é a identidade em \mathcal{H} . Pela desigualdade de Klein quântica, $S(\rho||\sigma) = -S(\rho) + \log_2 N \ge 0$, e portanto

$$S(\rho) \le \log_2 N,\tag{3.26}$$

com a igualdade valendo se e somente se $\rho = \sigma = I/N$. Agora tome $\omega^{AB} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B)$ e defina $\sigma^{AB} = \omega^A \otimes \omega^B$, onde $\omega^A \equiv \operatorname{tr}_B \omega^{AB}$ e $\omega^B \equiv \operatorname{tr}_A \omega^{AB}$. Então, usando a desigualdade de Klein quântica,

$$0 \leq S(\omega^{AB}||\sigma^{AB}) = -S(\omega^{AB}) - \operatorname{tr}(\omega^{AB}\log_{2}\sigma^{AB})$$

$$= -S(\omega^{AB}) - \operatorname{tr}[\omega^{AB}(\log_{2}\omega^{A}\otimes I^{B})] - \operatorname{tr}[\omega^{AB}(I^{A}\otimes\log_{2}\omega^{B})]$$

$$= -S(\omega^{AB}) - \operatorname{tr}(\omega^{A}\log_{2}\omega^{A}) - \operatorname{tr}(\omega^{B}\log_{2}\omega^{B}).$$
(3.27)

Logo,

$$S(\omega^{AB}) \le S(\omega^A) + S(\omega^B) \tag{3.28}$$

com a igualdade se e somente se $\omega^{AB} = \sigma^{AB} \equiv \omega^A \otimes \omega^B$. A unidade da entropia de von Neumann é o *qubit*. Da equação (3.26) acima, vemos que um sistema de dois níveis, N = 2, tem no máximo 1 *qubit* de informação quântica. Tais sistemas de dois níveis são chamados de sistemas de qubits e muitas vezes denominamos seus vetores (normalizados) também de qubits.

Outra propriedade importante e útil em informação quântica, e que será usada para definir uma medida de emaranhamento para estados puros, é a chamada *decomposição de Schimdt* (sua demonstração encontra-se no Apêndice B).

Teorema 3.2.2 (Decomposição de Schimdt). Sejam $\mathcal{H}^A \in \mathcal{H}^B$ espaços de Hilbert de dimensões $N_A \in N_B$, respectivamente. Se $|\psi^{AB}\rangle \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ então existe um número $k \leq \min\{N_A, N_B\}$, uma distribuição de probabilidades $\{\xi_i | i \in \{1, ..., k\}, \sum_i \xi_i = 1\}$ e conjuntos ortogonais $\{|x_i^A\rangle|i \in \{1, ..., k\}\} \subset \mathcal{H}^A \in \{|y_i^B\rangle|i \in \{1, ..., k\}\} \subset \mathcal{H}^B$ tal que

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\xi_i} |x_i^A\rangle \otimes |y_i^B\rangle.$$
Como consequência direta da decomposição de Schimdt temos, para todo estado puro $|\psi^{AB}\rangle \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$, que as entropias $S(\rho^A)$ e $S(\rho^B)$ são iguais, onde lembramos que $\rho^A = \operatorname{tr}_B |\psi^{AB}\rangle \langle \psi^{AB}|$ e $\rho^B = \operatorname{tr}_A |\psi^{AB}\rangle \langle \psi^{AB}|$.

Podemos agora, em analogia com informação clássica, definir o importante conceito de *informação mútua quântica*. Assim como sua contrapartida clássica, ela será uma medida das *correlações totais*, porém agora, entre dois sistemas quânticos.

Definição 3.2.3. Se $\mathcal{H}^A \in \mathcal{H}^B$ são dois espaços de Hilbert de dimensões $N_A \in N_B$ respectivamente, $\rho^{AB} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B)$, $\rho^A \equiv \operatorname{tr}_B \rho^{AB} \in \rho^B \equiv \operatorname{tr}_A \rho^{AB}$ então, a informação mútua quântica entre $A \in B$ é

$$I_Q(A:B) \equiv S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB}).$$

Como consequência direta da Definição 3.2.3 e da equação (3.28), vemos que

$$I_Q(A:B) = I_Q(B:A) \ge 0.$$
 (3.29)

Usando a Definição 3.2.3 e a equação (3.29), vemos que a soma das incertezas relacionadas aos sistemas $A \in B$ separadamente é sempre maior do que a incerteza relacionada com o sistema total com exceção do caso em que $A \in B$ não têm correlações, i.e., $\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$, em que elas são iguais. Esse fato, combinado com a simetria da informação mútua, sugere que $I_Q(A : B)$ dá uma medida das correlações entre os sistemas quânticos $A \in B$.

3.3 Sistemas Quânticos de Comunicação

Nessa seção iremos estudar sistemas quânticos de comunicação. Começaremos estudando a transmissão de comunicação clássica utilizando canais sem ruídos e mostraremos que existe um limite superior para a informação acessível no destino, o *limite de Holevo*. Em seguida, estudaremos o processo de compressão de uma mensagem a ser transmitida e mostraremos que a entropia de von Neumann é o limite inferior para a taxa de compressão por caractere da mensagem.

3.3.1 O Limite de Holevo

Suponha que temos uma fonte caracterizada por uma variável aleatória X, i.e., ela gera símbolos x_i com probabilidades p_i , $i \in \{1, ..., K\}$. Alice, a emissora, deseja enviar um caractere x_k para um receptor, Bob. Para fazer isso, ela codifica cada x_i em um estado $\rho_i \in C(\mathcal{H})$ de acordo com a distribuição $\{p_i\}$ e envia o estado misto resultante, $\rho = \sum_i p_i \rho_i$, para Bob por um canal quântico sem ruído, i.e., Bob recebe o mesmo estado enviado por Alice. Porém, para obter a informação clássica enviada, Bob terá que fazer uma medição (que é caracterizada por um POVM $\{E_i | i \in \{1, ..., n\}\}$) e através do seu resultado $y \in \{1, ..., n\}$ tentar inferir o caractere x_i enviado. A informação sobre X que Bob obtém ao fazer a medição é dada pela informação mútua I(X : Y), onde Y é uma variável aleatória que toma os valores em $\{1, ..., n\}$ com probabilidades $\{p_1 = tr(E_1\rho), ..., p_n = tr(E_n\rho)\}$. Se Alice tivesse usado um canal clássico sem ruídos, a informação que Bob obteria medindo a saída do canal seria H(X) já que classicamente os $\{x_1, ..., x_K\}$ são distinguíveis (por exemplo, se $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ e Alice manda um email contendo 0 ou 1 para Bob, ele consegue saber com certeza qual número recebeu). Entretanto, como em geral estados quânticos não são distinguíveis, temos que $I(X : Y) \leq H(X)$ e definimos a *informação* acessível a Bob como sendo

$$I_{Ac} \equiv \max_{\{E_i\}} I(X:Y). \tag{3.30}$$

O fato da informação acessível em geral não ser H(X), devido à indistinguibilidade dos estados ρ_i , está diretamente ligado a um dos principais resultados em mecânica quântica, a saber, o *teorema da não clonagem* (ver Apêndice B). Se fosse possível copiar estados arbitrários, Bob poderia fazer cópias dos estados enviados por Alice, $\rho_1 \in \rho_2$, obtendo os estados $\rho_1^{\otimes^n} \in \rho_2^{\otimes^n}$ que são ortogonais no limite de $n \to \infty$ e portanto distinguíveis. Logo, a informação acessível seria H(X).

Apesar de não existir nenhum procedimento geral para calcular a informação acessível, é possível mostrar que existe um limite superior para o seu valor, o chamado *limite de Holevo* [10, 28, 33, 48].

Teorema 3.3.1 (Limite de Holevo). Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert de dimensão $N \in X$ uma variável aleatória que toma os valores $x_1, ..., x_K$ com probabilidades $p_1, ..., p_K$. Se cada x_i é codificado em um estado $\rho_i \in C(\mathcal{H}), i \in \{1, ..., K\}$ e é enviado por um canal quântico sem ruído, a informação acessível no receptor é limitada por $\chi(\rho) \equiv S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i),$ i.e.,

$$I_{Ac} \leq \chi(\rho).$$

Como a entropia de von Neumann satisfaz [10]

$$\sum_{i} p_i S(\rho_i) \le S(\rho) \le H(p_1, ..., p_K) + \sum_{i} p_i S(\rho_i)$$

com a igualdade se e somente se os ρ_i são ortogonais, vemos que

$$\chi(\rho) \le H(X). \tag{3.31}$$

Concluímos assim que usando K qubits é possível transmitir no máximo H(X) bits de informação clássica. Convém observar que, apesar do Teorema 3.3.1 mostrar que $\chi(\rho)$ é um limite superior para a informação acessível, em muitos casos esta nunca atinge $\chi(\rho)$ [49]. Entretanto, como mostrado em [50, 51, 52], sempre é possível utilizar uma codificação em bloco conveniente de tal maneira que a informação é transmitida a uma taxa que se aproxima arbitrariamente de $\chi(\rho)$ com probabilidade de erro arbitrariamente baixa.

Uma propriedade importante da quantidade de Holevo χ é que ela nunca aumenta ao realizarmos um mapeamento quântico, i.e., $\chi(\mathcal{E}(\rho)) \leq \chi(\rho)$ [10, 29]. Veremos mais à frente que, quando Alice e Bob têm um movimento relativo, tal relação não será mais válida. Isso nos permitirá concluir que em situações relativísticas a evolução, por exemplo dos graus de liberdade spin do elétron, não será descrita por mapeamentos quânticos.

3.3.2 O Teorema de Schumacher

No Capítulo 2, mostramos que podemos comprimir a informação de uma fonte i.i.d. e portanto, utilizar menos bits para transmiti-la. O Teorema 2.2.3 mostra que a maior taxa de compressão possível (bits por caractere da mensagem) é dada pela entropia de Shannon. Nessa seção, vamos mostrar que existe um resultado análogo em informação quântica, o *Teorema de Schumacher*. Ele afirma que podemos comprimir informação quântica e com isso usar menos qubits para transmiti-la. O teorema mostra também que a maior taxa de compressão é dada pela entropia de von Neumann. Para isso, precisaremos das versões quânticas de fonte i.i.d. e codificação em bloco.

Definição 3.3.2. Uma fonte quântica i.i.d. é um par (\mathcal{H}, ρ) onde \mathcal{H} é um espaço de Hilbert de dimensão $N \ e \ \rho \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ tal que $\rho^n \equiv \underbrace{\rho \otimes \ldots \otimes \rho}_{n \ vezes}$ é o estado total resultante após

n usos da fonte.

Ou seja, a cada uso da fonte é gerado um estado quântico ρ . Os estados são gerados de maneira independente em cada utilização da fonte e com isso, o estado total após n usos é o estado produto ρ^n .

Definição 3.3.3. Seja (\mathcal{H}, ρ) uma fonte quântica i.i.d. e V um espaço de Hilbert de dimensão $2^{\lfloor nR \rfloor}$, $n \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{R}^+$ e $R < n \log_2 N$. Uma codificação em bloco $(2^{\lfloor nR \rfloor}, n)$ consiste no par $(\mathcal{C}^n, \mathcal{D}^n)$ de mapeamentos quânticos $\mathcal{C}^n : B(\mathcal{H}^n) \to B(V)$ e $\mathcal{D}^n : B(V) \to B(\mathcal{H}^n)$. Os mapeamentos \mathcal{C}^n e \mathcal{D}^n são chamados de compressão e descompressão, respectivamente. Aqui, $\mathcal{H}^n \equiv \underbrace{\mathcal{H} \otimes ... \otimes \mathcal{H}}_{n \ vezes}$ e lembramos que $B(\mathcal{H})$ é o conjunto de todos os operadores lineares em \mathcal{H} .

Vemos que o processo de compressão substitui o estado original ρ^n por um estado $\mathcal{C}^n(\rho^n)$ definido em um espaço de Hilbert de dimensão menor. O quanto o estado ρ^n é preservado ao realizarmos o processo de compressão/descompressão é medido pela fidelidade $F(\rho^n, \mathcal{D}^n \circ \mathcal{C}^n)$ [10]. Ela satisfaz $0 \leq F(\rho^n, \mathcal{D}^n \circ \mathcal{C}^n) \leq 1 \operatorname{com} F(\rho^n, \mathcal{D}^n \circ \mathcal{C}^n) = 1$ se o estado foi completamente preservado. Podemos agora enunciar o Teorema de Schumacher [10, 29, 53, 54]: **Teorema 3.3.4** (Teorema de Schumacher). Seja (\mathcal{H}, ρ) uma fonte quântica i.i.d. Se $R > S(\rho)$ existe um codificação em bloco $(2^{\lfloor nR \rfloor}, n)$ tal que $\lim_{n\to\infty} F(\rho^n, \mathcal{D}^n \circ \mathcal{C}^n) = 1$. Reciprocamente, para todo $R < S(\rho)$ qualquer codificação em bloco $(2^{\lfloor nR \rfloor}, n)$ satisfaz $\lim_{n\to\infty} F(\rho^n, \mathcal{D}^n \circ \mathcal{C}^n) = 0$.

Portanto, dada uma fonte quântica (\mathcal{H}, ρ) i.i.d. a maior compressão do estado ρ^n é dada por $nS(\rho)$. Com isso, podemos interpretar $nS(\rho)$ como a informação quântica contida em ρ^n . Como para uma mistura $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, temos que $S(\rho) \leq H(p_i, ..., p_K)$ com a igualdade se e somente se os $|\psi_i\rangle$ são ortogonais, podemos realizar uma maior compressão na a mensagem codificando-a em estados quânticos não ortogonais, i.e., codificamos cada x_i em um estado $|\psi_i\rangle$ (onde $\langle\psi_i|\psi_j\rangle \neq \delta_{ij}$) e consequentemente $(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) \rightarrow |\psi_{i_1}\rangle \otimes ... \otimes |\psi_{i_n}\rangle$, onde $i_1, ..., i_n \in \{1, ..., K\}$. Entretanto, como vimos na seção anterior, pagamos um preço por essa maior compressão, a informação acessível no destino também diminui. Apesar disso, tal procedimento de compressão é muito útil em diversas situações.

3.4 Emaranhamento

Desde a formalização da mecânica quântica na década de 20 do século XX, se notou que existem estados para sistemas compostos que não podem ser escritos como o produto de estados do seus subsistemas [56]. Tal emaranhamento quântico foi usado por Einstein, Podolski e Rosen (EPR) para tentar, supondo um certo conceito de localidade, definir valores que observáveis teriam antes de sua medição e com isso mostrar que a mecânica quântica seria incompleta [57]. Em 1964, John Bell tornou matematicamente precisa a idéia de realismo e localidade e mostrou que toda teoria realista e local deve satisfazer certas desigualdades para as correlações entre as medições de observáveis em regiões causalmente desconectadas. Bell mostrou também que a mecânica quântica viola estas desigualdades e que são justamente os estados emaranhados os responsáveis por isso [12]. Com o advento da teoria da informação quântica, os estados emaranhados tomaram papel central não apenas como ferramenta para um entendimento conceitual mais profundo da mecânica quântica mas também como um recurso físico que permite realização de tarefas que classicamente seriam intratáveis ou até impossíveis.

Nesta seção definiremos o que são estados emaranhados, discutiremos algumas de suas aplicações e além disso, indicaremos como quantificar o grau de emaranhamento em um sistema quântico composto.

3.4.1 Definição de Emaranhamento

Tome um sistema físico composto por n subsistemas, cada um deles descrito por um espaço de Hilbert \mathcal{H}^{A_i} de dimensão N_{A_i} , $i \in \{1, ..., n\}$. Um estado puro $|\psi\rangle \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}^{A_i}$ do sistema composto é dito *separável* quando ele pode ser escrito como $|\psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^n |\psi^{A_i}\rangle$,

 $|\psi^{A_i}\rangle \in \mathcal{H}^{A_i}$. Um estado puro é dito *emaranhado* quando não é separável. Tome por exemplo $\mathcal{H} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ com $N_A = N_B = 2$. Se $\{|0^X\rangle, |1^X\rangle\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}^X, X \in \{A, B\}$, os estados de Bell

$$|\psi^{\pm}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0^{A}\rangle \otimes |1^{B}\rangle \pm |1^{A}\rangle \otimes |0^{B}\rangle \right) |\phi^{\pm}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0^{A}\rangle \otimes |0^{B}\rangle \pm |1^{A}\rangle \otimes |1^{B}\rangle \right)$$
(3.32)

são emaranhados e formam uma base ortonormal de \mathcal{H} chamada de base de Bell.

Já vimos que em muitas situações de interesse, o estado do sistema é descrito por um estado misto. Temos assim a generalização:

Definição 3.4.1. Sejam \mathcal{H}^{A_i} , $i \in \{1, ..., n\}$, espaços de Hilbert de dimensão N_{A_i} . Um estado $\rho \in \mathcal{C}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{H}^{A_i}\right)$ é dito separável se ele pode ser posto na forma

$$\rho = \sum_{i=1}^{K} p_i \rho_{A_1}^i \otimes \dots \otimes \rho_{A_n}^i,$$

onde $K \in \mathbb{N}$, $p_i \in [0,1]$ e $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$. Um estado ρ é emaranhado se ele não é separável.

Da definição acima, vemos que um estado separável é uma mistura estatística de estados produto $\rho_{A_1}^i \otimes \ldots \otimes \rho_{A_n}^i$, que não contém correlações entre suas partes. Além disso, estados separáveis sempre podem ser criados usando operações locais e comunicação clássica (LOCC). Para ver isso, suponha que Alice, que age sobre o subsistema A_1 , escolha um $i \in \{1, \ldots, K\}$ segundo a distribuição $\{p_i\}$ e prepare o estado $\rho_{A_1}^i$. Em seguida, Alice comunica o resultado i para todos os outros experimentadores que prepararão então os respectivos estados $\rho_{A_j}^i$ descartando a informação sobre i em seguida. Obtemos assim o estado misto $\rho = \sum_{i=1}^{K} p_i \rho_{A_1}^i \otimes \ldots \otimes \rho_{A_n}^i$. Veremos a seguir que estados separáveis sempre satisfazem as desigualdades de Bell.

3.4.2 Aplicações do Emaranhamento

Desigualdades de Bell

A mecânica quântica muda radicalmente nossa intuição clássica sobre a natureza. Como vimos, não faz sentido perguntar qual o valor de um observável antes da sua medição mas somente qual a probabilidade de, ao se fazer uma medição, obter um dado resultado para o observável sendo medido. Essa nova visão da natureza foi rejeitada por muitos físicos, dentre eles, Albert Einstein. Surge então uma pergunta natural: será que a natureza não é descrita efetivamente por uma teoria que esteja de acordo com nossa intuição clássica, em cujo caso a mecânica quântica daria uma descrição tão diferente para a natureza por ser uma teoria incompleta? Para analisar essa questão, vamos supor que a natureza de fato seja descrita por uma teoria que satisfaça (i) *Realismo*: os observáveis *possuem* valores e a medição só os fará conhecidos ao experimentador e (ii) *Localidade*: medições

feitas em uma dada região espaço-temporal não influenciam medições feitas em regiões espaço-temporais causalmente desconectadas. Analisemos agora o seguinte experimento: um físico experimental, Charlie, prepara duas partículas e as envia para outros dois experimentadores, Alice e Bob, que farão a medição dos observáveis (A_1, A_2) e (B_1, B_2) , respectivamente, onde A_i e B_i podem tomar os valores ± 1 . Vamos supor que Charlie pode repetir o processo de preparação das partículas quantas vezes forem necessárias, que Alice e Bob façam cada medição em regiões espaço-temporais desconectadas causalmente e que, ao receberem suas partículas, escolham aleatoriamente qual observável irão medir $(A_1 \text{ ou } A_2 \text{ para Alice e } B_1 \text{ ou } B_2 \text{ para Bob})$. Usando (i) e (ii) vemos que antes de cada medição o observável

$$A_1B_1 + A_2B_1 + A_2B_2 - A_1B_2 = A_1(B_1 - B_2) + A_2(B_1 + B_2)$$

pode tomar os valores ± 2 . Seja $p(a_1, a_2, b_1, b_2)$ a probabilidade de que o sistema esteja em um estado onde $A_1 = a_1, A_2 = a_2, B_1 = b_1$ e $B_2 = b_2$. Tais probabilidades dependem da preparação que Charlie faz. Por exemplo, suponha que em cada experimento ele prepara uma partícula de momento angular nulo que decai em duas partículas. O momento angular específico de cada uma das partículas, em cada experimento, dependerá dos detalhes de cada um dos decaimentos. Quando o número de experimentos for grande o suficiente, $p(a_1, a_2, b_1, b_2) \approx N(a_1, a_2, b_1, b_2)/N$, onde $N(a_1, a_2, b_1, b_2)$ é o número de vezes que $(A_1, A_2, B_1, B_2) = (a_1, a_2, b_1, b_2) \in N$ é o número total de experimentos. Voltando ao caso geral, se $E(\mathcal{F}) \equiv \sum_f p(f)f$ é o valor esperado do observável \mathcal{F} , temos

$$|E(A_{1}B_{1}) + E(A_{2}B_{1}) + E(A_{2}B_{2}) - E(A_{1}B_{2})| = |E(A_{1}B_{1} + A_{2}B_{1} + A_{2}B_{2} - A_{1}B_{2})|$$

$$= \left| \sum_{a_{1},a_{2},b_{1},b_{2}} p(a_{1},a_{2},b_{1},b_{2})(a_{1}b_{1} + a_{2}b_{1} + a_{2}b_{2} - a_{1}b_{2}) \right|$$

$$\leq \sum_{a_{1},a_{2},b_{1},b_{2}} p(a_{1},a_{2},b_{1},b_{2})|a_{1}b_{1} + a_{2}b_{1} + a_{2}b_{2} - a_{1}b_{2}| = 2.$$
(3.33)

Chegamos assim na desigualdade de Bell de Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) [58]

$$|E(A_1B_1) + E(A_2B_1) + E(A_2B_2) - E(A_1B_2)| \le 2,$$
(3.34)

que qualquer teoria realista e local deve satisfazer.

Vamos agora calcular o valor do lado esquerdo da equação (3.34) previsto pela mecânica quântica. Para isso, consideremos o seguinte sistema. Suponha que Charlie prepare uma partícula de spin 0 que decaia em duas partículas de spin 1/2. Então, Alice e Bob irão medir o spin normalizado, i.e., dividido por $\hbar/2$, de suas partículas em certas direções \mathbf{a}_i e \mathbf{b}_i , respectivamente, onde $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{a}_i\| = \|\mathbf{b}_i\| = 1$ e $i \in \{1, 2\}$. Os observáveis em mecânica quântica são descritos por operadores auto-adjuntos. Sendo assim, temos $A_i \equiv \mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}^A, B_i \equiv \mathbf{b}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}^B$. Aqui, se $\mathbf{c} = (c^1, c^2, c^3) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma}^X \equiv \sum_{j=1}^3 c^j \sigma_j^X$ e σ_j^X são as matrizes de Pauli agindo no espaço de Hilbert da partícula X = A ou B correspondente a Alice ou Bob, respectivamente. Se denotarmos as correlações $E(A_iB_j)$ por $E(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)$, a equação (3.35) implica que, para qualquer estado que as partículas estejam,

$$|E(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) + E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) - E(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| \le 2.$$
(3.35)

Agora, se definirmos o operador $C \equiv A_1 \otimes (B_1 - B_2) + A_2 \otimes (B_1 + B_2)$, vemos que o lado esquerdo da equação (3.35) calculado via mecânica quântica é $|\operatorname{tr}(\rho C)|$, onde $\rho \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B)$ descreve o estado do sistema. Um cálculo direto mostra que $C^2 =$ $4I + [A_1, A_2] \otimes [B_1, B_2]$. Como todo operador linear F em um dado espaço de Hilbert de dimensão finita satisfaz $|\langle \psi | F | \psi \rangle| \leq ||F\psi|| \leq ||F||$, onde $||\psi|| = 1$ e $||F|| \equiv$ $\sup_{|\phi\rangle\neq 0} ||F\phi||/||\phi||$, temos que $|\operatorname{tr}(\rho C)| \leq ||C|| = \sqrt{||C^{\dagger}C||} = \sqrt{||C^2||}$. Portanto, concluímos que

$$|\operatorname{tr}(\rho C)| \leq \sqrt{4 + \|[A_1, A_2]\|\|[B_1, B_2]\|} \\ \leq \sqrt{4 + 4\|A_1\|\|A_2\|\|B_1\|\|B_2\|} \\ \leq \sqrt{8}$$
(3.36)

onde usamos que $||A_i|| \le 1$ e $||B_i|| \le 1$. Chegamos assim na desigualdade de Cirel'son [59]

$$\left|\operatorname{tr}\left(\rho C\right)\right| \le 2\sqrt{2}.\tag{3.37}$$

Para ver um exemplo de configuração em que a equação (3.37) toma o seu valor máximo, tome o estado singleto $|\psi^{-}\rangle \equiv 1/\sqrt{2} (|0^{A}\rangle \otimes |1^{B}\rangle - |1^{A}\rangle \otimes |0^{B}\rangle)$, onde $\{|0^{X}\rangle, |1^{X}\rangle\}, X \in \{A, B\}$ é uma base ortonormal de auto-vetores de σ_{3}^{X} . Vemos facilmente que

$$\langle \psi^{-} | (\mathbf{a}_{i} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{A}) \otimes (\mathbf{b}_{j} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{B}) | \psi^{-} \rangle = -\mathbf{a}_{i} \cdot \mathbf{b}_{j}$$

Então, escolhendo

$$\mathbf{a}_1 = (0, 0, 1), \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{b}_1 = -(0, 1/\sqrt{2}, \sqrt{2}), \mathbf{b}_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

temos

$$|E(\mathbf{a}_{1},\mathbf{b}_{1}) + E(\mathbf{a}_{2},\mathbf{b}_{1}) + E(\mathbf{a}_{2},\mathbf{b}_{2}) - E(\mathbf{a}_{1},\mathbf{b}_{2})| = |\mathbf{a}_{1} \cdot \mathbf{b}_{1} + \mathbf{a}_{2} \cdot \mathbf{b}_{1} + \mathbf{a}_{2} \cdot \mathbf{b}_{2} - \mathbf{a}_{1} \cdot \mathbf{b}_{2}|$$

= $2\sqrt{2}.$ (3.38)

Com isso, vemos que a mecânica quântica *viola* as desigualdades de Bell e que a violação máxima possível é dada por $|\operatorname{tr}(\rho C)| = 2\sqrt{2}$. Portanto, *nenhuma teoria realista e local* pode reproduzir todos os resultados da mecânica quântica. O veredicto final de como a natureza se comporta é, como sempre, dado pelo experimento. Diversas experiências para verificar a validade ou não das desigualdades de Bell foram realizadas [60, 61, 62, 63] e todas[†] mostram que não só a desigualdade (3.35) é violada como a violação ocorre como prevista pela mecânica quântica.

Mostramos que o estado emaranhado $|\psi^-\rangle$, com os $\mathbf{a}_i \in \mathbf{b}_j$ na configuração descrita acima, viola maximamente as desigualdades de Bell. Será que o emaranhamento do estado é uma condição necessária para a violação das desigualdades de Bell? A resposta é sim, já que os estados separáveis sempre satisfazem a equação (3.35). Para ver isso, tome um estado separável $\rho \equiv \sum_k p_k \rho_A^k \otimes \rho_B^k$. Então,

$$|\operatorname{tr}(\rho C)| \leq \sum_{k} p_{k} \left| \operatorname{tr}\left(\rho_{A}^{k}A_{1}\right) \operatorname{tr}\left(\rho_{B}^{k}B_{1}\right) + \operatorname{tr}\left(\rho_{A}^{k}A_{2}\right) \operatorname{tr}\left(\rho_{B}^{k}B_{1}\right) + \operatorname{tr}\left(\rho_{A}^{k}A_{2}\right) \operatorname{tr}\left(\rho_{B}^{k}B_{2}\right) - \operatorname{tr}\left(\rho_{A}^{k}A_{1}\right) \operatorname{tr}\left(\rho_{B}^{k}B_{2}\right) \right| \leq \sum_{k} 2p_{k} = 2, \qquad (3.39)$$

onde usamos que $\left| \operatorname{tr} \left(\rho_A^k A_i \right) \right| \le 1$ e $\left| \operatorname{tr} \left(\rho_B^k B_i \right) \right| \le 1, i \in \{1, 2\}$ e portanto

$$\left| \operatorname{tr} \left(\rho_A^k A_1 \right) \operatorname{tr} \left(\rho_B^k B_1 \right) + \operatorname{tr} \left(\rho_A^k A_2 \right) \operatorname{tr} \left(\rho_B^k B_1 \right) \right. \\ \left. + \operatorname{tr} \left(\rho_A^k A_2 \right) \operatorname{tr} \left(\rho_B^k B_2 \right) - \operatorname{tr} \left(\rho_A^k A_1 \right) \operatorname{tr} \left(\rho_B^k B_2 \right) \right| \le 2.$$

$$(3.40)$$

Portanto, o emaranhamento do estado ρ é condição necessária, porém não suficiente, para que haja violação das desigualdades de Bell.

Teletransporte Quântico

Em 1993, C. H. Bennett et al. [13] descobriram uma das mais fantásticas aplicações do emaranhamento, o *teletransporte quântico*. Eles mostraram que é possível, usando operações locais e comunicação clássica, transportar um estado quântico de uma região do espaço-tempo para outra desde que as duas partes compartilhem um dos estados de Bell, equação (3.32). Para ver como isso é possível, suponha que Alice e Bob compartilhem o estado de Bell $|\psi_{AB}^-\rangle$ e que Alice tenha uma partícula C em um certo estado, possivelmente desconhecido por ela, $|\varphi^C\rangle = \alpha |0^C\rangle + \beta |1^C\rangle$, onde $\{|0^C\rangle, |1^C\rangle\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H}^C e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Então, o estado do sistema total é

$$|\varphi^{C}\rangle \otimes |\psi_{AB}^{-}\rangle = \left(\alpha|0^{C}\rangle + \beta|1^{C}\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0^{A}\rangle \otimes |1^{B}\rangle - |1^{A}\rangle \otimes |0^{B}\rangle\right).$$
(3.41)

Usando a equação (3.32) podemos rescrever a equação (3.41) como

$$\begin{aligned} |\varphi^{C}\rangle \otimes |\psi_{AB}^{-}\rangle &= \frac{1}{2} \Big[|\phi_{CA}^{+}\rangle \otimes \left(\alpha |1^{B}\rangle - \beta |0^{B}\rangle\right) + |\phi_{CA}^{-}\rangle \otimes \left(\alpha |1^{B}\rangle + \beta |0^{B}\rangle\right) \\ &+ |\psi_{CA}^{+}\rangle \otimes \left(\beta |1^{B}\rangle - \alpha |0^{B}\rangle\right) - |\psi_{CA}^{-}\rangle \otimes \left(\alpha |0^{B}\rangle + \beta |1^{B}\rangle\right) \Big]. \quad (3.42)\end{aligned}$$

[†]Há críticas aos experimentos dizendo que, devido a certas limitações no aparato experimental, os resultados poderiam ser explicados por modelos locais. Entretanto, esses modelos locais que explicariam os resultados são extremamente artificiais e há um consenso na comunidade científica de que as desigualdades de Bell são violadas

Se Alice realiza a medição projetiva no sistema CA

$$\left\{P_{00} \equiv |\psi_{CA}^{-}\rangle\langle\psi_{CA}^{-}|, P_{01} \equiv |\psi_{CA}^{+}\rangle\langle\psi_{CA}^{+}|, P_{10} \equiv |\phi_{CA}^{-}\rangle\langle\phi_{CA}^{-}|, P_{11} \equiv |\phi_{CA}^{+}\rangle\langle\psi_{CA}^{+}|\right\}, \quad (3.43)$$

ela obterá cada um dos resultados $\mu \in \mathcal{M} \equiv \{00, 01, 10, 11\}$ com probabilidade 1/4 e portanto, o estado final em cada um dos casos é

$$|\Phi_{00}\rangle = -|\psi_{CA}^{-}\rangle \otimes \left(\alpha|0^{B}\rangle + \beta|1^{B}\rangle\right), \ |\Phi_{01}\rangle = |\psi_{CA}^{+}\rangle \otimes \left(\beta|1^{B}\rangle - \alpha|0^{B}\rangle\right),$$
$$|\Phi_{10}\rangle = |\phi_{CA}^{-}\rangle \otimes \left(\alpha|1^{B}\rangle + \beta|0^{B}\rangle\right), \ |\Phi_{11}\rangle = |\phi_{CA}^{+}\rangle \otimes \left(\alpha|1^{B}\rangle - \beta|0^{B}\rangle\right).$$
(3.44)

Alice então comunica o resultado $\mu \in \mathcal{M}$ da sua medição a Bob através de um canal clássico, e.g. um telefone. Bob, ao receber a mensagem, realiza uma das quatro operações unitárias locais

$$\begin{array}{rcl} 00 & \longrightarrow & I \\ 01 & \longrightarrow & \sigma_3 \\ 10 & \longrightarrow & \sigma_1 \\ 11 & \longrightarrow & \sigma_3 \sigma_1. \end{array} \tag{3.45}$$

Usando as equações (3.44) e (3.45) com o valor μ que Bob recebeu, vemos que, ao final do protocolo, o estado da partícula de Bob não está mais emaranhado com o da partícula de Alice do antigo estado de Bell e, a menos de uma fase global que pode ser desprezada, tal estado é dado por $|\varphi^B\rangle = \alpha |0^B\rangle + \beta |1^B\rangle$. Portanto, Alice teve sucesso em teleportar o estado quântico da partícula C. Vemos também, que o estado final da partícula Cestá emaranhado em um dos estados de Bell com o da partícula da Alice e portanto, seu estado após o protocolo é tr_{AB} $|\Phi_{\mu}\rangle\langle\Phi_{\mu}| = I^C/2$, onde I^C é o operador identidade em \mathcal{H}^C e $\mu \in \mathcal{M}$. Portanto, o estado original da partícula C foi destruído ao final do protocolo. Tal fato é consistente com o teorema da não clonagem.

Podemos entender o teletransporte dizendo que a comunicação de um qubit de informação quântica pode ser dividida na transmissão de dois bits clássicos e consumo de um estado emaranhado (1 ebit). Então, seguindo [64] podemos escrever 1 qubit \prec 1 ebit + 2 bits, onde o símbolo \prec foi usado para indicar que a relação acima não é uma equivalência nem uma igualdade.

Para finalizar a análise do teletransporte quântico, vamos estudar a importância da transmissão dos dois bits clássicos para o seu sucesso. Suponha que Alice realiza a medição projetiva descrita no protocolo mas não comunique seu resultado a Bob. Então, usando a equação (3.19), o estado total do sistema evolui como

$$\rho^{CAB} \equiv |\varphi^C\rangle\langle\varphi^C| \otimes |\psi^-_{AB}\rangle\langle\psi^-_{AB}| \to \rho'^{CAB} = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} P_\mu \otimes I^B \rho^{CAB} P_\mu \otimes I^B, \qquad (3.46)$$

onde I^B é o operador identidade em \mathcal{H}^B . Então,

$$\rho^{\prime B} = \operatorname{tr}_{CA} \rho^{\prime CAB} = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \operatorname{tr}_{CA} \left(P_{\mu} \otimes I^{B} \rho^{CAB} P_{\mu} \otimes I^{B} \right)$$
$$= \operatorname{tr}_{CA} \left(\sum_{\mu \in \mathcal{M}} P_{\mu} \otimes I^{B} \rho^{CAB} \right) = \operatorname{tr}_{CA} \left(I^{CAB} \rho^{CAB} \right)$$
$$= \rho^{B} = \frac{1}{2} I^{B}, \qquad (3.47)$$

onde I^{CAB} é a identidade em $\mathcal{H}^C \otimes \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$. Vemos então que, antes de receber a informação da medição, o estado final do qubit de Bob é o mesmo de antes da medição feita por Alice. Este por sua vez é um estado maximamente misto e que não contém nenhuma informação sobre o estado $|\varphi^C\rangle$. Com isso, concluímos que a transmissão dos bits clássicos (que se propagam com velocidade menor ou igual à da luz) é essencial para o teletransporte.

3.4.3 Medidas de Emaranhamento

Durante essa seção, definimos estados emaranhados e estudamos algumas de suas consequências. Queremos agora *quantificar* o emaranhamento de um dado estado quântico, o que vai nos permitir estudar sua *dinâmica* quando o estado evolui. Vamos nos restringir aqui ao emaranhamento entre dois sistemas quânticos.

Emaranhamento de Estados Puros

Vamos começar quantificando o emaranhamento de estados puros. Para isso, tome dois sistemas quânticos $A \in B$ cujos estados estão definidos nos espaços de Hilbert $\mathcal{H}^A \in \mathcal{H}^B$, com dimensões $N_A \in N_B$, respectivamente. Se $|\psi^{AB}\rangle \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$, podemos usar a decomposição de Schmidt, Teorema 3.2.2, para escrever

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\xi_i} |x_i^A\rangle \otimes |y_i^B\rangle, \qquad (3.48)$$

que, em particular, implica que $S(\rho^A) = S(\rho^B)$, onde

$$\rho^{A} = \mathrm{tr}_{B} |\psi^{AB}\rangle \langle \psi^{AB} | e \rho^{B} = \mathrm{tr}_{A} |\psi^{AB}\rangle \langle \psi^{AB} |.$$

Por ser um estado puro, e portanto representando a máxima informação que temos do sistema, $S(|\psi^{AB}\rangle\langle\psi^{AB}|) = 0$. Se $S(\rho^A) = S(\rho^B) = 0$, e portanto temos também a máxima informação dos subsistemas, a equação (3.48) implica que $\rho^A = |x_j^A\rangle\langle x_j^A|$ e $\rho^B = |y_j^B\rangle\langle y_j^B|$ para algum $j \in \{1, ..., k\}$ e portanto $|\psi^{AB}\rangle$ é separável. Se $S(\rho^A) = S(\rho^B) \neq 0$ temos que, ao nos restringimos aos subsistemas A ou B, não temos mais a informação máxima sobre estes, apesar de termos a informação máxima sobre o sistema total. Como já vimos, isso

implica a presença de correlações, que serão tão maiores quanto maior a ignorância sobre os subsistemas. Em particular, se $N_A = N_B = N e \rho^X = I^X/N$ onde $X \in \{A, B\} e I^X$ é o operador identidade em \mathcal{H}^X , $S(\rho^X) = \log_2 N$ e portanto o subsistemas são maximamente mistos. Logo, é natural definir o emaranhamento de um estado $|\psi^{AB}\rangle$ como

$$E\left(\psi^{AB}\right) \equiv S\left(\rho^{A}\right) = S\left(\rho^{B}\right). \tag{3.49}$$

Vemos então que $0 \leq E(\psi^{AB}) \leq \log_2 k \operatorname{com} E(\psi^{AB}) = 0$ se e somente se $|\psi^{AB}\rangle$ é separável e $E(U^A \otimes U^B \psi^{AB}) = E(\psi^{AB})$ para todo operador unitário $U^A \otimes U^B$. Quando $N_A = N_B = N$, os estados que satisfazem $E(\psi^{AB}) = \log_2 N$ são ditos maximamente emaranhados. Um exemplo de estados maximamente emaranhados são os estados de Bell, equação (3.32).

Emaranhamento de Estados Mistos

Ao contrário do que acontece para estados puros, não existe uma única medida natural de emaranhamento de estados mistos. Diversas medidas de emaranhamento para estados mistos já foram propostas, cada uma delas mais ou menos úteis dependendo do contexto em que são aplicadas [28, 65, 66]. O que podemos fazer, é definir o que é uma boa medida de emaranhamento por certas propriedades que estas devem satisfazer. Não há ainda um consenso sobre quais os postulados que devemos impor. Autores diferentes impõe mais ou menos condições para tais medidas. Entretanto, há duas propriedades que se acredita que toda boa medida de emaranhamento deve satisfazer:

- 1. Se $\rho^{AB} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B)$ é separável então $E(\rho^{AB}) = 0$.
- 2. Ao modificar o estado ρ^{AB} com operações locais e comunicação clássica (LOCC), levando-o de ρ^{AB} para $\Xi(\rho^{AB}), E(\Xi(\rho^{AB})) \leq E(\rho^{AB}).$

Vamos definir agora o emaranhamento de formação, a medida de emaranhamento que usaremos ao longo desse texto. Ela satisfaz, entre outras, as propriedades da Definição 3.4.3 [65, 66]. Tome um estado $\rho^{AB} \in C(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B)$. Então, podemos escrever $\rho^{AB} = \sum_i p_i |\psi_i^{AB}\rangle \langle \psi_i^{AB}|$ para alguma mistura $\{p_i, |\psi_i^{AB}\rangle \langle \psi_i^{AB}|\}$, onde $p_i \ge 0$, $\sum_i p_i = 1$ e $i \in \{1, ..., K\}$ para algum $K \in \mathbb{N}$. Como vimos, o emaranhamento dos estados $|\psi_i^{AB}\rangle$ é dado por $E(\psi_i^{AB}) \equiv S(\rho^A) = (\rho^B)$. Com isso, poderíamos definir o emaranhamento de ρ^{AB} como

$$E\left(\rho^{AB}\right)_{\left\{p_{i},|\psi_{i}^{AB}\rangle\langle\psi_{i}^{AB}|\right\}} \equiv \sum_{i} p_{i}E\left(\psi_{i}^{AB}\right).$$

$$(3.50)$$

Porém, existem infinitas misturas que descrevem a mesma matriz densidade ρ^{AB} . Isso nos leva à seguinte definição.

Definição 3.4.2 (Emaranhamento de Formação). Sejam $\mathcal{H}^A \in \mathcal{H}^B$ espaços de Hilbert de dimensões $N_A \in N_B$, respectivamente $e \ \rho^{AB} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B)$. Então, o emaranhamento de formação de ρ^{AB} é dado por

$$E_F\left(\rho^{AB}\right) \equiv \inf\left\{\sum_i p_i E\left(\psi_i^{AB}\right)\right\},\$$

onde o ínfimo é sobre todas as misturas $\{p_i, |\psi_i^{AB}\rangle\langle\psi_i^{AB}|\}$ tal que $\rho^{AB} = \sum_i p_i |\psi_i^{AB}\rangle\langle\psi_i^{AB}|$.

A minimização na definição acima é, em geral, um problema extremamente difícil. Porém, para sistemas de dois qubits, i.e., $N_A = N_B = 2$, existe uma forma fechada para E_F [67]. Tome uma base ortonormal $\{|0^X\rangle, |1^X\rangle\}$ de auto-vetores de $\sigma_3^X, X \in \{A, B\}$ e dada a matriz densidade ρ^{AB} defina o operador $\rho^{AB}\sigma_2^A \otimes \sigma_2^B \bar{\rho}^{AB}\sigma_2^A \otimes \sigma_2^B$, com $\bar{\rho}^{AB}$ sendo obtido tomando o complexo conjugado dos elementos de matriz de ρ^{AB} na base formada pelos vetores $|i^A\rangle \otimes |j^B\rangle$, $i, j \in \{0, 1\}$. Se $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ são os auto-valores de $\rho^{AB}\sigma_2^A \otimes \sigma_2^B \bar{\rho}^{AB}\sigma_2^A \otimes \sigma_2^B$ a concurrence de ρ^{AB} é definida como

$$C\left(\rho^{AB}\right) \equiv \max\left\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right\}$$
(3.51)

e satisfaz $0 \leq C(\rho^{AB}) \leq 1$. Então, o emaranhamento de formação é dado por

$$E_F(\rho^{AB}) = h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2(\rho^{AB})}}{2}\right),$$
 (3.52)

onde $h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2(1-x)$. Como E_F é uma função monótona de $C(\rho^{AB})$, utiliza-se muitas vezes a própria concurrence para estudar a dinâmica do emaranhamento.

3.5 Correlações Clássica e Quântica

Até recentemente, acreditava-se que o emaranhamento era a medida do que é quântico em sistemas quânticos correlacionados. Entretanto, como mostrado recentemente, há correlações em estados quânticos que podem ser caracterizadas como quânticas mas que não precisam, necessariamente, provir de emaranhamento [68, 69, 70]. Resultados recentes mostram que a presença de tais correlações é responsável por melhorar certas performances computacionais com relação aos melhores protocolos clássicos [71, 72], o que corrobora sua interpretação como medida da correlação quântica presente no estado do sistema.

No Seção 2.1, vimos que podemos escrever a informação mútua entre duas variáveis aleatórias $X \in Y$ tanto como

$$I(X:Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$
(3.53)

quanto como

$$I(X:Y) = H(X) - H(X|Y).$$
(3.54)

Como mostrado na Seção 3.2, a equação (3.53) pode ser diretamente generalizada para sistemas quânticos e, como vimos, mede as correlações totais entre eles. Se $A \in B$ são dois sistemas quânticos cujo estado total é ρ^{AB} , a informação mútua quântica é dada por

$$I_Q(A:B) = S\left(\rho^A\right) + S\left(\rho^B\right) - S\left(\rho^{AB}\right).$$
(3.55)

Porém, a generalização da equação (3.54) não é tão direta e, em geral, não vai coincidir com a equação (3.55). Tal fato é o que vai permitir separar a parte clássica da parte quântica das correlações de um estado ρ^{AB} . Para calcular a informação mútua entre Xe Y via a equação (3.54), é necessário sabermos a incerteza que resta sobre X dado que medimos Y. Em mecânica quântica, uma medição é descrita por um POVM. Suponha então que A e B são dois sistemas quânticos, descritos pelos espaços de Hilbert $\mathcal{H}^A \in \mathcal{H}^B$, respectivamente, em um dado estado $\rho^{AB} \in C(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B)$ e $\{E^B_{\mu}|\mu \in \{0, ..., n-1\}\}$ é um POVM em B cuja ação nos estados é descrita pelos operadores $M_m \equiv U_m \sqrt{E_m}$, onde U_m é um operador unitário. Usando a equação (3.18), vemos que o estado do sistema A dado que $\mu \in \{0, ..., n-1\}$ foi medido, é $\rho^A_{\mu} \equiv \operatorname{tr}_B(I^A \otimes E^B_{\mu} \rho^{AB})/p_{\mu}$ onde $p_{\mu} \equiv \operatorname{tr}(I^A \otimes E^B_{\mu} \rho^{AB})$. Portanto, definimos a entropia relativa de ρ^A dado que a medição $\{E^B_{\mu}|\mu \in \{0, ..., n-1\}\}$ foi realizada em B (i.e., a incerteza que ainda resta em A após realizarmos a medição $\{E^B_{\mu}\}$) por

$$S\left(\rho^{A}|\{E^{B}_{\mu}\}\right) \equiv \sum_{\mu} p_{\mu}S(\rho^{A}_{\mu})$$
(3.56)

e portanto, a versão quântica da equação (3.54) fica

$$\mathcal{J}(\rho^{AB})_{\{E^B_\mu\}} \equiv S(\rho^A) - \sum_{\mu} p_{\mu} S(\rho^A_{\mu}).$$
(3.57)

 $\mathcal{J}(\rho^{AB})_{\{E^B_{\mu}\}}$ é a informação que conseguimos obter sobre A fazendo uma *medição local* em B. Por isso, ela mede correlações clássicas no estado ρ^{AB} . Com isso, definimos a parte clássica das correlações em ρ^{AB} como

$$\mathcal{J}(\rho^{AB}) \equiv \max_{\{E_{\mu}\}} \left\{ S(\rho^{A}) - \sum_{\mu} p_{\mu} S\left(\rho_{\mu}^{A}\right) \right\}.$$
(3.58)

Como $I_Q(A:B)$ mede as correlações totais em ρ^{AB} e $\mathcal{J}(\rho^{AB})$ mede sua parte clássica, definimos a correlação quântica em ρ^{AB} como

$$\mathcal{D}\left(\rho^{AB}\right) \equiv I_Q(A:B) - \mathcal{J}(\rho^{AB}). \tag{3.59}$$

Vemos que quando $\mathcal{D}(\rho^{AB}) = 0$, todas as correlações em ρ^{AB} são clássicas, podendo ser extraídas por uma medição conveniente em B, e as generalizações $I_Q(A:B) \in \mathcal{J}(\rho^{AB})$ das equações (3.53) e (3.54) coincidem. Se nos restringirmos apenas a medidas projetivas, $\mathcal{D}(\rho^{AB}) = \delta(A:B)$ que é a discórdia quântica definida em [68]. Em particular, foi mostrado nesse trabalho que $\delta(A:B) = 0$ se e somente se existe uma medição $\{\Pi^B_\mu\}$



Figura 3.3: Correlação quântica para o estado de Werner em função de z.

tal que $\rho^{AB} = \sum_{\mu} I^A \otimes \prod_{\mu}^B \rho^{AB} I^A \otimes \prod_{\mu}^B$. Portanto, nesse caso, existe uma medição que não altera o estado com relação a um outro observador que não sabe seu resultado. Para sistemas de 2 qubits foi mostrado em [73] que o POVM que maximiza a equação (3.58) é uma medida projetiva e portanto, $D(\rho^{AB}) = \delta(A:B)$ para tais sistemas.

Como um exemplo, tome o estado de Werner

$$\rho_w^{AB} \equiv \frac{1-z}{4} I^{AB} + z |\phi_{AB}^+\rangle \langle \phi_{AB}^+|, \qquad (3.60)$$

onde $z \in \mathbb{R}$ e

$$|\phi_{AB}^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0^{A}\rangle \otimes |0^{B}\rangle + |1^{A}\rangle \otimes |1^{B}\rangle \right).$$

É sabido, por exemplo calculando $E_F(\rho_w^{AB})$, que ρ_w^{AB} está emaranhado somente para $z \ge 1/3$. Ao calcularmos $\mathcal{D}(\rho_w^{AB})$, Figura 3.3, vemos que ela só se anula para z = 0 e portanto há correlações quânticas que não provêm de emaranhamento.

Tanto $\mathcal{D}(\rho^{AB})$ quanto $\mathcal{J}(\rho^{AB})$ não são, em geral, simétricos com relação a troca $A \leftrightarrow B$ para realizar a medição. Com isso, ao escolher calcular, por exemplo, $\mathcal{D}(\rho^{AB})$, estamos privilegiando o sistema B para fazer medições. Em alguns casos tal escolha é natural. Por exemplo, ao se analisar a interação de um sistema quântico S com um aparelho de medida \mathcal{A} , como feito em [68], fazemos medições em \mathcal{A} para obter informações sobre S e portanto, é natural usarmos $\mathcal{J}(\rho^{AB})$ e $\mathcal{D}(\rho^{AB})$ para medir as correlações clássica e quântica, respectivamente, presentes no estado ρ^{AB} do sistema \mathcal{SA} . Entretanto, para outros tipos de sistemas, não é natural privilegiar um subsistema em detrimento do outro. Além disso, podemos argumentar que, por fazermos medições locais em apenas um subsistema, ainda resta algo quântico em $\mathcal{J}(\rho^{AB})$. Tendo em vista essas observações, vamos definir a medida de *correlação clássica simétrica* de ρ^{AB} . Tome $\{E^A_{\mu}|\mu \in \mathcal{U}\}$ e

 $\{F_{\nu}^{B}|\nu \in \mathcal{V}\}, \text{ com } \mathcal{U} \equiv \{u_{1}, ..., u_{n_{1}}\} \subset \mathbb{R} \in \mathcal{V} \equiv \{v_{1}, ..., v_{n_{2}}\} \subset \mathbb{R}, \text{ POVM's em } \mathcal{H}^{A} \in \mathcal{H}^{\mathcal{B}},$ respectivamente. Então, a correlação clássica simétrica do estado ρ^{AB} é dada por

$$\mathcal{K}\left(\rho^{AB}\right) \equiv \max_{\left\{E^{A}_{\mu} \otimes F^{B}_{\nu}\right\}} \left\{I(\mathcal{U}:\mathcal{V})\right\},\tag{3.61}$$

onde $I(\mathcal{U} : \mathcal{V})$ é a informação mútua clássica entre as variáveis aleatórias $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$ que tomam os valores $u_{\mu} \in v_{\nu}$ com probabilidades $p^{A}(\mu) \equiv \operatorname{tr} \left(E_{\mu}^{A}\rho^{A}\right) \in p^{B}(\nu) \equiv \operatorname{tr} \left(F_{\nu}^{B}\rho^{B}\right)$ respectivamente, e têm probabilidade conjunta $p^{AB}(\mu,\nu) \equiv \operatorname{tr} \left(E_{\mu}^{A} \otimes F_{\nu}^{B}\rho^{AB}\right)$. Vemos então que $\mathcal{K}\left(\rho^{AB}\right)$ corresponde ao máximo de correlação presente no estado ρ^{AB} que pode ser recuperada através de medições locais. Com isso, concluímos que $\mathcal{K}\left(\rho^{AB}\right)$ dá uma medida da parte clássica das correlações em ρ^{AB} . Definimos então a *correlação quântica simétrica* em ρ^{AB} como

$$\mathcal{Q}\left(\rho^{AB}\right) \equiv I_Q(A:B) - \mathcal{K}\left(\rho^{AB}\right).$$
(3.62)

As correlações clássicas satisfazem [70]

$$0 \le \mathcal{K}\left(\rho^{AB}\right) \le \mathcal{J}\left(\rho^{AB}\right) \le I_Q(A:B) \tag{3.63}$$

e portanto

$$0 \le \mathcal{D}\left(\rho^{AB}\right) \le \mathcal{Q}\left(\rho^{AB}\right) \le I_Q(A:B). \tag{3.64}$$

Quando $\rho^{AB} = |\psi^{AB}\rangle\langle\psi^{AB}|$ mostra-se, tomando medições na base de Schmidt de $|\psi^{AB}\rangle$, i.e., os vetores $|x_i\rangle \otimes |y_i\rangle$ da equação (3.48), que $\mathcal{K}\left(\rho^{AB}\right) = \mathcal{J}\left(\rho^{AB}\right) = S\left(\rho^A\right)$ e $\mathcal{Q}\left(\rho^{AB}\right) = \mathcal{D}\left(\rho^{AB}\right) = S\left(\rho^A\right) \equiv E(\psi^{AB})$. Portanto para estados puros, $\mathcal{Q}\left(\rho^{AB}\right)$ e $\mathcal{D}\left(\rho^{AB}\right)$ correspondem à medida do emaranhamento de $|\psi^{AB}\rangle$, o que era esperado, já que para estados puros, toda correlação provém de emaranhamento.

Capítulo 4

Relatividade Especial e a Teoria da Informação Quântica

No Capítulo 2, quantificamos o conceito de informação contida em uma mensagem e estudamos sua transmissão quando o sistema em que a codificamos pode ser descrito pela física clássica. No Capítulo 3, vimos que podemos codificar informação em sistemas quânticos. Tal procedimento não só alterou muitos resultados clássicos como também proporcionou diversas possibilidades novas que não existiam no contexto da teoria da informação clássica. Veremos, a partir deste capítulo, que ao se levar os efeitos da relatividade em consideração modificaremos diversos resultados da teoria da informação quântica usual e abriremos novamente uma gama de efeitos novos e interessantes. Por exemplo, como mostrado por A. Peres, P. Scudo e D. Terno [11], a entropia de spin não é invariante de Lorentz e, em geral, sequer existe uma lei de transformação que permita obtermos a matriz densidade de spin em um referencial, dado que sabemos seu valor em outro sistema de referência (como veremos, relativisticamente é imprescindível o conhecimento da parte de momento do estado). A partir desse resultado, tem havido um crescimento constante dessa área na interface entre informação quântica e a teoria da relatividade, e os seus mais diversos aspectos vem sendo analisados [74, 75, 76, 77, 78] (veja também a revisão [79] e suas referências).

Antes de estudarmos os efeitos que a teoria da relatividade causa na teoria da informação quântica, precisaremos estudar o formalismo matemático necessário para tratar tal problema de maneira consistente. Por isso, estudaremos na Seção 4.1 as representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré. Em seguida, na Seção 4.2, estudaremos as desigualdades de Bell com partículas massivas de spin 1/2 nesse contexto relativístico. Na Seção 4.3, motivados pela implementação de protocolos de informação quântica utilizando satélites, estudaremos medições em estados de fótons emaranhados quando um dos detetores move-se com uma certa velocidade constante. Por fim, na Seção 4.4, analisaremos o limite de Holevo quando o observador que faz as medições está em movimento com relação ao observador que envia o estado.

4.1 As Representações Unitárias Irredutíveis do Grupo de Poincaré

A relatividade especial estuda os fenômenos físicos que ocorrem no *espaço-tempo de Min*kowski. Este, é descrito pelo par (\mathbb{R}^4, η) onde, utilizando o sistema de coordenadas cartesiano t, x, y, z, a métrica η pode ser posta na forma [2, 3]

$$\eta = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz, \tag{4.1}$$

ou na forma de elemento de linha

$$ds_n^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. ag{4.2}$$

O conjunto de todas as transformações diferenciáveis $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que mantém a métrica de Minkowski, equação (4.1) ou equação (4.2), invariante forma um grupo de Lie de dimensão 10 (onde o produto do grupo é a composição de funções) chamado grupo de Poincaré, denotado por \mathcal{P} . Todo elemento $\phi \in \mathcal{P}$ é da forma $\phi(p) = \Lambda p + a$, onde $p, a \in \mathbb{R}^4$ e Λ é uma transformação linear que satisfaz $\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^4$ e $\langle x, y \rangle \equiv$ $-x^0 y^0 + \sum_i x^i y^i$ [80]. O conjunto de tais transformações lineares Λ formam um grupo de Lie de dimensão 6, com relação ao produto de matrizes, chamado grupo de Lorentz e é denotado por O(1,3). Em notação matricial, podemos escrever $\langle x, y \rangle = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{y}$, onde $\boldsymbol{\eta}$ é uma matriz diagonal com diag $\boldsymbol{\eta} = (-1, 1, 1, 1)$. Com isso, vemos que $\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle = \langle x, y \rangle$ se e somente se $\Lambda^T \boldsymbol{\eta} \Lambda = \boldsymbol{\eta}$ e consequentemente det $\Lambda = \pm 1$ e $(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sum_i (\Lambda_0^i)^2 \ge 1$. Portanto, utilizando o sinal de det Λ e se $\Lambda_0^0 \ge 1$ ou $\Lambda_0^0 \le -1$, podemos decompor O(1,3)

$$L_{\pm}^{\uparrow} \equiv \left\{ \Lambda \in O(1,3) | \det \Lambda = \pm 1, \Lambda_0^0 \ge 1 \right\},$$

$$L_{\pm}^{\downarrow} \equiv \left\{ \Lambda \in O(1,3) | \det \Lambda = \pm 1, \Lambda_0^0 \le -1 \right\}.$$
(4.3)

Como todo $\phi \in \mathcal{P}$ é da forma $\phi(p) = \Lambda p + a$, e portanto se $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}$ temos que $\phi_2 \circ \phi_1(p) = \Lambda_2 \Lambda_1 p + (\Lambda_2 a_1 + a_2)$, podemos identificar \mathcal{P} com o conjunto dos pares (a, Λ) munido do produto $(a_2, \Lambda_2)(a_1, \Lambda_1) = (\Lambda_2 a_1 + a_2, \Lambda_2 \Lambda_1)$. Então, podemos decompor \mathcal{P} em quatro componentes conexas, dependendo da componente conexa de O(1,3) à que Λ pertence. Ou seja,

$$\mathcal{P}_{\pm}^{\uparrow} \equiv \left\{ (a,\Lambda) \in \mathcal{P} | \Lambda \in L_{\pm}^{\uparrow} \right\},$$

$$\mathcal{P}_{\pm}^{\downarrow} \equiv \left\{ (a,\Lambda) \in \mathcal{P} | \Lambda \in L_{\pm}^{\downarrow} \right\}.$$
(4.4)

Experimentos mostram a violação da paridade e da reversão temporal e portanto, além da métrica, devemos ter uma orientação temporal (escolha contínua de metade do cone

de luz em cada ponto para representar a direção do futuro) e uma orientação espacial (escolha contínua ponto a ponto de uma orientação positiva ou negativa para triplas de vetores tipo espaço). Com isso, as simetrias do espaço-tempo devem manter invariante, além da métrica, a orientação temporal e espacial. Por isso, vamos tomar como grupo de simetria do espaço-tempo o subgrupo $\mathcal{P}^{\uparrow}_{+}$ do grupo de Poincaré, chamado grupo de Poincaré restrito.

Suponha agora que temos um sistema físico \mathcal{S} e observadores^{*} \mathcal{O} que carregam aparatos de medida. Se aplicarmos a transformação $g \in \mathcal{P}^{\uparrow}_{+}$ tanto no sistema \mathcal{S} quanto nos observadores \mathcal{O} , obteremos o sistema \mathcal{S}' e os observadores \mathcal{O}' . Por exemplo, podemos rodar o sistema físico e o aparato de medida ou dar um velocidade constante \mathbf{v} para ambos. A invariância relativística afirma que os resultados das medições feitas por \mathcal{O} em \mathcal{S} devem ser idênticos aos resultados das medições feitas por \mathcal{O}' em \mathcal{S}' . Em mecânica quântica, estados do sistema sempre podem ser descritos pelas classes de equivalência $\Psi = \{\lambda | \psi \rangle | \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$, onde $| \psi \rangle \in \mathcal{H}, || \psi || = 1$ e \mathcal{H} é um espaço de Hilbert (estamos nos restringido aqui, sem perda de generalidade, a estados puros normalizados). Então, se o estado de S é descrito por $\hat{\Psi}$, ao aplicarmos a transformação de Poincaré $g \in \mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$ no sistema obteremos o estado $\hat{\Psi}_g$. Vemos então que para cada $g \in \mathcal{P}^{\uparrow}_+$ podemos definir a aplicação $\mathcal{T}_q: P(\mathcal{H}) \to P(\mathcal{H})$, onde $P(\mathcal{H})$ indica o conjunto de todas as classes de equivalência (i.e., todos os estados) $\hat{\Phi}$, dada por $\mathcal{T}_{g}\hat{\Phi} \equiv \hat{\Phi}_{g}$, para todo $\hat{\Phi} \in P(\mathcal{H})$. A simetria relativística implica então que todas as probabilidades de transição $|\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2| \equiv |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2$, $|\psi_1\rangle \in \hat{\Psi}_1 \in |\psi_2\rangle \in \hat{\Psi}_2$, são invariantes, i.e., $\left[\mathcal{T}_g \hat{\Psi}_1, \mathcal{T}_g \hat{\Psi}_2\right] = \left[\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2\right]$, para todo $g \in \mathcal{P}_+^{\uparrow}$. O resultado da aplicação sucessiva de g_1 e g_2 no sistema pode ser obtido através da aplicação direta de g_1g_2 . Então, vemos que $\mathcal{T}_{g_1}\mathcal{T}_{g_2} = \mathcal{T}_{g_1g_2}$. Além disso, não realizar nenhuma operação não altera o sistema. Portanto, $\mathcal{T}_e = I$, onde e é o elemento neutro de $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$ e I é a aplicação identidade em $P(\mathcal{H})$. Um importante teorema devido a Wigner [81, 82] afirma que toda transformação $\mathcal{T}: P(\mathcal{H}) \to P(\mathcal{H})$ que preserva o produto de classes de equivalência $\left|\hat{\Psi}_{1},\hat{\Psi}_{2}\right|$ definido acima provém de um operador unitário ou anti-unitário em Н.

Teorema 4.1.1 (Wigner). Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $\mathcal{T} : P(\mathcal{H}) \to P(\mathcal{H})$ tal que

$$\left[\mathcal{T}\hat{\Psi}_1, \mathcal{T}\hat{\Psi}_2\right] = \left[\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2\right],$$

 $onde \left[\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2\right] = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2, \ |\psi_1 \rangle \in \hat{\Phi}_1 \ e \ |\psi_2 \rangle \in \hat{\Psi}_2. \ Ent\tilde{a}o \ existe \ um \ operador \ limitado \ U$

^{*}Observadores podem ser associados a tetradas $\{e_0, ..., e_3\}$, i.e., $\eta(e_\nu e_\nu) = \eta_{\mu\nu}$, onde identificamos as curvas integrais de e_0 com as linhas de mundo desses observadores e $\{e_1, e_2, e_3\}$ (e suas combinações lineares) com as possíveis direções espaciais (segundo esses observadores) ao longo das quais se orientam os aparatos de medida. Para espaços-tempos mais gerais, tais tetradas poderão só existir localmente [80] e por isso muitas vezes associamos observadores somente a campos vetoriais unitários tipo tempo. Aplicar uma operação de simetria ϕ em um conjunto de observadores corresponde a fazer $d\phi(e_\mu)$ para todo $\mu \in \{0, ..., 3\}$, onde $d\phi$ indica a diferencial (ou push forward) de ϕ [2, 80].

tal que: (i) $U|\psi\rangle \in \mathcal{T}\hat{\Psi}$; (ii) $U(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = U|\psi_1\rangle + U|\psi_2\rangle$; (iii) $U\lambda|\psi\rangle = \chi(\lambda)U|\psi\rangle$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\chi(\lambda) = \lambda$ para todo λ ou $\chi(\lambda) = \overline{\lambda}$ para todo λ ; (iv) $\langle U\psi_1|U\psi_2\rangle = \langle \psi_1|\psi_2\rangle$.

Como para cada $g \in \mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$, \mathcal{T}_{g} mantém o produto [.,.] entre classes de equivalência invariante, \mathcal{T}_{g} provém de uma transformação unitária ou anti-unitária U(g) em \mathcal{H} . Como $\mathcal{T}_{e} = I \in \mathcal{T}_{g_{1}}\mathcal{T}_{g_{2}} = \mathcal{T}_{g_{1}g_{2}}$ temos que $U(g_{1})U(g_{2}) = \omega(g_{1},g_{2})U(g_{1}g_{2})$, onde $\omega(g_{1},g_{2}) \in \mathbb{C}$ e $|\omega(g_{1},g_{2})| = 1$. A fase $\omega(g_{1},g_{2})$ aparece porque U(g) determina o estado a menos de uma fase. Como para grupos de Lie conexos todo elemento g pode ser escrito como $g = h^{2}$, onde h é algum outro elemento do grupo, a possibilidade de operadores anti-unitários fica excluída (já que o produto de operadores anti-unitários é um operador unitário). Vemos então que o espaço de Hilbert \mathcal{H} que descreve os estados de sistemas relativísticos devem carregar uma *representação unitária projetiva*[†] (ou representação unitária a menos de fase) do grupo de Poincaré restrito. Entretanto, como mostrado por E. Wigner [83] e V. Bargmann [84], temos:

Teorema 4.1.2. Toda representação unitária projetiva contínua de $\mathcal{P}^{\uparrow}_{+}$ pode, através de uma escolha adequada do fator de fase, ser colocada na forma de uma representação unitária contínua de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$, seu recobrimento universal [85].

Tome a aplicação $\Lambda:SL(2,\mathbb{C})\to L_+^\uparrow$ dada por

$$\widetilde{\Lambda(A)}p \equiv A\tilde{p}A^{\dagger}, \tag{4.5}$$

onde $p \in \mathbb{R}^4$ e

$$\tilde{p} = \sum_{\mu=0}^{3} p^{\mu} \sigma_{\mu} = \begin{pmatrix} p^{0} + p^{3} & p^{1} - ip^{2} \\ p^{1} + ip^{2} & p^{0} - p^{3} \end{pmatrix},$$

com $\sigma_0 = I \in \sigma_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$, sendo as matrizes identidade e de Pauli, respectivamente. O mapeamento $\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \to L_+^{\uparrow}$ é um homomorfismo entre $SL(2, \mathbb{C}) \in L_+^{\uparrow}$ que é 2-1, i.e., Λ é um mapeamento que associa a cada $A \in SL(2, \mathbb{C})$ uma transformação de Lorentz $\Lambda(A) \in L_+^{\uparrow}$, com $\Lambda(A_1A_2) = \Lambda(A_1)\Lambda(A_2)$ e dado $B \in L_+^{\uparrow}$, $\Lambda(\pm A) = B$, e $\tilde{f} : p \in \mathbb{R}^4 \to \tilde{p}$ é um isomorfismo entre \mathbb{R}^4 e o espaço vetorial real das matrizes complexas hermitianas [86].

O grupo $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$ consiste no conjunto dos pares (a, A), com $a \in \mathbb{R}^4$ e $A \in SL(2, \mathbb{C})$, munido do produto $(a_2, A_2)(a_1, A_1) = (a_2 + \Lambda(A_2)a_1, A_2A_1)$. Devido às observações acima,

[†]Uma representação unitária contínua de um grupo de Lie G em um espaço de Hilbert \mathcal{H} é uma aplicação que associa a cada elemento de $g \in G$ um operador unitário U(g) que satisfaz: (i) Para todo $g_1, g_2 \in G$, $U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2)$; (ii) Se a sequência $g_n \in G$ converge para $g \in G$ então $U(g_n)|\psi\rangle \to U(g)|\psi\rangle$ para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Uma representação unitária contínua é dita irredutível se satisfaz (i) e (ii) e também a seguinte condição: (iii) Para todo subespaço vetorial fechado $V \subset \mathcal{H}$ que satisfaz $U(g)V \subset V$, para todo $g \in G$, vale $V = \{0\}$ ou $V = \mathcal{H}$. Uma representação unitária projetiva é uma aplicação que associa a cada elemento $g \in G$ um operador unitário U(g) que satisfaz as condições (i') $U(g_1)U(g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1g_2)$, onde $g_1, g_2 \in G$ e $\omega(g_1, g_2) \in \mathbb{C}$ com $|\omega(g_1, g_2)| = 1$ e (ii) definida acima.

vamos considerar $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$ ao invés de $\mathcal{P}^{\uparrow}_{+}$ como sendo o grupo de simetria. Vemos que a simetria relativística impõe que devemos ter uma representação unitária do grupo $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$. As representações unitárias de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$ podem ser decompostas em representações unitárias irredutíveis [83, 84]. Portanto, vemos que o estudo de sistemas relativísticos consiste em estudar as representações unitárias irredutíveis do grupo $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$.

4.1.1 Classificação das Representações Irredutíveis de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$

A classificação das representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré é um problema estritamente matemático e por isso, será descrita no Apêndice C. Aqui, vamos apenas enunciar os resultados provados no apêndice.

Seja $U : (a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+} \to U(a, A)$ uma representação unitária irredutível de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$ em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . O conjunto formado por todas as translações (a, I) forma um subgrupo abeliano de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$. Como este subgrupo é comutativo e $T(a) \equiv U(a, I)$ é contínua, podemos escrever $T(a) = e^{-i\langle a, P \rangle}$, onde $\langle a, P \rangle = -a^0 P^0 + \sum_i a^i P^i$ e os $P^{\mu}, \mu \in \{0, ..., 3\}$, são operadores auto-adjuntos que comutam entre si. O operador P^0 é identificado com a energia e os P^i com os momentos lineares do sistema. O espectro conjunto dos operadores P^{μ} é um subconjunto do \mathbb{R}^4 (chamado espaço dos momentos). O número real $\langle p, p \rangle = -m^2$ e o sinal de p^0 são dois dos parâmetros necessários para classificar as representações irredutíveis de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_+$ (representações rotuladas por m's diferentes não são equivalentes). O número m é chamada massa do sistema. As representações de interesse físico (além do caso m = 0 e $p^0 = 0$, que representa o vácuo) são as que satisfazem $m^2 \ge 0$ e $p^0 > 0$ e são realizadas no espaço de Hilbert $\mathcal{H} \simeq L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathfrak{h}$, onde $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p})$ indica o conjunto das funções complexas de quadrado integrável com relação à medida $d\mathbf{p} \equiv dp^1 dp^2 dp^3$ e \mathfrak{h} é um espaço de Hilbert de dimensão finita chamado de little space. Defina os conjuntos

$$m_{+} \equiv \{ p \in \mathbb{R}^{4} | \langle p, p \rangle = -m^{2} < 0, p^{0} > 0 \}, 0_{+} \equiv \{ p \in \mathbb{R}^{4} | \langle p, p \rangle = 0, p^{0} > 0 \}$$
(4.6)

e tome um ponto $\overline{p} \in m_+$ (ou 0_+). O conjunto $G(\overline{p}) \equiv \{W \in SL(2, \mathbb{C}) | \Lambda(W) \overline{p} = \overline{p}\}$ é chamado little group ou grupo estabilizador de \overline{p} . Se $(a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^{\uparrow}$, a ação de U(a, A) em $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathfrak{h}$ é dada por

$$(U(a,A)\phi)(\mathbf{p}) = e^{-i\langle a,p\rangle} \sqrt{\frac{(\Lambda^{-1}p)^0}{p^0}} D(W(A,\Lambda^{-1}p))\phi(\Lambda^{-1}\mathbf{p}),$$
(4.7)

onde $\phi \in L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathfrak{h}$, D é uma representação unitária irredutível do little group $G(\overline{p})$ em $\mathfrak{h} \in \Lambda \equiv \Lambda(A)$. Aqui, $W(A, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p) AL(p)$, onde $A, L(p) \in SL(2, \mathbb{C}), p \in m_+$ (ou 0_+) e $\Lambda(L(p))\overline{p} = p$. Vemos então que $W(A, p)\overline{p} = \overline{p}$ e portanto W(A, p) é um elemento do little group $G(\overline{p})$.

Para m > 0, vamos tomar $\overline{p} \equiv (m, 0, 0, 0) \in m_+$. Nesse caso, o little group é $G(\overline{p}) \simeq$ SU(2). A álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ do grupo SU(2) tem geradores $S_i, i \in \{1, 2, 3\}$, chamados operadores de spin, que satisfazem

$$[S_i, S_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} S_k. \tag{4.8}$$

As representações unitárias irredutíveis de SU(2) são bem conhecidas [87, 88]. Elas são todas de dimensão finita e podem ser classificadas pelos auto-valores s(s+1) do operador $S^2 \equiv \sum_i (S_i)^2$, $s \in \{0, 1/2, 1, 3/2, ...\}$. O valor s é chamado spin da representação. Logo, podemos tomar o little space como sendo $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^{2s+1}$. O par (m_+, s) caracteriza completamente as representações unitárias irredutíveis de massa m e spin s de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_+$. Estaremos interessados em sistemas de spin 1/2, i.e. s = 1/2. Nesse caso,

$$D^{1/2}(W(A,p)) = W(A,p),$$
(4.9)

onde D^s indica a representação se spin s do SU(2) em $\mathbb{C}^{s(s+1)}$ e [89]

$$W(K,p) = \frac{(p^0 + m)\sigma_0 \cosh\frac{\alpha}{2}}{\{(p^0 + m)[(\Lambda p)^0 + m]\}^{1/2}} + \frac{\sinh\frac{\alpha}{2}[\mathbf{p} \cdot \mathbf{e} \,\sigma_0 + i(\mathbf{e} \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma}]}{\{(p^0 + m)[(\Lambda p)^0 + m]\}^{1/2}}, \quad (4.10)$$

$$W(R,p) = R, (4.11)$$

onde

$$K = \cosh(\alpha/2)I + \sinh(\alpha/2)\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma} \in R = \cos(\theta/2)I + i\sin(\theta/2)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$
 (4.12)

Temos que $\Lambda(K)$ e $\Lambda(R)$ correspondem a um boost na direção do vetor unitário **e** com velocidade **v** = $(\tanh \alpha)$ **e** e uma rotação por um ângulo θ em torno da direção definida pelo versor **n**, respectivamente. Aqui, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e $\sigma_0 = I$ e $\sigma_j, j \in \{1, 2, 3\}$, são as matrizes identidade e de Pauli, respectivamente. O vetor $\mathbf{S} \equiv I \otimes \boldsymbol{\sigma}/2$ é chamado spin de Wigner.

Já no caso m = 0, tome $\overline{p} = (1/2, 0, 0, 1/2) \in 0_+$. Então, o little group $G(\overline{p})$ é formado pelos elementos $A(z, e^{i\varphi/2}) \in SL(2, \mathbb{C})$ dados por

$$A(z, e^{i\varphi/2}) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & ze^{-i\varphi/2} \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix},$$
(4.13)

onde $z \in \mathbb{C}$ e $\varphi \in \mathbb{R}$. A álgebra de Lie \mathfrak{g} de $G(\overline{p})$ tem geradores $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ e J_3 que satisfazem

$$[J_3, \mathfrak{t}_1] = i\mathfrak{t}_2, \tag{4.14}$$

$$[J_3, \mathfrak{t}_2] = -i\mathfrak{t}_1, \tag{4.15}$$

$$[t_1, t_2] = 0. (4.16)$$

As representações unitárias irredutíveis do little group $G(\overline{p})$ de interesse físico são as com dimensão finita (grau de liberdade de spin discreto). Elas são todas unidimensionais e são dadas por [90, 91, 92]

$$U(A(z, e^{i\varphi/2})) = e^{-i\lambda\varphi}, \qquad (4.17)$$

onde o parâmetro $\lambda \in \{..., -1, -1/2, 0, 1/2, 1, ...\}$ é chamado de *helicidade*. Com isso, o little space é $\mathfrak{h} = \mathbb{C}$. Portanto, $(0_+, \lambda)$ caracterizam completamente as representações unitárias irredutíveis de massa 0 e helicidade λ .

Fótons podem ter tanto helicidade $\lambda = 1$ quanto helicidade $\lambda = -1$. Estados com helicidades opostas estão ligados pela operação de inversão espacial (que, para o eletromagnetismo, é uma simetria). Por isso, vamos tomar o espaço de Hilbert dos estados do campo eletromagnético como sendo $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathbb{C}^2$. Os elementos de matriz (em uma base de auto-vetores de J_3) da representação unitária D do little group $G(\bar{p})$ em $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ são:

$$D_{\lambda\lambda'}(A(z, e^{i\varphi/2})) = e^{-i\lambda\varphi}\delta_{\lambda\lambda'}, \qquad (4.18)$$

 $\lambda, \lambda' \in \{-1, 1\}$. No caso que estaremos interessados, boosts na direção z, temos [93]

$$D_{\lambda\lambda'}(W(K_3, p)) = \delta_{\sigma\sigma'}, \qquad (4.19)$$

onde $K_3 = \cosh(\alpha/2)I + \sinh(\alpha/2)\sigma_3$.

Toda transformação de Lorentz Γ pode ser escrita como $\Gamma = B\mathcal{R}$, onde B é um boost e \mathcal{R} é uma rotação [94]. Como vimos acima, $B = \Lambda(K)$ e $\mathcal{R} = \Lambda(R)$, com K e Rdados na equação (4.12), logo $\Gamma = \Lambda(KR)$. Portanto, saber qual a ação de K e R em $\mathcal{H} \simeq L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathfrak{h}$ determina a ação de qualquer transformação de Lorentz restrita Γ . É claro que, pela definição de Λ , -K e -R geram o mesmo boost e rotação que K e R, respectivamente. A diferença, quando existe, entre as ações de K, R = -K, -R em $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathfrak{h}$ é de um sinal global e portanto são fisicamente equivalentes. Tendo em vista isso, vamos convencionar que sempre usaremos K e R para representar boosts B e rotações \mathcal{R} em L^{\uparrow}_+ e vamos usar $U(a, \Lambda)$ e $D(\Lambda, p)$ para representar U(a, A) e D(W(A, p)), respectivamente, onde $\Lambda \equiv \Lambda(A)$ e A = KR. Assim, fica claro qual transformação de Poincaré restrita estamos utilizando (apesar da representação U se referir ao seu recobrimento universal).

4.2 A Influência do Movimento dos Detetores nas Desigualdades de Bell

As desigualdades de Bell podem ser consideradas um dos marcos da física do século XX. Como vimos na Seção (3.4.2), ela nos permite distinguir, de maneira objetiva e passível de teste experimental, a mecânica quântica de teorias realistas locais. Atualmente, experimentos mostram a violação da desigualdade de Bell CHSH por mais de trinta desvios padrão [63]. Agora, vamos analisar como um dos pilares da física moderna, a teoria da relatividade, influencia a correlação de spins de férmions emaranhados e, em particular, as desigualdades de Bell [17].

Vamos tomar um sistema composto por duas partículas A e B de spin 1/2 com massa m e momento angular de spin total nulo. O spin de cada partícula é medido ao longo

de uma direção arbitrária no plano $y \perp z$. Vamos tomar a distância, ao longo do eixo x, entre os detetores que medem o spin grande o suficiente para que as medições estejam desconectadas causalmente. Como vimos na Seção (3.4.2), qualquer teoria realista e local deve satisfazer a desigualdade de Bell CHSH

$$|E(\mathbf{a_2}, \mathbf{b_1}) + E(\mathbf{a_2}, \mathbf{b_2}) + E(\mathbf{a_1}, \mathbf{b_1}) - E(\mathbf{a_1}, \mathbf{b_2})| \le 2,$$
(4.20)

onde $\mathbf{a_i}$ (i = 1, 2) são dois vetores unitários contidos no plano $y \perp z$ ao longo dos quais o spin \mathbf{s}_A da partícula A é medido, e analogamente para os dois vetores unitários $\mathbf{b_j}$ (j = 1, 2) e spin \mathbf{s}_B da partícula B. Lembramos aqui que

$$E(\mathbf{a}_{\mathbf{i}}, \mathbf{b}_{\mathbf{j}}) \equiv \lim_{N \to \infty} \frac{4}{N} \sum_{n=1}^{N} (\mathbf{a}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{s}_{A}) (\mathbf{b}_{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{s}_{B})$$
(4.21)

é a função correlação de spin obtida após realizarmos um número arbitrariamente grande N de experimentos, e $\mathbf{a_i} \cdot \mathbf{s}_A$ e $\mathbf{b_j} \cdot \mathbf{s}_B$ tomam os valores $\pm 1/2$.

Vamos agora testar a desigualdade (4.20) no contexto da mecânica quântica, onde agora permitimos que os detetores que medem os spins das partículas $A \in B$ se movam ao longo do eixo x. Como vimos na Seção (4.1.1), os estados de partículas de massa m > 0 e spin s = 1/2 são representados por 2-espinores, i.e., vetores normalizados no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathbb{C}^2$ que carrega uma representação unitária irredutível $U(a, \Lambda)$ do grupo de Poincaré restrito. Então, o espaço de Hilbert que descreve o sistema composto pelas duas partículas de spin 1/2 é $(L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathbb{C}^2) \otimes (L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathbb{C}^2)$. Equivalentemente, usando a notação de Dirac, podemos representar os estados do sistema pelos vetores

$$|\psi\rangle = \sum_{s_A, s_B} \int d\mathbf{p}_A d\mathbf{p}_B \psi_{s_A s_B}(\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B) |s_A, p_A\rangle \otimes |s_B, p_B\rangle, \qquad (4.22)$$

onde

$$\sum_{s_A, s_B} \int d\mathbf{p}_A d\mathbf{p}_B |\psi_{s_A s_B}(\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B)|^2 = 1, \qquad (4.23)$$

$$\langle s'_X, p'_X | s_X, p_X \rangle = \delta_{s'_X s_X} \delta(\mathbf{p}'_X - \mathbf{p}_X), \qquad (4.24)$$

e X = A, B distingue entre as duas partículas. Tomando P_X^{μ} e $\mathbf{S}^X \equiv I \otimes \boldsymbol{\sigma}^X/2$ como sendo os operadores de quadrimomento e spin, respectivamente, temos

$$P_X^{\mu}|s_X, p_X\rangle = p_X^{\mu}|s_X, p_X\rangle$$
$$S_3^X|s_X, p_X\rangle = s_X|s_X, p_X\rangle$$

com $p_X = (\sqrt{\mathbf{p}_X^2 + m^2}, \mathbf{p}_X)$ e $s_X = \pm 1/2$. Vamos assumir agora que o sistema formado pelas duas partículas de spin 1/2 foi preparado (no referencial de laboratório) no estado

singleto

$$\psi(\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} f_{\mathbf{k}_A}(\mathbf{p}_A) \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ f_{\mathbf{k}_B}(\mathbf{p}_B) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f_{\mathbf{k}_A}(\mathbf{p}_A) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} f_{\mathbf{k}_B}(\mathbf{p}_B) \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$
(4.25)

de onde se lê que

$$\psi_{s_A s_B}(\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_{\mathbf{k}_A}(\mathbf{p}_A) f_{\mathbf{k}_B}(\mathbf{p}_B) (\delta_{s_A \ 1/2} \ \delta_{s_B \ -1/2} - \delta_{s_A \ -1/2} \ \delta_{s_B \ 1/2}).$$
(4.26)

Estamos descrevendo as partículas $A \in B$ por pacotes de onda Gaussianos:

$$f_{\mathbf{k}_X}(\mathbf{p}_X) = \pi^{-3/4} w^{-3/2} e^{-(\mathbf{p}_X - \mathbf{k}_X)^2 / (2w^2)},$$

 $w \in R_+$, e assumindo que elas se movem ao longo do eixo x em direções opostas com momentos (no referencial de laboratório) dados por: $\mathbf{k}_A = -\mathbf{k}_B = (|k|, 0, 0)$.

Agora, podemos discutir as medições de spin quando os detetores agindo nas partículas A e B tem velocidades $\mathbf{v}_A = (v_{d_A}, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_B = (v_{d_B}, 0, 0)$, respectivamente. No referencial próprio de cada um dos detetores, o operador que descreve a medição do spin em uma dada direção \mathbf{u} é dado por $\mathbf{S}^X \cdot \mathbf{u}$. Então, no referencial de laboratório, o operador que descreve o detetor agindo na partícula X = A, B é dado por

$$U^{\dagger}(\Lambda_{d_X}) \left(\mathbf{S}^X \cdot \mathbf{u} \right) U(\Lambda_{d_X}), \tag{4.27}$$

onde

$$\Lambda_{d_X} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha_{d_X} & \sinh \alpha_{d_X} & 0 & 0\\ \sinh \alpha_{d_X} & \cosh \alpha_{d_X} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com $\alpha_{d_X} \equiv -\tanh^{-1} v_{d_X}$. Com isso, se o sistema total está no estado $|\psi\rangle$, a função correlação de spin, $E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, quando os detetores estão em movimento fica

$$E(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 4\langle\psi|\left[U^{\dagger}(\Lambda_{d_{A}})\left(\mathbf{S}^{A}\cdot\mathbf{u}\right)U(\Lambda_{d_{A}})\right]\otimes\left[U^{\dagger}(\Lambda_{d_{B}})\left(\mathbf{S}^{B}\cdot\mathbf{u}\right)U(\Lambda_{d_{B}})\right]|\psi\rangle$$

$$= 4\langle\psi|U^{\dagger}(\Lambda_{d_{A}})\otimes U^{\dagger}(\Lambda_{d_{B}})\left(\mathbf{S}^{A}\cdot\mathbf{u}\right)\otimes\left(\mathbf{S}^{B}\cdot\mathbf{v}\right)U(\Lambda_{d_{A}})\otimes U(\Lambda_{d_{B}})|\psi\rangle,$$

(4.28)

onde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$. Então, os detetores verão, em seus referenciais próprios, o estado $|\psi\rangle$ que descreve o sistema total transformado através da transformação unitária:

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = U(\Lambda_{d_A}) \otimes U(\Lambda_{d_B})|\psi\rangle.$$
 (4.29)

Lembramos, veja a equação (4.7), que a ação do boost $U(\Lambda_{d_X})$ em um 2-espinor $\phi \in L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathbb{C}^2$ é dada por

$$\left(U(\Lambda_{d_X})\phi\right)(\mathbf{p}_X) = \left(\frac{\left(\Lambda_{d_X}^{-1}p_X\right)^0}{p_X^0}\right)^{1/2} D^{\frac{1}{2}}(\Lambda_{d_X}, \Lambda_{d_X}^{-1}p_X)\phi(\Lambda^{-1}\mathbf{p}_X).$$
(4.30)

Das equações (4.9) e (4.10), vemos que

$$D^{\frac{1}{2}}(\Lambda_{d_X}, p_X) = \frac{(p_X^0 + m)\sigma_0^X \cosh(\alpha_{d_X}/2)}{\left\{ (p_X^0 + m)\left[(\Lambda_{d_X} p_X)^0 + m\right] \right\}^{1/2}} + \frac{(p_X^x \sigma_0^X + i\sum_{jk} \epsilon^{1jk} p_X^j \sigma_k^X) \sinh(\alpha_{d_X}/2)}{\left\{ (p_X^0 + m)\left[(\Lambda_{d_X} p_X)^0 + m\right] \right\}^{1/2}}$$
(4.31)

onde $\sigma_0^X = I^X e \sigma_k^X$, $k \in \{1, 2, 3\}$, são as matrizes identidade e de Pauli, respectivamente, agindo nos graus de liberdade de spin da partícula $X e (p_X^1, p_X^2, p_X^3) = (p_X^x, p_X^y, p_X^z)$. Então, usando as equações (4.25), (4.30) e (4.31) obtemos que o estado

$$\psi'(\mathbf{p}_A,\mathbf{p}_B) \equiv (U(\Lambda_{d_A}) \otimes U(\Lambda_{d_B})\psi)(\mathbf{p}_A,\mathbf{p}_B)$$

é

$$\psi'(\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} a_1(\mathbf{p}_A) \\ a_2(\mathbf{p}_A) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1(\mathbf{p}_B) \\ b_2(\mathbf{p}_B) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a_2(\mathbf{p}_A) \\ \overline{a_1}(\mathbf{p}_A) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \overline{b_2}(\mathbf{p}_B) \\ -b_1(\mathbf{p}_B) \end{pmatrix} \right].$$
(4.32)

Esse é o vetor de estado que os detetores de spin irão efetivamente medir. Aqui

$$a_{1}(\mathbf{p}_{A}) = K_{A}f_{\mathbf{k}_{A}}(\mathbf{q}_{A})[C_{A}(q_{A}^{0}+m) + S_{A}(q_{A}^{x}+iq_{A}^{y})],$$

$$a_{2}(\mathbf{p}_{A}) = K_{A}f_{\mathbf{k}_{A}}(\mathbf{q}_{A})S_{A}q_{A}^{z},$$

$$b_{1}(\mathbf{p}_{B}) = -K_{B}f_{\mathbf{k}_{B}}(\mathbf{q}_{B})S_{B}q_{B}^{z},$$

$$b_{2}(\mathbf{p}_{B}) = K_{B}f_{\mathbf{k}_{B}}(\mathbf{q}_{B})[C_{B}(q_{B}^{0}+m) + S_{B}(q_{B}^{x}-iq_{B}^{y})],$$

onde

$$K_X \equiv (q_X^0/p_X^0)^{1/2}/[(q_X^0+m)(p_X^0+m)]^{1/2},$$

$$q_X \equiv \Lambda_{d_X}^{-1}p_X,$$

$$C_X \equiv \cosh(\alpha_{d_X}/2),$$

$$S_X \equiv \sinh(\alpha_{d_X}/2).$$

Agora, como os detetores só medem os graus de liberdade de spin, vamos tomar o traço nos graus de liberdade de momento. Sendo assim, a matriz densidade reduzida τ' é dada por

$$\tau' = \int d\mathbf{p}_A d\mathbf{p}_B \psi'(\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B) {\psi'}^{\dagger}(\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B)$$

= $(\rho_1 \otimes \rho'_1 - \rho_2 \otimes \rho'_2 - \rho_3 \otimes \rho'_3 + \rho_4 \otimes \rho'_4)/2,$ (4.33)

onde

$$\rho_{1} \otimes \rho_{2}' = \begin{pmatrix} \int d\mathbf{p} |a_{1}|^{2} & \int d\mathbf{p} a_{1} \overline{a_{2}} \\ \int d\mathbf{p} \overline{a_{1}} a_{2} & \int d\mathbf{p} |a_{2}|^{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \int d\mathbf{p} |b_{1}|^{2} & \int d\mathbf{p} b_{1} \overline{b_{2}} \\ \int d\mathbf{p} \overline{b_{1}} b_{2} & \int d\mathbf{p} |b_{2}|^{2} \end{pmatrix},$$

$$\rho_{2} \otimes \rho_{2}' = \begin{pmatrix} -\int d\mathbf{p} a_{1} \overline{a_{2}} & \int d\mathbf{p} a_{1}^{2} \\ -\int d\mathbf{p} |a_{2}|^{2} & \int d\mathbf{p} a_{1} a_{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \int d\mathbf{p} b_{1} b_{2} & -\int d\mathbf{p} |b_{1}|^{2} \\ \int d\mathbf{p} \overline{b_{2}} & -\int d\mathbf{p} \overline{b_{1}} b_{2} \end{pmatrix},$$

$$\rho_{3} \otimes \rho_{3}' = \begin{pmatrix} -\int d\mathbf{p} a_{2} \overline{a_{1}} & -\int d\mathbf{p} |a_{2}|^{2} \\ \int d\mathbf{p} \overline{a_{1}} \overline{a_{2}} & \int d\mathbf{p} \overline{a_{1}} a_{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \int d\mathbf{p} \overline{b_{1}} \overline{b_{2}} & \int d\mathbf{p} \overline{b_{2}}^{2} \\ -\int d\mathbf{p} \overline{b_{1}} b_{2} & -\int d\mathbf{p} \overline{b_{2}} b_{1} \end{pmatrix},$$

$$\rho_{4} \otimes \rho_{4}' = \begin{pmatrix} \int d\mathbf{p} |a_{2}|^{2} & -\int d\mathbf{p} a_{1} a_{2} \\ -\int d\mathbf{p} \overline{a_{1}} a_{2} & \int d\mathbf{p} |a_{1}|^{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \int d\mathbf{p} |b_{2}|^{2} & -\int d\mathbf{p} \overline{b_{1}} b_{2} \\ -\int d\mathbf{p} \overline{b_{1}} b_{2} & \int d\mathbf{p} |b_{1}|^{2} \end{pmatrix}. (4.34)$$

Como a transformação $U(\Lambda_{d_X})$ é unitária,

$$1 = \int d\mathbf{p} |f_{\mathbf{k}_A}|^2 = \int d\mathbf{p} (|a_1|^2 + |a_2|^2).$$
(4.35)

Portanto, definido $V(\alpha_{d_A}) \equiv \int d\mathbf{p} |a_2|^2$, obtemos que $\int d\mathbf{p} |a_1|^2 = 1 - V(\alpha_{d_A})$. Explicitamente, $V(\alpha_{d_A})$ é dado por

$$V(\alpha_{d_A}) = \sinh^2\left(\frac{\alpha_{d_A}}{2}\right) \int d\mathbf{q}_A \frac{|f_{\mathbf{k}_A}(\mathbf{q}_A)|^2 q_A^{z^2}}{(q_A^0 + m)(p_A^0 + m)},\tag{4.36}$$

onde foi usado que $d\mathbf{p}_X/p_X^0 = d\mathbf{q}_X/q_X^0$ e $q_X = \Lambda_{d_X}^{-1}p_X$. Vamos analisar agora o termo $\int d\mathbf{p}a_1\overline{a_2}$. Integrando primeiro em q^z e usando que as funções a_1 e a_2 são par e ímpar em q^z , respectivamente, vemos que $\int d\mathbf{p}a_1\overline{a_2} = 0$. Em seguida, calculando $(a_1)^2$ e $|a_1|^2$ e integrando-os, encontramos a relação

$$\int d\mathbf{p} \ |a_1|^2 = \int d\mathbf{p} \ (a_1)^2 + 2V. \tag{4.37}$$

Com isso, como $\int d\mathbf{p} |a_1|^2 = 1 - V$, temos que $\int d\mathbf{p} (a_1)^2 = 1 - 3V$.

Procedendo de maneira análoga para os outros coeficientes da equação (4.34) associados com a partícula B obtemos, definindo $W(\alpha_{d_B}) \equiv \int d\mathbf{p} |b_1|^2$, que

$$\int d\mathbf{p} \ |b_2|^2 = 1 - W, \int d\mathbf{p} \ b_1 \overline{b_2} = 0 \ e \ \int d\mathbf{p} \ (b_2)^2 = 1 - 3W,$$

onde

$$W(\alpha_{d_B}) \equiv \sinh^2\left(\frac{\alpha_{d_B}}{2}\right) \int d\mathbf{q}_B \frac{|f_{\mathbf{k}_B}(\mathbf{q}_B)|^2 q_B^{z^2}}{(q_B^0 + m)(p_B^0 + m)}.$$
(4.38)

Logo, temos

$$\begin{aligned} \tau' &= \begin{pmatrix} 1-V & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 1-W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1-3V \\ -V & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -W \\ 1-3W & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -V \\ 1-3V & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1-3W \\ -W & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & 1-V \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1-W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Figura 4.1: $F(\phi)$ dado na equação (4.45) é plotado como uma função de ϕ com $\tilde{w} = 4$ para diferentes valores de α . Os gráficos da esquerda e direita assumem $|\tilde{k}| = 0.01$ e $|\tilde{k}| = 100$, respectivamente. Para $\alpha = 0$ recuperamos o resultado usual das desigualdades de Bell. Para $\alpha \gtrsim 1.39$, e $\alpha \gtrsim 3.12$, temos que $F(\phi) < 2$ para os resultados da esquerda e direita, respectivamente.

Agora, vamos usar os resultados acima para investigar a equação (4.20). Como vimos na Seção (3.4.2), o lado esquerdo dessa equação pode ser expresso como

$$|E(\mathbf{a_2}, \mathbf{b_1}) + E(\mathbf{a_2}, \mathbf{b_2}) + E(\mathbf{a_1}, \mathbf{b_1}) - E(\mathbf{a_1}, \mathbf{b_2})| = |\langle C \rangle_{\tau'}|$$
(4.39)

onde $\langle C \rangle_{\tau'} = \operatorname{tr}(\tau' C)$ e lembramos que

$$C = (\boldsymbol{\sigma}^A \cdot \mathbf{a_2}) \otimes [\boldsymbol{\sigma}^B \cdot (\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2})] + (\boldsymbol{\sigma}^A \cdot \mathbf{a_1}) \otimes [\boldsymbol{\sigma}^B \cdot (\mathbf{b_1} - \mathbf{b_2})].$$

Usando que

$$\langle (\boldsymbol{\sigma}^A \cdot \mathbf{u}) \otimes (\boldsymbol{\sigma}^B \cdot \mathbf{v}) \rangle_{\tau'} = -(1 - 2V)(1 - 2W) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$
 (4.40)

onde $\mathbf{u}, \mathbf{v} = \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, podemos colocar a equação (4.39) na forma

$$\begin{split} |\langle C \rangle_{\tau'}| &= |\langle (\boldsymbol{\sigma}^A \cdot \mathbf{a_2}) \otimes (\boldsymbol{\sigma}^B \cdot \mathbf{b_1}) \rangle_{\tau'} + \langle (\boldsymbol{\sigma}^A \cdot \mathbf{a_2}) \otimes (\boldsymbol{\sigma}^B \cdot \mathbf{b_2}) \rangle_{\tau'} \\ &+ \langle (\boldsymbol{\sigma}^A \cdot \mathbf{a_1}) \otimes (\boldsymbol{\sigma}^B \cdot \mathbf{b_1}) \rangle_{\tau'} - \langle (\boldsymbol{\sigma}^A \cdot \mathbf{a_1}) \otimes (\boldsymbol{\sigma}^B \cdot \mathbf{b_2}) \rangle_{\tau'} | \end{split}$$

e finalmente como

$$|\langle C \rangle_{\tau'}| = (1 - 2V)(1 - 2W) |\langle C \rangle_{\tau'}^{0}|$$
(4.41)

com

$$|\langle C \rangle_{\tau'}^{0}| = |\mathbf{a_2} \cdot \mathbf{b_1} + \mathbf{a_2} \cdot \mathbf{b_2} + \mathbf{a_1} \cdot \mathbf{b_1} - \mathbf{a_1} \cdot \mathbf{b_2}|.$$

Note que quando os detetores estão em repouso, $\alpha_{d_A} = \alpha_{d_B} = 0$, recuperamos o resultado: $|\langle C \rangle_{\tau'}| = |\langle C \rangle_{\tau'}^0|$, i.e. a não trivialidade introduzida pelo movimento dos detetores pode



Figura 4.2: $F(\phi)$ dado na equação (4.45) é plotado como uma função de ϕ assumindo $\alpha \to \infty$ para diferentes valores de \tilde{w} . Os gráficos da esquerda e direita assumem $|\tilde{k}| = 0.01$ e $|\tilde{k}| = 100$, respectivamente. Para $\tilde{w} = 0$ recuperamos o resultado usual das desigualdades de Bell. Para $\tilde{w} \gtrsim 0.87$ e $\tilde{w} \gtrsim 0.37$, temos que $F(\phi) < 2$ para os gráficos da esquerda e direita, respectivamente.

ser isolada no fator multiplicativo (1 - 2V)(1 - 2W). Definindo α_i , β_i (i = 1, 2) como os ângulos entre **a**_i, **b**_i e o eixo y, respectivamente, obtemos

$$|\langle C \rangle_{\tau'}{}^{0}| = |\cos(\alpha_{2} - \beta_{1}) + \cos(\alpha_{2} - \beta_{2}) + \cos(\alpha_{1} - \beta_{1}) - \cos(\alpha_{1} - \beta_{2})|.$$

Vamos analisar primeiro o caso em que $\mathbf{a_2} = \mathbf{b_1}$. Assumindo isso e

$$\phi \equiv \cos^{-1}(\mathbf{a_1} \cdot \mathbf{a_2}) = \cos^{-1}(\mathbf{b_1} \cdot \mathbf{b_2}),$$

obtemos

$$|\langle C \rangle_{\tau'}|_{\mathbf{a_2} = \mathbf{b_1}} = (1 - 2V)(1 - 2W) |1 + 2\cos\phi - \cos(2\phi)|.$$
(4.42)

Vamos nos concentrar no caso em que ambos os detetores movem-se em direções opostas com a mesma rapidez (resultados análogos são obtidos nos outros casos): $\alpha_{d_A} = -\alpha_{d_B} =$ $-|\alpha|$, i.e. $v_{d_A} = -v_{d_B} = \tanh |\alpha|$. (Para $|\tilde{k}| \equiv |k|/m \ll 1$, uma análise numérica mostra que resultados similares são obtidos não importando se os detetores se afastam ou se aproximam, como deveria ser.) Por simplicidade, vamos definir

$$F(\phi) \equiv |\langle C \rangle_{\tau'}|_{\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_1}^{\alpha_{d_A} = -\alpha_{d_B}}.$$

Então, usando as equações (4.36)-(4.38) temos

$$V(-|\alpha|) = W(|\alpha|)$$

= $\frac{\sinh^2(|\alpha|/2)}{\sqrt{\pi}\tilde{w}^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{q}^x \int_0^{\infty} d\tilde{q}^r G(\tilde{q}^x, \tilde{q}^r)$ (4.43)

onde usamos coordenadas cilíndricas com q^x como eixo de simetria e

$$G(\tilde{q}^{x}, \tilde{q}^{r}) = \frac{(\tilde{q}^{r})^{3} \exp\left[-((\tilde{q}^{x} - |\tilde{k}|)^{2} + (\tilde{q}^{r})^{2})/\tilde{w}^{2}\right]}{(\tilde{q}^{0} + 1)(\tilde{q}^{0} \cosh|\alpha| - \tilde{q}^{x} \sinh|\alpha| + 1)}$$
(4.44)

com $\tilde{q}^r = q^r/m$, $\tilde{q}^x = q^x/m$, $\tilde{q}^0 = \sqrt{(\tilde{q}^x)^2 + (\tilde{q}^r)^2 + 1}$, $|\tilde{k}| = |k|/m$ e $\tilde{w} = w/m$. Então, finalmente obtemos a seguinte expressão:

$$F(\phi) = F_0 |1 + 2\cos\phi - \cos(2\phi)|, \qquad (4.45)$$

onde $F_0 = [1 - 2V(-|\alpha|)]^2$. Quando o pacote de onda é muito estreito no espaço dos momentos, i.e. $\tilde{w} \ll 1$, é fácil resolver a integral na equação (5.53) analiticamente para o caso em que as partículas movem-se lentamente, i.e. $\tilde{k} \approx 0$. Basta expandir o integrando em série de potências em $\tilde{q}^x \in \tilde{q}^r$, resolver as integrais Gaussianas e reter apenas os termos de ordem mais baixa em \tilde{w} . Com isso, podemos escrever a equação (4.45) como

$$F(\phi)|_{\tilde{w}\ll 1}^{\tilde{k}\approx 0} = \left(1 - \frac{\tilde{w}^2}{4} \tanh^2 \frac{|\alpha|}{2}\right)^2 |1 + 2\cos\phi - \cos(2\phi)|.$$
(4.46)

Vemos facilmente que para $\tilde{w} \to 0$, recuperamos o resultado usual da desigualdade de Bell independentemente da velocidade dos detetores, i.e. a não trivialidade gerada pelo movimento do detetor na equação (4.46) não está presente quando as partículas emaranhadas são descritas por auto-estados de momento [95, 96]. Isso acontece porque somente quando as partículas são descritas por pacotes de onda, $|\psi\rangle$ (que é um *estado puro* de acordo com os observadores em repouso no referencial de laboratório) é um *estado misto* para os observadores em movimento, quando estes ignoram os graus de liberdade de momento [11]. Como a transformação (4.30) depende do momento, vemos que ela emaranha esses graus de liberdade com os graus de liberdade de spin. Isso faz com que a informação armazenada apenas em spin quando os detetores estão parados passe a estar armazenada também nas correlações entre spin e momento quando os detetores estão em movimento. Isso faz com que essa informação fique escondida ao se traçar os graus de liberdade de momento.

Na Figura 4.1 nós plotamos $F(\phi)$ para diferentes velocidades dos detetores, i.e. $|\alpha|$'s, assumindo um pacote de onda com $\tilde{w} = 4$. Os gráficos na esquerda e na direita tomam $|\tilde{k}| = 0.01 \text{ e } |\tilde{k}| = 100$, respectivamente. Note que o resultado usual para a desigualdade de Bell é recuperado para $\alpha = 0$ mas deixa de ser recuperado quando os detetores se movem. De fato, $F(\phi)$ decresce conforme a velocidade dos detetores cresce. Para $\alpha \gtrsim 1.39$, e $\alpha \gtrsim 3.12$, temos que $F(\phi) < 2$ para todos os valores de ϕ para os casos $|\tilde{k}| = 0.01$ e $|\tilde{k}| = 100$, respectivamente, i.e. para esses intervalos de α a desigualdade de Bell não é violada para nenhum valor de ϕ . Na Figura 4.2 plotamos $F(\phi)$ para diferentes valores de \tilde{w} quando os detetores movem-se com velocidades ultra-relativisticas: $\alpha \to \infty$. Novamente assumimos que $|\tilde{k}| = 0.01$ e $|\tilde{k}| = 100$ para os gráficos da esquerda e da direita, respectivamente. Vemos que para $\tilde{w} \to 0$, recuperamos o resultado usual para a



Figura 4.3: $J(\alpha)$ dado na equação (4.47) é plotado como uma função de α assumindo $\tilde{w} = 4$ e $|\tilde{k}| = 100$. Para $\alpha = 0$ recuperamos o resultado usual das desigualdades de Bell. Para todo $\alpha \gtrsim 3.97$, temos que $J(\alpha) < 2$ e portanto não há violação das desigualdades de Bell. Bell.

desigualdade de Bell porém, conforme a largura \tilde{w} aumenta, $F(\phi)$ diminui. Isso reflete que a não trivialidade associada com o movimento dos detetores não se manifesta quando as partículas emaranhadas são descritas por auto-estados de momento. Para $\tilde{w} \gtrsim 0.87$ e $\tilde{w} \gtrsim 0.37$ temos que $F(\phi) < 2$ para todos os valores de ϕ para os gráficos da esquerda e direita, respectivamente.

Por fim, vamos analisar o comportamento da desigualdade de Bell em função da velocidade dos detetores para a configuração $\mathbf{a}_1 = (0, 0, 1), \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{b}_1 = -(0, 1/\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $\mathbf{b}_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Como vimos na Seção 3.4.2, tal configuração leva à uma violação máxima das desigualdades de Bell. Substituindo os \mathbf{a}_i e \mathbf{b}_i acima na equação (4.41) e assumindo novamente que $\alpha_{d_A} = -\alpha_{d_B} = -|\alpha|$, obtemos

$$J(\alpha) \equiv |\langle C \rangle_{\tau'}| = 2\sqrt{2}[1 - 2V(-|\alpha|)]^2.$$
(4.47)

Na Figura (4.3), plotamos $J(\alpha)$ em função da rapidez α dos detetores. Vemos que conforme α cresce, $J(\alpha)$ decresce até que, a partir de $\alpha \sim 3.97$, a desigualdade de Bell não é mais violada.

Algum esforço experimental para verificar a influência do movimento dos detetores nas desigualdades de Bell pode ser encontrado em [97]. A generalização natural dos resultados acima para fótons exige o emaranhamento de fótons polarizados horizontal e verticalmente. Analisaremos tais sistemas na próxima seção. Entretanto, a referência [97] utiliza fótons emaranhados em tempo-energia o que torna os resultados difíceis de serem comparados. Experimentos testando a desigualdade de Bell CHSH para férmions foram realizados recentemente [98, 99]. O aspecto mais desafiador para testar os resultados acima consiste em dar um boost nos detetores para que estes atinjam altas velocidades. Esse problema pode ser contornado mantendo os detetores em repouso e dando um boost apropriado nos estados: $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U(\Lambda_{d_A}) \otimes U(\Lambda_{d_B})|\psi\rangle$. Verificar experimentalmente os resultados analisados aqui seria extremamente interessante já que seria uma verificação experimental indireta de todo o arcabouço teórico utilizado.

4.3 A Influência do Movimento dos Detetores em Medidas com Fótons Emaranhados

Atualmente, há um grande interesse em testar a mecânica quântica em grandes escalas espaciais e implementar protocolos de informação quântica em escala global [100, 101, 102, 103, 104]. Fótons parecem ser os sistemas físicos ideais para tais propósitos. Como a tecnologia atual limita o uso de fibras óticas nesse contexto a uma distância da ordem de 100 km [105], a alternativa mais viável para ir além é a da transmissão pelo espaço livre usando satélites e estações terrestres [14, 15, 16]. Aqui, não vamos discutir os enormes desafios tecnológicos associados a esses experimentos. Ao invés disso, vamos nos concentrar em uma restrição física intrínseca imposta pelo movimento dos satélites quando a relatividade especial é levada em conta [18]. Abordaremos essa questão estudando as desigualdades de Bell CHSH para dois fótons emaranhados quando um dos detetores tem uma certa velocidade.

Vamos tomar um sistema composto por dois fótons, $A \in B$, emitidos em uma cascata SPS [36] em direções opostas ao longo do eixo z. As polarizações dos fótons $A \in B$ são medidas em direções arbitrárias definidas pelos vetores unitários $\mathbf{a}_i \in \mathbf{b}_j$ (i, j = 1, 2), respectivamente, que são ortogonais ao eixo z. A distância entre os dois detetores é grande o suficiente para fazer as duas medições desconectadas causalmente. Então, como já vimos na Seção 3.4.2, qualquer teoria realista e local satisfaz a desigualdade de Bell CHSH

$$|E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) + E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) + E(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) - E(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| \le 2.$$
(4.48)

Aqui,

$$E(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) \equiv \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P_n^A(\mathbf{a}_i) P_n^B(\mathbf{b}_j)$$
(4.49)

é a função de correlação de polarização obtida após a realização de um número arbitrariamente grande N de experimentos e $P_n^A(\mathbf{a}_i)$ assume os valores +1 ou -1 dependendo se a polarização do fóton A é medida ao longo de \mathbf{a}_i ou ortogonal a ela, respectivamente, e analogamente para $P_n^B(\mathbf{b}_j)$.

Agora, vamos estudar a desigualdade (4.48) no contexto da mecânica quântica, quando um dos detetores (por exemplo, carregado por um satélite) se move ao longo do eixo z. Aqui, será conveniente usar a notação de Dirac. Os estados normalizados do sistema de

4.3 A Influência do Movimento dos Detetores em Medidas com Fótons Emaranhados

dois fótons são escritos como [106, 107]

$$|\psi\rangle = \sum_{\lambda_A,\lambda_B} \int d\mathbf{k}_A d\mathbf{k}_B \,\psi_{\lambda_A\lambda_B}(\mathbf{k}_A,\mathbf{k}_B) |\mathbf{k}_A,\hat{\epsilon}^{\lambda_A}_{\mathbf{k}_A}\rangle \otimes |\mathbf{k}_B,\hat{\epsilon}^{\lambda_B}_{\mathbf{k}_B}\rangle \tag{4.50}$$

onde

$$\langle \mathbf{k}'_X | \mathbf{k}_X \rangle = \delta(\mathbf{k}'_X - \mathbf{k}_X), \quad \langle \hat{\epsilon}^{\lambda_X}_{\mathbf{k}_X} | \hat{\epsilon}^{\lambda'_X}_{\mathbf{k}_X} \rangle = \delta_{\lambda_X, \lambda'_X},$$

е

$$\sum_{\lambda_A,\lambda_B} \int d\mathbf{k}_A d\mathbf{k}_B |\psi_{\lambda_A \lambda_B}(\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B)|^2 = 1.$$
(4.51)

Aqui, X = A, B distingue entre as duas partículas, $k_X = (\|\mathbf{k}_X\|, \mathbf{k}_X)$ é o quadrimomento da partícula X e $\lambda_X = \pm 1$ descreve dois auto-estados de helicidade ortogonais $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_X}^{\lambda_X}\rangle$ para um momento espacial fixo \mathbf{k}_X . Aqui, $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_X}^{\lambda_X}\rangle$ está associado com o vetor complexo

$$\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_X}^{\lambda_X} = R(\hat{\mathbf{k}}_X)\hat{\epsilon}_z^{\lambda_X},\tag{4.52}$$

onde $\hat{\epsilon}_z^{s_X} \equiv (1/\sqrt{2})(1,is_X,0)$ são vetores ortonormais no plano $x \bot y$ e

$$R(\hat{\mathbf{k}}_X) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta & \cos\phi\sin\theta\\ \cos\theta\sin\phi & \cos\phi & \sin\phi\sin\theta\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$
(4.53)

é a matriz que leva $\hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 1)$ em

$$\hat{\mathbf{k}}_X = \mathbf{k}_X / \|\mathbf{k}_X\| \equiv (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

com θ, ϕ sendo os ângulos esféricos usuais. Em seguida, usando $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_X}^{\lambda_X}\rangle$, definimos um novo par de estados normalizados [106]

$$|\hat{\mathbf{e}}_{x}(\mathbf{k}_{X})\rangle = \frac{x_{+}(\mathbf{k}_{X})|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_{X}}^{+}\rangle + x_{-}(\mathbf{k}_{X})|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_{X}}^{-}\rangle}{[|x_{+}(\mathbf{k}_{X})|^{2} + |x_{-}(\mathbf{k}_{X})|^{2}]^{1/2}},$$
(4.54)

 \mathbf{e}

$$|\hat{\mathbf{e}}_{y}(\mathbf{k}_{X})\rangle = \frac{y_{+}(\mathbf{k}_{X})|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_{X}}^{+}\rangle + y_{-}(\mathbf{k}_{X})|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_{X}}^{-}\rangle}{[|y_{+}(\mathbf{k}_{X})|^{2} + |y_{-}(\mathbf{k}_{X})|^{2}]^{1/2}},$$
(4.55)

associados com os vetores unitários $\hat{\mathbf{e}}_x(\mathbf{k}_X) \in \hat{\mathbf{e}}_y(\mathbf{k}_X)$ que (i) são os vetores unitários mais próximos a $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0, 0) \in \hat{\mathbf{y}} = (0, 1, 0)$, respectivamente, e (ii) estão contidos no plano ortogonal a \mathbf{k}_X . Aqui,

$$x_{\pm}(\mathbf{k}_X) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\theta \cos\phi \pm i\sin\phi), \qquad (4.56)$$

$$y_{\pm}(\mathbf{k}_X) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\theta \sin\phi \mp i \cos\phi), \qquad (4.57)$$

e notamos que $\hat{\mathbf{e}}_x(\mathbf{k}_X)$ e $\hat{\mathbf{e}}_y(\mathbf{k}_X)$ não precisam ser mutuamente ortogonais. Usando as equações (4.54)-(4.55), os estados de polarização horizontal e vertical podem ser definidos como

$$|H_X\rangle = \int d\mathbf{k}_X f_{\mathbf{p}_X}(\mathbf{k}_X) |\mathbf{k}_X, \hat{\mathbf{e}}_x(\mathbf{k}_X)\rangle$$
(4.58)

е

$$|V_X\rangle = \int d\mathbf{k}_X f_{\mathbf{p}_X}(\mathbf{k}_X) |\mathbf{k}_X, \hat{\mathbf{e}}_y(\mathbf{k}_X)\rangle, \qquad (4.59)$$

respectivamente, onde a função Gaussiana $f_{\mathbf{p}_X}(\mathbf{k}_X)$ dá a dispersão em momento do fóton. Impondo que a dispersão está restrita ao plano $x \perp y$ e é descrita por uma função Gaussiana, escrevemos

$$|f_{\mathbf{p}_X}(\mathbf{k}_X)|^2 = \pi^{-1} w^{-2} \delta(k_X^z - p_X^z) e^{-(k_X^r/w)^2} \quad (w > 0),$$
(4.60)

onde $k_X^r \equiv \sqrt{(k_X^x)^2 + (k_X^y)^2}$ e assumimos que $\mathbf{p}_A = -\mathbf{p}_B = (0, 0, |p|)$ já que os fótons A e B movem-se em direções opostas ao longo do eixo z.

Assumindo agora que o sistema de dois fótons foi preparado, no referencial de laboratório, no estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H_A\rangle \otimes |H_B\rangle + |V_A\rangle \otimes |V_B\rangle), \qquad (4.61)$$

vamos investigar as correlações de polarização quando o detetor que mede, por exemplo, o fóton A é carregado por um satélite com velocidade $\mathbf{v} = (0, 0, v)$, enquanto o outro, que mede o fóton B, permanece em repouso na estação terrestre. Sendo assim, de maneira análoga à equação (4.29), o estado que os detetores irão efetivamente medir é

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = U_A(\Lambda) \otimes I_B |\psi\rangle,$$
 (4.62)

onde I_B é o operador identidade no espaço de Hilbert da partícula B e

$$U_A(\Lambda)|\mathbf{k}_A, \hat{\epsilon}^{\lambda_A}_{\mathbf{k}_A}\rangle = \left[(\Lambda \ k_A)^0 / k_A^0 \right]^{1/2} \sum_{\lambda'_A = \pm 1} D_{\lambda'_A \lambda_A}(\Lambda, \mathbf{k}_A) |\Lambda \mathbf{k}_A, \hat{\epsilon}^{\lambda'_A}_{\Lambda \mathbf{k}_A} \rangle.$$
(4.63)

Como vimos na Seção 4.1.1

$$D_{\lambda'_A \lambda_A}(\Lambda, \mathbf{k}_A) = \exp\left[-i\lambda'_A \varphi(\Lambda, \mathbf{k}_A)\right] \delta_{\lambda'_A \lambda_A}$$
(4.64)

é a rotação de Wigner, onde $\varphi(\Lambda, \mathbf{k}_A)$ é o fator de fase [93, 108, 109]. Recordamos que $\Lambda \mathbf{k}_A$ denota a parte espacial do quadrivetor Λk_A . Como tomamos o satélite movendo-se ao longo da direção z com velocidade v, a matriz de boost Λ correspondente é

$$\Lambda_{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & 0 & 0 & \sinh \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \alpha & 0 & 0 & \cosh \alpha \end{pmatrix}$$

 $\operatorname{com} \alpha \equiv -\tanh^{-1} v$. Pela equação (4.19), vemos que $\varphi(\Lambda_{\mathcal{Z}}, \mathbf{k}_A) = 0$. Usando as equações (4.61), (4.62) e (4.63) obtemos

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H_A'\rangle \otimes |H_B\rangle + |V_A'\rangle \otimes |V_B\rangle), \qquad (4.65)$$

onde

$$\begin{aligned} |H_A'\rangle &= \int d\mathbf{k}_A \sqrt{([\Lambda_{\mathcal{Z}}]^{-1}k_A)^0/k_A^0} f_{\mathbf{p}_A}([\Lambda_{\mathcal{Z}}]^{-1}\mathbf{k}_A) \\ \times \frac{x_+([\Lambda_{\mathcal{Z}}]^{-1}\mathbf{k}_A)|\mathbf{k}_A, \hat{\epsilon}^+_{\mathbf{k}_A}\rangle + x_-([\Lambda_{\mathcal{Z}}]^{-1}\mathbf{k}_A)|\mathbf{k}_A, \hat{\epsilon}^-_{\mathbf{k}_A}\rangle}{[|x_+([\Lambda_{\mathcal{Z}}]^{-1}\mathbf{k}_A)|^2 + |x_-([\Lambda_{\mathcal{Z}}]^{-1}\mathbf{k}_A)|^2]^{1/2}}, \end{aligned}$$
(4.66)
$$|V_A'\rangle &= \int d\mathbf{k}_A \sqrt{([\Lambda_{\mathcal{Z}}]^{-1}k_A)^0/k_A^0} f_{\mathbf{p}_A}([\Lambda_{\mathcal{Z}}]^{-1}\mathbf{k}_A) \\ \times \frac{y_+([\Lambda_{\mathcal{Z}}]^{-1}\mathbf{k}_A)|\mathbf{k}_A, \hat{\epsilon}^+_{\mathbf{k}_A}\rangle + y_-([\Lambda_{\mathcal{Z}}]^{-1}\mathbf{k}_A)|\mathbf{k}_A, \hat{\epsilon}^-_{\mathbf{k}_A}\rangle}{[|y_+([\Lambda_{\mathcal{Z}}]^{-1}\mathbf{k}_A)|^2 + |y_-([\Lambda_{\mathcal{Z}}]^{-1}\mathbf{k}_A)|^2]^{1/2}}. \end{aligned}$$
(4.67)

Agora, vamos restringir as medidas de polarização dos fótons ao plano $x \perp y$. Então, é útil definir os operadores

$$P_{xx}^X = |\hat{x}_X\rangle \langle \hat{x}_X| \otimes I_{\mathbf{k}}^X, \qquad P_{xy}^X = |\hat{x}_X\rangle \langle \hat{y}_X| \otimes I_{\mathbf{k}}^X, \tag{4.68}$$

$$P_{yy}^X = |\hat{y}_X\rangle \langle \hat{y}_X| \otimes I_{\mathbf{k}}^X, \qquad P_{yx}^X = |\hat{y}_X\rangle \langle \hat{x}_X| \otimes I_{\mathbf{k}}^X, \tag{4.69}$$

onde $I^X_{\mathbf{k}}$ é o operador identidade agindo no espaço de momento da partícula X e

$$|\hat{x}_X\rangle \equiv x_+(\mathbf{k}_X)|\hat{\epsilon}^+_{\mathbf{k}_X}\rangle + x_-(\mathbf{k}_X)|\hat{\epsilon}^-_{\mathbf{k}_X}\rangle + x_l(\mathbf{k}_X)|\hat{\epsilon}^l_{\mathbf{k}_X}\rangle$$
(4.70)

е

$$|\hat{y}_X\rangle \equiv y_+(\mathbf{k}_X)|\hat{\epsilon}^+_{\mathbf{k}_X}\rangle + y_-(\mathbf{k}_X)|\hat{\epsilon}^-_{\mathbf{k}_X}\rangle + y_l(\mathbf{k}_X)|\hat{\epsilon}^l_{\mathbf{k}_X}\rangle$$
(4.71)

estão associados com os vetores unitários $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0, 0)$ e $\hat{\mathbf{y}} = (0, 1, 0)$, respectivamente. Recordamos que $x_{\pm}(\mathbf{k}_X)$ e $y_{\pm}(\mathbf{k}_X)$ são dados nas equações (4.56) e (4.57) e $x_l(\mathbf{k}_X) \equiv \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_X$, $y_l(\mathbf{k}_X) \equiv \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_X$. Para podermos formar uma base ortonormal, introduzimos um estado de polarização longitudinal não físico $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_X}^l\rangle$ associado com o vetor $\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_X}^l \equiv \hat{\mathbf{k}}_X$. Usando as equações (4.68)-(4.69), podemos definir o operador

$$\sigma_{\varphi}^X = (P_{xx}^X - P_{yy}^X)\cos 2\varphi + (P_{xy}^X + P_{yx}^X)\sin 2\varphi, \qquad (4.72)$$

que será útil para calcularmos o lado esquerdo da desigualdade de Bell CHSH (4.48). Os auto-valores +1 e -1 do operador σ_{φ}^X correspondem a auto-estados de polarização com direções que formam ângulos $\varphi \in \varphi + \pi/2$ com relação ao eixo x, respectivamente. A correlação entre as medidas de polarização para as duas partículas A e B associadas com direções definidas pelos ângulos $\varphi \in \varpi$, respectivamente, é dada por

$$\langle \sigma_{\varphi}^{A} \otimes \sigma_{\varpi}^{B} \rangle_{\Psi} = \langle \Psi | \sigma_{\varphi}^{A} \otimes \sigma_{\varpi}^{B} | \Psi \rangle, \qquad (4.73)$$

onde $|\Psi\rangle$ é o estado do sistema de dois fótons.

Usando a equação (4.65) vemos que

$$\langle \sigma_{\varphi}^{A} \otimes \sigma_{\varpi}^{B} \rangle_{\Psi'} = \frac{1}{2} \Big[\langle H_{A}' | \sigma_{\varphi} | H_{A}' \rangle \langle H_{B} | \sigma_{\varpi} | H_{B} \rangle + \langle H_{A}' | \sigma_{\varphi} | V_{A}' \rangle \langle H_{B} | \sigma_{\varpi} | V_{B} \rangle + \langle V_{A}' | \sigma_{\varphi} | H_{A}' \rangle \langle V_{B} | \sigma_{\varpi} | H_{B} \rangle + \langle V_{A}' | \sigma_{\varphi} | V_{A}' \rangle \langle V_{B} | \sigma_{\varpi} | V_{B} \rangle \Big].$$

$$(4.74)$$

Usando as equações (4.68)-(4.69) e (4.72), obtemos

$$\langle H'_{A} | \sigma_{\varphi} | H'_{A} \rangle = \left(\langle H'_{A} | P_{xx} | H'_{A} \rangle - \langle H'_{A} | P_{yy} | H'_{A} \rangle \right) \cos 2\varphi$$

+
$$\left(\langle H'_{A} | P_{xy} | H'_{A} \rangle + \langle H'_{A} | P_{yx} | H'_{A} \rangle \right) \sin 2\varphi,$$
(4.75)

com

$$\langle H'_{A}|P_{xx}|H'_{A}\rangle = \int d\mathbf{k}_{A} \frac{q_{A}^{0}}{k_{A}^{0}} |f_{p_{A}}(\mathbf{q}_{A})|^{2} \frac{|x_{+}(\mathbf{q}_{A})\overline{x}_{+}(\mathbf{k}_{A}) + x_{-}(\mathbf{q}_{A})\overline{x}_{-}(\mathbf{k}_{A})|^{2}}{|x_{+}(\mathbf{q}_{A})|^{2} + |x_{-}(\mathbf{q}_{A})|^{2}} \langle H'_{A}|P_{yy}|H'_{A}\rangle = \int d\mathbf{k}_{A} \frac{q_{A}^{0}}{k_{A}^{0}} |f_{p_{A}}(\mathbf{q}_{A})|^{2} \frac{|x_{+}(\mathbf{q}_{A})\overline{y}_{+}(\mathbf{k}_{A}) + x_{-}(\mathbf{q}_{A})\overline{y}_{-}(\mathbf{k}_{A})|^{2}}{|x_{+}(\mathbf{q}_{A})|^{2} + |x_{-}(\mathbf{q}_{A})|^{2}} \langle H'_{A}|P_{xy}|H'_{A}\rangle = \int d\mathbf{k}_{A} \frac{q_{A}^{0}}{k_{A}^{0}} |f_{p_{A}}(\mathbf{q}_{A})|^{2} \frac{[x_{+}(\mathbf{q}_{A})\overline{x}_{+}(\mathbf{k}_{A}) + x_{-}(\mathbf{q}_{A})\overline{x}_{-}(\mathbf{k}_{A})]}{\sqrt{|x_{+}(\mathbf{q}_{A})|^{2} + |x_{-}(\mathbf{q}_{A})|^{2}}} \times \frac{[x_{+}(\mathbf{q}_{A})\overline{y}_{+}(\mathbf{k}_{A}) + x_{-}(\mathbf{q}_{A})\overline{y}_{-}(\mathbf{k}_{A})]}{\sqrt{|x_{+}(\mathbf{q}_{A})|^{2} + |x_{-}(\mathbf{q}_{A})|^{2}}},$$

$$(4.76)$$

onde $q_A = \Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1} k_A$ e lembramos que $\langle H'_A | P_{xy} | H'_A \rangle = \overline{\langle H'_A | P_{yx} | H'_A \rangle}$. Notemos que, dado $\mathbf{c} / \| \mathbf{c} \| = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \in \mathbb{R}^3$,

$$\cos \theta = \frac{c^{z}}{\sqrt{(c^{z})^{2} + (c^{r})^{2}}}$$

$$\sin \theta = \frac{c^{r}}{\sqrt{(c^{z})^{2} + (c^{r})^{2}}},$$
(4.77)

com $c^r = \sqrt{(c^x)^2 + (c^y)^2}$. Então, fazendo a mudança de variáveis $q_A = \Lambda_z^{-1} k_A$, usando que $d\mathbf{q}_A/q^0 = d\mathbf{k}_A/k_A^0$ e escrevendo as integrais acima em coordenadas cilíndricas tendo q^z como eixo de simetria obtemos

$$A(\alpha) = \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\infty} d\tilde{q}^{r} \frac{e^{-\frac{(\tilde{q}^{r})^{2}}{W^{2}}} \tilde{q}^{r} \tilde{\epsilon}^{2}}{\pi W^{2} (1 + (\tilde{q}^{r})^{2} \sin^{2} \phi)} \left[\frac{(\tilde{\epsilon} \sinh \alpha + \cosh \alpha) \cos^{2} \phi}{\tilde{\epsilon} (\tilde{\epsilon} \cosh \alpha + \sinh \alpha)} + \sin^{2} \phi \right]^{2}$$

$$B(\alpha) = \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\infty} d\tilde{q}^{r} \frac{(\tilde{q}^{r})^{5} \cos^{2} \phi \sin^{2} \phi \cosh^{2} \alpha}{\pi W^{2} (1 + (\tilde{q}^{r})^{2} \sin^{2} \phi) (\tilde{\epsilon} \cosh \alpha + \sinh \alpha)^{2}}$$

$$C(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi' \int_{0}^{\infty} d\tilde{q}^{r} \frac{e^{-\frac{(\tilde{q}^{r})^{2}}{W^{2}}} \tilde{\epsilon}^{2}}{\pi W^{2} (1 + (\tilde{q}^{r})^{2} \sin^{2} \phi)} \left[\frac{(\cosh \alpha + \tilde{\epsilon} \sinh \alpha) \cos^{2} \phi'}{\tilde{\epsilon} (\tilde{\epsilon} \cosh \alpha + \sinh \alpha)} + \sin^{2} \phi' \right]$$

$$\times \left[\frac{\cosh \alpha + \tilde{\epsilon} \sinh \alpha}{\tilde{\epsilon} (\tilde{\epsilon} \cosh \alpha + \sinh \alpha)} - 1 \right] \sin \phi' \cos \phi'. \tag{4.78}$$

onde $A(\alpha) \equiv \langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle$, $B(\alpha) \equiv \langle H'_A | P_{yy} | H'_A \rangle$, $C(\alpha) \equiv \langle H'_A | P_{xy} | H'_A \rangle$ e nas integrais acima, a integração em q^z (que contém um termo $\delta(q^z_X - p^z_X)$) já foi realizada. Aqui, $\tilde{\epsilon} \equiv \sqrt{1 + (\tilde{q}^r)^2}$, $W \equiv w/|p|$, $\tilde{q}^0 \equiv q^0/|p|$, $\tilde{q}^r \equiv q^r/|p|$ e $\phi' = \phi - \pi$. Vemos que a integral $C(\alpha)$ acima se anula já que o integrando é ímpar em ϕ' . Usando as equações (4.75)-(4.78) concluímos que

$$\langle H'_A | \sigma_{\varphi}^A | H'_A \rangle_{\Psi'} = [A(\alpha) - B(\alpha)] \cos 2\varphi.$$
(4.79)

Procedendo de maneira análoga para os outros termos da equação (4.74) obtemos

4.3 A Influência do Movimento dos Detetores em Medidas com Fótons Emaranhados



Figura 4.4: $F(\vartheta)$ é plotada como função de ϑ assumindo $\alpha \to \infty$ para diferentes valores da largura normalizada do pacote: W = w/|p|. Quanto maior o pacote de onda, menores são as correlações de polarização.

$$\langle V'_A | \sigma^A_{\varphi} | V'_A \rangle_{\Psi'} = [D(\alpha) - E(\alpha)] \cos 2\varphi \langle H'_A | \sigma^A_{\varphi} | V'_A \rangle_{\Psi'} = [F(\alpha) + G(\alpha)] \sin 2\varphi,$$
(4.80)

onde

$$D(\alpha) = \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\infty} d\tilde{q}^{r} \frac{(\tilde{q}^{r})^{5} \cos^{2} \phi \sin^{2} \phi \cosh^{2} \alpha}{\pi W^{2} (1 + (\tilde{q}^{r})^{2} \cos^{2} \phi) (\tilde{\epsilon} \cosh \alpha + \sinh \alpha)^{2}}$$

$$E(\alpha) = \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\infty} d\tilde{q}^{r} \frac{e^{-\frac{(\tilde{q}^{r})^{2}}{W^{2}}} \tilde{q}^{r} \tilde{\epsilon}^{2}}{\pi W^{2} (1 + (\tilde{q}^{r})^{2} \cos^{2} \phi)} \left[\frac{(\tilde{\epsilon} \sinh \alpha + \cosh \alpha) \sin^{2} \phi}{\tilde{\epsilon} (\tilde{\epsilon} \cosh \alpha + \sinh \alpha)} + \cos^{2} \phi \right]^{2}$$

$$F(\alpha) = \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\infty} d\tilde{q}^{r} \frac{e^{-\frac{(\tilde{q}^{r})^{2}}{W^{2}}} \tilde{q}^{r} \tilde{\epsilon}^{2}}{\pi W^{2} [(1 + (\tilde{q}^{r})^{2} \sin^{2} \phi) (1 + (\tilde{q}^{r})^{2} \cos^{2} \phi)]^{\frac{1}{2}}} \times \left[\frac{(\tilde{\epsilon} \sinh \alpha + \cosh \alpha) \sin^{2} \phi}{\tilde{\epsilon} (\tilde{\epsilon} \cosh \alpha + \sinh \alpha)} + \cos^{2} \phi \right] \left[\frac{(\tilde{\epsilon} \sinh \alpha + \cosh \alpha) \cos^{2} \phi}{\tilde{\epsilon} (\tilde{\epsilon} \cosh \alpha + \sinh \alpha)} + \sin^{2} \phi \right]$$

$$G(\alpha) = \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\infty} d\tilde{q}^{r} \frac{e^{-\frac{(\tilde{q}^{r})^{2}}{W^{2}}} (\tilde{q}^{r})^{5}}{\pi W^{2} [(1 + (\tilde{q}^{r})^{2} \sin^{2} \phi) (1 + (\tilde{q}^{r})^{2} \cos^{2} \phi)]^{\frac{1}{2}}} \frac{\cosh^{2} \alpha \sin^{2} \phi \cos^{2} \phi}{(\tilde{\epsilon} \cosh \alpha + \sinh \alpha)^{2}}.$$

$$(4.81)$$

Os resultados para a partícula B são os mesmos porém, impondo-se $\alpha = 0$. Usando as equações (4.79)-(4.80), podemos agora colocar a equação (4.74) na forma

$$\langle \sigma_{\varphi}^{A} \otimes \sigma_{\varpi}^{B} \rangle_{\Psi'} = \gamma(\alpha) \cos 2\varphi \cos 2\varpi + \Delta(\alpha) \sin 2\varphi \sin 2\varpi$$
(4.82)

onde

$$\gamma(\alpha) \equiv \frac{1}{2} \left\{ [A(\alpha) - B(\alpha)] [A(0) - B(0)] + [D(\alpha) - E(\alpha)] [D(0) - E(0)] \right\}$$

е

$$\Delta(\alpha) \equiv \left[F(\alpha) + G(\alpha)\right] \left[F(0) + G(0)\right].$$
4.3 A Influência do Movimento dos Detetores em Medidas com Fótons Emaranhados

Para nossos propósitos, é suficiente considerar o caso $\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_1 = \hat{\mathbf{x}}$. Assumindo que os vetores unitários $\mathbf{a}_1 \in \mathbf{b}_2$ são rodados no sentido anti-horário e horário por um angulo ϑ com relação ao eixo x, respectivamente, o lado esquerdo da equação (4.48)

$$F(\vartheta) \equiv |E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) + E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) + E(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) - E(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)|$$
(4.83)

pode ser posto na forma

$$F(\vartheta) = |\langle \sigma_0^A \otimes \sigma_0^B + \sigma_0^A \otimes \sigma_{-\vartheta}^B + \sigma_{\vartheta}^A \otimes \sigma_0^B - \sigma_{\vartheta}^A \otimes \sigma_{-\vartheta}^B \rangle_{\psi'}|, \qquad (4.84)$$

onde o estado $|\psi'\rangle$ do sistema de dois fótons é dado na equação (4.65). Usando a equação (4.82), podemos escrever a equação (4.84) como

$$F(\vartheta) = \left|\gamma(\alpha)(1+2\cos 2\vartheta) - \left(\frac{\Delta(\alpha) + \gamma(\alpha)}{2}\right)\cos 4\vartheta - \frac{\gamma(\alpha) - \Delta(\alpha)}{2}\right|.$$
 (4.85)

Agora, vamos fazer uma análise numérica da equação (4.85). Primeiro, verificamos que a desigualdade de Bell CHSH usual, onde $F(\vartheta)|_{\text{max}} = 2.5$, é recuperada para $\alpha = 0$ e w = 0. Lembramos que $\alpha < 0$ e $\alpha > 0$ correspondem aos casos onde o fóton A e o detetor correspondente movem-se na mesma direção e na direção oposta, respectivamente. Na Figura 4.4, mostramos como $F(\vartheta)$ se comporta ao variarmos a largura do pacote de onda do fóton propriamente normalizada: $W \equiv w/|p|$. O gráfico assume $\alpha \to \infty$ mas o mesmo padrão ocorre para qualquer outro valor de α (incluindo $\alpha = 0$). Vemos que quanto mais largo o pacote de onda, mais o estado $|\psi\rangle$ fica misturado em polarização (após tomarmos o traço nos graus de liberdade de momento) e portanto, ficam menores as correlações de polarização. Na Figura 4.5, plotamos $F(\vartheta)$ para diferentes valores da velocidade do detetor assumindo W = 0.6. Para $|\alpha|$ ($\alpha < 0$) grande o suficiente, temos que $F(\vartheta)$ é arbitrariamente pequeno em todo domínio de ϑ . Isso mostra o quão importante pode ser o movimento do detetor para as medidas de polarização quando a velocidade é alta o suficiente [11, 17]. Para entendermos o padrão observado na Figura 4.5, notemos que conforme α decresce, o fóton A desvia mais para o vermelho de acordo com o detetor em movimento. Como consequência disso, W, que quantifica a dispersão do fóton normalizada por sua energia, "parece" maior no referêncial de detecção. Com isso, a partir da Figura 4.4, $F(\vartheta)$ deveria realmente decrescer conforme α decresce. Na Figura 4.6, plotamos $\Delta F(\vartheta) = F(\vartheta) - F_0(\vartheta)$, onde $F_0(\vartheta)$ é obtido impondo que ambos os detetores estão em repouso enquanto valores realísticos são usados para calcular $F(\vartheta)$: tomamos a velocidade média da Estação Espacia Internacional (EEI), $v \approx 7.7 \times 10^3 \,\mathrm{m/s}$, para fixar $\alpha = 2.6 \times 10^{-5}$ e a tecnologia atual para a produção de fótons emaranhados para fixar $W = 10^{-3}$ [110]. (Note que a velocidade média da Lua é da ordem de sete vezes menor do que a da EES.)

Estudos teóricos sobre a influência da velocidade do detetor em medições de estados emaranhados se tornaram necessárias pelas novas perspectivas de usar satélites em experimentos de informação quântica. É de se esperar, pelos resultados acima, que qualquer



Figura 4.5: $F(\vartheta)$ é plotado como função de ϑ com W = 0.6 para diferentes velocidades do aparato de medida. Note que $F(\vartheta)$ diminui conforme α decresce.

influência da velocidade do detetor só se tornará óbvia para sistemas muito relativísticos. Além disso, a Figura 4.4 mostra que a influência do movimento do detetor pode ser atenuada usando pacotes estreitos o suficiente ($W \ll 1$). Em particular, para w = 0, a velocidade do detetor não tem nenhuma influência em $F(\vartheta)$ (isso, em geral, não será verdade quando a velocidade dos detetores não estiver na mesma direção da velocidade do fóton). Eventualmente, essa pode ser uma informação importante para aplicações futuras de protocolos de informação quântica em escala global. Apesar de, para a tecnologia atual, o movimento dos detetores não desempenhar um papel dominante como mostrado na Figura 4.6, esse provavelmente não será o caso no futuro, quando maior precisão for atingida. É válido lembrar que o Sistema de Posicionamento Global não funcionaria se a pequena dessincronizarão entre os satélites e as antenas na Terra não fossem corrigidas pelas fórmulas da Relatividade Geral [111] propostas 80 anos antes.

4.4 O Limite de Holevo e Canais Quânticos Relativísticos

Suponha que Alice tenha uma fonte descrita por uma variável aleatória X que toma os valores x_i com probabilidades p_i , $i \in \{1, ..., K\}$ e deseje enviar o caractere gerado para um receptor, Bob. Para isso, ela codifica cada caractere x_i em um estado quântico ρ_i segundo a distribuição de probabilidades $\{p_i\}$ e, em seguida, envia a mensagem a Bob através de um canal quântico. Para inferir qual o caractere enviado, Bob fará uma medição, caracterizada por um POVM $\{E_0, ..., E_n\}$, no estado quântico recebido. Como vimos na Seção 3.3, o limite de Holevo é a afirmação que a informação acessível a Bob sobre o estado enviado por Alice é limitada superiormente por

$$I_{Ac} \le \chi(\rho) \equiv S(\rho) - \sum_{i} p_i S(\rho_i),$$



Figura 4.6: O gráfico exibe $\Delta F(\vartheta) = F(\vartheta) - F_0(\vartheta)$. $F_0(\vartheta)$ é obtido impondo que ambos os detetores estão em repouso enquanto valores realísticos são usados para calcular $F(\vartheta)$. Em particular, tomamos a velocidade média da Estação Espacial Internacional (EEI), $v \approx 7.7 \times 10^3 \text{ m/s}$, para fixar $\alpha = 2.6 \times 10^{-5}$ e a tecnologia atual para a produção de fótons emaranhados para fixar $W = 10^{-3}$ [110].

onde $\rho \equiv \sum_{i} p_i \rho_i$. Em muitos casos a informação acessível nunca atinge o limite superior $\chi(\rho)$. Entretanto, como mostrado em [50, 51, 52], sempre é possível utilizar uma codificação em bloco conveniente de tal maneira que a informação é transmitida a uma taxa que se aproxima arbitrariamente de $\chi(\rho)$ com probabilidade de erro arbitrariamente baixa.

Queremos agora analisar a transmissão de informação clássica por canais quânticos relativísticos. Para isso, iremos estudar o limite de Holevo em um contexto tipicamente relativístico, a saber, vamos permitir que Bob tenha um movimento relativo com relação a Alice. Nessa seção, vamos analisar alguns aspectos de tal sistema quântico de comunicação. Uma análise mais detalhada pode ser encontrada em [19]. Suponha então que a fonte de Alice produza os símbolos X = 0, 1 de acordo com a distribuição de probabilidades $p_0 = \lambda, p_1 = 1 - \lambda, 0 \le \lambda \le 1$. Dependendo do valor de X, ela prepara um dos estados ψ_X , escolhidos do conjunto { ψ_1, ψ_2 }, de uma partícula de spin 1/2 e massa m > 0. Aqui, assumimos que

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} f_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.86)$$

$$\psi_2^{\theta} = \cos\theta \begin{pmatrix} f_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ f_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$
(4.87)

onde $\psi_{\uparrow} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\psi_{\downarrow} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ são auto-estados de S_3 com auto valores 1/2 e -1/2, respectivamente, e

$$f_{\mathbf{k}}^{w}(\mathbf{p}) = \pi^{-\frac{3}{4}} w^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\left(\mathbf{p} - \mathbf{k}\right)^{2} / 2w^{2}\right].$$
(4.88)

O parametro $w \in \mathbb{R}_+$ dá a dispersão em momento e **k**, o momento médio da partícula. Suponha agora que Bob (que carrega consigo um aparato de medida que mede apenas os graus de liberdade de spin da partícula) mova-se com uma velocidade **v** = (v, 0, 0) com relação a Alice. Então, ele verá o estado

$$\rho_{\theta}\left(\mathbf{p},\tilde{\mathbf{p}}\right) \equiv \lambda \,\psi_{1}(\mathbf{p})\psi_{1}(\tilde{\mathbf{p}})^{\dagger} + (1-\lambda)\,\psi_{2}^{\theta}(\mathbf{p})\psi_{2}^{\theta}(\tilde{\mathbf{p}})^{\dagger},\tag{4.89}$$

transformado unitariamente em seu referencial próprio como

$$\rho_{\theta}'(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) \equiv \lambda \, \psi_1'(\mathbf{p}) \psi_1'(\tilde{\mathbf{p}})^{\dagger} + (1 - \lambda) \, \psi_2'^{\theta}(\mathbf{p}) \psi_2'^{\theta}(\tilde{\mathbf{p}})^{\dagger}, \tag{4.90}$$

com, veja por exemplo a equação (4.7),

$$\psi_{1}'(\mathbf{p}) \equiv (U(\Lambda)\psi_{1})(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{(\Lambda^{-1}p)^{0}}{p^{0}}} D^{1/2}(\Lambda, \Lambda^{-1}p)\psi_{1}(\Lambda^{-1}\mathbf{p}),$$

$$\psi_{2}'^{\theta}(\mathbf{p}) \equiv \left(U(\Lambda)\psi_{2}^{\theta}\right)(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{(\Lambda^{-1}p)^{0}}{p^{0}}} D^{1/2}(\Lambda, \Lambda^{-1}p)\psi_{2}^{\theta}(\Lambda^{-1}\mathbf{p}), \qquad (4.91)$$

onde $p = \left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \mathbf{p}\right)$ é o quadrimomento, Λ é a matriz de boost

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \alpha_d & \sinh \alpha_d & 0 & 0\\ \sinh \alpha_d & \cosh \alpha_d & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
(4.92)

е

$$D^{1/2}(\Lambda, q) = \frac{(p^0 + m)\sigma^0 \cosh\frac{\alpha}{2}}{\{(p^0 + m)[(\Lambda p)^0 + m]\}^{1/2}} + \frac{\sinh\frac{\alpha}{2}[\mathbf{p} \cdot \mathbf{e} \ \sigma^0 + i(\mathbf{e} \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma}]}{\{(p^0 + m)[(\Lambda p)^0 + m]\}^{1/2}}.$$
 (4.93)

Aqui, $\alpha_d \equiv -\tanh^{-1} v$, $q \equiv \Lambda^{-1} p$, $\sigma^0 = I$ é a matriz identidade, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ são as matrizes de Pauli e o vetor **e** dá a direção do boost, que tomamos como sendo $\mathbf{e}_x \equiv$ (1,0,0). Lembramos que $\Lambda^{-1}\mathbf{p}$ denota a parte espacial do quadrivetor $\Lambda^{-1}p$. Usando a equação (4.91), com $\psi_1 \in \psi_2^{\theta}$ dado pelas equações (4.86) e (4.87), obtemos

$$\psi_1'(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p}) \\ b_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p}) \end{pmatrix},\tag{4.94}$$

е

$$\psi_{2}^{\prime\theta}(\mathbf{p}) = \cos\theta \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}_{2}}^{w_{2}}(\mathbf{p}) \\ b_{\mathbf{k}_{2}}^{w_{2}}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} -b_{\mathbf{k}_{2}}^{w_{2}}(\mathbf{p}) \\ \overline{a_{\mathbf{k}_{2}}^{w_{2}}}(\mathbf{p}) \end{pmatrix},$$
(4.95)

onde

$$a_{\mathbf{k}}^{w}(\mathbf{p}) = K f_{\mathbf{k}}^{w}(\mathbf{p}) \left[C(q^{0} + m) + S(q^{x} + iq^{y}) \right],$$
 (4.96)

$$b_{\mathbf{k}}^{w}(\mathbf{p}) = K f_{\mathbf{k}}^{w}(\mathbf{p}) S q^{z}.$$
(4.97)

Aqui

$$K \equiv \sqrt{\frac{q^0}{p^0}} \frac{1}{\sqrt{(q^0 + m)(p^0 + m)}},$$
(4.98)

$$C \equiv \cosh\left(\alpha_d/2\right),\tag{4.99}$$

$$S \equiv \sinh\left(\alpha_d/2\right). \tag{4.100}$$

Como o detetor de Bob só mede spin, podemos tomar o traço nos graus de liberdade de momento do estado (4.90) obtendo

$$\tau'_{\theta} = \lambda \,\tau'_1 + (1 - \lambda) {\tau'}_2^{\theta} \tag{4.101}$$

 ${\rm onde}$

$$\tau_1' = \int d\mathbf{p} \ \psi_1'(\mathbf{p}) \psi_1'(\mathbf{p})^{\dagger},$$

$$\tau_2'^{\theta} = \int d\mathbf{p} \ \psi_2'^{\theta}(\mathbf{p}) \psi_2'^{\theta}(\mathbf{p})^{\dagger}.$$
 (4.102)

(4.103)

Procedendo de maneira análoga à descrita na Seção 4.2 obtemos

$$\tau_1' = \begin{pmatrix} 1 - V(\alpha_d) & 0\\ 0 & V(\alpha_d) \end{pmatrix}, \qquad (4.104)$$

$$\tau_{2}^{\prime\theta} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & 1 - A \end{pmatrix}, \qquad (4.105)$$

 com

$$A \equiv \cos^2 \theta \left[1 - W(\alpha_d) \right] + \sin^2 \theta W(\alpha_d), \qquad (4.106)$$

$$B \equiv \cos\theta \sin\theta \left[1 - 4W(\alpha_d)\right]. \tag{4.107}$$

As integrais $V(\alpha_d)$ e $W(\alpha_d)$ são dadas por

$$V(\alpha_d) = \sinh^2(\alpha_d/2) \int d\mathbf{q} \frac{(q^z)^2 \left| f_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{q}) \right|^2}{(q^0 + m)(p^0 + m)},$$
(4.108)

$$W(\alpha_d) = \sinh^2(\alpha_d/2) \int d\mathbf{q} \, \frac{(q^z)^2 \left| f_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{q}) \right|^2}{(q^0 + m)(p^0 + m)}.$$
(4.109)

Obtemos então que

$$\tau_{\theta}' = \begin{pmatrix} \lambda \left[1 - V(\alpha_d) \right] + (1 - \lambda)A & (1 - \lambda)B \\ (1 - \lambda)B & \lambda V(\alpha_d) + (1 - \lambda)(1 - A) \end{pmatrix}.$$
 (4.110)

O limite de Holevo é dado por

$$\chi\left(\tau_{\theta}'\right) = S\left(\tau_{\theta}'\right) - \lambda S\left(\tau_{1}'^{\theta}\right) - (1-\lambda)S\left(\tau_{2}'^{\theta}\right), \qquad (4.111)$$



Figura 4.7: $\Delta \chi \equiv \chi (\tau'_{\theta}) - \chi (\tau_{\theta})$ é plotado como função de θ para diversos valores de λ assumindo $\tilde{w}_1 \equiv w_1/m = 0.1$, $\tilde{w}_2 \equiv w_2/m = 10$ e $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_2 = 1000$, onde $\tilde{k}_i \equiv k_i/m$ e i = 1, 2. Vemos que para todo $0 < \lambda < 1$, existe um intervalo de ângulos θ em que $\Delta \chi > 0$.

e usando as equações (4.104), (4.105) e (4.110), podemos colocá-lo na forma

$$\chi\left(\tau_{\theta}'\right) = -\sum_{i=1}^{2} \gamma_{i} \log_{2} \gamma_{i} + \lambda \sum_{i=1}^{2} \delta_{i} \log_{2} \delta_{i} + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{2} \epsilon_{i} \log_{2} \epsilon_{i}, \qquad (4.112)$$

onde, para $i = 1, 2, \gamma_i, \delta_i \in \epsilon_i$ são os auto-valores de $\tau'_{\theta}, \tau'^{\theta}_1 \in \tau'^{\theta}_2$, respectivamente.

Vamos agora analisar o comportamento do canal quântico de comunicação nesse contexto relativístico. Na figura 4.7, plotamos

$$\Delta \chi \equiv \chi \left(\tau'_{\theta} \right) - \chi \left(\tau_{\theta} \right) \tag{4.113}$$

para diferentes valores de λ usando $\alpha \to \infty$, $\tilde{w}_1 = 0.1$, $\tilde{w}_2 = 10$ e $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_2 = 1000$. Vemos então que para todo $0 < \lambda < 1$ é possível escolher um ângulo θ em que $\Delta \chi > 0$. Portanto, quando Bob está em movimento, sempre podemos escolher uma configuração em que o limite de Holevo é maior do que seria se ele estivesse parado. Isso nos leva a uma conclusão extremamente relevante. Dado um sistema de comunicação quântico qualquer, o estado ρ em que a informação foi codificada estará, em geral, sujeito a influências externas. Isso tornará tal sistema aberto e a evolução do estado não unitária. Em informação quântica assume-se que essa evolução não unitária é linear e completamente positiva e portanto, como visto na Seção 3.1.3, é descrita por um mapeamento quântico \mathcal{E} . Entretanto, mostramos na Seção 3.3 que dado um estado ρ qualquer o limite de Holevo satisfaz

$$\chi\left(\mathcal{E}(\rho)\right) \le \chi(\rho) \tag{4.114}$$

para todo mapeamento quântico \mathcal{E} . Agora, considere a situação relativística analisada nessa seção. Nela, não há nenhuma influência externa no qubit. Entretanto, a trans-

formação de Wigner (4.93) depende do momento e com isso emaranha os graus de liberdade de spin e momento fazendo com que, por exemplo, estados puros em spin quando o detetor está parado tornem-se mistos quando este está em movimento [11]. Sendo assim, o estado inicial em spin preparado por Alice

$$\tau_{\theta} \equiv \int d\mathbf{p} \ \rho_{\theta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}), \tag{4.115}$$

onde $\rho_{\theta}(\mathbf{p}, \mathbf{\tilde{p}})$ é dado na equação (4.89), é visto por Bob (em movimento com uma velocidade $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ com relação a Alice) como

$$\mathcal{N}(\tau_{\theta}) \equiv \tau'_{\theta} = \int d\mathbf{p} \rho'_{\theta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \,. \tag{4.116}$$

O mapeamento \mathcal{N} é linear e preserva o traço. Entretanto, como vemos da figura (4.7), existem configurações em que

$$\chi(\tau_{\theta}) \le \chi\left(\mathcal{N}(\tau_{\theta})\right). \tag{4.117}$$

Portanto, mesmo sem influências externas, a transmissão de informação quando o receptor está em movimento *não pode ser descrita por um mapeamento quântico*. Isso nos leva a concluir que em situações relativísticas não podemos nos restringir somente a mapeamentos quânticos para modelar canais de comunicação.

Capítulo 5

O Efeito Unruh e a Teoria da Informação Quântica

A partir desse capítulo, iremos estudar a teoria da informação quântica no contexto da teoria quântica de campos e em particular do efeito Unruh [1, 117, 118]. Isso permitirá estudar não só efeitos relativísticos na teoria da informação quântica no espaço-tempo de Minkowski, como fizemos até aqui, mas também em espaços-tempos curvos, como por exemplo, espaços-tempos que contém buracos negros.

Na Seção 5.1, faremos uma revisão sobre a teoria quântica de campos em espaçostempos curvos globalmente hiperbólicos e o efeito Unruh. Na Seção 5.2, estudaremos o emaranhamento e o teletransporte quando um dos qubits acelera uniformemente, via o efeito Unruh. Na seção 5.3, estudaremos as correlações clássica e quântica nesse mesmo contexto.

5.1 Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos

Nessa seção, vamos fazer uma breve revisão sobre a teoria quântica de campos em espaçostempos curvos. Para uma revisão mais abrangente sobre o assunto, recomendamos as referências [1, 119, 120, 121]. Para nossos propósitos, é suficiente considerar um campo escalar real de massa m porém, o formalismo apresentado vale, com pequenas modificações, para outros campos, e.g., campo eletromagnético ou de Dirac.

Em um espaço-tempo (M, g_{ab}) , a equação de Klein-Gordon, que descreve a propagação de um campo escalar ϕ de massa m, é dada por

$$\left(\nabla^a \nabla_a - m^2\right)\phi = 0,\tag{5.1}$$

onde ∇_a é a derivada covariante compatível com g_{ab} , i.e., $\nabla_c g_{ab} = 0$. A teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos estuda a propagação de campos quânticos em um

espaço-tempo de fundo fixo bem como sua retro-ação no espaço-tempo. Antes de analisarmos a quantização do campo ϕ solução da equação (5.1), precisamos primeiro definir em que classe de espaços-tempos iremos realizá-la. O principal requisito (além da orientação temporal) é que o problema de valores iniciais da equação dinâmica para o campo escalar seja bem posto. Por isso, vamos nos restringir aos chamados *espaços-tempos globalmente hiperbólicos* [2, 3], i.e., espaços-tempos (M, g_{ab}) , onde M é uma variedade diferenciável quadrimensional e g_{ab} uma métrica Lorentziana, tal que exista uma hiperfície tridimensional Σ que satisfaça $D(\Sigma) = M$. Aqui, dado um subconjunto $A \subset M$ qualquer, temos

 $D(A) \equiv \{ p \in M | \text{toda curva causal inextensivel passando por } p \text{ intercepta } A \}, \quad (5.2)$

onde uma curva é dita causal se a tangente a cada um de seus pontos é um vetor tipo tempo ou tipo luz. O conjunto D(A) é chamado desenvolvimento de Cauchy de A. Uma hiperfície Σ que satisfaz $D(\Sigma) = M$ é dita uma superfície de Cauchy. Todo espaço-tempo globalmente hiperbólico satisfaz [122, 123]:

Teorema 5.1.1. Seja (M, g_{ab}) é um espaço tempo globalmente hiperbólico. Então ele é difeomorfo a $(\mathbb{R} \times \Sigma, g_{ab})$ e existe uma função diferenciável t e uma família Σ_t de superfícies de Cauchy tal que $\Sigma_{t=\text{cte}} = \{p \in M | t(p) = \text{cte}\}.$

Como em um espaço-tempo globalmente hiperbólico toda curva causal inextensível se "registra" em Σ , é de se esperar que em tais espaços-tempos tenhamos um problema de valores iniciais bem posto. Isso de fato é verdade como garante o próximo teorema [3, 124].

Teorema 5.1.2. Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo globalmente hiperbólico com superfície de Cauchy Σ . Então, se $(\phi_0, \pi_0) \in C^{\infty}(\Sigma) \times C^{\infty}(\Sigma)$, onde $C^{\infty}(\Sigma)$ indica o conjunto das funções reais definidas em Σ infinitamente diferenciáveis, existe uma única solução $\phi \in C^{\infty}(M)$ da equação (5.1) tal que $\phi|_{\Sigma} = \phi_0$ e $n^a \nabla_a \phi|_{\Sigma} = \pi_0$. Aqui, n^a é a normal unitária e futuro direta (i.e., que aponta na direção do futuro) de Σ .

Vamos definir agora a forma bilinear anti-simétrica

$$\Omega(\phi_1, \phi_2) \equiv \int_{\Sigma_t} d\mathbf{x} \sqrt{h} \left(\phi_2 n^a \nabla_a \phi_1 - \phi_1 n^a \nabla_a \phi_2 \right), \tag{5.3}$$

onde $h \equiv \det(h_{ab})$, h_{ab} é a métrica em Σ_t induzida por g_{ab} , **x** são coordenadas em Σ_t e ϕ_1, ϕ_2 são soluções infinitamente diferenciáveis da equação de Klein-Gordon cujos valores iniciais tem suporte compacto em Σ_t . (Nos restringimos a soluções que têm valores iniciais de suporte compacto para garantir que a integral acima seja convergente. Mais adiante, vamos considerar uma classe mais ampla de funções.) Estendendo Ω às soluções complexas da equação (5.1) por linearidade, definimos o produto interno de Klein-Gordon como

$$(f_1, f_2)_{KG} \equiv -i\Omega(\overline{f}_1, f_2). \tag{5.4}$$

Note entretanto que $(.,.)_{KG}$ não é positivo definido. Usando a equação (5.1), mostra-se que o produto interno (5.4) não depende de qual superfície de Cauchy Σ_t foi escolhida para fazer a integração.

5.1.1 Quantização do Campo Escalar Real em Espaços-Tempos Globalmente Hiperbólicos

Antes de descrever a quantização do campo de Klein-Gordon em um espaço-tempo globalmente hiperbólico (M, g_{ab}) , será conveniente fazer uma breve revisão sobre sua quantização no espaço tempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$. Vimos no capítulo anterior que a invariância de Poincaré implica que o espaço de Hilbert que descreve os estados (de uma partícula) de um campo de massa m e spin s = 0 é o $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p})$, que carrega uma representação unitária e irredutível de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_+$ dada por $(U(a, \Lambda)\phi)(\mathbf{p}) \equiv e^{-i\langle a, p \rangle}\phi(\Lambda^{-1}\mathbf{p})$, onde lembramos que $\Lambda \equiv \Lambda(A)$ e $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Se ao invés de usarmos o espaço dos momentos $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p})$ quisermos usar o espaço-tempo para descrever os estados do sistema, basta usarmos a transformada de Fourier e definir o espaço vetorial

$$H_{KG} \equiv \left\{ \phi(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \tilde{\phi}(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{p}}t)} \middle| \tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \right\},\tag{5.5}$$

onde $\omega_{\mathbf{p}} \equiv p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Usando coordenadas cartesianas (t, x, y, z), a equação (5.1) pode ser escrita como

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\phi = 0.$$
(5.6)

Então, vemos que os elementos de H_{KG} são soluções da equação (5.6). O espaço complexo conjugado \overline{H}_{KG} de H_{KG} é dado por

$$\overline{H}_{KG} \equiv \left\{ \varphi(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \tilde{\varphi}(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{p}}t)} \middle| \tilde{\varphi} \in L^{2}(\mathbb{R}^{3}, d\mathbf{p}) \right\}.$$
(5.7)

Com isso, podemos definir o espaço das soluções complexas $S^{\mathbb{C}}_{\mu}$ da equação (5.6) como $S^{\mathbb{C}}_{\mu} \equiv H_{KG} \oplus \overline{H}_{KG}$. Logo, se $\phi \in S^{\mathbb{C}}_{\mu}$ temos que

$$\phi(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \tilde{\phi}^{+}(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{p}}t)} + \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \tilde{\phi}^{-}(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{p}}t)}, \tag{5.8}$$

onde $\tilde{\phi}^+(\mathbf{p}), \tilde{\phi}^-(\mathbf{p}) \in L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p})$. Vemos, usando as equações (5.3) e (5.4) e a definição de H_{KG} , que se $\phi_1, \phi_2 \in S^{\mathbb{C}}_{\mu}$ então

$$(\phi_1,\phi_2)_{KG} = \int d\mathbf{p}\overline{\tilde{\phi}_1^+(\mathbf{p})}\tilde{\phi}_2^+(\mathbf{p}) - \int d\mathbf{p}\overline{\tilde{\phi}_1^-(\mathbf{p})}\tilde{\phi}_2^-(\mathbf{p}).$$
(5.9)

Consequentemente, vemos que os elementos de H_{KG} satisfazem: (a) se $f_1, f_2 \in H_{KG}$, $(f_1, f_2)_{KG} = \int d\mathbf{p} \overline{f_1^+(\mathbf{p})} \overline{f_2^+(\mathbf{p})}$ e portanto H_{KG} é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno de Klein-Gordon; (b) se $f_1 \in H_{KG}$ e $f_2 \in \overline{H}_{KG}$ então $(f_1, f_2)_{KG} = 0$. Portanto, a invariância de Poincaré nos permite escolher um sub-espaço H_{KG} das soluções da equação de Klein-Gordon que é um espaço de Hilbert com relação a $(.,.)_{KG}$, que expande, junto com seu complexo conjugado \overline{H}_{KG} , um espaço conveniente $S^{\mathbb{C}}_{\mu}$ das soluções complexas da equação (5.6) e cujos elementos de H_{KG} e \overline{H}_{KG} são ortogonais com relação ao produto interno de Klein-Gordon.

Tendo o espaço de Hilbert H_{KG} , a quantização do campo é feita da seguinte forma. Tomamos o espaço de Fock simétrico $\mathfrak{F}_s(H_{KG}) \equiv \mathbb{C} \bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(\bigotimes_{sk=1}^n H_{KG} \right)$, onde \bigotimes_s indica o produto tensorial simétrico^{*}, que será o espaço dos estados do campo quantizado ϕ . Este por sua vez será um operador hermitiano definido em $\mathfrak{F}_s(H_{KG})$. Para definir o operador ϕ , vamos primeiro definir os operadores de aniquilação e criação como

$$a(\overline{\tau})\Psi \equiv ((\tau,\psi_1)_{KG}, \sqrt{2\tau} \cdot \psi_2, \sqrt{3\tau} \cdot \psi_3, ...)$$
(5.10)

е

$$a^{\dagger}(\sigma)\Psi \equiv (0, c\sigma, \sqrt{2}\sigma \otimes_{s} \psi_{1}, \sqrt{3}\sigma \otimes_{s} \psi_{3}, ...), \qquad (5.11)$$

respectivamente, onde $\Psi = (c, \psi_1, \psi_2, \psi_3, ...) \in \mathfrak{F}_s(H_{KG}), \sigma, \tau \in H_{KG}$ e dado $\psi_n \in \bigotimes_{sk=1}^n H_{KG}$, temos que $\sigma \cdot \psi_n \equiv (\sigma, \psi_n)_{KG} \in \bigotimes_{sk=1}^{n-1} H_{KG}$ (o produto interno é com relação ao primeiro espaço de Hilbert do produto tensorial). Vemos que os operadores $a(\overline{\tau}) \in a^{\dagger}(\sigma)$ destroem e criam modos $\tau \in \sigma$ do campo, respectivamente. Usando as equações (5.10) e (5.11) concluímos que

$$\left[a(\overline{\tau}), a^{\dagger}(\sigma)\right] = (\tau, \sigma)_{KG} I, \qquad (5.12)$$

onde I é o operador identidade em $\mathfrak{F}_{s}(H_{KG})$. O vetor $|0\rangle \in \mathfrak{F}_{s}(H_{KG})$ que satisfaz

$$a(\overline{\tau})|0\rangle = 0 \tag{5.13}$$

para todo $\tau \in H_{KG}$ é chamado *estado de vácuo*. Se $\{u_j \in H_{KG} | j \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de H_{KG} (e portanto $\{\overline{u}_j \in H_{KG} | j \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de \overline{H}_{KG} , com relação a $-(.,.)_{KG}$), o operador ϕ é definido como

$$\phi \equiv \sum_{j} \left(u_j a(\overline{u}_j) + \overline{u}_j a^{\dagger}(u_j) \right).$$
(5.14)

Tendo isolado os elementos essenciais da quantização do campo escalar real no espaçotempo de Minkowski, estamos em condições de descrever a quantização do campo de Klein-Gordon em espaços-tempos globalmente hiperbólicos arbitrários. Basta então tomarmos qualquer sub-espaço H do espaço das soluções complexas da equação (5.1) que satisfaz:

(i) $S^{\mathbb{C}}_{\mu} = H \oplus \overline{H}$, onde $S^{\mathbb{C}}_{\mu}$ é um espaço de soluções complexas conveniente;

- (ii) $(.,.)_{KG}$ é positivo definido em H e $(H, (.,.)_{KG})$ é um espaço de Hilbert;
- (iii) para todo $f_1 \in H$ e $f_2 \in \overline{H}$, vale $(f_1, f_2)_{KG} = 0$.

Tendo o espaço de Hilbert H, procedemos como em Minkowski. Definimos os espaço de Fock $\mathfrak{F}_s(H)$, os operadores de aniquilação e criação, equações (5.10) e (5.11), respectivamente, e o operador campo, equação (5.14). A questão agora não é sobre a existência de um espaço de Hilbert H que satisfaça (i), (ii) e (iii) mas sim que existem infinitos

^{*}Se $\psi_1, \psi_2 \in H$ então $\psi_1 \otimes_s \psi_2 \equiv \frac{1}{2} [\psi_1 \otimes \psi_2 + \psi_2 \otimes \psi_1]$

espaços de Hilbert H e que (a menos que haja simetrias no espaço-tempo) nenhum deles é privilegiado. Veremos mais adiante que quando há simetria de translação temporal no espaço-tempo (ou seja, o espaço-tempo é estacionário), há uma escolha natural para H.

Para terminarmos a descrição da quantização do campo de Klein-Gordon, vamos colocar o operador campo em um forma que nos será mais útil a frente. Dado uma solução $\varphi \in S^{\mathbb{C}}_{\mu}$ da equação (5.1) temos que $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$, onde $\varphi^+ \in H$ e $\varphi^- \in \overline{H}$. Podemos então definir o operador $K : S^{\mathbb{C}}_{\mu} \to H$ dado por $K\varphi = \varphi^+$, ou seja, ele toma a parte de norma positiva da solução φ (analogamente, definimos o operador $\overline{K}\varphi \equiv \varphi^-$, que toma a parte de norma negativa de φ). Multiplicando a equação (5.14) com uma função real, diferenciável e de suporte compacto f, integrando formalmente e usando as relações (provadas no Apêndice D)

$$\int_{M} \overline{u}_{j} f \sqrt{-g} d^{4}x = -i(u_{j}, Ef)_{KG},$$

$$\int_{M} u_{j} f \sqrt{-g} d^{4}x = -i(\overline{u}_{j}, Ef)_{KG},$$
(5.15)

obtemos

$$\phi(f) = ia\left(\overline{KEf}\right) - ia^{\dagger}\left(KEf\right), \qquad (5.16)$$

onde

$$Ef = \int d^4x' \sqrt{-g(x')} [G^{adv}(x, x') - G^{ret}(x, x')] f(x'),$$

com G^{adv} e G^{ret} sendo as funções de Green avançada e retardada, respectivamente [124], $\{u_j \in H_{KG} | j \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal de H e usamos que $KEf = \sum_j (u_j, Ef)_{KG} u_j$.

Podemos estender a ação de ϕ para funções complexas g de suporte compacto. Se $g \in C_0^{\mathbb{C}\infty}(M)$, onde $C_0^{\mathbb{C}\infty}(M)$ indica o conjunto das funções complexas, infinitamente diferenciáveis de suporte compacto em M, definimos $\phi(g) \equiv \phi(\operatorname{Re} g) + i\phi(\operatorname{Im} g)$ e portanto, usando a equação (5.16), temos que[†]

$$\phi(g) = ia\left(\overline{KEg}\right) - ia^{\dagger}\left(KEg\right). \tag{5.17}$$

5.1.2 Transformações de Bogoliubov

Suponha que $S^{\mathbb{C}}_{\mu}$ é o espaço das soluções da equação de Klein-Gordon em um espaçotempo curvo globalmente hiperbólico $(M, g_{ab}) \in H_1, H_2 \subset S^{\mathbb{C}}_{\mu}$ são espaços de Hilbert que satisfazem as condições (i), (ii) e (iii) descritas na Seção 5.1.1. Sejam $K_k : S^{\mathbb{C}}_{\mu} \to$ $H_k \in \overline{K}_k : S^{\mathbb{C}}_{\mu} \to \overline{H}_k$ os operadores que tomam a parte de norma positiva e negativa, respectivamente, com relação a $H_k, k \in \{1, 2\}$, e a_k, a^{\dagger}_k os operadores de aniquilação e

[†]Isso nos permite definir o operador campo como uma distribuição que toma valores em operadores hermitianos (*operator valued distributions*). Como a série na equação (5.14) não converge em nenhum sentido razoável, a equação (5.17) deve substituir a equação (5.14) como definição do operador campo.

criação definidos em $\mathfrak{F}_{s}(H_{k})$. Então, o operador campo pode ser escrito como

$$\phi_1 = \sum_j \left(u_j a_1(\overline{u}_j) + \overline{u}_j a_1^{\dagger}(u_j) \right)$$
(5.18)

ou como

$$\phi_2 = \sum_j \left(v_j a_2(\overline{v}_j) + \overline{v}_j a_2^{\dagger}(v_j) \right)$$
(5.19)

onde $\{u_j \subset H_1 | j \in \mathbb{N}\}$ e $\{v_j \subset H_2 | j \in \mathbb{N}\}$ formam bases ortonormais de H_1 e H_2 , respectivamente. Queremos achar a forma explícita do operador unitário $U : \mathfrak{F}_s(H_1) \rightarrow \mathfrak{F}_s(H_2)$ que liga as duas construções, i.e., do operador unitário U tal que

$$U\sum_{j} \left(u_j a_1(\overline{u}_j) + \overline{u}_j a_1^{\dagger}(u_j) \right) U^{\dagger} = \sum_{j} \left(v_j a_2(\overline{v}_j) + \overline{v}_j a_2^{\dagger}(v_j) \right).$$
(5.20)

Convém observar que, muitas vezes, tal operador poderá existir apenas formalmente. Isso se dá porquê, em geral, diferentes escolhas de H's (que satisfazem as condições (i), (ii) e (iii) descritas na Seção 5.1.1) levam a espaços de Fock que *não* são unitariamente equivalentes. Entretanto, isso não representa nenhuma dificuldade para a formulação da teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos, como fica claro formulando-a através da abordagem algébrica [1].

Fazendo o produto interno de Klein-Gordon da equação (5.20) com u_k obtemos

$$Ua_1(\overline{u}_k)U^{\dagger} = \sum_j \left[(u_k, v_j)_{KG} a_2(\overline{v}_j) + (u_k, \overline{v}_j)_{KG} a_2^{\dagger}(v_j) \right].$$
(5.21)

Agora, para todo $\varphi \in H_1$, vamos definir os operadores

$$C\varphi \equiv K_2\varphi, \ D\varphi \equiv \overline{K}_2\varphi.$$

Ou seja, $C \in D$ são as restrições à H_1 dos operadores $K_2 \in \overline{K}_2$, respectivamente. Portanto, eles tomam a parte de norma positiva e negativa dos elementos de H_1 com relação a H_2 . De maneira análoga, definimos os operadores $A : H_2 \to H_1 \in B : H_2 \to \overline{H}_1$ que tomam a parte de norma positiva e negativa, respectivamente, com relação a H_1 dos elementos de H_2 .

Com isso, vemos que a equação (5.21) é a expressão da equação

$$Ua_1(\overline{\sigma})U^{\dagger} = a_2(\overline{C\sigma}) - a_2^{\dagger}(\overline{D\sigma})$$
(5.22)

na base $\{v_j \in H_2 | j \in \mathbb{N}\}$, onde $\sigma \in H_1$ e lembramos que $C\sigma \equiv K_2\sigma = \sum_j (v_j, \sigma)v_j$ e $D\sigma \equiv \overline{K}_2\sigma = -\sum_j (\overline{v}_j, \sigma)v_j$. Tomemos o estado de vácuo $|0\rangle \in \mathfrak{F}_s(H_1)$ e seu vetor correspondente em $\mathfrak{F}_s(H_2)$, i.e., $\Psi_0 \equiv U|0\rangle$. Dado $\xi \in H_2$ qualquer, defina $\sigma \equiv C^{-1}\xi$ (os operadores A, B, C e D são inversíveis. Para ver isso e outras propriedades ver [1]). Então, podemos colocar a equação (5.22) na forma

$$a(\overline{\xi})\Psi_0 = a^{\dagger}(\mathcal{E}\overline{\xi})\Psi_0, \qquad (5.23)$$

onde definimos o operador $\mathcal{E} : \overline{H}_2 \to H_2$ como $\mathcal{E}\overline{\xi} \equiv \overline{DC^{-1}\xi}$ para todo $\xi \in H_2$ (e portanto $\overline{\xi} \in \overline{H}_2$). A partir da equação (5.23), pode-se mostrar que [1]

$$\Psi_0 \equiv U|0\rangle = c\left(1, 0, \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0, \frac{\sqrt{n!}}{2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})!} \underbrace{\epsilon \otimes_s \dots \otimes_s \epsilon}_{n \ vezes}, 0, \dots\right),$$
(5.24)

onde $\epsilon \equiv \sum_{i,j} \mathcal{E}^{ij} u_i \otimes_s u_j$, $\mathcal{E}^{ij} \equiv (u_i, \mathcal{E}\overline{u}_j)_{KG}$ e $\mathcal{E}^{ij} = \mathcal{E}^{ji}$. A equação (5.24) determina a ação do operador U no estado de vácuo $|0\rangle$ e isso será suficiente para nossos propósitos. Para ver a ação de U em qualquer vetor de $\mathfrak{F}_s(H_1)$ bem como a prova que tal U é de fato unitário ver [1]. A transformação unitária U com os operadores A, B, C e D é chamada uma transformação de Bogoliubov.

5.1.3 Quantização em Espaços-Tempos Estáticos

Vimos que para quantizar o campo de Klein-Gordon em um espaço-tempo globalmente hiperbólico (M, g_{ab}) , devemos tomar um sub-espaço H de soluções da equação (5.1) que obedeça as condições (i), (ii) e (iii) da Seção 5.1.1. Entretanto, como já comentamos, existem infinitos H's que satisfazem tais propriedades e, em geral, não há como privilegiar nenhum deles. Entretanto, quando há simetria de translação temporal no espaçotempo (espaço-tempo estacionário [2, 3]) temos uma escolha natural para H. Para nossos propósitos, será suficiente considerar espaços-tempos estáticos. Um espaço-tempo (M, g_{ab}) é dito estático se existe um sistema de coordenadas tal que o elemento de linha associado com g_{ab} pode ser posto na forma[‡]:

$$ds_{g_{ab}}^2 = -f(\mathbf{x})dt^2 + \sum_{i,j} h_{ij}(\mathbf{x})dx^i dx^j,$$
(5.25)

onde $f(\mathbf{x}) > 0$ e \mathbf{x} são coordenadas na superfície de Cauchy $\Sigma_{t=cte}$. O campo vetorial $\chi \equiv \partial/\partial t$ é dito um campo de Killing [2, 3] tipo tempo. Suas curvas integrais (ou seja, as curvas que em cada ponto tem χ como tangente), que nesse sistema de coordenadas são dadas por $\phi_t(t_1, \mathbf{x}_1) = (t_1 + t, \mathbf{x}_1)$, podem (por serem tipo tempo) ser associadas com as linhas de mundo de uma congruência de observadores \mathcal{O} . Vemos que para tais observadores, o espaço-tempo não muda ao aplicarmos a translação temporal definida por ϕ_t (por isso, ϕ_t também é chamada de uma isometria temporal). Em um sistema de coordenadas arbitrário, a equação (5.1) pode ser posta na forma [2, 3]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}}\right) - m^{2}\phi = 0, \qquad (5.26)$$

[†]Em termos abstratos (sem utilizar coordenadas), um espaço-tempo é estacionário se existe um campo de Killing tipo tempo ξ , i.e., $\mathcal{L}_{\xi}g_{ab} = 0$ e $g_{ab}\xi^a\xi^b < 0$, onde \mathcal{L}_{ξ} indica a derivada de Lie. Um espaço-tempo é dito estático se ele é estacionário e admite uma hiperfície ortogonal a ξ . Em termos das coordenadas definidas na equação (5.25), $\mathcal{L}_{\xi}g_{ab} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0.$

onde $g = \det g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$ é a inversa de $g_{\mu\nu}$ e $\mu, \nu \in \{0, ..., 3\}$. Especializando nas coordenadas estáticas, equação (5.25), a equação (5.26) é escrita como

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathcal{K}\right)\phi = 0, \qquad (5.27)$$

onde

$$\mathcal{K}\phi \equiv f \left[-\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} h^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \phi \right) + m^2 \phi \right], \qquad (5.28)$$

com $i, j \in \{1, 2, 3\}$, é um operador hermitiano em $L^2\left(\Sigma_t, \sqrt{-g}f^{-1}d\mathbf{x}\right)$. Vemos que \mathcal{K} não depende de t. Em geral, \mathcal{K} será uma função de um conjunto completo J de operadores que comutam. Por exemplo, no caso do espaço-tempo de Minkowski com coordenadas cartesianas, $\mathcal{K} = \sum_j p_j^2 + m^2$, onde $p_j \equiv -i\partial/\partial x^j$. Seja \mathcal{J} o espectro conjunto dos elementos de J (ou seja, o conjunto de todos os números quânticos), μ uma medida em \mathcal{J} e $\psi_j, j \in \mathcal{J}$, auto-funções de \mathcal{K} com auto-valores $\omega_j^2 \geq 0$, i.e.,

$$\mathcal{K}\psi_j = \omega_j^2 \psi_j$$

e que satisfaçam

$$\int_{\Sigma_t} d\mathbf{x} \sqrt{-g} f^{-1} \overline{\psi}_j(\mathbf{x}) \psi_{j'}(\mathbf{x}) = \delta_\mu(j, j'),$$

onde $\int d\mu(j)\tilde{\phi}(j)\delta_{\mu}(j,j') = \tilde{\phi}(j')$, e $\overline{\psi}_j = \psi_k$ para algum $k \in \mathcal{J}$. Definimos então o espaço de Hilbert

$$H_{\chi} \equiv \left\{ \varphi(x) = \int \frac{d\mu(j)}{\sqrt{2\omega_j}} \tilde{\varphi}(j) e^{-i\omega_j t} \psi_j(\mathbf{x}) \middle| \tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^3, d\mu(j)) \right\}$$
(5.29)

de soluções da equação de Klein-Gordon. É fácil ver que H_{χ} satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) descritas na Seção 5.1.1. Tendo H_{χ} , basta seguirmos o processo de quantização descrito na Seção 5.1.1. Fazendo a transformada de Fourier

$$\hat{\varphi}(\sigma, \mathbf{x}) \equiv \int dt \ e^{i\sigma t} \varphi(t, \mathbf{x})$$

dos elementos de $\varphi(t, \mathbf{x})$ de H_{χ} , vemos que $\hat{\varphi}(\sigma < 0, \mathbf{x}) = 0$. Por essa razão, os elementos de H_{χ} são chamados soluções de frequência positiva com relação a t (ou equivalentemente, com relação ao campo de Killing $\chi = \partial/\partial t$).

A teoria quântica de campos construída a partir de H_{χ} tem uma interpretação natural em termos de estados de partículas. Por exemplo, interpretamos o estado $\frac{1}{\sqrt{n!}} \left[a^{\dagger}(\sigma)\right]^{n} |0\rangle$ como sendo o estado de *n* partículas no modo $\sigma \in H_{\chi}$. Entretanto, enfatizamos que para espaços-tempos não estacionários, qualquer interpretação em termos de partículas é extremamente problemática [1, 120].



Figura 5.1: Diagrama espaço-temporal do espaço-tempo de Minkowski com as regiões I, II, III e IV dadas por |t| < x, |t| < -x, t > |x| e t < -|x|, respectivamente. As curvas com as setas são as curvas integrais do campo de Killing $a [x\partial/\partial t + t\partial/\partial x]$.

5.1.4 O Efeito Unruh

Vamos aplicar a construção da seção anterior no espaço-tempo de Minkowski com relação a dois conjuntos diferentes de observadores, os inerciais e os uniformemente acelerados, e comparar a descrição que ambos dão ao vácuo de Minkowski (vácuo com relação aos observadores inerciais).

Tomemos primeiro um sistema de coordenadas cartesianas globais $t, x, y, z \text{ em }(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$. Nessas coordenadas, o elemento de linha associado a η_{ab} toma a forma

$$ds_{\eta_{ab}}^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$
(5.30)

Vemos então que $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ é estático com campo de Killing $\chi_1 = \partial/\partial t$, que gera a translação temporal $\phi_t^{\chi_1}(t_1, \mathbf{x}_1) = (t_1+t, \mathbf{x}_1)$, onde $\mathbf{x}_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, e portanto está associado com observadores inerciais. Nessas coordenadas, $\mathcal{K} = \sum_j p_j^2 + m^2$, onde $p_j \equiv -i\partial/\partial x^j$. Sendo assim, $\mathcal{J} = \mathbb{R}^3$ (e portanto $j = \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$), $\omega_j = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ e tomamos $d\mu(j) \equiv d\mathbf{k}$ e $\psi_j \equiv (2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. Portanto, usando a equação (5.29), vemos que $H_{\chi_1} = H_{KG}$, onde H_{KG} é dado na equação (5.5), e com isso recuperamos a construção da teoria quântica de campos usual no espaço-tempo de Minkowski descrita no começo da Seção 5.1.1. O estado de vácuo dessa construção, i.e., o vetor $|0_M\rangle \in \mathfrak{F}_s(H_{\chi_1})$ que satisfaz $a(\overline{\sigma})|0_M\rangle$ para todo $\sigma \in H_{\chi_1}$, é chamado vácuo de Minkowski.

Entretanto, podemos realizar outra construção para a teoria quântica de campos. Tome a região I da Figura 5.1, ou seja, a região caracterizada por |t| < x. Podemos cobrir essa região com as coordenadas τ, ξ, y, z onde $\tau \in \xi$ são dados por

$$t = a^{-1}e^{a\xi}\sinh a\tau, \tag{5.31}$$

$$x = a^{-1}e^{a\xi}\cosh a\tau, \tag{5.32}$$

onde a é uma constante positiva. O elemento de linha de η_{ab} nessas coordenadas toma a forma

$$ds_{\eta_{ab}}^2 = e^{2a\xi}(-d\tau^2 + d\xi^2) + dy^2 + dz^2.$$
(5.33)

Vemos então que a região I, que é globalmente hiperbólica e portanto define um espaçotempo, é estática com campo de Killing dado por $\chi_2 = \partial/\partial \tau$ (que em coordenadas cartesianas pode ser escrito como $\chi_2 = a [x\partial/\partial t + t\partial/\partial x]$). O campo de Killing χ_2 gera a translação temporal $\phi_{\tau}^{\chi_2}(\tau_1, \xi_1, \mathbf{x}_{\perp}) = (\tau_1 + \tau, \xi_1, \mathbf{x}_{\perp})$, onde $\mathbf{x}_{\perp} = (y, z)$. Para cada $(\tau_1, \xi_1, \mathbf{x}_{\perp})$, a curva $\phi_{\tau}^{\chi_2}(\tau_1, \xi_1, \mathbf{x}_{\perp})$ corresponde a uma hipérbole que passa por $(\tau_1, \xi_1, \mathbf{x}_{\perp})$, ver Figura 5.1. Tais hipérboles tem como tangente $\partial/\partial \tau$ em cada um de seus pontos (no sistema de coordenadas $\tau, \xi, y, z, \partial/\partial \tau$ pode ser escrito como (1, 0, 0, 0)). Se definirmos $u^{\mu} \equiv e^{-a\xi}(1, 0, 0, 0)$, vemos que $u^{\mu}u_{\mu} = -1$ e portanto, u^{μ} corresponde à quadrivelocidade dos observadores que seguem as hipérboles. A aceleração própria de cada linha de mundo é dada por $\sqrt{a_{\mu}a^{\mu}} = ae^{-a\xi}$, onde $a^{\mu} \equiv u^a \nabla_a u^{\mu}$ é sua quadriaceleração. Com isso, vemos que os observadores associados a essa translação temporal estão uniformemente acelerados. Vemos também que para as hipérboles com $\xi = 0$ vale $\sqrt{a_{\mu}a^{\mu}} = a$ e o campo de Killing χ_2 satisfaz $\partial/\partial \tau = u$. Por isso, dizemos que a família de observadores descrita acima está naturalmente associada com observadores que aceleram uniformemente com aceleração própria a.

Nas coordenadas τ, ξ, y, z ,

$$\mathcal{K} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 e^{2a\xi} \right] + e^{2a\xi} \sum_{j=2}^3 p_j^2.$$

Suponha que ψ é uma auto-função de \mathcal{K} com auto-valor ω^2 , i.e., $\mathcal{K}\psi = \omega^2\psi$. Fazendo a separação de variáveis $\psi = (2\pi)^{-1}g(\xi)e^{i\mathbf{k}_{\perp}\cdot\mathbf{x}_{\perp}}$ vemos que g satisfaz

$$\left[-\frac{d^2}{d\xi^2} + e^{2a\xi}(\mathbf{k}_{\perp}^2 + m^2)\right]g(\xi) = \omega^2 g(\xi).$$
(5.34)

Os auto-valores ω tomam valores em $(0, \infty)$. Os parâmetros ω e \mathbf{k}_{\perp} rotulam uma família ortonormal completa de auto-funções de \mathcal{K} e com isso, tomamos $j \equiv (\omega, \mathbf{k}_{\perp})$. As soluções da equação (5.34) (com as condições de contornos físicas adequadas [118]) são dadas por

$$g_{\omega \mathbf{k}_{\perp}}(\xi) = \left[\frac{2\omega \sinh(\pi\omega/a)}{\pi^2 a}\right] K_{i\omega/a}\left(\frac{\kappa}{a}e^{a\xi}\right),\tag{5.35}$$

onde $\kappa \equiv \sqrt{\mathbf{k}_{\perp}^2 + m^2}$ e $K_{\nu}(z)$ é a função de Bessel modificada [126]. Agora, usando a equação (5.29), definimos

$$H_{\chi_2}^{I} \equiv \left\{ \varphi(x) = \int \frac{d\omega d\mathbf{k}_{\perp}}{\sqrt{2\omega}} \tilde{\varphi}(\omega, \mathbf{k}_{\perp}) e^{-i\omega\tau} \psi_{\omega \mathbf{k}_{\perp}}(\xi, \mathbf{x}_{\perp}) \middle| \tilde{\varphi} \in L^2\left((0, \infty) \times \mathbb{R}^2, d\omega d\mathbf{k}_{\perp}\right) \right\},$$
(5.36)

onde vemos que $\mathcal{J} = (0, \infty) \times \mathbb{R}^2$,

$$\psi_{\omega \mathbf{k}_{\perp}}(\xi, \mathbf{x}_{\perp}) \equiv \left[\frac{\sinh\left(\pi\omega/a\right)}{4\pi^4 a}\right]^{1/2} K_{i\omega/a}(\kappa e^{a\xi}/a) e^{i\mathbf{k}_{\perp}\cdot\mathbf{x}_{\perp}},$$

e tomamos $d\mu(j) \equiv d\omega d\mathbf{k}_{\perp}$.

Podemos agora cobrir a região II da Figura 5.1 com as coordenadas $\hat{\tau}, \hat{\xi}, y, z$ onde

$$t = a^{-1}e^{a\xi}\sinh a\hat{\tau}, \qquad (5.37)$$

$$x = -a^{-1}e^{a\xi}\cosh a\hat{\tau}. \tag{5.38}$$

Então, procedemos de maneira análoga a descrita acima, usando $\hat{\tau}$ e $\hat{\xi}$ no lugar de τ e ξ , obtemos o espaço de Hilbert $H_{\chi_2}^{II}$. Definindo $H_{\chi_2} \equiv H_{\chi_1}^I \oplus H_{\chi_2}^{II\$}$, e procedendo como descrito na Seção 5.1.1, obtemos uma segunda construção para o campo quântico ϕ em todo o espaço-tempo de Minkowski [1, 118].

Queremos agora achar o estado $\Psi_0 \equiv U|0_M\rangle \in \mathfrak{F}_s(H_{\chi_2}) \simeq \mathfrak{F}_s(H_{\chi_2}^I) \bigotimes \mathfrak{F}_s(H_{\chi_2}^{II})$, correspondente ao vácuo de Minkowski na construção associada aos observadores uniformemente acelerados. Em particular, queremos calcular a restrição do vácuo de Minkowski à região I. Ela é obtida tomando o traço em $\mathfrak{F}_s(H_{\chi_2}^{II})$ da matriz densidade correspondente ao vácuo de Minkowski.

Sejam ψ_{ω}^{I} , $\omega \in (0, \infty)$, soluções da equação de Klein-Gordon que oscilam harmonicamente com frequência ω com relação a τ na região I e se anulam na região II. As soluções ψ_{ω}^{II} são dadas por $\psi_{\omega}^{II} \equiv \overline{\psi_{\omega}^{I} \circ w}$, onde w(t, x, y, z) = (-t, -x, y, z). Vemos então que ψ_{ω}^{II} oscila harmonicamente com frequência ω com relação à $\hat{\tau}$ na região II e se anula na região I. A observação principal que nos permite calcular Ψ_0 é que

$$\Phi_{\omega} \equiv \psi_{\omega}^{I} + e^{-\pi\omega/a} \overline{\psi}_{\omega}^{II}$$
(5.39)

е

$$\Phi'_{\omega} \equiv \psi^{II}_{\omega} + e^{-\pi\omega/a} \overline{\psi}^{I}_{\omega} \tag{5.40}$$

são de frequência positiva com relação a t [1, 117, 118]. As soluções $\psi_{\omega}^{I} \in \psi_{\omega}^{II}$ não são normalizáveis e portanto não pertencem a $H_{\chi_{2}}^{I} \in H_{\chi_{2}}^{II}$, respectivamente. Isso pode ser contornado tomando pacotes de onda $\psi_{\omega_{i}}^{I} \in \psi_{\omega_{i}}^{II}$ bem centrados em frequências $\omega_{i} > 0$ de tal forma que $\{\psi_{\omega_{i}}^{I}|i \in \mathbb{N}\}$ e $\{\psi_{\omega_{i}}^{II}|i \in \mathbb{N}\}$ sejam bases ortonormais de $H_{\chi_{2}}^{I} \in H_{\chi_{2}}^{II}$, respectivamente, e

$$\Phi_i \equiv \psi^I_{\omega_i} + e^{-\pi\omega_i/a} \overline{\psi}^{II}_{\omega_i} \tag{5.41}$$

e

$$\Phi_i' \equiv \psi_{\omega_i}^{II} + e^{-\pi\omega_i/a} \overline{\psi}_{\omega_i}^I \tag{5.42}$$

sejam de frequência positiva com relação a t. Então temos

$$C\Phi_i = \psi^I_{\omega_i} \quad , \quad C\Phi'_i = \psi^{II}_{\omega_i} \tag{5.43}$$

$$D\Phi_i = e^{-\pi\omega_i/a}\overline{\psi}^{II}_{\omega_i} \quad , \quad D\Phi'_i = e^{-\pi\omega_i/a}\overline{\psi}^{I}_{\omega_i} \tag{5.44}$$

[§]Aqui, os elementos de $H_{\chi_2}^I$ e $H_{\chi_2}^{II}$ estão naturalmente estendidos para o espaço-tempo de Minkowski inteiro [118]. Sendo assim, se $\psi = \psi^I + \psi^{II} \in H_{\chi_2}$, a restrição de $\psi^I (\psi^{II})$ à região I (II) é $\int \frac{d\omega d\mathbf{k}_{\perp}}{\sqrt{2\omega}} \tilde{\varphi}(\omega, \mathbf{k}_{\perp}) e^{-i\omega\hat{\tau}} \psi_{\omega\mathbf{k}_{\perp}}(\hat{\xi}, \mathbf{x}_{\perp}) \left(\int \frac{d\omega d\mathbf{k}_{\perp}}{\sqrt{2\omega}} \tilde{\varphi}(\omega, \mathbf{k}_{\perp}) e^{-i\omega\hat{\tau}} \psi_{\omega\mathbf{k}_{\perp}}(\hat{\xi}, \mathbf{x}_{\perp}) \right)$ e à região II (I) é nula.

e portanto $\mathcal{E}\overline{\psi_{\omega_i}^I} = e^{-\pi\omega_i/a}\psi_{\omega_i}^{II} \in \mathcal{E}\overline{\psi_{\omega_i}^{II}} = e^{-\pi\omega_i/a}\psi_{\omega_i}^I$. Com isso, $\epsilon = \sum_i e^{-\pi\omega_i/a}2\psi_{\omega_i}^I \otimes_s \psi_{\omega_i}^{II}$. (5.45)

Podemos agora colocar a equação (5.24) na forma

$$U|0_{M}\rangle = c \left[|0_{R}\rangle + \sum_{i} e^{-\pi\omega_{i}/a} a^{\dagger}_{RI}(\psi^{I}_{\omega_{i}}) a^{\dagger}_{RII}(\psi^{II}_{\omega_{i}})|0_{R}\rangle + \dots + \frac{1}{(\frac{n}{2})!} \left[\sum_{i} e^{-\pi\omega_{i}/a} a^{\dagger}_{RI}(\psi^{I}_{\omega_{i}}) a^{\dagger}_{RII}(\psi^{II}_{\omega_{i}}) \right]^{n/2} |0_{R}\rangle + \dots \right]$$
$$= c \sum_{j} \frac{1}{j!} \left[\sum_{i} e^{-\pi\omega_{i}/a} a^{\dagger}_{RI}(\psi^{I}_{\omega_{i}}) a^{\dagger}_{RII}(\psi^{II}_{\omega_{i}}) \right]^{j} |0_{R}\rangle$$
$$= c \exp \left[\sum_{i} e^{-\pi\omega_{i}/a} a^{\dagger}_{RI}(\psi^{I}_{\omega_{i}}) a^{\dagger}_{RII}(\psi^{II}_{\omega_{i}}) \right] |0_{R}\rangle, \qquad (5.46)$$

onde na penúltima passagem fizemos a mudança de variáveis $n = 2j, j \in \mathbb{N}$. Aqui, usamos que

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}a_{RX}^{\dagger}(f_1^X)...a_{RX}^{\dagger}(f_n^X)|0_R\rangle = (0,...,f_1^X \otimes_s ... \otimes_s f_n^X, 0...),$$

onde a_{RX}^{\dagger} é o operador criação em $\mathfrak{F}_s\left(H_{\chi_2}^X\right)$, $X \in \{I, II\}$, $f_k^X \in H_{\chi_2}^X$ e $|0_R\rangle$ é o vácuo de Rindler, i.e., o vetor $|0_R\rangle \in \mathfrak{F}_s\left(H_{\chi_2}^I\right) \bigotimes \mathfrak{F}_s\left(H_{\chi_2}^{II}\right)$ que satisfaz $a_{RX}(\overline{f^X})|0_R\rangle = 0$ para todo $f^X \in H_{\chi_2}^X$, onde a_{RX} é o operador aniquilação em $\mathfrak{F}_s\left(H_{\chi_2}^X\right)$. Com isso, podemos escrever o vácuo de Minkowski em termos de modos de Rindler como

$$U|0_M\rangle = \prod_i \left(C_i \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\pi n_i \omega_i/a} |n_{iI}\rangle \otimes |n_{iII}\rangle \right), \tag{5.47}$$

onde $c = \prod_i C_i, C_i \equiv \left(1 - e^{-2\pi\omega_i/a}\right)^{1/2} \in |n_{iX}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n_i!}} \left[a_{RX}^{\dagger}\left(\psi_i^X\right)\right]^{n_i} |0_R\rangle.$

Observadores uniformemente acelerados na região I não têm acesso à região II, já que elas são causalmente desconectadas. Para tais observadores, o vácuo de Minkowski é descrito pelo estado misto $\rho_M^I \equiv \text{tr}_{II} U |0_M\rangle \langle 0_M | U^{\dagger}$, que descreve a restrição do vácuo de Minkowski à região I. Usando a equação (5.47) e tomando o traço em $\mathfrak{F}_s(H_{\chi_2}^{II})$ obtemos

$$\rho_M^I = \prod_i \left(C_i^2 \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-2\pi n_i \omega_i / a} |n_{iI}\rangle \langle n_{iI}| \right).$$
(5.48)

Ou seja, vemos que a restrição do vácuo de Minkowski à região I é um estado térmico com temperatura

$$T = a/2\pi. \tag{5.49}$$

Esse é o chamado *efeito Unruh*. Interpretamos esse resultado dizendo que um observador uniformemente acelerado "se sente" imerso em um banho térmico com temperatura (5.49) quando o campo está no vácuo de Minkowski (ausência de partículas como definidas pelos observadores inerciais). O efeito Unruh mostra como o conceito de partícula (quando existe) depende de observador. Entretanto, convém notar que observáveis físicos independem de qual interpretação de partícula (a dos inerciais ou dos acelerados) se dá ao campo já que a teoria é de um campo quântico e seus observáveis dependem somente dessa estrutura de campo. A independência dos observáveis físicos com relação aos observadores pode ser usada para mostrar que o efeito Unruh é necessário para manter a própria consistência da teoria quântica de campos. Um exemplo emblemático disso é a desintegração de prótons uniformemente acelerados [127]. Para mais aplicações do efeito Unruh, indicamos a revisão [118] e suas referências. Uma formulação matematicamente rigorosa (que vale inclusive para teorias com interação que obedecem aos axiomas de Wightman) do efeito Unruh é que a restrição do vácuo de Minkowski à sub-álgebra \mathcal{A}_I associada a região x > |t| é um estado térmico (i.e. KMS) com relação a translação temporal definida pelos observadores uniformemente acelerados [1, 128]. Tal resultado é uma consequência do chamado Teorema de Bisognano-Wichmann [129] publicado, assim como o trabalho de W. Unruh [117], em 1976. Entretanto, o fato que tal teorema leva a uma demonstração rigorosa do efeito Unruh só foi notado em 1982 por Sewell [128].

5.2 Morte Súbita do Emaranhamento e Perda de Fidelidade no Teletransporte via o Efeito Unruh

Nessa seção, vamos usar o efeito Unruh para investigar como o teletransporte de estados quânticos é afetado quando um dos qubits do par emaranhado está sob influência de alguma força externa [20]. Para obtermos um entendimento mais abrangente, faremos uma análise detalhada de como a aceleração afeta o sistema de qubits emaranhado. Em particular, calcularemos a informação mútua quântica e a concurrence entre os dois qubits e mostraremos que a última apresenta uma morte súbita [130] em uma aceleração finita cujo valor vai depender do intervalo de tempo em que o detetor permanece acelerado.

O teletransporte de estados quânticos é sem dúvida um dos efeitos mais interessantes descobertos nas últimas décadas. Como vimos na Seção 3.4.2, o trabalho original de Bennett et al [13] considera o sistema como sendo isolado de forças externas e com isso, o estado maximamente emaranhado que descreve o par de qubits evolui unitariamente. Como um desenvolvimento natural, Alsing e Milburn analisaram o caso em que o sistema não está totalmente isolado [77]. Em sua configuração, Bob é substituído por um observador uniformemente acelerado que chamamos de Rob. Alice e Rob carregam, cada um, uma cavidade ótica em repouso no seus referenciais próprios que assumimos como estando livres de fótons de Minkowski. Cada cavidade suporta dois modos de Minkowski ortogonais $A_i \in R_i$ (i = 1, 2) com mesma frequência, onde de agora em diante $A \in R$ serão usados para rotular Alice e Rob, respectivamente. No momento em que Alice e Rob se encontram, eles criam um par emaranhado

$$|\mathbf{0}\rangle_M \otimes |\mathbf{0}\rangle_M + |\mathbf{1}\rangle_M \otimes |\mathbf{1}\rangle_M \tag{5.50}$$

onde

$$\mathbf{0}_{M} = |1\rangle_{X_{1}} \otimes |0\rangle_{X_{2}}, \quad |\mathbf{1}_{M} = |0\rangle_{X_{1}} \otimes |1\rangle_{X_{2}}$$

e X = A e R para o primeiro e segundo qubits na equação (5.50), respectivamente. Então, os autores argumentam que como Rob está acelerado, sua cavidade estaria populada por fótons de Rindler excitados termicamente como predito pelo efeito Unruh e concluem que a fidelidade do teletransporte seria reduzida. Notemos, entretanto, que a configuração acima apresenta algumas dificuldades conceituais [131]. Em particular, a relação entre modos de Minkowski e Rindler usadas na referência [77] é válida somente no espaço-tempo de Minkowski sem as condições de contorno impostas pela presença das cavidades. Para contornar tais dificuldades, vamos considerar uma configuração diferente para estudar o teletransporte no contexto do efeito Unruh que evita o uso de cavidades [20]. Para esse propósito, os qubits são modelados por um detetor semi-clássico de dois níveis acoplado com um campo escalar sem massa. O detetor é clássico no sentido que ele tem uma linha de mundo bem definida mas quântico por causa da natureza do seus graus de liberdades internos. Uma análise complementar à que faremos pode ser encontrada em [74], onde o emaranhamento entre modos do campo livre que não estão sujeitos a nenhuma força externa é investigado do ponto de vista dos observadores inerciais e uniformemente acelerados

5.2.1 O Qubit como um Detetor de Dois Níveis

Vamos modelar nosso qubit no espaço-tempo de Minkowski (\mathbb{R}^4, η_{ab}) por um detetor de dois níveis com separação Ω como introduzido por Unruh e Wald [132]. Aqui, vamos revisitar brevemente a teoria do detetor e derivar os resultados necessários para a análise que faremos a seguir. A Hamiltoniana própria do detetor é definida como

$$H_D = \Omega D^{\dagger} D, \tag{5.51}$$

onde $D|0\rangle = D^{\dagger}|1\rangle = 0$, $D|1\rangle = |0\rangle$ e $D^{\dagger}|0\rangle = |1\rangle$, e $|0\rangle$, $|1\rangle$ são os auto-estados de energia não excitado, excitado, respectivamente. Acoplamos o detetor com um campo escalar sem massa ϕ que satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$\nabla_a \nabla^a \phi = 0 \tag{5.52}$$

através da Hamiltoniana

$$H_{\rm int}(t) = \epsilon(t) \int_{\Sigma_t} d\mathbf{x} \sqrt{-\eta} \phi(x) [\psi(\mathbf{x})D + \overline{\psi}(\mathbf{x})D^{\dagger}], \qquad (5.53)$$

onde $\phi(x)$ é o operador campo de Klein-Gordon livre, $\eta \equiv \det(\eta_{ab})$ e **x** são coordenadas na superfície de Cauchy $\Sigma_{t=\text{const}}$ associada a uma isometria temporal conveniente. Para nossos propósitos, assumimos que o detetor segue ou a isometria inercial ou a uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski. Aqui, $\epsilon \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ é uma função real infinitamente diferenciável e de suporte compacto, que mantém o detetor ligado por um tempo próprio Δ finito (para mais detalhes sobre detetores ligados por tempo finito ver, e.g., a referência [133]) e $\psi \in C_0^{\mathbb{C}\infty}(\Sigma_t)$ é uma função complexa infinitamente diferenciável de suporte compacto que serve para modelar o fato que o detetor interage com o campo apenas em uma vizinhança de sua linha de mundo. O mesmo modelo de detetor foi usado por Kok and Yurtsever para analisar a decoerência de um qubit acelerado devido ao efeito Unruh [76]. Usando as equações (5.51)-(5.53) podemos escrever a Hamiltoniana total como

$$H_{D\phi} = H_0 + H_{\rm int}, \tag{5.54}$$

onde $H_0 = H_D + H_{KG}$ é a Hamiltoniana livre do sistema detetor-campo. Na representação de interação o estado $|\Psi_t^{D\phi}\rangle$ que descreve o sistema em um instante t pode ser escrito como

$$|\Psi_t^{D\phi}\rangle = T \exp[-i \int_{-\infty}^t dt' H_{\rm int}^I(t')] |\Psi_{-\infty}^{D\phi}\rangle, \qquad (5.55)$$

onde T é o operador ordenamento temporal e

$$H_{\rm int}^{I}(t) = U_{0}^{\dagger}(t)H_{\rm int}(t)U_{0}(t)$$
(5.56)

com $U_0(t)$ sendo a evolução unitária associada com $H_0(t)$. Usando a equação (5.55), escrevemos $|\Psi_{\infty}^{D\phi}\rangle = |\Psi_{t>\Delta}^{D\phi}\rangle$ como

$$|\Psi_{\infty}^{D\phi}\rangle = T \exp[-i \int d^4x \sqrt{-\eta} \phi(x) (fD + \overline{f}D^{\dagger})] |\Psi_{-\infty}^{D\phi}\rangle, \qquad (5.57)$$

onde $f \equiv \epsilon(t)e^{-i\Omega t}\psi(\mathbf{x})$ é uma função complexa de suporte compacto definida no espaçotempo de Minkowski e usamos que $D^I = e^{-i\Omega t}D$. Em primeira ordem de teoria de perturbação, a equação (5.57) fica

$$|\Psi_{\infty}^{D\phi}\rangle = [I - i(\phi(f)D + \phi(f)^{\dagger}D^{\dagger})]|\Psi_{-\infty}^{D\phi}\rangle, \qquad (5.58)$$

onde lembramos que

$$\phi(f) \equiv \int d^4x \sqrt{-\eta} \phi(x) f$$

= $i[a(\overline{KE\overline{f}}) - a^{\dagger}(KEf)]$ (5.59)

é a distribuição que toma valores em operadores hermitianos obtida integrando o operador campo com a função teste f definida acima. Recordamos também que $a(\overline{u}) \in a^{\dagger}(u)$ são os operadores de aniquilação e criação de modos u, respectivamente, o operador K toma a parte de frequência positiva das soluções da equação (5.52) com relação à isometria temporal, e

$$Ef = \int d^4x' \sqrt{-\eta(x')} [G^{\text{adv}}(x, x') - G^{\text{ret}}(x, x')] f(x'), \qquad (5.60)$$

onde G^{adv} and G^{ret} são as funções de Green avançada e retardada, respectivamente. Agora, impondo que $\epsilon(t)$ é uma função que varia muito lentamente com o tempo quando comparada com a frequência Ω e que $\Delta \gg \Omega^{-1}$, temos que f é, aproximadamente, uma função de frequência positiva, i.e., $KEf \approx Ef$ e $KE\overline{f} \approx 0$. Para ver isso, decomporemos Ef em termos de modos de frequências positiva e negativa $v_{\alpha} \in \overline{v}_{\alpha}$, respectivamente, como

$$Ef = \int d\mu(\alpha) [(v_{\alpha}, Ef)_{KG} v_{\alpha} - (\overline{v}_{\alpha}, Ef)_{KG} \overline{v}_{\alpha}], \qquad (5.61)$$

onde α representa os números quânticos que rotulam os modos, μ é uma medida no conjunto de todos os números quânticos, v_{α} satisfisfaz $(v_{\alpha}, v_{\alpha'})_{KG} = \delta_{\mu}(\alpha, \alpha') \in \nabla_a \nabla^a v_{\alpha} =$ 0. Além disso, v_{α} é uma auto-função de $i\partial_t$, com auto-valor $\omega_{\alpha} > 0$. Então, usando a equação (5.15) temos

$$(v_{\alpha}, Ef)_{KG} = i \int_{M} d^4 x \sqrt{-\eta} f \,\overline{v}_{\alpha}, \qquad (5.62)$$

$$(\overline{v}_{\alpha}, Ef)_{KG} = i \int_{M} d^{4}x \sqrt{-\eta} f v_{\alpha}.$$
(5.63)

Vamos agora mostrar que a equação (5.63) se anula. Para isso, vamos escrever $v_{\alpha} = e^{-i\omega_{\alpha}t}\varphi_{\alpha}(\mathbf{x})$, onde

$$\mathcal{K}\varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) = \omega_{\alpha}^2 \varphi_{\alpha}(\mathbf{x})$$

e \mathcal{K} é dado na equação (5.28). Então, integramos a equação (5.63) na coordenada t usando que $\epsilon(t) \approx \epsilon = \text{const}$ quando o detetor está ligado (e $\epsilon(t) = 0$ quando o detetor está desligado), obtendo

$$(\overline{v}_{\alpha}, Ef)_{KG} = 2i\epsilon\gamma_{\alpha}\frac{\sin\left[(\omega_{\alpha} + \Omega)\Delta/2\right]}{(\omega_{\alpha} + \Omega)},$$
(5.64)

onde $\gamma_{\alpha}\equiv\int_{\Sigma}d^{3}x\sqrt{-\eta}\psi(\mathbf{x})\varphi_{\alpha}.$ Agora, usando que

$$\frac{\sin\left[(\omega_{\alpha} + \Omega)\Delta/2\right]}{(\omega_{\alpha} + \Omega)} \approx \pi\delta(\omega_{\alpha} + \Omega)$$

quando $\Delta \gg \Omega^{-1}$, temos $(\overline{v}_{\alpha}, Ef)_{KG} \approx 0$. Então, Ef é aproximadamente de frequência positiva, i.e., $KEf \approx Ef$. De maneira análoga, mostra-se que $E\overline{f}$ é uma solução de frequência negativa, i.e., $KE\overline{f} \approx 0$. Agora, definindo

$$\lambda \equiv -KEf,\tag{5.65}$$

escrevemos a equação (5.59) como

$$\phi(f) \approx i a^{\dagger}(\lambda) \tag{5.66}$$

e a equação (5.58) como

$$|\Psi_{\infty}^{D\phi}\rangle = (I + a^{\dagger}(\lambda)D - a(\overline{\lambda})D^{\dagger})|\Psi_{-\infty}^{D\phi}\rangle.$$
(5.67)

A expressão acima carrega a mensagem física bem conhecida que a excitação e desexcitação de um detetor de Unruh-DeWitt seguindo a isometria temporal está associada a absorção e emissão, respectivamente, de partículas naturalmente definidas pelos observadores comóveis com o detetor, i.e., no nosso caso, partículas de Minkowski e Rindler para observadores inerciais e uniformemente acelerados, respectivamente.

5.2.2 Qubit Emaranhado e o Efeito Unruh

Vamos considerar agora um sistema de dois qubits inicialmente no estado emaranhado

$$|\Psi_{AR}\rangle = \alpha |0_A\rangle \otimes |1_R\rangle + \beta |1_A\rangle \otimes |0_R\rangle \tag{5.68}$$

com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, onde $\{|0_X\rangle, |1_X\rangle\}$ é uma base ortonormal no espaço interno do qubit \mathfrak{H}_X e X = A, R. A Hamiltoniana livre para cada um dos detetores é dada pela equação (5.51) com D substituído por A ou R dependendo do detetor. Agora, impomos que o detetor da Alice é mantido inercial e o de Bob é acelerado uniformemente por um tempo próprio finito Δ , seguindo a linha de mundo

$$t(\tau) = a^{-1} \sinh a\tau, \ x(\tau) = a^{-1} \cosh a\tau, \ y(\tau) = z(\tau) = 0,$$
 (5.69)

onde τ e *a* são o tempo e aceleração própria do detetor, respectivamente, e aqui *t*, *x*, *y*, *z* são as coordenadas cartesianas usuais no espaço-tempo de Minkowski. Os detetores são projetados para ligarem apenas quando estão acelerados. Sendo assim, o qubit inercial de Alice interage com o campo escalar apenas indiretamente através do detetor de Rob. Uma realização hipotética desse modelo em laboratório pode ser vista usando como qubit os estados de spin de um férmion acelerado por um campo elétrico apontando na mesma direção de um campo magnético de fundo ao longo do qual o spin do férmion é preparado [78]. O acoplamento entre o spin e o campo magnético gera a separação entre os níveis de energia do qubit. Então, os estados não excitado e excitado do qubit correspondem aos casos em que o spin aponta na mesma direção e na direção oposta que o campo magnético, respectivamente.

O detetor de Rob interage com o campo de acordo com a Hamiltonian (5.53) com as substituições: $D \to R \in t \to \tau$, onde Σ_{τ} são hiperfícies tipo espaço ortogonais à congruência de isometrias de boosts a qual a linha de mundo do detetor de Rob pertence. A Hamiltonian total é dada por

$$H_{AR\phi} = H_A + H_R + H_{KG} + H_{\text{int}}.$$
 (5.70)

O espaço de Hilbert associado com nosso sistema pode ser escrito agora como

$$\mathfrak{H}_T = \mathfrak{H}_A \otimes \mathfrak{H}_R \otimes \mathfrak{F}_s(H^I_{\chi_2} \oplus H^{II}_{\chi_2}),$$

onde lembramos que $\mathfrak{F}_s(H_{\chi_2}^I \oplus H_{\chi_2}^{II})$ é o espaço de Fock simétrico de $H_{\chi_2}^I \oplus H_{\chi_2}^{II}$ com $H_{\chi_2}^Z$, $Z \in \{I, II\}$, sendo o espaço de Hilbert das soluções de frequência positiva com relação a τ e valor inicial em Σ_Z (que é a parte de $\Sigma_{\tau=0}$ contida na região Z), ver equação (5.36). Agora, usando o fato que o detetor de Rob é o único que interage com o campo e que este está confinado na região I, usamos a equação (5.67) para evoluir o estado inicial

$$|\Psi_{-\infty}^{AR\phi}\rangle = |\Psi_{AR}\rangle \otimes |0_M\rangle, \tag{5.71}$$

com $|0_M\rangle$ sendo o vácuo de Minkowski (i.e., o estado de nenhuma partícula como definidas pelos observadores inerciais), para sua forma assintótica

$$|\Psi_{\infty}^{AR\phi}\rangle = (I + a_{RI}^{\dagger}(\lambda)R - a_{RI}(\overline{\lambda})R^{\dagger})|\Psi_{-\infty}^{AR\phi}\rangle, \qquad (5.72)$$

onde os rótulos em a_{RI}^{\dagger} e a_{RI} enfatizam que eles são operadores de criação e aniquilação de modos de Rindler na região I, $\lambda = -KEf \approx Ef$, e aqui $f = \epsilon(\tau)e^{-i\Omega\tau}\psi(\mathbf{x})$.

Usando as equações (5.68) e (5.71) na equação (5.72), obtemos

$$|\Psi_{\infty}^{AR\phi}\rangle = |\Psi_{-\infty}^{AR\phi}\rangle + \alpha |0_{A}\rangle \otimes |0_{R}\rangle \otimes (a_{RI}^{\dagger}(\lambda)|0_{M}\rangle) + \beta |1_{A}\rangle \otimes |1_{R}\rangle \otimes (a_{RI}(\overline{\lambda})|0_{M}\rangle).$$

$$(5.73)$$

Para prosseguir, vamos escrever $a_{RI} e a_{RI}^{\dagger}$ em termos dos operadores de aniquilação, a_M , e criação, a_M^{\dagger} , de modos de Minkowski (veja a equação (5.22) e sua adjunta)

$$a_{RI}(\overline{\lambda}) = \frac{a_M(\overline{F_{1\Omega}}) + e^{-\pi\Omega/a} a_M^{\dagger}(F_{2\Omega})}{(1 - e^{-2\pi\Omega/a})^{1/2}},$$
(5.74)

$$a_{RI}^{\dagger}(\lambda) = \frac{a_{M}^{\dagger}(F_{1\Omega}) + e^{-\pi\Omega/a}a_{M}(\overline{F_{2\Omega}})}{(1 - e^{-2\pi\Omega/a})^{1/2}},$$
(5.75)

onde

$$F_{1\Omega} = \frac{\lambda + e^{-\pi\Omega/a}\lambda \circ w}{(1 - e^{-2\pi\Omega/a})^{1/2}},$$
(5.76)

$$F_{2\Omega} = \frac{\overline{\lambda \circ w} + e^{-\pi\Omega/a}\overline{\lambda}}{(1 - e^{-2\pi\Omega/a})^{1/2}},$$
(5.77)

e lembramos que w(t, x, y, z) = (-t, -x, y, z) e que se $\varphi \in H^{I}_{\chi_{2}}$ então $\varphi \circ w \in \overline{H}^{II}_{\chi_{2}}$. Vamos definir também, a partir da equação (5.65)

$$\nu^2 \equiv ||\lambda||^2, \tag{5.78}$$

onde

$$(F_{i\Omega}, F_{j\Omega})_{KG} = ||\lambda||^2 \delta_{ij}, \ i \in \{1, 2\}.$$
 (5.79)

Vamos assumir que o detetor é localizado como dado pela Gaussiana

$$\psi(\mathbf{x}) = (\kappa \sqrt{2\pi})^{-3} \exp(-\mathbf{x}^2/2\kappa^2)$$
(5.80)

com variância $\kappa = \text{const} \ll \Omega^{-1}$. Procedendo de maneira análoga à que foi usada para chegarmos à equação (5.64), temos

$$|(u_{\omega\mathbf{k}_{\perp}}, Ef)_{KG}|^2 = 4\epsilon^2 |\gamma_{\omega\mathbf{k}_{\perp}}|^2 \frac{\sin^2\left[(\omega - \Omega)\Delta/2\right]}{(\omega - \Omega)^2} \approx 2\epsilon^2 \pi \Delta |\gamma_{\omega\mathbf{k}_{\perp}}|^2 \delta(\omega - \Omega), \qquad (5.81)$$

onde usamos que

$$\frac{\sin^2\left[(\omega-\Omega)\Delta/2\right]}{(\omega-\Omega)^2} \approx \pi \frac{\Delta}{2} \delta(\omega-\Omega)$$

para $\Delta >> \Omega^{-1}$. Aqui, $u_{\omega \mathbf{k}_{\perp}} \equiv e^{-i\omega\tau} \varphi_{\omega \mathbf{k}_{\perp}}(\xi, \mathbf{x}_{\perp}), \gamma_{\omega \mathbf{k}_{\perp}} \equiv \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-g} \psi(\mathbf{x}) \varphi_{\omega \mathbf{k}_{\perp}}$ e

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}_{\perp}}(\xi,\mathbf{x}_{\perp}) = \left[\frac{\sinh\left(\pi\omega/a\right)}{4\pi^4 a}\right]^{1/2} K_{i\omega/a}(k_{\perp}e^{a\xi}/a)e^{i\mathbf{k}_{\perp}\cdot\mathbf{x}_{\perp}}$$

com $K_{\mu}(z)$ sendo a função de Bessel modificada e $\mathbf{x}_{\perp} \equiv (y, z)$. Agora, usando as equações (5.78), (5.81), e (5.61), escrevemos

$$\nu^{2} \equiv ||\lambda||^{2} = ||KEf||^{2}$$

$$= \int_{0}^{\infty} d\omega \int d\mathbf{k}_{\perp} |(u_{\omega\mathbf{k}_{\perp}}, Ef)_{KG}|^{2}$$

$$\approx 2\pi\epsilon^{2}\Delta \int d\mathbf{k}_{\perp} |\gamma_{\Omega\mathbf{k}_{\perp}}|^{2}.$$
(5.82)

No caso particular de um detetor pontual, $\psi(\mathbf{x}) \rightarrow \delta(\mathbf{x})$, encontramos

$$\nu^2 = \frac{\epsilon^2 \Omega \Delta}{2\pi}.\tag{5.83}$$

Voltando para o caso da equação (5.80), i.e., detetores arbitrariamente pequenos mas não pontuais, podemos calcular ν^2 no caso inercial. Então,

$$\nu_{\rm in}^2 = \int d\mathbf{k} |(\zeta_{\mathbf{k}}, Ef)_{KG}|^2$$

$$\approx \frac{\epsilon^2}{4\pi} \int d\mathbf{k} \frac{\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega)}{\omega_{\mathbf{k}}} \frac{\sin\left[(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega)\Delta/2\right]}{(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega)} |\hat{\psi}(-\mathbf{k})|^2$$

com $\zeta_{\mathbf{k}} \equiv e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}/\sqrt{16\pi^{3}\omega_{\mathbf{k}}}$ sendo os modos de frequência positiva de Minkowski e $\hat{\psi}(\mathbf{k})$ a transformada de Fourier de $\psi(\mathbf{x})$. Finalmente, usando que $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ e integrando em coordenadas esféricas encontramos

$$\nu_{\rm in}^2 = \frac{\epsilon^2 \Omega \Delta}{2\pi} e^{-\Omega^2 \kappa^2}.$$
(5.84)

Como para detetores pontuais, $\kappa = 0$, as equações (5.83) e (5.84) são idênticas, usaremos a equação (5.84) como uma aproximação para a equação (5.82), associada com o caso acelerado, desde que $\kappa \ll \Omega^{-1}$.

Agora, usando as equações (5.74) e (5.75) para escrever

$$a_{RI}(\overline{\lambda})|0_M\rangle = \frac{\nu e^{-\pi\Omega/a}}{(1 - e^{-2\pi\Omega/a})^{1/2}}|1_{\tilde{F}_{2\Omega}}\rangle, \qquad (5.85)$$

$$a_{RI}^{\dagger}(\lambda)|0_M\rangle = \frac{\nu}{(1 - e^{-2\pi\Omega/a})^{1/2}}|1_{\tilde{F}_{1\Omega}}\rangle,$$
 (5.86)



Figura 5.2: O gráfico exibe a informação mútua quântica $I_Q(A : R)$ para um estado inicial singleto como função da aceleração a/Ω , com $\epsilon^2 = 8\pi^2 \cdot 10^{-6}$, $\Omega = 100$, $\Delta = 1000$ e $\kappa = 0.02$. O aspecto mais interessante está relacionado com o fato que a curva não é monotônica, atingindo seu valor mínimo em $a_0/\Omega \approx 545.75$. Notemos que a quantidade adimensional a/Ω reflete a temperatura do banho térmico de Unruh (pela diferença de energia entre os níveis) como medida pelo detetor do Rob (a menos de um fator $1/(2\pi)$).

podemos colocar a equação (5.73) na forma

$$|\Psi_{\infty}^{AR\phi}\rangle = |\Psi_{-\infty}^{AR\phi}\rangle + \alpha \nu \frac{|0_{A}\rangle \otimes |0_{R}\rangle \otimes |1_{\tilde{F}_{1\Omega}}\rangle}{(1 - e^{-2\pi\Omega/a})^{1/2}} + \beta \nu e^{-\pi\Omega/a} \frac{|1_{A}\rangle \otimes |1_{R}\rangle \otimes |1_{\tilde{F}_{2\Omega}}\rangle}{(1 - e^{-2\pi\Omega/a})^{1/2}},$$

$$(5.87)$$

onde $\tilde{F}_{i\Omega} = F_{i\Omega}/\nu$. Note que o fato que toda transição do qubit de Rob demanda a emissão de uma partícula de Minkowski está codificada na equação (5.87).

A matriz densidade que descreve o estado dos dois qubits é obtida tomando o traço nos graus de liberdade do campo, ou seja,

$$\rho_{\infty}^{AR} = ||\Psi_{\infty}^{AR\phi}||^{-2} \mathrm{tr}_{\phi}|\Psi_{\infty}^{AR\phi}\rangle \langle \Psi_{\infty}^{AR\phi}|, \qquad (5.88)$$

onde

$$||\Psi_{\infty}^{AR\phi}||^{2} = 1 + \frac{|\alpha|^{2}\nu^{2}}{1 - e^{-2\pi\Omega/a}} + \frac{|\beta|^{2}\nu^{2}e^{-2\pi\Omega/a}}{1 - e^{-2\pi\Omega/a}}$$

normaliza a matriz densidade final, i.e., ${\rm tr}\rho_\infty^{AR}=1.$ Trabalhando com a equação (5.88), obtemos

$$\rho_{\infty}^{AR} = 2S_{0}^{\alpha\beta} |\Psi_{AR}\rangle \langle \Psi_{AR}| + S_{2}^{\alpha\beta} |0_{A}\rangle \otimes |0_{R}\rangle \langle 0_{A}| \otimes \langle 0_{R}|
+ S_{1}^{\alpha\beta} |1_{A}\rangle \otimes |1_{R}\rangle \langle 1_{A}| \otimes \langle 1_{R}|,$$
(5.89)



Figura 5.3: O gráfico mostra o emaranhamento, $E^{AR\phi}$, entre o sistema de qubits e o campo como uma função da aceleração a/Ω assumindo o mesmo estado inicial e parâmetros ϵ , Ω , Δ , e κ que na Figura 5.2. Notemos que o emaranhamento atinge seu valor máximo, $E_{\max}^{AR\phi} \approx 1.58$, em $a_0/\Omega \approx 545.75$, precisamente onde $I_Q(A : R)$ atinge seu mínimo. É interessante notar que como o estado normalizado $|\Psi_{\infty}^{AR\phi}\rangle$ está em sua decomposição de Schimidt, veja a equação (5.87), o número de Schimidt k é 3 e o emaranhamento máximo é $E_{\max}^{AR\phi} = \log_2 3 \approx 1.58$ (veja o Capítulo 3 para uma revisão sobre a decomposição de Schimidt e emaranhamento).

onde

$$\begin{split} S_0^{\alpha\beta} &= \frac{(1-e^{-2\pi\Omega/a})/2}{(1-e^{-2\pi\Omega/a})+|\alpha|^2\nu^2+|\beta|^2\nu^2e^{-2\pi\Omega/a}},\\ S_1^{\alpha\beta} &= \frac{|\beta|^2\nu^2e^{-2\pi\Omega/a}}{(1-e^{-2\pi\Omega/a})+|\alpha|^2\nu^2+|\beta|^2\nu^2e^{-2\pi\Omega/a}},\\ S_2^{\alpha\beta} &= \frac{|\alpha|^2\nu^2}{(1-e^{-2\pi\Omega/a})+|\alpha|^2\nu^2+|\beta|^2\nu^2e^{-2\pi\Omega/a}}, \end{split}$$

e verificamos que $2S_0^{\alpha\beta} + S_1^{\alpha\beta} + S_2^{\alpha\beta} = 1$. Por conveniência, colocamos a equação (5.89) na forma matricial

$$\rho_{\infty}^{AR} = \begin{pmatrix}
S_2^{\alpha\beta} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2|\alpha|^2 S_0^{\alpha\beta} & 2\alpha \overline{\beta} S_0^{\alpha\beta} & 0 \\
0 & 2\overline{\alpha}\beta S_0^{\alpha\beta} & 2|\beta|^2 S_0^{\alpha\beta} & 0 \\
0 & 0 & 0 & S_1^{\alpha\beta}
\end{pmatrix},$$
(5.90)

onde usamos a base

$$\{|0_A\rangle\otimes|0_R\rangle,|0_A\rangle\otimes|1_R\rangle,|1_A\rangle\otimes|0_R\rangle,|1_A\rangle\otimes|1_R\rangle\}.$$

Informação Mútua Quântica

Para extrair informação sobre as correlações entre os qubits $A \in R$, calculamos a informação mútua quântica, Definição 3.2.3,

$$I_Q(A:R) = S(\rho_{\infty}^A) + S(\rho_{\infty}^R) - S(\rho_{\infty}^{AR}),$$
(5.91)

onde $0 \leq I_Q(A:R) \leq 2$. Aqui, $\rho_{\infty}^A = \operatorname{tr}_R \rho_{\infty}^{AR}$, $\rho_{\infty}^R = \operatorname{tr}_A \rho_{\infty}^{AR}$, e $S(\rho) = -\operatorname{tr}(\rho \log_2 \rho)$ é a entropia de von Neumann. Na Figura 5.2 plotamos a informação mútua quântica para um intervalo de tempo próprio Δ fixo ao longo do qual o detetor de Rob está acelerado, assumindo que o estado inicial do sistema de dois qubits é o estado singleto: $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{2}$. Vemos que para acelerações baixas o suficiente, a informação mútua mantém seu valor próximo do valor máximo, $I_Q(A:R) \approx 2$, como esperado. Isso ocorre porque para baixas acelerações a temperatura do banho térmico de Unruh é pequena contendo, portanto, poucas partículas com energia própria Ω capazes de interagir com o detetor. A razão porque $I_Q(A:R) \neq 2$ para a arbitrariamente pequeno é que mesmo detetores inerciais têm uma probabilidade não nula de espontaneamente decair com a emissão de uma partícula de Minkowski, que carrega a informação sobre o sistema de qubits. Para acelerações arbitrariamente altas, onde o detetor experimenta temperaturas de Unruh arbitrariamente altas, temos $I_Q(A:R) \to 1$, indicando que os qubits ainda estão correlacionados mas não estão mais emaranhados, como pode ser visto diretamente da equação (5.89):

$$\rho_{\infty}^{AR} \xrightarrow{a \to \infty} \frac{1}{2} |0_A\rangle \otimes |0_R\rangle \langle 0_A| \otimes \langle 0_R| + \frac{1}{2} |1_A\rangle \otimes |1_R\rangle \langle 1_A| \otimes \langle 1_R|.$$

Para entendermos melhor o conteúdo físico codificado na Figura 5.2, é interessante analisarmos o emaranhamento entre o sistema de dois qubits e o campo. Como $|\Psi_{\infty}^{AR\phi}\rangle$ é um estado puro, o emaranhamento entre os qubits e o campo é dado por, ver equação (3.49),

$$E^{AR\phi} = S(\rho_{\infty}^{AR}) = S(\rho_{\infty}^{\phi}), \qquad (5.92)$$

onde ρ_{∞}^{AR} foi definida na equação (5.88) e ρ_{∞}^{ϕ} é a matriz densidade obtida analogamente tomando o traço parcial nos graus de liberdade dos qubits. Na Figura 5.3, plotamos o emaranhamento entre os qubits e o campo na situação descrita na Figura 5.2. O emaranhamento sistema de qubits-campo $E^{AR\phi}$ é pequeno para acelerações baixas o suficiente, já que $|\Psi_{\infty}^{AR\phi}\rangle$ é aproximadamente separável (mas não exatamente separável devido novamente à probabilidade não nula de desexcitação expontânea de detetores inerciais) em contraste com o caso de acelerações altas onde $E^{AR\phi}$ aproxima-se da unidade. Assim como para a informação mútua, o emaranhamento sistema de qubits-campo tem um comportamento não trivial atingindo o seu valor máximo em $a = a_0$, que é precisamente onde $I_Q(A:R)$ atinge seu mínimo (veja a Figura 5.2). Para $a \ge a_0$, o sistema de qubits recupera parte de suas correlações após um tempo $\tau = \tau_e \le \Delta$ como mostrado na Figura 5.4.



Figura 5.4: O gráfico segue o comportamento do emaranhamento $E^{AR\phi}$, ao longo do tempo para três acelerações diferentes: $a/\Omega = 100$ (linha cheia), $a/\Omega = a_0 = 545.75$ (linha tracejada) e $a/\Omega = 2000$ (linha pontilhada) assumindo o mesmo estado inicial e parâmetros ϵ , Ω , Δ , e κ que na Figura 5.2. Notemos que para $a \leq a_0$, $E^{AR\phi}$ cresce monotonicamente como função do tempo. Entretanto, para $a > a_0$, o sistema de qubits e o campo ficam maximamente emaranhados em um tempo $\tau = \tau_e < \Delta$, após o qual o sistema de qubits recupera parte de suas correlações do sistema total. Apesar de não estar evidente visualmente, o gráfico é plotado no intervalo de aceleração $\tau = [1, \Delta]$, que respeita o vínculo $\Omega \tau \gg 1$ [veja a discussão acima equação (5.65)].

Concurrence

Agora, mostraremos que o sistema de qubits experimenta uma morte súbita do emaranhamento para acelerações menores do que aquela necessária para a informação mútua atingir o seu mínimo. Para esse propósito, calculamos a concurrence, equação (3.51),

$$C(\rho_{\infty}^{AR}) = \max\left\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right\},\tag{5.93}$$

associada com o estado misto ρ_{∞}^{AR} , onde λ_i (i = 1, ..., 4) são os auto-valores de

$$ho^{AR}_{\infty}(\sigma_y\otimes\sigma_y)\overline{
ho}^{AR}_{\infty}(\sigma_y\otimes\sigma_y)$$

 $\operatorname{com} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$. O operador $\overline{\rho}_{\infty}^{AR}$ é obtido tomando o complexo conjugado de todos os termos na equação (5.90). Na Figura 5.5, vemos que para acelerações *a* arbitrariamente baixas, o sistema de qubits tem $C(\rho_{\infty}^{AR}) \approx 1$ que está de acordo com $I_Q(A:R) \approx 2$ achado no limite de baixas acelerações. Agora, conforme a aceleração cresce, o emaranhamento entre os qubits decresce monotonicamente anulando-se a partir do valor

$$a/\Omega = a_{\rm sd}/\Omega = \pi/\ln(\nu^2/2 + \sqrt{1 + \nu^4/4}).$$
 (5.94)

Portanto, para um intervalo de tempo Δ de aceleração, os dois qubits perdem seu emaranhamento para todo $a \geq a_{sd}$.



Figura 5.5: A concurrence $C(\rho_{\infty}^{AR})$ é plotada como função da aceleração a/Ω assumindo o mesmo estado inicial e parâmetros ϵ , Ω , Δ , and κ que na Figura 5.2. A morte súbita do emaranhamento entre os dois qubits é observada em $a_{\rm sd}/\Omega \approx 273.00$.

5.2.3 Teletransporte e o efeito Unruh

Agora, vamos usar os resultados anteriores para revisitar o protocolo do teletransporte quando Alice e Rob compartilham inicialmente o estado emaranhado (5.68) no estado singleto, $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{2}$, e calcular como a fidelidade é afetada pela aceleração do qubit de Rob. O estado a ser teleportado por Alice é dado por

$$|\varphi_C\rangle = \gamma |0_C\rangle + \delta |1_C\rangle, \tag{5.95}$$

que combinado com $|\Psi_{AR}\rangle$, dado na equação (5.68), e com o vácuo de Minkowski leva no seguinte estado inicial:

$$|\Psi_{-\infty}^{CAR\phi}\rangle = |\varphi_C\rangle \otimes |\Psi_{AR}\rangle \otimes |0_M\rangle.$$
(5.96)

Usando agora que

$$|0_{C}\rangle \otimes |0_{A}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_{CA}^{+}\rangle + |\phi_{CA}^{-}\rangle),$$

$$|0_{C}\rangle \otimes |1_{A}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_{CA}^{+}\rangle + |\psi_{CA}^{-}\rangle),$$

$$|1_{C}\rangle \otimes |0_{A}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_{CA}^{+}\rangle - |\psi_{CA}^{-}\rangle),$$

$$|1_{C}\rangle \otimes |1_{A}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_{CA}^{+}\rangle - |\phi_{CA}^{-}\rangle),$$

(5.97)

onde $|\phi_{CA}^+\rangle$, $|\phi_{CA}^-\rangle$, $|\psi_{CA}^+\rangle$, $|\psi_{CA}^-\rangle$ são os estados de Bell [veja a equação (3.32)], colocamos a equação (5.96) na forma

$$\begin{aligned} |\Psi_{-\infty}^{CAR\phi}\rangle &= \frac{1}{2} \Big[|\phi_{CA}^{+}\rangle \otimes (\gamma |1_{R}\rangle - \delta |0_{R}\rangle) \otimes |0_{M}\rangle + |\phi_{CA}^{-}\rangle \otimes (\gamma |1_{R}\rangle + \delta |0_{R}\rangle) \otimes |0_{M}\rangle \\ &+ |\psi_{CA}^{+}\rangle \otimes (-\gamma |0_{R}\rangle + \delta |1_{R}\rangle) \otimes |0_{M}\rangle |\psi_{CA}^{-}\rangle \otimes (\gamma |0_{R}\rangle + \delta |1_{R}\rangle) \otimes |0_{M}\rangle \Big]. \end{aligned}$$

O estado assintótico final total depois que Rob acelerou por um tempo próprio Δ pode ser escrito a partir da equação (5.72) como

$$|\Psi_{\infty}^{CAR\phi}\rangle = (I + a_{RI}^{\dagger}(\lambda)R - a_{RI}(\overline{\lambda})R^{\dagger})|\Psi_{-\infty}^{CAR\phi}\rangle.$$
(5.98)

Vamos assumir que a Alice faz uma medida de Bell em algum lugar no passado causal do evento em que Rob começa a acelerar. A escolha de uma medida de Bell é natural já que nesse ponto eles compartilham um estado maximamente emaranhado levando Alice a seguir o protocolo original de teletransporte. Note também que no momento da medição, ela não tem em princípio nenhuma maneira de prever se Rob irá ou não ficar sobre a influência de alguma força externa. Por simplicidade, vamos assumir que Alice mede o estado $|\psi_{CA}^{-}\rangle$. Isso será então transmitido para Rob, através de algum canal clássico, que então poderá usar essa informação para decidir como agir em seu estado ao final de sua aceleração. Então obtemos

$$\begin{split} |\Psi_{\infty}^{CAR\phi}\rangle &= -\frac{1}{2} |\psi_{CA}^{-}\rangle \otimes (\gamma|0_{R}\rangle + \delta|1_{R}\rangle) \otimes |0_{M}\rangle + \frac{\gamma}{2} |\psi_{CA}^{-}\rangle \otimes |1_{R}\rangle \otimes a_{RI}(\overline{\lambda})|0_{M}\rangle \\ &- \frac{\delta}{2} |\psi_{CA}^{-}\rangle \otimes |0_{R}\rangle \otimes a_{RI}^{\dagger}(\lambda)|0_{M}\rangle \\ &= -\frac{1}{2} |\psi_{CA}^{-}\rangle \otimes (\gamma|0_{R}\rangle + \delta|1_{R}\rangle) \otimes |0_{M}\rangle + \frac{\nu\gamma e^{-\pi\Omega/a}}{2(1 - e^{-2\pi\Omega/a})^{1/2}} |\psi_{CA}^{-}\rangle \otimes |1_{R}\rangle \otimes |1_{\tilde{F}_{2\Omega}}\rangle \\ &- \frac{\nu\delta}{2(1 - e^{-2\pi\Omega/a})^{1/2}} |\psi_{CA}^{-}\rangle \otimes |0_{R}\rangle \otimes |1_{\tilde{F}_{1\Omega}}\rangle. \end{split}$$

Agora, note que o resultado final não dependerá de quando Alice realiza sua medição já que trocar a ordem de: (i) projetar o resultado em $|\psi_{CA}^-\rangle$ e (ii) evoluir temporalmente $|\Psi_{-\infty}^{CAR\phi}\rangle$, não altera $|\Psi_{\infty}^{CAR\phi}\rangle$. A matriz densidade associada com o qubit de Rob é

$$\rho_{\infty}^{R} = ||\Psi_{\infty}^{CAR\phi}||^{-2} \operatorname{tr}_{\phi CA}|\Psi_{\infty}^{CAR\phi}\rangle\langle\Psi_{\infty}^{CAR\phi}|, \qquad (5.99)$$

onde

$$||\Psi_{\infty}^{CAR\phi}||^{2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|\gamma|^{2}\nu^{2}e^{-2\pi\Omega/a}}{1 - e^{-2\pi\Omega/a}} + \frac{|\delta|^{2}\nu^{2}}{1 - e^{-2\pi\Omega/a}} \right).$$
(5.100)

A equação (5.99) pode ser rescrita como

$$\rho_{\infty}^{R} = (|\gamma|^{2} S_{0}^{\gamma\delta} + |\delta|^{2} S_{2}^{\gamma\delta})|0_{R}\rangle\langle 0_{R}| + \gamma \,\overline{\delta} \,S_{0}^{\gamma\delta}|0_{R}\rangle\langle 1_{R}|
+ \overline{\gamma} \,\delta \,S_{0}^{\gamma\delta}|1_{R}\rangle\langle 0_{R}| + (|\delta|^{2} \,S_{0}^{\gamma\delta} + |\gamma|^{2} \,S_{1}^{\gamma\delta})|1_{R}\rangle\langle 1_{R}|,$$
(5.101)

onde

$$S_0^{\gamma\delta} = \frac{1 - e^{-2\pi\Omega/a}}{1 - e^{-2\pi\Omega/a} + \nu^2 |\delta|^2 + \nu^2 |\gamma|^2 e^{-2\pi\Omega/a}},$$
(5.102)

$$S_1^{\gamma\delta} = \frac{\nu^2 e^{-2\pi\Omega/a}}{1 - e^{-2\pi\Omega/a} + \nu^2 |\delta|^2 + \nu^2 |\gamma|^2 e^{-2\pi\Omega/a}},$$
(5.103)

$$S_2^{\gamma\delta} = \frac{\nu^2}{1 - e^{-2\pi\Omega/a} + \nu^2 |\delta|^2 + \nu^2 |\gamma|^2 e^{-2\pi\Omega/a}}.$$
(5.104)



Figura 5.6: A fidelidade do teletransporte é plotada como função da aceleração a/Ω e com os valores ϵ , Ω , Δ and κ sendo os mesmos que na Fig. 5.2.

Vamos tomar $\gamma = \delta = 1/\sqrt{2}$ na equação (5.95). Nesse caso, usando a base $\{|0_R\rangle, |1_R\rangle\}$ temos

$$\rho_{\infty}^{R} = \begin{pmatrix} S_{0} + S_{2} & S_{0} \\ S_{0} & S_{0} + S_{1} \end{pmatrix}, \qquad (5.105)$$

com

$$S_0 \equiv \frac{S_0^{1/\sqrt{2} 1/\sqrt{2}}}{2}, S_1 \equiv \frac{S_1^{1/\sqrt{2} 1/\sqrt{2}}}{2}, S_2 \equiv \frac{S_2^{1/\sqrt{2} 1/\sqrt{2}}}{2}.$$

Finalmente, a fidelidade do teletransporte $F \equiv \langle \varphi_C | \rho_{\infty}^R | \varphi_C \rangle$ fica

$$F = S_0 + 1/2, \tag{5.106}$$

e é plotada na Figura 5.6 como função da aceleração própria do qubit de Rob. Vemos na Figura 5.6 que para acelerações baixas o suficiente $F \approx 1$ e para acelerações altas $F \approx 0.5$. Isso ocorre devido a perda de emaranhamento entre os qubits da Alice e de Rob, como visto anteriormente. Ao contrário das Figuras 5.2 e 5.3, vemos que F decresce monotonamente com a/Ω .

5.2.4 Comentários

Desenvolvimentos tecnológicos permitiram novos e refinados testes da mecânica quântica. Isso é interessante não apenas em informação quântica mas também em conexão com um grande número de aspectos conceituais. Em particular, a interface entre mecânica quântica e a relatividade vem sendo uma fonte de preocupação permanente [79] que culmina na longa busca pela gravitação quântica. Entretanto, como já vimos, há uma física extremamente interessante envolvendo a mecânica quântica e a relatividade já no espaço-tempo de Minkowski. Por exemplo, nas Seções 4.2 e 4.3 vimos como o movimento dos detetores influencia as desigualdades de Bell para férmions e fótons, respectivamente. Nessa seção, analisamos como a fidelidade do teletransporte é afetada quando um dos qubits do par emaranhado acelera por um tempo próprio finito sob a influência de algum agente externo e, durante a aceleração, interage com um campo escalar sem massa. Mostramos que a fidelidade do teletransporte decresce com o aumento da aceleração, fixado o tempo próprio de interação (veja a Figura 5.6). Do ponto de vista dos observadores inerciais, isso se deve ao fato que parte do emaranhamento entre os qubits é carregado pelo radiação escalar emitida quando o qubit acelerado sofre uma transição. Isso é confirmado pelo fato que a informação mútua entre os qubits e o emaranhamento sistema de qubits-campo tem um comportamento complementar como função da aceleração, i.e., um decresce (cresce) enquanto o outro cresce (decresce) (veja as Figuras 5.2 e 5.3). A não trivialidade desses gráficos, codificada no fato que eles não têm um comportamento monótono como função da aceleração, pode ser entendida a partir da Figura 5.4, que mostra que após um tempo au_e longo o suficiente o emaranhamento entre o sistema de qubits e o campo começa a decrescer. Isso fica claro no caso a = 2000. Para $a \leq 545.75$ esse comportamento seria visto se Δ fosse grande o suficiente. Notavelmente, a concurrence (que mede o emaranhamento entre os qubits) experimenta uma morte súbita para uma aceleração $a_{\rm sd}$ como mostrado na Figura 5.5. Finalmente, devemos chamar atenção que do ponto de vista dos observadores uniformemente acelerados, a interpretação dos resultados acima é bem diferente da interpretação dos observadores inerciais. Do ponto de vista dos observadores acelerados, o qubit interage com o banho térmico de Unruh de partículas reais de Rindler no qual ele está imerso no seu referencial próprio. Esse é outro exemplo de como observadores inerciais e acelerados podem dar interpretações físicas diferentes para o mesmo fenômeno físico. É claro porém, que eles devem concordar com o resultado da medição dado pelo arranjo experimental usado.

5.3 Mudança Súbita no Comportamento das Correlações Clássicas e Quânticas e o Efeito Unruh

Na Seção 3.5, mostramos que existem correlações que são quânticas porém não provém do emaranhamento. Tais correlações, que podem existir inclusive para estados separáveis, melhoram diversas tarefas computacionais com relação a quando estados clássicos são usados [71, 72] o que, junto com sua importância conceitual, reforça sua relevância. Por isso nos últimos anos tais correlações vêm sendo estudadas em diversos contextos, como por exemplo seu comportamento sob o processo de decoerência [135, 136, 137, 138] e transições de fase [139, 140, 141, 142]. Agora, vamos usar o efeito Unruh para analisar a dinâmica das correlações clássicas e quânticas para uma sistema de dois qubits quando um deles acelera uniformemente por um tempo próprio finito [21]. Vamos mostrar que as correlações quânticas são destruídas apenas no limite de aceleração infinita, enquanto que as clássicas nunca se anulam. Em particular, mostraremos que tais correlações exibem a chamada *mudança súbita* como uma função da aceleração.

5.3.1 Dinâmica das Correlações Clássicas e Quânticas

Vamos novamente modelar o qubit pelo detetor semi-clássico de dois níveis descrito na Seção 5.2.1. Assim como na seção anterior, vamos considerar dois observadores, Alice (inercial) e Rob (uniformemente acelerado por um tempo próprio finito Δ), cada um carregando um qubit. O estado inicial do sistema total composto pelos dois qubits e o campo é dado por

$$\begin{aligned} |\Psi_0^{AR\phi}\rangle &= |\Psi_0^{AR}\rangle \otimes |0_M\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0_A\rangle \otimes |1_R\rangle - |1_A\rangle \otimes |0_R\rangle\right) \otimes |0_M\rangle \end{aligned} \tag{5.107}$$

com $\{|0_X\rangle, |1_X\rangle\}$ sendo uma base ortonormal do espaço interno do qubit $X = A \in R$ (que rotulam Alice e Rob, respectivamente) e $|0_M\rangle$ é o vácuo de Minkowski. A Hamiltoniana livre de cada um dos detetores é dada na equação (5.51), com as substituições apropriadas $D \to A, R$. Os detetores são projetados para ligarem apenas quando estão acelerados. Sendo assim, o qubit inercial de Alice é mantido sempre desligado enquanto o de Rob interage com o campo durante um tempo próprio finito Δ através da constante de acoplamento efetiva ν^2 [veja as equações (5.82) e (5.84)]. Com isso, o qubit de Rob interage com o campo escalar através da Hamiltoniana (5.53) (com as substituições $D \to R$ $e t \to \tau$). O estado final do sistema total após a interação é dado pela equação (5.90), que por conveniência rescrevemos aqui como

$$\rho_{\infty}^{AR} = \begin{bmatrix}
S_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & S_0 & -S_0 & 0 \\
0 & -S_0 & S_0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & S_1
\end{bmatrix},$$
(5.108)

onde usamos a base

$$\{|0_A\rangle\otimes|0_R\rangle,|1_A\rangle\otimes|0_R\rangle,|0_A\rangle\otimes|1_R\rangle,|1_A\rangle\otimes|1_R\rangle\}.$$

Aqui, lembramos que

$$S_0 = \frac{1-q}{2(1-q)+\nu^2(1+q)},$$

$$S_1 = \frac{\nu^2 q}{2(1-q)+\nu^2(1+q)},$$

$$S_2 = \frac{\nu^2}{2(1-q)+\nu^2(1+q)},$$

onde definimos $q \equiv e^{-2\pi\Omega/a}$. Lembramos que as condições necessárias para que as equações acima sejam válidas são que $\Omega^{-1} \ll \Delta$ e que ϵ seja uma função que varia lentamente com o tempo em comparação com a frequência Ω .



Figura 5.7: Plotamos as correlações clássicas (linha tracejada), quânticas (linha sólida) e a informação mútua (linha pontilhada) como função da aceleração parametrizada q(assumindo $\nu^2 = 0.4\pi$) no gráfico da esquerda e de ν^2 (assumindo q = 0.4) no gráfico da direita.

No limite de aceleração infinita $(q \rightarrow 1)$, vemos da equação (5.108) que a matriz densidade reduzida do sistema de dois qubits é

$$\rho_{\infty}^{AR}\big|_{q \to 1} = \frac{1}{2}|0_A 0_R\rangle \langle 0_A 0_R| + \frac{1}{2}|1_A 1_R\rangle \langle 1_A 1_R|.$$
(5.109)

O estado (5.109) é consequência do fato que é permitido ao detetor sofrer apenas ou uma transição ou nenhuma [20] e de que para acelerações infinitas o detetor sempre sofre uma transição (afinal, do ponto de vista dos observadores acelerados, o qubit está em contato com um banho térmico de temperatura infinita). Como, do ponto de vista dos observadores inerciais, cada transição do detetor é acompanhada da emissão de uma partícula de Minkowski, tais observadores devem descartar dados vindo de experimentos onde duas ou mais partículas de Minkowski estão presentes usando algum processo de pós-seleção. Analogamente, os observadores uniformemente acelerados devem descartar dados de experimentos onde ocorreram duas ou mais transições dos detetores. Vamos agora fazer uma análise da dinâmica das correlações clássicas

$$\mathcal{K}\left(\rho^{AB}\right) \equiv \max_{\left\{\Pi_{m}^{A} \otimes \Pi_{n}^{B}\right\}} \left\{ I(\mathcal{U}:\mathcal{V}) \right\},\tag{5.110}$$

e quânticas

$$\mathcal{Q}(\rho^{AB}) \equiv I_Q(A:B) - \mathcal{K}(\rho^{AB}), \qquad (5.111)$$

onde $I(\mathcal{U} : \mathcal{V})$ é a informação mútua clássica entre as variáveis aleatórias $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$ que tomam os valores $u_m \in v_n$ com probabilidades $p^A(m) \equiv \operatorname{tr} \left(\prod_m^A \rho^A \right) \in p^B(n) \equiv \operatorname{tr} \left(\prod_n^B \rho^B \right)$ respectivamente, e tem probabilidade conjunta $p^{AB}(m,n) \equiv \operatorname{tr} \left(\prod_m^A \otimes \prod_n^B \rho^{AB} \right)$, assumindo detetores pontuais: $\kappa = 0$. Aqui, como estamos estudando sistemas com dois qubits,


Figura 5.8: Plotamos as correlações quântica (gráfico de densidade à esquerda) e clássica (gráfico de densidade à direita) como funções de ν^2 and q usando o estado inicial dado na equação (5.107).

estamos nos restringindo a medições projetivas $\{\Pi_k^X\}, X \in \{A, B\}$ [73]. Note que estamos usando as medidas simétricas para as correlações clássica e quântica (i.e., os dois sistemas são medidos) ao invés das medidas assimétricas (apenas um dos subsistemas é medido),

$$\mathcal{J}(\rho^{AB}) \equiv \max_{\{\Pi_k^B\}} \left\{ S(\rho^A) - \sum_n p^B(n) S(\rho_n^A) \right\}$$
(5.112)

е

$$\mathcal{D}\left(\rho^{AB}\right) \equiv I_Q(A:B) - \mathcal{J}(\rho^{AB}), \qquad (5.113)$$

onde $p^B(n) = \text{tr}\Pi_n^B \rho^B e \rho_n^A \equiv \text{tr}_B \left(I^A \otimes \Pi_n^B \rho^{AB}\right) / p^B(n)$. Isso se deve ao fato que o sistema Alice-Rob não é simétrico sob a troca de subsistemas $A \leftrightarrow B$, já que Alice está inercial e Rob uniformemente acelerado. Por completeza, iremos comparar os resultados obtidos usando as equações (5.110) e (5.111) com os resultados obtidos usando as equações (5.112) e (5.113).

No gráfico à esquerda na Figura 5.7 as correlações quânticas e clássicas bem como a informação mútua quântica entre os dois qubits são plotadas como funções da aceleração parametrizada q, para valores fixos de ν^2 e do tempo Δ em que o qubit de Rob permanece acelerado. Note que para acelerações arbitrariamente pequenas o valor da informação mútua difere de 2, como seria esperado para o estado singleto (5.107). Como já comentamos na seção anterior, isso se dá devido à probabilidade não nula de decaimento espontâneo (ao longo do tempo não nulo Δ), com a emissão de uma partícula de Minkowski, de detetores inerciais. Tal processo leva a uma perda de pureza do estado singleto inicial. É importante enfatizar, entretanto, que o valor usual 2 para a informação mútua é obtido quando a constante de acoplamento ν^2 se anula, conforme pode ser visto no gráfico à direita na Figura 5.7. Em tal caso, não há nenhuma interação entre o qubit de Rob e o campo escalar. A Figura 5.7 mostra que o sistema de dois qubits ainda têm correlações clássicas no limite de aceleração infinita $(q \rightarrow 1)$, enquanto as correlações quânticas se anulam. Isso está de acordo com a equação (5.109) e é uma consequência do nosso modelo de detetor. Do ponto de vista dos observadores uniformemente acelerados, a perda da correlação quântica se deve à interação do qubit de Rob com o banho térmico de Unruh de partículas de Rindler que eles experimentam quando o campo está no vácuo de Minkowski. Lembramos que a temperatura de Unruh que o qubit uniformemente acelerado experimenta é proporcional à sua aceleração própria. Agora, da perspectiva dos observadores inerciais, a correlação quântica é levada pela radiação escalar emitida pelo qubit acelerado quando ele sofre uma transição. Outro resultado interessante que pode ser visto do gráfico à esquerda na Figura 5.7 é que tanto as correlação clássicas quanto as correlações quânticas entre os qubits não podem ser descritas por uma função diferenciável da aceleração. Análises numéricas extensivas indicam que essa mudança súbita não depende do estado inicial considerado. (O termo mudança súbita foi cunhado na referência [135] e observado experimentalmente em [143].) Para valores maiores de ν^2 , o ponto de mudança súbita move-se para a esquerda no eixo q. Um comportamento similar é observado quando plotamos as mesmas correlações como função de ν^2 para um valor fixo da aceleração, veja o gráfico à direita na Figura (5.7). Quanto maior a aceleração, mais próximo da origem o ponto de mudança súbita fica. Na Figura 5.8, mostramos como a correlação quântica (gráfico à esquerda) e clássica (gráfico à direita) depende dos parâmetros q e ν^2 . Fica claro que a correlação quântica se anula para todo valor de ν^2 desde que a aceleração q seja arbitrariamente alta. Na Figura 5.9, mostramos o comportamento da informação mútua como função de q e ν^2 . Vemos, conjuntamente com a Figura 5.8, que para acelerações $q \to \infty$, todas as correlações têm uma natureza clássica ao invés de quântica para todos os valores de ν^2 .

5.3.2 Medida Simétrica de Correlação Quântica e a Discódia Quântica

Em geral, não há nenhuma razão a priori para que as medidas de correlação quântica simétrica, equação (5.111), e a discórdia (medida de correlação quântica assimétrica), equação (5.113), deem os mesmos resultados para sistemas que não são simétrico pela troca de suas partes. De fato, no nosso caso elas são distintas, apesar de próximas, como pode ser visto na Figura 5.10. Um fato interessante que também pode ser visto da Figura 5.10 é que ambas as medidas parecem dar o mesmo resultado para o valor da mudança súbita q_{sc} . Isso nos permite encontrar uma expressão (aproximada) analítica para q_{sc} da seguinte maneira. Recentemente, foi mostrado que para todas as matrizes densidade de dois qubits da forma



Figura 5.9: Plotamos a informação mútua quântica como função de ν^2 e q^2 , usando o estado inicial dado na equação (5.107).

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix}
\rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\
0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\
0 & \rho_{23} & \rho_{22} & 0 \\
\rho_{14} & 0 & 0 & \rho_{33}
\end{bmatrix}$$
(5.114)

a discórdia quântica (5.113) é dada por $\left[138\right]$

$$\mathcal{D} = \min\{D_1, D_2\} \quad (D_1, D_2 \ge 0), \tag{5.115}$$

onde

$$D_{1} = S(\rho_{A}) - S(\rho_{AB}) - \rho_{11} \log \left[\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{22}}\right] - \rho_{22} \log \left[\frac{\rho_{22}^{2}}{(\rho_{11} + \rho_{22})(\rho_{33} + \rho_{22})}\right] - \rho_{33} \log \left[\frac{\rho_{33}}{\rho_{33} + \rho_{22}}\right],$$
(5.116)

$$D_{2} = S(\rho_{A}) - S(\rho_{AB}) - \frac{1}{2}(1+\Gamma)\log\left[\frac{1}{2}(1+\Gamma)\right] - \frac{1}{2}(1-\Gamma)\log\left[\frac{1}{2}(1-\Gamma)\right],$$
(5.117)

e $\Gamma^2 \equiv (\rho_{11} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23} + \rho_{14}|^2$. Usando o operador densidade ρ_{∞}^{AR} dado na equação (5.108) na equação (5.114), obtemos

$$D_1 = 2S_0, D_2 = S(\rho_{\infty}^A) - S(\rho_{\infty}^{AB}) - \frac{1}{2}\log\left[\frac{1}{4}(1-\Gamma^2)\right] + \frac{1}{2}\Gamma\log\left[\frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}\right]$$



Figura 5.10: Gráfico das correlações quânticas como função da aceleração q impondo $\nu^2 = 0.4 \pi$. A linha sólida mostra o comportamento da medida simétrica enquanto a linha tracejada exibe o comportamento da discórdia quântica (para medições feitas quer por Alice, quer por Rob).

com $\Gamma^2 = (S_2 - S_1)^2 + 4S_0^2$. Então, vemos da equação (5.115) que o ponto de *mudança* súbita é obtido resolvendo

$$D_1 = D_2,$$
 (5.118)

que é uma equação transcendental para $q \in \nu^2$. Para o caso mostrado na Figura 5.7, a equação (5.118) é satisfeita para $q = q_{sc} \approx 0.53925$, o que está de acordo com a análise numérica apresentada anteriormente. Uma expressão semi-analítica para q_{sc} pode ser encontrada como se segue. Primeiro, achamos numericamente todos os pares (q, ν^2) que satisfazem a equação (5.118). Em seguida, um ajuste exponencial

$$q_{sc} = \exp[a + b\nu^2 + c\nu^4] \tag{5.119}$$

é feito nessas soluções com parâmetros

$$a = 0.00054, \quad b = -0.51488, \quad c = 0.01959.$$

Como pode ser visto a partir da Figura 5.11, a equação (5.119) está em muito bom acordo com as soluções da equação (5.118) para os intervalos de $q \in \nu^2$ considerados aqui. A Figura 5.11 mostra também que os valores de aceleração

$$q_{sd} = (\nu^2/2 + \sqrt{1 + \nu^4/4})^{-2}$$
(5.120)

para os quais a *morte súbita* [130, 144] do emaranhamento ocorre [veja a equação (5.94)] parecem não ter correlação com os valores em que a *mudança súbita* ocorre. Além disso,



Figura 5.11: A linha pontilhada mostra o gráfico das soluções numéricas da equação (5.118). A linha sólida mostra o ajuste exponencial dado na equação (5.119). A linha tracejada exibe o comportamento da função dada na equação (5.120) mostrando os valores de $q \in \nu^2$ em que a morte súbita do emaranhamento ocorre.

note que a correlação quântica simétrica, equação (5.111), e a discórdia, equação (5.113), ainda estão presentes mesmo depois que o emaranhamento se anula.

Agora, vamos analisar o que ocorre quando usamos um estado inicial não simétrico

$$|\Psi_0^{\prime AR\phi}\rangle = (\alpha|0_A\rangle \otimes |1_R\rangle - \beta|1_A\rangle \otimes |0_R\rangle) \otimes |0_M\rangle \tag{5.121}$$

sob a permutação dos qubits $A \in R$, onde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, ao invés do estado simétrico dado na equação (5.107). Na Figura 5.12, plotamos a discórdia quântica (5.113) e a medida simétrica (5.111) para a correlação quântica assumindo o estado (5.121) com $\alpha = 0.3$. Como podemos ver, a discórdia quântica calculada com medições feitas por Alice (inercial) e Rob (não inercial) diferem da medida simétrica [equação (5.111)] e entre si (levando com isso a pontos de mudança súbita diferentes para os dois observadores). Em tais situações, usar a medida simétrica de correlação quântica (e clássica) parece ser mais conveniente. Para os casos considerados aqui, os valores de mudança súbita associados com (i) a discórdia quântica calculada pelo observador inercial e (ii) a medida simétrica sempre parecem concordar. Entretanto, a equação (5.118) não é mais válida já que a matriz densidade que descreve o estado dos qubits não é da forma (5.114). A Figura 5.13 mostra o gráfico da equação (5.111) para o estado inicial (5.121). Vemos que o ponto de mudança súbita parece não mudar ao variarmos α (e β). Além disso, vemos que esse ponto crítico sempre existe, com exceção do caso de estados puros separáveis (onde $\alpha = 0$ ou 1).

O gráfico (omitido) para a discórdia quântica como medida pelos observadores inerciais A leva a um comportamento parecido com o visto na Figura 5.13 com concordância sobre



Figura 5.12: As correlações quânticas são plotadas como função da aceleração parametrizada q, impondo $\nu^2 = 0.4 \pi$. A linha sólida mostra a medida simétrica enquanto as linhas pontilhada e tracejada mostram a discórdia quântica com medições feitas por Rob e Alice, respectivamente.

o valor da mudança súbita.

5.3.3 Comentários

Durante essa seção, analisamos o comportamento das correlações quânticas e clássicas para um sistema de dois qubits onde um deles acelera uniformemente por um tempo finito enquanto o outro é mantido inercial. Mostramos que a correlação quântica é degradada pela presença da aceleração. Do ponto de vista dos observadores inerciais, o qubit acelerado tem uma probabilidade não nula de sofrer uma transição com a emissão de uma partícula de Minkowski. Isso é possível porque o agente externo que acelera o qubit fornece a energia necessária. Agora, devido ao efeito Unruh, observadores co-acelerados com o qubit experimentam um banho térmico (de partículas de Rindler) quando o campo está no vácuo de Minkowski. Com isso, para tais observadores, a excitação (desexcitação) do qubit é devido à absorção (emissão) de uma partícula do (para o) banho térmico. Claramente, os observáveis físicos codificados nessas correlações não dependerão da descrição específica de cada observador. No limite de aceleração infinita, o banho térmico de Unruh tem uma temperatura arbitrariamente alta e portanto é natural esperar que as correlações quânticas sejam completamente destruídas; no entanto, correlações clássicas ainda estão presentes em tal caso [veja a equação (5.109)].

Outro fato interessante é que tanto a correlação clássica quanto a correlação quântica não podem ser descritas por uma função diferenciável da aceleração. Elas exibem uma mudança súbita em um valor crítico $q = q_{sc}$. Ao comparar a discórdia quântica com a



Figura 5.13: A correlação quântica simétrica entre os qubits de Alice e Rob é plotada como função de α e q, impondo $\nu^2 = 0.4\pi$, usando o estado inicial (5.121). Vemos que ele exibe uma mudança súbita ao longo da linha $q \approx 0.54$.

medida simétrica para a correlação quântica, equação (5.111), encontramos que, apesar das medidas não serem idênticas, elas são muito próximas quando assumimos um estado inicial singleto. Isso nos permitiu encontrar um expressão analítica para q_{sc} em termos de ν^2 . Nossos resultados indicam que os valores para a *mudança súbita* das correlações e a *morte súbita* do emaranhamento não estão correlacionadas. Finalmente, considerando um estado inicial não simétrico, encontramos que as a discórdia quântica e medida simétrica de correlação quântica se tornam bem distintas. Além disso, a discórdia como calculada pelo observador inercial A e não inercial R são distintas levando a pontos de mudança súbita diferentes. Esse resultado sugere que a medida simétrica deve ser mais conveniente para calcular a correlação entre as partes quando os experimentalistas têm estados de movimento diferentes.

Capítulo 6

Informação Quântica nas Vizinhanças de um Buraco Negro

Nessa seção, vamos estudar a influência que a presença de um buraco negro tem em diversos efeitos em informação quântica. Em particular, mostraremos que o emaranhamento entre um par de qubits, um em queda livre e o outro estático, na vizinhança de um buraco negro de Schwarzschild desaparece após um tempo Δ finito. Apesar disso, a correlação quântica entre os qubits desaparecerá apenas assintoticamente [21]. Além disso, mostraremos que se usarmos esse estado emaranhado para realizarmos o protocolo de teletransporte, sua fidelidade diminuirá conforme o qubit estático se aproxima do horizonte de eventos.

Na Seção 6.1, discutiremos o efeito Unruh no espaço-tempo de Schwarzschild. Na Seção 6.2, estudaremos o comportamento de um par de qubits emaranhados (modelados como detetores semi-clássicos) nas vizinhanças de um buraco negro estático e esfericamente simétrico.

6.1 O Efeito Unruh no Espaço-Tempo de Schwarzschild

Tomemos o espaço-tempo de Schwarzschild maximamente extendido $(\mathbb{R}^2 \times S^2, g_{ab}^{sch})$ [2, 3]. O elemento de linha associado à métrica g_{ab}^{sch} é dado por

$$ds_{g_{ab}^{sch}}^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \left(-dT^2 + dX^2 \right) + r^2 d\Omega_{S^2}^2, \tag{6.1}$$

onde M é uma constante positiva, (T, X) são coordenadas no \mathbb{R}^2 que cobrem a região $T^2 - X^2 < 1$, r é definido implicitamente pela equação $T^2 - X^2 = (1 - r/2M) e^{r/2M}$ e $d\Omega_{S^2}^2$ é o elemento de linha da esfera S^2 , que em coordenadas esféricas usuais θ, ϑ toma a forma

$$d\Omega_{S^2}^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\vartheta^2.$$



Figura 6.1: Diagrama espaço-temporal do espaço-tempo de Schwarzschild com as regiões I, II, III e IV dadas por |T| < X, |T| < -X, T > |X| e T < -|X|, respectivamente. As curvas com as setas são curvas integrais do campo de Killing $\chi = \kappa [X\partial/\partial T + T\partial/\partial X]$, onde $\kappa = 1/4M$.

Na Figura 6.1, mostramos um diagrama espaço-temporal do espaço-tempo de Schwarzschild. Nele, raios de luz são representados por linhas que formam 45^{o} com a vertical. Vemos então que qualquer sinal de luz emitido na região *III* permanece na região *III* e atinge a singularidade em r = 0. Por isso, a região *III* é chamada de buraco negro. A região *IV* pode ser vista como a reversão temporal da região *III* e por isso, recebe o nome de buraco branco. Apesar do espaço-tempo descrito na Figura 6.1 não ser realista (no sentido que os buracos negros em nosso universo provém do colapso gravitacional de estrelas) ele é extremamente útil para estudar diversos aspectos associados a buracos negros. A constante *M* na equação (6.1) é interpretada como sendo a massa do buraco negro. O espaço-tempo de Schwarzschild maximamente estendido possui um campo de Killing χ dado por

$$\chi = \kappa \left(X \partial / \partial T + T \partial / \partial X \right). \tag{6.2}$$

Aqui, $\kappa \equiv 1/4M$ é a chamada gravidade superfícial associada às hiperfícies tipo luz \mathfrak{h}_{\pm} , onde

$$\mathfrak{h}_{\pm} \equiv \{ (T, X, q) \in \mathbb{R}^2 \times S^2 | T = \pm X \}.$$

Como

$$\chi^a \chi_a = (2M/r)e^{-r/2M} \left(T^2 - X^2\right),\,$$

o campo de Killing (6.2) se torna tipo luz em \mathfrak{h}_{\pm} e se anula na esfera $\mathfrak{h}_{+} \cap \mathfrak{h}_{-}$. Por isso, chamamos $\mathfrak{h}_{+} \cup \mathfrak{h}_{-}$ de horizonte de Killing bifurcado gerado por χ [1, 2].

A região I pode ser coberta com coordenadas t, r, θ, ϑ , onde

$$T = e^{\kappa r^*} \sinh(\kappa t), X = e^{\kappa r^*} \cosh(\kappa t), \tag{6.3}$$

 θ, ϑ são as coordenadas esféricas usuais sobre a esfera e $r^* \equiv r + 2M \ln (r/2M - 1)$. Nessas coordenadas, o elemento de linha (6.1) e o campo de Killing (6.2) tomam a forma

$$ds_{g_{ab}^{sch}}^2 = -\left(1 - 2M/r\right)dt^2 + \left(1 - 2M/r\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{S^2}^2 \tag{6.4}$$

e $\chi = \partial/\partial t$, respectivamente. Vemos então que a região I é estática e com isso, podemos realizar a quantização do campo de Klein-Gordon descrita na Seção 5.1.3. Note que $\chi^a \chi_a \xrightarrow{r \to \infty} -1$ e por isso dizemos que a família de observadores estáticos associados com a translação temporal $\phi_t^{\chi}(t_1, r_1, \theta_1, \vartheta_1) = (t_1 + t, r_1, \theta_1, \vartheta_1)$ (definida por χ em I) está naturalmente associada com observadores estáticos no infinito. Nas coordenadas t, r, θ, ϑ , a equação de Klein-Gordon sem massa

$$\nabla^a \nabla_a \phi = 0$$

pode ser escrita como

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathcal{K}\right)\phi = 0,\tag{6.5}$$

onde

$$\mathcal{K}\phi \equiv -\frac{1}{r^2} f \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 f \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} f \nabla_{S^2}^2 \phi, \tag{6.6}$$

 $f(r) \equiv (1 - 2M/r) \in \nabla_{S^2}^2$ é o Laplaciano sobre a esfera unitária. Tome agora uma autofunção ψ de \mathcal{K} com auto-valores ω^2 , i.e., $\mathcal{K}\psi = \omega^2\psi$. Se fizermos a separação de variáveis $\psi(r, \theta, \vartheta) \equiv \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \vartheta)$, onde $l \geq 0$, $-l \leq m \leq l$ e Y_{lm} são os harmônicos esféricos, e substituirmos na equação (6.6) obtemos

$$\left[-\frac{d^2}{dr^{*2}} + V(r^*)\right]u = \omega^2 u,$$
(6.7)

onde $V(r^*) \equiv f(r) \left[\frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]$. A equação (6.7) possui duas soluções linearmente independentes $u^+ e u^-$. Os números $\omega \ge 0$, l e m além de $\alpha \in \{+1, -1\}$ rotulam uma família $\psi^{\alpha}_{\omega lm} = c^{\alpha}_{\omega lm} \frac{u^{\alpha}_{\omega l}}{r} Y_{lm}$, onde $c^{\alpha}_{\omega lm}$ é uma constante de normalização, de auto-funções de \mathcal{K} tal que $\phi^{\alpha}_{\omega lm} \equiv e^{-i\omega t} \psi^{\alpha}_{\omega lm}$ satisfaz [117]

$$(\phi^{\alpha}_{\omega lm}, \phi^{\alpha'}_{\omega' l'm'})_{KG} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega').$$

Sendo assim, vamos tomar $j \equiv (\omega, l, m, \alpha)$ e $\int d\mu(j) \equiv \sum_{\alpha lm} \int d\omega$ e usar a equação (5.29) para definir

$$H_{\chi}^{I} \equiv \left\{ \varphi(x) = \sum_{\alpha lm} \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} \tilde{\varphi}_{lm}^{\alpha}(\omega) e^{-i\omega t} \psi_{\omega lm}^{\alpha}(r,\theta,\vartheta) \bigg| \sum_{\alpha lm} \int d\omega |\tilde{\varphi}_{lm}^{\alpha}(\omega)|^{2} < \infty \right\}.$$
(6.8)

A região II pode ser coberta com as coordenadas $\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\vartheta}$, onde

$$T = e^{\kappa \hat{r}^*} \sinh(\kappa \hat{t}), X = -e^{\kappa \hat{r}^*} \cosh(\kappa \hat{t})$$
(6.9)

e $\hat{\theta}, \hat{\vartheta}$ são as coordenadas esféricas usuais sobre a esfera. Nessas coordenadas, o elemento de linha $ds^2_{g^{sch}_{ab}}$ toma a forma (6.4), com as substituições $t \to \hat{t}, r \to \hat{r}, \theta \to \hat{\theta}, \vartheta \to \hat{\vartheta}$. Portanto, a região II também é estática (com relação ao campo de Killing $-\chi = \partial/\partial \hat{t}$) e procedendo de maneira análoga à descrita acima, usando $\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\vartheta}$ ao invés de t, r, θ, ϑ , definimos o espaço de Hilbert H^{II}_{χ} . Definindo $H_{\chi} \equiv H^I_{\chi} \oplus H^{II}_{\chi}$ e procedendo como descrito na Seção 5.1.3, obtemos uma construção para a quantização do campo ϕ em todo o espaçotempo de Schwarzschild estendido. Se a_X, a^{\dagger}_X são os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, definidos em $\mathfrak{F}_s(H^X_{\chi}), X \in \{I, II\}$, o estado

$$|0_B\rangle \in \mathfrak{F}_s\left(H_{\chi}\right) \simeq \mathfrak{F}_s\left(H_{\chi}^I\right) \bigotimes \mathfrak{F}_s\left(H_{\chi}^{II}\right)$$

que satisfaz $a_X(\overline{\sigma}^X)|0_B\rangle = 0$ para todo $X \in \{I, II\}$ e $\sigma^X \in H^X_{\chi}$ é chamado de vácuo de Boulware. Ele é o estado de nenhuma partícula como visto pelos observadores parados fora do buraco negro.

O espaço-tempo de Minkowski possui além do campo de Killing χ_2 , análogo ao campo de Killing (6.2), um campo de Killing tipo-tempo global χ_1 (associado com a translação temporal definida pelos observadores inerciais) que nos permite realizar a construção usual da teoria quântica do campo escalar ϕ . Entretanto, no espaço-tempo de Schwarzschild, não há nenhum campo de Killing tipo-tempo global. Note porém, que no espaço-tempo de Minkowski uma solução ϕ da equação de Klein-Gordon é de frequência positiva com relação ao tempo inercial t se e somente se sua restrição às hiperfícies tipo luz

$$\mathfrak{N}^{\pm} \equiv \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 | t = \pm x\}$$

é de frequência positiva com relação a $v \equiv t + x$ em \mathfrak{N}^+ e com relação a $u \equiv t - x$ em \mathfrak{N}^- [1, 117]. Então, em analogia com o caso de Minkowski, vamos definir o espaço de Hilbert H_{HH} formado pelas soluções ϕ da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Schwarzschild cuja restrição a $\mathfrak{h}_+ \cup \mathfrak{h}_-$ é de frequência positiva com relação a $V \equiv T + X$ em \mathfrak{h}_+ e com relação a $U \equiv T - X$ em \mathfrak{h}_- . Se a_{HH}, a_{HH}^{\dagger} são os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, definidos em $\mathfrak{F}_s(H_{HH})$, definimos o vácuo de Hartle-Hawking [145, 146, 147] como sendo o vetor $|0_{HH}\rangle \in \mathfrak{F}_s(H_{HH})$ que satisfaz $a_{HH}(\overline{\sigma})|0_{HH}\rangle = 0$ para todo $\sigma \in H_{HH}$. O vácuo de Hartle-Hawking é o único estado não-singular (i.e. Hadamard) e invariante pela translação temporal definida por χ [148]. (O vácuo de Boulware, apesar de invariante pelas translações geradas por χ , é singular em $\mathfrak{h}_+ \cup \mathfrak{h}_-$.)

Agora, procedendo da mesma forma que na Seção 5.1.4, encontramos que o vácuo de Hartle-Hawking pode ser escrito como

$$U|0_{HH}\rangle = \prod_{i} \left(C_{i} \sum_{n_{i}=0}^{\infty} e^{-\pi n_{i}\omega_{i}/a} |n_{iI}\rangle \otimes |n_{iII}\rangle \right).$$
(6.10)

Aqui, $C_i \equiv (1 - e^{-2\pi\omega_i/\kappa})^{1/2}$, $|n_{iX}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n_i!}} \left[a_{RX}^{\dagger}(\psi_i^X)\right]^{n_i} |0_R\rangle$ e os ψ_i^X são centrados em frequências ω_i e formam uma base ortonormal de $\mathfrak{F}_s(H_{\chi}^X)$. Como as regiões I e II são causalmente desconectadas, observadores estáticos em I não têm acesso à região II. Portanto, para tais observadores, o vácuo de Hartle-Hawking é descrito pela matriz densidade

$$\rho_{HH}^{I} = \prod_{i} \left(C_{i}^{2} \sum_{n_{i}=0}^{\infty} e^{-2\pi n_{i}\omega_{i}/\kappa} |n_{iI}\rangle\langle n_{iI}| \right), \tag{6.11}$$

obtida tomando o traço em II da matriz densidade associada com o estado (6.10). Interpretamos esse resultado dizendo que, quando o campo está no vácuo de Hartle-Hawking, observadores parados fora do buraco negro "se sentem" imersos em um banho térmico com temperatura

$$T_H \equiv \kappa/2\pi,\tag{6.12}$$

como medida por observadores estáticos no infinito.

A mesma análise acima é válida para o espaço-tempo de de Sitter e Reissner–Nordström [146]. R. Wald e B. Kay mostraram, assumindo que estados Hadamard são os únicos estados fisicamente relevantes, que o efeito Unruh é válido em uma ampla classe de espaços-tempos com horizontes de Killing bifurcados [148].

6.2 Qubits nas Vizinhanças de um Buraco Negro

Agora, vamos analisar como os resultados do capítulo anterior podem ser utilizados para fazer previsões sobre um par de qubits emaranhados (um em queda livre e o outro estático) nas vizinhanças do horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild quando o campo escalar está no vácuo de Hartle-Hawking.

Modelaremos novamente os qubits como detetores semi-clássicos. A teoria descrita na Seção 5.2.1, apesar de ter sido feita no contexto do espaço-tempo de Minkowski, é válida em qualquer espaço-tempo estático (com campo de Killing χ) no qual o detetor segue as curvas integrais definidas por χ . Em particular, ela é válida para detetores "parados" fora do buraco negro. Além disso, o modelo de detetor descrito na seção 5.2.1 pode ser aplicado para qualquer espaço-tempo desde que a região que o detetor ocupa possa ser tratada como sendo (aproximadamente) estática. Esse será o caso, por exemplo, para detetores suficientemente pequenos em queda livre nas vizinhanças de um buraco negro desde que as mudanças de curvatura que eles sintam sejam pequenas em comparação com Ω^{-1} , onde Ω é a diferença de energia entre os estados do detetor. Vamos agora determinar a configuração exata que nos permitirá traduzir os resultados demonstrados anteriormente para o caso do buraco negro. Para isso, consideremos primeiro o elemento de linha de um espaço-tempo de Schwarzschild bidimensional:

$$ds^{2} = -(1 - 2M/r)dt^{2} + (1 - 2M/r)^{-1}dr^{2}, \qquad (6.13)$$

onde (t, r) são as coordenadas estáticas (6.3) que cobrem a região I. Fazendo a mudança de variáveis

$$r \to \rho(r) = \sqrt{8M(r-2M)},$$

vemos que muito perto do horizonte, $r \approx 2M$, a métrica toma a forma

$$ds^{2} = -(\rho/4M)^{2}dt^{2} + d\rho^{2}.$$
(6.14)

Com as definições $t \equiv Ma\tau e \rho \equiv e^{a\xi}/a$, vemos que esse é o elemento de linha (5.33), com y = z = const, correspondente à métrica de Minkowski nas coordenadas τ, ξ , desde que $0 \leq \rho < \infty$ e $-\infty < t < \infty$. A região I da Figura 5.1 com o elemento de linha (6.14) é comumente chamada de espaço-tempo de Rindler. Então, muito próximo do horizonte de eventos, os espaços-tempos de Schwarzschild e Rindler se parecem. O fato que eles são diferentes assintoticamente não será importante desde que os qubits estejam localizados perto do horizonte de eventos. Tal conclusão continua valendo para buracos negros quadrimensionais. A "alta" aceleração própria

$$a = \frac{M}{r^2 \sqrt{1 - 2M/r}}$$
(6.15)

sentida por observadores estáticos próximos do horizonte, $r_H \equiv 2M$, estão associadas com escalas de tempo pequenas em comparação com r_H , fazendo qualquer efeito de curvatura desprezível para nossos propósitos. A temperatura *local* medida por um observador estático quando o campo está no vácuo de Hartle-Hawking é dada por

$$T = \kappa / 2\pi V, \tag{6.16}$$

onde $V = (-\chi^a \chi_a)^{1/2}$ é o fator de redshift. Usando a equação (6.15) vemos que

$$\lim_{r \to 2M} Va = \frac{1}{4M} = \kappa. \tag{6.17}$$

Apesar de ter sido demonstrada no caso particular de Schwarzschild, a igualdade $\kappa \equiv \lim_{\text{horizonte}} Va$ é um resultado geral válido para qualquer espaço-tempo que contenha um horizonte de Killing [2]. Usando a equação (6.17), vemos que perto do horizonte a gravidade superficial pode ser escrita como

$$\kappa \approx Va.$$
 (6.18)

Então, substituindo a equação (6.18) na equação (6.16), vemos que a temperatura sentida por observadores estáticos muito próximos do horizonte de eventos, quando o campo está no vácuo de Hartle-Hawking, é

$$T = a/2\pi. \tag{6.19}$$

Essa temperatura é análoga à temperatura de Unruh sentida por observadores uniformemente acelerados com aceleração própria a no espaço-tempo de Minkowski. Suponha agora que os dois qubits estão localizados muito próximos do horizonte de eventos do buraco negro e que o estado do sistema qubits-campo é

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha |0_A\rangle \otimes |0_R\rangle + \beta |1_A\rangle \otimes |0_R\rangle \right] \otimes |0_{HH}\rangle$$

onde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ e $\{|0_X\rangle, |1_X\rangle\}$ é uma base ortonormal para o espaço de Hilbert dos estados dos qubits X = A e R que são carregados por Alice (em queda livre) e Rob (estático com a mesma aceleração própria que usamos no espaço-tempo de Minkowski), respectivamente. Então, pelas observações acima, todas as conclusões do capítulo anterior continuam valendo nesse contexto. Em particular, a morte súbita do emaranhamento ocorrerá para uma aceleração a_{sd} [veja a equação (5.94)]. Já as correlações quânticas serão destruídas apenas para $a \to \infty$ (i.e., quando Rob está arbitrariamente próximo do horizonte de eventos). O fenômeno da mudança súbita ocorrerá para os mesmos valores q_{sd} descritos no capítulo anterior.

Capítulo 7

Considerações Finais

Com uma teoria relativística de informação quântica, será possível olhar velhas questões da teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos sob uma nova perspectiva. Com isso, poderemos lançar uma nova luz, por exemplo, no paradoxo da perda de informação em buracos negros, na origem da entropia de buracos negros bem como em diversas questões relacionadas. Além disso, usando informação quântica no contexto da gravitação semiclássica, poderemos estudar sistemas mais complexos e, eventualmente, descobrir novos efeitos de gravitação quântica de baixas energias (que poderão nos dar mais pistas de como deve ser uma teoria quântica da gravitação). Além disso, estender a teoria da informação quântica de tal maneira a contemplar os efeitos da teoria da relatividade nos permitirá analisar diversas mudanças causadas por essa última nos protocolos usuais de informação quântica bem como descobrir novos efeitos e possibilidades que não seriam possíveis na teoria usual.

Tem havido um crescimento constante dessa área na interface entre relatividade, mecânica quântica e teoria da informação [79] e essa tese de doutorado visa dar uma contribuição para tal desenvolvimento. Aqui, estudamos diversos efeitos que a relatividade causa na teoria da informação quântica. Ao analisar as desigualdades de Bell com partículas de massa m > 0 e spin 1/2 (descritas por pacotes de onda) quando os detetores que medem o spin movem-se rápido o suficiente, vimos que as desigualdades de Bell passam a ser satisfeitas pela mecânica quântica ao invés de violadas. Isso se dá porque, quando as partículas são descritas por pacotes de onda, o estado puro em spin no referencial de laboratório se torna misto no referencial próprio dos detetores. Vimos que tal efeito ocorre também para fótons. Portanto, tal efeito poderá, no futuro, ser importante em experimentos usando satélites. (Apesar de atualmente os efeitos de ruído serem muito maiores que esse efeito relativístico, convém observar que este é um efeito físico intrínseco, que não é afetado pelas melhoras tecnológicas dos aparatos experimentais e portanto, pode ter que ser levado em conta no futuro.) Ao analisar um sistema quântico de comunicação em que as partes que trocam informação têm um movimento relativo, vimos que o canal de comunicação (usando como bit quântico o spin de uma partícula de spin 1/2) é ruidoso e não pode ser descrito por um mapeamento quântico, como são usualmente descritos os canais em informação quântica. Ao estudarmos alguns aspectos da teoria da informação quântica no contexto da teoria quântica de campos, vimos que o emaranhamento entre dois qubits (onde um deles está inercial enquanto o outro acelera uniformemente por um tempo próprio Δ finito) sofre uma morte súbita em um valor finito a_{sd} . Supondo que um experimentalista parado com o qubit inercial tenta teleportar um estado quântico para um outro experimentalista que acelera uniformemente com o outro qubit, a degradação do emaranhamento irá levar a uma diminuição da fidelidade do teletransporte. Ao analisar as correlações clássicas e quânticas nesse contexto, vimos que apesar do emaranhamento sofrer uma morte súbita, as correlações quânticas são destruídas apenas assintoticamente. Entretanto, tanto as correlações quânticas quanto as correlações clássicas não podem ser descritas por uma função diferenciável da aceleração. Ambas sofrem uma mudança súbita em seu comportamento para um valor finito de aceleração a_{sc} . A análise de tais efeitos usando teoria quântica de campos (e o efeito Unruh) nos permitiu prever o comportamento de qubits, um em queda livre e o outro parado, nas vizinhanças de um buraco negro de Schwarzschild.

Apêndice A

Matriz Densidade e o Teorema da Não Clonagem

Nesse apêndice, vamos mostrar algumas propriedades úteis das matrizes densidade bem como o teorema da não clonagem.

A.1 Matriz Densidade

Tome um sistema físico S cujo estado é descrito pela mistura $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ então, se

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

vemos que tr $\rho = 1$ e, para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $\langle \psi | \rho | \psi \rangle = \sum_i p_i |\langle \psi_i | \psi \rangle|^2 \geq 0$, o que mostra que ρ é um operador positivo. Reciprocamente, tome um operador $\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que satisfaz tr $\rho = 1$ e $\rho \geq 0$. Como ρ é positivo ele é auto-adjunto e então podemos usar o teorema espectral para escrever $\rho = \sum_i \lambda_i P_{\lambda_i}$. Tome um conjunto formado pelos vetores ortogonais $|\lambda_i, d_{\lambda_i}\rangle$ onde $d_{\lambda_i} \in \{1, ..., g(\lambda_i)\}$ para cada λ_i . Tais vetores são auto-vetores (normalizados) de ρ e $g(\lambda_i)$ é a multiplicidade de cada λ_i . Com isso, podemos escrever os projetores P_{λ_i} como $P_{\lambda_i} = \sum_{d_{\lambda_i}=1}^{g(\lambda_i)} |\lambda_i, d_{\lambda_i}\rangle \langle \lambda_i, d_{\lambda_i}|$. Renomeando cada (i, j) por k e definindo $\xi_k \equiv \lambda_{i(k)} \in |x_k\rangle \equiv |\lambda_i, d_{\lambda_i}\rangle$, podemos escrever $\rho = \sum_k \xi_k |x_k\rangle \langle x_k| \operatorname{com} \sum_k \xi_k = 1$. Logo ρ é a matriz densidade que descreve uma mistura $\{\xi_k, |x_k\rangle\}$. Temos então a seguinte definição:

Definição A.1.1. Uma matriz densidade é um operador $\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ em um espaço de Hilbert \mathcal{H} que satisfaz (i) tr $\rho = 1$ e (ii) $\rho \ge 0$.

Se ρ_i , $i \in \{1, ..., K\}$, são matrizes densidade e $0 \le q_i \le 1$ tal que $\sum_i q_i = 1$ então, $\rho = \sum_i q_i \rho_i$ também é uma matriz densidade. Para provar isso basta notar que

$$\mathrm{tr}\rho = \sum_{i} q_{i} \mathrm{tr}\rho_{i} = \sum_{i} q_{i} = 1$$

e para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$,

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle = \sum_{i} q_i \langle \psi | \rho_i | \psi \rangle \ge 0.$$

Dado um estado puro $|\psi\rangle$ ele define naturalmente uma matriz densidade $\rho_{|\psi\rangle} \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$ tal que $\rho_{|\psi\rangle}^2 = \rho_{|\psi\rangle}$. Reciprocamente, se ρ é uma matriz densidade que satisfaz $\rho^2 = \rho$, existe um $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ tal que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Para provar isso, basta usar o teorema espectral e escrever $\rho = \sum_k \xi_k |x_k\rangle\langle x_k|$ como acima. A condição $\rho^2 = \rho$ implicará que, para todo k, $\xi_k^2 = \xi_k$ o que só será possível se $\xi_k = 0$ ou $\xi_k = 1$. Logo, existe $k \in \{1, ..., N = \dim \mathcal{H}\}$ tal que $\xi_k = 1$ e portanto $\xi_{j\neq k} = 0$. Isso implica que $\rho = |x_k\rangle\langle x_k|$. Como $\xi_k \leq 1$, temos que $\xi_k^2 \leq \xi_k$ e então tr $\rho^2 = \sum_i \xi_k^2 \leq 1$, com a igualdade se e somente se $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Com isso, definimos que um estado ρ é puro se e somente se tr $\rho^2 = 1$ (ou, equivalentemente, se e somente se $\rho^2 = \rho$) e misto se e somente se tr $\rho^2 < 1$ (ou $\rho^2 \neq \rho$).

Suponha agora que o sistema (isolado) S está no estado $\rho = \sum_{i=1}^{K} p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i |$, onde $\sum_i p_i = 1$. Então, pelo postulado 4, cada um dos estados da mistura evoluem, através da transformação unitária U, como $U |\psi_i\rangle$, $i \in \{1, ..., K\}$. Então,

$$\rho \xrightarrow{U} \sum_{i=1}^{K} p_i U |\psi_i\rangle \langle \psi_i | U^{\dagger} = U \rho U^{\dagger}.$$
(A.1)

Realizando uma medição, descrita por um POVM $\{E_m | m \in \mathcal{M}\}$, cuja ação nos estados é dada por $M_m = U_m \sqrt{E_m}$, a probabilidade de se obter o resultado m é

$$p(m) = \sum_{i=1}^{K} p_i p(m|i)$$

onde $p(m|i) \equiv \langle \psi_i | E_m | \psi_i \rangle = \operatorname{tr}(\rho_{|\psi_i\rangle} E_m) \in \rho_{|\psi_i\rangle} \equiv |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. Com isso,

$$p(m) = \sum_{i} p_{i} \operatorname{tr}(\rho_{|\psi_{i}\rangle} E_{m}) = \operatorname{tr}(\rho E_{m}).$$
(A.2)

Após a medição do valor m, o estado final é um dos estados

$$|\psi_i^m\rangle \equiv M_m |\psi_i\rangle / \sqrt{\operatorname{tr}(\rho_{|\psi_i\rangle} E_m)}$$

com probabilidade $p(i|m) = p(i,m)/p(m) = p(m|i)p_i/p(m)$, onde p(i,m) é a probabilidade conjunta de ocorrência de $i \in m$. Logo, o estado final do sistema é descrito pela matriz densidade

$$\rho_m = \sum_i p(i|m)\rho_{|\psi_i^m\rangle} = \sum_i \frac{p_i \operatorname{tr}(\rho_{|\psi_i\rangle} E_m)}{\operatorname{tr}(E_m \rho)} \frac{M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i| M_m^{\dagger}}{\operatorname{tr}(\rho_{|\psi_i\rangle} E_m)} \\
= \frac{M_m \rho M_m^{\dagger}}{\operatorname{tr}(\rho E_m)}.$$
(A.3)

Se realizarmos a medição mas, por alguma razão, ainda não sabemos seu resultado, o estado do sistema é descrito pela matriz densidade

$$\rho' = \sum_{m} p(m)\rho_m = \sum_{m} M_m \rho M_m^{\dagger}.$$
 (A.4)

Convém notar que qualquer estado misto ρ pode ser *purificado*, i.e., pode ser descrito como a matriz densidade reduzida de um estado puro em um espaço de Hilbert "maior". Para ver isso, tome $\rho \in C(\mathcal{H})$. Usando o teorema espectral podemos escreve-lo como $\rho = \sum_k \xi_k |x_k\rangle \langle x_k|$. Se \mathcal{H}_{aux} é um espaço de Hilbert com dimensão maior ou igual a de \mathcal{H} com uma base ortonormal $\{|y_l\rangle \in \mathcal{H}_{aux} | l \in \{1, ..., \dim \mathcal{H}_{aux}\}\}$, vemos facilmente que a matriz densidade reduzida, tr $_{\mathcal{H}_{aux}}\rho_{|\psi\rangle}$, de

$$|\psi\rangle = \sum_{k} \sqrt{\xi_k} |x_k\rangle \otimes |y_k\rangle, \tag{A.5}$$

é $\rho.$

A.2 Teorema da Não Clonagem

Vamos provar o teorema da não clonagem [13]. Uma aplicação $T : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ é uma maquina de clonagem se $T(\rho) = \rho \otimes \rho$ para todo $\rho \in C(\mathcal{H})$. O teorema da não clonagem afirma que a linearidade das operações em mecânica quântica impede que clonemos estados quânticos arbitrários.

Teorema A.2.1 (Teorema da Não Clonagem). Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert de dimensão N. Então, não existe nenhum mapeamento linear $T : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ tal que $T(\rho) = \rho \otimes \rho$ para todo $\rho \in C(\mathcal{H})$.

Demonstração. Suponha que exista uma maquina de clonagem $T : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ linear. Tome $\rho_1 \neq \rho_2, p_1 = p, p_2 = 1 - p, 0 e <math>\rho = \sum_i p_i \rho_i$. Então $T(\rho_1) = \rho_1 \otimes \rho_1$, $T(\rho_2) = \rho_2 \otimes \rho_2$ e $T(\rho) = \rho \otimes \rho = \sum_{i,j} p_i p_j \rho_i \otimes \rho_j$. Porém, pela linearidade de T, $T(\rho) = \sum_i p_i T(\rho_i) = \sum_i p_i \rho_i \otimes \rho_i$. Chegamos assim em uma contradição, o que implica que não existe uma maquina de clonagem T linear.

Apêndice B

A Decomposição de Schimdt

Sejam $\mathcal{H}^A e \mathcal{H}^B$ espaços de Hilbert de dimensões $N_A e N_B$, respectivamente. Se $|\psi^{AB}\rangle \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ então existe um número $k \leq \min\{N_A, N_B\}$, uma distribuição de probabilidades $\{\xi_i | i \in \{1, ..., k\}, \sum_i \xi_i = 1\}$ e conjuntos ortogonais $\{|x_i^A\rangle|i \in \{1, ..., k\}\} \subset \mathcal{H}^A e \{|y_i^B\rangle|i \in \{1, ..., k\}\} \subset \mathcal{H}^B$ tal que

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\xi_i} |x_i^A\rangle \otimes |y_i^B\rangle.$$

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $N_A \leq N_B$. Defina $\rho^A \equiv \text{tr}_B |\psi^{AB}\rangle \langle \psi^{AB}|$. Usando o teorema espectral, podemos escrever $\rho^A = \sum_i \xi_i |x_i^A\rangle \langle x_i^A|$, onde os auto-valores ξ_i de ρ^A estão arranjados de tal forma que existe $k \leq N_A$ tal que para todo i > k, $\xi_i = 0$. Se $\{|f_i^B\rangle \in \mathcal{H}^B | i \in \{1, ..., N_B\}\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H}^B , então

$$\left\{ |x_i^A\rangle \otimes |f_j^B\rangle \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \middle| i \in \{1, ..., N_A\} \ e \ j \in \{1, ..., N_B\} \right\}$$

é uma base ortonormal de $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$. Logo

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{ij} c^{ij} |x_i^A\rangle \otimes |f_j^B\rangle = \sum_{i=1}^{N_A} |x_i^A\rangle \otimes |w_i^B\rangle, \tag{B.1}$$

onde $|w^B_i\rangle\equiv\sum_j c^{ij}|f^B_j\rangle.$ Como

$$\sum_{i=1}^{N_A} \xi_i |x_i^A\rangle \langle x_i^A| = \rho^A = \operatorname{tr}_B |\psi^{AB}\rangle \langle \psi^{AB}| = \sum_{i,i'=1}^{N_A} \langle w_i^B |w_{i'}^B\rangle |x_i^A\rangle \langle x_{i'}^A|$$

temos que $\langle w_i^B | w_{i'}^B \rangle = \xi_i \delta_{ii'}$ e portanto $||w_{i>k}^B|| = 0$, o que implica que $|w_{i>k}^B \rangle = 0$. Definindo, para $i \leq k$, $|y_i^B \rangle \equiv \xi_i^{-1/2} |w_i \rangle$, obtemos

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{k} |x_i^A\rangle \otimes |w_i^B\rangle = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\xi_i} |x_i^A\rangle \otimes |y_i^B\rangle.$$
(B.2)

Apêndice C

Classificação das Representações Irredutíveis de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$

Seja $U : g \in \tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+} \to U(g)$ uma representação unitária de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$ no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Tomemos o subgrupo de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$ formado pelas translações, ou seja, o conjunto formado pelos elementos $(a, I) \in \tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$. Como este subgrupo é comutativo e $T(a) \equiv U(a, I)$ é contínua em a temos que

$$T(a) = e^{-i\langle a, P \rangle},\tag{C.1}$$

onde $\langle a, P \rangle = -a^0 P^0 + \sum_i a^i P^i$ e os P^{μ} , $\mu \in \{0, ..., 3\}$, são operadores auto-adjuntos que comutam entre si. O operador P^0 é identificado com a energia e os P^i com os momentos lineares do sistema. Então, pelo teorema espectral , \mathcal{H} é isomorfo (através de uma transformação unitária) ao espaço de Hilbert das funções $\phi : p \in \mathbb{R}^4 \to \phi(p) \in H_p$, onde para cada p, H_p é um espaço de Hilbert cuja dimensão pode variar com p, que satisfazem

$$\begin{aligned} \|\phi\|^2 &\equiv \int \|\phi(p)\|_{H_p}^2 d\mu(p) < \infty, \\ (P^{\mu}\phi)(p) &= p^{\mu}\phi(p), \\ \left(e^{-i\langle a, P \rangle}\phi\right)(p) &= e^{-i\langle a, p \rangle}\phi(p). \end{aligned}$$
(C.2)

Aqui, $\|\phi(p)\|_{H_p}^2 = \langle \phi(p) | \phi(p) \rangle_{H_p}$, $\langle . | . \rangle_{H_p}$ é o produto interno em H_p e μ é uma medida em \mathbb{R}^4 . Denotaremos tal conjunto por $L^2_{\mu}(\mathbb{R}^4, H_p)$.* É fácil ver isso, ao menos formalmente, usando a notação de Dirac. Tome uma base (imprópria) formada por auto-vetores $|p, \sigma\rangle$

^{*}Essa é a generalização, para contemplar também operadores em espaços de Hilbert de dimensão infinita, do teorema espectral que vínhamos utilizando. Colocar o teorema espectral de dimensão finita nessa linguagem é simples. Um operador auto-adjunto A em um espaço de Hilbert de dimensão finita \mathcal{H} pode ser escrito de maneira única como $A = \sum_i \lambda_i P_{\lambda_i}$. Com isso, vemos que $\mathcal{H} = \bigoplus_i H_{\lambda_i}$, onde $H_{\lambda_i} \equiv P_{\lambda_i} \mathcal{H}$, e portanto, podemos associar bijetivamente cada um dos estados $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ com as funções que para cada λ_i do seu espectro associam o vetor $\phi(\lambda_i) = P_{\lambda_i} |\phi\rangle \in H_{\lambda_i}$ que satisfazem $\langle \phi | \phi \rangle = \sum_i ||\phi(\lambda_i)||^2$ e $A\phi(\lambda_i) = \lambda_i \phi(\lambda_i)$ (já que $\phi(\lambda_i) \in H_{\lambda_i}$).

de P^{μ} , i.e., $P^{\mu}|p,\sigma\rangle = p^{\mu}|p,\sigma\rangle$, que satisfazem (formalmente), $\langle p,\sigma|p',\sigma'\rangle = \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\mu}(p,p')$, onde $\int \phi(p)\delta_{\mu}(p,p')d\mu(p) = \phi(p')$. Então, $I = \sum_{\sigma} \int d\mu(p)|p,\sigma\rangle\langle p,\sigma|$ e com isso

$$|\phi\rangle = \sum_{\sigma} \int d\mu(p) \ \phi_{\sigma}(p) |p,\sigma\rangle, \tag{C.3}$$

onde $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$. Definindo $\phi(p) \equiv \sum_{\sigma} \phi_{\sigma}(p) |\sigma\rangle$ (e consequentemente, definimos H_p como sendo o conjunto de todos os $\phi(p)$), usando que $\langle \phi | \phi \rangle = \|\phi\|^2 < \infty$ e a relação de ortogonalidade dos $|p, \sigma\rangle$, vemos que

$$\|\phi\|^{2} = \sum_{\sigma} \int d\mu(p) |\phi_{\sigma}(p)|^{2}$$
$$= \int d\mu(p) \|\phi(p)\|_{\mathfrak{h}}^{2} < \infty, \qquad (C.4)$$

onde $\|\phi(p)\|_{\mathfrak{h}}^2 \equiv \sum_{\sigma} |\phi_{\sigma}(p)|^2$. Como

$$P^{\mu}|\phi\rangle = \sum_{\sigma} \int d\mu(p) \ p^{\mu}\phi_{\sigma}(p)|p,\sigma\rangle$$

vemos que de fato $(P^{\mu}\phi)(p) = p^{\mu}\phi(p) \in (e^{-i\langle a,P \rangle}\phi)(p) = e^{-i\langle a,p \rangle}\phi(p)$. Consequentemente, $\phi \in L^{2}_{\mu}(\mathbb{R}^{4}, H_{p})$.

Tome agora $A \in SL(2, \mathbb{C})$ e $U(A) \equiv U(0, A)$. Então, usando o produto do grupo $\tilde{\mathcal{P}}_{+}^{\uparrow}$, obtemos

$$U(A)T(a)U^{\dagger}(A) = U(0,A)U(a,I)U(0,A^{-1}) = U(\Lambda(A)a,0) = T(\Lambda(A)a).$$
(C.5)

Diferenciando a equação (C.5) com relação a a^{μ} , vemos que

$$U^{\dagger}(A)P^{\mu}U(A) = [\Lambda(A)]^{\mu}_{\nu}P^{\nu}$$

Portanto, a ação de $A \in SL(2, \mathbb{C})$ leva $p \in \Lambda(A)p \in H_p \in H_{\Lambda p}$. O conjunto

$$\mathcal{O}(p) \equiv \{\Lambda p | \Lambda \in L_+^\uparrow\}$$

é chamada órbita de L_{+}^{\uparrow} por p. A partir das observações acima vemos que todos os espaços de Hilbert $H_{\hat{p}}$, $\hat{p} \in \mathcal{O}(p)$, são isomorfos através da ação dos U(A). Além disso, como os U(A) são unitários, o suporte de μ deve ser invariante por $\Lambda(A)$, i.e., $\Lambda(A)$ supp $\mu \subset$ supp μ (se isso não fosse satisfeito, uma região de medida não nula seria levada em uma de medida nula e consequentemente U(A) não manteria a norma na equação (C.2) invariante). Se o suporte de μ contivesse mais que uma órbita, existiria um conjunto Δ (uma das órbitas) invariante por L_{+}^{\uparrow} tal que Δ e Δ^{c} tem medida μ não nula (já que ambas estão no suporte de μ). Com isso $E(\Delta)\mathcal{H}$, onde

$$E(\Delta)\mathcal{H} \equiv \{\phi \in L_{\mu}(\mathbb{R}^4, H_p) | \phi(p) = 0 \text{ para } p \notin \Delta\},\$$

seria um subespaço invariante não trivial e a representação não seria irredutível. Portanto, em cada representação irredutível de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$ a medida μ deve ter o suporte concentrado em uma única órbita e com isso, a representação será classificada por essa órbita. As órbitas podem ser divididas nos conjuntos:

$$m_{+} \equiv \{p \in \mathbb{R}^{4} | \langle p, p \rangle = -m^{2} < 0, p^{0} > 0\},\$$

$$0_{+} \equiv \{p \in \mathbb{R}^{4} | \langle p, p \rangle = 0, p^{0} > 0\},\$$

$$0_{0} \equiv \{0 \in \mathbb{R}^{4}\},\$$

$$m_{-} \equiv \{p \in \mathbb{R}^{4} | \langle p, p \rangle = m^{2} > 0, p^{0} < 0\},\$$

$$0_{-} \equiv \{p \in \mathbb{R}^{4} | \langle p, p \rangle = 0, p^{0} < 0\},\$$

$$im \equiv \{p \in \mathbb{R}^{4} | \langle p, p \rangle = m^{2} > 0\}.$$
(C.6)

Um dos axiomas em teoria quântica de campos [149, 150, 151, 152, 153] afirma que o espectro do operador de energia-momento P^{μ} deve estar contido no cone de luz futuro $V_{+} \equiv \{p \in \mathbb{R}^{4} | \langle p, p \rangle \leq 0, p^{0} > 0\}$. Com isso, as únicas representações de interesse físico são as três primeiras. Na representação 0_{0} , todos os estados são invariantes por translação e, com exceção da representação trivial, i.e., U(a, A) = I para todo (a, I), todas as representações têm dimensão infinita. À representação trivial, corresponde um estado ψ_{0} invariante por todas as transformações de Poincaré. Tal estado é chamado estado de vácuo. Resta agora estudar as representações classificadas por m_{+} e 0_{+} . O parâmetro $m \geq 0$ usado para identificar m_{+} e 0_{+} é chamada massa do sistema. Sendo assim, vamos tomar a medida μ como sendo

$$d\mu(p) \equiv 2p^0 \delta(\langle p, p \rangle + m^2) \theta(p^0) d^4 p, \qquad (C.7)$$

onde $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ e $\theta(p^0) = 1$ para $p^0 > 0$ e $\theta(p^0) = 0$ para $p^0 < 0$. Vemos que seu suporte é invariante pela ação de L^{\uparrow}_+ e está concentrado em m_+ (ou 0_+).

Como vimos, os espaços de Hilbert $H_{\hat{p}}$, $\hat{p} \in \mathcal{O}(p)$, são isomorfos. Portanto, tome um $\overline{p} \in \mathcal{O}(p)$ e um $L(p) \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que $\Lambda(L(p))\overline{p} = p$. Então, usando U(L(p)), todos os espaços de Hilbert H_p , $p \in \mathcal{O}(\overline{p})$, podem ser considerados cópias de $\mathfrak{h} \equiv H_{\overline{p}}$, chamado de little space. Nos casos de interesse físico, i.e., para m_+ e 0_+ , \mathfrak{h} tem dimensão finita e por isso vamos nos restringir a esse caso de agora em diante. Agora, tome $(a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^{\uparrow}$. Então,

$$U(a, A) = T(a)U(A) = T(a)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)AL(p))U(L^{-1}(p)), \quad (C.8)$$

onde $\Lambda p \equiv \Lambda(A)p$. Os operadores $U(L(\Lambda p)) \in U(L^{-1}(p))$ fazem apenas as identificações de \mathfrak{h} com $H_{\Lambda p} \in H_p$, respectivamente. O elemento

$$W(A,p) \equiv L^{-1}(\Lambda p) AL(p) \in SL(2,\mathbb{C})$$

satisfaz

$$\Lambda \left(W(p,A) \right) \overline{p} = \overline{p} \ e \ W(A_1A_2,p) = W(A_1,p)W(A_2,p),$$

onde $A_1, A_2 \in SL(2, \mathbb{C})$. O conjunto

$$G(p) \equiv \{ W \in SL(2, \mathbb{C}) | \Lambda(W)p = p \}$$

é chamado little group ou grupo estabilizador de p. Portanto, vemos que

$$U(W(A, p)) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$$

é uma representação unitária de $G(\overline{p})$ em \mathfrak{h} . Então, a menos dos isomorfismos $U(L(\Lambda p))$ e $U(L^{-1}(p))$, para obter uma representação unitária irredutível de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$ em \mathcal{H} , precisamos de uma representação unitária irredutível do little group $G(\overline{p})$ em \mathfrak{h} . Como a medida (C.7) tem suporte na órbita m_{+} ou 0_{+} (e ambas são difeomorfas a \mathbb{R}^{3} , por exemplo, através de função $\zeta(\sqrt{m^{2} + \mathbf{p}^{2}}, \mathbf{p}) = \mathbf{p})$, sua restrição a elas é dada por $d\mu(\mathbf{p}) = d\mathbf{p} \equiv dp^{1}dp^{2}dp^{3}$. Com isso, e usando que sobre a órbita $H_{p} \simeq \mathfrak{h}$, o conjunto $L^{2}_{\mu}(\mathbf{R}^{4}, H_{p})$ pode ser identificado com o conjunto

$$\{\phi: \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \to \phi(\mathbf{p}) \in \mathfrak{h} | \int \|\phi(\mathbf{p})\|_{\mathfrak{h}}^2 d\mathbf{p} < \infty\}$$

e portanto com $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathfrak{h}$, onde $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p})$ indica o conjunto das funções complexas de quadrado integrável com relação à medida $d\mathbf{p}$.

Para determinarmos a estrutura da representação U de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$ em $L^{2}(\mathbb{R}^{3}, d\mathbf{p}) \otimes \mathfrak{h}$, usaremos a notação de Dirac. Tome uma base $|\mathbf{p}, \sigma\rangle$ de auto-vetores impróprios de P^{μ} , i.e., $P^{\mu}|\mathbf{p},\sigma\rangle = p^{\mu}|\mathbf{p},\sigma\rangle$ que satisfazem (formalmente) $\langle \mathbf{p},\sigma|\mathbf{p}',\sigma'\rangle = \delta_{\sigma\sigma'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$. Usando a equação (C.8) temos

$$U(a,A)|\phi\rangle = \sum_{\sigma} \int d\mathbf{p} \ \phi_{\sigma}(\mathbf{p})T(a)U(L(\Lambda p))U(W(A,p))U(L^{-1}(p))|\mathbf{p},\sigma\rangle$$

$$= \sum_{\sigma} \int d\mathbf{p} \ \phi_{\sigma}(\mathbf{p})e^{-i\langle a,\Lambda P\rangle}U(L(\Lambda p))\sqrt{\frac{\overline{p}^{0}}{p^{0}}}\sum_{\beta} D_{\beta\sigma}(W(A,p))|\overline{\mathbf{p}},\beta\rangle$$

$$= \sum_{\sigma} \int d\mathbf{p} \ \phi_{\sigma}(\mathbf{p})e^{-i\langle a,\Lambda p\rangle}\sqrt{\frac{\Lambda p^{0}}{p^{0}}}\sum_{\beta} D_{\beta\sigma}(W(A,p))|\Lambda \mathbf{p},\beta\rangle, \quad (C.9)$$

onde

$$U(L(p))|\mathbf{\overline{p}},\sigma\rangle = \sqrt{p^0/\overline{p}^0}|\mathbf{p},\sigma\rangle, U(W(A,p))|\mathbf{\overline{p}},\sigma\rangle \equiv \sum_{\beta} D_{\beta\sigma}(W(A,p))|\mathbf{\overline{p}},\beta\rangle,$$

 $\Lambda \equiv \Lambda(A) \in (\Lambda p)^0 \in \Lambda \mathbf{p}$ indicam a componente temporal e espacial, respectivamente, de Λp . O fator $\sqrt{p^0/\overline{p}^0}$ garante que o operador U seja unitário e $D_{\beta\alpha}(W(A,p))$ são os elementos de matriz da representação unitária irredutível do little group $G(\overline{p})$ em \mathfrak{h} . Fazendo a mudança de variáveis $q = \Lambda p$ e usando que $d\mathbf{p}/p^0 = d\mathbf{q}/q^0$ obtemos

$$U(a,A)|\phi\rangle = \sum_{\beta} \int d\mathbf{q} \ e^{-i\langle a,q\rangle} \sqrt{\frac{(\Lambda^{-1}q)^0}{q^0}} \sum_{\sigma} D_{\beta\sigma}(W(A,\Lambda^{-1}q))\phi_{\sigma}(\Lambda^{-1}\mathbf{q})|\mathbf{q},\beta\rangle.$$
(C.10)

Com isso, em termos de $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathfrak{h}$, temos

$$(U(a,A)\phi)(\mathbf{p}) = e^{-i\langle a,p\rangle} \sqrt{\frac{(\Lambda^{-1}p)^0}{p^0}} D(W(A,\Lambda^{-1}p))\phi(\Lambda^{-1}\mathbf{p}).$$
(C.11)

A matriz D(W(A, p)) é comumente chamada de rotação de Wigner.

Representações unitárias Irredutíveis do Little Group para m_+

Tome $\overline{p} = (m, 0, 0, 0)$ e $p \in m_+$. Como \tilde{p} é uma matriz positiva e $\overline{\tilde{p}} = mI$, vamos tomar

$$L(p) = m^{-1/2} \sqrt{p^0 I + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}, \qquad (C.12)$$

onde lembramos que $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Vemos fácilmente que $\Lambda(\widetilde{L(p)})\overline{p} = L(p)\overline{p}L(p) = \tilde{p}$, como deveria ser. Então, vemos que o subgrupo formado pelos elementos de L^{\uparrow}_+ que mantém \overline{p} invariante é isomorfo ao SO(3) e portanto, o little group G(p) é isomorfo ao SU(2), o recobrimento universal de SO(3). A álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ do grupo SU(2) tem geradores $S_i, i \in \{1, 2, 3\}$, chamados operadores de spin, que satisfazem

$$[S_i, S_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} S_k. \tag{C.13}$$

As representações unitárias irredutíveis de SU(2) são bem conhecidas [87, 88]. Elas são todas de dimensão finita e podem ser classificadas pelos auto-valores s(s + 1) do operador $S^2 \equiv \sum_i (S_i)^2$, $s \in \{0, 1/2, 1, 3/2, ...\}$. O valor s é chamado spin da representação. Logo, podemos tomar o little space como sendo $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^{2s+1}$. O par (m_+, s) , onde $s \in \{0, 1/2, 1, 3/2, ...\}$, caracteriza completamente as representações unitárias irredutíveis de massa m > 0 e spin s de $\tilde{\mathcal{P}}_+^{\uparrow}$. O espaço de Hilbert onde essa representação é realizada é o $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathbb{C}^{2s+1}$, seus elementos são os estados (de uma partícula) de um campo com massa m e spin s. Os elementos de matriz (na base de auto-vetores de S_3) da representação unitária irredutível D^s de SU(2) em \mathbb{C}^{2s+1} são dados por [87, 88, 151]

$$D^{s}_{\sigma\sigma'}(V) = \sqrt{\frac{(s+\sigma)!(s-\sigma)!}{(s+\sigma')!(s-\sigma')!}} v_{1}^{\sigma+\sigma'} v_{2}^{\sigma-\sigma'} P^{(\sigma-\sigma',\sigma+\sigma')}_{s-\sigma} (|v_{1}|^{2} - |v_{2}|^{2}),$$
(C.14)

onde

$$V = \left(\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ -\overline{v_2} & \overline{v_1} \end{array}\right)$$

det $V = |v_1|^2 + |v_2|^2 = 1, \sigma, \sigma' \in \{-s, ..., s\}$ e

$$P_n^{(a,b)}(x) \equiv (2^n n!)^{-1} (-1)^n (1-x)^{-a} (1+x)^{-b} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x)^{(a+n)} (1+x)^{(b+n)} \right).$$

No caso de s = 1/2, que é o caso que estaremos interessados, vemos da equação (C.14) que $D^s_{\sigma\sigma'}(V) = V_{3/2-\sigma,3/2-\sigma'}$, onde V_{ij} , $i, j \in \{1, 2\}$, são os elementos de matriz de $V \in SU(2)$. Nesse caso, o espaço de Hilbert em que a representação é realizada é o $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathbb{C}^2$ e o spin **S**, chamado de spin de Wigner, é escrito como $\mathbf{S} = I \otimes \boldsymbol{\sigma}/2$, onde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e σ_i são as matrizes de Pauli.

Para caracterizar completamente a equação (C.11) para o caso (m_+, s) , resta apenas determinar os elementos $W(A, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p) AL(p)$ do little group, onde $\Lambda = \Lambda(A)$ e $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Escrevendo $L(p) = \sum_{\mu} c^{\mu} \sigma_{\mu}, c^{\mu} \in \mathbb{R}$, usando que $L(p)^2 = \tilde{p}/m$ [ver equação (C.12)], obtemos que

$$L(p) = \sqrt{\frac{p^0 + m}{2m}}I + \sqrt{\frac{p^0 - m}{2m}}\frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\|\mathbf{p}\|}.$$
 (C.15)

Tome

$$A = K \equiv \cosh(\alpha/2)I + \sinh(\alpha/2)\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Então, calculando $W(K,p) = L^{-1}(\Lambda p)KL(p)$ obtemos, após um cálculo longo porém direto, que (veja por exemplo o Apêndice 3 de [89])

$$W(K,p) = \frac{(p^0 + m)\sigma_0 \cosh\frac{\alpha}{2}}{\{(p^0 + m)[(\Lambda p)^0 + m]\}^{1/2}} + \frac{\sinh\frac{\alpha}{2}[\mathbf{p} \cdot \mathbf{e} \,\sigma_0 + i(\mathbf{e} \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma}]}{\{(p^0 + m)[(\Lambda p)^0 + m]\}^{1/2}},$$
(C.16)

onde lembramos que $\sigma_0 = I$ é a matriz identidade. Para

$$A = R \equiv \cos(\theta/2)I + i\sin(\theta/2)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

um cálculo análogo mostra que

$$W(R,p) = \cos(\theta/2)I + i\sin(\theta/2)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = R.$$
(C.17)

Representações unitárias Irredutíveis do Little Group para 0_+

Tome $\bar{p} = (1/2, 0, 0, 1/2)$ e $p = (\|\mathbf{p}\|, \mathbf{p}) \in 0_+$. Vamos definir $L(p) \equiv R_3(\phi)R_2(\theta)\hat{K}_3$, onde

$$R_3(\phi) \equiv e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma_3}, R_2(\theta) \equiv e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_2}$$

е

$$\hat{K}_3(\hat{\alpha}) \equiv \cosh\left(\hat{\alpha}/2\right)I + \sinh\left(\hat{\alpha}/2\right)\sigma_3$$

 com

$$\cosh \hat{\alpha} \equiv (4\mathbf{p}^2 + 1)/4 \|\mathbf{p}\|.$$

Ou seja, $\Lambda(\hat{K}_3)$ leva (1/2, 0, 0, 1/2) em $(\|\mathbf{p}\|, 0, 0, \|\mathbf{p}\|) \in \Lambda(R_3(\phi)R_2(\theta))$ leva $(\|\mathbf{p}\|, 0, 0, \|\mathbf{p}\|)$ em $(\|\mathbf{p}\|, \mathbf{p})$. Com isso, $\Lambda(L(p))\overline{p} = p$ como deveria ser. O little group $G(\overline{p})$ é formado pelos elementos $A(z, e^{i\varphi/2}) \in SL(2, \mathbb{C})$ dados por

$$A(z, e^{i\varphi/2}) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & ze^{-i\varphi/2} \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix},$$
 (C.18)

onde $z \in \mathbb{C}$ e $\varphi \in \mathbb{R}$. Esse grupo é isomorfo ao recobrimento duplo $\tilde{E}(2)$ do grupo euclidiano E(2) em duas dimensões. Qualquer elemento $A(z, e^{i\varphi/2}) \in G(\overline{p})$ pode ser escrito como

$$A(z, e^{i\varphi/2}) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z\\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 (C.19)

Tome os conjuntos

$$\mathbb{T} = \{ A(z,1) \in G(\overline{p}) | z \in \mathbb{C} \}, \ \mathfrak{R} = \{ A(0, e^{-i\varphi/2}) \in G(\overline{p}) | \varphi \in \mathbb{R} \}.$$

Vemos que se $T(z) \equiv A(z, 1) \in G(\overline{p})$ e $\mathfrak{r}(\varphi) \equiv A(0, e^{-i\varphi/2}) \in \mathfrak{R}$ então,

$$T(z_1)T(z_2) = T(z_1 + z_2) \quad e \quad \mathfrak{r}(\varphi_1)\mathfrak{r}(\varphi_2) = \mathfrak{r}(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Portanto, $\mathbb{T} \in \mathfrak{R}$ são subgrupos abelianos de $G(\overline{p})$. Além disso, notemos que

$$\mathfrak{r}(\varphi)T(z)\mathfrak{r}(-\varphi) = T(e^{-i\varphi}z)$$

A álgebra de Lie \mathfrak{g} de $G(\overline{p})$ tem geradores $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in J_3$ que satisfazem

$$[J_3, \mathfrak{t}_1] = i\mathfrak{t}_2, \tag{C.20}$$

$$[J_3, \mathfrak{t}_2] = -i\mathfrak{t}_1, \tag{C.21}$$

$$[t_1, t_2] = 0. (C.22)$$

As únicas representações unitárias irredutíveis de $G(\overline{p})$ com dimensão finita (graus de liberdade de spin discretos) são aquelas em que \mathbb{T} é representado trivialmente, i.e., U(T(z)) = Ipara todo $T(z) \in \mathbb{T}$. Assumindo isso, todas as representações unitárias e irredutíveis são unidimensionais [90, 91, 92]:

$$U(A(z, e^{i\varphi/2})) = e^{-i\lambda\varphi}, \qquad (C.23)$$

onde o parâmetro $\lambda \in \{..., -1, -1/2, 0, 1/2, 1, ...\}$ é chamado de *helicidade*. Portanto, o little space é $\mathfrak{h} = \mathbb{C}$ e o espaço de Hilbert onde as representações unitárias irredutíveis de $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$ são realizadas é o $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p})$. Elas são classificadas pela órbita 0_+ e pela helicidade λ .

Fótons podem ter tanto helicidade $\lambda = 1$ quanto helicidade $\lambda = -1$. Estados com helicidades opostas estão ligados pela operação de inversão espacial (que, para o eletromagnetismo, é uma simetria). Por isso, vamos tomar o espaço de Hilbert dos estados do campo eletromagnético como sendo $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \otimes \mathbb{C}^2$. Os elementos de matriz (em uma base de auto-vetores de J_3) da representação unitária D do little group $G(\bar{p})$ em $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ são:

$$D_{\lambda\lambda'}(A(z, e^{i\varphi/2})) = e^{-i\lambda\varphi}\delta_{\lambda\lambda'}, \qquad (C.24)$$

 $\lambda, \lambda' \in \{-1, 1\}.$

Resta apenas determinar os elementos $W(A, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p) AL(p)$ do little group, onde $\Lambda = \Lambda(A) \in SL(2, \mathbb{C})$, para que possamos caracterizar completamente a equação (C.11)

para o caso $(0_+, \lambda)$. Usando as expressões explícitas de L(p) obtemos que o angulo $\varphi(A, \mathbf{p})$ de $W(A, p) \in G(\overline{p})$ é [93]:

$$\varphi(A, \mathbf{p}) = \begin{cases} 0 : A = K_3(\alpha) \\ 0 : A = R_3(\gamma), \hat{\mathbf{p}} \neq e_3 \\ \gamma : A = R_3(\gamma), \hat{\mathbf{p}} = e_3 \\ \tan^{-1}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) : A = R_2(\gamma) \end{cases}$$
(C.25)

 ${\rm onde}$

$$K_3(\alpha) \equiv \cosh(\alpha/2)I + \sinh(\alpha/2)\sigma_3, \ R_j(\gamma) = \cos(\gamma/2)I + i\sin(\gamma/2)\sigma_j$$

e $j \in \{2, 3\}$. Aqui,

 $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p} / \|\mathbf{p}\| = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$

 $a_1 = \sin \gamma \sin \phi \, e \, a_2 = \sin \gamma \cos \theta \cos \phi + \cos \gamma \sin \theta.$

Apêndice D

Demonstração da Equação (5.15)

Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo globalmente hiperbólico e temporalmente orientável. Sejam $\phi \in C^{\infty}(M)$ uma solução qualquer da equação (5.1) e $f \in C_0^{\infty}(M)$, com Ef sendo sua respectiva solução da equação de Klein-Gordon. Então temos

$$\int_{M} \phi f \sqrt{-g} d^{4}x = \Omega(Ef, \phi) \equiv \int_{\Sigma} (\phi \nabla_{a} Ef - Ef \nabla_{a} \phi) n^{a} \sqrt{h} d^{3}x$$

onde Σ é uma superfície de Cauchy, n^a é a normal à Σ , h_{ab} é a métrica induzida por g_{ab} em Σ , $C_0^{\infty}(M)$ é o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em M e

$$Ef = \int d^4x' \sqrt{-g(x')} [G^{adv}(x,x') - G^{ret}(x,x')] f(x'), \qquad (D.1)$$

com G^{adv} e G^{ret} sendo as funções de Green avançada e retardada, respectivamente [124].

Demonstração. Tomemos uma superfície de Cauchy Σ que fica contida fora do futuro causal do suporte de f, ou seja $\Sigma \subset M - J^+(\text{suppf})$. Defina

$$\lambda = \int_M G^{\text{adv}}(x, x') f(x') \sqrt{-g'} d^4 x'.$$
 (D.2)

Com isso, usando as propriedades de G^{adv} [124], $(\nabla^a \nabla_a - m^2)\lambda = f e \operatorname{supp} \lambda \subset J^-(\operatorname{supp} f)$. Então temos

$$\int_{M} \phi f \sqrt{-g} d^{4}x = \int_{J^{+}(\Sigma)} \phi f \sqrt{-g} d^{4}x = \int_{J^{+}(\Sigma)} \phi (\nabla^{a} \nabla_{a} - m^{2}) \lambda \sqrt{-g} d^{4}x$$
$$= \int_{J^{+}(\Sigma)} \nabla^{a} (\phi \nabla_{a} \lambda - \lambda \nabla_{a} \phi) \sqrt{-g} d^{4}x + \int_{J^{+}(\Sigma)} \lambda (\nabla^{a} \nabla_{a} - m^{2}) \phi \sqrt{-g} d^{4}x$$
$$= \int_{\Sigma} (\phi \nabla_{a} \lambda - \lambda \nabla_{a} \phi) n^{a} \sqrt{h} d\mathbf{x},$$
(D.3)

onde na última passagem usamos o teorema de Gauss no primeiro termo e que ϕ é solução da equação de Klein-Gordon no segundo termo. Usando a equação (D.1), vemos que $Ef|_{\Sigma} = \lambda|_{\Sigma}$ e portanto

$$\int_{M} \phi f \sqrt{-g} d^{4}x = \Omega(Ef, \phi) \equiv \int_{\Sigma} (\phi \nabla_{a} Ef - Ef \nabla_{a} \phi) n^{a} \sqrt{h} d^{3}x.$$
(D.4)

Referências Bibliográficas

- R. M. Wald, Quantum Field Theory in Curved Spacetimes e Black Hole Thermodynamics (The University of Chicago Press, Chicago, 1994).
- [2] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [3] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [4] S. W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974).
- [5] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975).
- [6] R. M. Wald, Commun. Math. Phys. 45, 9 (1975).
- [7] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [8] R. M. Wald, The Thermodynamics of Black Holes, Living Rev. Relativity 4, (2001), http://www.livingreviews.org/lrr-2001-6.
- [9] W. G. Unruh e R. M. Wald, Phys. Rev. D 25, 942 (1982).
- [10] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, Quantum Computation e Quantum Information (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [11] A. Peres, P. F. Scudo, e D. R. Terno, Phys. Rev. Lett. 88, 230402 (2002).
- [12] J. S. Bell, Physics 1, 195 (1964).
- [13] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, e W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 70, 1895 (1993).
- [14] M. Aspelmeyer, T. Jennewein, M. Pfennigbauer, W. Leeb, e A. Zeilinger, Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of 9, 1541 (2003).
- [15] P. Villoresi *et al.*, New J. Phys. **10**, 033038 (2008).
- [16] R. Ursin et al., Space-QUEST: Experiments with quantum entanglement in space. IAC Proc. A2.1.3 (2008). arXiv: quant-ph/0806.0945v1.

- [17] A. G. S. Landulfo e G. E. A. Matsas, Phys. Rev. A 79, 044103 (2009).
- [18] A. G. S. Landulfo, G. E. A. Matsas, e A. C. Torres, Phys. Rev. A 81, 044103 (2010).
- [19] André G. S. Landulfo e A. C. Torres, em preparação,
- [20] A. G. S. Landulfo e G. E. A. Matsas, Phys. Rev. A 80, 032315 (2009).
- [21] L. C. Céleri, A. G. S. Landulfo, R. M. Serra e G. E. A. Matsas, Phys. Rev. A 81, 062130 (2010).
- [22] R. B. Ash, Information Theory (Dover Publications Inc., New York, 1965).
- [23] T. M. Cover e J. A. Thomas, *Elements of Information Theory* (Wiley-Interscience Publication, New York, 1991).
- [24] P. Chen e F. Alajaji, Lecture Notes on Information Theory, vol I.
- [25] C. E. Shannon, Bell Sys. Tech. Journal 27, 379 (1948).
- [26] R. M. Dudley, *Real Analysis e Probability* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [27] D. Williams, Probability with Martingales (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [28] V. Vedral, Introduction to Quantum Information Science (Oxford University Press, Oxford, 2006).
- [29] D. Petz, *Quantum Information Theory e Quantum Statistics* (Springer, Berlin Heidelberg 2008).
- [30] J. Preskill, Lecture Notes on Quantum Information e Quantum Computation, http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229.
- [31] J. Audretsch, Entangled Systems New Directions in Quantum Physics (Wiley-VCH, Weinheim, 2007).
- [32] W. K. Wootters e W.H. Zurek, Nature **299**, 802 (1982).
- [33] A. S. Holevo, Probl. Inf. Transm. 9, 177 (1973).
- [34] C. H. Bennett e S. J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. 69, 2881 (1992).
- [35] C. Isham Lectures on Quantum theory, Matemathical e Structural Fundations (Imperial College Press, London, 1995).
- [36] A. Peres Quantum Theory Concepts e Methods (Kluwer Academic Publishers, Dordrech, 1995).

- [37] L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics* (World Scientific, New York, 1998).
- [38] R. Abraham, J. E. Marsden, e T. Ratiu, Manifolds, Tensor Analysis e Applications (Springer, New York, 1988).
- [39] M. Reed e B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I (Academic Press, New York, 1979).
- [40] P. R. Halmos, *Finite Dimensional Vector Spaces*, (Van Nostre, New York, 1958).
- [41] K. Hoffman e R. A. Kunze, *Linear Algebra* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1971).
- [42] J. C. A. Barata, *Curso de Física-Matemática*, http://denebola.if.usp.br/~ jbarata/Notas_de_aula/notas_de_aula.html.
- [43] A. Peres, Am. J. Phys. 46, 745 (1978).
- [44] E. B. Davies, Quantum Theory of Open Systems (Academic Press Inc., London, 1976).
- [45] K. Krauss, States, Effects e Operations (Springer-Verlag, Berlin, 1983).
- [46] M. B. Ruskay, J. Math. Phys. 43, 4358 (2002).
- [47] E. A. Carlen, Trace Inequalities e Quantum Entropy: An introductory course, http://www.ueltschi.org/AZschool/notes/EricCarlen.pdf.
- [48] B. Schumacher, M. Westmoreland e W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 76, 3452 (1996).
- [49] A. Peres e W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 66, 1119 (1991).
- [50] A. S. Holevo, Trans.Info.Theor. 44, 269 (1998).
- [51] P. Hausladen, R. Jozsa, B. Schumacher, M. Westmoreland, e W. Wooters, Phys. Rev. A 54, 1869 (1996).
- [52] B. Schumacher e M. Westmoreland, Phys. Rev. A 56, 131 (1997).
- [53] B. Schumacher, Phys. Rev. A 51, 2738 (1995).
- [54] R. Jozsa e B. Schumacher, J. Mod. Optics **41**, 2343 (1994).
- [55] C. H. Bennett e P. W. Shor, Trans. Info. Theor. 44, 2724 (1998).
- [56] E. Schrödinger, Naturwiss. 23, 807 (1935).
- [57] A. Einstein, B. Podolsky, e N. Rosen, Phys. Rev. 47, 777 (1935).

- [58] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, e R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. 23, 880 (1969).
- [59] B. S. Cirel'son, Lett. Math. Phys. 4, 93 (1980).
- [60] A. Aspect, P. Grangier, e G. Roger, Phys. Rev. Lett. 47, 460 (1981).
- [61] A. Aspect, J. Dalibard, e G. Roger, Phys. Rev. Lett. 49, 1804 (1982).
- [62] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, e N. Gisin, Phys. Rev. Lett. 81, 3563 (1998).
- [63] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, e A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. 81, 5039 (1998).
- [64] G. Rigolin, Estados Quânticos Emaranhados, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas (2005).
- [65] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, e K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. 81, 865 (2009).
- [66] M. B. Plenio e S. Virmani, Quant. Inf. Comp. 7, 1 (2007).
- [67] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 80, 2245 (1998).
- [68] H. Ollivier e W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. 88, 017901 (2002).
- [69] L. Henderson e V. Vedral, J. Phys. A: Math. Gen. 34, 6899 (2001).
- [70] M. Piani, P. Horodecki, e R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. **100**, 090502 (2008).
- [71] A. Datta, A. Shaji e M. Caves, Phys. Rev. Lett. 100, 050502 (2008).
- [72] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida, e A. G. White, Phys. Rev. Lett. 101, 200501 (2008).
- [73] S. Hamieh, R. Kobes e H. Zaraket, Phys. Rev. A 70, 052325 (2004).
- [74] I. Fuentes-Schuller e R. B. Mann, Phys. Rev. Lett. 95, 120404 (2005). P. M. Alsing,
 I. Fuentes-Schuller, R. M. Mann, e T. E. Tessier, Phys. Rev. A 74, 032326 (2006).
 G. Adesso, I. Fuentes-Schuller, e M. Ericsson, Phys. Rev. A 76, 062112 (2007).
- [75] R. M. Gingrich e C. Adami, Phys. Rev. Lett. 89, 270402 (2002).
- [76] P. Kok e U. Yurtsever, Phys. Rev. D 68, 085006 (2003).
- [77] P. M. Alsing e G. J. Milburn, Phys. Rev. Lett. **91**, 180404 (2003).
- [78] J. Doukas e L. C. L. Hollenberg, Phys. Rev. A 79, 052109 (2009).

- [79] A. Peres e D. R. Terno, Rev. Mod. Phys. 76, 93 (2004).
- [80] B. O'Neill, Semi Riemannian Geometry (Academic Press, New York, 1983).
- [81] E. P. Wigner, Group Theory, (Academic Press Inc., New York, 1959).
- [82] V. Bargmann, J. Math. Phys. 5, 862 (1964).
- [83] E. P. Wigner, Ann. Math. 40, 149 (1939).
- [84] V. Bargmann, Ann. Math. 48, 568 (1947).
- [85] F. W. Werner, Foundations of Differentiable Manifolds e Lie Groups, (Springer-Verlag, New York, 1971).
- [86] D. Bleecker, Gauge Theory e Variational Principle, (Addison-Wesley Publishing Company, London, 1981);
- [87] M. A. Naimark, Linear Representations of The Lorentz Group (Pergamon Press, Oxford, 1964).
- [88] M. Carmeli, Group Theory e General Relativity, (McGraw-Hill, New York, 1977).
- [89] F. R. Halpern, Special Relativity e Quantum Mechanics, (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968).
- [90] Y. Ohnuki, Unitary representations of the Poincaré group e relativistic wave equations, (World Scientific Pub Co Inc, Singapore, 1988)
- [91] W. Tung, Group Theory in Physics (World Scientific, New York, 1985).
- [92] N. Straumann, Unitary Representations of the inhomogeneous Lorentz Group e their Significance in Quantum Physics, arXiv:0809.4942v1.
- [93] R. M. Gingrich, A. J. Bergou, e C. Adami, Phys. Rev. A 68, 042102 (2003).
- [94] R. Penrose e W. Rindler, Spinors e Space-Time: Two-Spinor Calculus e Relativistic Fields (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [95] H. Terashima e M. Ueda, Quantum Inf. Comput. 3, 224 (2003).
- [96] W. T. Kim e E. J. Son, Phys. Rev. A 71, 014102 (2005).
- [97] A. Stefanov, H. Zbinden, N. Gisin, e A. Suarez, Phys. Rev. Lett. 88, 120404 (2002).
- [98] M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe, e D. J. Winele, Nature (London) 409, 791 (2001).
- [99] H. Sakai et al., Phys. Rev. Lett. **97**, 150405 (2006).

- [100] M. Aspelmeyer *et al.*, Science **301**, 621 (2003).
- [101] C.-Z. Peng *et al.*, Phys. Rev. Lett **94**, 150501 (2005).
- [102] K. J. Resch *et al.*, Optics Express **13**, 202 (2005).
- [103] R. Ursin *et al.*, Nature Physics **3**, 481 (2007).
- [104] A. Fedrizzi, R. Ursin, T. Herbst, M. Nespoli, R. Prevedel, T. Scheidl, F. Tiefenbacher, T. Jannewein, e A. Zeilinger, Nature Physics 5, 389 (2009).
- [105] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, e H. Zbinden, Rev. Mod. Phys 74, 145 (2002).
- [106] A. Peres e D. R. Terno, J. Mod. Optics **50**, 1165 (2003).
- [107] N. H. Lindner e D. R. Terno, J. Mod. Opt. 52, 1177 (2005).
- [108] N. H. Lindner, A. Peres, e D. R. Terno, Jour. Phys. A 36, L449 (2003).
- [109] P. Caban e J. Rembieliński, Phys. Rev. A 68, 042107 (2003).
- [110] A. Fedrizzi, T. Herbst, A. Poppe, T. Jennewein, e A. Zeilinger, Optics Express 15, 15377 (2007).
- [111] N. Ashby, Living Rev. Relativity 6, (2003), 1 (http:// www.livingreviews.org/lrr-2003-1).
- [112] S. Wiesner, SIGACT News 15, 78 (1983).
- [113] C. H. Bennett and G. Brassard, in Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems, and Signal Processing, Bangalore, 1984 (IEEE, New York, 1984), p. 175.
- [114] A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett. 67, 661 (1991).
- [115] D. Bru β e G. Leuchs, *Lectures on Quantum Information* (Wiley-VCH, Weinheim, 2007).
- [116] I. Bengtsson e K. Zyczkowski, Geometry of Quantum States (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [117] W. G. Unruh, Phys. Rev. D 14, 870 (1976).
- [118] L. C. B. Crispino, A. Higuchi, e G. E. A. Matsas, Rev. Mod. Phys. 80, 787 (2008).
- [119] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Field Theory in Curved Space*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).

- [120] S. A. Fulling, Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time, (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [121] C. Bär e K. Fredenhagen Quantum Field Theory on curved Spacetimes: Concepts e Mathematical Foundations (Springer-Verlag, Berlin, 2009).
- [122] R. Geroch, J. Math. Phys. **11**, 437 (1970).
- [123] A. N. Bernal e M. Sánchez, Comm. Math. Phys. 243, 461 (2003).
- [124] Y. Choquet-Bruhat, Hyperbolic differential equations on a manifold, Battelle Rencontres (DeWitt e Wheeler, eds.) (Benjamin, New York, 1968).
- [125] R. M. Wald, Vacuum States in Space-Times with Killing Horizons in Quantum Mechanics in Curved Space-Time, NATO Advaced Study Institutes Series, Vol. B230, eds. J. Audretsch e V. de Sabbata (D. Reidel Publishing Co, Dordrecht, 1990).
- [126] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series e Products (Academic, New York, 1980).
- [127] G. E. A. Matsas e D. A. T. Vanzella, Phys. Rev. D 59, 094004 (1999); D. A. T. Vanzella e G. E. A. Matsas, Phys. Rev. Lett. 87, 151301 (2001); H. Suzuki e K. Yamada, Phys. Rev. D 67, 065002 (2003).
- [128] G. L. Sewell, Ann. Phys. 141, 201 (1982).
- [129] J. J. Bisognano e E.H. Wichmann, J. Math. Phys. 16,985 (1975); J. J. Bisognano e
 E.H. Wichmann, J. Math. Phys. 17, 303 (1976).
- [130] M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, e L. Davidovich, Science **316**, 579 (2007).
- [131] R. Schutzhold e W. G. Unruh, Comment on teleportation with a uniformly accelerated partner, quant-ph/0506028.
- [132] W. G. Unruh e R. M. Wald, Phys. Rev. D 29, 1047 (1984).
- [133] A. Higuchi, G. E. A. Matsas e C. B. Peres, Phys. Rev. D 48, 3731 (1993).
- [134] R. M. Wald, Vacuum States in Space-Times with Killing Horizons in Quantum Mechanics in Curved Space-Time, NATO Advaced Study Institutes Series, Vol. B230, eds. J. Audretsch e V. de Sabbata (D. Reidel Publishing Co, Dordrecht, 1990).
- [135] J. Maziero, L. C. Celeri, R. M. Serra, e V. Vedral, Phys. Rev. A 80, 044102 (2009).
- [136] J. Maziero, T. Werlang, F. F. Fanchini, L. C. Celeri, e R. M. Serra, Phys. Rev. A 81, 022116 (2010).
- [137] T. Werlang, S. Souza, F. F. Fanchini, e C. J. Villas Boas, Phys. Rev. A 80, 024103 (2009).
- [138] F. F. Fanchini, T. Werlang, C. A. Brasil, L. G. E. Arruda, e A. O. Caldeira, Phys. Rev. A 81, 052107 (2010); D. O. Soares-Pinto, L. C. Celeri, R. Auccaise, F. F. Fanchini, E. R. deAzevedo, J. Maziero, T. J. Bonagamba, e R. M. Serra, Phys. Rev. A 81, 062118 (2010).
- [139] R. Dillenschneider, Phys. Rev. B 78, 224413 (2008).
- [140] M. S. Sarandy, Phys. Rev. A 80, 022108 (2009).
- [141] T. Werlang e G. Rigolin, Phys. Rev. A 81, 044101 (2010).
- [142] J. Maziero, H. C. Guzman, L. C. Celeri, M. S. Sarandy, e R. M. Serra, Quantum e classical thermal correlations in the XY spin-1/2 chain, arXiv:1002.3906
- [143] J.-S. Xu, X.-Y. Xu, C.-F. Li, C.-J. Zhang, X.-B. Zou, e G.-C. Guo, Nature Communications 1, 7 (2010).
- [144] T. Yu e J. H. Eberly, Phys. Rev. Lett. **93**, 140404 (2004).
- [145] J. B. Hartle e S. W. Hawking, Phys. Rev. D 13, 199 (1976).
- [146] W. Israel, Phys. Lett. 57, 107 (1976).
- [147] B. S. Kay, Commun. Math. Phys. 100, 57 (1985).
- [148] B. S. Kay e R. M. Wald, Phys. Rep. **207**, 49 (1991).
- [149] R. Haag, Local Quantum Physics, (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
- [150] H. Araki, Mathematical Theory of Quantum Fields, (Oxford University Press, Oxford, 1999).
- [151] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, e I. T. Todorov, Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory (W. A. Benjamin, Massachusetts, 1975).
- [152] R. F. Streater e A. S. Wightman, PCT, Spin e Statistics, e all That, (W. A. Benjamin, Inc., New York, 1964).
- [153] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields (Cambridge University Press, Cambridge, 1996), Vol. I.