UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Rosilaine Sanches Martins

O princípio da Indução Finita e jogos para o ensino de funções

São José do Rio Preto
2015

Rosilaine Sanches Martins

O princípio da Indução Finita e jogos para o ensino de funções

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Tatiana Miguel Rodrigues

São José do Rio Preto
2015

Martins, Rosilaine Sanches.
O princípio da indução finita e jogos para o ensino de funções / Rosilaine Sanches Martins. -- São José do Rio Preto, 2015
117 f. : il., tabs.

Orientador: Tatiana Miguel Rodrigues
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática) 3. Indução (Lógica) 4. Jogos em educação matemática. 5. Matemática - Metodologia. I. Rodrigues, Tatiana Miguel. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.5

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Rosilaine Sanches Martins

O princípio da Indução Finita e jogos para o ensino de funções

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof.ª Dr.ª Tatiana Miguel Rodrigues
UNESP – Bauru
Orientadora

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler
UFU – Universidade Federal de Uberlândia

São José do Rio Preto
21 de Agosto de 2015

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu querido esposo Sérgio, pelo apoio, compreensão e ajuda para que conseguisse concluir esta etapa de estudos.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado a vida, pela saúde e forças para superar as dificuldades.

Ao PROFMAT, pela oportunidade de fazer este curso.

A todos os professores por me proporcionarem o conhecimento racional, mas também manifestarem a importância do caráter e comprometimento com as pessoas no processo de formação profissional.

À minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Tatiana Miguel Rodrigues, pela paciência, informações precisas e compreensão durante o longo caminho trilhado.

À minha família, que me apoiou em meus momentos de ausência, durante toda esta etapa de minha carreira acadêmica, e a todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigada.

EPÍGRAFE

"Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes.”

Isaac Newton

RESUMO

A proposta desta dissertação é relacionar funções, progressões, princípio da indução finita e jogos para o ensino de matemática. Os jogos empregados são Torre de Hanói, Jogo dos Anéis Chineses e Salto de Rã, além de uma atividade com cubos. O uso dos jogos neste trabalho não visa à construção de conceitos, e sim o emprego das definições aprendidas em sala de aula na atividade de jogar. Assim, foram elaboradas formas que conduziram os alunos a uma investigação, com o mínimo possível de interferência do professor. Este estudo permitiu o tratamento do assunto de funções, progressões e indução finita de uma forma diferente das apresentadas nos livros didáticos estimulando o aluno a ter independência de pensamento, explorar seu potencial, suas competências e habilidades, tais como raciocínio lógico e intuitivo.

Palavras-chave: Funções. Progressões. Princípio da Indução Finita. Jogos para o ensino de Matemática.

ABSTRACT

The proposal of this work is to relate functions, progressions, principle of mathematical induction and games for the learning of mathematics. Applied games are Torre de Hanói, Jogos dos Anéis Chineses and Salto de Rã game, as well as an activity with cubes. The use of games in this work is not intended at the construction of concepts, but the use of definitions learned in the classroom in the activity of entertainment. Thus, forms have been prepared which led students to an investigation, with the minimum possible teacher interference. This study allowed the subject functions; progressions and mathematical induction in a different way from that included in textbooks encourage students to have independent thinking, enabling the student to explore their potential, their skills and abilities such as logical and intuitive reasoning.

Keywords*: Functions. Progressions. Principle of Mathematical Induction. Games for learning of mathematics.*

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE FIGURAS – ANEXOS A, B e C

LISTA DE TABELAS

LISTA DE TABELAS – ANEXOS A, B e C

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação trata-se de um estudo detalhado a respeito do uso de alguns jogos nas aulas de matemática do ensino médio.

Mostraremos aqui uma gama de possibilidades de atividades e benefícios que este método pode trazer para o desenvolvimento matemático dos alunos.

O presente trabalho surgiu da busca de metodologias diferenciadas que levassem o aluno a compreender, de forma significativa, o conceito e aplicabilidade da função afim, exponencial e quadrática e também como uma forma de apresentar, de maneira lúdica, o princípio da indução finita ao ensino médio. Com o estudo dos jogos escolhidos foi possível ampliar as expectativas iniciais. Este trabalho traz a possibilidade de relacionar a função afim com a progressão aritmética e a função exponencial com a progressão geométrica, de um modo como geralmente não é apresentado em livros didáticos. Através da investigação na busca de uma estratégia de vitória, os estudantes se utilizam de processos lógicos e do raciocínio indutivo para encontrar fórmulas matemáticas que modelem os jogos em questão.

Depois são levados a compreender a importância da prova matemática para a validação das expressões encontradas.

Inicialmente é apresentado um estudo sobre os principais conceitos matemáticos utilizados.

As definições matemáticas com suas respectivas demonstrações são apresentadas no capítulo dois e servirão como base de apoio para outros professores que vierem a aplicar as atividades aqui apresentadas.

Muito se tem falado sobre o uso de jogos na educação matemática. No entanto, sua utilização em sala de aula ainda é muito escassa, o que é um desperdício, visto a quantidade de material de pesquisa existente sobre o assunto e a riqueza que essas atividades podem trazer para o desenvolvimento matemático dos alunos. O Capítulo três apresenta uma análise teórica e reflexões sobre o uso de jogos nas aulas de Matemática.

Para esta dissertação foi elaborada uma série de atividades destinadas a alunos do primeiro ano do ensino médio, mas podem ser alteradas para serem aplicadas no oitavo ano do ensino fundamental para o trabalho com generalizações em álgebra.

Houve o cuidado de se detalhar bem as atividades para facilitar a aplicação e o entendimento por parte dos alunos. Visando também auxiliar o trabalho do professor as questões com suas respectivas resoluções (em itálico), estão disponíveis nos Anexos. O

Capítulo quatro traz comentários importantes sobre a aplicação das mesmas. Estes comentários poderão servir de apoio para outras aplicações futuras.

Também nos anexos encontra-se uma lista de conceitos matemáticos a serem entregues aos grupos de alunos para eventuais consultas. A lista é a mesma para todas as atividades, pois caberá ao grupo identificar entre os conteúdos apresentados aqueles que se aplicam na resolução do trabalho que o grupo está desenvolvendo.

Esperamos que a prática aqui sugerida e estudada sirva a outros professores, desta ou de outras séries, que buscam novas alternativas para que seus alunos aprendam matemática.

Nas tarefas propostas, há menção à obtenção de gráficos a partir da translação dos gráficos de funções básicas, porém este tema não faz parte dos objetivos principais deste trabalho, visto que essas transformações nos gráficos de funções podem ser muito bem exploradas com o auxílio de bons softwares matemáticos, como por exemplo, o Geogebra.

É bom salientar, que foi escolhido um trabalho com os jogos “Torre de Hanói”, “Salto de rã” e “Anéis chineses”, não apenas para deixar as aulas mais prazerosas, mas sim, principalmente, para ensinar matemática e trazer motivação para aprendê-la.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentaremos as definições dos principais conceitos que serão abordados neste trabalho. São eles: função afim, função exponencial, função quadrática, sequências, progressão aritmética, progressão geométrica e o princípio da indução finita.

Todos os conceitos e definições aqui apresentados foram coletados através de pesquisas feitas nos livros: "A matemática do ensino médio" vol.1 de Elon Lages Lima, "Fundamentos da Matemática Elementar", volumes 1, 2 e 4 dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Carlos Murakami, "Cálculo" vol.1 de Serge Lang, "Um curso de Cálculo" vol.1 de Hamilton Luiz Guidorizzi, "Iniciação à matemática: Um curso com problemas e soluções" de Krerley Oliveira e Adán Fernándes e Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo: Caderno do Professor – Matemática – 1ª série do Ensino Médio, vol.2.

2.1 Funções

Uma noção intuitiva de função é dada por Oliveira e Fernándes (2010, p. 273-274) como sendo um objeto matemático composto de três ingredientes: um conjunto não vazio A, chamado de domínio da função, um conjunto não vazio B, chamado de contradomínio da função e uma correspondência, que associa a cada elemento de A um único elemento de B. Denotamos uma função por

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\to f(x), \end{aligned}$$

indicando que A é o domínio, B é o contradomínio e que se x é um elemento de A então a ele associaremos o elemento f(x) de B, este elemento será chamado de imagem do elemento x de A em B.

Definição 1: Dados dois conjuntos não vazios A e B, tais que, $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, uma função $f: A \to B$ é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B.

Definição 2: Dada uma função f de A em B, o conjunto A chama-se domínio da função e denota-se por D(f), o conjunto B, contradomínio da função, denota-se por C.D.(f) e o conjunto formado pelos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, é chamado conjunto imagem da função e denota-se por Im(f).

Exemplo 5: A função f cujo domínio é o conjunto dos números naturais e o contradomínio é o conjunto dos números naturais, e a correspondência é tal que a cada número natural n, associamos a sua imagem n^2, é denotada por:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \rightarrow n^2.$$

Exemplo 6: A função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, $f(x) = x^3$ é uma função que associa a cada número real x o número real y, sendo $y = x^3$. Tem-se: D(f) = $\mathbb{R}$, C.D.(f) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} / y = x^3\}$. Podemos observar que $f(1) = 1^3 = 1$ e que $f(2) = 2^3 = 8$.

Exemplo 7: Seja g a função que a cada número real x associa o número real x + 1. Podemos, então, descrever g por g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, $g(x) = x + 1$. Tem-se D(g) = $\mathbb{R}$, C.D.(g) = $\mathbb{R}$ e Im(g) = $\{y \in \mathbb{R} / y = x + 1\}$. Observamos que $g(1) = 1 + 1 = 2$ (o valor que g assume em 1 é 2), $g(3) = 3+1 = 4$ e que $g(x + 1) = x + 1 + 1 = x + 2$.

Exemplo 8: Seja f a função dada por $f(x) = \sqrt{x}$, podemos analisar que o domínio de f é dado por D(f) = $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$, que, por exemplo, $f(16) = \sqrt{16} = 4$ (o valor que f assume em 16 é 4), $f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$ e $f(x + 1) = \sqrt{x+1}$, $x \geq -1$.

2.1.1 Funções crescentes ou decrescentes

Definição 3: A função f: A → B definida por y = f(x) é crescente no conjunto A se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$, isto é,

$$\forall\, x_1, x_2,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

Exemplo 9: A função f(x) = 2x é crescente em $\mathbb{R}$, pois: $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$, isto é, $f(x_1) < f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 10: A função $f(x) = 2^x$ é crescente em $\mathbb{R}$, pois:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2}$, isto é, $f(x_1) < f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in$ IR.

Definição 4: A função f: A → B definida por y = f(x) é decrescente no conjunto A se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$, isto é,

$$\forall\, x_1, x_2,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

Exemplo 11: A função f(x) = -2x é decrescente em $\mathbb{R}$, pois:

$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2$, isto é, $f(x_1) > f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 12: A função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é decrescente em $\mathbb{R}$, pois:

$x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$, isto é, $f(x_1) > f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

2.1.2 Gráficos de função

Uma função f: $A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada função real de variável real, pois seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$. O gráfico de uma função f real é um subconjunto G(f) do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um valor qualquer do domínio de f e y = f(x). Assim,

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in D(f),\ y = f(x)\}.$$

A fim de que um subconjunto G de $\mathbb{R}^2$ seja o gráfico de alguma função real f: A → B, é necessário e suficiente que G cumpra as seguintes condições:

G1. Para todo $x \in A$ existe um par ordenado $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada é x.

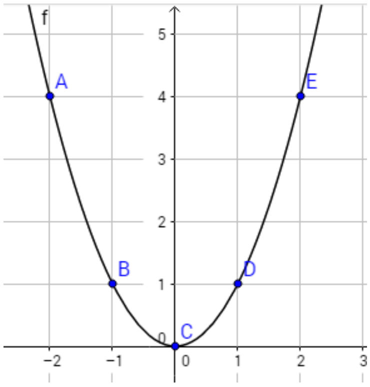
G2. Se p = (x, y) e p' = (x, y') são pares pertencentes a G com a mesma primeira coordenada x então y = y' (isto é, p = p').

Estão duas condições podem ser resumidas em uma só, dizendo-se que para cada $x \in A$ existe um, e somente um, $y \in B$.

Exemplo 13: O gráfico da função $f(x) = x^2$ consiste de todos os pares (x, y) tais que $y = x^2$. Em outras palavras é o subconjunto $G(f) \subset \mathbb{R}^2$, tal que,

$$G(f) = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2;\ x \in D(f)\}.$$

Figura1: Gráfico da função f(x) = x².

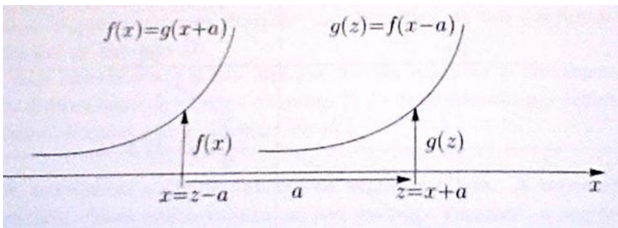


Fonte: Elaboração da autora.

2.1.2.1 Translação de gráficos

Seja f uma função qualquer e seja a > 0. O gráfico da função y = g(x) = f(x – a) é o mesmo que o da função y = f(x), transladado de "a" unidades para a direita. De fato, basta notar que a ordenada f(x), correspondente a um ponto x qualquer, coincide com a ordenada g(x + a) = f((x+a) – a) no ponto z = x + a (Figura 2).

Figura 2: Translação de gráficos.



Fonte: Ávila (2003).

Situação análoga ocorre quando somamos um número positivo "a" ao argumento de uma função qualquer y = g(x), o gráfico da nova função obtida,

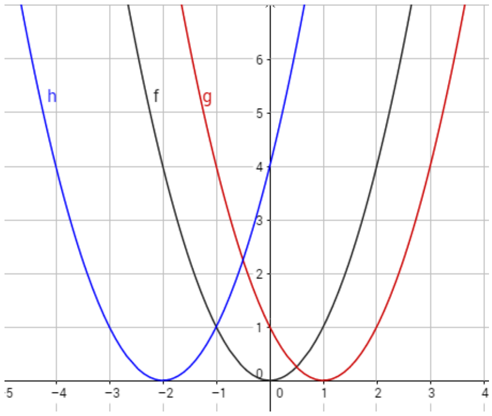
$$y = f(x) = g(x + a),$$

é o mesmo que o da função original y = g(x), porém transladado de "a" unidades para a esquerda, como ilustra a mesma Figura 2.

De um modo geral, se "a" é um número qualquer, positivo ou negativo, o gráfico de g(x) = f(x – a) é geometricamente idêntico ao de y = f(x), transladado de "a" unidades ao longo do eixo OX, para a direita de a > 0 e para a esquerda se a < 0.

Exemplo 14: Dadas as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = (x - 1)^2$ e $h(x) = (x + 2)^2$, temos que o gráfico de g(x) é obtido a partir da translação horizontal de uma unidade para a direita no gráfico de f(x) e o gráfico de g(x) é o obtido a partir da uma translação horizontal de duas unidades para a esquerda no gráfico de f(x). Como mostra a Figura 3:

Figura 3: Gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = (x – 1)^2$ e $h(x) = (x + 2)^2$



Fonte: Elaboração da autora.

2.1.3 Função afim

Definição 5: Uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função afim quando existem constantes a e b ∈ $\mathbb{R}$, tais que, $f(x) = ax + b$, para todo x ∈ $\mathbb{R}$.

O coeficiente b é o valor que a função assume quando x = 0, isto é, b = f(0). O coeficiente a pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função assume em dois pontos distintos x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$. De fato, se

$f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$

obtemos

$f(x_2) – f(x_1) = (ax_2 + b) – (ax_1 + b) \Rightarrow f(x_2) – f(x_1) = a(x_2 – x_1)$

portanto,

$a = [f(x_2) – f(x_1)]/[x_2 – x_1]$.

Dados x, x + h ∈ IR, com $h \neq 0$, o número $a = [f(x + h) – f(x)]/h$ chama-se taxa de variação (ou taxa de crescimento) da função f no intervalo de extremos x, x + h.

Exemplo 15: Um corretor de imóveis recebe um salário mensal composto de uma parte fixa de R$ 500,00 mais uma parte adicional de 2% sobre as vendas que realizou no mês. Podemos expressar seu salário mensal s(x) em função das vendas realizadas (que chamaremos de x), pela fórmula: s(x) = 0,02x + 500 que representa uma função afim onde, a = 0,02 e b = 500.

Teorema 1: A função afim é crescente se, e somente se, o valor de a for positivo.

Demonstração:

$$f(x) = ax + b \text{ é crescente } \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, \text{se } x_1 < x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow a > 0.$$

■

Teorema 2: A função afim é decrescente se, e somente se, o valor de a for negativo.

Demonstração:

$$f(x) = ax + b \text{ é crescente } \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0, \text{se } x_1 < x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow a < 0.$$

■

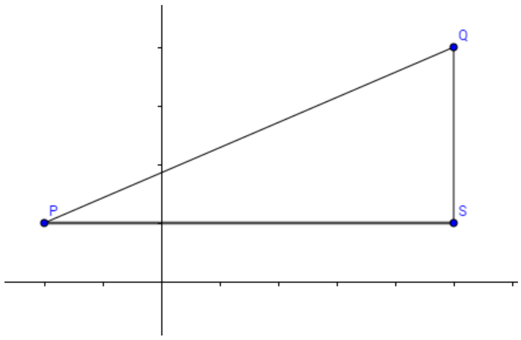
2.1.3.1 Gráfico da função afim

Teorema 3: A distância entre dois pontos P = (x, y) e Q = (u, v) é dada pela fórmula

$$D(P, Q) = \sqrt{(u - x)^2 + (v - y)^2}.$$

Demonstração: Introduzimos o ponto auxiliar S = (u, y).

Figura 4: Distância entre os pontos P e Q no triângulo retângulo PSQ com ângulo reto em S.



Fonte: Elaboração da autora.

Como P e S têm a mesma ordenada, o segmento PS é horizontal (paralelo ao eixo OX). Analogamente, QS é vertical (paralelo ao eixo OY). Portanto o segmento PQ é a hipotenusa do triângulo retângulo PSQ (Figura 4), cujos catetos medem $|u-x|$ e $|v-y|$, respectivamente. O Teorema de Pitágoras nos dá então:

$$d(P,Q)^2 = (u-x)^2 + (v-y)^2,$$

ou seja,

$$d(P, Q) = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 4: O gráfico de uma função afim f: x ⟶ ax + b é uma reta.

Demonstração:

Tomemos três números reais x_A , x_B e x_C, tais que $x_A < x_B < x_C$. Agora vamos mostrar que os pontos A = (x_A, ax_A + b), B = (x_B, ax_B + b) e C = (x_C, ax_C + b), que pertencem ao gráfico de f, são colineares. Para isto, basta verificar que a distância entre os pontos A e C é igual à soma da distância entre os pontos A e B com a distância entre os pontos B e C.

Usando a fórmula da distância entre dois pontos temos:

d(A, B) = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + a^2(x_B - x_A)^2} = |(x_B - x_A)|\sqrt{1+a^2}$. Como $x_A < x_B$, segue que

d(A, B) = $(x_B - x_A)\sqrt{1+a^2}$

Analogamente, temos d(B, C) = $(x_C - x_B)\sqrt{1+a^2}$ e d(A, C) = $(x_C - x_A)\sqrt{1+a^2}$

Segue imediatamente que:

d(A, C) = d(A, B) + d(B,C). $\blacksquare$

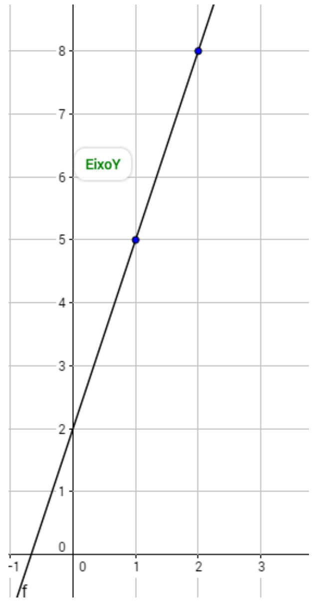
Notemos que o gráfico de uma função f, tal que f(x) = ax + b, pode ser obtido através da translação vertical do gráfico de uma função g, em que g(x) = ax, em b unidades. Também tem-se que (0, b) é o ponto que o gráfico da função afim intercepta o eixo y. O ponto que o gráfico da função afim intercepta o eixo x é f(x) = 0, isto é, x = $-\frac{b}{a}$. Obtemos assim o ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Exemplo16: Vamos construir o gráfico da função f definida por f(x) = 3x + 2.

Considerando que o gráfico da função afim é uma reta, podemos atribuir a x dois valores distintos e calcular os correspondentes valores de f(x):

Tomemos $x_1 = 1$ e $x_2 = 2 \rightarrow f(x_1) = 3.1 + 2 = 5$ e $f(x_2) = 3.2 + 2 = 8$.

Figura 5: Gráfico da função f(x) = 3x + 2



Fonte: Elaboração da autora

O gráfico de f também poderia ser construído fazendo uma translação vertical de 2 unidades no gráfico da função g(x) = 3x.

2.1.4 Função exponencial

Definição 6: Chama-se função exponencial a toda função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por uma lei de associação da forma $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a é uma constante positiva e $a \neq 1$. A função exponencial $f(x) = a^x$ é definida de forma a apresentar as seguintes propriedades para x e $y \in \mathbb{R}$:

1) $a^x . a^y = a^{x+y}$;

2) $a^1 = a$;

3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$.

Observação: Quando x aumenta uma unidade a partir de qualquer valor, a^x é multiplicado por a. De fato, $a^{x+1} = a^x . a$, ou seja, para cada unidade a mais no valor de *x*, o valor de a^x crescerá ou decrescerá, dependendo apenas do valor de a, logo, se $a > 1$, $f(x) = a^x$ é crescente e se $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ é decrescente.

Assim como as funções do tipo $f(x) = ax + b$ constituem um padrão para o estudo dos fenômenos lineares, em que o crescimento ou decrescimento acontecem a uma taxa constante, as funções exponenciais constituem um padrão para a descrição de fenômenos de natureza não lineares como, por exemplo, os juros compostos, o decaimento radioativo, o crescimento de algumas populações, etc. Vale lembrar que o crescimento exponencial para $a > 1$ é muito rápido e supera o de qualquer polinômio.

Exemplo 17: A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, tal que, $f(x) = 2^x$ é uma função crescente, pois $a = 2 > 1$.

Exemplo 18: Na função exponencial $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, tal que, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, tem-se $a = \frac{1}{2}$, isto é, $0 < a < 1$. Logo, g é uma função é decrescente.

Exemplo 19: Suponhamos que no país **X** a produção de um determinado alimento foi igual a uma tonelada no final do ano de 2000. Em virtude dos incentivos econômicos, essa produção passou a triplicar anualmente a partir daquele momento.

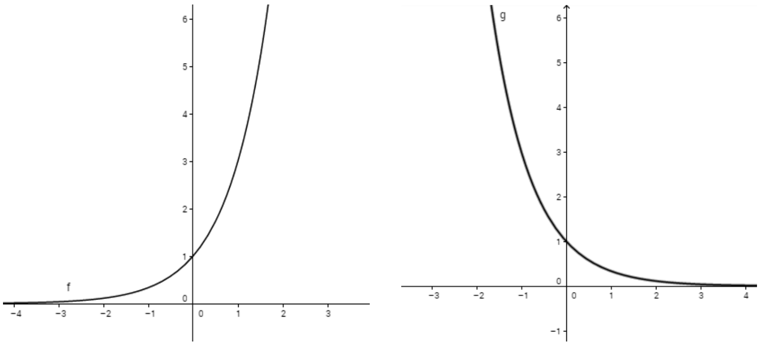
A regularidade da multiplicação pelo fator 3, a cada ano, conduz naturalmente à representação da produção por meio de uma potência de base 3. Conclui-se que a produção está em função do tempo t, e pode ser representada por $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, tal que, $p(t) = 3^t$, sendo t o número de anos passados após o ano 2000.

2.1.4.1 Gráfico da função exponencial

Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos $\Rightarrow f(0) = a^0 = 1$, isto é, o par ordenado (0, 1) pertence à função para todo $a \in \mathbb{R}$, tal que, $a > 0$ e $a \neq 1$. Isto significa que o gráfico cartesiano de $f(x) = a^x$ intercepta o eixo y no ponto de ordenada 1 (Figura 6).

O gráfico da função $f(x) = a^x$ está todo acima do eixo dos x, pois $y = a^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$

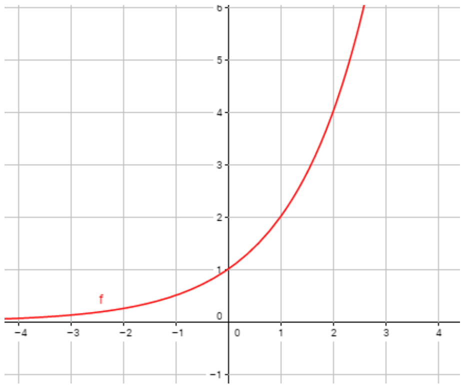
Figura 6: Gráficos da função $f(x) = a^x$, com $a > 1$ e $g(x) = a^x$, com $0 < a < 1$.



Fonte: Elaboração da autora.

Exemplo 20: Gráfico da função $f(x) = 2^x$ (Figura 7).

Figura 7: Gráfico da função $f(x) = 2^X$



Fonte: Elaboração da autora.

2.1.5 Função Quadrática

Definição 7: Define-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

A função quadrática é muito usada para modelar problemas que envolvem o cálculo de máximos e mínimos.

Exemplo 21: A lei f(x) que fornece a posição de um móvel no instante t com movimento uniformemente variado, é $f(x) = 1/2at^2 + bt + c$, onde a é a aceleração, b é a velocidade inicial e c é a posição inicial do móvel.

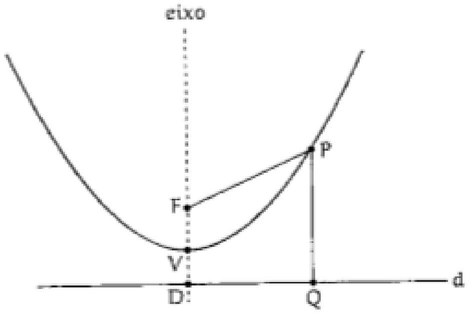
Exemplo 22: A área de um quadrado é dada em função da medida x de seu lado por $A(x) = x^2$, onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$.

2.1.5.1 Gráfico da função quadrática

O gráfico da função quadrática é uma curva chamada parábola. Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e d.

A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se o vértice dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e o ponto de intersecção do eixo com a diretriz (Figura 8).

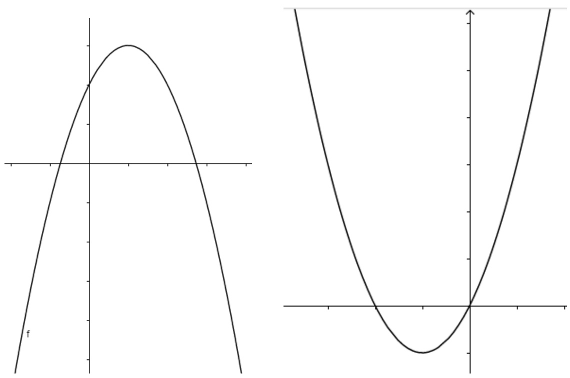
Figura 8: Parábola é o conjunto de pontos que distam igualmente de F e d



Fonte: Lima (2006)

A concavidade da parábola será voltada para cima quando $a > 0$ e voltada para baixo quando $a < 0$ (Figura 9).

Figura 9: Gráficos da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, a direita com $a < 0$ e a esquerda com $a > 0$



Fonte: Elaboração da autora.

Observe que para $x = 0$, temos $f(0) = 0^2 + b.0 + c = c$, isto é, o par ordenado $(0, c)$ pertence ao gráfico da função. Isto significa que o gráfico cartesiano de $f(x) = x^2 + bx + c$ intercepta o eixo *y* no ponto de ordenada c.

A forma canônica da função quadrática nos permite analisá-la mais detalhadamente. Para obtermos esta forma vamos fazer as transformações necessárias na sua forma geral.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) =$$

$$= a[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - (\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a})] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a^2})]$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ, também chamado de discriminante do trinômio do segundo grau, temos a forma canônica:

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\Delta}{4a^2})]$$

Definição 8: Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores reais de x, tais que, $f(x) = 0$. Logo,

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\Delta}{4a^2})] = 0 \iff (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \iff (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \iff$$

$$\iff x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ para } \Delta > 0 \iff x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Esta última também é conhecida como Fórmula de Bhaskara.

Definição 9: Dizemos que o número $y_m \in Im(f)$ é o valor máximo que a função f assume se, e somente se, $y_m \geq y$ para qualquer $y \in Im(f)$. O ponto (x_m, y_m) é chamado de ponto de máximo, sendo $x_m \in D(f)$, tal que $y_m = f(x_m)$.

Definição 10: Dizemos que o número $y_m \in Im(f)$ é o valor mínimo de uma função f se, e somente se, $y_m \leq y$ para qualquer $y \in Im(f)$. O ponto (x_m, y_m) é chamado de ponto de mínimo, sendo $x_m \in D(f)$, tal que $y_m = f(x_m)$.

Teorema 5: A função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite um valor máximo $y = \frac{-\Delta}{4a}$ em $x = \frac{-b}{2a}$ se, e somente se, $a < 0$ e um valor mínimo $y = \frac{-\Delta}{4a}$ em $x = \frac{-b}{2a}$ se, e somente se, $a > 0$.

Demonstração: Consideremos a função quadrática na sua forma canônica, sendo $a > 0$ ou $a < 0$.

$$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\Delta}{4a^2})] \qquad (1)$$

Considerando-se que $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$, para qualquer $x \in IR$ e $\frac{-\Delta}{4a^2}$ para uma dada função tem valor constante, então y assumirá valor máximo (mínimo) quando $a < 0$ $(a > 0)$ e a diferença

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\Delta}{4a^2})$$

for a menor possível, isto é:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}.$$

Substituindo $x = \frac{-b}{2a}$ em (1) temos:

$$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\Delta}{4a^2})] = a[(\frac{-b}{2a} + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\Delta}{4a^2})] = a\,(-\frac{\Delta}{4a^2}) = -\frac{\Delta}{4a}. \qquad \blacksquare$$

Observe que a função quadrática, quando escrita na sua forma canônica, fornece claramente as coordenadas do vértice. Veja:

$$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\Delta}{4a^2})] = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{\Delta}{4a^2}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Definição 11: O ponto $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ máximo da parábola se $a < 0$, ou mínimo se $a > 0$, é chamado de vértice da parábola representativa da função quadrática. Pela simetria da parábola também podemos obter o valor do x do vértice através da média aritmética dos zeros da função.

Exemplo 23: O rendimento bruto R(q) de uma empresa em milhares de reais em função da quantidade q de produtos vendidos (em milhares) é expresso pela fórmula $R(q) = -q^2 + 16q$. Os valores de q para os quais a empresa apresenta lucro zero, isto é, $R(q) = 0$ é dado pelos zeros ou raízes da função. Utilizando a fórmula de Bhaskara:

$-q^2 + 16q = 0$, $a = -1$, $b = 16$ e $c = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = 16^2 - 4 . (-1) . 0 \Rightarrow \Delta = 256 - 0 = 256.$

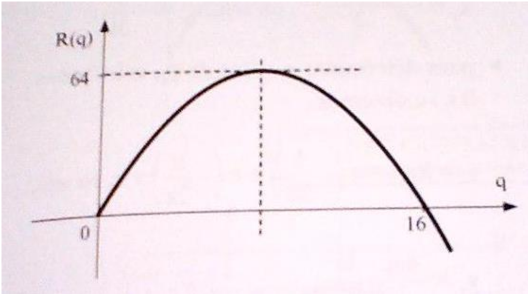
$$q = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{256}}{2.(-1)} = \frac{-16 \pm 16}{-2} \Rightarrow q_1 = \frac{-16+16}{-2} = \frac{0}{-2} = 0 \text{ e } q_2 = \frac{-16-16}{-2} = \frac{-32}{-2} = 16.$$

Assim, a empresa apresentará rendimento igual a zero com a produção de zero ou dezesseis mil unidades.

Observando que $R(q) = -q^2 + 16q$ possui $a = -1 < 0$, conclui-se que a função possui um ponto de máximo onde o rendimento atingirá o maior valor possível. O valor de q para que isto ocorra pode ser calculado por $q_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{2.(-1)} = \frac{-16}{-2} = 8$. Ou, em razão da simetria da parábola, concluímos que o valor de q no vértice é o ponto médio do segmento de 0 a 16, ou seja, é igual a 8. Logo, o rendimento será maximizado com a produção de oito mil unidades. E o rendimento máximo que a empresa pode atingir é dado por

$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-256}{4.(-1)} = \frac{-256}{-4} = 64$. Ou, R(8) = $-8^2 + 16 . 8 = -64 + 128 = 64$, isto é, R$ 64 000,00.

Figura 10: Gráfico da função $R(q) = -q^2 + 16q$

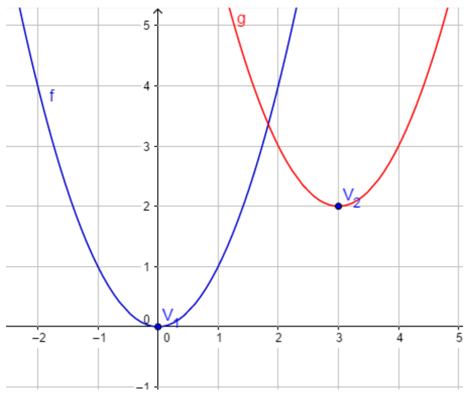


Fonte: São Paulo (2014).

Observe que uma função do tipo $f(x) = ax^2$, possui $x_v = 0$ e $y_v = 0$, isto é, o vértice estará na origem do sistema. Se comparado ao gráfico de uma função do tipo $y = a(x + m)^2 + c$, cujas coordenadas do vértice são V = (-m, c) percebemos que o gráfico de f(x) sofreu uma translação horizontal de – m unidades na horizontal e c unidades na vertical.

Exemplo 24: O gráfico da função $g(x) = (x - 3)^2 + 2$, cujo vértice possui coordenadas (3, 2), pode ser obtido aplicando uma translação horizontal de três unidades para a direita e uma translação vertical de duas unidades para cima ao gráfico de $f(x) = x^2$ (Figura 6).

Figura 11: Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x - 3)^2 + 2$



Fonte: Elaboração da autora.

2.2 Princípio da Indução Finita

Muitas vezes, no estudo da Matemática, encontramos propriedades que se verificam regularmente em casos particulares estudados. Isto nos dá indícios de que podem ser verdadeiras, mas como ter a certeza de que o são? Na maioria das vezes é inviável ou impossível realizar os testes para todos os casos. Quem poderá garantir que serão verificadas para todos eles em geral? Torna-se necessária a utilização de métodos matemáticos lógicos que atestem a veracidade dessas propriedades. Um deles é o Princípio da Indução Finita. Segundo Oliveira e Fernándes (2010), este método tem como base o último dos axiomas de Peano (Giuseppe Peano, 1858 – 1932) sobre o conjunto dos números naturais, que diz o seguinte: seja A um subconjunto de $\mathbb{N}$ ($A \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in A$ e se, além disso, A contém todos os sucessores dos seus elementos, então $A = \mathbb{N}$.

2.2.1 O axioma da indução

Esta seção tem fundamentação no artigo de Elon Lages Lima (EUREKA!, nº 3, 1998).

O último axioma de Peano possui claramente uma natureza mais elaborada do que os demais. Ele é conhecido como o axioma da indução.

O significado informal do axioma da indução é que todo número natural pode ser obtido a partir de 1 por meio de repetidas aplicações da operação de tomar o sucessor. Assim, por exemplo, 2 é sucessor de 1, 3 é o sucessor do sucessor de 1, etc. Para se entender melhor este axioma é útil examinar o exemplo, no qual $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ mas a função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $s(n) = n + 1$ é modificada, pondo-se $s(n) = n + 2$. Então, se começarmos com 1 e a este número aplicarmos repetidamente a operação de tomar o "sucessor" (nesta nova acepção) obteremos $s(1) = 3$, $s(3) = 5$, $s(5) = 7$, etc., e nunca chegaremos a qualquer número par. Portanto a função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função injetiva para a qual não é verdade que todo número natural n pode ser obtido, a partir de 1, mediante repetidas aplicações da operação de passar de k para s(k).

Observando analiticamente, podemos pensar no axioma da indução da seguinte maneira: Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ chama-se indutivo quando $s(X) \subset X$, ou seja, quando $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$, ou ainda, quando o sucessor de qualquer elemento de X também pertence a X.

Assim, pelo axioma da indução o único subconjunto indutivo de $\mathbb{N}$ que contém o número 1 é o próprio $\mathbb{N}$.

Acima, vimos que os números ímpares 1, 3, 5, ... formam um conjunto indutivo que contém o elemento 1, porém não é igual a $\mathbb{N}$.

Fundamentalmente, o axioma da indução pode ser visto como um método de demonstração, chamado o “Método de Indução Matemática”, ou “Princípio da Indução Finita”, ou “Princípio da Indução”, conforme será explicado agora.

Princípio da indução: Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 goza de P e se, além disso, o fato de o número natural n gozar de P implica que seu sucessor s(n) também goza, então todos os números naturais gozam da propriedade P.

Para ver que o Princípio da Indução é verdadeiro (uma vez admitidos os axiomas de Peano) basta observar que, dada a propriedade P cumprindo as condições estipuladas no enunciado do Princípio, o conjunto X dos números naturais que gozam da propriedade P contém o número 1 e é indutivo. Logo $X = \mathbb{N}$, isto é, todo número natural goza da propriedade P. As propriedades básicas dos números naturais são demonstradas por indução.

Exemplo 1: Entre os axiomas de Peano não consta explicitamente a afirmação de que todo número é diferente do seu sucessor, a qual será provada agora. Seja P esta propriedade. Mais precisamente, dado o número natural n, escrevamos P(n) para significar, abreviadamente, a afirmação $n \neq s(n)$. Então P(1) é verdadeira, pois $1 \neq s(1)$, já que 1 não é sucessor de número algum; em particular, 1 não é sucessor de si próprio. Além disso, se supusermos P(n) verdadeira, isto é, se admitimos que $n \neq s(n)$, então $s(n) \neq s(s(n))$, pois a função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva. Mas a afirmação $s(n) \neq s(s(n))$ significa que P(s(n)) é verdadeira. Assim, a verdade de P(n) acarreta a verdade de P(s(n)). Pelo Princípio da indução, todos os números naturais gozam de propriedade P, ou seja, são diferentes de seus sucessores.

Enunciado do princípio da indução: Uma proposição P(n), aplicável aos números naturais n, é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, quando:

1) $P(n_0)$ é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para $n = n_0$, e

2) Se $k \in \mathbb{N}$, $k > n_0$ e P(k) é verdadeira, então P(k + 1)também é verdadeira.

Exemplo 2: Considere a igualdade:

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$,

que expressa a propriedade: “a soma dos n primeiros números ímpares positivos é n^2”.

$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$ (V)

$n = 2 \Rightarrow 1 + 3 = 4 = 2^2$ (V)

$n = 3 \Rightarrow 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ (V)

...

$N = 10 \Rightarrow 1 + 3 + 5 + ... + 19 = 100 = 10^2$ (V)

Mesmo que continuemos o trabalho fazendo a verificação até n = 1 000 000, não estará provado que a fórmula vale para todo n natural, pois poderá existir um n >1000 000 em que a fórmula falha.

Para provar que a relação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, vamos empregar o Princípio da Indução Finita.

Provemos que:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

1) Verifiquemos que P(1) é verdadeira

$$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$$

2) Admitamos que p(k), com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$ (hipótese da indução) e provemos que decorre a validade de P(k + 1), isto é:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$

Temos:

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. ∎

2.3 Sequências numéricas

Uma função cujo domínio é $\mathbb{N} = \{1, 2, 3,...\}$ é chamada sequência numérica infinita. Quando o domínio da função é $\{1, 2, 3, ..., n\}$ em que $n \in \mathbb{N}$, temos uma sequência numérica finita. É usual representar uma sequência numérica por meio de seu conjunto imagem, colocando-o entre parênteses. Em geral, sendo a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... números reais, a função f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, ..., f(n) = a_n, ... é representada por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$.

2.4 Progressão Aritmética

Definição 1: Chama-se Progressão Aritmética (P.A.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_{r=a,} \\ a_n = a_{n-1} + r, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \end{cases}$$

onde a e r são números reais dados.

Assim, uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada.

Exemplo 1: (-1, 4, 9, 14, ...) é uma P.A. de razão r = 5.

Exemplo 2: As latas de milho empilhadas em certo supermercado formavam uma espécie de torre. Olhando a torre de cima para baixo uma pessoa percebeu que as latas foram colocadas seguindo o padrão: 2 latas na fila mais alta (fila 1); 5 latas na fila seguinte (fila 2); 8 latas na fila 3 e assim por diante. Os números que indicam a quantidade de latas em cada fila formam a P.A. (2, 5, 8, ...), de primeiro termo $a_1 = 2$ e razão r = 3.

2.4.1 Fórmula do termo geral da P.A.

Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma P.A. e admitindo dados o primeiro termo (a_1), a razão (r) e o índice (n) de um termo desejado, temos:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando essas n – 1 igualdades, temos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_{n-1} + (n-1).r$$

e, então, $a_n = a_1 + (n-1).r$, o que sugere o seguinte resultado:

Teorema 1: Na P.A. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ésimo termo é $a_n = a_1 + (n-1).r$.

Demonstração : Demonstração pelo princípio da indução finita

I) Para n = 1, temos $a_1 = a_1 + (1-1) . r$ (sentença verdadeira)

II) Admitamos a validade da fórmula para n = p, isto é,

$a_p = a_1 + (p-1).r$ (hipótese de indução).

Provemos que vale para n = p + 1:

$$a_{p+1} = a_p + r = (a_1 + (p-1).r) + r = a_1 + ((p+1)-1).r$$

Então $a_n = a_1 + (n-1).r, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

2.4.2 Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

Teorema 2: A soma dos n primeiros termos da P.A. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é dada por $S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$.

Demonstração: Se a sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ é uma P.A. de razão r, podemos escrevê-la na forma:

$(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots, a_n - 2r, a_n - r, a_n)$. Vamos calcular a soma dos n primeiros termos dessa P.A., que indicaremos por S_n. Repetindo o raciocínio anterior temos:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \dots + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n \quad (1)$$

$$S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \dots + (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1 \quad (2)$$

Somando (1) e (2), temos:

$$2. S_n = (a_1 + a_n) . n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$ ■

2.5 Progressão Geométrica

Definição 1: Chama-se Progressão Geométrica (P.G.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall\, n \in \mathbb{IN}, n \geq 2, \end{cases}$$

onde a e q são números reais dados.

Assim, uma P.G. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q dada.

Exemplo 1: (1, 3, 9, 27, ...) é uma P.G. de razão q = 3.

Exemplo 2: Certo dia, em uma cidade, cinco pessoas ficam sabendo de um fato. No dia seguinte, cada uma delas contou este fato para outras duas pessoas. Cada uma dessas pessoas repassou, no dia seguinte, o relato deste fato para outras duas pessoas e assim sucessivamente. Os números que representam a quantidade de pessoas a tomarem conhecimento do fato a cada dia representam a P.G. (5, 10, 20, ...), de primeiro termo $a_1 = 5$ e razão q = 2.

2.5.1 Fórmula do termo geral da P.G.

Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma P.G. e admitindo dados o primeiro termo $a_1 \neq 0$, a razão $q \neq 0$ e o índice n de um termo desejado, temos:

$$a_2 = a_1 . q,$$

$$a_3 = a_2 . q,$$

$$a_4 = a_3 . q,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_n = a_{n-1} . q$$

Multiplicando essas n – 1 igualdade, temos:

$$a_2 . a_3 . a_4 \dots . a_n = a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \dots . a_{n-1} . q^{n-1}.$$

Então, $a_n = a_1 . q^{n-1}$.

Teorema 1: Na P.G. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é q, o n-ésimo termo é

$$a_n = a_1.q^{n-1}.$$

Demonstração: Demonstração pelo princípio da indução finita:

I) Para n = 1, temos $a_1 = a_1 \, . \, q^{1-1}$ (sentença verdadeira)

II) Admitamos a validade da fórmula para n = p: $a_p = a_1 \, . \, q^{p-1}$ (hipótese de indução) e provemos que vale para n = p + 1

$$a_{p+1} = a_p \, .q = a_1 \, . \, q^{p-1} \, . \, q = a_1 . \, q^p$$

Então,

$$a_n = a_1.q^{n-1}, \forall \, n \in IN. \qquad \blacksquare$$

2.5.2 Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

Definição 2: A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é dada por $S_n = \frac{a_1.(q^n-1)}{q-1}$.

Demonstração: Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ uma P.G.. Queremos encontrar uma expressão para a soma de seus n primeiros termos, isto é,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \qquad (1)$$

Multiplicando por q (q ≠ 0) os dois membros da igualdade acima e lembrando a formação dos elementos de uma P.G., temos:

$q \, . \, S_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = a_1 . q + a_2 . q + a_3 . q + \cdots + a_n . q$

$$q \, . \, S_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n \, .q. \qquad (2)$$

Subtraindo a equação (1) da equação (2), temos:

$q \, . \, S_n - S_n = (a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \, .q) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n)$. Daí

$S_n \, . \, (q-1) = a_n \, .q - a_1$

Como $a_n = a_1.q^{n-1}$, temos: $S_n \, . \, (q-1) = a_1.q^{n-1} \, . \, q - a_1$, isto é,

$S_n \, . \, (q-1) = a_1.q^n - a_1$. Então, $S_n = \frac{a_1.(q^n-1)}{q-1}$. $\blacksquare$

3 INVESTIGANDO E MODELANDO JOGOS NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Muito se tem falado sobre o uso de jogos na educação matemática. Percebemos que esta metodologia vem sendo introduzida aos poucos no cotidiano das escolas. O Currículo do Estado de São Paulo, por exemplo, traz no caderno do segundo ano do Ensino Médio, vol.2, Situação de Aprendizagem 1 – Probabilidade e Proporcionalidade, uma sugestão de jogo para a introdução da Teoria das Probabilidades. No entanto, sua utilização ainda é muito escassa, o que é um desperdício, visto a quantidade de material de pesquisa existente sobre o assunto e a riqueza que essas atividades podem trazer para o desenvolvimento matemático dos alunos.

Este capítulo apresenta uma análise teórica e reflexões sobre o uso de jogos nas aulas de Matemática.

3.1 A metodologia do uso de jogos para o ensino de Matemática

> Notamos que, para o ensino de Matemática, que se apresenta como uma das áreas mais caóticas em termos da compreensão dos conceitos nela envolvidos, pelos alunos, o elemento jogo se apresenta com formas específicas e características próprias, propícias a dar compreensão para muitas das estruturas matemáticas existentes de difícil assimilação. (GRANDO apud ALVES, 2010, p.22)

A contribuição dos jogos para o desenvolvimento matemático da criança segundo Ribeiro (2009, p.20), se dá principalmente na resolução de problemas. Grando (2009, p.18) afirma:

> Ao observarmos o comportamento de uma criança em situações de brincadeira e/ou jogo, percebe-se o quanto ela desenvolve sua capacidade de fazer perguntas, buscar diferentes soluções, repensar situações, avaliar suas atitudes, encontrar e reestruturar novas relações, ou seja, resolver problemas.

Ribeiro ressalta ainda que ao desenvolver uma atividade com jogos em matemática, estamos naturalmente, desenvolvendo uma atividade de resolução de problemas inerente ao jogo e que este é o ponto de partida da atividade matemática.

Segundo Grando (2009, p. 18), os jogos permitem que as crianças perfaçam um caminho que vai da imaginação à abstração, através de um processo que envolve levantamento de hipóteses, testagem de conjecturas, reflexão, análise, síntese e criação de estratégias diversificadas de resolução de problemas. O autor afirma que o processo da criação está diretamente ligado à imaginação.

Uma proposta de vários jogos, já trabalhados em salas de aula através da metodologia de resolução de problemas, é apresentada por Borin (1998). A autora traz o relato detalhado da experiência vivenciada por professores e alunos em cada um deles. Defende que a atividade de jogar além de motivadora, se bem orientada, tem papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção, concentração, observação e generalização. A autora afirma que estas habilidades são fundamentais na aprendizagem da matemática e especialmente no desenvolvimento do raciocínio indutivo, que é usado quando formulamos hipóteses gerais a partir da observação de alguns casos particulares, raciocínio este, muito empregado na justificativa de propriedades e regras da Matemática.

3.2 Modelagem e investigação matemática

Segundo Biembengut e Hein (2000), é próprio do ser humano criar modelos para interpretar fenômenos sociais e naturais. Muitas vezes a resolução de um problema exige uma formulação matemática, com a utilização de um conjunto de símbolos e relações que procura traduzir um fenômeno, um problema em questão ou uma situação real, a isto se dá o nome de modelo matemático.

> Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além do conhecimento de matemática, o modelo precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Se o conhecimento matemático restringe-se a uma matemática elementar, como aritmética e/ ou medidas, o modelo pode ficar delimitado a esses conceitos. Tanto maior o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma matemática mais sofisticada. (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p.12)

Para os autores citados acima, a modelagem matemática pode ser considerada uma arte, pois formula, resolve e elabora expressões genéricas que servem não apenas para um caso particular, mas que auxiliarão posteriormente em outras aplicações e teorias.

> A essência da modelagem matemática consiste em um processo na qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, e representadas em termos matemáticos (o modelo). As hipóteses e as aproximações significam que o modelo criado por esse processo é sempre aberto à crítica e ao aperfeiçoamento (BEAN apud RIBEIRO, 2009, p.66).

A modelagem em jogos matemáticos é defendida por Menezes (2008). O autor evidencia que esta metodologia de ensino torna prazeroso o processo de ensino-aprendizagem ao mesmo tempo em que desenvolve habilidades cognitivas e uma possível preparação para a vida profissional e a cidadania.

"Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade" (BARBOSA *apud* RIBEIRO, 2009, p.65).

Mas como seria essa investigação? No contexto de ensino-aprendizagem, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), dizem que, investigar significa formular questões que nos interessam para as quais não temos resposta pronta, e a procuramos de modo fundamentado e rigoroso. O autor defende que a investigação matemática é uma atividade que pode ser desenvolvida pelos alunos, pois está relacionada com a resolução de problemas e pode gerar boas aulas de discussões entre os alunos, a investigação matemática pode trazer para a sala de aula a essência da atividade matemática genuína.

Para Ribeiro (2009), através de determinados tipos de jogos que levam os alunos à reflexão e formulação de hipóteses, o professor pode promover uma atividade de investigação matemática com vistas à resolução de problemas. Nesta dissertação faremos um estudo da matemática presente em alguns jogos e analisaremos as possíveis contribuições que podem trazer para o estudo e a aprendizagem desta disciplina.

4 APLICAÇÃO

Minha experiência com jogos em sala de aula limitava-se ao ensino fundamental e, apesar de não ser uma rotina, os jogos eram empregados esporadicamente durante o bimestre. Alguns jogos eram utilizados na construção de conceitos, outros com a finalidade de fixar conteúdos já trabalhados e alguns ainda como uma forma de descontração produtiva, como é o caso, por exemplo, do “Jogo do Nim”, que era aplicado nos quinze minutos finais de aulas duplas.

Para subsidiar esta proposta de trabalho, foi realizada uma pesquisa informal na E.E. Dom Artur Horsthuis, da cidade de Jales, relativa aos anos de 2013, 2014 e primeiro semestre de 2015. Observou-se que a escola e as aulas de matemática foram dinamizadas através do uso de jogos. As professoras do ensino fundamental (incluindo a autora) cooperavam entre si na pesquisa e preparação dos jogos que depois eram aplicados dentro ou fora da sala de aula. Entre os jogos aplicados destacam-se: “Bingo da Matemática” (aprimora o cálculo com potências), “Tapa da Tabuada” (auxilia na memorização da tabuada), “Caça ao Tesouro” (trabalha com a noção de ângulo em giros e direções) e “Matrix” (aprimora o cálculo da adição algébrica com números inteiros). Também são aplicadas atividades diferenciadas durante a “Semana Nacional da Matemática” no mês de maio, com destaque para a exposição de jogos matemáticos. O que se pode notar entre os estudantes foi um crescente interesse e entusiasmo para a aprendizagem da matemática, refletindo no aumento da participação dos alunos em Olimpíadas e também no aumento do número de medalhas conquistadas.

4.1 Motivação

A motivação para esta dissertação surgiu da necessidade de atividades diferenciadas para o Ensino Médio. Em minha prática docente neste nível do ensino, sempre senti a frustração dos alunos com a rotina das aulas: explicação seguida de exercícios de fixação e resolução de problemas, no entanto, no primeiro momento, os jogos não são bem aceitos pelos alunos que estão preocupados com o Enem e o vestibular, a princípio acham que jogar é perder tempo, mas no decorrer das atividades mudam de opinião. Participei, a muitos anos atrás, de um minicurso onde uma professora mencionou que o jogo Torre de Hanói continha muita matemática, na época isto me intrigou, e apesar de achar o jogo muito interessante não percebi a matemática presente nele. Foi durante as aulas do Profmat que aprendi mais sobre a Torre de Hanói e me entusiasmei em utilizá-lo em minhas aulas. Em 2014, resolvi trabalhar com um terceiro ano. Pesquisei em livros e na internet, achei uma quantidade razoável de material, todos bem parecidos entre si. Senti falta de um roteiro mais detalhado. Propus a atividade aos alunos, mas havia um problema, não tínhamos os jogos. Então eles resolveram encomendar a confecção dos mesmos a uma marcenaria e dividir a despesa entre eles. Na semana seguinte, trouxeram os jogos e eu desenvolvi a atividade de acordo com o material que pesquisei. A experiência se mostrou produtiva, juntos e com meu auxílio, os alunos chegaram à fórmula para o número mínimo de movimentos, retomei o conteúdo de função exponencial e de notação científica e expliquei o método da prova por indução finita. Os estudantes se mostraram muito satisfeitos com a aula. Percebi que podia explorar muito mais este e outros jogos. Foi assim que surgiu a inspiração para esta dissertação. Pensei em elaborar um trabalho com jogos que auxiliasse a compreensão dos conceitos matemáticos do ensino médio de forma significativa e que fosse bem detalhado para servir de apoio a outros professores que buscam metodologias diferenciadas.

Um dos temas abordados nos jogos escolhidos é o de funções. Isto aumentou o meu interesse, pois tenho observado constantemente que os alunos do terceiro ano não entendem ou entendem parcialmente esta matéria. Além de retomar este conteúdo, que aparece aqui de forma natural durante o processo investigativo, eles também terão a oportunidade de verificar que as funções são úteis para modelar situações problemas reais, que neste caso, surgem através dos jogos. Este trabalho também mostra a importância da prova matemática, levando à aplicação do princípio da indução finita como meio de verificação da validade das expressões matemáticas encontradas.

Segundo Elon Lages Lima (2001, p. 46), os livros didáticos em geral, não estabelecem conexão entre assuntos como progressão aritmética e função afim, e entre progressão geométrica e função exponencial. Esta conexão é feita em “Determinação de sequências, leis matemáticas e funções”. Nesta atividade, o aluno deve primeiramente fazer a representação gráfica das sequências encontradas, através de pontos no plano cartesiano para depois representar graficamente uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Um dos objetivos desta proposta é que ele perceba que progressões geométricas são discretizações de funções exponenciais, assim como também as progressões aritméticas são discretizações das funções afins, isto é, as progressões são funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.

Para esta dissertação, foi elaborada uma série de atividades destinadas a alunos do primeiro ano do Ensino Médio, pois aborda os conceitos de funções e progressões presentes no currículo desta série, podendo ser alteradas para serem aplicadas no oitavo ano do ensino fundamental (no ensino de generalizações em álgebra).

Os trabalhos descritos neste capítulo foram desenvolvidos em salas do 3º ano do Ensino Médio. Estes alunos já estudaram os conceitos de sequências, progressões aritméticas, progressões geométricas e funções no 1º ano do ensino médio, assim esta prática possibilitou aos mesmos resgatar e rever conhecimentos já adquiridos, para agora modelar as situações vivenciadas através dos jogos propostos.

4.2 Determinação de sequências, leis matemáticas e funções

Esta atividade tem como objetivos levar o aluno a fazer generalizações através da observação de padrões, modelar uma situação problema por meio de uma função, relacionar a progressão aritmética com a função afim e a progressão geométrica com a função exponencial. Foi dividida em duas partes, sendo a primeira composta por três subatividades: trabalhando com cubos, trabalhando com palitos e trabalhando com variáveis contínuas. A segunda apresenta apenas uma atividade: “A lenda do jogo de xadrez”.

O trabalho foi realizado em duas turmas, A e B, do terceiro ano do Ensino Médio, período da manhã, da E.E. Dom Artur Horsthuis.

4.2.1 Trabalhando com cubos, trabalhando com palitos e trabalhando com variáveis contínuas

Para estas atividades os alunos foram divididos em grupos, de três a quatro alunos, sendo que os grupos de três alunos se mostraram mais produtivos.

Figura 12 – Grupo de alunos durante o desenvolvimento da atividade “Trabalhando com cubos”.

Fonte: Fotografia da autora.

Os alunos em grupo receberam três cubos, cada um deles com três estrelas desenhadas em cada face. Para cada questão, o grupo deveria formar a sequência pedida e verificar primeiramente o número de faces visíveis e posteriormente o número de estrelas visíveis, primeiro com um cubo, depois com dois, com três e então encontrar um padrão e formular uma lei matemática que lhe permitisse descobrir o número total de estrelas visíveis para quatro, cinco, seis, sete, oito e *n* cubos. Os alunos descobriram facilmente o padrão de cada sequência, observando logo que se tratava de uma progressão aritmética, (não se lembravam do conceito de P.A. e P.G., porém leram e entenderam a definição apresentada na introdução da atividade). A dificuldade maior foi encontrar a lei de formação. Dois grupos utilizaram a fórmula para encontrar o termo a_n de uma P.A., outros conseguiram chegar à lei de formação através de tentativas e erros ou pela observação de regularidades e dois grupos necessitaram da ajuda da professora.

Para a representação gráfica foi necessário orientá-los a não ligarem os pontos e explicar que por se tratar de grandezas discretas, só faziam parte do gráfico os pontos formados por pares de números naturais.

Na atividade “Trabalhando com palitos”, os alunos deveriam apenas observar uma sequência de triângulos formados com palitos, relacionar o número de triângulos ao número de palitos, encontrar a lei de formação da sequência e verificar qual era o tipo da sequência formada. Não apresentaram maiores dificuldades em realizar esta atividade, pois a proposta de trabalho era parecida com a anterior.

“Trabalhando com variáveis contínuas” apresenta uma situação de aquecimento de um líquido com temperatura inicial de 26º, e que vai aumentando 10º por minuto, até atingir a máxima de 100º. Os alunos deveriam apresentar uma função que modelasse o experimento, classificar a função encontrada em função afim, quadrática ou exponencial, fazer a representação gráfica, calcular o tempo necessário para que o líquido atingisse a temperatura máxima e calcular a temperatura depois de decorrido um determinado tempo. Ao escrever a função nenhum grupo escreveu corretamente o conjunto Domínio e o conjunto Imagem, foi necessário fazer uma intervenção neste momento para explicar-lhes que se tratava de grandezas contínuas e havia um limite inferior e superior para as duas grandezas, portanto os conjuntos Domínio e Imagem eram intervalos do conjunto dos números reais. Foi uma atividade que proporcionou aos alunos a percepção de que a progressão aritmética está relacionada com a função afim, pois a razão na P.A. é equivalente à taxa de crescimento da função afim, e ambas são expressas por uma lei da forma $y = ax + b$.

Ao fazer a representação gráfica do experimento, a professora chamou a atenção dos alunos para o fato de que agora estavam lidando com grandezas contínuas e, portanto, os pontos do gráfico deveriam ser ligados por uma reta, pois a reta é a reunião dos infinitos pontos alinhados que verificam o experimento.

Houve também a necessidade de auxiliar três grupos que não conseguiram calcular a temperatura atingida após seis minutos e quinze segundos, pois não conseguiram representar este tempo na forma de um número decimal ou fracionário ou usar a ideia de proporção para o cálculo.

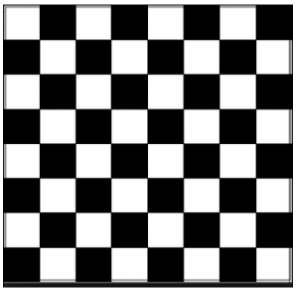
Essas três atividades foram aplicadas em um mesmo dia com duas aulas seguidas. Houve participação de todos os alunos da classe e os objetivos previstos foram parcialmente atingidos, visto que três grupos de uma classe e dois da outra, não conseguiram concluir a última atividade. Os alunos apresentaram satisfação na realização das atividades, mas reclamaram de cansaço mental.

4.2.2 Determinação de leis matemáticas – Progressão Geométrica e função exponencial: A lenda do jogo de xadrez

A atividade "A lenda do jogo de xadrez" foi realizada apenas com a turma A. Os alunos novamente foram divididos em grupos de três. Primeiramente receberam o texto: "A lenda do jogo de xadrez", baseado no conto de mesmo nome, do livro "O homem que calculava", de Malba Tahan. Leram o texto, e em seguida, receberam e desenvolveram a atividade.

De acordo com a lenda, um jovem presenteou um rei com um jogo que ele próprio criou. Com este gesto o jovem esperava amenizar a dor que o rei sentia pela perda do filho, morto em combate. O presente agradou tanto ao rei, que ele insistiu para que o rapaz aceitasse uma recompensa. O jovem então pediu ao rei um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro do jogo, dois grãos pela segunda casa, quatro pela terceira, oito pela quarta e assim por diante, até a sexagésima quarta casa. O rei desdenhou deste pedido, que achou muito insignificante, mas resolveu atende-lo, ordenando aos seus algebristas que calculassem a quantidade de trigo devida ao moço. Qual não foi sua surpresa, quando os algebristas anunciaram que todo o trigo que toda a Índia produzisse por dois mil séculos, não seria suficiente para pagar a recompensa feita ao jovem.

Figura 13 – Tabuleiro do jogo de xadrez.



Fonte: http://veja.abril .com.br

Nesta atividade os alunos deveriam encontrar uma fórmula matemática que expressasse o número de grãos de trigo em função do número da casa do tabuleiro. Para isso, primeiramente preencheram uma tabela que tinha por objetivo, conduzi-los à expressão correta. Depois de encontrar a lei de formação e preencher a tabela, classificaram a sequência encontrada em Progressão Aritmética ou Progressão Geométrica e encontraram o valor da razão. Calcularam o número de grãos de trigo até uma determinada casa através da fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita. Logo após, foram apresentadas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^{x-1}$ para que os alunos as classificassem e construíssem seus gráficos.

As questões apresentadas no trabalho propiciaram aos alunos a relacionar a P.G. com a função exponencial e fazer uma reflexão sobre a representação gráfica de cada uma delas, além de apresentar a translação horizontal do gráfico da função exponencial.

4.3 Investigação de leis matemáticas em jogos, funções e prova por indução

Os professores do ensino médio certamente já ouviram de seus alunos frases parecidas com: "Para que vou usar isto? Não quero estudar algo que não me servirá para nada". Geralmente, elas são rebatidas com outras como: "A matemática está presente em tudo". O aluno olha então para as coisas que estão ao seu redor e não vê, por exemplo, a álgebra, em nenhum daqueles objetos. Os exercícios aqui propostos têm como objetivos: levar os alunos a utilizar a investigação matemática na busca de uma estratégia vencedora em jogos; modelar as situações investigadas através de leis de funções e apresentar a prova por indução das leis matemáticas encontradas. A pretensão deste trabalho é mostrar-lhes que a matemática estudada em sala de aula está presente em cenários que a revelarão somente após uma investigação mais detalhada e apresenta-la através de uma perspectiva, que lhes faça contemplar um pouco da beleza desta ciência e sentir a emoção de provar a veracidade de uma fórmula que eles mesmos deduziram.

Antes de iniciar cada atividade é importante que o professor retome com os alunos os conceitos que serão abordados. Deverá ser dada uma atenção especial à prova por Indução Matemática, pois se trata de um conceito novo para os alunos.

Em cada atividade será entregue uma lista com definições e exemplos para consulta, que são ou não contemplados na atividade, cabe ao grupo verificar qual conteúdo está sendo empregado no trabalho que será desenvolvido.

4.3.1 Jogo: Torre de Hanói

O trabalho com este envolvente jogo encaminha os alunos à construção de um método para resolver problemas a partir da análise de casos mais simples, até chegar a generalizações, mostrando a presença da progressão geométrica nas sequências encontradas (funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$) e relacionando estas sequências com as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ $f(x) = 2^x$ e $h(x) = 2^x -1$. Faz-se também uma comparação entre os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $h(x) = 2^x -1$, além de se retomar os conceitos de ordem de grandeza e propriedades das potências.

A popular torre de Hanói foi inventada pelo matemático francês Edouard Lucas e vendida como brinquedo no ano de 1883. O problema consiste em transferir a torre composta de oito discos para um dos dois bastões livres com a menor quantidade possível de movimentos, um só disco por vez e sem colocar um disco maior sobre um menor (GARDNER,1998, p. 72).

<u>Material:</u>

Jogo composto por três hastes verticais e com uma torre de cinco ou mais anéis em cores variadas, fixadas em uma das hastes em ordem decrescente de tamanho a partir da base.

Observação: existe o modelo triangular da Torre de Hanói em que as hastes estão dispostas em forma de triângulo (Figura 15) e o modelo horizontal em que os bastões são paralelos (Figura 14).

<u>Objetivo do jogo:</u>

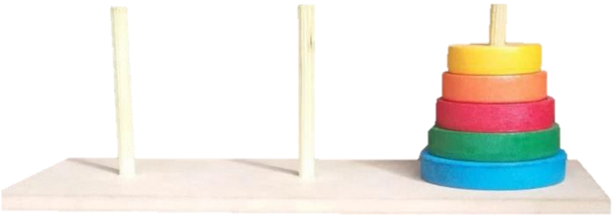
Transferir a torre para uma das outras duas hastes mantendo a ordenação inicial das peças.

<u>Regras:</u>

1) Transferir uma peça por vez;

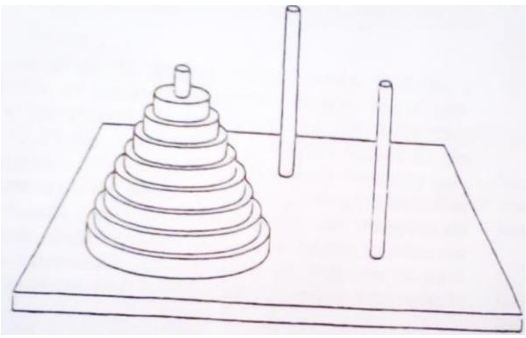
2) Nunca colocar uma peça maior sobre outra menor.

Figura 14 – Modelo horizontal da Torre de Hanói com cinco pinos



Fonte: Elaboração da autora

Figura 15 – Modelo triangular da Torre de Hanói com oito pinos.



Fonte: Revista de Educação Matemática, ano 5, nº 3, 1997, p. 14.

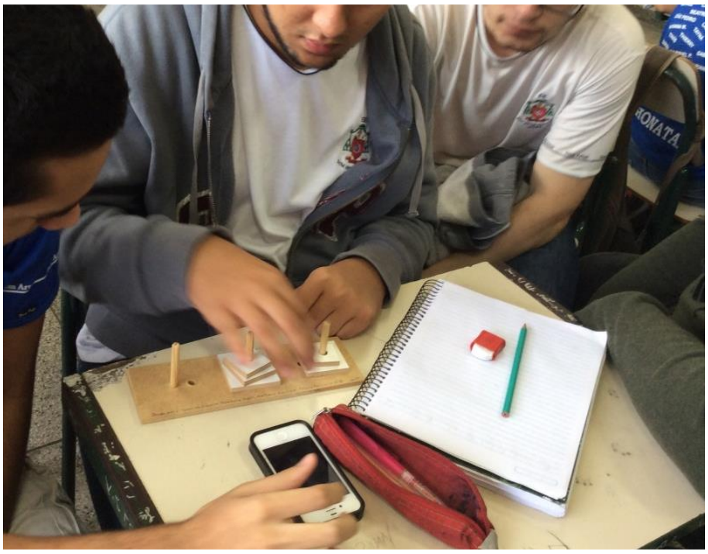
Este jogo foi aplicado com a turma B. Os alunos foram divididos em 10 grupos, alguns com quatro integrantes e outros com três. Seria mais produtivo se fossem divididos em duplas, mas não havia jogos suficientes.

Para se aplicar este trabalho foram necessárias quatro aulas.

No primeiro momento, foi entregue um jogo juntamente com as regras para cada grupo. Depois de jogarem livremente, foi explicado que a jogada ideal para cinco discos seria aquela realizada com o número mínimo de 31 movimentos. Os alunos ficaram muito entusiasmados, a pedido deles foi permitido que usassem o aparelho celular para filmar suas tentativas. Alguns grupos, verificando a dificuldade do jogo, começaram a elaborar estratégias de solução, sendo que, um deles, nomeou as cinco peças e numerou os pinos, depois descreveu as sequências de movimentos até conseguir realizar a tarefa. Os grupos que não estavam conseguindo foram orientados a realizar a jogada primeiro com duas peças, depois com três, quatro, investigando estes casos, para então chegar a cinco peças. Depois desta orientação, a maioria dos grupos conseguiu. Para esta etapa foi estipulado o tempo de uma aula, porém, os grupos que não tinham conseguido atingir o objetivo do jogo, não queriam parar. Assim foi entregue a segunda etapa e eles foram orientados a deixar algum integrante do grupo continuar com as tentativas, enquanto os outros começariam a segunda etapa.

A segunda e terceira etapas do trabalho foram entregues juntas e foram realizadas em uma aula.

Figura 16 – Grupo de alunos entusiasmados com o jogo



Fonte: Fotografia da autora.

Figura 17 – Grupo tentando a jogada com o número mínimo de movimentos

Fonte: Fotografia da autora.

A segunda etapa é um convite à investigação, nela é apresentada a seguinte lenda:

"A descrição original do brinquedo, dizia ser o mesmo uma versão simplificada da torre de Brahma. Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões de diamantes com 64 discos de ouro em um deles, dispostos em ordem decrescente de tamanho. Assim disse aos monges:

Transfiram esta pilha de discos para outro bastão, movendo ininterruptamente um disco de cada vez, e nunca permitindo que um disco fique acima de outro menor. Quando terminarem esta tarefa, e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá a pó, e com um estrondo de trovões o mundo se acabará”.

Depois de contada a lenda perguntou-se aos alunos: “Será que a lenda é verdadeira? Quanto tempo após sua criação o mundo se acabará? Vamos investigar?”.

Em seguida introduziu-se a terceira etapa com uma investigação. Primeiro o grupo preencheu uma tabela (Quadro 1) que relacionava cada valor de n, com o valor de m_n correspondente, sendo n o número de peças a serem movidas e m_n o número mínimo de movimentos para movê-las.

Tabela 1 – Número mínimo de movimentos em função do número de peças

n (número de peças)	m_n **(número mínimo de movimentos)**
1	$m_1 = 1$
2	$m_2 = 3$
3	$m_3 = 7$
4	$m_4 = 15$
5	$m_5 = 31$
6	$m_6 = 63$
7	$m_7 = 127$
...	**...**

Fonte: Elaboração da autora.

Para isto os grupos retomaram o jogo fazendo a contagem dos movimentos. Como o jogo que possuíam tinha apenas cinco peças, os alunos tiveram que encontrar uma estratégia para calcular m_6 e m_7. Todos os grupos conseguiram preencher corretamente a tabela e ficaram entusiasmados para mostrar como tinham feito. Foi solicitado que cada grupo fosse para a frente da sala explicar como chegaram à solução. O primeiro grupo a apresentar ficou um pouco nervoso e explicou que o valor de cada linha era igual ao dobro da anterior mais um. Perguntei se eles sabiam o porquê disto. Responderam que era porque para movimentar uma quantidade de peças qualquer, era necessário passar todas as peças que estavam acima da maior para um dos pinos, transferir a maior para o pino vazio e em seguida passar novamente as outras peças para cima da maior. Não utilizaram estas palavras, mas explicaram através de exemplos na lousa. O segundo grupo a ir para frente da sala, explicou que eles perceberam que em cada etapa o número acrescentado era o dobro do anterior, isto é, da primeira para a segunda linha acrescentam-se dois movimentos, da segunda para a terceira acrescentam-se quatro, e assim por diante, até que da quinta para a quarta linha acrescentam-se 32 e da sexta para a sétima acrescentam-se 64. Os outros grupos não quiseram explicar, pois disseram que seguiram a mesma linha de raciocínio do segundo grupo.

A próxima questão consistia em encontrar uma fórmula de recorrência para o cálculo de m_n. Mesmo tendo usado o raciocínio recursivo na questão anterior, os alunos tiveram problemas para formalizá-lo, apenas um grupo conseguiu responder a questão corretamente. Houve então a necessidade da professora intervir (no caso eu) e na lousa, buscando a participação da classe, chegar à fórmula de recorrência. Esta intervenção foi realizada da seguinte forma:

Professora: - Vamos imaginar a movimentação de cinco peças. Como vocês já haviam notado, primeiro, movemos as quatro primeiras peças com m_4 movimentos, depois movemos a quinta peça com um movimento e depois movemos novamente as quatro primeiras peças para cima da quinta peça com m_4 movimentos, assim, temos $m_5 = 2.m_4 + 1$. Agora vamos generalizar. Suponhamos que vamos mover um número qualquer de peças que representaremos pela letra n, para mover n peças, devemos primeiro mover as peças que estão acima da peça maior. Como podemos representar o número destas?

A esta pergunta um aluno disse que podemos representar com a letra x, a maioria da classe concordou com ele, ao que outros poucos, interferiram e disseram que o correto seria por $n - 1$, pois havia acima da peça maior, uma peça a menos que na torre inteira.

Professora: - Isto mesmo. Então para mover estas $n -1$ peças, necessitaremos de m_{n-1} movimentos. Depois moveremos a peça maior para o pino vazio com um movimento e em seguida moveremos novamente as $n - 1$ peças para cima desta com m_{n-1} movimentos. Assim teremos $m_n = 2.m_{n-1} + 1$ movimentos.

Por último, foi solicitada a representação gráfica dos valores encontrados na tabela.

A maioria dos grupos não ligou os pontos, pois se lembraram da atividade: “Determinação de sequências, leis matemáticas e funções”, onde aprenderam que os gráficos que representam grandezas discretas são constituídos apenas por pontos.

Não foi possível terminar as atividades na mesma aula, por isso no dia seguinte foi entregue a quarta parte: “Sequências e modelagem através de funções”.

Novamente houve o preenchimento de uma tabela.

Tabela 2 – Modelagem do jogo Torre de Hanói

n	m_n	a_n (número de movimentos acrescentados para se obter o próximo valor de m_n)	a_n na forma de potência de base 2
1	1	2	2^1
2	3	4	2^2
3	7	8	2^3
4	15	16	2^4
5	31	32	2^5
6	63	64	2^6
7	127	128	2^7
...	**...**	**...**	**...**
n	---	---------------------	2^n

Fonte: Elaboração da autora

Os alunos facilmente perceberam que os números da terceira coluna eram iguais aos da segunda somados uma unidade.

Esta tabela foi elaborada a partir da tabela apresentada por Grando (1997, p. 15), porém, em razão do relato da autora sobre uma dificuldade muito grande em relacionar os números encontrados na terceira coluna com as respectivas potências de 2, foi acrescentada a quarta coluna, para que os grupos conseguissem realizar a tarefa com a mínima interferência da professora. Ainda assim houve dificuldades, os integrantes dos grupos discutiam entre si sobre o que seria potência de base dois. Alguns tentavam representar a potência com o número dois no expoente, mas percebiam que os resultados não correspondiam com os valores representados. A maioria conseguiu descobrir, porém houve necessidade de intervenção apenas em dois grupos.

Após preencher a tabela os alunos responderam questões que os levaram a comparar os valores da tabela até chegarem a duas leis matemáticas, a primeira, que fornece a_n em função de n e a segunda que fornece m_n em função de n. A primeira questão foi: “Existe alguma relação entre as potências de base 2 da quarta coluna e os valores de n da primeira coluna? Explique”.

Com a tabela e as questões, ficou mais fácil para os alunos encontrarem as fórmulas. Os alunos mostraram satisfação ao encontrar a fórmula, isto mostra a importância deste trabalho para despertar o gosto pela matemática nos jovens.

Na próxima questão, calcularam o número mínimo de movimentos para uma jogada com dez peças utilizando a fórmula encontrada.

Se o professor estiver trabalhando com o oitavo ano do Ensino Fundamental, as atividades podem ser encerradas aqui e o professor, posteriormente, fará a devolutiva dos trabalhos corrigidos para a classe.

Na sequência com o Ensino Médio, os grupos analisaram a sequência obtida na terceira coluna, verificando se os termos formavam uma P.A. ou uma P.G. e determinaram o valor da razão. Depois classificaram a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2^x$, em função afim, quadrática ou exponencial e construíram seu gráfico e o gráfico da função h: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = 2^x - 1$, para em seguida compararem as leis e os gráficos destas duas funções. Nesta comparação puderam verificar que ao subtrair uma unidade em f(x), seu gráfico sofre uma translação vertical de uma unidade para baixo.

A quinta e a sexta etapas foram realizadas no dia seguinte com duração de uma aula. A primeira trata-se da Prova por Indução Matemática. Ao ser entregue esperou-se que os alunos lessem, refletissem e resolvessem o primeiro passo. O segundo passo foi resolvido pela professora na lousa com a participação da classe, do seguinte modo:

Queremos provar que o número mínimo de movimentos (m_n) para mover as n peças de um pino para outro seguindo as regras do jogo é $m_n = 2^n - 1$.

1) Verifique que a fórmula é válida para n = 1 e n = 2:

$m_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ (V)

$m_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ (V)

Logo, a fórmula é válida para n = 1 e n = 2.

2) Uma vez constatada a veracidade da fórmula para n = 1 e n = 2, suponha, que m_n seja verdadeira para algum n natural, isto é, $m_n = 2^n - 1$ e prove que a fórmula vale para m_{n+1}.

Usando a lei de recorrência, temos:

$m_n = 2.m_{n-1} + 1$ e $m_{n+1} = 2.m_n + 1$

Por hipótese de indução $m_n = 2^n - 1$, logo:

$m_{n+1} = 2.(2^n - 1) + 1 = 2.2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

Portanto, a fórmula vale para n + 1, e pelo método da indução finita (que foi visto no cap. 2), fica provado que o número mínimo de movimentos para mover n peças seguindo as regras do jogo é dado por $m_n = 2^n - 1$.

Na sexta e última parte foi realizado um trabalho com ordem de grandeza. Para seu desenvolvimento, basta o conhecimento das propriedades das potências e das quatro operações básicas.

Contou-se aos alunos a seguinte lenda:

Dizem os sábios que o mundo foi criado há quatro bilhões de anos aproximadamente. Supondo que os monges, desde a criação, estejam movendo os discos na razão de um disco por segundo, quanto tempo ainda falta para o mundo acabar?
Dado: 2^{64} = 18 446 744 073 709 551 616.

Segundo a lenda, quando acabar, o mundo terá
$2^{64} - 1$ segundos = 18 446 744 073 709 551 617, aproximando para menos,
$2^{64} - 1$ segundos = 18 000 000 000 000 000 000 = $18x10^{18}$ segundos.

O ano possui 365x24x60x60 = 31 536 00 segundos, aproximando para mais, $32x10^{6}$ segundos. Assim, quando acabar, a idade do mundo em anos será de:
$18x10^{18} \div 32x10^{6} = 0{,}5625x10^{12} = 5{,}625x10^{11}$ anos (aproximando para menos) então $5x10^{11}$ = 500 000 000 000 anos, isto é 500 bilhões de anos. Como o mundo foi criado há quatro bilhões de anos, faltam mais de 406 bilhões de anos para o mundo se acabar. Podemos ficar tranquilos.

Os alunos tentaram resolver a questão utilizando calculadora simples e enquanto uns reclamavam que era impossível, pois os números não cabiam no visor, outros poucos tentavam calcular manualmente, foi quando a professora interveio dando a ideia de usarem aproximações e potências de 10. Ainda assim foram necessárias muitas explicações na lousa. A experiência foi válida, já que permitiu uma revisão das potências e mostrou a necessidade do conhecimento anterior e de suas propriedades. Ao aplicar esta atividade, o professor pode optar por trabalhar com calculadora científica, no entanto, se os alunos não souberem representar um número utilizando a potência de 10, não lhes fará sentido os símbolos apresentados pela calculadora.

4.3.2 Jogo: Salto de rã

Este é um jogo pouco conhecido e também bastante envolvente. Necessita de muita concentração e da mobilização do raciocínio lógico e estratégico por parte do jogador. Para a elaboração de uma estratégia de vitória, se torna necessário partir da análise de casos mais simples com um tabuleiro de cinco casas, seguido pelo jogo com tabuleiro de sete casas, depois com nove casas, para depois se chegar ao jogo mais complexo (com onze casas ou mais no tabuleiro). Pode-se aplicá-lo com a intenção de investigação, busca de generalização do número mínimo de jogadas, verificação da validade da fórmula encontrada (através do método de indução matemática), estudo da função polinomial do segundo grau ou simplesmente como um passatempo matemático.

Neste trabalho, procuraremos abordar na medida do possível, todos os temas listados acima, incluindo as transformações no gráfico da função $f(x) = x^2$ para a obtenção do gráfico da função $h(x) = (x+1)^2 - 1$, que são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ esta última relacionada com a progressão aritmética de segunda ordem que aparece na atividade e é uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.

Devido aos conteúdos tratados, as atividades aqui presentes são indicadas principalmente para o primeiro ano do Ensino Médio, durante ou após o trabalho com funções do segundo grau e após já ter concluído o estudo com progressões aritméticas e progressões geométricas.

Se o professor julgar necessário, poderá fazer uma revisão dos principais conceitos envolvidos.

Estima-se que para aplicar este trabalho sejam necessárias quatro aulas.

Os alunos devem ser divididos em grupos de dois ou três. Cada grupo receberá o material que pode ser confeccionado por eles mesmos com cartolina e tampas de garrafa.

Material:

1) Tabuleiro com número ímpar de casas numeradas.

2) Número par de peças, uma a menos que o número de casas, divididas em dois grupos de mesma quantidade e cores diferentes.

Objetivo do jogo:

Trocar os grupos de peças de lugar.

Regras:

1) Os movimentos feitos pelas peças serão denominados como passos e pulos;

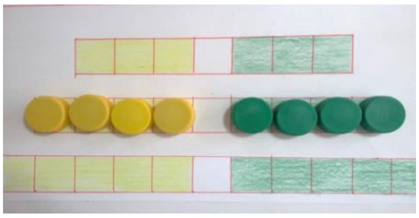
2) Um passo é o movimento onde uma peça ocupa a casa vazia à frente;

3) Um pulo é o movimento onde uma peça “pula” por cima de uma peça vizinha do outro grupo, ocupando a casa após ela;

4) Não é permitido pular duas peças ou mais, como também não é permitido pular para trás.

Comece o jogo com o tabuleiro de sete casas. Em seguida jogue com o tabuleiro de nove casas, até chegar ao tabuleiro de onze casas.

Figura18 - Tabuleiro múltiplo, com sete, nove e onze casas.



Fonte: Elaboração da autora.

Nos primeiros trinta minutos da primeira aula, entregar o material juntamente com as regras e deixar os alunos jogarem livremente. Nos vinte minutos restantes entregar as outras questões juntamente com a lista de conteúdos para pesquisa.

A primeira etapa consta do preenchimento de uma tabela para investigação:

Tabela 3 – Modelagem do jogo Salto de Rã

Tipo de tabuleiro	**n (Número de peças por grupo)**	**m_n (Número mínimo de movimentos)**	**a_n (Número de movimentos acrescentados para se obter o próximo valor de m_n)**
3 casas	**1**	3	5
5 casas	**2**	8	7
7 casas	**3**	15	9
9 casas	**4**	24	11
11 casas	**5**	35	13
13 casas	**6**	48	15
15 casas	**7**	63	17

Fonte: Elaboração da autora.

Para a segunda etapa devem ser destinadas três aulas. Nesta etapa, serão trabalhadas modelagem, sequências, funções, prova por indução matemática e representação gráfica.

Nas duas primeiras questões os alunos deverão analisar os números da terceira e quarta colunas, verificando se formam uma progressão aritmética, uma progressão geométrica ou nenhuma dessas opções, justificando e dando o valor da razão se houver.

Na terceira questão os alunos deverão encontrar uma fórmula matemática para expressar a_n em função de n. Para isto, são orientados a usar a fórmula do termo geral da P.A..

A quarta questão é a mais complexa, consiste em encontrar uma lei matemática que expresse o número de movimentos m_n em função de n. Exige investigação e conhecimento matemático. Por isso é sugerido que o professor trabalhe em conjunto com a classe para resolvê-la. Abaixo é dada a resolução de acordo com Menezes (2008). Em seguida há uma adaptação da mesma, proposta para ser encaminhada pelo professor com a participação da classe.

A atividade pode ser descrita para os alunos do seguinte modo:

Vamos analisar os movimentos para dois grupos de n peças cada um, de cores amarela e verde, com um tabuleiro de 2n + 1 casas:

Na primeira jogada tem-se apenas uma opção, que é dar um passo com a primeira peça de qualquer dos dois grupos. Supondo que o jogo foi iniciado com um passo com a primeira peça amarela, na segunda jogada são duas as opções de movimentos: ou pular com uma peça verde ou dar outro passo com uma amarela. No último caso, isto é, se for dado um passo com a próxima peça amarela para junto da anterior, o jogo chegará a um impasse: a peça verde não poderá pular sobre as duas amarelas, a jogada possível será mover a terceira amarela para junto das duas primeiras. Sucessivamente, todas as peças amarelas darão um passo sem poder mover nenhuma verde, o que levará à condição de jogo perdido. Portanto a primeira opção é a possível, isto é, a segunda jogada deverá ser: pular com uma peça verde.

Para a próxima jogada, se mover uma peça da cor contrária à movida anteriormente, qualquer movimento seguinte agrupará duas peças de mesma cor, levando a novo impasse. Assim, a peça a ser movida deverá ser de mesma cor. Todas as peças de outra cor que puderem darão pulos. Esse raciocínio vai continuar até que todas as n peças de um grupo possam dar pulos. Para o restante do jogo, procede-se assim: para a próxima jogada, a única opção possível é que a peça de cor contrária dê um passo e as outras, de mesma cor após ela deem pulos. Esse raciocínio continuará até que todas as n peças de um grupo possam dar pulos. Para o restante do jogo, procede-se da seguinte maneira: para a próxima jogada a peça de cor contrária dá um passo e as outras, de mesma cor, após ela, dão pulos. Esse raciocínio levará o jogo à posição requerida no objetivo.

Vamos descrever a sequência de jogadas da primeira etapa, isto é, até que todas as n peças de um grupo deem pulos. Observa-se que a peça amarela dando um passo, a verde dará um pulo; a próxima peça de mesma cor dá um passo, duas de cor contrária darão pulos; segue-se este raciocínio sendo que, após uma peça dar um passo, as peças de cor contrária darão um pulo a mais que no caso anterior até o número máximo de n pulos. Assim, indicando um passo por Pa e um pulo por Pu, o número de jogadas da primeira etapa será:

1Pa + 1Pu + 1Pa + 2Pu + 1Pa + 3Pu + 1Pa + 4Pu + 1Pa + 5Pu + 1Pa + ... + 1Pa + nPu.

Isto é:

$$nPa + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n)Pu$$

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A., temos:

$$nPa + \left[\frac{(1+n).n}{2}\right]Pu = nPa + \left(\frac{n^2+n}{2}\right)Pu$$

Portanto, o número mínimo de jogadas da primeira etapa é:

$$nPa + \left(\frac{n^2+n}{2}\right)Pu.$$

Para o restante do jogo, quando a única peça que pode se mover dá um passo, as outras (n – 1) de mesma cor dão pulos, apenas uma peça de cor contrária dará um passo e as outras de sua cor darão pulos, de modo que o número de movimentos nesta etapa será:

$$1Pa + (n-1)Pu + 1Pa + (n-2)Pu + \ldots + 1Pa + 1Pu + 1Pa.$$

Isto é:

$$nPa + [\,(n - 1) + (n - 2) + \ldots + 1]Pu =$$

Entre colchetes temos a soma dos (n – 1) termos da P.A. cujo primeiro termo é (n – 1) e o último termo é 1. Aplicando a fórmula da soma desses termos,

$$= \ nPa + \left\{\frac{[(n-1)+1](n-1)}{2}\right\}Pu =$$

$$= nPa + \left[\frac{n.(n-1)}{2}\right]Pu =$$

$$= \ nPa + \left(\frac{n^2-n}{2}\right)Pu$$

Somando o número mínimo de movimentos das duas etapas, temos:

$$nPa + \left(\frac{n^2+n}{2}\right)Pu + nPa + \left(\frac{n^2-n}{2}\right)Pu = 2nPa + \frac{2n^2}{2}Pu = 2nPa + n^2Pu$$

Como um passo ou um pulo são movimentos, o número mínimo de movimentos do jogo será obtido somando o número de passos com o número de pulos, que dará: $2n + n^2$ movimentos.

Observe que aumentando em uma unidade o número de peças de cada grupo, aumentará 1Pa + (n + 1)Pu na primeira etapa do jogo e, na segunda etapa, aumentará 1Pa + nPu, totalizando um aumento de 2Pa + (2n + 1)Pu, o que corresponde a um acréscimo de 2n + 3 movimentos.

Outra resolução:

Professor: - Vamos analisar os movimentos para uma quantidade qualquer de peças que chamaremos de n. Para isto, primeiro observaremos o que ocorre em jogo com cinco peças por grupo, e imaginar como ficaria se fossem n peças.

O professor explica que vai dividir o jogo em duas partes, e na lousa desenha duas tabelas (Tabela 4 e Tabela 5) para a primeira parte, um para o jogo com cinco peças e outro para o jogo com n peças.

Através de um cartaz de pregas fixado na lousa e dez palitos de sorvetes, cinco amarelos e cinco verdes, o professor vai realizando os movimentos, enquanto um aluno vai anotando no quadro e os outros vão realizando os movimentos nos seus tabuleiros, acompanhando o professor para que não haja erros.

Professor: - Para facilitar as anotações, vamos representar um passo por Pa e um pulo por Pu.

A explicação da sequência de movimentos não será repetida aqui, pois é a mesma apresentada na resolução anterior. Começamos com um passo do primeiro grupo, seguido de um pulo e um passo do segundo, na sequência vem dois pulos e um passo do primeiro, três pulos e um passo do segundo, seguindo assim com quantidades de pulos crescente acompanhados por um passo do mesmo grupo. A primeira parte termina quando um dos grupos dá cinco pulos e não tem como dar um passo em seguida.

Tabela 4 – Tabela para cinco peças em cada grupo – primeira parte.

Grupo amarelo	**Grupo verde**
1Pa	1Pu, 1Pa
2Pu, 1Pa	3Pu, 1Pa
4Pu, 1Pa	5Pu

Fonte: Elaboração da autora.

Com n peças, temos a repetição do caso anterior, começando com um passo de um grupo e um número crescente de pulos seguidos por um passo do mesmo grupo em cada jogada. A primeira parte termina quando um dos grupos dá seus n pulos.

Tabela 5 – Tabela para n peças em cada grupo – primeira parte.

Grupo amarelo	**Grupo verde**
1Pa	1Pu, 1Pa
2Pu, 1Pa	3Pu, 1Pa
4Pu, 1Pa	5Pu, 1Pa
6Pu, 1Pa	7Pu, 1Pa
...	...
nPu	

Fonte: Elaboração da autora.

Para continuar o jogo com cinco peças, a única jogada possível é um passo seguido por quatro pulos do mesmo grupo. Um passo do outro seguido por três pulos, e assim sucessivamente, cada grupo dando um passo e um número de pulos em ordem decrescente, até terminar em um passo, um pulo e um passo.

Tabela 6 – Tabela para cinco peças em cada grupo – segunda parte.

Grupo amarelo	Grupo verde
1Pa, 4Pu	1Pa, 3Pu
1Pa, 2Pu	1Pa, 1Pu
1Pa	

Fonte: Elaboração da autora.

Seguindo o mesmo raciocínio para n peças, obtemos a Tabela 7.

Tabela 7 – Tabela para n peças em cada grupo – segunda parte.

Grupo amarelo	Grupo verde
1Pa, (n – 1)Pu	1Pa, (n – 2)Pu
1Pa, (n – 3)Pu	1Pa, (n – 4)Pu
...	...
1Pa, 3Pu	1Pa, 2Pu
1Pa, 1Pu	1Pa

Fonte: Elaboração da autora.

Para o cálculo de m_n, faremos a soma dos movimentos da primeira e da segunda etapa para n peças, da mesma forma como foi feito na primeira resolução e encontrando $m_n = n^2 + 2n$ e $a_n = 2n + 3$.

Agora será empregado o método de indução matemática, para provar que realmente $m_n = n^2 + 2n$.

É fácil constatar que a fórmula vale para n =1 e para n = 2, pois:

$$m_1 = 1^2 + 2.1 = 3 \text{ e, } m_2 = 2^2 + 2.2 = 8$$

Supondo agora que a fórmula valha para um valor qualquer de n, com n natural, vamos provar que vale também para n + 1. Já vimos que o acréscimo de uma unidade em n, provoca um aumento de 2n + 3 unidades no valor de m_n, isto é:

$$m_{n+1} = n^2 + 2n + 2n + 3 \qquad (1)$$

Utilizando o método de completar quadrados em (1), vem:

$$m_n = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 - 1 = (n + 1)^2 + 2n + 2 = (n + 1)^2 + 2(n + 1). \qquad \blacksquare$$

Uma proposta de atividade para os grupos é a análise da existência das funções apresentadas, verificando se são funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Em seguida poderão fazer o estudo da função $m(x) = x^2 + 2x$, encontrando suas raízes, as coordenadas do vértice, a escrita na forma canônica e a análise sobre a translação de gráficos.

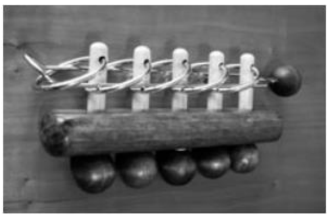
4.3.3 Jogo dos Anéis Chineses

Este é um jogo muito interessante e antigo. De acordo com Santos, Neto e Silva (Coleção Jogos com História, n.7, 2007) há referências a este quebra cabeça no manuscrito de Luca Pacioli (1445 – 1517) "De Viribus Quantitatis" (O poder dos números), produzido por volta de 1500 e nunca publicado, este manuscrito é considerado a primeira obra dedicada exclusivamente à Matemática Recreativa.

A atividade para a exploração deste jogo preparada nesta dissertação utiliza a fórmula de recorrência e a prova por indução. No entanto, o professor poderá optar também por um estudo da função exponencial e da construção dos gráficos através de transformações no gráfico de $y = 2^x$.

Será apresentada aqui uma descrição do jogo segundo Santos, Neto e Silva (2007). O número de anéis pode variar para as diferentes versões do jogo. A Figura 8 apresenta um jogo com cinco anéis na sua posição inicial.

Figura 19 – Jogo dos anéis chineses



Fonte: Matemática Recreativa + *Puzzle* Anéis Chineses – 2007

Para a aplicação da atividade, os alunos serão divididos em duplas ou grupos de três, dependendo da quantidade de jogos disponíveis. Na primeira aula, será entregue um jogo e uma folha contendo as regras. É importante deixar que os alunos explorem o quebra-cabeça e tentem resolvê-lo por pelo menos meia hora.

<u>Material:</u>

Jogo composto por 5 hastes e 5 anéis.

<u>Objetivo do jogo</u>:

Retirar a estrutura de metal presa pelos anéis.

<u>Regras</u>:

Um anel é considerado solto se estiver abaixo da estrutura metálica, caso contrário está preso.

Considerando-se os anéis da esquerda para a direita, sendo o primeiro anel aquele mais à esquerda,

1) O primeiro anel pode soltar-se e prender-se em qualquer etapa do jogo.

2) Um outro anel só se solta/prende se o anel imediatamente à sua esquerda estiver preso e os demais da esquerda estiverem soltos.

Com base nas informações dadas, tente libertar todos os anéis.

Em seguida será entregue uma lista de atividades e explicações com o objetivo de levar o aluno a entender o processo de obtenção da relação de recorrência que fornece o número mínimo de movimentos para um jogo com n anéis.

Primeiramente, ele deverá preencher uma tabela (tabela 8), com o número mínimo de movimentos obtidos durante a realização do jogo com um, dois e três anéis.

Tabela 8 – Tabela do número mínimo de movimentos em função do número de anéis.

n **(Número de anéis)**	m_n **(Número mínimo de movimentos)**
1	1
2	2
3	5

Fonte: Elaboração da autora.

Depois, usando os dígitos 0 e 1 para representar as posições dos anéis, sendo que 1 indica um anel preso e 0 indica um anel solto, os alunos deverão descrever os passos para soltar três, quatro e cinco anéis.

A sequência da resolução está descrita abaixo.

Passos para a soltura de três anéis utilizando os dígitos binários:

Posição inicial: 111.

011- 010 - 110 - 100 - 000 (cinco movimentos).

Passos para resolver um jogo com quatro anéis:

Posição inicial: 1111.

1) Soltar os dois primeiros anéis para libertar o último:

1011 – 0011- 0010.

2) Para libertar o terceiro anel, precisamos colocar os dois primeiros, soltar o primeiro e depois soltar o terceiro:

1010 – 1110 – 0110 – 0100.

3) Para terminar, colocamos o primeiro, libertamos o segundo e libertamos o primeiro:

1100 – 1000 – 0000.

Portanto, os passos para a soltura de quatro anéis são:

1011 – 0011 – 0010 – 1010 – 1110 – 0110 – 0100 – 1100 – 1000 – 0000 (10 movimentos).

Passos para resolver um jogo com cinco anéis:

Posição inicial 11111.

1) Para soltar o quinto anel, o quarto deve estar preso e os três primeiros soltos:

111.

011- 010 – 110 – 100 – 000 (cinco movimentos).

Ficamos com 00011, que passamos para 00010 (um movimento).

2) Prendemos os três primeiros:

000.

100 – 110 – 010 – 011 – 111 (cinco movimentos).

Ficamos com 11110.

3) Para soltar os outros quatro anéis, repetimos todos os procedimentos para um jogo com quatro anéis já descrito anteriormente (10 movimentos). No total teremos 5 + 1 + 5 + 10 = 21 movimentos.

01111 – 01011 – 11011 – 10011 – 00011 – 00010 – 10010 – 11010 – 01010 – 01110 – 11110 - 10110 – 00110 – 00100 – 10100 – 11100– 01100 – 01000 – 11000 – 10000 – 00000 (21 movimentos).

Podemos perceber que a resolução é um conjunto de sub – resoluções progressivamente mais simples e que cada sub – resolução é similar ao problema principal. Isto nos leva a usar a recorrência na contagem do número mínimo de movimentos.

Chamaremos de M_n o número mínimo de movimentos para mover n anéis. Já sabemos que:

$M_1 = 1$, então 1 movimento para soltar um anel e $M_2 = 2$, então 2 movimentos para soltar 2 anéis.

Veja, para um problema com *n* anéis, teremos que primeiro libertar o último, mas para isto é necessário fazer vários movimentos até se chegar em 0000...0011 (com n – 2 zeros), isto é, é preciso libertar n – 2 anéis e para libertar n – 2 anéis, são necessários M_{n-2} movimentos. Neste momento soltamos o último anel com um movimento e obtemos: 0000...0010.

Para continuar, torna-se necessário prender todos os n - 2 anéis para poder soltar o penúltimo, sendo necessário mais M_{n-2} movimentos e ficando com 111...110 (n – 1 algarismos uns). Neste momento, o jogo se torna um jogo menor, de n – 1 anéis, cuja resolução necessitará de M_{n-1} movimentos.

Logo, o número mínimo necessário de movimentos para soltar n anéis será:
$M_n = M_{n-2} + 1 + M_{n-2} + M_{n-1}$.

Simplificando a expressão e juntando os casos triviais, obtemos a seguinte relação de recorrência: $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_n = M_{n-1} + 2.M_{n-2} + 1$.

Utilizando a relação de recorrência encontrada, os alunos deverão calcular o número mínimo de movimentos para se libertar 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 anéis.

Podemos observar que o número de movimentos necessários para resolver o jogo, aumenta muito depressa. Por exemplo, para um jogo de 20 peças são necessários 699 050 movimentos e para trinta anéis seriam precisos 715 827 882 movimentos. Este fato nos leva a considerar que M_n pode ser modelado através de uma função exponencial. (A função que apresenta crescimento rápido).

Existem formas de resolver essas expressões de recorrência, mas estas não serão tratadas aqui. Desenvolvendo as expressões de recorrência dadas chega-se ao termo geral:

$$M_n \text{ (com n par)} = \frac{2^{n+1}-2}{3}.$$

$$M_n \text{ (com n ímpar)} = \frac{2^{n+1}-1}{3}.$$

Segue abaixo a prova da validade das fórmulas acima através do método de indução matemática.

Podemos verificar facilmente que as fórmulas valem para n = 1 e n = 2.

$$M_1\text{(n é ímpar)} = \frac{2^{1+1}-1}{3} = \frac{2^2-1}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$M_2\text{(n é par)} = \frac{2^{2+1}-2}{3} = \frac{2^3-2}{3} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Supondo que a fórmula valha para um n natural qualquer, isto é, que

$$M_n \text{ (com n par)} = \frac{2^{n+1}-2}{3}$$

$$M_n \text{ (com n ímpar)} = \frac{2^{n+1}-1}{3}$$

vamos mostrar que vale para n + 1:

Pela fórmula de recorrência:

$$M_n = M_{n-1} + 2.M_{n-2} + 1$$

$$M_{n+1} = M_n + 2.M_{n-1} + 1$$

Considerando n par, temos n-1 e n+1ímpares, assim por hipótese de indução:

$$M_{n+1} = \frac{2^{n+1}-2}{3} + 2.\frac{2^n-1}{3} + 1 = \frac{2^{n+1}-2}{3} + \frac{2.2^n-2}{3} + 1 = \frac{2^{n+1}-2}{3} + \frac{2^{n+1}-2}{3} + \frac{3}{3} =$$

$$= \frac{2.2^{n+1}-1}{3} = \frac{2^{n+2}-1}{3}. \qquad \blacksquare$$

4.3.4 A pizza de Steiner

Com esta atividade espera-se principalmente que os alunos pratiquem a prova por indução finita e, além disso, reforcem a aprendizagem da soma dos *n* primeiros de uma progressão aritmética e do cálculo com expressões algébricas, como por exemplo, o complemento de quadrados.

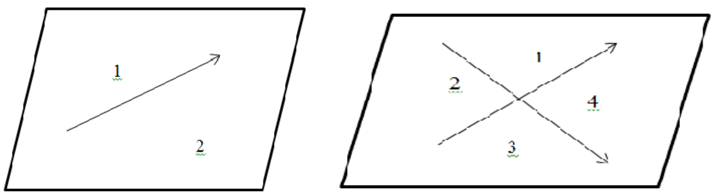
Algumas das questões aqui formuladas possivelmente necessitarão da intervenção do professor em sua resolução. Torna-se necessário que este esteja atento às dúvidas que estão surgindo e encaminhe a resolução na lousa com a participação da classe.

A atividade começa com uma pergunta: “Qual é o número máximo de partes em que *n* retas podem dividir um plano?”.

Para responder a questão é proposta uma investigação partindo da construção de modelos para os casos mais simples e da organização dos dados em tabelas.

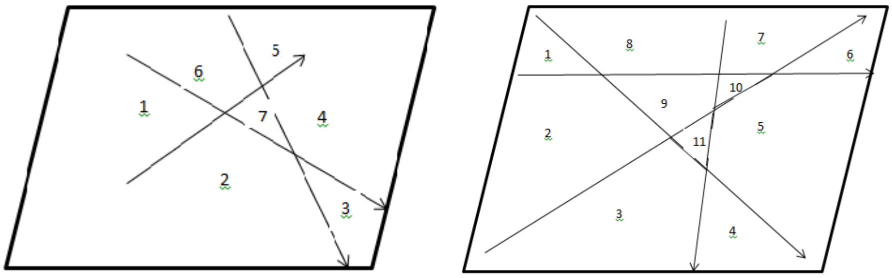
Ao construir o modelo com duas ou mais retas, o estudante deve atentar-se para o fato de que deverá obter o número máximo de regiões, assim as retas devem estar posicionadas de forma a garantir este fato, isto é, sempre que se acrescentar uma nova reta esta deve intersectar todas as demais, nunca passando pelos pontos de intersecção das retas já existentes. O professor pode colaborar questionando sobre a posição das retas e pedindo que alunos venham até a lousa desenhar um modelo que satisfaça as condições apresentadas no problema.

Figura 20: Planos seccionados por uma reta (esquerda) e por duas retas (direita).



Fonte: Elaboração da autora.

Figura 21: Planos seccionados por três retas (esquerda) e por quatro retas (direita).



Fonte: Elaboração da autora.

A próxima observação é sobre o número de regiões em cada caso. Para facilitar propõe-se organizar os dados obtidos em uma tabela.

Tabela 9: Número de regiões em função do número de retas e número de regiões acrescentadas.

n (número de retas)	**R_n (número de regiões em que o plano foi dividido)**	**a_n (número de novas regiões geradas com o acréscimo de uma reta)**
1	2	---
2	4	2
3	7	3
4	11	4
5	16	5
6	22	6
7	29	7

Fonte: Elaboração da autora.

A questão três chama a atenção dos alunos para o fato de que ao acrescentar-se a segunda reta, o número de regiões aumenta em duas unidades; ao acrescentar-se a terceira reta, o número de regiões aumenta em três unidades; ao acrescentar-se a quarta reta o número de regiões aumenta em quatro unidades; e assim por diante; ao acrescentar-se a enésima reta o número de regiões aumentará em n unidades.

Elaborando a equação de recorrência para o cálculo do número máximo de regiões (R_n) com n retas temos: $R_1 = 2$ e $R_n = R_{n-1} + n$.

É interessante chamar a atenção dos alunos para o fato de que os valores de n e de a_n apresentados na tabela, formam uma progressão aritmética de razão um e que os valores de R_n, formam uma progressão aritmética de segunda ordem, isto é, uma sequência em que as diferenças entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior, formam uma progressão aritmética.

A etapa do trabalho que comumente os alunos encontram mais dificuldade é encontrar a fórmula matemática que fornece o número máximo de regiões em função de n, portanto é importante que o professor esteja preparado para lhes fornecer a ajuda necessária.

$$R_n = 2 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 1 + \frac{n^2 + n}{2}$$

Assim o número máximo de regiões em que n retas dividem o plano, é dado por:

$$1 + \frac{n^2 + n}{2}.$$

Pode-se verificar facilmente a validade da fórmula encontrada para n = 1, 2, 3, 4, mas é impossível testá-la para todos os valores de n, pois estes são infinitos. Assim, a certeza de que a fórmula valerá para todo valor de n será dada através da prova pelo método de indução finita, que segue abaixo:

A fórmula vale para n = 1 e n = 2, pois:

$R_n = \frac{n^2+n}{2} + 1$

$R_1 = \frac{1^2+1}{2} + 1 = \frac{1+1}{2} + 1 = \frac{2}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$ (V).

$R_2 = \frac{2^2+2}{2} + 1 = \frac{4+2}{2} + 1 = \frac{6}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$ (V).

Supondo agora que a fórmula valha para um n natural qualquer, isto é:

$R_n = \frac{n^2+n}{2} + 1$. Mostremos que vale para n + 1:

Utilizando a fórmula de recorrência para n + 1, temos, $R_{n+1} = R_n + n + 1$.

Pela hipótese de indução

$$R_{n+1} = \frac{n^2+n}{2} + 1 + n + 1$$

$$R_{n+1} = \frac{n^2+n+2+2n+2}{2} = \frac{n^2+2n+1+n+2+2-1}{2}$$

$$R_{n+1} = \frac{(n+1)^2+n+1+2}{2} = \frac{(n+1)^2+n+1}{2} + \frac{2}{2} =$$

$$R_{n+1} = \frac{(n+1)^2+n+1}{2} + 1. \qquad \blacksquare$$

5 OBSERVAÇÕES SOBRE OS JOGOS TORRE DE HANÓI E ANÉIS CHINESES

Existem curiosidades interessantes que podem ser observadas nestes dois jogos e que valem a pena serem relatadas.

5.1 Códigos Gray e o jogo dos Anéis Chineses

A sequência de resolução dos anéis chineses gera uma lista de números binários.

Veja novamente a lista para resolução de um jogo com cinco anéis:

11111 – 01111 – 01011 – 11011 – 10011 – 00011 – 00010 – 10010 – 11010 – 01010 – 01110 – 11110 – 10110 – 00110 – 00100 – 10100 – 11100 – 01100 – 01000 – 11000 – 10000 – 00000.

Esta sequência tem uma propriedade interessante, cada número difere do anterior e do seguinte por apenas um dígito. Por exemplo, 01111 difere do número anterior 11111 apenas pelo primeiro dígito e difere do número 01011 apenas pelo terceiro dígito.

Segundo Santos, Neto e Silva (2007, p. 48), na matemática e na informática, este tipo de sequência designa-se por código Gray, cujo nome deriva do investigador Frank Gray, que inventou um método que usava este tipo de sequência em 1947, e que são úteis até hoje em diversas áreas como, por exemplo, em algoritmos de conversão e correção de dados utilizados em telecomunicações.

5.2 Estratégias para a resolução do jogo Torre de Hanói

É possível traçar estratégias de vitória para resolver o jogo com o número mínimo de movimentos. Durante a aplicação da atividade proposta nesta dissertação alguns grupos numeraram as peças e anotaram as jogadas traçando um plano de resolução. Esta é uma atitude louvável, pois a iniciativa de encontrar uma estratégia de jogo partiu dos próprios alunos. Citando Hellmeister e Druck (2004, p. 4), "... é preciso incentivar o aluno a formular novos problemas, a tentar resolver questões "do seu jeito". O espaço para tentativa e erro é importante para desenvolver familiaridade com o raciocínio matemático e o uso adequado da linguagem". No entanto o professor deve tomar o cuidado de nunca lhes fornecer, ou permitir que encontrem por outros meios, a resposta pronta, depois de descoberta uma técnica de resolução o jogo deixa de ser um desafio e perde o encanto.

Será mais fácil encontrar uma estratégia de resolução se for utilizado o tabuleiro em que as hastes são dispostas na forma triangular (Figura 23).

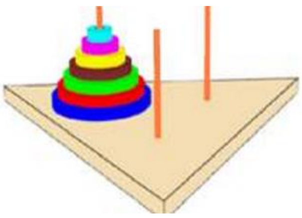
"É interessante notar que se os discos forem numerados em série, os discos ímpares e os discos pares terão direções opostas em torno do triângulo" (GARDNER, 1998, p. 72). Seguindo esta regra fica fácil resolver o jogo. Uma opção para trabalhar com a descoberta de estratégias é pedir aos alunos para que construam uma simulação do jogo, com as hastes representadas por pontos dispostos em forma triangular e as peças pares e ímpares com cores diferentes e confeccionadas em cartolina (Figura 22).

Figura 22: Jogo Torre de Hanói confeccionado em cartolina

Fonte: Elaboração da autora.

Outra estratégia interessante apontada por Gardner (1998, p. 72), é a seguinte: com as hastes dispostas em forma triangular, a peça menor é transferida em toda jogada alternada, sempre na mesma direção em volta do triângulo. Nas jogadas intercaladas deve-se fazer a única transferência possível, que não seja a da peça menor.

Figura 23: Forma triangular do jogo Torre de Hanói com 7 discos.

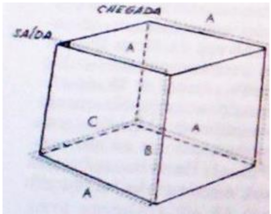


Fonte: http://www.mat.uc.pt/aprender/torres.html

5.3 O ciclo hamiltoniano e os movimentos das peças do jogo Torre de Hanói

Segundo Gardner (1998, p. 69), o Jogo Icosiano foi inventado pelo matemático irlandês Willian Rowan Hamilton (1805-1865). Trata-se de quebra-cabeças do tipo labirinto que podem ser jogados sobre a superfície dos cinco sólidos de Platão, especialmente o icosaedro. Hamilton sugeriu vários deles para o dodecaedro regular (cubo). A essência do jogo é perfazer um ciclo fechado, partindo de qualquer vértice (Hamilton dava nome de cidades aos vértices) e seguindo pelas arestas, dar uma volta completa “ao redor do mundo”, tocando apenas uma vez em cada vértice e voltando ao ponto de partida (ciclo hamiltoniano). O Dr. D. W. Crowe da Universidade da Colúmbia Britânica associou este jogo com a Torre de Hanói da seguinte maneira: Comece com uma torre de três peças nomeando-as de A, B e C a partir da base. A jogada com o número mínimo de movimentos obedece à ordem ABACABA. A relação entre esses dois jogos pode ser verificada da seguinte maneira: Nomeie de A, B e C as três coordenadas de um cubo (Figura 24), em seguida trace um caminho por suas arestas obedecendo as coordenadas na ordem ABACABA, o caminho formará um circuito hamiltoniano.

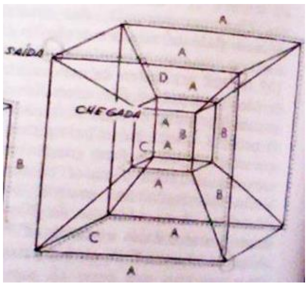
Figura 24: Cubo de coordenadas A, B e C



Fonte: Gardner (1998, p. 7)

Da mesma forma em uma torre com quatro peças chamadas de A, B, C e D a partir da base, na jogada perfeita os movimentos seguirão à ordem ABACABADABACABA que é a sequência de um caminho hamiltoniano em um cubo de quatro dimensões ou hipercubo cujas coordenadas são A, B, C e D, sendo D a coordenada representada pelas linhas diagonais. Embora não possamos fazer o modelo de um hipercubo, é possível representar a rede de suas arestas em um modelo tridimensional (Figura 25). Crowe notou que isto pode ser generalizado, a ordem de movimentos para a transferência de n discos da Torre de Hanói corresponde à ordem das coordenadas do traçado de um caminho hamiltoniano em um cubo de n dimensões.

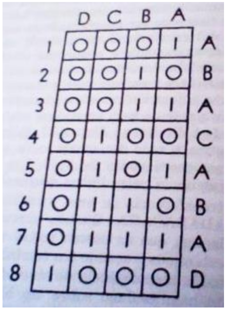
Figura 25: Cubo a quatro dimensões de coordenadas A, B, C e D



Fonte: Gardner (1998, p. 7)

Também é possível encontrar esta sequência na ordenação dos números binários e nas divisões do inteiro em potências de dois. Escrevendo os números binários de 1 a 8 e nomeando as colunas pelas letras A, B, C e D da direita para a esquerda, a sequência ABACABAD é obtida ao anotar-se a letra correspondente ao último “1” à direita de cada número (Figura 26). Na régua de polegada, nomeando os tamanhos dos traços do menor para o maior pelas letras A, B, C, D, e E, a sequência encontrada é ABACABADABACABAE (Figura 27).

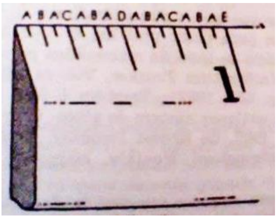
Figura 26: Tabela de números binários



	D	C	B	A	
1	0	0	0	1	A
2	0	0	1	0	B
3	0	0	1	1	A
4	0	1	0	0	C
5	0	1	0	1	A
6	0	1	1	0	B
7	0	1	1	1	A
8	1	0	0	0	D

Fonte: Gardner (1998, p. 7)

Figura 27: Divisões binárias de uma polegada



Fonte: Gardner (1998, p. 7)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho com jogos matemáticos se mostrou como um fator motivador para a aprendizagem, possibilitando que tópicos da matemática, como o ensino de funções, progressões e gráficos, fossem abordados de uma forma mais interessante e realista, além de possibilitar a determinação de relações entre estes conceitos.

A constatação da utilidade das funções na modelagem dos jogos despertou o interesse dos estudantes para a aprendizagem dos conceitos formais presentes no currículo. Eles descobriram que esses conceitos podem estar presentes em situações reais de uma forma sutil, com a possibilidade de serem revelados através de uma investigação ou estudo mais detalhado.

Durante a aplicação das questões, notou-se muita dificuldade e consequente necessidade de concentração na busca de generalizações. O raciocínio lógico foi muito empregado, a ponto de uma aluna se queixar de cansaço mental. É muito importante e pouco frequente nas aulas de matemática, atividades que desenvolvam o pensamento lógico e conduzam à abstração. Se o objetivo do professor é oferecer uma formação matemática completa a seus alunos, deve propor aulas que contemplem também estes aspectos.

Uma das expectativas deste trabalho foi apresentar o Princípio da Indução Finita ao Ensino Médio. A proposta de atividades com jogos e generalizações se mostrou eficiente para este propósito. Os alunos entenderam a sua importância e a necessidade de se provar a validade das expressões encontradas. Ainda que apresentassem dificuldades em aplicar o método indutivo, se mostraram interessados e compreenderam o processo.

Como se pode observar, este trabalho reuniu aspectos importantes para o ensino-aprendizagem da matemática. O primeiro deles trata-se da motivação para a aprendizagem. O segundo foi estudar as funções e as progressões de uma forma significativa, entendendo a utilidade desses assuntos na modelagem de situações problemas e valorizando o conhecimento científico. E o terceiro aspecto importante foi fazer com que os alunos, percorrendo o caminho da investigação, levantamento, testagens e prova de hipóteses, se aproximassem do real trabalho matemático.

Através da experiência vivenciada e aqui relatada, é possível afirmar que este trabalho contribuiu para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, além de despertar o interesse pela matemática e tornar mais prazeroso o estudo desta disciplina.

Uma proposta para Trabalhos futuros é a aplicação das atividades formuladas para os jogos “Salto de rã”, “Anéis chineses” e “Pizza de Steiner”. Estas atividades constam do apêndice e tem seus desenvolvimentos comentados no Capítulo cinco desta dissertação.

REFERÊNCIAS

ALVES, E. M. S. **A ludicidade e o ensino de matemática:** uma prática possível. 6. ed. Campinas: Papirus, 2010.

ÁVILA, G. Funções. In: **Cálculo das funções de uma variável**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, vol.1, p. 35-41, 2003.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas:** uma estratégia para as aulas de matemáticas. 3.ed. São Paulo: CAEM,1998.

D'ABROSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. Indução. In: **Círculos matemáticos:** a experiência russa. Rio de Janeiro: IMPA, p. 83-90, 2010.

GARDNER, M. **Divertimentos matemáticos.** 5. ed. São Paulo: IBRASA, p.68-75, 1998.

GRANDO, R. C. A construção do conceito matemático no jogo. **Revista de Educação Matemática**, ano 5, n.3 São Paulo: SBEM, p.13-17, 1997.

______________. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula.** 3.ed. São Paulo: Paulus, 2009.

LIMA, E. L. Exame de Testos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. **Revista do professor de matemática**, n. 46, Rio de Janeiro, SBM, p. 46, 2001.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, vol.1, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).

MENEZES, J. E. **Modelando jogos matemáticos no ensino-aprendizagem:** a busca da estratégia de vitória. 2013. Disponível em: <http://www.cibem.org/... /263. Acesso em: 21 abr. 2015.

MUNIZ, C. A. **Brincar e jogar:** enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. **Iniciação à matemática:** um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

RIBEIRO, F. D. **Jogos e modelagem na educação matemática**. São Paulo: Saraiva, 2009.

SANTOS, C. P.; NETO, J. P.; SILVA, J. N. **Matemática Recreativa + Puzzle Anéis Chineses.** [s.l.]: Público/Visão, 2007. (Coleção Jogos com História, n.7).

SÃO PAULO. **Caderno do professor:** Matemática, ensino médio, 1ª série. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, v.1, p. 11-20, 2014.

___________. **Caderno do professor:** Matemática, ensino médio, 1ª série. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, v.2, p. 11-20, 2014.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. V. **Álgebra:** das variáveis às equações e funções. 3. ed. São Paulo: CAEM, 1998.

TAHAN, M. **O Homem que Calculava.** 77. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.

WATANABE, R. Torre de Hanói. In: HELLMEISTER, Ana Catarina P.; DRUCK Suely (Org.). **Explorando o ensino da Matemática:** Atividades**.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, v.2, p. 124-127, 2004.

ANEXO A - Determinação de sequências, leis matemáticas e funções.

Objetivos: Expressar regularidades de um fenômeno através de leis matemáticas, modelar uma situação problema por meio de uma função; relacionar a progressão aritmética com a função afim e progressão geométrica com a função exponencial.
Observação: A resolução das atividades está em itálico.

PRIMEIRA PARTE: LEIS DEFINIDAS EM VARIÁVEIS DISCRETAS E CONTÍNUAS – PROGRESSÃO ARITMÉTICA E FUNÇÃO AFIM.

Atividade 1: Trabalhando com cubos
Material necessário: Três cubos para cada grupo.
1) Um cubo é colocado sobre uma mesa. Sobre ele é colocado outro cubo; depois se acrescenta mais um cubo, e assim por diante. Complete a tabela, expresse a lei matemática que representa o número de faces visíveis a_n em relação ao número de cubos n considerados e responda as outras questões.

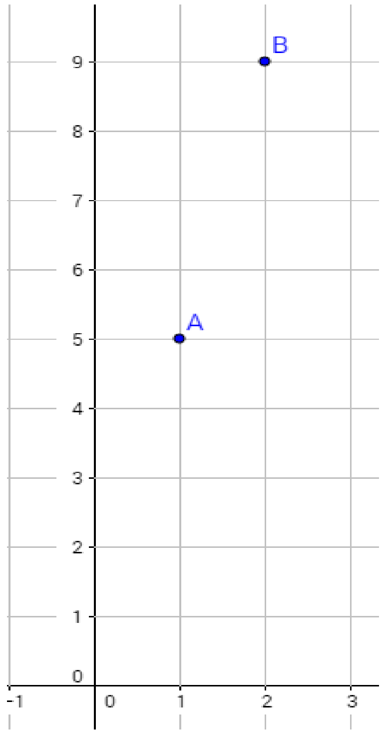
Tabela 1: Número de faces visíveis de cubos empilhados em relação ao número de cubos

n (nº de cubos)	1	2	3	...	n	...
a_n (nº de faces visíveis)	*5*	*9*	*13*	...	*3n +1*	...

Fonte: elaboração da autora.

a) Sequência dos números de faces visíveis: *{5, 9, 13, 17, 21, ...}*.
b) A sequência encontrada é uma Progressão Aritmética ou uma Progressão Geométrica? Qual é o valor da razão?
A sequência é uma P.A. de razão igual a quatro.
c) Qual é a lei de formação da sequência encontrada?
A lei de formação da sequência é dada por $a_n = 4n + 1$.
d) Faça a representação gráfica desta sequência no plano cartesiano. Represente o número de cubos no eixo Ox e o número de faces visíveis no eixo Oy.

Figura 01: Gráfico representativo da sequência de número de faces visíveis



Fonte: Elaboração da autora.

2) Cubos são colocados sobre uma mesa, um ao lado do outro. Complete a tabela, expresse a lei matemática que representa o número de faces visíveis a_n em relação ao número de cubos considerados n.

Tabela 2: Número de faces visíveis a_n de cubos postados lado a lado em relação ao número de cubos n

n (nº de cubos)	1	2	3	...	n	...
a_n (nº de faces visíveis)	*5*	*8*	*11*	...	*3n + 2*	...

Fonte: elaboração da autora.

a) Sequência dos números de faces visíveis: *{5, 8, 11, 14, 17, ...}*

b) A sequência encontrada é uma P.A. ou uma P.G? Qual é o valor da razão?

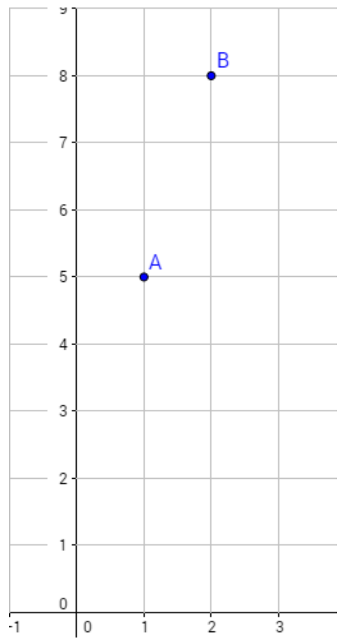
A sequência é uma P.A. de razão igual a 3.

c) Qual é a lei de formação da sequência encontrada?

A lei de formação da sequência é dada por $a_n = (n - 2).3 + 8 = 3n - 6 + 8 = 3n - 2.$

d) Faça a representação gráfica desta sequência no plano cartesiano. Represente o número de cubos no eixo Ox e o número de faces visíveis no eixo Oy.

Figura 02: Gráfico representativo da sequência de número de faces visíveis



Fonte: Elaboração da autora.

3) Cubos são empilhados sobre uma mesa, com faces encostadas em duas paredes que se encontram. Segue a mesma proposta dos exercícios anteriores.

Tabela 3: Número de faces visíveis de cubos empilhados em um canto em relação ao número de cubos

n (nº de cubos)	1	2	3	...	n	...
a_n (nº de faces visíveis)	*3*	*5*	*7*	...	*$2n + 1$*	...

Fonte: elaboração da autora.

a) Sequência dos números de faces visíveis: *{3, 5, 7, 9, 11, ...}*

b) A sequência encontrada é uma P.A. ou uma P.G? Qual é o valor da razão?

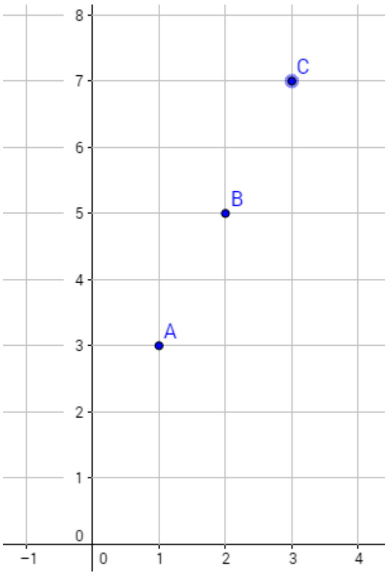
A sequência é uma P.A. de razão igual a 2.

c) Qual é a lei de formação da sequência encontrada?

A lei de formação da sequência é dada por $a_n = 3 + (n - 1).2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$

d) Faça a representação gráfica desta sequência no plano cartesiano. Represente o número de cubos no eixo Ox e o número de faces visíveis no eixo Oy.

Figura 03: Gráfico representativo da sequência de número de faces visíveis



Fonte: Elaboração da autora.

Atividade 2 : Trabalhando com palitos:

Na figura abaixo, cada lado de triângulo é formado por palitos:

Figura 04: Sequência de triângulos formados por palitos

Fonte: https://www.qconcursos.com

1) Complete a tabela, expresse a lei matemática que representa o número de palitos a_n em relação ao número de triângulos n e responda as outras questões.

Tabela 4: Número de palitos em relação ao número de triângulos

n (nº de triângulos)	1	2	3	...	n	...
a_n (nº de palitos)	*3*	*5*	*7*	...	*$2n + 1$*	...

Fonte: elaboração da autora.

a) Sequência dos números de palitos: *{3, 5, 7, 9, 11, ...}.*

b) A sequência encontrada é uma P.A. ou uma P.G? Qual é o valor da razão?

A sequência é uma P.A. de razão igual a 2.

c) Qual é a lei de formação da sequência encontrada?

A lei de formação da sequência é dada por $a_n = 3 + (n - 1).2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$.

d) Quantos palitos são necessários para formar 40 triângulos?

$a_{40} = 2.40 + 1 = 81$

e) Quantos triângulos são formados com 73 palitos?

$2n + 1 = 73 \Rightarrow 2n = 72 \Rightarrow n = 36.$

Com 73 palitos são formados 36 triângulos.

f) Quantos triângulos são formados com 90 palitos?

$2n + 1 = 90 \Rightarrow 2n = 89 \Rightarrow n = 44{,}5.$

Como n deve ser um número natural, não é possível utilizar todos os palitos. Portanto pode-se formar 44 triângulos e ficará sobrando um palito, pois 89 = 2. 44 + 1.

Atividade 3: Trabalhando com variáveis contínuas

1) Um líquido, a 26°C, foi aquecido de tal forma, que sua temperatura aumentou 10° C por minuto, até atingir a temperatura máxima de 100°C. Complete a tabela, expresse a lei matemática que representa a temperatura em função do tempo decorrido e responda as outras questões.

Tabela 5: Temperatura y em função do tempo de aquecimento x

x (Tempo de aquecimento em minutos)	0	1	2	3	4	...	x
y (Temperatura em ºC)	*26*	*36*	*46*	*56*	*76*	...	*26 + 10x*

Fonte: elaboração da autora.

a) A sequência encontrada para os valores de y na tabela é uma Progressão Aritmética? Se sim, qual é o valor da razão?

A sequência é uma P.A. de razão igual a 10.

b) Qual é a lei de formação da sequência encontrada?

A lei de formação da sequência encontrada é $y = 10x + 26$.

c) Qual foi a temperatura ao término de 5 minutos?

$f(5) = 10.5 + 26 = 50 + 26 = 76$

Ao término de 5 minutos a temperatura foi de 76°.

d) Qual foi a temperatura quando completou 6 minutos e 15 segundos?

Quinze segundos correspondem a 15/60 do minuto.

$15/60 = ¼ = 0{,}25$

Logo 6 minutos e 15 segundos na forma decimal é igual 6,25.

10.6,25 + 26 = 62,5 + 26 = 88,5

A temperatura decorridos 6 minutos e quinze segundos é igual a 88,5°C.

e) Quanto tempo foi necessário para que o líquido atingisse a temperatura máxima de 100°C?

$10x + 26 = 100 \Rightarrow 10x = 74 \Rightarrow x = 7{,}4.$

Foram necessários 7,4 minutos para que o líquido atingisse a temperatura máxima.

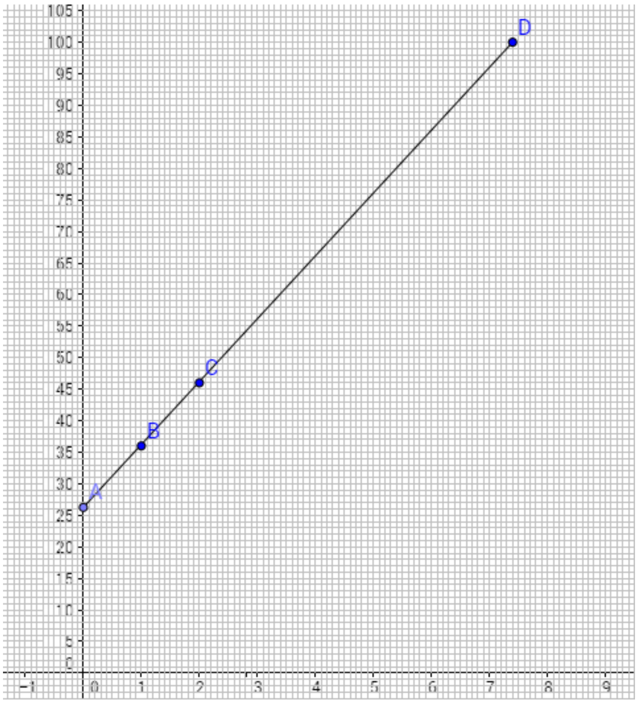
f) Escreva uma função que modele o experimento acima e classifique-a em função afim, quadrática ou exponencial.

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = 10x + 26$, $A = \{ x \in IR \,/\, 0 \leq x \leq 7{,}4\}$

A função f é uma função afim.

g) Faça a representação gráfica do experimento, representando o tempo de aquecimento no eixo Ox e a temperatura no eixo Oy.

Figura 05: Gráfico da variação da temperatura em função do tempo



Fonte: Elaboração da autora.

SEGUNDA PARTE: DETERMINAÇÃO DE LEIS MATEMÁTICAS – PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Atividade: A lenda do jogo de xadrez. (Anexo C).

1) Com base no texto complete a tabela:

Tabela 6: Número de grãos de trigo em função da casa do tabuleiro e número de grãos de trigo na forma de potência de base 2

n **Casa do tabuleiro**	**a_n** **Número de grãos de trigo**	**a_n na forma de potência de base 2**
1ª	*1*	2^0
2ª	*2*	2^1
3ª	*4*	2^2
4ª	*8*	2^3
5ª	*16*	2^4
6ª	*32*	2^5
7ª	*64*	2^6
8ª	*128*	2^7
...	**...**	**...**
nª	------------------------------	2^{n-1}
...	**...**	**...**
64ª	------------------------------	2^{63}

Fonte: elaboração da autora.

2) Escreva uma lei matemática que permita calcular o valor de a_n em função de n.
$a_n = 2^{n-1}$

3) A sequência encontrada na segunda coluna é uma Progressão Geométrica ou uma Progressão Aritmética. Determine o valor da razão.

A sequência é uma progressão geométrica de razão q = 2.

4) Quantos grãos de trigo Sessa ganhará até a quinta casa?

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31.$

Ganhará 31 grãos de trigo.

5) Quantos grãos de trigo haverão na 10ª casa?

$2^9 = 512.$

Na 10ª casa haverá 512 grãos de trigos.

6) Quantos grãos de trigo Sessa ganhará até a 10ª casa? (Aplique a fórmula da soma da P.G.)

$$S_n = \frac{a_1.(q^n-1)}{q-1} = \frac{1.(2^{10}-1)}{2-1} = \frac{1.(1024-1)}{1} = 1023.$$

Até a 10ª casa Sessa ganhará 1023 grãos de trigo.

7) Supondo que fosse construído um gráfico para representar a situação acima, seus pontos estariam ligados ou não? Por quê?

Os pontos do gráfico não estariam ligados porque a quantidade de grãos de trigo e o número de casas do tabuleiro são números naturais.

8) Observe as funções f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que, f(x) = 2^x e g(x) = 2^{x-1}.

a) A função f(x) e a função g(x) são funções afins, funções quadráticas ou funções exponenciais?

São funções exponenciais.

b) Faça, no mesmo plano cartesiano, a representação gráfica das duas funções. Você pode utilizar as tabelas abaixo para a construção dos gráficos. (Use cores diferentes para os gráficos de *f* e de *g*).

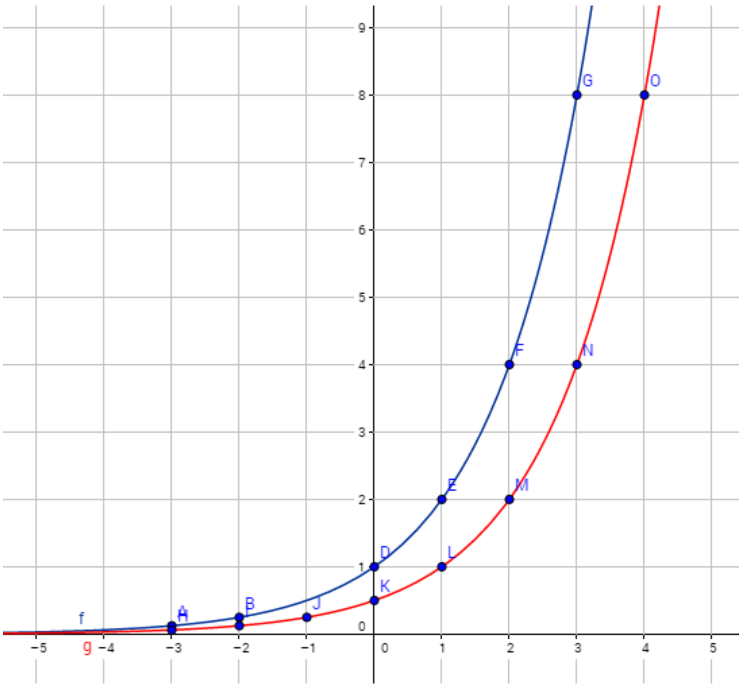
Tabela 7: Tabelas para a obtenção dos pontos dos gráficos das funções f(x) = 2^x e g(x) = 2^{x-1}

x	**$y = 2^x$**	**(x, y)**
-3	*$y = 2^{-3} = 1/8$*	*(-3, 1/8)*
-2	*$y = 2^{-2} = ¼$*	*(-2, 1/4)*
-1	*$y = 2^{-1} = 1/2$*	*(-1, 1/2)*
0	*$y = 2^0 = 1$*	*(0, 1)*
1	*$y = 2^1 = 2$*	*(1, 2)*
2	*$y = 2^2 = 4$*	*(2, 4)*
3	*$y = 2^3 = 8$*	*(3,8)*

x	**$y = 2^{x-1}$**	**(x, y)**
-3	*$y = 2^{-4} = 1/16$*	*(-3, 1/16)*
-2	*$y = 2^{-3} = 1/8$*	*(-2, 1/8)*
-1	*$y = 2^{-2} = ¼$*	*(-1, 1/4)*
0	*$y = 2^{-1} = 1/2$*	*(0, 1/2)*
1	*$y = 2^0 = 1$*	(1, 1)
2	*$y = 2^1 = 2$*	(2, 2)
3	*$y = 2^2 = 4$*	(3, 4)

Fonte: elaboração da autora.

Figura 06: Gráficos das funções f(x) = 2^x e g(x) = 2^{x-1}



Fonte: Elaboração da autora.

c) Note que f(x) = 2^x e g(x) = 2^{x-1}, isto é, g(x) é igual a f(x) com a variável x diminuída de uma unidade. Isto possibilita que o gráfico de g(x) possa ser criado através de uma translação no gráfico de f(x). Observando os gráficos verifica-se que essa translação é:

(   ) Vertical de 1 unidade para cima a partir do gráfico de f;

(   ) Vertical de 1 unidade para baixo a partir do gráfico de f;

(*x*) Horizontal de 1 unidade para direita a partir do gráfico de f;

(   ) Horizontal de 1 unidade para a esquerda a partir do gráfico de f.

Investigação de leis matemáticas em jogos, funções e prova por indução.

Objetivos: Utilizar a investigação matemática na busca de uma estratégia vencedora em situações de jogos; Modelar as situações investigadas através de leis de funções; Apresentar a prova por indução das leis matemáticas encontradas.
Observação: A resolução das atividades está em itálico.

1 - JOGO TORRE DE HANÓI

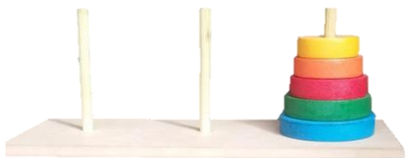
Material:
Jogo composto por três hastes verticais e com uma torre de cinco ou mais anéis em cores variadas, fixadas em uma das hastes em ordem decrescente de tamanho a partir da base.
Objetivo do jogo:
Transferir a torre para uma das outras duas hastes mantendo a ordenação inicial das peças.
Regras:
1) Transferir uma peça por vez;
2) Nunca colocar uma peça maior sobre outra menor.

1ª Parte: Jogo livre.

A popular torre de Hanói foi inventada pelo matemático francês Edouard Lucas e vendida como brinquedo no ano de 1883. O problema consiste em transferir a torre de oito discos para um dos dois bastões livres no menor número possível de movimentos, um só disco por vez e sem colocar um disco maior sobre um menor. (GARDNER,1998, p. 18)

Nossa Torre de Hanói tem seis discos, você é capaz de transferi-los para um dos outros dois pinos seguindo as regras do jogo?

Figura 07 – Modelo horizontal da Torre de Hanói com cinco pinos



Fonte: Elaboração da autora.

2ª Parte: A lenda

A descrição original do brinquedo, dizia ser o mesmo uma versão simplificada da torre de “Brahma”. Segundo a lenda, após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões de diamantes com 64 discos de ouro em um deles, dispostos em ordem decrescente de tamanho. Assim disse aos monges: “Transfiram esta pilha de discos para outro bastão, movendo ininterruptamente um disco de cada vez, e nunca permitindo que um disco fique acima de outro menor. Quando terminarem esta tarefa, e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá a pó, e com um estrondo de trovões o mundo se acabará”.

Será que a lenda é verdadeira? Quanto tempo após sua criação o mundo se acabará?

Vamos investigar?

3ª Parte: Investigação

1) Faça uma investigação sobre o número mínimo de movimentos necessários para transferir os discos de um bastão à outro seguindo as regras do jogo. Comece com um disco, depois dois, três, e assim sucessivamente. Complete a tabela a cada resultado encontrado.

Observação: Chamaremos de n o número de discos a serem movidos e m_n o número mínimo de movimentos necessários para mover os n discos.

Tabela 8: Número mínimo de movimentos para se mover n discos

n	m_n
1	*1*
2	*3*
3	*7*
4	*15*
5	*31*
6	*63*
7	*127*
...	...

Fonte: elaboração da autora.

2) Como vocês calcularam m_7 na tabela anterior?

Algumas respostas possíveis:

a) Notamos que de m_1 para m_2 aumentaram 2 movimentos, de m_2 para m_3 aumentaram 4 movimentos, de m_3 para m_4 aumentaram 8movimentos, de m_4 para m_5 aumentaram 16 movimentos, então seguindo o padrão de adicionar o dobro dos movimentos acrescentados na linha anterior, de m_5 para m_6 serão aumentados 32 movimentos e de m_6 para m_7 serão aumentados 64 movimentos.

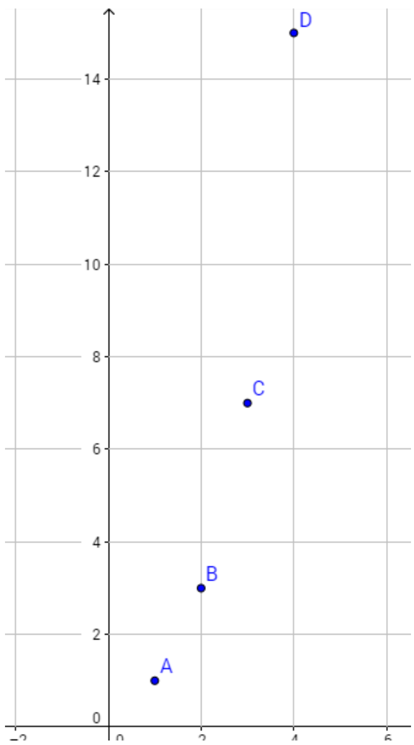
b) Para se mover seis peças deve-se primeiro transferir as cinco anteriores para um dos pinos vazios com 31 movimentos, depois mover a peça maior para o outro pino vazio que sobrou com um movimento e novamente transferir as cinco primeiras peças para cima da maior com mais 31 movimentos, totalizando 63 movimentos. Para se mover sete peças deve-se primeiro transferir as seis anteriores para um dos pinos vazios com 63 movimentos, depois mover a sétima peça para o outro pino vazio que sobrou com um movimento e, em seguida, transferir para cima desta as seis primeiras peças, com 63 movimentos, totalizando 127 movimentos.

3) Escreva uma fórmula de recorrência para calcular o valor de m_n.

$m_1 = 1$, $m_n = 2m_{n-1} + 1$.

4) Faça a representação gráfica dos dados da tabela no plano cartesiano. Marque os valores de n no eixo Ox e os valores de m_n no eixo Oy.

Figura 08 – Gráfico do número mínimo de movimentos em função do número discos



Fonte: Elaboração da autora.

4ª Parte: Sequências e Modelagem através de Funções

1) Utilizando os dados que você que você obteve na tabela anterior, complete a tabela abaixo:

Tabela 9: Incremento no número mínimo de movimentos com o acréscimo de uma peça e valor do incremento na forma de potência de base 2.

n	m_n	a_n (número de movimentos acrescentados para se obter o próximo valor de m_n)	a_n na forma de potência de base 2
1	*1*	*2*	2^1
2	*3*	*4*	2^2
3	*7*	*8*	2^3
4	*15*	*16*	2^4
5	*31*	*32*	2^5
6	*63*	*64*	2^6
7	*127*	*128*	2^7
...	...	...	...
n	---	--------------------	

Fonte: elaboração da autora.

2) Existe alguma relação entre as potências de base 2 da quarta coluna e os valores de n da primeira coluna? Explique.

Sim, o valor do expoente é igual a n.

3) Escreva uma fórmula matemática que expresse a_n em função de n (Utilize a potência de base 2).

$a_n = 2^n$.

4) Existe alguma relação entre os valores de m_n da segunda coluna e os valores de a_n da terceira coluna? Explique.

Sim, os valores de m_n são iguais aos de a_n menos um.

5) Escreva uma lei matemática que expresse m_n em função de a_n.

$m_n = a_n - 1$.

6) Escreva uma lei matemática que expresse m_n em função de **n**. Para isso utilize a fórmula do exercício anterior substituindo a_n pela potência de 2.

$m_n = 2^n - 1$.

7) Calcule o número mínimo de movimentos para se mover 10 peças.

$m_{10} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$.

8) Os números obtidos na terceira coluna formam que tipo de sequência? Determine o valor da razão.

Os números da terceira coluna formam uma P.G. de razão q = 2.

9) A função f: ℝ→ ℝ dada por $f(x) = 2^x$ é uma função afim, quadrática ou exponencial?

Exponencial.

10) Represente em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções dadas por f: ℝ→ ℝ e h: ℝ→ ℝ, tais que, $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^x - 1$. Use cores diferentes para cada gráfico.

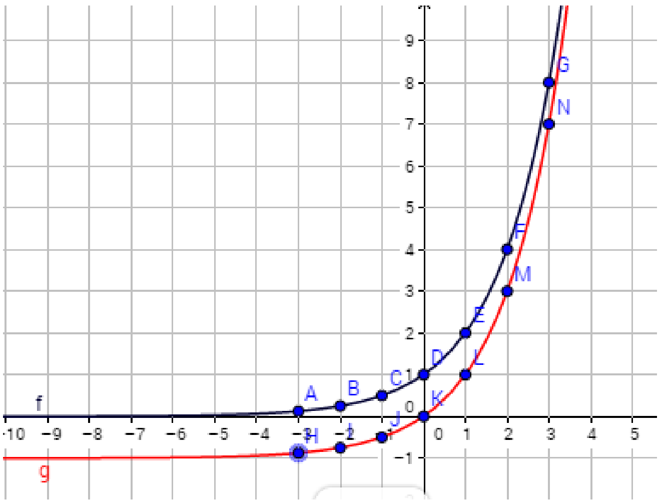
Tabela 10: Tabelas para a obtenção dos pontos dos gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^x - 1$

x	**$y = 2^x$**	**(x, y)**
-3	$y = 2^{-3} = 1/8$	(-3, 1/8)
-2	$y = 2^{-2} = 1/4$	(-2, 1/4)
-1	$y = 2^{-1} = 1/2$	(-1, 1/2)
0	$y = 2^0 = 1$	(0, 1)
1	$y = 2^1 = 2$	(1, 2)
2	$y = 2^2 = 4$	(2, 4)
3	$y = 2^3 = 8$	(3, 8)

x	**$y = 2^x - 1$**	**(x, y)**
-3	Y = 1/8 – 1 = -7/8	(-3, -7/8)
-2	Y = 1/4 - 1 = - 3/4	(-2, -3/4)
-1	Y = ½ - 1 = -1/2	(-1, -1/2)
0	Y = 1 – 1 = 0	(0, 0)
1	Y = 2 – 1 = 1	(1, 1)
2	Y = 4 – 1 = 3	(2, 3)

Fonte: elaboração da autora.

Figura 09: Gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^x - 1$



Fonte: Elaboração da autora.

10) Observe que g(x) = f(x) – 1. Isto possibilita que o gráfico de g(x) possa ser criado através de uma translação no gráfico de f(x). Observando os gráficos verifica-se que essa translação é:

(   ) Vertical de 1 unidade para cima a partir do gráfico de f;

(*x*) Vertical de 1 unidade para baixo a partir do gráfico de f;

(   ) Horizontal de 1 unidade para direita a partir do gráfico de f;

(   ) Horizontal de 1 unidade para a esquerda a partir do gráfico de f.

5ª Parte: Prova por Indução Finita.

É fácil observar que a fórmula $m_n = 2^n - 1$ é verdadeira para n = 1, n = 2, n = 3, n = 4, n = 5, n = 6, n = 7, mas não podemos testá-la para todos os infinitos valores que n pode assumir. Assim, usaremos o método da Indução Finita para provar que $m_n = 2^n - 1$ é verdadeira sempre. Siga os passos abaixo:

Queremos provar que o número mínimo de movimentos (m_n) para mover as n peças de um pino para outro seguindo as regras do jogo é $m_n = 2^n - 1$.

1) Verifique que a fórmula é válida para n = 1 e n = 2:

$m_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ (verdadeira) e $m_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ (verdadeira)

2) Uma vez constatada a veracidade da fórmula para n = 1 e n = 2, suponha, por hipótese de indução, que m_n seja verdadeira para algum n natural, isto é, $m_n = 2^n - 1$ e prove que a fórmula vale para m_{n+1}.

Usando a lei de recorrência, temos:

$m_n = 2.m_{n-1} + 1$ *e* $m_{n+1} = 2.m_n + 1$

Por hipótese de indução $m_n = 2^n - 1$, logo:

$m_{n+1} = 2.(2^n - 1) + 1 = 2.2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$ ■

6ª Parte: Retornando à lenda

Dizem os sábios que o mundo foi criado há quatro bilhões de anos aproximadamente, supondo que os monges, desde a criação, estejam movendo os discos, na razão de um disco por segundo, quanto tempo ainda falta para o mundo acabar?

Dado: 2^{64} = 18 446 744 073 709 551 616.

Segundo a lenda, quando acabar, o mundo terá:

$2^{64} - 1$ segundo = 18 446 744 073 709 551 617 segundos,

aproximando para menos 18 000 000 000 000 000 000 = $18x10^{18}$.

Vamos calcular em anos:

Um ano possui 365 x 24 x 60 x 60 = 31 536 000 segundos, aproximando para mais, $32x10^6$.
Assim, quando acabar, a idade do mundo em anos será de:
$18x10^{18} \div 32x10^6 = 0{,}5625x10^{12} = 5{,}625x10^{11}$ *anos, aproximando para menos,*
$5x10^{11} = 500\ 000\ 000\ 000.$
Isto é, 500 bilhões de anos aproximadamente. Como o mundo foi criado há quatro bilhões de anos, faltam mais de 406 bilhões de anos para o mundo se acabar. Podemos ficar tranquilos.

2 - JOGO SALTO DE RÃ

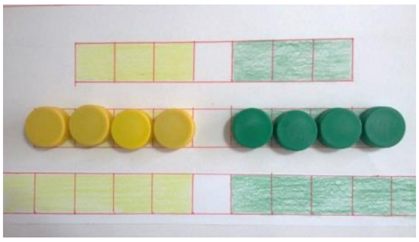
Material:
- Tabuleiro com número ímpar de casas numeradas.
- Número par de peças, uma a menos que o número de casas, divididas em dois grupos de mesma quantidade e cores diferentes.

Objetivo do jogo**:**
Trocar os grupos de peças de lugar.

Regras:
1) Os movimentos feitos pelas peças serão denominados como *passos* e *pulos*;
2) Um *passo* é o movimento onde uma peça ocupa a casa vazia à frente;
3) Um *pulo* é o movimento onde uma peça "pula" por cima de uma peça vizinha do outro grupo, ocupando a casa após ela;
4) Não é permitido pular duas peças ou mais, como também não é permitido pular para trás.

Comece o jogo com o tabuleiro de sete casas. Em seguida jogue com o tabuleiro de nove casas, até chegar ao tabuleiro de onze casas.

Figura 10 - Tabuleiro múltiplo, com sete, nove e onze casas



Fonte: elaboração da autora.

1ª Parte: Fazendo investigações.

1) Preencha a tabela:

Tabela 11: Número mínimo de movimentos em função do número de peças por grupo e número de movimentos acrescentados com o aumento de uma peça no jogo.

Tipo de tabuleiro	**n (Número de peças por grupo)**	m_n **(Número mínimo de movimentos)**	a_n **(Número de movimentos acrescentados para se obter o próximo valor de** m_n**)**
3 casas	**1**	*3*	*5*
5 casas	**2**	*8*	*7*
7 casas	**3**	*15*	*9*
9 casas	**4**	*24*	*11*
11 casas	**5**	*35*	*13*
13 casas	**6**	*48*	*15*
15 casas	**7**	*63*	*17*

Fonte: elaboração da autora.

2ª Parte: Sequências e Modelagem através de Funções

1) Os números obtidos na terceira coluna formam uma Progressão Aritmética, uma Progressão Geométrica ou nenhuma dessas opções? Justifique e dê o valor da razão se houver.

Nenhuma das opções.

2) Os números obtidos na quarta coluna formam uma Progressão Aritmética, uma Progressão Geométrica ou nenhuma dessas opções? Justifique e dê o valor da razão se houver.

Os números da quarta coluna formam uma progressão aritmética de razão r = 2.

3) Escreva uma fórmula que expresse o número de movimentos acrescentados, a_n, em função de n. Se você quiser poderá usar a fórmula do termo geral da P.A.: $a_n = a1 + (n-1).r.$

$a_n = 5 + (n - 1).2 = 5 + 2n - 2 = 2n + 3.$

4) Agora, a classe, em conjunto com o professor, deverá fazer uma investigação para encontrar uma lei matemática que expresse o número de movimentos (m_n) em função de n.

Professor: - *Para facilitar as anotações, vamos representar um passo por Pa e um pulo por Pu. Começamos com um passo do primeiro grupo, seguido de um pulo e um passo do segundo, na sequência vem dois pulos e um passo do primeiro, três pulos e um passo do segundo, seguindo assim com quantidades de pulos crescente acompanhados por um passo* *do mesmo grupo. A primeira parte termina quando um dos grupos dá cinco pulos e não tem como dar um passo em seguida.*

Tabela 12 – Tabela para cinco peças em cada grupo – primeira parte.

Grupo amarelo	***Grupo verde***
1Pa	*1Pu, 1Pa*
2Pu, 1Pa	*3Pu, 1Pa*
4Pu, 1Pa	*5Pu*

Fonte: Elaboração da autora.

Com n peças, temos a repetição do caso anterior, começando com um passo de um grupo e um número crescente de pulos seguidos por um passo do mesmo grupo em cada jogada. A primeira parte termina quando um dos grupos dá seus n pulos.

Tabela 13 – Quadro para n peças em cada grupo – primeira parte.

Grupo amarelo	***Grupo verde***
1Pa	*1Pu, 1Pa*
2Pu, 1Pa	*3Pu, 1Pa*
4Pu, 1Pa	*5Pu, 1Pa*
6Pu, 1Pa	*7Pu, 1Pa*
...	...
nPu	

Fonte: Elaboração da autora.

Assim, o número de jogadas da primeira etapa será:

1Pa + 1Pu + 1Pa + 2Pu + 1Pa + 3Pu + 1Pa + 4Pu + 1Pa + 5Pu + 1Pa + ... + 1Pa + nPu.

Isto é:

$$nPa + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n)Pu$$

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A., temos:

$$nPa + \left[\frac{(1+n).n}{2}\right]Pu = nPa + \left(\frac{n^2+n}{2}\right)Pu$$

Portanto, o número mínimo de jogadas da primeira etapa é:

$$nPa + \left(\frac{n^2+n}{2}\right)Pu.$$

Para continuar o jogo com cinco peças, a única jogada possível é um passo seguido por quatro pulos do mesmo grupo. Um passo do outro seguido por três pulos, e assim sucessivamente, cada grupo dando um passo e um número de pulos em ordem decrescente, até terminar em um passo, um pulo e um passo.

Tabela 14 – Tabela para cinco peças em cada grupo – segunda parte.

Grupo amarelo	***Grupo verde***
1Pa, 4Pu	*1Pa, 3Pu*
1Pa, 2Pu	*1Pa, 1Pu*
1Pa	

Fonte: Elaboração da autora.

Seguindo o mesmo raciocínio para n peças, completamos a tabela (Tabela 8).

Tabela 15 – Tabela para n peças em cada grupo – segunda parte.

Grupo amarelo	***Grupo verde***
1Pa, (n – 1)Pu	*1Pa, (n – 2)Pu*
1Pa, (n – 3)Pu	*1Pa, (n – 4)Pu*
...	...
1Pa, 3Pu	*1Pa, 2Pu*
1Pa, 1Pu	*1Pa*

Fonte: Elaboração da autora.

O número de movimentos nesta etapa será:

$$1Pa + (n-1)Pu + 1Pa + (n-2)Pu + \ldots + 1Pa + 1Pu + 1Pa.$$

Isto é:

$$nPa + [\,(n-1) + (n-2) + \ldots + 1]Pu =$$

Entre colchetes temos a soma dos n – 1 termos da P.A. cujo primeiro termo é (n – 1) e o último termo é 1. Aplicando a fórmula da soma desses termos,

$$= nPa + \left\{\frac{[(n-1)+1](n-1)}{2}\right\}Pu =$$

$$= nPa + \left[\frac{n.(n-1)}{2}\right]Pu =$$

$$= nPa + \left(\frac{n^2-n}{2}\right)Pu$$

Somando o número mínimo de movimentos das duas etapas, temos:

$$nPa + \left(\frac{n^2+n}{2}\right)Pu + nPa + \left(\frac{n^2-n}{2}\right)Pu = 2nPa + \frac{2n^2}{2}Pu = 2nPa + n^2Pu$$

Como um passo ou um pulo são movimentos, o número mínimo de movimentos do jogo será obtido somando o número de passos com o número de pulos, que dará: $2n + n^2$ movimentos. Observe que aumentando em uma unidade o número de peças de cada grupo, aumentará 1Pa + (n + 1)Pu na primeira etapa do jogo e, na segunda etapa, aumentará 1Pa + nPu, *totalizando um aumento de 2Pa + (2n + 1)Pu, o que corresponde a um acréscimo de 2n + 3 movimentos.*

3ª Parte: Prova por Indução Finita.

É fácil observar que a fórmula $m_n = n^2 + 2n$ é verdadeira para n = 1, n = 2, n = 3, n = 4, mas não podemos testá-la para todos os infinitos valores que n pode assumir. Assim, usaremos o método da Indução Finita para provar que $m_n = n^2 + 2n$ é verdadeira sempre. Siga os passos abaixo:

Queremos provar que o número mínimo de movimentos (m_n) para trocar a posição das n peças de cores diferentes seguindo as regras do jogo é $m_n = n^2 + 2n$.

1) Verifique que a fórmula é válida para n = 1 e n = 2:

É fácil constatar que a fórmula vale para n =1 e para n = 2, pois:

$$m_1 = 1^2 + 2.1 = 3 \text{ e, } m_2 = 2^2 + 2.2 = 8$$

Supondo agora que a fórmula valha para um valor qualquer de n, com n natural, vamos provar que vale também para n + 1. Já vimos que o acréscimo de uma unidade em n, provoca um aumento de 2n + 3 unidades no valor de m_n, isto é:

$$m_{n+1} = n^2 + 2n + 2n + 3 \qquad (1)$$

Utilizando o método de completar quadrados em (1), vem:

$m_n = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 - 1 = (n + 1)^2 + 2n + 2 = (n + 1)^2 + 2(n + 1)$. ■

4ª Parte: Estudo das funções e gráficos

1) Complete as leis com as fórmulas encontradas nos itens anteriores:

a) Lei que expressa o número de movimentos acrescentados (a_n) em função de n: $a_n = 2n + 3$

b) Lei que expressa o número mínimo de movimentos (m_n) em função de n:

$m_n = n^2 + 2n$

2) As funções apresentadas no item anterior são funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?

São funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.

3) Dadas as funções $a:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $a(x) = 2x + 3$ e $h(x) = x^2 + 2x$, classifique cada uma delas em função afim, função quadrática ou função exponencial.

A função a(x) é uma função afim e a função h(x) é uma função quadrática.

4) Determine, se existirem, as raízes ou zeros da função h(x) do exercício anterior.

Resolvendo pela fórmula de Bháskara, temos:

$x^2 + 2x = 0 \quad a = 1, b = 2, c = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 2^2 - 4.1.0$

$\Delta = 4 - 0 = 4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{2.1} = \frac{-2 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$x_2 = = \frac{-2-2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Logo, as raízes ou zeros da função são $x_1 = 0$ e $x_2 = -2$.

5) Determine as coordenadas do vértice da função h(x). O vértice é o ponto de mínimo ou de máximo desta função?

a) Utilizando as fórmulas para o x_v e o y_v, temos:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2.1} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4.a} = \frac{-4}{4.1} = \frac{-4}{4} = -1.$$

V = (-1, -1).

6) Escreva a função $h(x) = x^2 + 2x$ na forma $h(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$. Você poderá usar as coordenadas do vértice já encontradas no exercício anterior, ou usar o método de completar quadrados.

$h(x) = x^2 + 2x \Rightarrow h(x) = x^2 + 2x + 1 - 1 \Rightarrow h(x) = (x + 1)^2 - 1.$

7) Construa no mesmo sistema cartesiano e em cores diferentes, os gráficos das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que, $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 1)^2$ e $h(x) = (x + 1)^2 - 1$.

Marque as raízes e o vértice de h(x). Use as tabelas abaixo:

Tabela 16 – Tabelas para a obtenção dos pontos dos gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 1)^2$ e $h(x) = (x + 1)^2 - 1$

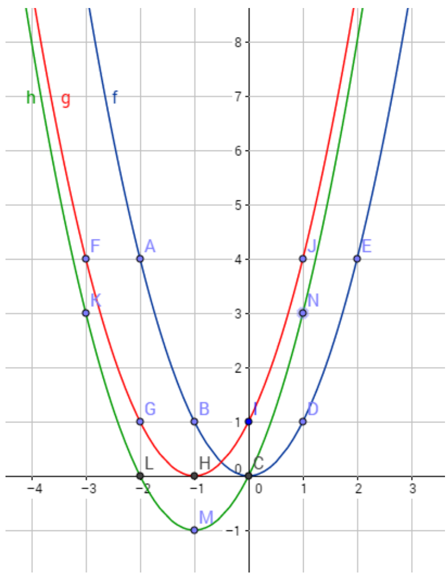
x	$y = x^2$	(x , y)
-3	$y = (-3)^2 = 9$	(-3, 9)
-2	$y = (-2)^2 = 4$	(-2, 4)
-1	$y = (-1)^2 = 1$	(-1, 1)
0	$y = 0^2 = 0$	(0, 0)
1	$y = 1^2 = 1$	(1, 1)
2	$y = 2^2 = 4$	(2, 4)
3	$y = 3^2 = 9$	(3, 9)

x	$y = (x + 1)^2$	(x, y)
-2	$y = (-2 + 1)^2 = (-1)^2 = 1$	(-2, 1)
-1	$y = (-1 + 1)^2 = 0^2 = 0$	(-1, 0)
0	$y = (0 + 1)^2 = 1^2 = 1$	(0, 1)
1	$y = (1 + 1)^2 = 2^2 = 4$	(1, 4)
2	$y = (2 + 1)^2 = 3^2 = 9$	(2, 9)
3	$y = (2 + 2)^2 = 4^2 = 16$	(3, 16)

x	$y = (x + 1)^2 - 1$	(x , y)
-3	$Y = (-3 + 1)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	(-3 , 3)
-2	$Y = (-2 + 1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$	(-2, 0)
-1	$Y = (-1 + 1)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$	(-1, -1)
0	$Y = (0 + 1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$	(0, 0)
1	$Y = (1 + 1)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	(1, 3)

Fonte: Elaboração da autora.

Figura 11: Gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 1)^2$ e $h(x) = (x + 1)^2 - 1$



Fonte: Elaboração da autora.

12) Com base no exercício anterior, Classifique as afirmações abaixo em V(verdadeira) ou F(falsa):

a) (*F*) Aplicando a translação vertical de uma unidade para cima ao gráfico de $f(x) = x^2$, obtemos o gráfico de $g(x) = (x + 1)^2$.

b) (*V*) Aplicando a translação vertical de uma unidade para baixo ao gráfico de $g(x) = (x + 1)^2$, obtemos o gráfico de $h(x) = (x + 1)^2 - 1$.

c) (*F*) Aplicando a translação horizontal de uma unidade para a direita ao gráfico de $f(x) = x^2$, obtemos o gráfico de $g(x) = (x + 1)^2$.

d) (*V*) Aplicando a translação horizontal de uma unidade para a esquerda ao gráfico de $f(x) = x^2$, obtemos o gráfico de $g(x) = (x + 1)^2$.

e) (*V*) O gráfico de $h(x) = (x + 1)^2 - 1$ pode ser obtido a partir do gráfico de $f(x) = x^2$, deslocando-o uma unidade para a esquerda e uma unidade para baixo.

13) Com base nas questões 11 e 12, verifique que movimentos devem ser feitos a partir do gráfico da função $f(x) = x^2$ para obtermos o gráfico da função k(x) em cada caso e dê as coordenadas dos vértices dessas funções.

a) $k(x) = (x + 2)^2 - 3$

Deslocamento de duas unidades para a esquerda e três para baixo e V = (-2, -3).

b) $k(x) = (x – 2)^2 -1$

Deslocamento de duas unidades para a direita e uma para baixo e V = (2, - 1).

c) $k(x) = (x – 3)^2 + 4$

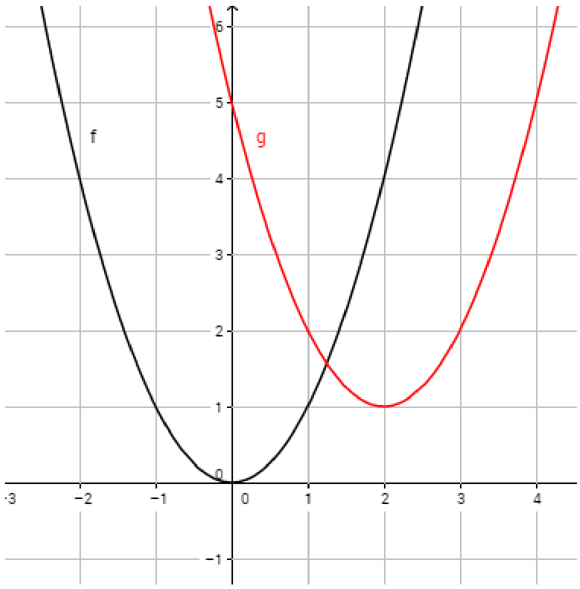
Deslocamento de três unidades para a direita e quatro para cima e V = (3, 4).

d) $k(x) = (x + 4)^2 + 4$

Deslocamento de quatro unidades para a esquerda e quatro para cima e V = (-4, 4).

14) Através de transformações no gráfico de $f(x) = x^2$ dado abaixo, construa neste mesmo plano cartesiano o gráfico da função $k(x) = (x – 2)^2 + 1$,

Figura 12: Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x - 2)^2 +1$



Fonte: Elaboração da autora.

3 – JOGO DOS ANÉIS CHINESES

1ª Parte: O jogo

Material:

Jogo composto por 5 hastes e 5 anéis.

Objetivo do jogo:

Retirar a estrutura de metal presa pelos anéis.

Regras:

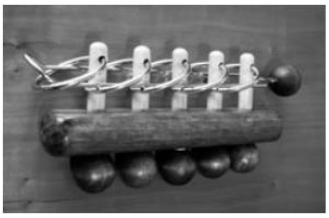
Um anel é considerado solto se estiver abaixo da estrutura metálica, caso contrário está preso. Considerando-se os anéis da esquerda para a direita, sendo o primeiro anel aquele mais a esquerda,

1) O primeiro anel pode soltar-se e prender-se em qualquer etapa do jogo.

2) Um outro anel só se solta/prende se o anel imediatamente à sua esquerda estiver preso e os demais da esquerda estiverem soltos.

Com base nas informações dadas, tente libertar todos os anéis.

Figura 13: Jogo dos anéis chineses



Fonte: Matemática Recreativa + *Puzzle* Anéis Chineses – 2007

Segunda parte: Investigação.

1) Complete a tabela com o número mínimo de movimentos necessários para soltar os anéis:

Tabela 17: Número mínimo de movimentos para se libertar n anéis

Número de anéis (n)	**Número mínimo de movimentos (M_n)**
1	*1*
2	*2*
3	*5*

Fonte: elaboração da autora.

2) Para facilitar a segunda parte do nosso trabalho, vamos representar a posição de cada anel através dos dígitos binários 0 e 1, sendo que 1 indica que o anel está preso e 0 que está solto. Descreva utilizando este sistema, os passos que você utilizou para soltar os 3 primeiros anéis,

isto é, você deve partir da posição 111 (os três anéis presos) e chegar em 000 (os três anéis soltos).

Posição inicial: 111.

1º - *011.*

2º - *010.*

3º - *110.*

4º - *100.*

5º - *000.*

3) Qual é o número mínimo de movimentos para libertar três anéis?

Para libertar três anéis são necessários cinco movimentos.

Nosso objetivo agora é encontrar uma lei que permita descobrir o número mínimo de movimentos para qualquer quantidade de anéis.

4) Faça uma lista de passos e a contagem dos movimentos para um jogo de quatro anéis.

Posição inicial: 1111 (Lembre-se, para soltar o quarto anel o terceiro deve estar preso e os dois primeiros soltos).

1º - Soltar os dois primeiros anéis para libertar o último, para soltar 2 anéis:

1011 – 0011- 0010.

2º - Para libertar o terceiro anel, precisamos prender os dois primeiros, soltar o primeiro e depois soltar o último:

1010 – 1110 – 0110 – 0100.

3º - Para terminar, colocamos o primeiro, libertamos o segundo e libertamos o primeiro:

1100 – 1000 – 0000.

Portanto os passos para a soltura de quatro anéis são:

1011 – 0011 – 0010 – 1010 – 1110 – 0110 – 0100 – 1100 – 1000 – 0000 (10 movimentos).

5) Faça uma lista de passos que devemos seguir para um jogo de cinco anéis. Você pode utilizar apenas os dígitos binários.

Posição inicial: 11111.

1º - Para soltar o quinto anel, o quarto deve estar preso e os três primeiros soltos:

111.

011- 010 – 110 – 100 – 000 (cinco movimentos).

Ficamos com 00011, que passamos para 00010 (um movimento).

2º - Prendemos os três primeiros:

000.

100 – 110 – 010 – 011 – 111 (cinco movimentos).

Ficamos com 11110.

3º - Para soltar os outros quatro anéis, repetimos todos os procedimentos para um jogo com quatro anéis já descrito anteriormente (10 movimentos). No total teremos 5 + 1 + 5 + 10 = 21 movimentos.

01111 – 01011 – 11011 – 10011 – 00011 – 00010 – 10010 – 11010 – 01010 – 01110 – 11110 - 10110 – 00110 – 00100 – 10100 – 11100– 01100 – 01000 – 11000 – 10000 – 00000 (21 movimentos).

3ª Parte: Fórmula de recorrência e Prova por Indução Matemática:

1) Vamos voltar ao nosso objetivo inicial, encontrar uma fórmula que permita calcular o número mínimo de movimentos para qualquer quantidade de anéis.

Chamaremos de M_n o número mínimo de movimentos para mover n anéis. Já sabemos que: $M_1 = 1$, então 1 movimento para soltar um anel e $M_2 = 2$, então 2 movimentos para soltar 2 anéis.

Veja, para um problema com n anéis, teremos que primeiro libertar o último, mas para isto é necessário fazer vários movimentos até se chegar em 0000...0011 (com n – 2 zeros), isto é, é preciso libertar n – 2 anéis e para libertar n – 2 anéis, são necessários M_{n-2} movimentos. Neste momento soltamos o último anel com um movimento e obtemos: 0000...0010.

Para continuar, torna-se necessário prender todos os n - 2 anéis para poder soltar o penúltimo, sendo necessário mais M_{n-2} movimentos e ficando com 111...110 (n – 1 algarismos uns). Neste momento, o jogo se torna um jogo menor, de n – 1 anéis, cuja resolução necessitará de M_{n-1} movimentos.

Logo, o número mínimo necessário de movimentos para soltar n anéis será:

$M_n = M_{n-2} + 1 + M_{n-2} + M_{n-1}$.

Simplificando a expressão e juntando os casos triviais, obtemos a seguinte relação de recorrência: $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_n = M_{n-1} + 2.M_{n-2} + 1$.

2) Usando a relação de recorrência acima, calcule:

a) M_3

$M_3 = M_2 + 2.M_1 + 1 = 2 + 2.1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 5$

b) M_4

$M_4 = M_3 + 2.M_2 + 1 = 5 + 2.2 + 1 = 5 + 4 + 1 = 10$

c) M_5

$M_5 = M_4 + 2.M_3 + 1 = 10 + 2.5 + 1 = 10 + 10 + 1 = 21$

d) M_6

$M_6 = M_5 + 2.M_4 + 1 = 21 + 2.10 + 1 = 21 + 20 + 1 = 42$

e) M_7

$M_7 = M_6 + 2.M_5 + 1 = 42 + 2.\ 21 + 1 = 42 + 42 + 1 = 85$

f) M_8

$M_8 = M_7 + 2.M_6 + 1 = 85 + 2.\ 42 + 1 = 85 + 84 + 1 = 170$

Podemos observar que o número de movimentos necessários para resolver o jogo, aumenta muito depressa. Por exemplo, para um jogo de 20 peças são necessários 699 050 movimentos e para trinta anéis seriam precisos 715 827 882 movimentos (Tarefa diabólica...). Este fato nos leva a considerar que M_n pode ser modelado através de uma função exponencial. (A função que apresenta crescimento rápido).

Existem formas de resolver essas expressões de recorrência, mas estas não serão tratadas aqui. Desenvolvendo as expressões de recorrência dadas chega-se ao termo geral:

M_n (com *n* par) $= \frac{2^{n+1}-2}{3}$

M_n (com *n* ímpar) $= \frac{2^{n+1}-1}{3}$

3) Confirme esta fórmula para:

a) n = 4

$M_n = \frac{2^{n+1}-2}{3}$

$M_4 = \frac{2^{4+1}-2}{3} = \frac{2^5-2}{3} = \frac{32-2}{3} = \frac{30}{3} = 10$

b) n = 5

$M_n = \frac{2^{n+1}-1}{3}$

$M_5 = \frac{2^{5+1}-1}{3} = \frac{2^6-1}{3} = \frac{64-1}{3} = \frac{63}{3} = 21$

4) Prove a validade da fórmula acima através do Princípio de Indução Finita.

1º) Mostre que as fórmulas valem para n = 1 e n = 2.

Podemos verificar facilmente que as fórmulas valem para n = 1 e n = 2.

$M_1(n\ é\ ímpar) = \frac{2^{1+1}-1}{3} = \frac{2^2-1}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$

$M_2(n\ é\ par) = \frac{2^{2+1}-2}{3} = \frac{2^3-2}{3} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2.$

2º) Supondo que a fórmula valha para um n natural qualquer, isto é, que

M_n (com n par) = $\frac{2^{n+1}-2}{3}$

M_n (com n ímpar) = $\frac{2^{n+1}-1}{3}$

mostre que vale para n + 1:

Pela fórmula de recorrência:

$M_n = M_{n-1} + 2.M_{n-2} + 1$ *e* $M_{n+1} = M_n + 2.M_{n-1} + 1$

Considerando n par, temos n-1 e n+1 ímpares, assim por hipótese de indução:

$M_{n+1} = \frac{2^{n+1}-2}{3} + 2.\frac{2^n-1}{3} + 1 = \frac{2^{n+1}-2}{3} + \frac{2.2^n-2}{3} + 1 = \frac{2^{n+1}-2}{3} + \frac{2^{n+1}-2}{3} + \frac{3}{3} =$

$= \frac{2.2^{n+1}-1}{3} = \frac{2^{n+2}-1}{3}.$ ■

CURIOSIDADE – CÓDIGOS GRAY

A sequência de resolução dos anéis chineses gera uma lista de números binários.

Veja novamente a lista para resolução de um jogo com cinco anéis:

11111 – 01111 – 01011 – 11011 – 10011 – 00011 – 00010 – 10010 – 11010 – 01010 – 01110 – 11110 – 10110 – 00110 – 00100 – 10100 – 11100 – 01100 – 01000 – 11000 – 10000 – 00000.

Esta sequência tem uma propriedade interessante, cada número difere do anterior e do seguinte por apenas um dígito.

Na matemática e na informática, este tipo de sequência designa-se por código Gray, cujo nome deriva do investigador Frank Gray, que inventou um método que usava este tipo de sequência em 1947, e que são úteis até hoje em diversas áreas como, por exemplo, em algoritmos de conversão e correção de dados utilizados em telecomunicações.

4 – A PIZZA DE STEINER

Qual é o número máximo de partes em que *n* retas podem dividir um plano?

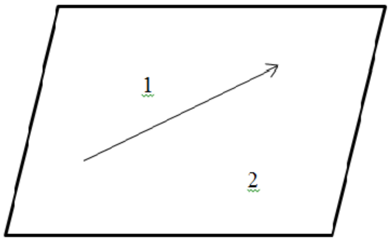
Para responder a esta pergunta vamos fazer uma investigação começando com os casos mais simples para depois generalizar para uma quantidade qualquer (n) de retas.

1ª Parte: Investigação

1) Faça os desenhos das retas em cada caso de modo que elas dividam o plano da folha em um número máximo de regiões e numere essas regiões.

a) Uma reta

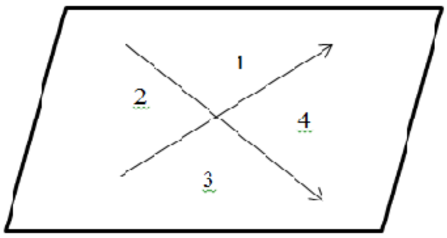
Figura 14: Plano seccionado por uma reta.



Fonte: Elaboração da autora

b) Duas retas

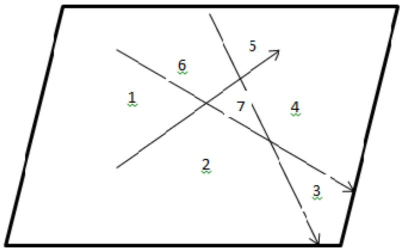
Figura 15: Plano seccionado por duas retas.



Fonte: Elaboração da autora

c) Três retas

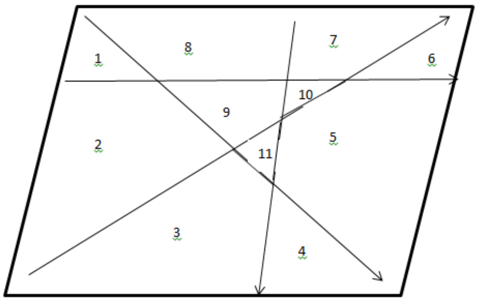
Figura 16: Plano seccionado por três retas.



Fonte: Elaboração da autora

d) Quatro retas

Figura 17: Plano seccionado por quatro retas.



Fonte: Elaboração da autora

2) Preencha a tabela:

Tabela 18: Número máximo de regiões geradas por n retas e número de novas regiões geradas com o acréscimo de uma reta.

n (número de retas)	**R_n (número de regiões em que o plano foi dividido)**	**a_n (número de novas regiões geradas com o acréscimo de uma reta)**
1	2	---
2	4	2
3	7	3
4	11	4
5	16	5
6	22	6
7	29	7

Fonte: elaboração da autora.

3) Complete a observação abaixo:

Observe que: A segunda reta corta a reta já existente acrescentando *duas* novas regiões ao total; A terceira reta corta as duas retas anteriores acrescentando *três* novas regiões ao total; A quarta reta corta as *três retas anteriores* acrescentando *quatro* novas retas ao total; Generalizando, a enésima reta cortará as *n-1 retas anteriores* acrescentando *n* novas retas ao total.

4) Com base nas observações anteriores, escreva uma fórmula de recorrência para o cálculo de R_n.

$R_1 = 2$ *e* $R_n = R_{n-1} + n$

5) Observando a tabela, os valores de *n* formam que tipo de sequência? E os valores de a_n?

Os valores de n formam uma progressão aritmética de razão 1 e os valores de na também formam uma progressão aritmética de razão 1.

A sequência obtida com os valores de R_n formam uma progressão aritmética de segunda ordem, isto é, uma sequência em que as diferenças entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior, formam uma progressão aritmética.

6) Encontre uma fórmula para o cálculo de R_n em função de *n*.

$$R_n = 2 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$= 1 + \frac{n^2 + n}{2}$$

Portanto temos que, $R_n = \frac{n^2 + n}{2} + 1.$

7) Prove a validade da fórmula acima através do Princípio da Indução Finita.

1º) Mostre que a fórmula vale para n = 1 e n = 2.

A fórmula vale para n = 1 e n = 2, pois:

$R_n = \frac{n^2 + n}{2} + 1$

$R_1 = \frac{1^2 + 1}{2} + 1 = \frac{1+1}{2} + 1 = \frac{2}{2} + 1 = 1 + 1 = 2 \quad (V).$

$R_2 = \frac{2^2 + 2}{2} + 1 = \frac{4+2}{2} + 1 = \frac{6}{2} + 1 = 3 + 1 = 4 \quad (V).$

2) Supondo que a fórmula valha para um n natural qualquer, isto é, que $R_n = \frac{n^2 + n}{2} + 1$.

Mostre que vale para n + 1:

Utilizando a fórmula de recorrência para n + 1, temos, $R_{n+1} = R_n + n$

Pela hipótese de indução

$$R_{n+1} = \frac{n^2 + n}{2} + 1 + n + 1$$

$$R_{n+1} = \frac{n^2 + n + 2 + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 2 + 2 - 1}{2}$$

$$R_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + n + 1 + 2}{2} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2} + \frac{2}{2} =$$

$$R_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2} + 1. \qquad \blacksquare$$

ANEXO B - Conceitos envolvidos

1) Sequência: Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Uma representação usual para sequência é $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$. Isto significa que a sequência dada é a função $1 \longmapsto a_1$, $2 \longmapsto a_2$, $3 \longmapsto a_3$, ..., $n \longmapsto a_n$, ..., a qual faz corresponder a cada número natural n o número real a_n, chamado n-ésimo termo da sequência.

Exemplos interessantes de sequências são as progressões.

2) Progressão Aritmética: Uma *Progressão Aritmética* (P.A.) é uma sequência

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...),$$

onde cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante *r* denominada razão da P.A., isto é, $a_{n+1} = a_n + r$.

Na P.A. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ésimo termo ou termo geral é

$a_n = a_1 + (n - 1).r$

Exemplo 1: (-1, 4, 9, 14, ...) é uma P.A. de razão r = 5, pois:

-1 + 5 = 4

4 + 5 = 9

9 + 5 = 14

...

Sua lei de formação é:

$a_n = -1 + (n - 1).5 = -1 + 5n - 5 = 5n - 6$.

3) Soma dos n primeiros termos de uma P.A.: A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada pela fórmula:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$.

Exemplo 2: Calcular a soma dos 20 primeiros termos da P.A.:(2,7,12,...,97)

$S_n = \frac{(2 + 97).20}{2} = \frac{(99).20}{2} = \frac{1980}{2} = 990$.

4) Progressão Geométrica: Chama-se Progressão Geométrica (P.G.) uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior com uma constante *q*, denominada razão da P.G..

Na P.G. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é *q*, o n-ésimo termo ou termo geral é

$a_n = a_1 . q^{n-1}$

Exemplo 3: (2, 6, 18, ...) é uma P.G. de razão q = 3, pois:

2 . 3 = 6

6 . 3 = 18

...

Sua lei de formação é:

$a_n = 2 . 3^{n-1}$.

5) Soma dos termos de uma P.G.: A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é dada por:

$S_n = \frac{a_1 .(q^n - 1)}{q-1}$,

onde a_1 é o primeiro termo, *q* é a razão e *n* é o número de termos considerados.

Exemplo 4: Na P.G. (2, 6, 18, 54, 162), a soma dos termos é:

$S_n = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 242$;

Ou, $S_n = \frac{a_1 .(q^n - 1)}{q-1} = \frac{2.(3^5 - 1)}{3-1} = \frac{2.(243-1)}{2} = \frac{2 . 242}{2} = \frac{484}{2} = 242$.

6) Função: Dados dois conjuntos não vazios A e B, tais que, $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagem em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Dada uma função f de A em B, o conjunto A chama-se domínio da função e denota-se por D(f), o conjunto B, contradomínio da função, denota-se por C.D.(f) e o conjunto formado pelos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$, é chamado conjunto imagem da função e denota-se por Im(f).

Exemplo 5: f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que f(x) = 2x + 1.

7) Função afim: Toda função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que, f(x) = ax + b, com a e b números reais, é denominada função afim.

Exemplo 6: f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, f(x) = 2x + 1, a = 2 e b = 1

8) <u>Função exponencial:</u> Chama-se função exponencial a toda função dada por uma lei de associação da forma $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a é uma constante positiva e $a \neq 1$.

Exemplo 7: $f(x) = 3^x$, a = 3.

9) <u>Função Quadrática ou Função Polinomial do 2º grau:</u> Chama-se função quadrática ou função polinomial do 2º grau, a toda função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por uma lei de associação da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a, b e c são constantes reais e $a \neq 0$.

Exemplo 8: $f(x) = 2x^2 + x - 4$, onde a = 2, b = 1 e c = - 4.

10) <u>Raízes ou zeros da função quadrática</u>: As raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores reais de x, tais que, f(x) = 0.

Exemplo 9: $f(x) = x^2 - 4x$, com a = 1, b = - 4 e c = 0.

Temos que suas raízes são:

$x^2 - 4x = 0$, $\Delta = b^2 - 4.a.c = (-4)^2 - 4.1.0 = 16 - 0 = 16$.

Logo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16}}{2.1} = \frac{4 \pm 4}{2}$$

Daí

$$x_1 = \frac{4+4}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ e } x_2 = = \frac{4-4}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Logo, as raízes ou zeros da função são $x_1 = 4$ e $x_2 = 0$.

11) <u>Coordenadas do vértice da parábola representativa da função quadrática:</u>

O ponto $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ máximo da parábola se a < 0, ou mínimo se a > 0, é chamado de vértice da parábola representativa da função quadrática.

Toda função quadrática pode ser escrita na forma:

$$y = a(x - x_v)^2 + y_v \tag{1}$$

Representada desse modo, ela nos fornece as coordenadas do vértice, isto é, $V = (x_v, y_v)$.

Exemplo 10: $f(x) = x^2 - 4x$.

Neste caso:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4.a} = \frac{-16}{4.1} = \frac{-16}{4} = -4.$$

Assim, a função pode ser escrita como $f(x) = (x - 2)^2 - 4$

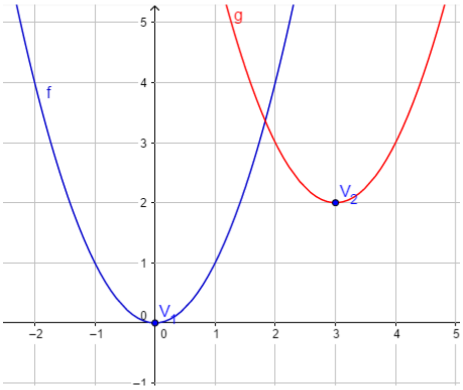
Observe que: $(x - 2)^2 - 4 = x^2 - 2.x.2 + 2^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4 = x^2 - 4x$.

12) <u>Translação da parábola representativa da função quadrática</u>:

Observe que uma função do tipo $f(x) = ax^2$, possui $x_v = 0$ e $y_v = 0$, isto é, o vértice estará na origem do sistema. Se comparado ao gráfico de uma função do tipo $y = a(x + m)^2 + c$, cujas coordenadas do vértice são $V = (-m, c)$ percebemos que o gráfico de $f(x)$ sofreu uma translação horizontal de $-m$ unidades na horizontal e c unidades na vertical.

Exemplo 11: O gráfico da função $g(x) = (x - 3)^2 + 2$, cujo vértice possui coordenadas (3, 2), pode ser obtido aplicando uma translação horizontal de três unidades para a direita e uma translação vertical de duas unidades para cima ao gráfico de $f(x) = x^2$ (Figura 18).

Figura 18: Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x - 3)^2 + 2$.



Fonte: Elaboração da autora.

13) <u>Recorrência</u>: Uma sequência é definida recursivamente se ela for dada por uma regra (recorrência) que permite calcular um termo qualquer (a_n) por meio de um ou mais termos anteriores(a_{n-1}, a_{n-2}, ...).

Exemplos:

a) Progressões aritméticas: Neste caso o termo geral é $a_n = a_{n-1} + r$.

Para (1, 3, 5, ...)

$a_1 = 1$,

$a_2 = a_1 + 2 = 3$,

$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$,

$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7$.

b) Progressões geométricas: O termo geral é $a_n = a_{n-1}.q$

Para (1, 2, 4, 8, ...)

$a_1 = 1$,

$a_2 = a_1 . 2 = 1 . 2 = 2$,

$a_3 = a_2 . 2 = 2 . 2 = 4$,

$a_4 = a_3 . 2 = 4 . 2 = 8$.

c) A sequência de Fibonacci (F_n), é um exemplo muito interessante de equação de recorrência. Seu nome é devido ao matemático italiano Leonardo de Pisa, conhecido como o filho de Bonacci. Esta sequência adquiriu muita fama devido a suas conexões com áreas das mais variadas, como Biologia, Arquitetura, Engenharia, Física, Química, Arte e muitas outras.

$F_1 = 1$; $F_2 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, se $n \geq 3$.

Logo, temos: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

14) <u>O Princípio da Indução Finita:</u> Uma proposição P(n), aplicável aos números naturais n, é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$quando:

1) $P(n_0)$ é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para $n = n_0$, e

2) Se $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ e P(n) é verdadeira, então P(n + 1)também é verdadeira.

Exemplo 12: Considere a igualdade:

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$,

que expressa a propriedade: "a soma dos n primeiros números ímpares positivos é n^2".

$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$ (V)

$n = 2 \Rightarrow 1 + 3 = 4 = 2^2$ (V)

$n = 3 \Rightarrow 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ (V)

...

$N = 10 \Rightarrow 1 + 3 + 5 + ... + 19 = 100 = 10^2$ (V)

Mesmo que continuemos o trabalho fazendo a verificação até n = 1 000 000, não estará provado que a fórmula vale para todo n natural, pois poderá existir um n>1 000 000 em que a fórmula falha.

Para provar que a relação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, vamos empregar o Princípio da Indução Finita:

Queremos provar a validez de:

$P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$

1º) Verifiquemos que P(1) é verdadeira

$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$

2º) Supondo que p(n), com $n \in IN^*$, seja verdadeira:

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ (hipótese da indução).

Provemos que decorre a validade de P(n + 1), isto é:

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + [2(n + 1) - 1] = (n + 1)^2$

Temos:

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

Mas esta última igualdade é P(n + 1). Logo $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Assim P(n) vale para todo $n \in IN$. Podemos então afirmar que a soma dos n primeiros números ímpares é igual ao quadrado de n.

ANEXO C - A lenda do jogo de xadrez

O texto abaixo é uma adaptação do capítulo 16 do livro “O homem que calculava” de Malba Tahan.

Em um tempo muito distante reinou na Índia na província da Tiligana um príncipe muito rico e generoso chamado Iadava.

A guerra com seu cortejo fatal veio amargar a existência desse rei. Iadava empunhou a espada à frente de um pequeno exército para repelir o ataque do aventureiro e brutal Varangul, que se dizia príncipe de Caliã. O rei possuía talento pela arte militar e elaborou um plano de batalha. Tão hábil e feliz foi em executá-lo, que venceu e aniquilou os perturbadores da paz do seu reino.

O triunfo, porém, custou-lhe pesados sacrifícios, muitos jovens pagaram com a vida a segurança do trono. Entre eles, com o peito varado por uma flecha, ficou no campo de combate o príncipe Adjamir, filho do rei Iadava, que se sacrificou para dar aos seus a vitória final.

Terminada a cruel batalha o rei se viu mergulhado em uma tristeza sem fim. Que valor poderiam ter, aos olhos de um pai, as riquezas materiais que não pagavam nunca a saudade de um filho adorado?

As peripécias da batalha em que pereceu o príncipe, não lhe saíam do pensamento. O infeliz monarca passava longas horas traçando sobre uma caixa de areia, as diversas manobras executadas pela tropa durante a batalha. Com um sulco indicava a marcha da infantaria; outro traço, paralelo ao primeiro, mostrava o avanço dos elefantes de guerra; um pouco mais abaixo, perfilava a destemida cavalaria. Ainda por meio de gráficos, o rei esboçava em desvantagem, graças à sua estratégia, a posição das colunas inimigas. Uma vez completado o quadro, o rei tudo apagava, para recomeçar novamente, como se sentisse íntimo gozo em reviver os momentos passados na angústia e ansiedade.

Os brâmanes erguiam preces, queimavam raízes aromáticas, pedindo à eterna zeladora dos enfermos, que amparasse o soberano.

Um dia, afinal, o rei mandou que trouxessem à sua presença, um jovem brâmane, pobre e modesto, que havia já algum tempo, pleiteava uma audiência com o rei.

- Meu nome é Sessa, venho da Aldeia de Namir, aonde chegou a notícia de que o nosso bondoso rei arrastava os dias em meio de profunda tristeza. Grande mal será para o país, pensei, se o nosso soberano se enclausurar dentro de sua própria dor. Inventei, pois, um jogo que pudesse distraí-lo e abrir seu coração para novas alegrias. É esse o desvalioso presente que ofereço ao nosso rei.

O rei não pode conter o desejo de ver e apreciar o presente sem mais demora.

O que Sessa trazia era um grande tabuleiro quadrado dividido em sessenta e quatro casas, sobre as quais eram posicionadas dois grupos de peças brancas e pretas, em formatos engenhosos.

O jogo simulava uma batalha e Sessa explicou pacientemente suas regras ao rei e aos vizires e cortezãos que ali se encontravam.

O rei, interessado pelas regras, não se cansava de interrogar o inventor:

- E por que é a rainha mais forte e poderosa que o rei?

- É mais poderosa - argumentou Sessa – porque a rainha representa o patriotismo do povo. Como poderia o rei resistir ao ataque dos adversários, se não contasse com o espírito de abnegação e sacrifício daqueles que o cercam?

Dentro de poucas horas, o rei, que aprendera rapidamente as regras do jogo, já derrotava os vizires em partidas que se desenrolavam impecáveis sobre o tabuleiro.

Em dado momento, o rei fez notar, com grande surpresa, que o jogo parecia reproduzir exatamente, a batalha de Dacsina.

- Reparai - ponderou o inteligente brâmane – que para conseguirdes a vitória, indispensável se torna, de vossa parte, o sacrifício deste vizir!

E indicou precisamente a peça que o rei vinha tentando proteger e conservar.

Sessa demonstrava deste modo, que o sacrifício de um príncipe é, por vezes, imposto como fatalidade, para que dele resultem a paz e a liberdade de um povo.

Ao ouvir tais palavras, o rei Iadava, sem ocultar o entusiasmo que lhe dominava o espírito assim falou:

- Não creio que o engenho humano possa produzir maravilha comparável a esse jogo interessante e instrutivo! Movendo estas tão simples peças, aprendi que um rei nada vale sem o auxílio e a dedicação constante de seus súditos. E que, às vezes, o sacrifício de um simples peão vale mais, para a vitória, do que a perda de uma poderosa peça.

E, dirigindo-se ao jovem brâmane, disse:

- Quero recompensar-te, meu amigo, por este valioso presente, que tanto me serviu para alívio de velhas angústias. Dize-me, pois, o que desejas, para que eu possa demostrar o quanto sou grato àqueles que se mostram dignos de recompensa.

- Rei soberano – redarguiu o jovem com doçura e altivez – não desejo outra recompensa além da satisfação de ter proporcionado ao senhor de Taligana, um passatempo que lhe vem aligeirar as horas antes alongadas por acabrunhante melancolia. Já estou, portanto, recompensado, e outra qualquer paga me seria excessiva.

O rei não aceitou a recusa:

- Exijo que escolhas uma recompensa digna da sua valiosa oferta. Queres uma bolsa cheia de ouro? Desejas uma arca repleta de joias? Um palácio? A administração de uma província? Aguardo a tua resposta. À minha promessa está ligada a minha palavra.

- Recusar o vosso oferecimento depois de vossas últimas palavras – acudiu Sessa - seria uma descortesia. Vou, pois, aceitar, uma recompensa que corresponde à vossa generosidade; não desejo, contudo, nem ouro, nem terras, nem palácios. Peço o meu pagamento em grãos de trigo.

- Grãos de trigo - estranhou o rei – como poderei te pagar com tão insignificante moeda?

- Simples – elucidou Sessa – dar-me-eis um grau pela primeira casa do tabuleiro; dois pela segunda; quatro pela terceira; oito pela quarta, e, assim, dobrando sucessivamente, até a sexagésima quarta e última casa do tabuleiro.

Todos os presentes riram-se ao ouvir a estranha solicitação do jovem. O moço brâmane, que poderia obter do rei um palácio ou uma província, contentava-se com grãos de trigo!

- Insensato – clamou o rei – A recompensa que me pedes é ridícula. Enfim, visto que minha foi dada, vou expedir ordens para que o pagamento se faça imediatamente, conforme teu desejo.

Mandou o rei chamar os algebristas mais hábeis da corte e ordenou-lhes que calculassem a porção de trigo que Sessa pretendia.

Os sábios calculistas, ao cabo de algumas horas de estudos, voltaram ao salão:

- Rei magnânimo! – declarou o mais sábio dos matemáticos – Calculamos o número de grãos de trigo que constituirá o pagamento pedido por Sessa, e obtivemos um número cuja grandeza é inconcebível para a imaginação humana. A porção de trigo que deve ser a Sessa equivale a uma montanha que, tendo por base a cidade de Taligana, seria cem vezes mais alta do que o Himalaia! A Índia inteira, semeada todos os seus campos, taladas todas as suas cidades, não produziria em 2 000 séculos a quantidade de trigo que, pela vossa promessa, cabe ao jovem Sessa!

Como descrever aqui a surpresa e o assombro que essas palavras causaram ao rei Iadava?

O soberano via-se, pela primeira vez, impossibilitado de cumprir a palavra dada.

Sessa, como bom súdito, não quis deixar aflito o seu soberano. Depois de abrir mão publicamente do pedido que fizera, dirigiu-se respeitosamente ao monarca, e assim falou:

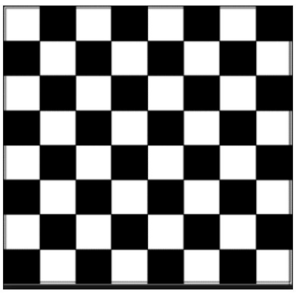
- Meditai, ó rei, sobre a grande verdade que os prudentes repetem: Os homens mais avisados iludem-se, não só diante da aparência enganadora dos números, mas também com a falsa modéstia dos ambiciosos. Infeliz daquele que toma sobre os ombros o compromisso de uma dívida cuja grandeza não pode avaliar com a tábua de cálculo da sua própria argúcia. Mais avisado é o que muito pondera e pouco promete!

E, após ligeira pausa, acrescentou:

- Menos aprendemos com a ciência vã dos brâmanes do que com a experiência direta da vida e das suas lições de todo dia, a toda hora desdenhadas! O homem que mais vive mais sujeito está às inquietações morais. Achar-se-á hora triste, hora alegre; hoje fervoroso, amanhã tíbio; já ativo, já preguiçoso; a compostura alternará com a leviandade. Só o verdadeiro sábio, instruído nas regras espirituais, se eleva acima dessas vicissitudes, paira sobre todas essas alternativas!

Essas sábias palavras calaram fundo no espírito do rei. Esquecido da montanha de trigo que, sem querer, prometera ao jovem, nomeou-o seu primeiro-vizir.

Figura 19: Tabuleiro do jogo de xadrez.



Fonte: http://veja.abril .com.br