UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JULIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

CRISTIAN HANSEN

CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DE SISTEMAS MECÂNICOS COM COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR

ILHA SOLTEIRA
2015

CRISTIAN HANSEN

CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DE SISTEMAS MECÂNICOS COM COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Samuel da Silva

ILHA SOLTEIRA

2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

H249c

Hansen, Cristian.
Caracterização experimental de sistemas mecânicos com comportamento não-linear / Cristian Hansen. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2015
74 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2015

Orientador: Samuel da Silva
Inclui bibliografia

1. Sistemas mecânicos não-Lineares. 2. Séries de Volterra. 3. Detecção de variação estrutural. 4. Quantificação de comportamento não-linear.

unesp **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Caracterização Experimental de Sistemas Mecânicos com Comportamento Não-linear

AUTOR: CRISTIAN HANSEN
ORIENTADOR: Prof. Dr. SAMUEL DA SILVA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica , Área: MECANICA DOS SÓLIDOS, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. SAMUEL DA SILVA
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. JOAO ANTONIO PEREIRA
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. AMERICO BARBOSA DA CUNHA JUNIOR
Instituto de Matemática e Estatística / Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Data da realização: 20 de agosto de 2015.

Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.

Agradecimentos

Agradeço ao orientador Prof. Samuel da Silva[I] pela orientação desde 2011, em especial durante esta dissertação, ao colega de pós-graduação Sidney Bruce Shiki[II] pelas rotinas de identificação desenvolvidas em código Octave/Matlab®.

Ao suporte técnico e de infraestrutura da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP[III]) - Campus de Ilha Solteira.

Ao apoio financeiro da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP[IV]) ao processo Jovem Pesquisador nº 2012/09135 – 3[V], ao Edital Universal do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq[VI]) processo nº 470582/2012 – 0, à bolsa da FAPESP de mestrado processo 2013/09008 – 4[VII] e bolsa Bolsa de Estagio e Pesquisa no Exterior - BEPE processo FAPESP nº 2014/02431 – 1[VIII].

Juntamente com o meu orientador gostaria de agradecer à hospitalidade dos professores Emmanuel Foltête[IX] e Scott Cogan[X] durante nossa estadia no *Institut FEMTO-ST*[XI] pertencente à *Université de Franche-Comté* (UFC[XII]) em Besançon - França em 2014 para a realização do estágio/sanduíche (BEPE). Gostaria também de agradecer à hospitalidade do professor Gianluca Gatti[XIII] durante minha breve estadia na *Università della Calabria* (UNICAL[XIV]) em Cosenza - Itália em novembro de 2014.

Eu agradeço também ao CNPq e a Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de Minas Gerais (FAPEMIG[XV]) por financiar parcialmente a presente pesquisa trabalhando com o Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT-EIE[XVI]).

[I] http://lattes.cnpq.br/6807553800607803
[II] http://lattes.cnpq.br/0573973677787523
[III] http://www.feis.unesp.br
[IV] http://www.fapesp.br
[V] http://www.bv.fapesp.br/pt/auxilios/55159
[VI] http://www.cnpq.br
[VII] http://www.bv.fapesp.br/pt/bolsas/144703
[VIII] http://www.bv.fapesp.br/pt/bolsas/150820
[IX] https://scholar.google.com/citations?user=Jz1x_ukAAAAJ&hl=fr
[X] https://scholar.google.com/citations?user=xBSl_e8AAAAJ&hl=en
[XI] http://www.femto-st.fr/
[XII] http://www.univ-fcomte.fr/
[XIII] https://scholar.google.co.uk/citations?user=R9JJ_xIAAAAJ&hl=en
[XIV] https://www.unical.it
[XV] http://www.fapemig.br/
[XVI] http://inct.cnpq.br/web/inct-eie

FAPESP

inct
institutos nacionais
de ciência e tecnologia

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento
Científico e Tecnológico

unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

femto-st
SCIENCES &
TECHNOLOGIES

UNIVERSITÀ
DELLA CALABRIA

♪♪ "...

You start a conversation you can't even finish it
You're talkin' a lot, but you're not sayin' anything

..."♪♪

--- *Psycho Killer* - Talking Heads

Resumo

Grande parte dos projetos estruturais atuais buscam por concepções mais econômicas, o que leva à estruturas mais leves e flexíveis. Estruturas assim podem apresentar comportamento não-linear devido às grandes deformações. Se faz então necessário o uso de modelos que incluam o comportamento não-linear, a maioria destes modelos buscam incluir uma função matemática que represente os mecanismos não-lineares presentes. Estruturas vibrando em regime não-linear de movimento podem ter efeitos diversos como saltos, ciclos limites, interação modal, existência de múltiplas harmônicas etc. As séries de Volterra são apresentadas e utilizadas como ferramenta na identificação de sistemas não-lineares. Posteriormente, os modelos de Volterra são empregados na detecção de variação estrutural em sistemas mecânicos que apresentam comportamento não-linear inerente (no estado saudável). Esta técnica baseia-se na identificação dos núcleos de Volterra expandidos na uma base ortonormal de Kautz. Os núcleos de Volterra são usados para filtrar as contribuições lineares e não-lineares. Para ilustrar a aplicabilidade da técnica diversos testes experimentais são realizados em três bancadas experimentais que simulam estruturas com não-linearidades do tipo *hardening* e *softening*. Os sinais de excitação são aplicados com diferentes níveis de amplitude para observar o comportamento de vibração não-linear. Variações estruturais são simuladas nas estruturas, a partir de cargas ou alteração do acoplamento magnético. Os resultados obtidos permitem-nos mostrar a eficácia das séries de Volterra para a detecção de variação estrutural e quantificação de comportamento não-linear em sistemas mecânicos não-lineares.

Palavras-chave: Sistemas mecânicos não-lineares. Séries de Volterra. Detecção de variação estrutural. Quantificação de comportamento não-linear.

Abstract

A large number of structural engineering designs are seeking for more economic concepts, which leads to lightweight and flexible structures. These structures have nonlinear behavior caused by large deformations. In that case, it is need to use models that include a mathematical function to represent the possible nonlinear behavior. The first step to find a model to describe the nonlinearities is to identify the presence of some nonlinear mechanisms, as for instance, jump, multi-harmonics, modal interactions etc. The Volterra series are introduced and used as tool on identification of nonlinear systems. After that, Volterra models are used on detection of structural changes on mechanical systems with inherent nonlinear behavior (in the healthy condition). This technique is based on identification of the Volterra kernels expanded in an orthonormal Kautz basis. The Volterra kernels are used to filter the linear and nonlinear contributions. To illustrate the results, several experimental tests are performed in three test rigs which simulate nonlinear behavior, both, hardening and softening. The excitations signals are applied with different amplitude levels to observe the non-linear vibration behavior. Structural changes are simulated in the systems by loads or magnetic coupling. The results obtained allow us to show the effectiveness of Volterra series for detection of structural changes and quantification of nonlinear behavior on nonlinear mechanical systems.

Keywords: Nonlinear mechanical systems. Volterra series. Structural changes detection. Quantification of nonlinear behavior.

Lista de Símbolos

$\mathcal{B}_\eta$	-	Núcleo de Volterra na base de Kautz
c	-	Amortecimento viscoso em Ns/m
c_{F}	-	Coeficiente de amortecimento de Coulomb
d	-	Deslocamento que incrementa a rigidez bilinear em m
$\boldsymbol{e}$, $e(k)$	-	Vetor de erro
$\mathcal{H}_\eta$	-	Núcleo de Volterra de ordem η na base de Kautz
E_η	-	Energia da contribuição do η-ésimo núcleo
$f(t)$	-	Força de excitação em N
$f_{\text{d}}(t)$	-	Força do amortecimento de Coulomb
f_{k}	-	Força de restituição em N
$F(\Omega)$	-	Força de excitação no domínio da frequência
F_{ob}	-	Função objetivo utilizada na otimização
F_{s}	-	Frequência de amostragem
$\mathscr{H}(\Omega)$	-	Função de resposta em frequência
$\mathcal{H}_\eta$	-	Núcleo de Volterra de ordem η
J_η	-	Número de amostras na projeção dos núcleos
k, k_1	-	Rigidez linear em N/m
k_3	-	Rigidez cúbica em N/m^3
l_{i_j}	-	Sinal de entrada $u(k)$ filtrado pelos filtros de Kautz, φ_i
m	-	Massa em kg
N	-	Número de amostras necessárias pra representar os núcleos
$R_{\text{yf}}(l)$	-	Função de correlação cruzada
$R_{\text{yy}}(l)$	-	Função de autocorrelação
s_η	-	Parâmetros de Kautz em tempo contínuo do η-ésimo núcleo
S_{yf}	-	Densidade espectral de potência cruzada
S_{yy}	-	Densidade espectral de potência
$u(k)$, $\boldsymbol{u}$	-	Sinal de excitação de um sistema no domínio discreto
$y(k)$, $\boldsymbol{y}$	-	Sinal de resposta de um sistema no domínio discreto
$y(t)$	-	Deslocamento em m
$\boldsymbol{y}_{\text{exp}}$, $y_{\text{exp}}(k)$	-	Vetor com a resposta experimental
$\boldsymbol{y}_{\text{mod}}$, $y_{\text{mod}}(k)$	-	Vetor com a resposta do modelo

$Y(\Omega)$ - Deslocamento no domínio da frequência

z - Variável complexa no domínio discreto

$\dot{y}(t)$ - Velocidade em m

$\ddot{y}(t)$ - Aceleração em m/s^2

Letras Gregas

α	-	Constante real qualquer
β	-	Constante real qualquer
β_η	-	Polo de Kautz no domínio discreto
$\bar{\beta}_\eta$	-	Conjugado de β_η
γ^2	-	Função de coerência
$\mathbf{\Gamma}$	-	Vetor como os dados utilizados na otimização
$\mathbf{\Delta}$	-	Vetor com os parâmetros de Kautz a otimizar
$\mathbf{\Delta}_{\text{low}}$	-	Limite inferior do vetor com os parâmetros de Kautz a otimizar
$\mathbf{\Delta}_{\text{up}}$	-	Limite superior do vetor com os parâmetros de Kautz a otimizar
η	-	Ordem do núcleo de Volterra
ϑ	-	Índice de quantificação de comportamento não-linear
κ_η	-	Percentual de contribuição do η-ésimo núcleo na resposta total
λ_η	-	Indicador de variação estrutural
ξ_1, ξ_{lin}	-	Fator de amortecimento do núcleo linear
ξ_2, ξ_{quad}	-	Fator de amortecimento do núcleo quadrático
ξ_3, ξ_{cub}	-	Fator de amortecimento do núcleo cúbico
ξ_η	-	Fator de amortecimento do polo de Kautz do η-ésimo núcleo
$\sigma(*)$	-	Operador desvio padrão
$\mathbf{\Phi}$	-	Vetor de otimização
$\psi_{i_j}(n_j)$	-	Filtro de Kautz
$\Psi_{\eta,2i}(z)$	-	Funções de Kautz
ω_1, ω_{lin}	-	Frequência do núcleo linear
ω_2, ω_{quad}	-	Frequência do núcleo quadrático
ω_3, ω_{cub}	-	Frequência do núcleo cúbico
ω_η	-	Frequência do polo de Kautz
Ω	-	Variável indicativa do domínio da frequência

Lista de Siglas

SHM	-	*Structural Health Monitoring*
LANL	-	*Los Alamos National Lab*
FRF	-	Função de resposta em frequência
NMSE	-	*Normalized Mean Square Error-prediction*
SQP	-	*Sequential Quadratic Programming*
PSD	-	*Power Spectral Density* (Densidade Espectral de Potência)
TOF	-	*Time Of Flight* (Tempo de voo - tempo que ocorre a máxima amplitude)

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Página

1 Introdução

Este capítulo apresenta uma breve introdução sobre a necessidade de analisar fenômenos não-lineares e como realizar o monitoramento da saúde estrutural de sistemas mecânicos que apresentem comportamento não-linear inerente. Por fim, os objetivos e organização desta dissertação.

1.1 Motivação para estudo de sistemas mecânicos não-lineares

Na maioria das aplicações de monitoramento de saúde estrutural (SHM[1]) o comportamento da estrutura é considerado puramente linear. Assim, quaisquer fenômenos não-lineares que possam aparecer na resposta da estrutura não são incluídos na estimativa do modelo. Isso significa dizer que o modelo não consegue discernir entre alterações da condição estrutural daquelas da própria natureza do comportamento (linear e/ou não-linear).

Mesmo com esta limitação um modelo puramente linear pode funcionar corretamente, desde que, seja empregado em condições onde, caso exista, variações estruturais acarretem no aparecimento de comportamento não-linear na resposta da estrutura. Isto significa dizer que todo e qualquer comportamento não-linear é devido a presença apenas de variação estrutural como trinca, delaminação, flambagem etc. Entretanto, para isto ser válido e confiável, o sistema na condição saudável deve responder de maneira puramente linear para toda a faixa analisada, seja ela de frequência ou amplitude de excitação.

Porém, isto limita muito a abrangência da aplicação de SHM em estruturas que não respeitam estas limitações. Uma vez que, efeitos não-lineares aparecem na maioria das estruturas de engenharia que operam com grandes deslocamentos seja por serem muito flexíveis, e/ou conexões flexíveis ou ainda que tenham alguma característica peculiar nas relações constitutivas (e.g., fluido magnetoreológico) de seus materiais. Comportamento não linear podem também ser observado quando da aplicação de excitações de alta amplitude e pré-cargas, conduzindo à efeitos altamente não-lineares, como saltos, ciclo limite, múltiplos harmônicos, descontinuidades, dentre outros.

Assim, deveria ser uma primícia básica considerar o comportamento não-linear na análise de sistemas que apresentem algum tipo de efeito não-linear, conforme diversos autores apontam (VIRGIN, 2000; WORDEN; TOMLINSON, 2001; KERSCHEN et al., 2006). Neste conceito, uma maneira de proceder a análise é assumindo a situação mais

[1] do inglês *Structural Health Monitoring*.

complexa, que ocorre quando a estrutura já deve ser considerada não-linear na condição saudável (BORNN; FARRAR; PARK, 2010). Esta consideração é imprescindível quando efeitos não-lineares sofrem alteração em função do nível de amplitude de excitação e podem ser confundidos erroneamente com a existência de dano (WORDEN et al., 2008), assim o modelo de referência (saudável) deve poder representar comportamento não-linear.

Infelizmente, as técnicas para detecção de variação estrutural em sistemas mecânicos não-lineares carecem de pesquisa e desenvolvimento e ainda não estão em um nível de maturidade avançado como no casos das técnicas aplicadas em sistemas lineares. Mas, a adoção de um modelo não-linear pode não ser adequado para estruturas que apresentem comportamento puramente ou aproximadamente linear, pois pode gerar um aumento do custo de modelagem. Além de que, forçar um modelo a ter parcelas de características não-lineares pode mascarar incertezas de modelagem e/ou de medição. Então, torna-se necessário um conhecimento prévio das características do sistema objetivando a melhor abordagem a se adotar, linear ou não-linear.

Tendo isto em foco, esta dissertação apresenta uma base teórica de fenômenos indicadores que auxiliam na identificação e caracterização de não-linearidades em sistemas mecânicos. Ao longo do trabalho são apresentadas três aplicações experimentais, exemplificando algumas situações em que sistemas mecânicos podem apresentar comportamento não-linear. Os fenômenos não-lineares são inicialmente classificados utilizando dados experimentas através de métodos clássicos.

1.2 Técnicas de SHM aplicadas a sistemas não-lineares

Com relação ao monitoramento da saúde estrutural de sistemas não-lineares, as abordagens mais comuns encontradas na literatura envolvem modelos e técnicas que levam em conta que a dinâmica do sistema em análise é puramente linear (NICHOLS; TODD, 2009). Usualmente, o comportamento não-linear está associado ao dano, ou seja, a presença de comportamento não-linear indica a presença de dano. Neste caso, o procedimento de detecção de danos pode ser resumido como uma detecção de comportamento não linear. Porém, como dito anteriormente, há muitas situações em que o comportamento não-linear do sistema deve, necessariamente, ser considerado para um monitoramento aceitável.

Quando a estrutura é monitorada assumindo ter comportamento não-linear inerente na sua gama de funcionamento, consequentemente, não pode ser tratada por meio de técnicas e modelos puramente lineares. Um relatório do LANL[2] mostra a importância que fenômenos não-lineares desempenham nas aplicações da engenharia, principalmente, para as áreas de SHM e identificação de modelos para estruturas com comportamento

[2] *Los Alamos National Lab* - https://www.lanl.gov

não-linear no estado de referência (saudável) (FARRAR et al., 2007).

Com o interesse contínuo de otimizar o desempenho das mais diversas estruturas, faz-se necessária a busca por concepções cada vez mais leves e flexíveis. Para isto, diversos elementos estruturais são substituídos por sucessores mais tecnológicos, por vezes compostos por materiais com relação constitutiva não-linear, ou mesmo com características geométricas complexas, ou ainda, em condições de contorno que propiciam a geração de fenômenos não lineares (KERSCHEN et al., 2006). Nestes casos, é evidente a necessidade prática de técnicas SHM que levam em conta a dinâmica não-linear dos sistemas.

Na identificação de sistemas não-lineares, dentre as técnicas disponíveis, as séries Volterra são atraentes pois são uma generalização do modelo linear bem conhecido, baseado na função de resposta ao impulso. O cerne desta formulação esta na representação da saída de um sistema com comportamento não-linear usando múltiplas convoluções entre os núcleos de Volterra e o sinal de excitação (RUGH, 1991).

Neste contexto, esta dissertação apresenta as séries de Volterra para obtenção de modelos não-lineares, assim como, o uso dos modelos de Volterra como ferramenta na detecção de variação estrutural e/ou danos com base em dados experimentais buscando exemplificar e confirmar a funcionalidade da técnica.

1.3 Objetivos

A meta deste trabalho é verificar e revisar indicadores clássicos que podem ser usados para detectar e identificar comportamento não-linear em estruturas de engenharia e comprovar por meio de análise experimental que métricas sensíveis a presença de danos estruturais podem apresentar falso positivo se o comportamento e o regime de trabalho admitir regime não-linear. Adicionalmente, mostrar por meio de não-linearidades polinomiais e elásticas que as séries de Volterra podem ser úteis na proposição de métricas sensíveis a existência de variações estruturais.

1.4 Organização do trabalho

O trabalho esta dividido em 6 capítulos da seguinte forma:

- Capítulo 1: breve introdução sobre a necessidade de estudar estruturas não-lineares, SHM em sistemas não-lineares e objetivos;
- Capítulo 2: base teórica sobre as séries de Volterra, o uso dos modelos de Volterra na identificação de comportamento não linear e a metodologia da aplicação destes

modelos na proposição de índices sensíveis à variação estrutural;

- Capítulo 3: identificação e caracterização do fenômeno não-linear presente, assim como a identificação de um modelo não-linear e sua aplicação em SHM em dados experimentais de uma viga protendida;
- Capítulo 4: identificação e caracterização do fenômeno não-linear presente, assim como a identificação de um modelo não-linear e sua aplicação em SHM em dados experimentais de uma viga magnetoelástica;
- Capítulo 5: identificação e caracterização do fenômeno não-linear presente, assim como a identificação de um modelo não-linear em dados experimentais de uma estrutura de que simula a dinâmica de um painel solar;
- Capítulo 6: considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2 Séries discretas de Volterra

Este capítulo apresenta, inicialmente, uma apresentação das séries discretas de Volterra, suas limitações e a expansão em funções ortogonais. Na sequência, uma seção trata sobre detecção de comportamento não-linear usando séries de Volterra. E por fim, o uso das séries de Volterra como ferramenta na detecção de danos.

As séries discretas de Volterra podem representar adequadamente diferentes sistemas não-lineares a partir da generalização do conceito de convolução (SCHETZEN, 1980; RUGH, 1991). Assim, a representação de uma resposta discreta no tempo, $y(k)$, de um sistema não-linear pode ser descrita por:

$$y(k) = \sum_{\eta=1}^{+\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{n_\eta=-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_\eta(n_1 \cdots n_\eta) \prod_{i=1}^{\eta} u(k\text{-}n_i) \tag{1}$$

$$y(k) = \sum_{\eta=1}^{+\infty} y_\eta(k) = y_1(k) + y_2(k) + y_3(k) + \cdots \tag{2}$$

sendo $u(k)$ o sinal de entrada, $\mathcal{H}_\eta(n_1 \cdots n_\eta)$ o núcleo de Volterra de η-ésima ordem, $y_1(k)$ a componente linear de $y(k)$, $y_2(k)$ e $y_3(k)$ as componentes quadrática e cúbica, e assim por diante.

Geralmente, a expansão do modelo de Volterra é truncada na ordem baixa de termos, geralmente $\eta = 1, 2, 3$. Quando se considera não-linearidades suaves com memória finita (e.g. não-linearidade polinomial), isto não implica em problemas. Alguns autores afirmam ser possível aproximar não-linearidades descontínuas com polinômios, permitindo assim, uma representação de Volterra (MILANESE, 2009; CHATTERJEE, 2010).

Devido aos núcleos de alta ordem ($\eta = 2, 3$) são necessários tensores com dimensões elevadas, da ordem de η, requerendo armazenamento de um grande número de termos, da ordem de N^η, onde N é o número de amostras necessárias pra representar cada núcleo de Volterra. Mesmo em um modelo que considera apenas os primeiros núcleos de Volterra, isto pode se agravar, ainda mais, caso o sistema possua uma grande memória, ou seja, N grande. Uma forma de contornar este problema é representar os núcleos de Volterra com funções ortonormais $\psi_{i_j}(n_j)$, como, por exemplo, as funções de Laguerre ou os filtros de Kautz.

As funções de Kautz são apropriadas para representar oscilações subamortecidas e podem ser descritas por (KAUTZ, 1954):

$$\Psi_{\eta,2i}(z) = \frac{\sqrt{(1\text{-}c_\eta^2)(1\text{-}b_\eta^2)z}}{z^2+b_\eta(c_\eta\text{-}1)z\text{-}c_\eta}\left[\frac{\text{-}c_\eta z^2+b_\eta(c_\eta\text{-}1)z+1}{z^2+b_\eta(c_\eta\text{-}1)z\text{-}c_\eta}\right]^{g\text{-}1} \tag{3}$$

$$\Psi_{\eta,2i\text{-}1}(z) = \frac{\sqrt{1\text{-}c_\eta^2}z(z\text{-}b_\eta)}{z^2+b_\eta(c_\eta\text{-}1)z\text{-}c_\eta}\left[\frac{\text{-}c_\eta z^2+b_\eta(c_\eta\text{-}1)z+1}{z^2+b_\eta(c_\eta\text{-}1)z\text{-}c_\eta}\right]^{g\text{-}1} \tag{4}$$

sendo z a variável complexa no domínio discreto e:

$$b_\eta = \frac{\beta_\eta+\bar{\beta}_\eta}{1+\beta_\eta\bar{\beta}_\eta}; \qquad c_\eta = \text{-}\beta_\eta\bar{\beta}_\eta \tag{5}$$

sendo β_η e $\bar{\beta}_\eta$ o polo de Kautz e seu conjugado que descreve o η-ésimo núcleo.

Os parâmetros de Kautz em tempo continuo (s_η) podem ser relacionados à dinâmica da estrutura por: $s_\eta = \text{-}\xi_\eta\omega_\eta+j\omega_\eta\sqrt{1\text{-}\xi_\eta^2}$, onde ξ_η e ω_η são a razão de amortecimento e a frequência que descrevem o η-ésimo núcleo do m-ésimo modo de vibrar, respectivamente. Para utilização destes parâmetros é necessário converter o polo s_η para o domínio discreto através da transformação bilinear $\beta_\eta = e^{s_\eta/F_s}$, sendo F_s a frequência de amostragem do sinal. Então, utiliza-se o polo de Kautz no domínio discreto β_η da Eq. (5) de modo a construir as funções ortonormais das Eqs. (3) e (4).

Nesse caso, os núcleos de Volterra podem ser aproximados com um número finito de filtros J_η:

$$\mathcal{H}_\eta(n_1 \cdots n_\eta) \approx \sum_{i_1=1}^{J_1} \cdots \sum_{i_\eta=1}^{J_\eta} \mathcal{B}_\eta(i_1 \cdots i_\eta)\prod_{j=1}^{\eta}\psi_{i_j}(n_j) \tag{6}$$

sendo $\mathcal{B}_\eta(i_1 \cdots i_\eta)$ a projeção dos núcleos de Volterra na base $\psi_{i_j}(n_j)$ de funções de Kautz e $J_1, ..., J_\eta$ o número de amostras utilizado na projeção dos núcleos de Volterra. Neste contexto, as séries de Volterra podem ser reescritas como uma convolução multidimensional entre os núcleos ortonormais $\mathcal{B}_\eta(i_1 \cdots i_\eta)$ e o sinal $l_{i_j}(k)$:

$$y(k) \approx \sum_{\eta=1}^{+\infty}\sum_{i_1=1}^{J_1} \cdots \sum_{i_\eta=1}^{J_\eta} \mathcal{B}_\eta(i_1 \cdots i_\eta)\prod_{j=1}^{\eta} l_{i_j}(k) \tag{7}$$

sendo $l_{i_j}(k)$ o sinal de entrada $u(k)$ filtrado pelas funções de Kautz $\psi_{i_j}(n_j)$:

$$l_{i_j}(k) = \sum_{n_i=0}^{V-1}\psi_{i_j}(n_i)u(k\text{-}n_i) \tag{8}$$

sendo $V = \text{máx}\,[J_1 \cdots J_\eta]$.

Os termos dos núcleos ortonormais $\mathcal{B}_\eta(i_1 \cdots i_\eta)$ podem, então, ser agrupados em um vetor $\mathbf{\Phi}$ e estimados via mínimos quadrados:

$$\mathbf{\Phi} = (\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Gamma})^{-1}\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{9}$$

onde a matriz $\mathbf{\Gamma}$ contém o sinal de entrada filtrado $l_{i_j}(k)$ e a saída $\boldsymbol{y} = [y(1) \cdots y(K)]$, sendo K o número de amostras usados para representar cada resposta. Maiores detalhes do uso desta formulação na identificação de sistemas mecânicos não-lineares podem ser encontrados em Silva, Cogan e Foltête (2010) ou Silva (2011). O grupo do orientador, incluindo o próprio candidato, já possuem ampla experiência nestes processos, inclusive com um pacote computacional em processo de registro para cálculo automático destes núcleos.

A formulação considera os três primeiros núcleos de Volterra estimados com base em sinais $u(k)$ e $y_{\mathrm{exp}}(k)$ medidos quando a estrutura se encontra em uma condição de operação saudável. Uma vez este modelo identificado, um sinal de predição, representado por $\boldsymbol{y}_{\mathrm{ref}}$, sendo a combinação de termos linear e não-linear, pode ser obtido a partir de:

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{ref}} \approx \sum_{\eta=1}^{3} \boldsymbol{y}_{\eta,\mathrm{ref}} = \underbrace{\boldsymbol{y}_{1,\mathrm{ref}}}_{\text{linear}} + \underbrace{\boldsymbol{y}_{2,\mathrm{ref}} + \boldsymbol{y}_{3,\mathrm{ref}}}_{\text{não-linear}} \tag{10}$$

O vetor erro de predição, $\boldsymbol{e}_{\mathrm{ref}}$, entre o sinal de resposta experimental do sistema, $\boldsymbol{y}_{\mathrm{exp}}$, e o sinal de resposta estimado pelo modelo de referência, $\boldsymbol{y}_{\mathrm{ref}}$, é calculado como:

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{ref}} = \boldsymbol{y}_{\mathrm{exp}} - \boldsymbol{y}_{\mathrm{ref}} \tag{11}$$

Na maioria dos casos é possível configurar valores dos parâmetros usando conhecimento prévio do comportamento do sistema não-linear ou utilizando algoritmos de otimização para minimizar o erro do modelo ajustando esses valores. Os parâmetros complexos conjugados das funções de Kautz são obtidos minimizando a média quadrática do erro de predição (NMSE[3]):

$$F_{\mathrm{ob}} = \frac{\|\boldsymbol{e}_{\mathrm{ref}}\|_2}{\|\boldsymbol{y}_{\mathrm{exp}}\|_2} \tag{12}$$

onde $\| \; \|_2$ é a norma Euclidiana. A otimização está sujeita à $\mathbf{\Delta}_{\mathrm{low}} \leq \mathbf{\Delta} \leq \mathbf{\Delta}_{\mathrm{up}}$, onde os

[3] *Normalized Mean Square Error-prediction.*

parâmetros dos filtros de Kautz são agrupados em uma matriz:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_{\text{low}}(1) \leq \Delta(1) \leq \Delta_{\text{up}}(1) \\ \Delta_{\text{low}}(2) \leq \Delta(2) \leq \Delta_{\text{up}}(2) \\ \Delta_{\text{low}}(3) \leq \Delta(3) \leq \Delta_{\text{up}}(3) \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \Delta_{\text{low}}(6) \leq \Delta(6) \leq \Delta_{\text{up}}(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \xi_1 \\ \omega_2 \\ \xi_2 \\ \omega_3 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{\text{lin}} \\ \xi_{\text{lin}} \\ \omega_{\text{quad}} \\ \xi_{\text{quad}} \\ \omega_{\text{cub}} \\ \xi_{\text{cub}} \end{bmatrix} \tag{13}$$

As matrizes $\boldsymbol{\Delta}_{\text{low}}$ e $\boldsymbol{\Delta}_{\text{up}}$ são compostas pelos limites inferior e superior de busca, respectivamente. Este problema de otimização pode ser solucionado usando um algoritmo de programação sequencial quadrática (SQP[4]) usando uma matriz com as condições iniciais $\boldsymbol{\Delta}_0$. Adicionalmente, dependendo do espaço de busca e valores iniciais algoritmos híbridos também podem ser empregados, como algoritmos genéticos, métodos de gradiente etc.

2.1 Validação quantitativa via análise dos espectrogramas

De forma análoga à Eq. (12), pode-se quantificar o percentual do ajuste do modelo de Volterra a partir de:

$$FIT = \left(1 - \frac{\|\boldsymbol{S}_{\text{mod}} - \boldsymbol{S}_{\text{exp}}\|_2}{\|\boldsymbol{S}_{\text{exp}}\|_2}\right) \times 100\ [\%] \tag{14}$$

onde, novamente, $\| \ \|_2$ é a norma Euclidiana, $\boldsymbol{S}_{\text{mod}}$ e $\boldsymbol{S}_{\text{exp}}$ são as matrizes que representam os espectrogramas das respostas do modelo e do sinal experimental, respectivamente.

2.2 Identificação de comportamento não-linear usando modelos de Volterra

Além dos métodos convencionais de detecção de comportamento não-linear (e.g. inspeção de respostas em frequência, análise das equações que regem o movimento etc), os modelos baseados nas série discretas de Volterra podem, também, serem usados como um excelente detector da presença de comportamento não-linear. Podem, ainda, servirem como filtro da resposta, separando-a em componentes lineares e não-lineares.

Após a identificação de um modelo de Volterra, tem-se como resultado final os núcleos de Volterra, que estão diretamente relacionados com as contribuições linear, quadrática e cúbica do modelo. Com o modelo identificado é possível detectar indícios de comporta-

[4] *Sequential Quadratic Programming.*

mento não-linear, geralmente, de maneira mais fácil do que uma análise direta do sinal experimental, pois, caso exista comportamento não-linear ele será evidenciado nas contribuições quadrática e/ou na contribuição cúbica do modelo. Assim, conclui-se que as séries de Volterra, além de fornecerem um bom modelo de predição, também contém informações quantitativas e qualitativas, geralmente muito úteis, sobre a dinâmica da estrutura.

2.3 Quantificação de comportamento não-linear usando modelos de Volterra

Este trabalho propõe uma métrica de quantificação de comportamento não-linear baseando-se nas contribuições estimadas pelos modelos de Volterra. O percentual da contribuição de cada núcleo na resposta total do modelo $\boldsymbol{y}_{\mathrm{ref}}$ pode ser quantificado pela razão κ:

$$\kappa_\eta = \frac{E_\eta}{\sum\limits_{\eta=1}^{+\infty} E_\eta}; \qquad \eta = 1,\ 2,\ 3, \cdots \tag{15}$$

onde, E_η é a energia da contribuição do η-ésimo núcleo de Volterra dada pela norma $L2$.

Assim, pode-se propor um índice para quantificar o comportamento não-linear, como:

$$\vartheta = \frac{\sum\limits_{\eta=2}^{+\infty} \kappa_\eta}{\sum\limits_{\eta=1}^{+\infty} \kappa_\eta} \equiv \sum_{\eta=2}^{+\infty} \kappa_\eta \tag{16}$$

2.4 Detecção de variação estrutural usando modelos de Volterra

Partindo-se do pressuposto de que, caso não exista nenhuma variação estrutural no sistema, o erro de predição da resposta estimada pelo modelo de Volterra $\boldsymbol{e}_{\mathrm{unk}}$ será pequeno e não mudará muito a sua distribuição estatística quando comparado com o erro de predição da condição de referência $\boldsymbol{e}_{\mathrm{ref}}$. Isto é coerente, uma vez que, o erro de predição dado pela Eq. (11) nada mais é do que um resíduo, que inclui a possibilidade de incorporar informações referentes ao comportamento não-linear do sistema. Se a estrutura operar em um regime não-linear e não tiver nenhuma variação associada, o modelo de referência, por ser não-linear, será capaz de rejeitar a possibilidade de existir variação estrutural.

Os seguintes indicadores podem, então, ser utilizados para avaliar a existência ou não de variação estrutural com base nos erros de predição e suas componentes lineares e não-lineares:

$$\lambda_\eta = \frac{\sigma(\boldsymbol{e}_{\eta,\mathrm{unk}})}{\sigma(\boldsymbol{e}_{\eta,\mathrm{ref}})}; \qquad \eta = 1,\ 2,\ 3, \cdots \tag{17}$$

sendo $\sigma(*)$ o desvio padrão. Os erros na condição de referência são calculados através da relação:

$$\boldsymbol{e}_{\eta,\mathrm{ref}} = \boldsymbol{y}_{\mathrm{exp}} - \sum_{i=1}^{\eta} \boldsymbol{y}_{\mathrm{i,ref}}; \qquad \eta = 1,\ 2,\ 3, \cdots \tag{18}$$

e os erros de predição nas condições desconhecidas são calculados de maneira análoga:

$$\boldsymbol{e}_{\eta,\mathrm{unk}} = \boldsymbol{y}_{\mathrm{exp}} - \sum_{i=1}^{\eta} \boldsymbol{y}_{\mathrm{i,unk}}; \qquad \eta = 1,\ 2,\ 3, \cdots \tag{19}$$

Todos estes erros de predição são calculados considerando as contribuições lineares e não-lineares dos núcleos de Volterra. Esses índices foram testados no trabalho de Shiki, Lopes Jr e Silva (2013) onde notou-se que os índices lineares (λ_1) são menos sensíveis a variações de parâmetros estruturais que os índices não-lineares (λ_2 e λ_3).

2.5 Conclusões

Este capítulo apresentou as séries de Volterra. Inicialmente, foram apresentadas as séries discretas de Volterra, em seguida, uma descrição de como os modelos de Volterra podem ser utilizados na identificação e quantificação de comportamento não-linear. Por fim, a aplicação de modelos de Volterra na detecção de variações estruturais com a possibilidade e serem empregados em estruturas lineares e/ou não-lineares.

Assim, ao final do capítulo pode-se obter as seguintes observações:

- A séries de Volterra podem ser empregadas para descrever o comportamento dinâmico de sistemas não-lineares. A maioria dos sistemas mecânicos podem sem descritos usando modelos de Volterra de até 3ª ordem, $\eta=3$;
- Na formulação original as séries de Volterra apresentam problemas com convergência, estabilidade, número de amostras etc. Funções ortogonais, como as funções de Kautz, podem ser utilizadas para resolver os problemas citados;
- Os modelos de Volterra tem por característica marcante a separação da resposta total em componentes lineares e não-lineares, o que pode ser muito interessante para aplicações em controle não-linear ou demais aplicações;
- O uso de Volterra em SHM é bem vindo pois permite monitorar estruturas não-lineares operando, na condição de referência, em regime linear ou não-linear, usando o mesmo modelo para ambos.

3 Aplicação em uma viga protendida

Este capítulo apresenta uma aplicação das séries de Volterra com ferramenta na identificação e na detecção de variação estrutural em sistemas mecânicos não-lineares. A estrutura empregada busca simular a dinâmica de componentes hiperestáticos (bi-engastados) sujeitos à algum tipo de protensão (pré-carga). Grande parte deste capítulo foi produzida pelo autor durante a confecção do artigo *Structural Health Monitoring in a Buckled Beam Using Volterra Series* submetido ao **7th European Workshop on Structural Health Monitoring (EWSHM 2014)** - Nantes (França) e apresentado pelo próprio autor deste trabalho, (HANSEN; SHIKI; SILVA, 2014b).

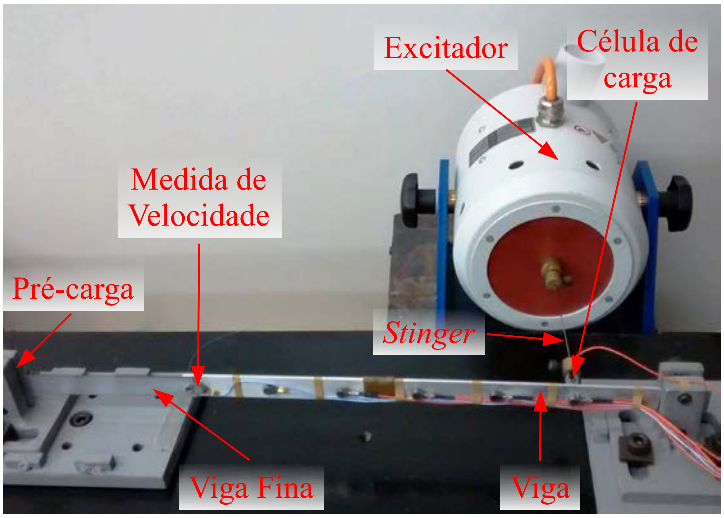
3.1 Descrição da bancada experimental

A bancada experimental da Fig. 1 é composta por uma viga de alumínio com $300 \times 18 \times 3$ mm, de comprimento, largura e espessura, respectivamente, onde uma de suas extremidades está engastada a outra está conectada com uma viga de aço com $120 \times 18 \times 0.5$ mm, de comprimento, largura e espessura, respectivamente.

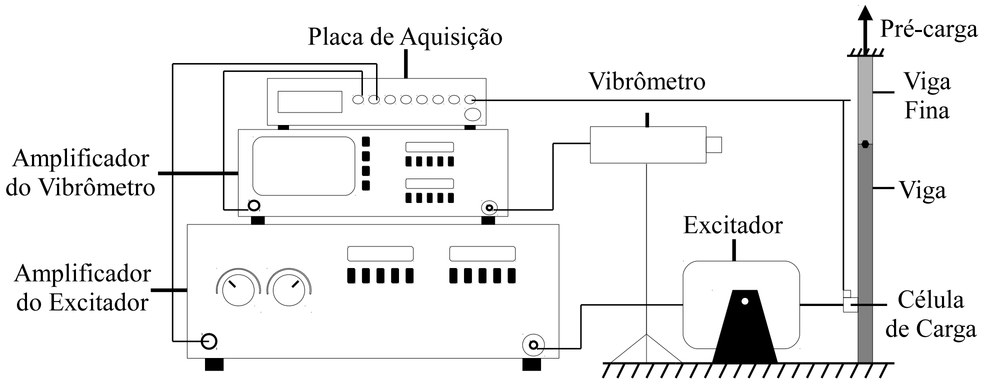
A excitação é realizada por um excitador eletrodinâmico conectado na viga principal à uma distância de 50 mm do engaste. Devido às condições de contorno, da existência de interação entre as vigas (existência de frequências naturais distintas) e a efeitos geométricos pode ocorrer comportamento vibratório não-linear. Uma pré-carga é aplicada nos engastes no sentido longitudinal das vigas, tracionando-as. A carga é aplicada no ponto de junção das vigas por um dinamômetro atuando no sentido de veibração da viga, esta carga é controlável e foi utilizada pra gerar variações das condições operacionais da estrutura.

A estrutura foi monitorada com 6 acelerômetros, distribuídos ao longo da estrutura, e um vibrômetro à laser que mede a velocidade de vibração na junção entre as vigas. Um sensor de força (célula de carga) é utilizado para medir a força de excitação aplicada. Todos os sinais foram medidos com taxa de amostragem de 1024 Hz armazenando 4096 amostras. Os sinais foram filtrados com um filtro passa-alta com frequência de corte em 20 Hz para remover componente DC (média) do sinal. Neste trabalho são apresentados somente os resultados obtidos com as medidas de velocidade do ponto de junção entre as vigas e da força aplicada, as medidas dos demais sensores são para utilização por outros alunos de pós-graduação e graduação.

Figura 1 – Viga composta bi-engastada com pré-carga e instrumentação.



(a) Montagem experimental.



(b) Diagrama esquemático.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

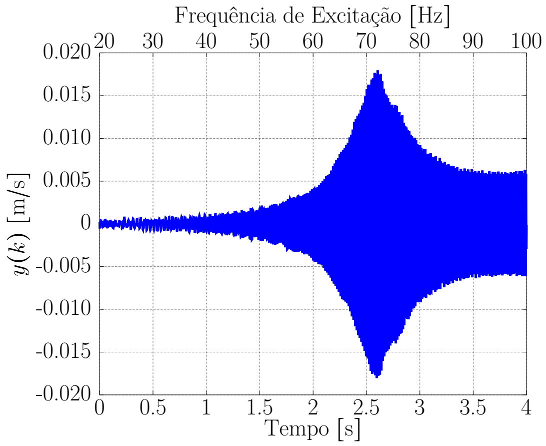
3.2 Análise do comportamento oscilatório

Durante este e os próximos capítulos aparecerão com frequência expressões do tipo, “amplitude baixa” e “amplitude alta” de excitação, entretanto, esta é uma consideração muito qualitativa, pois, o que pode ser amplitude baixa para uma estrutura, pode não ser para outra. Além disso, o sistema de excitação utilizado apresenta limitações devido à características operacionais, dentre elas, elevada “robustez” quando comparada à necessidade dos experimentos deste trabalho, controle de ganho analógico e bastante sensível no amplificador do excitador eletrodinâmico, o que torna impraticável qualquer tipo de repetibilidade no controle da amplitude de excitação e dificuldade de aplicar pequenas amplitudes de excitação.

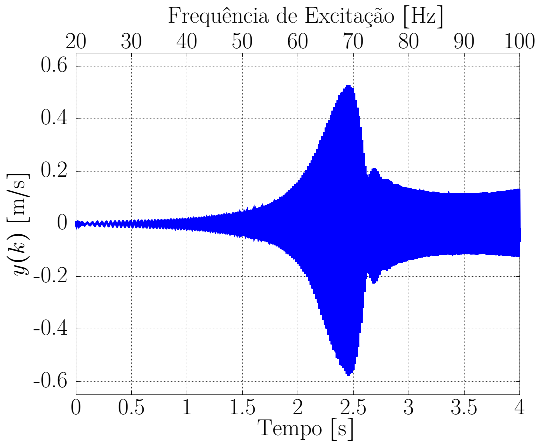
Buscando contornar este problema, o controle da amplitude de excitação foi realizado a partir do controle da amplitude do sinal gerado pela placa de aquisição (gerador de sinais). Assim, pode-se manter o controle de ganho analógico fixo e alterar a amplitude de excitação digitalmente no gerador de sinais. Entretanto, isto implica em uma perda de noção física da amplitude de excitação, uma vez que, os níveis de excitação são dados, a partir de agora, em V (volts).

A Fig. 2 mostra as respostas da estrutura quando excitada por uma varredura em frequência na faixa de 20 à 100 Hz (região do primeiro modo de vibrar) com duração de 4 segundos.

Figura 2 – Respostas do ponto de junção das vigas à entrada varredura em frequência.



(a) Baixa amplitude de excitação (0.01 V).



(b) Alta amplitude de excitação (0.20 V).

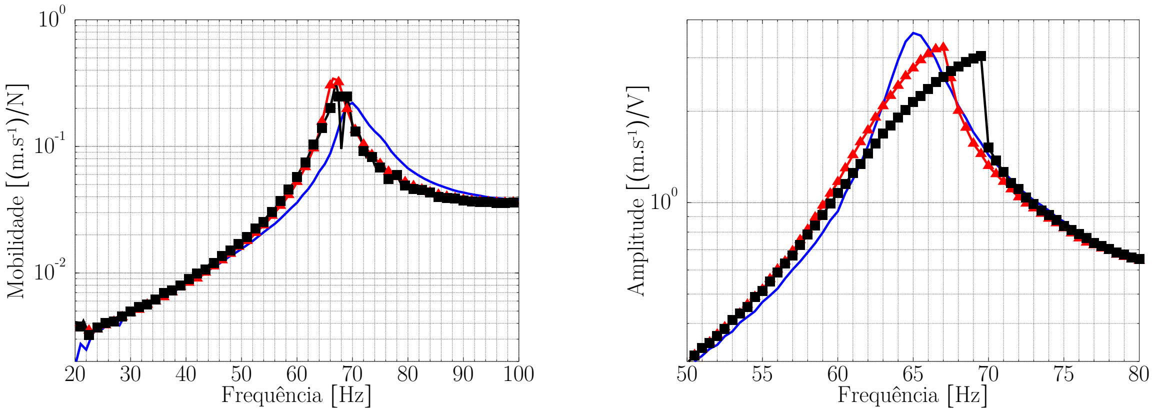
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A partir de uma análise na Fig. 2, pode-se observar que a forma das respostas se altera conforme a amplitude da excitação o que infringe o princípio da superposição, uma vez que, além de alterar a magnitude, o aumento da amplitude de excitação provocou distorções na forma do sinal da resposta. Pode-se concluir, previamente, que o sistema possui características não-lineares, entretanto, não é possível obter maiores informações.

Observações a respeito de comportamento não-linear são, geralmente, mais fáceis de serem observadas no domínio da frequência. Pode-se, então, estimar a função de resposta em frequência (FRF) com base nos sinais de excitação e de resposta. As FRFs mostradas na Fig. 3(b) correspondem ao ponto de junção entre as duas vigas, e foram estimadas a partir das respostas à entrada varredura em frequência da Fig. 2 e uma medida com amplitude intermediária. Pode-se notar alterações na forma da FRF, causadas por efeitos não-lineares e por *drop-out* em função do nível de força aplicada pelo excitador.

Buscando contornar o efeito de *drop-out* na FRF realiza-se o teste de excitação senoidal em regime permanente (*stepped sine*). O teste de *stepped sine* da Fig. 3(b) foi realizado com passo de 0.5 Hz para 3 níveis de amplitude de excitação. Os resultados mostram claramente o fenômeno de salto quando a estrutura é excitada com amplitudes média e alta. A ocorrência do salto com incremento na frequência de ressonância à direita mostra claramente que a estrutura contém comportamento não-linear com rigidez do tipo (*hardening*).

Figura 3 – Respostas em frequência. A linha contínua – representa amplitude de excitação baixa (0.01 V) e tem comportamento linear, os símbolos ▲ e ■ correspondem aos níveis médio e alto da amplitude de excitação, com (0.10 V) e (0.20 V), respectivamente.



(a) FRF usando varredura senoidal.

(b) Excitação senoidal em regime (*Stepped Sine*).

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Nesta estrutura, em específico, talvez devido ao excitador utilizado (diferente do das demais bancadas), há incoerência no sentido de deslocamento da frequência de ressonância entre as Figs. 3(a) e 3(b). A FRF da varredura em frequência indica efeito *softening* e o *stepped sine* indica efeito *hardening*. Como o teste de *stepped sine* é específico para observar o fenômeno de salto, e esta é uma característica marcante, que caracteriza a estrutura, diz-se então que o sistema apresenta efeito *hardening* e a distorção da FRF é atribuída à suposição de que houve interação excitador-estrutura.

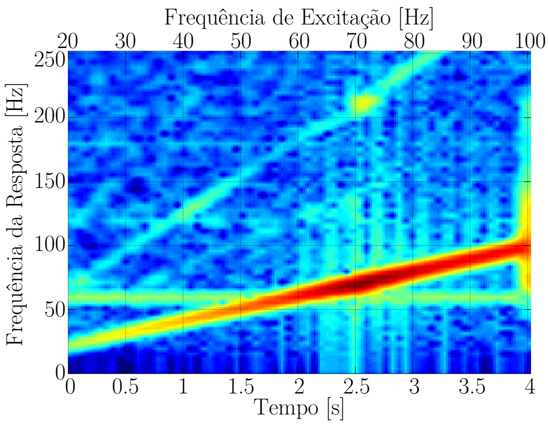
Espectrogramas são gráficos que analisam a densidade espectral de potência. Os valores são indicados no plano tempo × frequência (ou, frequência × frequência de excitação) e são traçados através de um gráfico de superfície, entretanto, a forma usual de visualização do espectrograma é no plano, onde, diferentes cores são usadas para indicar a densidade espectral de energia, variando do azul ao vermelho. Uma decomposição feita com boa resolução e com bom nível de detalhamento possibilita a análise das frequências da resposta em relação à frequência de excitação.

Os espectrogramas são, geralmente, calculados a partir de sinais de resposta das estruturas quando submetidas à excitação do tipo varredura em frequência. A análise de espectrogramas, para diferentes níveis de amplitude de excitação, pode mostrar a quebra da homogeneidade em um sistema não-linear, apresentando graficamente a existência de harmônicos. A Fig. 4 mostra os espectrogramas calculados a partir das respostas da estrutura da Fig. 2. Para o caso de baixa amplitude de excitação a estrutura tem comportamento linear e a Fig. 4(a) apresenta uma linha de energia (em vermelho). Esta linha pode ser descrita por uma reta com coeficiente angular unitário ($m = 1$), isso significa dizer que para esta condição de excitação a estrutura respeita o princípio da homogeneidade e responde com, e somente com, a mesma frequência da excitação.

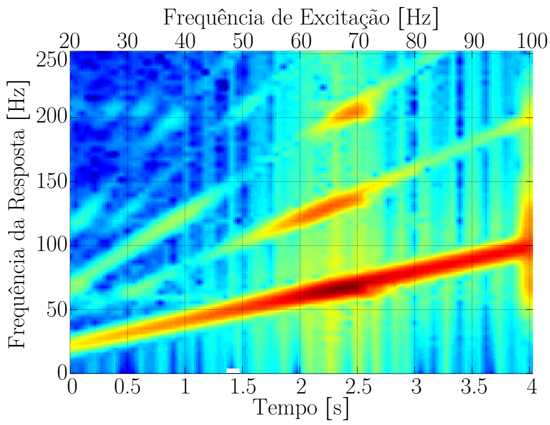
Entretanto, há quebra do princípio da homogeneidade para altas amplitudes de excitação conforme pode-se observar na Fig. 4(b). Este espectrograma apresenta 3 curvas de energia, podendo ser aproximadas por 3 retas, com coeficientes angulares $m_1=1$, $m_2=2$ e $m_3=3$, isto significa dizer que, as duas últimas retas são múltiplas da reta fundamental, ou seja, as frequências presentes nestas curvas são harmônicas das frequências fundamentais (de excitação).

Assim, conclui-se que a estrutura apresenta comportamento não-linear, para altas amplitudes de excitação, por apresentar harmônicos na resposta. Observa-se que, a quebra da homogeneidade ocorre mais intensamente próximo da região de ressonância, onde as deformações da estrutura são maiores, assim pode-se afirmar que os efeitos geométricos são a origem do comportamento não-linear dessa estrutura.

Figura 4 – Espectrogramas calculados a partir dos sinais da Fig. 2.



(a) Baixa amplitude de excitação (0.01 V), via Fig. 2(a).



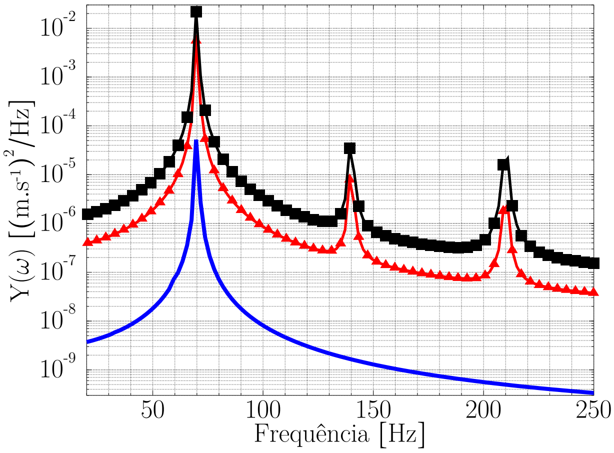
(b) Alta amplitude de excitação (0.20 V), via Fig. 2(b).

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A densidade espectral de potência (PSD) é outra maneira, no domínio da frequência, de observar comportamento não-linear na resposta da estrutura. Este teste revela a quebra da homogeneidade a partir da excitação da estrutura com uma entrada senoidal pura, neste trabalho, com frequência aproximadamente igual a frequência de ressonância linear. Quando a estrutura possui comportamento não-linear, observa-se a presença de harmônicos para médias e altas amplitudes de excitação.

Para tanto, a estrutura foi excitada com um sinal senoidal com amplitude alta e frequência de 70 Hz, a PSD estimada é mostrada na Fig. 5, pode-se observar, primeiramente, a presença dos 3 primeiros harmônicos e as contribuições dos harmônicos de alta ordem crescentes com o aumento da amplitude do sinal de excitação. Já para amplitudes baixas de excitação, não há presença de harmônicos, ou seja, a estrutura apresenta comportamento linear para excitações de baixa amplitude e não-linear para as de alta amplitude.

Figura 5 – Densidade espectral de potência do sinal de resposta. A linha contínua – calculada para amplitude de excitação baixa (0.01 V), as linhas com os símbolos ▲ e ■ calculadas para aos níveis médio e alto da amplitude de excitação aplicada no amplificador, com (0.10 V) e (0.20 V), respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

3.3 Identificação e validação do modelo de Volterra

Esta seção apresenta a obtenção de um modelo não-linear, para a estrutura na condição de referência (saudável), usando séries de Volterra, com base em dados experimentais. A extração representativa dos núcleos de Volterra é a etapa base para o monitoramento estrutural com o método proposto em Shiki, Lopes Jr e Silva (2013) e validado experimentalmente neste capítulo.

3.3.1 *Obtenção dos parâmetros que descrevem os núcleos de Volterra*

A obtenção das contribuições linear e não-linear do modelo de Volterra foi realizada com base em um processo de identificação em duas etapas. Na primeira etapa são utilizados os sinais da estrutura em condição saudável e com baixa amplitude de excitação (comportamento linear) para identificar somente o 1º núcleo ($\mathcal{H}_1(n_1)$), ou seja, na primeira etapa identifica-se somente a parte linear do modelo.

Já, na segunda etapa, a parcela não-linear é identificada com o uso do mesmo tipo de sinal, porém com amplitude de excitação alta. O sinal de responta com a aplicação da excitação com alta amplitude é previamente filtrado pelo núcleo linear $\mathcal{H}_1(n_1)$ estimado na primeira etapa e sua resposta é subtraída do sinal experimental. Assim, o sinal resultante corresponde apenas a componente não-linear da resposta experimental, ou seja, a parcela do sinal que não é descrita por um modelo puramente linear. Com este sinal identificam-se as parcelas não-lineares do modelo representadas pelo 2º e 3º núcleos, $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$ e $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$, respectivamente.

Com a aplicação deste método, obteve-se os parâmetros das funções de Kautz que descrevem o modelo e o número de funções para cada núcleo, dados na Tab. 1, a partir de otimização híbrida com algoritmos genéticos e SQP buscando minimizar função objetivo, F_{ob}, dada pela Eq. (12).

Tabela 1 – Parâmetros dos núcleos de Volterra identificados para a viga protendida.

Núcleo	N° de funções	ω [Hz]	ξ
$\mathcal{H}_1(n_1)$	2	70.39	0.0300
$\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$	4	67.24	0.0150
$\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$	6	68.20	0.0062

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

3.3.2 *Núcleos de Volterra suas contribuições na resposta temporal*

A partir dos parâmetros da Tab. 1 obtém-se os núcleos de Volterra que modelam o comportamento da estrutura. A Fig. 8(a) mostra o 1° núcleo, a Fig. 9(a) mostra a diagonal principal do 2° núcleo e a Fig. 10(a) mostra a diagonal principal do 3° núcleo.

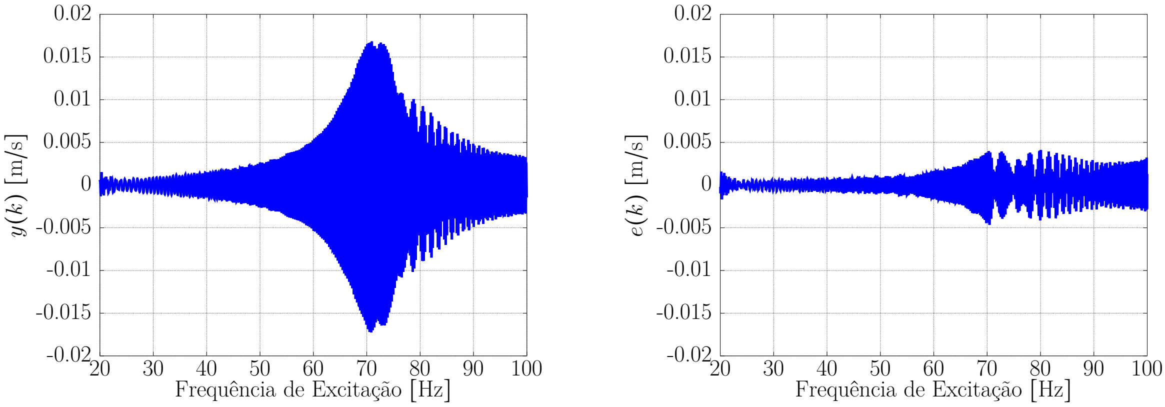
O segundo núcleo deve-se à características das contribuições deste núcleo que estão sempre associadas à assimetrias nas respostas, ou seja, para estruturas que apresentem respostas simétricas o 2° núcleo e sua contribuição, $y_2(k)$, podem ser desprezadas sem grandes problemas.

A partir dos parâmetros da Tab. 1 obtém-se os núcleos de Volterra que modelam o comportamento da estrutura. Assim, a resposta do modelo na condição de referência pode ser obtida através das convoluções multidimensionais entre os núcleos e o sinal de excitação. A Fig. 6(a) mostra a resposta estimada via modelo de Volterra e a Fig. 6(b) o erro de predição para excitação de amplitude baixa (0.01 V) do tipo varredura senoidal de 20 à 100 Hz com aproximadamente 20% da amplitude da resposta.

De maneira análoga a resposta do modelo na condição de referência para excitação de amplitude alta (0.20 V) do tipo varredura senoidal de 20 à 100 Hz foi obtida através das convoluções multidimensionais entre os núcleos e o sinal de excitação, como mostra a Fig. 7(a). A Fig. 7(b) mostra o erro de predição do modelo. O erro apresenta baixa amplitude e característica aleatória e, em uma primeira análise, o modelo foi bem identificado para altas amplitudes de excitação.

Uma das grandes vantagens em utilizar as séries de Volterra é a possibilidade de trabalhar com sistemas não-lineares a partir da separação das contribuições lineares e não-lineares no sinal de resposta do sistema. As Figs. 8, 9 e 10 apresentam os núcleos de Volterra do modelo obtido e suas respectivas contribuições para alta amplitude de excitação (0.20 V).

Figura 6 – Condição de referência (saudável) respondendo à varredura em frequência com baixa amplitude de excitação (0.01 V). F_{ob} = 0.287 via Eq. (12).



(a) Resposta obtida com o modelo de Volterra.

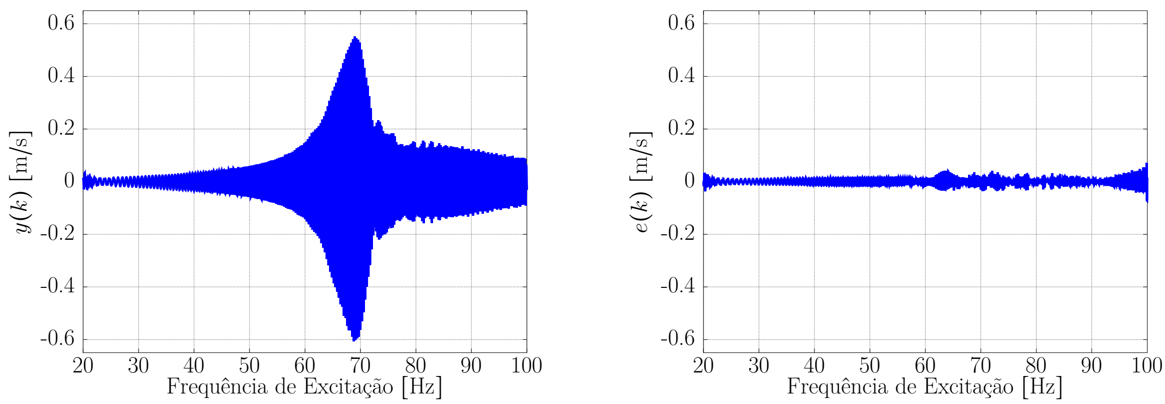
(b) Erro de predição entre a estimativa do modelo de Volterra e o sinal experimental.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A diagonal do segundo núcleo, $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$, é mostrada na Fig. 9(a) e sua contribuição é praticamente insignificante, em razão da simetria do sinal de resposta, como mostra a Fig. 9(b).

Por outro lado, a contribuição cúbica tem contribuição muito significante na resposta total do modelo, como mostra a Fig. 10(b). A presença de uma contribuição forte do 3º núcleo na resposta do modelo na condição saudável para excitação de amplitude alta confirma a necessidade de uma abordagem que seja capaz de assumir o comportamento não-linear da estrutura em uma condição de referência (saudável).

Figura 7 – Condição de referência (saudável) respondendo à varredura em frequência com alta amplitude de excitação (0.20 V). F_{ob} = 0.102 via Eq. (12).

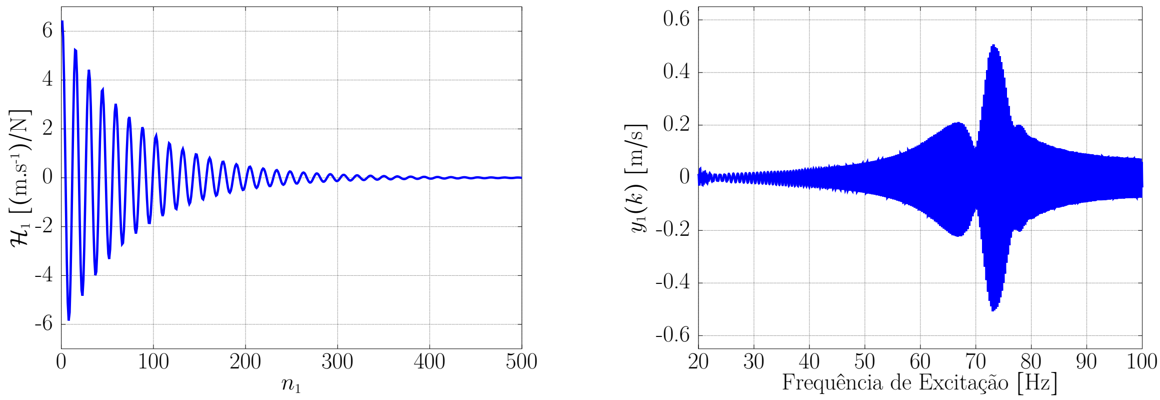


(a) Resposta obtida com o modelo de Volterra.

(b) Erro de predição entre a estimativa do modelo de Volterra e o sinal experimental.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 8 – Contribuição linear para 0.20 V aplicados no excitador.

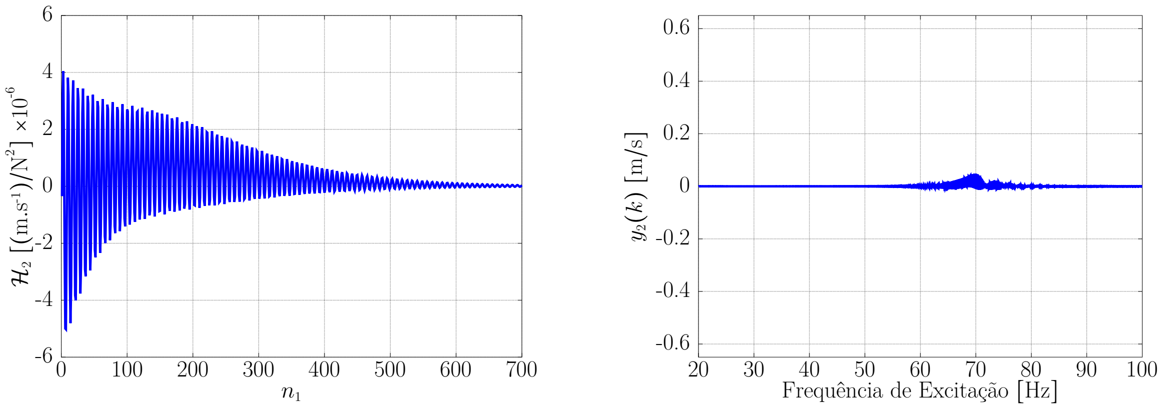


(a) Núcleo $\mathcal{H}_1(n_1)$.

(b) $y_1(k)$ estimada via $\mathcal{H}_1(n_1)$.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 9 – Contribuição quadrática para 0.20 V aplicados no excitador.

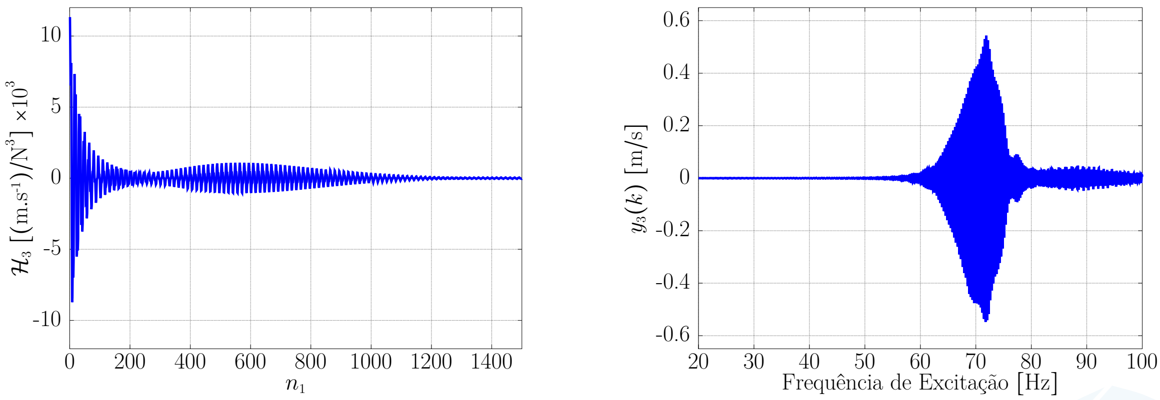


(a) Diagonal do núcleo $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$.

(b) $y_2(k)$ estimada via $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 10 – Contribuição cúbica para 0.20 V aplicados no excitador.



(a) Diagonal do núcleo $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$.

(b) $y_3(k)$ estimada via $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

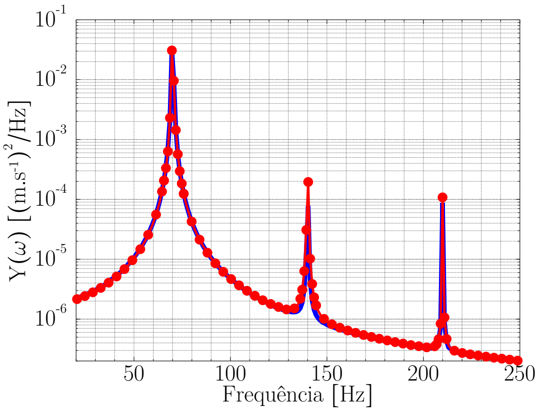
3.3.3 *Validação do modelo*

O modelo não-paramétrico de Volterra identificado foi validado utilizando como sinal de excitação uma senóide com frequência de 70 Hz com amplitude no gerador de sinais de 0.20 V. A Fig. 11(a) mostra a comparação da densidade espectral de potência (PSD) entre o sinal obtido através dos núcleos de Volterra e o obtido experimentalmente. Observa-se que o modelo acompanha os 3 picos do sinal experimental correspondentes ao 1º, 2º e 3º harmônicos do primeiro modo, pode-se então dizer que o modelo está validado.

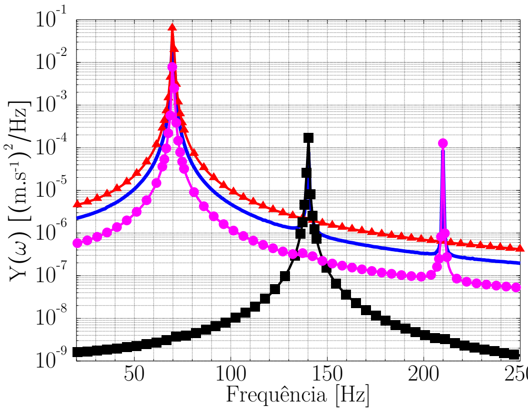
Analisando a Fig. 11(a), nota-se a presença do 2º harmônico apesar da sua contribuição na resposta ser insignificante. Isto pode ser explicado, novamente, pela interação excitador-estrutura que provoca aparecimento de harmônicos também no sinal de entrada medido pelo sensor de força (célula de carga).

Na Fig. 11(b) pode-se observar que o núcleo $\mathcal{H}_1(n_1)$ contribui somente com o harmônico fundamental, o núcleo $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$ com o 2º harmônico e o núcleo $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$ com o 1º e o 3º harmônicos.

Figura 11 – Comparação entre as densidades espectrais de potência (PSD) da estimativa da saída com o modelo de Volterra identificado e a PSD do sinal de saída experimental quando se aplica uma senóide (70 Hz) com alta amplitude de excitação (0.20 V).



(a) Modelo de Volterra representado pela linha com o símbolo ● e o sinal experimental representado pela linha –.

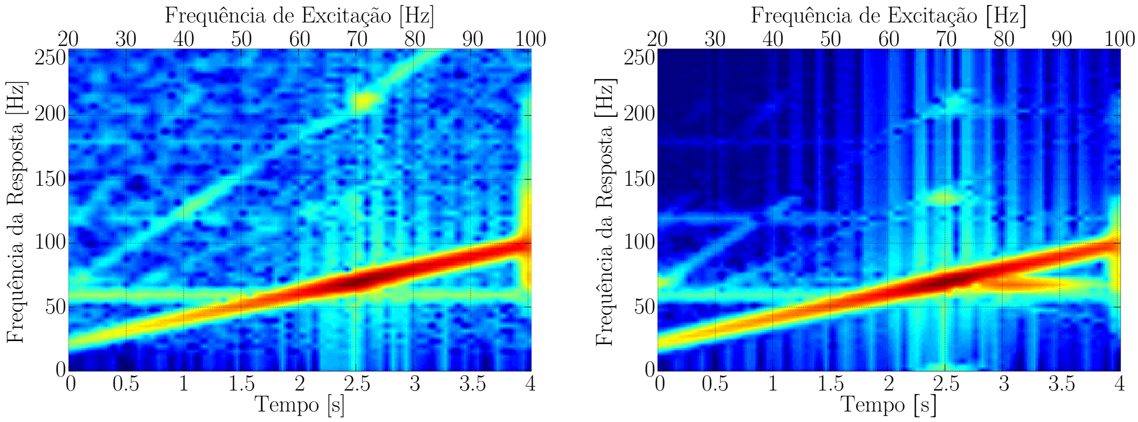


(b) Contribuições espectrais dos núcleos de Volterra. Sinal experimental representado pela linha contínua –, 1º núcleo pelo símbolo ▲, 2º núcleo pelo símbolo ■ representa o 3º núcleo pelo símbolo ●.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A validação do modelo pode ser feita, também, a partir da comparação entre os espectrogramas dos sinais de resposta experimental e do modelo identificado quando submetidos a uma excitação do tipo varredura senoidal com alta amplitude de excitação (0.20 V). A Fig. **??** mostra os espectrogramas, que apresentam os três harmônicos muito evidentes tanto para o sinal experimental quanto para o sinal de resposta do modelo, e mais uma vez pode-se considerar o modelo como validado.

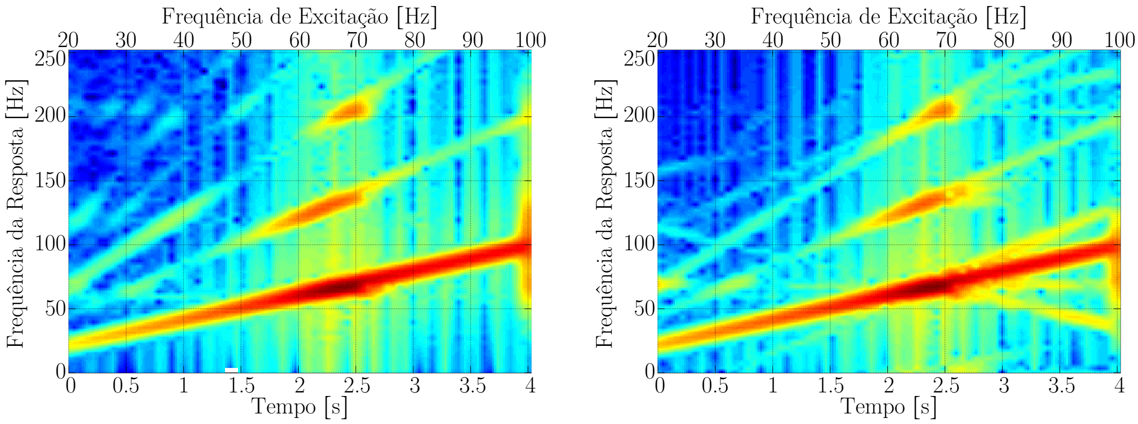
Figura 12 – Comparação entre os espectrogramas da resposta experimental e da resposta obtida com o modelo de Volterra identificado quando se aplica a varredura em frequência com baixa amplitude de excitação (0.01 V). FIT = 91.84% via Eq. (14).



(a) Experimental. (b) Modelo de Volterra.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 13 – Comparação entre os espectrogramas da resposta experimental e da resposta obtida com o modelo de Volterra identificado quando se aplica a varredura em frequência com alta amplitude de excitação (0.20 V). FIT = 95.97% via Eq. (14).



(a) Experimental. (b) Modelo de Volterra.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

3.4 Detecção de variação estrutural

Para o processo de detecção de variação estrutural foram simuladas 7 condições, mostradas na Tabela 2. O símbolo 0 refere-se a condição de referência sem variação (saudável), os símbolos de I até V as condições com inserção de variação estrutural (variação da carga) e R é a condição de reparo estrutural (volta à carga zero).

Tabela 2 – Condições estruturais simuladas para a viga protendida.

Condição estrutural	Carga [N]	Condição estrutural	Carga [N]
0	0	IV	4
I	1	V	5
II	2	R	0
III	3	-	-

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A detecção de danos se inicia com o uso do modelo de referência descrito pelos núcleos de Volterra obtidos anteriormente. As respostas estimadas são usadas para o cálculo das métricas λ_1, λ_2 e λ_3. Para cada condição estrutural da Tab. 2, a estrutura foi excitada novamente com sinais do tipo varredura senoidal de 20 à 100 Hz e amplitudes de excitação no gerador de 0.01 V, 0.10 V e 0.20 V.

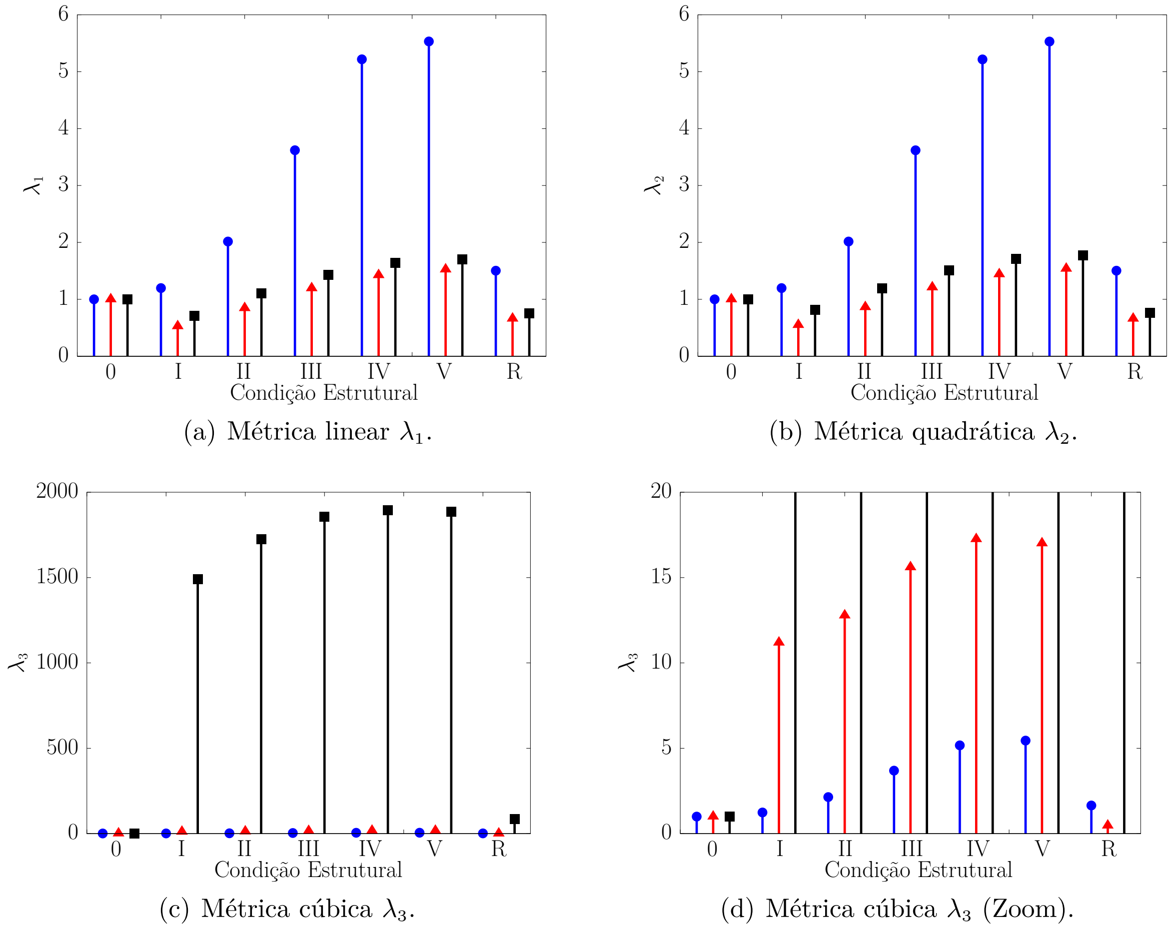
A Fig. 14(a) apresenta os resultados obtidos para o indicador λ_1 da Eq. (17). Observa-se que este indicador se comporta bem para amplitudes baixas de excitação, apresentando variações significativas entre as condições simuladas. Entretanto, para excitações de média e alta amplitude no gerador, as variações são bem menos significativas e o indicador falha, pois o sistema opera de maneira de não-linear.

O comportamento do indicador λ_2 da Eq. (17), apresentado na Fig. 14(b), segue o mesmo comportamento do indicador λ_1. Esta similaridade deve-se à insignificante contribuição de $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$ na estimativa da resposta $y(k)$.

A Fig. 14(c) mostra o indicador λ_3 da Eq. (17). O indicador λ_3 tem grande sensibilidade quando o sinal de excitação tem amplitude alta e o sistema opera de maneira claramente não-linear. Mas o indicador λ_3 também opera bem para baixas amplitudes de excitação como pode ser observado na ampliação do λ_3 na Fig. 14(d), esta sensibilidade deve-se à contribuição do 1º núcleo no cálculo do λ_3 e ainda devido a participação do 3º núcleo no harmônico fundamental na PSD da Fig. 11(b).

Com base nos resultados obtidos, observa-se que para excitações baixas, os indicadores λ_1 e λ_3 tem bom desempenho. Porém, para excitação de amplitude mais alta, onde o sistema opera essencialmente de maneira não-linear, o único indicador que se mostra sensível à pequenas variações que podem estar associadas a dano na estrutura é o indicador λ_3. Isto mostra a necessidade de separar as contribuições linear e não-linear para conseguir um bom modelo para detecção de danos.

Figura 14 – Métricas de danos para três níveis diferentes de excitação. O símbolo ● corresponde ao nível de baixa amplitude de excitação (0.01 V), ▲ com amplitude de excitação de 0.10 V e ■ com excitação de 0.20 V.



(a) Métrica linear λ_1.

(b) Métrica quadrática λ_2.

(c) Métrica cúbica λ_3.

(d) Métrica cúbica λ_3 (Zoom).

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

3.5 Conclusões

Este capítulo apresentou uma aplicação, baseada em dados experimentais, das séries de Volterra na obtenção de um modelo não-linear para uma viga protendida. Posteriormente, o modelo obtido foi utilizado na obtenção de índices sensíveis à variações estruturais mostrando a aplicabilidade da metodologia proposta. Assim, ao final do capítulo pode-se obter as seguintes conclusões:

- A aplicação das séries de Volterra obteve bons resultados quando aplicadas no monitoramento da estrutura testada neste capítulo;
- Mostrou-se que o uso de um indicador puramente linear (obtido por um modelo linear) pode falhar quando a estrutura opera em regime não-linear;
- O modelo de Volterra se mostrou eficiente na predição de variação estrutural tanto no regime linear quanto no regime não-linear.

4 Aplicação em uma viga magnetoelástica

Este capítulo apresenta a aplicação das séries de Volterra com ferramenta na identificação e na detecção de variação estrutural em sistemas mecânicos não-lineares. A estrutura empregada busca simular a dinâmica de componentes sujeitos à algum iteração magnetoelástica, além de simular os efeitos de variação de parâmetros de montagem. Grande parte deste capítulo foi produzida pelo autor durante a confecção do artigo "Aplicação de Séries de Volterra na Detecção de Danos em uma Viga com Comportamento Não-Linear", submetido ao **VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2014)** - Uberlândia (Brasil) e apresentado por um colaborador deste capítulo (Luís Gustavo Giacon Villani[5]), (HANSEN; VILLANI; SILVA, 2014).

4.1 Descrição da bancada experimental

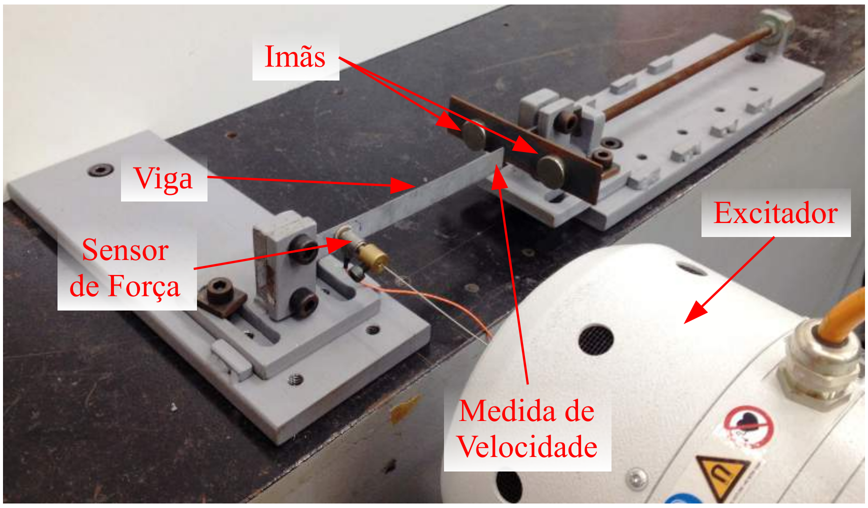
A viga magnetoelástica estudada neste capítulo consiste em viga de aço galvanizado de dimensões $150 \times 15 \times 0.65$ mm, de comprimento, largura e espessura, respectivamente, oscilando na condição de contorno engastada-livre com dois imãs posicionados próximos da ponta livre da viga, como mostrado na Fig. 15. Os imãs têm 20 mm de diâmetro e foram posicionados a 65 mm de distância entre si de centro a centro. A viga é posicionada centralizada entre os dois imãs à uma distância de 5 mm na direção longitudinal da viga, conforme Fig. 15.

Por ser de aço, a viga possui características ferromagnéticas e sofre atração magnética dos imãs gerando forças que se opõem à força elástica (oriunda da deflexão da viga). A interação destas forças promove uma variação na rigidez equivalente da viga de acordo com a proximidade da extremidade da viga em relação aos imãs. A distância entre a viga e os imãs é controlável e foi utilizada pra gerar variações das condições operacionais da estrutura.

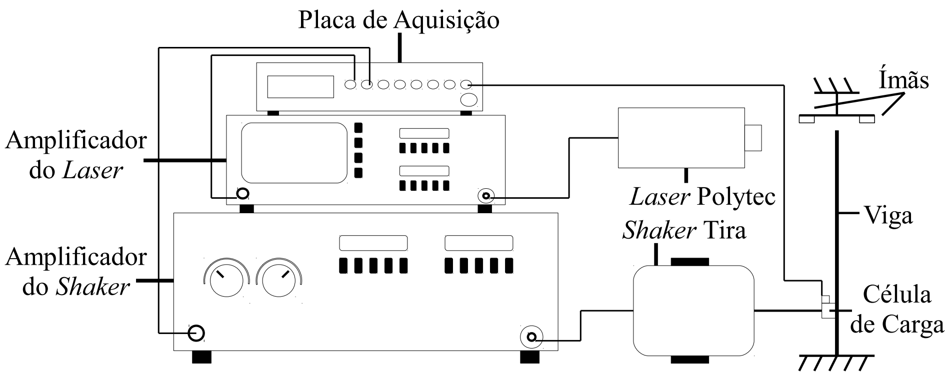
Os sinais de testes foram aplicados na estrutura com um excitador eletrodinâmico (excitador) posicionado à 25 mm do engaste. O sinal de excitação foi medido com uma célula de carga e como resposta da estrutura mediu-se a velocidade da extremidade livre com o auxílio de um vibrômetro laser. Todos os sinais foram medidos com taxa de amostragem de 1024 Hz armazenando 4096 amostras.

[5] http://lattes.cnpq.br/4458940577626436

Figura 15 – Viga magnetoelástica e instrumentação.



(a) Montagem experimental.



(b) Diagrama esquemático.

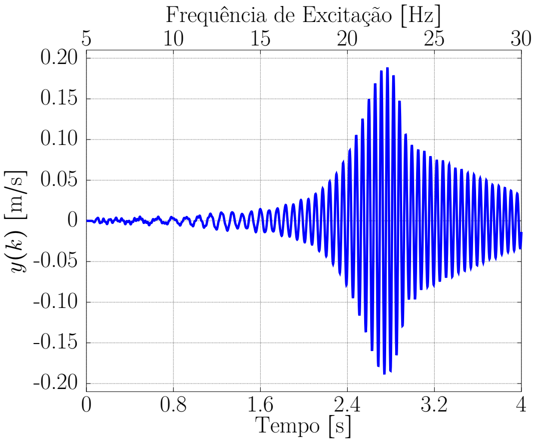
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

4.2 Análise do comportamento oscilatório

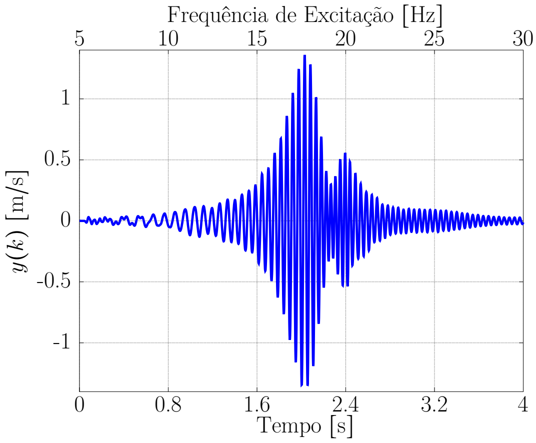
Nesta seção são apresentadas as respostas das estruturas, no domínio do tempo, quando excitadas com um sinal de varredura em frequência. A Fig. 16 mostra a resposta da extremidade livre da viga quando submetida à excitação varredura em frequência na faixa de 5 à 30 Hz durante 4 segundos. Os sinais da força de excitação e da velocidade foram filtrados com um filtro passa-alta com frequência de corte em 5 Hz para remover componente DC (média) do sinal.

A partir das respostas à entrada varredura em frequência da Fig. 16 e uma medida com amplitude intermediária foram estimadas as FRFs da extremidade da viga e são mostradas na Fig. 17(b). Nota-se uma forte degradação na região de ressonância da FRF em função do nível de força aplicada pelo excitador causada pelo efeito de *drop-out*. Externamente à região de ressonância não houve alteração significativa das FRFs em função da amplitude de excitação.

Figura 16 – Respostas da extremidade da viga à entrada varredura senoidal.



(a) Baixa amplitude de excitação (0.01 V).



(b) Alta amplitude de excitação (0.10 V).

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

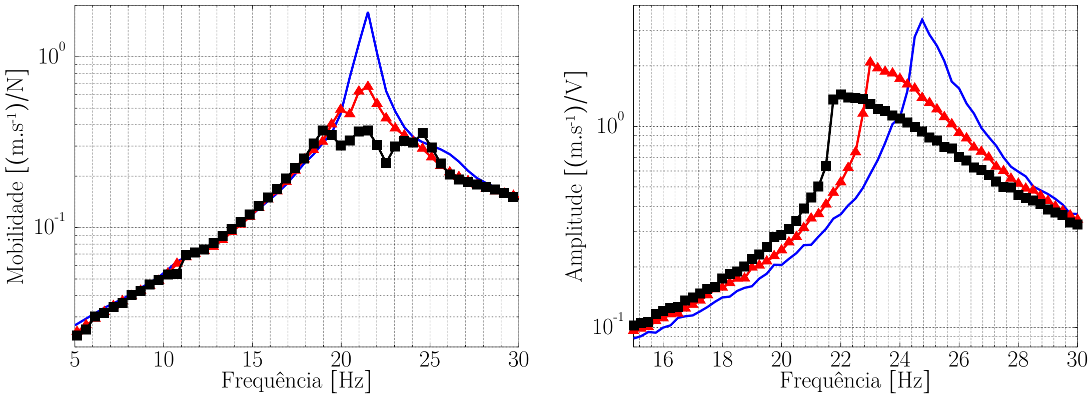
A Fig. 17(b) mostra os resultados do teste de *stepped sine*, realizado com passo de 0.5 Hz para 3 níveis de amplitude de excitação. O fenômeno de salto pode ser observado ocorrendo à esquerda para altas amplitude de excitação e não ocorre para amplitude baixa (comportamento linear). A ocorrência do salto com incremento na frequência de ressonância à esquerda mostra claramente que a estrutura contém comportamento não-linear com rigidez do tipo *softening* (comportamento esperado para esta configuração experimental devido às forças magnetoelásticas).

Pode-se notar que as frequências de ressonância dos testes de varredura em frequência, Fig. 17(a), e *stepped sine*, Fig. 17(b), não coincidem. Esta diferença deve-se à interação excitador-estrutura, uma vez que na Fig. 17(b) tem-se a resposta em frequência calculada em ($m.s^{-1}/V$), ou seja, utilizando como sinal de excitação a tensão fornecida ao amplificador de potência. Assim, retira-se o efeito do excitador sobre a resposta, entretanto, ocorre uma mudança significativa na frequência de ressonância, mudança essa diretamente associada à frequência natural do excitador. Pode-se corrigir este efeito, quando necessário, tendo-se uma modelo matemático da dinâmica do excitador. Neste trabalho, esta correção não se faz necessária pois não se está interessado na frequência de ressonância e sim no comportamento não-linear.

Um estudo dos efeitos causados pelo excitador em bancadas não-lineares e maiores informações a respeito da interação excitador-estrutura podem ser encontradas em Gatti, Brennan e Kovacic (2009). O professor visitante Gianluca Gatti[6] da Universidade de Calabria - Itália, esteve na Unesp durante dois meses, (18 de março de 2014 - 17 de maio de 2014), inserido no projeto FAPESP do professor Michael John Brennan sob o processo nº: 13/23522–2[7].

[6] http://scholar.google.co.uk/citations?user=R9JJ_xIAAAAJ&hl=en
[7] http://www.bv.fapesp.br/pt/auxilios/83826

Figura 17 – Respostas em frequência da viga magnetoelástica. A linha contínua – tem comportamento linear, com amplitude de excitação baixa (0.01 V), as linhas com os símbolos ▲ e ■ correspondem aos níveis médio e alto da amplitude de excitação aplicada no amplificador, com (0.05 V) e (0.10 V), respectivamente.



(a) FRF usando varredura senoidal.

(b) Excitação senoidal contlolada (*Stepped Sine*).

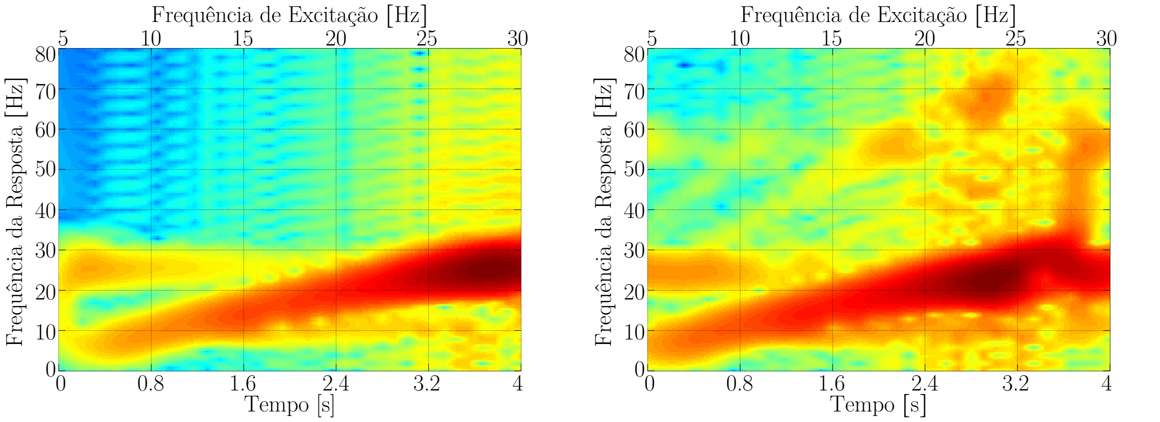
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Os espectrogramas da Fig. 18 foram calculados a partir das respostas da estrutura da Fig. 16. De acordo com o espectrograma da Fig. 18(a) a estrutura apresenta comportamento linear para o caso de baixa amplitude de excitação o que leva apresentar apenas uma curva, de energia (em vermelho). Esta curva pode ser descrita por uma reta com coeficiente angular unitário ($m = 1$), isso significa dizer que para esta condição de excitação a estrutura respeita o princípio da homogeneidade e responde com, e somente com, a mesma frequência da excitação. Observa-se que para frequências menores que 10 Hz o sinal apresenta pouca energia, isto deve-se à limitação física do excitador em não conseguir excitar adequadamente a estrutura em frequências menores que 10 Hz.

Para altas amplitudes de excitação pode-se observar na Fig. 18(b) que há um espalhamento da energia, entretanto, não é possível ver claramente a presença dos harmônicos. Pode-se apenas observar uma pequena região de maior energia, com tom alaranjado, ocorrendo em aproximadamente 70 Hz para frequência de excitação entre 20 e 25 Hz indicando a presença do 3º harmônico na resposta. Uma explicação para a não possibilidade de uma observação clara dos harmônicos nesse espectrograma pode ser a escolha inadequada da faixa de frequência do teste experimental, que deveria ter excitado uma maior faixa de frequências, dando ao sistema mais energia e tempo para responder. Apesar do espectrograma não estar totalmente adequado pode-se observar a presença do 3º harmônico e um espalhamento de energia para altas amplitudes de excitação caracterizando comportamento não-linear.

A estrutura foi excitada com um sinal senoidal com amplitude alta e frequência de 20 Hz, a PSD estimada é mostrada na Fig. 19, pode-se observar primeiramente a presença dos 3 primeiros harmônicos e que as contribuições dos harmônicos de alta ordem aumentam

Figura 18 – Espectrogramas calculados a partir dos sinais da Fig. 16.



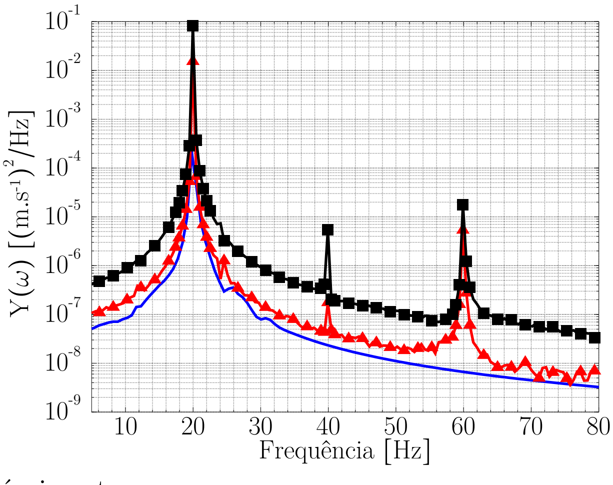
(a) Baixa amplitude de excitação (0.01 V), via Fig. 16(a).

(b) Alta amplitude de excitação (0.10 V), via Fig. 16(b).

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

com o aumento da amplitude do sinal de excitação. Entretanto, para amplitudes baixas de excitação, não há presença de harmônicos, ou seja, a estrutura apresenta comportamento linear e para altas amplitudes de excitação comportamento não-linear.

Figura 19 – Densidade espectral de potência do sinal de resposta. A linha contínua – calculada para amplitude de excitação baixa (0.01 V), as linhas com os símbolos ▲ e ■ calculadas para aos níveis médio e alto da amplitude de excitação aplicada no amplificador, com (0.05 V) e (0.10 V), respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

4.3 Identificação e validação do modelo de Volterra

Esta seção apresenta a obtenção de um modelo não-linear, com base em dados experimentais, para a condição de referência (saudável) usando séries de Volterra. O modelo obtido é validado e utilizado para predizer as respostas das estruturas em condições desconhecidas (com ou sem variação estrutural) e a partir dos erros de predição calculam-se os índices sensíveis à variação estrutural.

4.3.1 *Obtenção dos parâmeros que descrevem os núcleos de Volterra*

O núcleo $\mathcal{H}_1(n_1)$, que corresponde à parte linear do modelo, foi identificado utilizando o sinal de excitação com amplitude baixa (0.01 V) do tipo varredura senoidal de 5 à 30 Hz com duração de 2 segundos, mostrado anteriormente na Fig. 16(a). Já a parcela não-linear foi identificada com o uso do mesmo tipo de sinal, porém com amplitude de excitação mais alta (0.10 V), mostrado na Fig. 16(b).

O sinal de saída com a aplicação da excitação com alta amplitude foi previamente filtrado pelo núcleo linear estimado e sua resposta foi subtraída do sinal experimental. Com este sinal identificou-se as parcelas não-lineares do modelo representadas pelos núcleos $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$ e $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$.

Com a aplicação deste método, obteve-se os parâmetros das funções de Kautz que descrevem o modelo, dados na Tab. 3, que são obtidos a partir da otimização híbrida com algoritmos genéticos e SQP buscando minimizar função objetivo, F_{ob}, dada pela Eq. (12).

Tabela 3 – Parâmetros dos núcleos de Volterra identificados para a viga magnetoelástica.

Núcleo	N^o de funções	ω [Hz]	ξ
$\mathcal{H}_1(n_1)$	2	21.01	0.0200
$\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$	4	21.32	0.0268
$\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$	4	22.00	0.0324

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

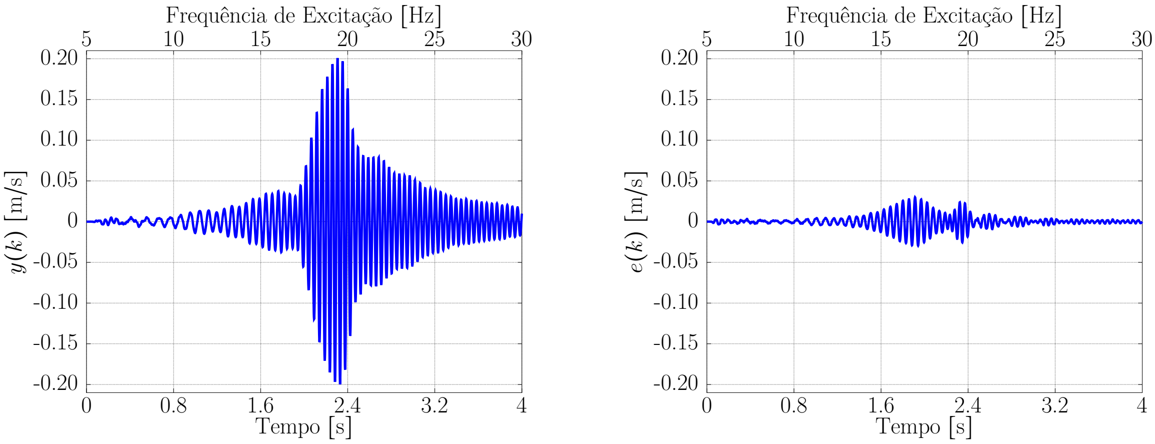
4.3.2 *Núcleos de Volterra suas contribuições na resposta temporal*

A partir dos parâmetros da Tab. 3 obtém-se os núcleos de Volterra que modelam o comportamento da estrutura. A Fig. 22(a) mostra o 1^o núcleo, a Fig. 23(a) mostra a diagonal principal do 2^o núcleo e a Fig. 24(a) mostra a diagonal principal do 3^o núcleo.

O segundo núcleo deve-se à características das contribuições deste núcleo que estão sempre associadas à assimetrias nas respostas, ou seja, para estruturas que apresentem respostas simétricas o 2^o núcleo e suas contribuições ($y_2(k)$) podem ser desprezadas sem grandes problemas.

A partir dos parâmetros da Tab. 3 obtém-se os núcleos de Volterra que modelam o comportamento da estrutura. Assim, a resposta do modelo na condição de referência pode ser obtida através das convoluções multidimensionais entre os núcleos e o sinal de excitação. A Fig. 20(a) mostra a resposta estimada via modelo de Volterra e a Fig. 20(b) o erro de predição para excitação de amplitude baixa (0.01 V) do tipo varredura senoidal de 20 à 100 Hz. O erro apresenta aproximadamente 20% da amplitude da resposta.

Figura 20 – Condição de referência (sem dano) respondendo à varredura em frequência com baixa amplitude de excitação (0.01 V).



(a) Resposta obtida com o modelo de Volterra.

(b) Erro de predição entre a estimativa do modelo de Volterra e o sinal experimental.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

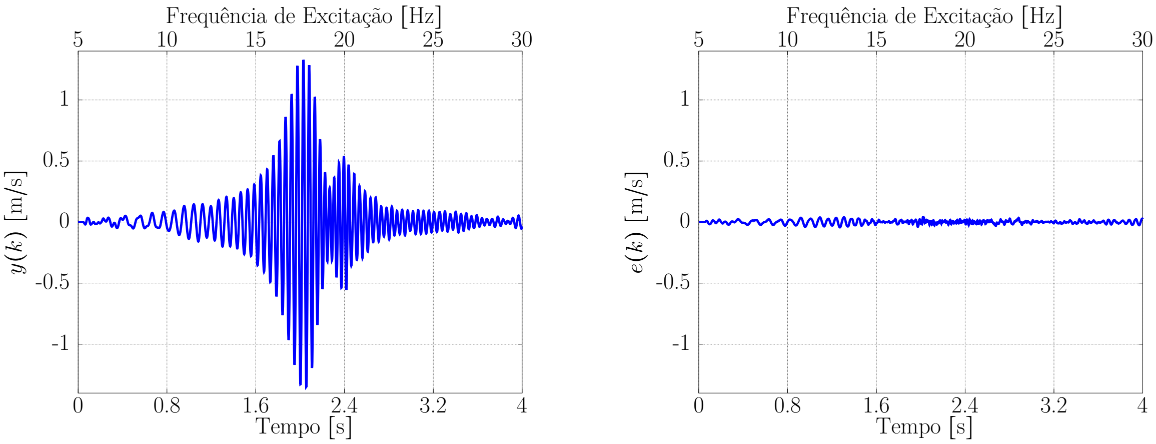
De maneira análoga a resposta do modelo na condição de referência para excitação de amplitude alta (0.20 V) do tipo varredura senoidal de 20 à 100 Hz foi obtida através das convoluções multidimensionais entre os núcleos e o sinal de excitação, como mostra a Fig. 21(a). A Fig. 21(b) mostra o erro de predição do modelo. O erro apresenta baixa amplitude e característica aleatória e, em uma primeira análise, o modelo foi bem identificado para altas amplitudes de excitação.

Uma das grandes vantagens em utilizar as séries de Volterra é a possibilidade de trabalhar com sistemas não-lineares a partir da separação das contribuições lineares e não-lineares no sinal de resposta do sistema. As Figs. 22, 23 e 24 apresentam os núcleos de Volterra do modelo obtido e suas respectivas contribuições para alta amplitude de excitação (0.20 V).

A diagonal do segundo núcleo, $\mathcal{H}_2(n_1, n_1)$, é mostrada na Fig. 23(a) e sua contribuição é praticamente insignificante, em razão da simetria do sinal de resposta, como mostra a Fig. 23(b).

Por outro lado, a contribuição cúbica tem contribuição muito significante na resposta total do modelo, como mostra a Fig. 24(b). A presença de uma contribuição forte do 3º núcleo na resposta do modelo na condição saudável para excitação de amplitude alta confirma a necessidade de uma abordagem que seja capaz de assumir o comportamento não-linear da estrutura em uma condição de referência (saudável).

Figura 21 – Condição de referência (sem dano) respondendo à varredura em frequência com alta amplitude de excitação (0.20 V).

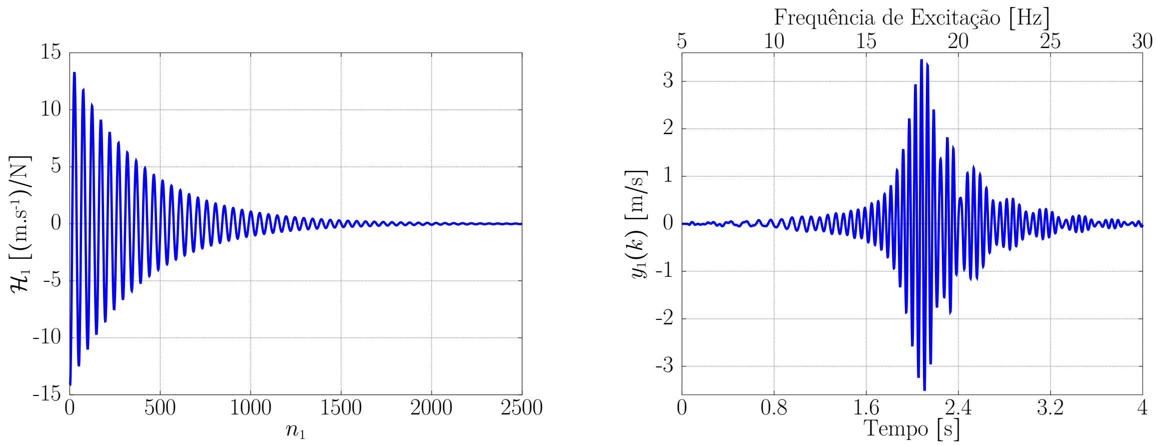


(a) Resposta obtida com o modelo de Volterra.

(b) Erro de predição entre a estimativa do modelo de Volterra e o sinal experimental.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 22 – Contribuição linear para 0.20 V aplicados no excitador.

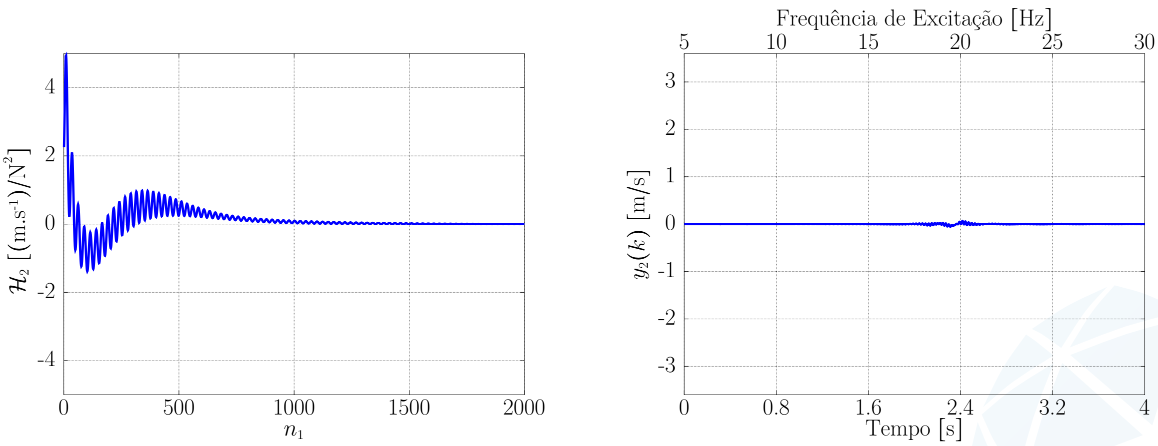


(a) Núcleo $\mathcal{H}_1(n_1)$.

(b) $y_1(k)$ estimada via $\mathcal{H}_1(n_1)$.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 23 – Contribuição quadrática para 0.20 V aplicados no excitador.

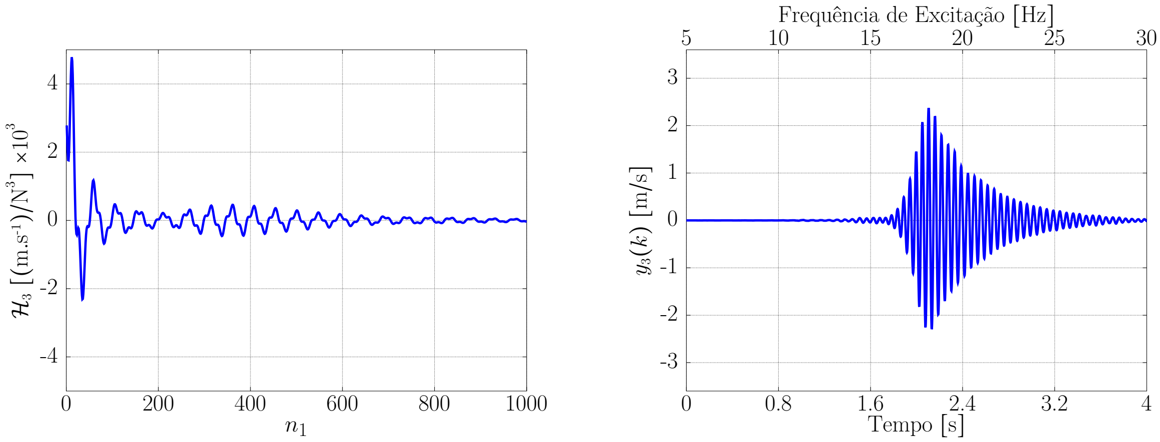


(a) Diagonal do núcleo $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$.

(b) $y_2(k)$ estimada via $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 24 – Contribuição cúbica para 0.20 V aplicados no excitador.



(a) Diagonal do núcleo $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$. (b) $y_3(k)$ estimada via $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

4.3.3 *Validação do modelo*

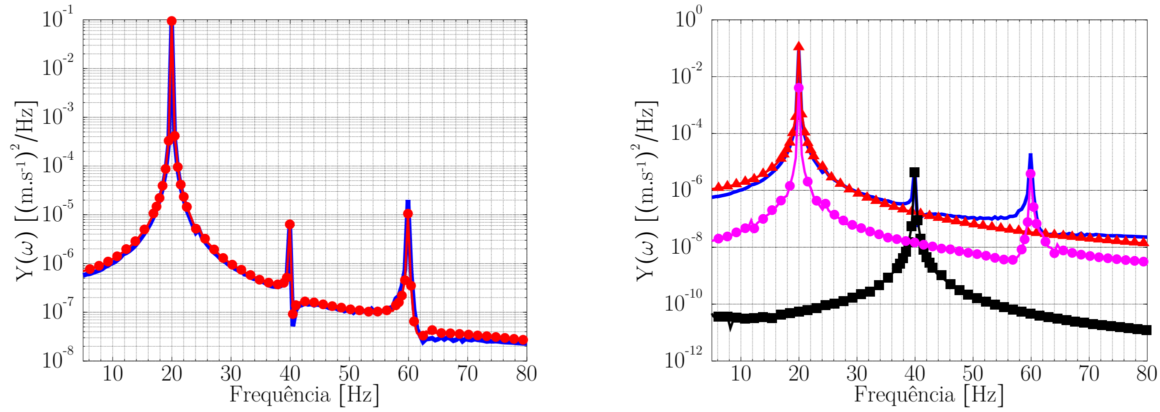
O modelo não-paramétrico de Volterra identificado foi validado utilizando como sinal de excitação senoidal com frequência de 20 Hz com amplitude no gerador de sinais de 0.10 V. A Fig. 25(a) mostra a comparação da densidade espectral de potência (PSD) entre o sinal obtido através dos núcleos de Volterra e o obtido experimentalmente. Observa-se que o modelo acompanha os 3 picos do sinal experimental correspondentes ao 1º, 2º e 3º harmônicos do primeiro modo, pode-se então dizer que o modelo está validado.

Analisando a Fig. 25(a), nota-se a presença do 2º harmônico apesar da sua contribuição na resposta ser insignificante. Isto pode ser explicado, novamente, pela interação excitador-estrutura que provoca aparecimento de harmônicos também no sinal de entrada medido pelo sensor de força (célula de carga). Entretanto, a faixa de frequência do 2º harmônico se limita à uma fração de Hertz com densidade bem inferior ao 3º harmônico.

Na Fig. 25(b) pode-se observar que o $\mathcal{H}_1(n_1)$ contribui somente com o harmônico fundamental, o $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$ com o 2º harmônico e o $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$ com o 1º e o 3º harmônicos.

A validação do modelo pode ser feita, também, a partir da comparação entre os espectrogramas dos sinais de resposta experimental e do modelo identificado quando submetidos a uma excitação do tipo varredura senoidal com alta amplitude de excitação (0.10 V). A Fig. 26 mostra os espectrogramas, que apesar de não apresentarem harmônicos muito evidentes tem a mesma aparência, mais uma vez pode-se considerar o modelo como validado. Uma explicação à baixa presença de harmônicos nestes espectrogramas foi dada na Secção 4.2.

Figura 25 – Comparação entre as densidades espectrais de potência (PSD) da estimativa da saída com o modelo de Volterra identificado e a PSD do sinal de saída experimental quando se aplica uma senóide (20 Hz) com alta amplitude de excitação (0.10 V).

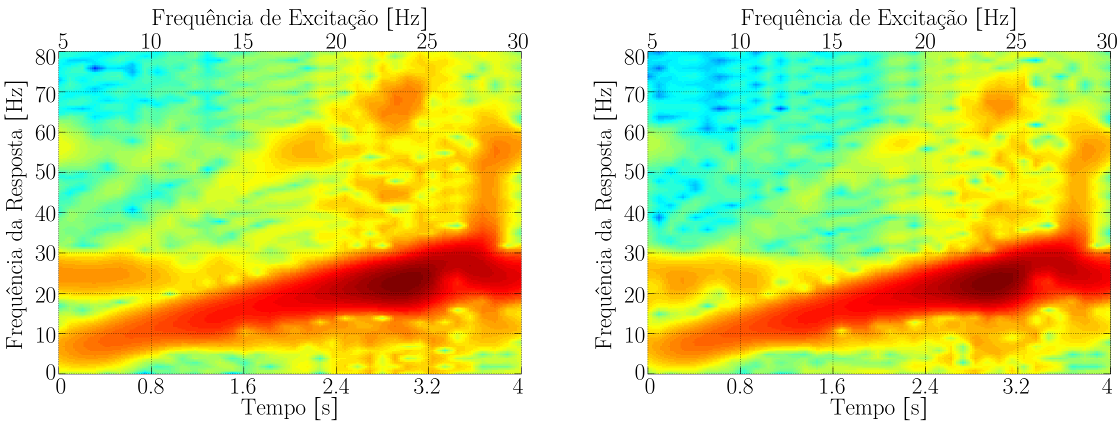


(a) Modelo de Volterra representado pela linha com o símbolo ● e o sinal experimental representado pela linha −.

(b) Contribuições espectrais dos núcleos de Volterra. Sinal experimental representado pela linha contínua −, 1º núcleo pelo símbolo ▲, 2º núcleo pelo símbolo ■ e o 3º núcleo pelo símbolo ●.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 26 – Comparação entre os espectrogramas da resposta experimental e da resposta obtida com o modelo de Volterra identificado quando se aplica a varredura em frequência com alta amplitude de excitação (0.10 V).



(a) Experimental.

(b) Modelo de Volterra.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

4.4 Detecção de variação estrutural

Lembrando que a viga é posicionada centralizada entre os dois imãs com uma distância de 5 mm na direção longitudinal da viga, ver Fig. 15. Esta condição é considerada como o estado de referência da estrutura (saudável). Para o processo de detecção de variação estrutural foram simuladas 7 condições, mostradas na Tabela 4. O símbolo 0 refere-se a condição de referência (saudável), os símbolos de I até V as condições com inserção de variação estrutural (variação da distância entre os imãs e a viga) e R é a condição de reparo estrutural (volta dos imãs para a posição original).

Tabela 4 – Condições estruturais simuladas para a viga magnetoelástica.

Condição Estrutural	Distância [mm]	Condição Estrutural	Distância [mm]
0	5.0	IV	15.0
I	7.5	V	17.5
II	10.0	R	5.0
III	12.5	-	-

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A detecção de variação estrutural se inicia com o uso do modelo de referência descrito pelos núcleos de Volterra obtidos anteriormente. As respostas estimadas são usadas para o cálculo das métricas λ_1, λ_2 e λ_3. Para cada condição estrutural da Tab. 4, a estrutura foi excitada novamente com sinais do tipo varredura senoidal de 5 à 30 Hz e amplitudes de excitação no gerador de 0.01 V, 0.05 V e 0.10 V.

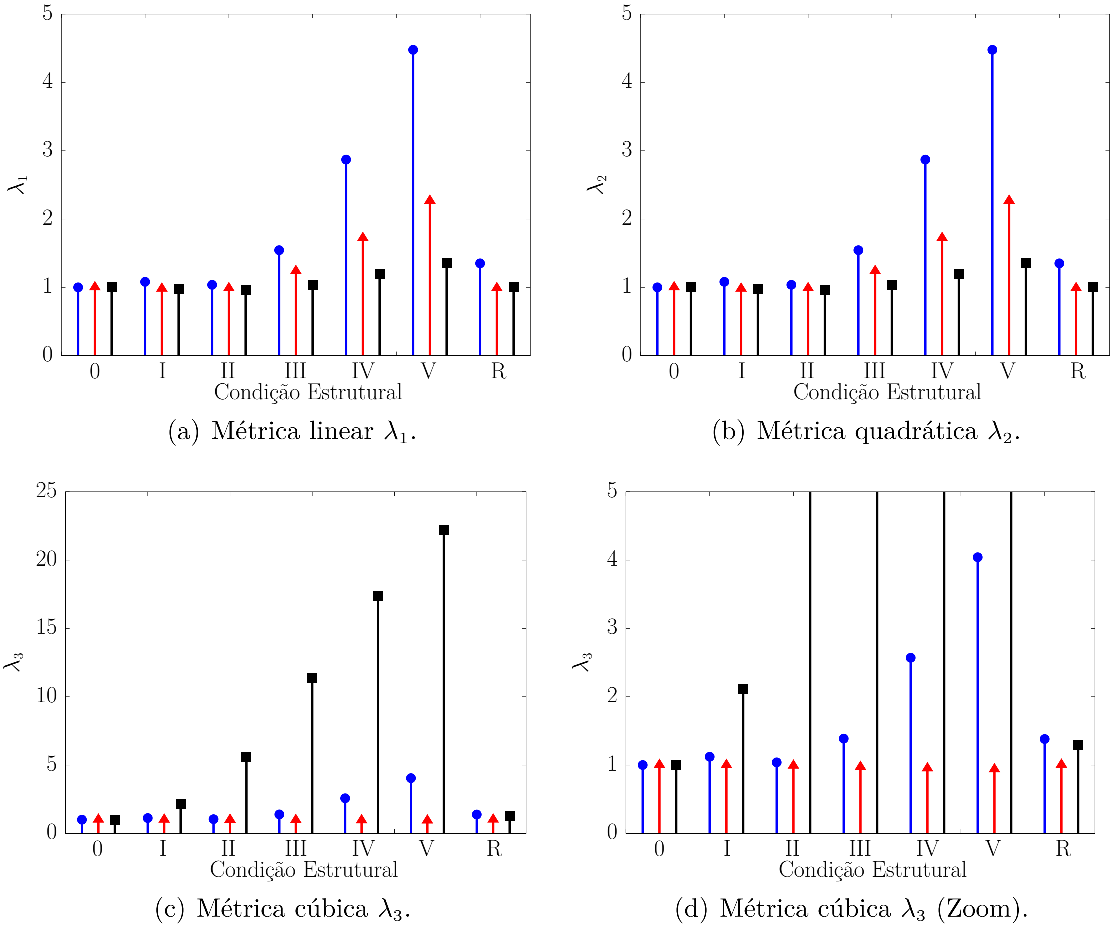
A Fig. 27(a) apresenta os resultados obtidos para o indicador λ_1 da Eq. (17). Observa-se que este indicador se comporta bem para amplitudes baixas de excitação, apresentando variações significativas entre as condições simuladas. Entretanto, para excitações de média e alta amplitude no gerador, as variações são menos significativas e o indicador pode falhar, pois o sistema opera de maneira de não-linear.

O comportamento do indicador λ_2 da Eq. (17), apresentado na Fig. 27(b), seque o mesmo comportamento do indicador λ_1. Esta similaridade deve-se à insignificante contribuição de $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$ na estimativa da resposta $y(k)$.

A Fig. 27(c) mostra o indicador λ_3 da Eq. (17). O indicador λ_3 tem grande sensibilidade quando o sinal de excitação tem amplitude alta e o sistema opera de maneira claramente não-linear. Mas o indicador λ_3 também opera bem para baixas amplitudes de excitação como pode ser observado na ampliação do λ_3 na Fig. 27(d), esta sensibilidade deve-se à contribuição do 1º núcleo no cálculo do λ_3 e ainda devido a participação do 3º núcleo no harmônico fundamental na PSD da Fig. 25(b). Entretanto, λ_3 não opera bem em médias amplitudes.

Com base nos resultados obtidos, observa-se que para excitações baixas, os indicadores λ_1 e λ_3 tem bom desempenho. Porém, para excitação de amplitude mais alta, onde o sistema opera essencialmente de maneira não-linear, o único indicador que se mostra sensível à pequenas variações que podem estar associadas a dano na estrutura é o indicador λ_3. Isto mostra a necessidade de separar as contribuições linear e não-linear para conseguir um bom modelo para detecção de danos. Deve-se buscar um uso complementar entre λ_1 e λ_3 afim de obter um bom indicador para toda a faixa de amplitudes de excitação.

Figura 27 – Métricas de danos para três níveis diferentes de excitação. O símbolo ● corresponde ao nível de baixa amplitude de excitação (0.01 V), ▲ com amplitude de excitação de 0.05 V e ■ com excitação de 0.10 V.



(a) Métrica linear λ_1.

(b) Métrica quadrática λ_2.

(c) Métrica cúbica λ_3.

(d) Métrica cúbica λ_3 (Zoom).

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

4.5 Conclusões

Este capítulo apresentou uma aplicação, baseada em dados experimentais, das séries de Volterra na obtenção de um modelo não-linear para uma viga magnetoelástica. Posteriormente, o modelo obtido foi utilizado na obtenção de índices sensíveis à variações estruturais mostrando a aplicabilidade da metodologia proposta. Assim, ao final do capítulo pode-se obter as seguintes conclusões:

- A aplicação das séries de Volterra obteve bons resultados quando aplicadas no monitoramento da estrutura testada neste capítulo;
- Mostrou-se que o uso de um indicador puramente linear (obtido por um modelo linear) pode falhar quando a estrutura opera em regime não-linear;
- O modelo de Volterra se mostrou eficiente na predição de variação estrutural tanto no regime linear quanto no regime não-linear.

5 Aplicação em um painel solar

Este capítulo apresenta a aplicação das séries de Volterra com ferramenta na identificação de sistemas mecânicos não-lineares que apresentem não-linearidades descontínuas. A estrutura empregada aqui é uma montagem que, apesar de simplista, busca simular a dinâmica de painéis solares de aplicações espaciais. Grande parte deste capítulo foi produzido pelo autor durante a confecção do artigo *Nonlinearity detection and identification using discrete-time Volterra series: application to a solar array structure* submetido ao **5th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering** - Ilha de Creta (Grécia) e apresentado pelo orientador deste trabalho, (HANSEN et al., 2015).

5.1 Descrição da bancada experimental

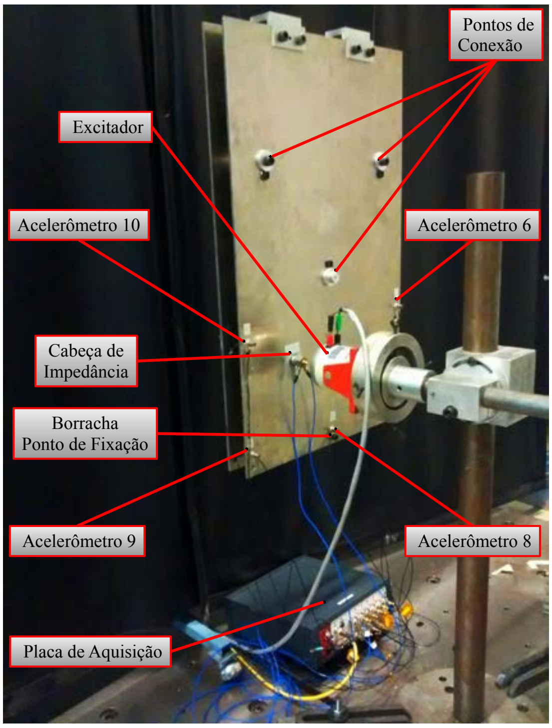
A bancada experimental consiste de duas placas de alumínio suportadas na configuração livre-livre, como mostra a Fig. 28. Elas são conectadas uma na outra na aresta superior no pontos de fixação e por 3 espaçadores no pontos de conexão. As propriedades geométricas de cada uma das placas é 770×440×5 mm de, comprimento, largura e espessura, respectivamente, já a distancia entre as placas é fixa em 40 mm.

Com o auxílio de um suporte de aço, uma borracha é adicionada no ponto médio da aresta livre de uma das placas (solidária), como mostrado nas Figs. 28 e 29(a). Quando a amplitude de excitação aplicada pelo excitador é alta, a borracha impacta na placa não-solidária. Neste trabalho, uma folga com menos de um milimetro (≈0.2 mm) é ajustada para que não haja contato entre a borracha e a placa não-solidária (no ponto de impacto), mesmo quando sujeito à amplitudes de excitação baixas, garantindo, assim, regime de vibração linear (veja Fig. 30(a)).

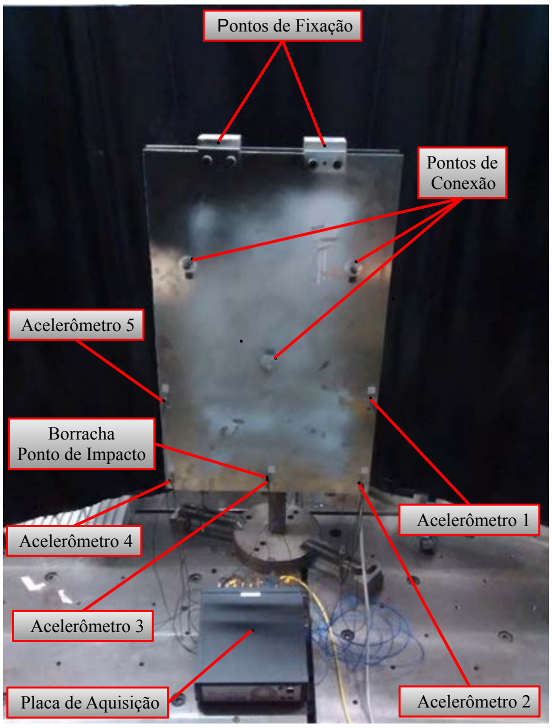
Como apontado por Hot et al. (2012), que trabalhou com a mesma estrutura, a pequena área de contato entre os espaçadores (nos pontos de conexão) e as placas podem induzir deformações localizadas, sendo uma possível fonte adicional de comportamento não-linear.

A estrutura foi monitorada com 10 acelerômetros, 5 em cada placa, posicionados de maneira homóloga. Neste trabalho, utilizou-se somente as medições do acelerômetro 3, posicionado na região do impacto da placa não-solidária. Uma cabeça de impedância foi também empregada, medindo aceleração e força no ponto de excitação.

Figura 28 – Montagem experimental.



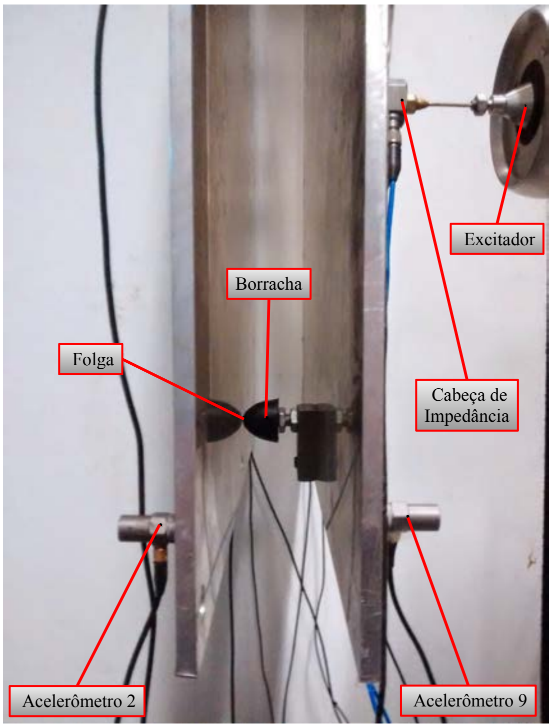
(a) Vista do lado da excitação.



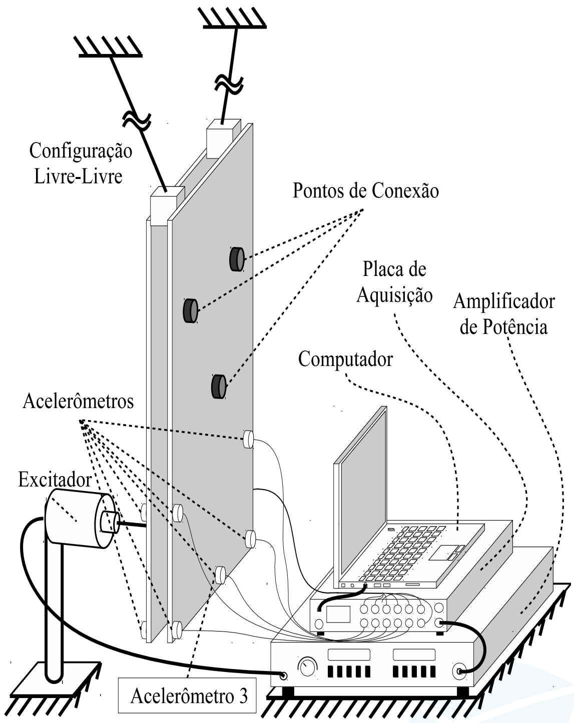
(b) Vista do lado da resposta.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 29 – Descrição da instrumentação.



(a) Zoom na região do impacto, mostranto a borracha.



(b) Representação esquemática.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Todos os sinais foram medidos com taxa de amostragem de 1280 Hz, sendo coletado 6400 amostras para os testes de curta duração (para identificação e análise) e 256000 amostras para os testes de longa duração (para caracterização do comportamento oscilatório). Com o objetivo de remover contribuições oriundas de modos de alta ordem e componentes estáticos (nível DC) do sinal, foi aplicado um filtro passa faixa de 5 à 120 Hz.

5.2 Análise do comportamento oscilatório

O teste *stepped sine* é uma ferramenta eficaz para detectar comportamento não-linear. Entretanto, uma maneira alternativa e de execução mais simples é excitar o sistema com uma varredura em frequência com longa duração. Para todas as amplitudes de excitação analisadas, a varredura em frequência é aplicada na faixa de frequência de 10 à 45 Hz com duração de 200 segundos.

A Fig. 30 mostra a aceleração considerando baixa e alta amplitude de tensão aplicada ao excitador, Fig. 30(a) e Fig. 30(b), respectivamente. A Fig. 30(a) mostra um decaimento suave após a ressonância, indicativo de comportamento linear. Entretanto, na Fig. 30(b) estão presentes duas diferenças: o fenômeno de salto é observado perto da frequência de 36.25 Hz e a região de ressonância (pico) mudou.

A Fig. 30 mostra, sinalizado por $\circ$, o tempo em que ocorre a maior amplitude do sinal de resposta, tempo este conhecido por *time of flight*[8] (TOF). A Fig. 31(a) apresenta a relação, estimada usando TOF, entre a energia de excitação e a frequência em que ocorre a maior amplitude da resposta.

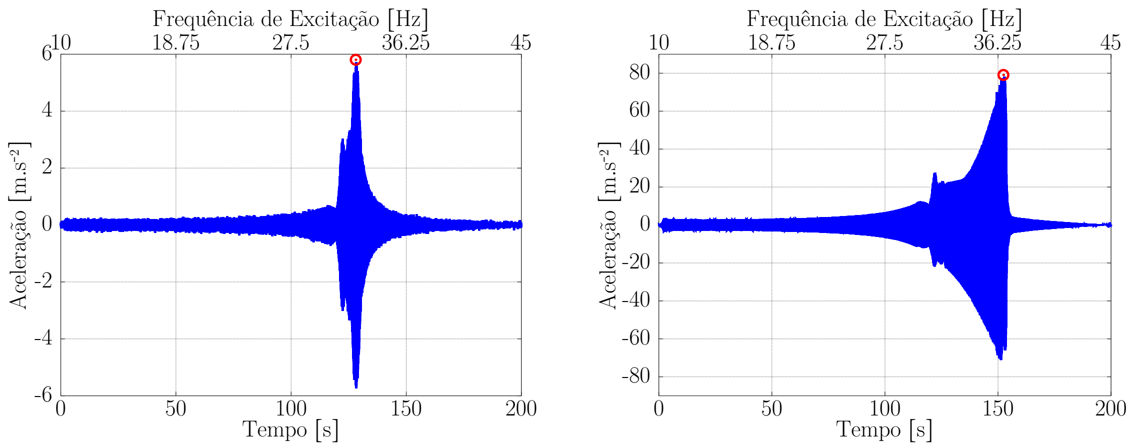
Da Fig. 31(a) nota-se que, quando a energia[9] da força de excitação é baixa, o TOF ocorre, aproximadamente, na mesma frequência, tanto para os testes com varredura em frequência crescente ou decrescente. Entretanto, quando a energia da força aplicada aumenta, a frequência do TOF aumenta também, seguindo uma relação sigmoidal em relação à energia do sinal de excitação. Outra observação importante pode ser obtida notando-se a diferença no comportamento em relação à varredura em frequência crescente ou decrescente. Este comportamento é um indicativo claro da existência de comportamento não-linear (quebra do princípio da superposição).

Figura 31(b) mostra as FRFs, estas apresentam algumas distorções causadas por efeitos não-lineares em função da amplitude da voltagem aplicada no excitador. Com análise da Fig. 31(b) é possível confirmar que a estrutura do painel solar apresenta forte dinâmica não-linear associada com rigidez não-linear de *hardening* evidenciado pelo

[8]em inglês, tempo de voo
[9]Calculada pela norma $L2$.

fenômeno de "salto" à direita.

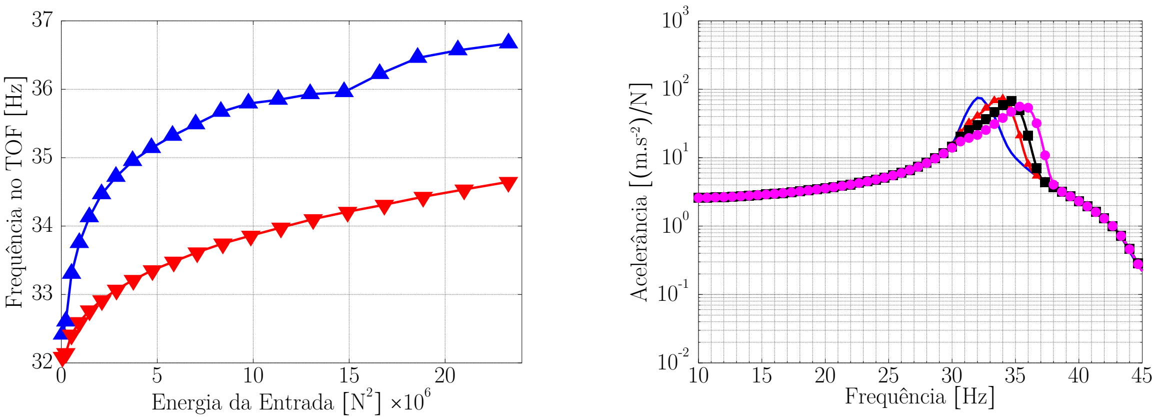
Figura 30 – Respostas para excitação varredura em frequência de 10 à 45 Hz considerando diferentes amplitudes de voltagem aplicadas no excitador. Adicionalmente, o *time of flight* é representado por ○.



(a) Baixa amplitude de excitação (0.01 V). (b) Alta amplitude de excitação (0.20 V).

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 31 – Frequência no TOF e FRF estimada usando o teste varredura em frequência de longa duração.



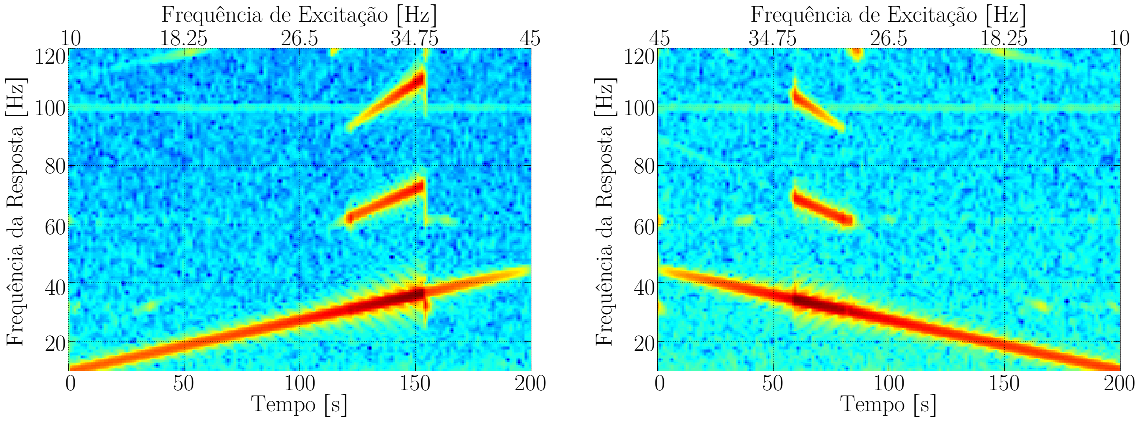
(a) Frequência no TOF. Para o teste de varredura em frequência crescente (10→45 Hz) símbolo ▲ e decrescente (45→10 Hz) símbolo ▼.

(b) Acelerência, — para amplitude de 0.03 V, ▲ para amplitude de 0.08 V, ■ para amplitude de 0.12 V e ● para amplitude de 0.20 V.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A Fig. 32 apresenta o espectrograma, também conhecido por distribuição tempo × frequência, dos sinais de aceleração para os testes de varredura em frequência crescente e decrescente, Figs. 32(a) e 32(b), respectivamente. Observa-se a presença dos primeiros 3 harmônicos causados pelos impactos e grandes deslocamentos, principalmente, na região de ressonância.

Figura 32 – Espectrograma do sinal de aceleração considerando o teste de varredura em frequência com alta amplitude de excitação (0.20 V).



(a) Varredura crescente, (10→45 Hz). (b) Varredura decrescente, (45→10 Hz).

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

5.3 Identificação e validação do modelo de Volterra

Os núcleos de Volterra foram identificados com base nos sinais de varredura em frequência, usando a abordagem em dois passos (SILVA, 2005). Primeiramente, o núcleo $\mathcal{H}_1(n_1)$ (linear) é identificado utilizando os sinais obtidos com baixa amplitude de excitação. Em seguida, os núcleos de alta ordem $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$ e $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$ (não-lineares) são identificados utilizando os sinais obtidos para alta amplitude de excitação, entretanto, previamente subtrai-se da resposta a contribuição linear estimada pelo núcleo $\mathcal{H}_1(n_1)$ (computado na primeira etapa)(SILVA; COGAN; FOLTÊTE, 2010; SHIKI; LOPES JR; SILVA, 2014).

Foram medidos 30 blocos com 6400 amostras cada para 20 amplitudes de tensão aplicada no excitador, abrangendo a faixa de 0.01 à 0.20 V. Na tentativa de induzir algum tipo de variabilidade, o sinal de excitação teve um acréscimo de fase de 12° a cada bloco (360° no total).

5.3.1 *Obtenção dos parâmetros que descrevem os núcleos de Volterra*

A escolha do número de funções de Kautz pode ser complicada quando da estrutura, como neste caso, apresenta forte efeito não-linear, e é ainda mais complicado neste caso em específico devido à excitação de modos de alta ordem pelos impactos.

Para o primeiro núcleo, um par de funções de Kautz é suficiente para descrever adequadamente o comportamento linear de um sistema oscilatório de um grau de liberdade, baseando-se em experiências anteriores usando modelos de Volterra (SHIKI; LOPES JR; SILVA, 2013; SHIKI et al., 2013; HANSEN; VILLANI; SILVA, 2014; HANSEN; SHIKI; SILVA, 2014a; HANSEN; SHIKI; SILVA, 2014b; SCUSSEL et al., 2013; SILVA, 2009;

SHIKI; LOPES JR; SILVA, 2012; SHIKI; SILVA; LOPES JR, 2013; SHIKI et al., 2013; SHIKI; HANSEN; SILVA, 2014a; SHIKI; HANSEN; SILVA, 2014b).

O núcleo de segunda ordem é essencialmente relacionado à assimetrias na resposta e aparece como segundo harmônico nos gráficos no domínio da frequência. Entretanto, interação excitador-estrutura pode resultar, também, em excitação harmônica de segunda ordem. A escolha do número de funções para este caso é complicada e após algumas tentativas optou-se por utilizar 4 funções de Kautz.

Para o núcleo de terceira ordem, um procedimento de otimização pode mostrar o melhor número de funções de Kautz a usar, mas a escolha foi limitada em 6 funções Kautz por questões de convergência para resolver equações de alta ordem recorrentes de usar mais funções.

Em suma, foram utilizadas 2, 4 e 6 funções de Kautz para representar os núcleos de Volterra $\mathcal{H}_1(n_1)$, $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$ e $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$, respectivamente.

Os parâmetros usados nos filtros de Kautz pra calcular os núcleos na base ortonormal foram encontrados utilizando via algoritmo de otimização SQP, minimizando a função objetivo F_{ob} da Eq.(12), usando como critério de parada passo menor que 10^{-8}.

O vetor com as condições iniciais de otimização para os teste com baixa amplitude de excitação aplicada no excitador (0.01 V) foi definido como $\boldsymbol{\Delta}_0 = [\omega_0\ \xi_0\ \omega_0\ \xi_0\ \omega_0\ \xi_0]$, onde ω_0 é a frequência de ressonância estimada pela transformada rápida de Fourier de $y_{exp}(k)$ para a amplitude de excitação baixa (0.01 V) e $\xi_0 = 10^{-3}$. Para todos os demais níveis de amplitude, o vetor condição inicial foi calculado por:

$$\boldsymbol{\Delta}_0 = \frac{1}{N_b}\sum_{i=1}^{N_b} {}_i\boldsymbol{\Delta}^* \tag{20}$$

onde N_b é o número de blocos para cada nível de amplitude aplicada no excitador ($N_b = 30$) e ${}_i\boldsymbol{\Delta}^*$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ N_b$, é o vetor de parâmetros ótimos pra o i-ésimo bloco com amplitude de excitação imediatamente inferior.

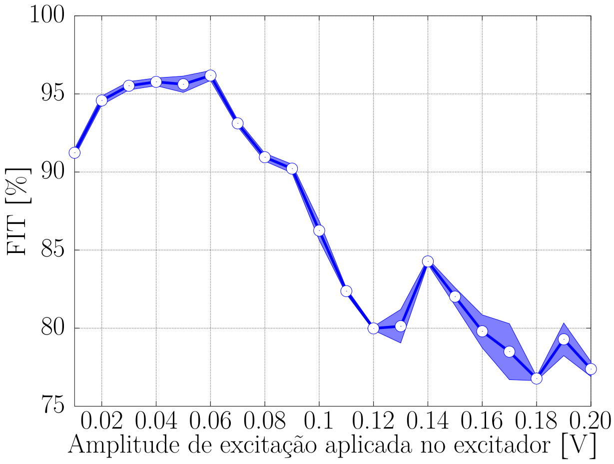
Os limites de busca foram configurados como:

$$\boldsymbol{\Delta}_{low} = \begin{bmatrix} 0.8\boldsymbol{\Delta}_0(1) & 0 & 0.8\boldsymbol{\Delta}_0(3) & 0 & 0.8\boldsymbol{\Delta}_0(5) & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{up} = \begin{bmatrix} 1.2\boldsymbol{\Delta}_0(1) & 1 & 1.2\boldsymbol{\Delta}_0(3) & 1 & 1.2\boldsymbol{\Delta}_0(5) & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

A qualidade de ajuste (FIT = $(1 - F_{ob})\times 100$ [%]) do procedimento de otimização é mostrada na Fig. 33. Quando a vibração é linear (amplitudes de 0.02 à 0.06 V) uma porcentagem de ajuste alta é alcançada. Entretanto, quando a amplitude de excitação é maior, o qualidade do ajuste cai (amplitudes de 0.08 à 0.20 V), provavelmente por limitações do modelo em descrever o comportamento não-linear complexo causado pela sobreposição com as contribuições dos modos de alta ordem. Se procedidas de forma adequada, algumas análises úteis podem ser obtidas, mesmo que a representação não seja completa.

Figura 33 – Qualidade de ajuste, com um desvio padrão da média.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Os parâmetros, frequência e fator de amortecimento, dos polos de Kautz relacionados com cada núcleo de Volterra são mostrados nas Figs. 34, 35 e 36. Os valores são mostrados com um desvio padrão da média. De modo geral, todos os parâmetros, com exceção de ξ_{quad}, acompanham o crescimento da amplitude de excitação aplicada no excitador, mostrando que os impactos estão mudando o comportamento da estrutura constantemente através das amplitudes de excitação.

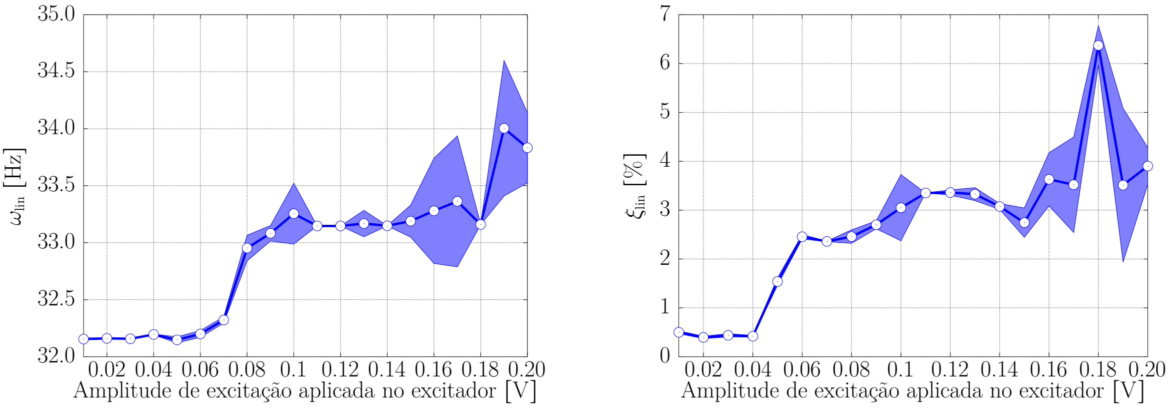
A Fig. 34(a) apresenta, aproximadamente, a mesma frequência, ω_{lin}, para as baixas amplitudes de excitação aplicadas no excitador (até 0.07 V). O fator de amortecimento, ξ_{lin}, dos polos de Kautz aumenta a partir da amplitude de excitação em que são gerados impactos, níveis acima de 0.05 V, com mostra a Fig. 34(b).

Os núcleos de alta ordem não apresentam contribuição significativa para baixos níveis de excitação, uma vez que o comportamento pode ser descrito como puramente linear. Então, caso o segundo e terceiro núcleo sejam incluídos no processo de identificação considerando uma excitação de amplitude baixa, pode-se gerar resultados inconsistentes para os parâmetros destes núcleos, pois o comportamento é essencialmente linear e este núcleos são forçados à modelar os resíduos da estimativa.

A Fig. 35(b) confirma que, para níveis de excitação abaixo de 0.05 V, os polos do segundo núcleo são superamortecidos e resultam em contribuição nula. Porém, a frequência dos polos de Kautz do segundo núcleo é crescente seguindo a amplitude de excitação, como mostra a Fig. 35(a).

A Fig. 36 mostra a evolução dos parâmetros de Kautz do terceiro núcleo de Volterra. Comportamento similar à Fig. 34, com exceção da região de 0.10 à 0.13 V, no fator de amortecimento, onde não foi encontrada justificativa para a quebra de padrão.

Figura 34 – Polos de Kautz de $\mathcal{H}_1(n_1)$, com um desvio padrão da média.

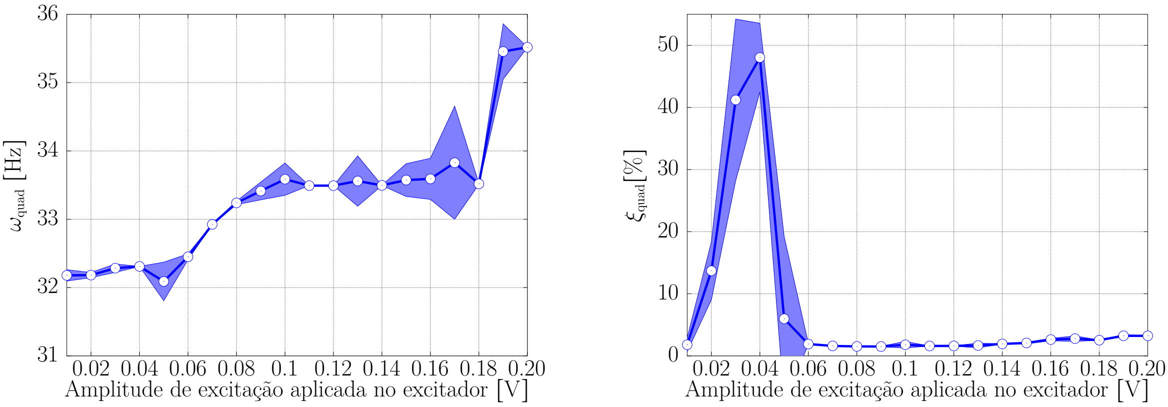


(a) Frequência.

(b) Fator de amortecimento.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 35 – Polos de Kautz de $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$, com um desvio padrão da média.

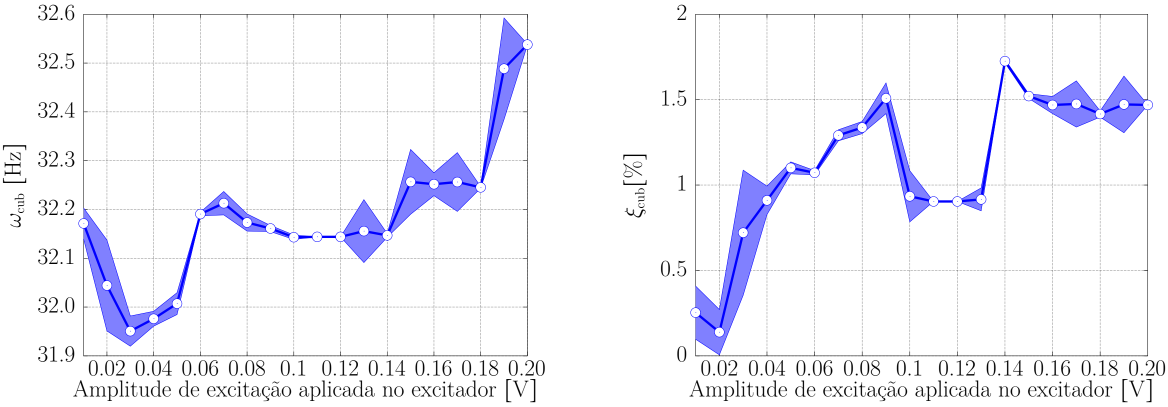


(a) Frequência.

(b) Fator de amortecimento.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 36 – Polos de Kautz de $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$, com um desvio padrão da média.



(a) Frequência.

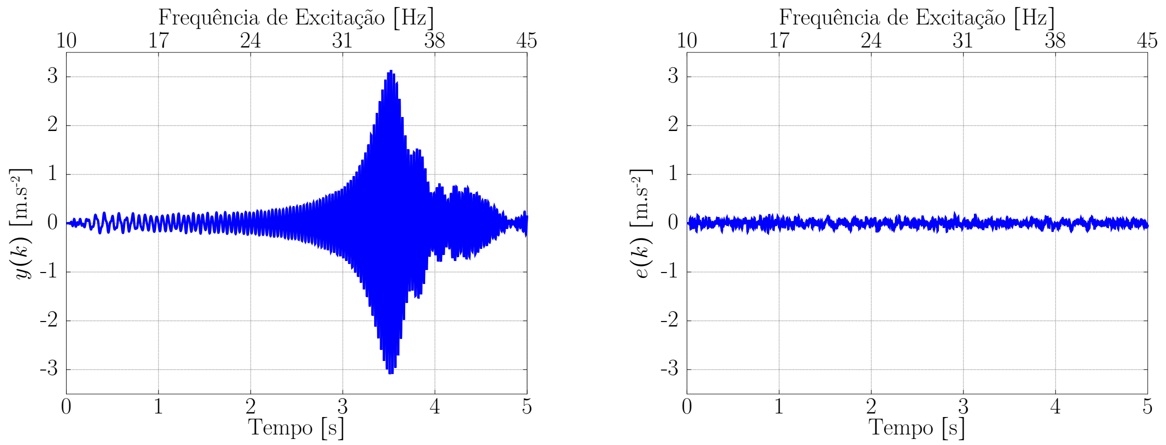
(b) Fator de amortecimento.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

5.3.2 *Núcleos de Volterra suas contribuições na resposta temporal*

A Fig. 37(a) mostra a resposta estimada pela Eq. (1) via múltiplas convoluções entre os núcleos de Volterra $\mathcal{H}_1(n_1)$, $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$, $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$ e o sinal de excitação para a amplitude de 0.01 V aplicada no excitador. O erro de predição calculado pra Eq. (11) é mostrado na Fig. 37(b). O segundo e terceiro núcleo, $\mathcal{H}_2(n_1, n_2)$ e $\mathcal{H}_3(n_1, n_2, n_3)$, respectivamente, não tem contribuição significativa para esta resposta (comportamento linear), assim, a resposta do modelo de Volterra, $y(k)$, pode ser aproximada considerando apenas contribuição linear, $y_1(k)$.

Figura 37 – Resposta para baixa amplitude de excitação (0.01 V).



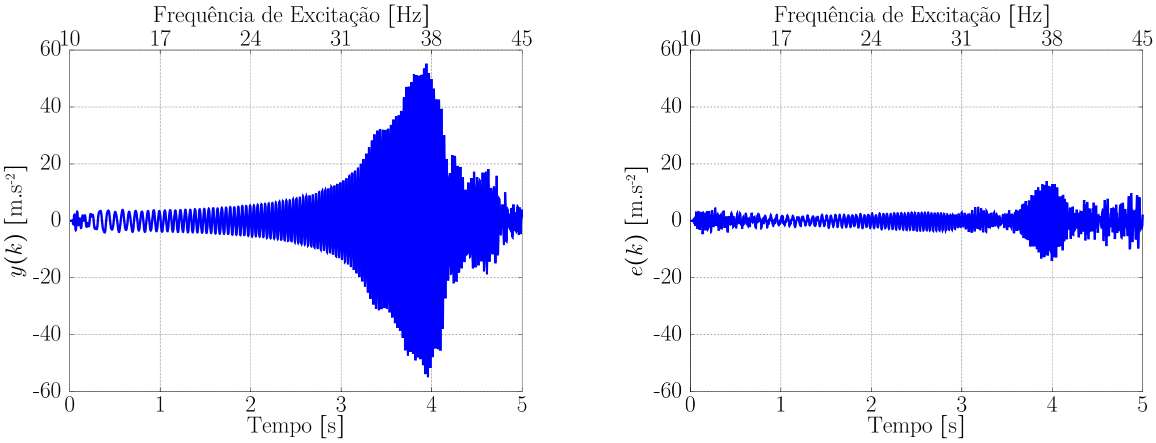
(a) Resposta estimada pelo modelo de Volterra.

(b) Erro de predição.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Entretanto, quando a amplitude de excitação aplicada no excitador é alta, o regime de vibração apresenta grandes deslocamentos, resultando na ocorrência de impactos, assim, as contribuições $y_2(k)$ e $y_3(k)$ apresentam contribuição significativa na resposta total, $y(k)$. A Fig. 38(a) mostra a resposta estimada pela modelo de Volterra para alta amplitude de excitação e a Fig. 38(b) mostra o erro de predição para esta estimativa.

Figura 38 – Resposta para alta amplitude de excitação (0.20 V).



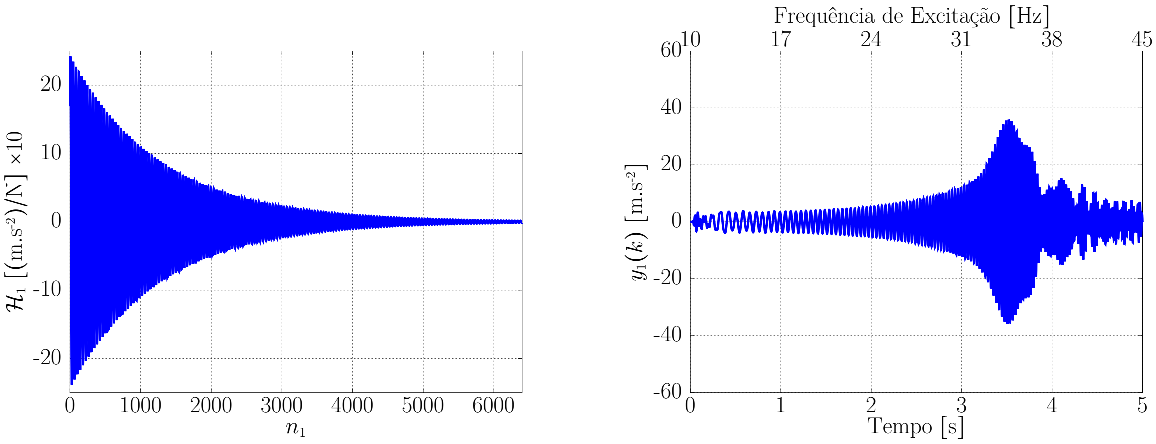
(a) Resposta estimada pelo modelo de Volterra.

(b) Erro de predição.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

As Figs. 39, 40 e 41 apresentam os núcleos de Volterra e suas respectivas contribuições linear, quadrática e cúbica da resposta para a amplitude de excitação de 0.20 V. É possível observar que, a contribuição quadrática é muito menor que a contribuição linear, em razão da simetria do sinal de resposta, como mostra a Fig. 40(b). Por outro lado, a contribuição cúbica tem contribuição muito significante na resposta total do modelo, como mostra a Fig. 41(b).

Figura 39 – Núcleo linear e sua contribuição para excitação de 0.20 V.



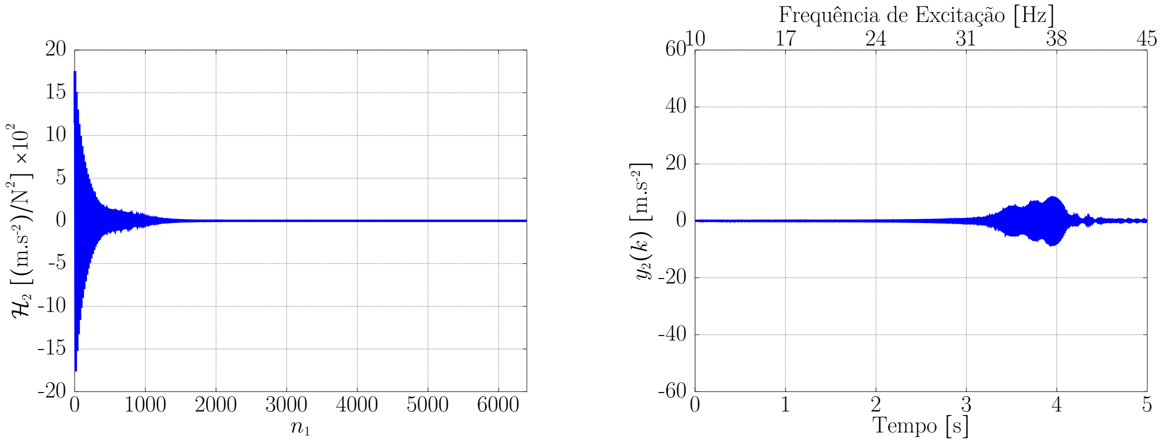
(a) Núcleo $\mathcal{H}_1(n_1)$.

(b) $y_1(k)$ estimada via $\mathcal{H}_1(n_1)$.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A diagonal do segundo núcleo, $\mathcal{H}_2(n_1, n_1)$, é mostrada na Fig. 40(a) e sua contribuição na resposta do modelo, $y_2(k)$, estimada pela convolução quadrática, como mostra a Fig. 40(b). Nota-se que a contribuição quadrática é muito menor que a contribuição linear devido, essencialmente, à simetria da resposta.

Figura 40 – Núcleo quadrático e sua contribuição para excitação de 0.20 V.



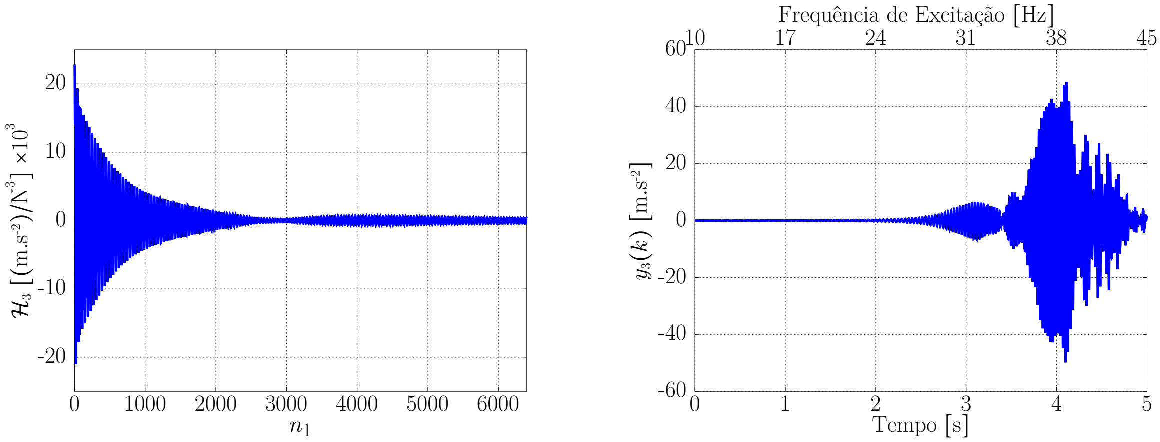
(a) Diagonal do núcleo $\mathcal{H}_2(n_1,\, n_2)$.

(b) $y_2(k)$ estimada via $\mathcal{H}_2(n_1,\, n_2)$.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A diagonal do terceiro núcleo, $\mathcal{H}_3(n_1, n_1, n_1)$, é mostrada na Fig. 41(a) e sua contribuição, $y_3(k)$, estimada via convolução cúbica, como mostra a Fig. 41(b). A contribuição cúbica tem, aproximadamente, o mesmo nível de significância na resposta total quando comparada com a contribuição linear.

Figura 41 – Núcleo cúbico e sua contribuição para excitação de 0.20 V.



(a) Diagonal do núcleo $\mathcal{H}_3(n_1,\, n_2,\, n_3)$.

(b) $y_3(k)$ estimada via $\mathcal{H}_3(n_1,\, n_2,\, n_3)$.

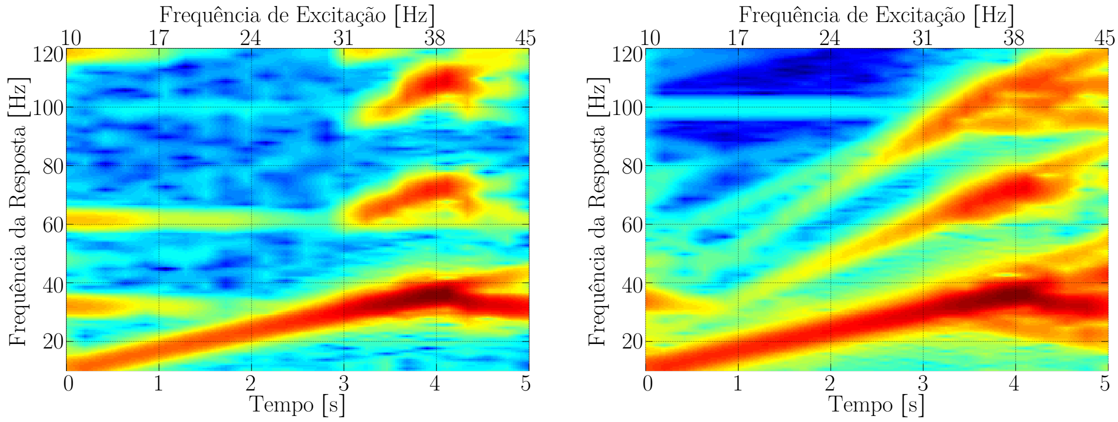
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Deste modelo, conclui-se que, para altas amplitudes de excitação aplicadas no excitador, as contribuições não-lineares, $y_2(k)$ e $y_3(k)$, são relevantes na resposta total do modelo, $y(k)$. Então, considerar as contribuições não-lineares é necessário para obtenção de um modelo representativo desta estrutura.

5.3.3 *Validação do modelo*

O modelo de Volterra identificado foi validado através de análises qualitativas de espectrogramas dos sinais de aceleração para alta amplitude de excitação, 0.20 V, como mostram as Figs. 42(a) e 42(b). Pode-se notar, em ambos espectrogramas, a presença da linha de excitação (harmônico fundamental) e a presença intensa do 2º e 3º harmônicos na região de ressonância.

Figura 42 – Espectrogramas do sinal de aceleração para excitação de 0.20 V. FIT = 73.19% via Eq. (14).



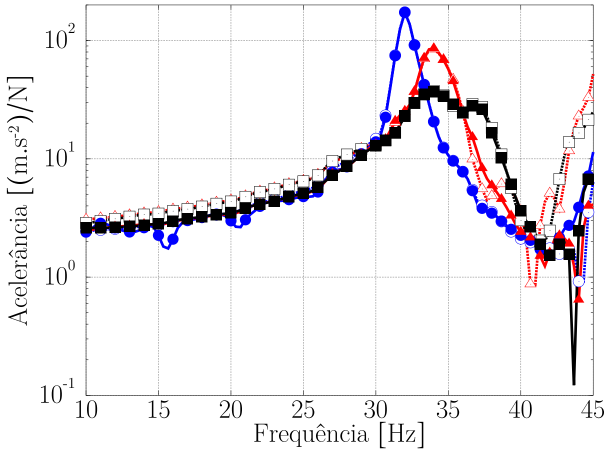
(a) Experimental.

(b) Modelo de Volterra.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Outra maneira de validar o modelo é através da estimativa das FRFs calculadas utilizando os sinais de resposta estimados pelo modelo de Volterra e comparar com as FRFs estimadas a partir dos sinais experimentais, como mostra a Fig. 43. É possível observar uma boa concordância entre as estimativas via dados experimentais e via modelo de Volterra na região de ressonância para os diferentes níveis de excitação mostrados na figura.

Figura 43 – Funções de resposta em frequência estimadas com sinais do modelo de Volterra e dados experimentais. Os símbolos ● via experimental e ○ via modelo para 0.01 V, os símbolos ▲ via experimental e △ via modelo para 0.10 V, os símbolos ■ para experimental e □ via modelo para 0.20 V.



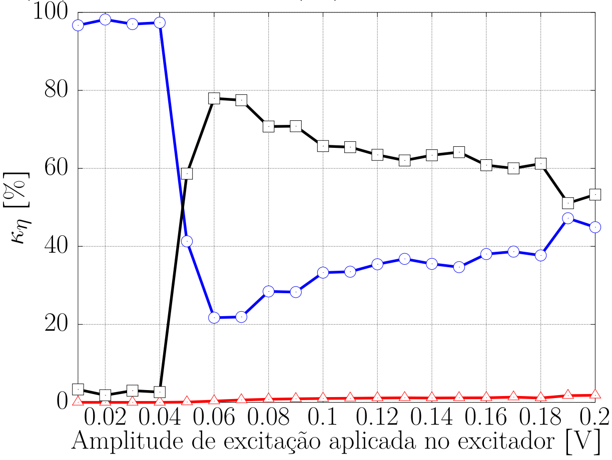
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

5.4 Índice de quantificação de comportamento não-linear

A Fig. 44 mostra o percentual, κ_η, de cada contribuição do modelo de Volterra para todas as amplitudes de excitação testadas, calculado pela Eq. (15). Os índices mostram que até 0.04 V a contribuição linear é dominante. Depois de 0.04 V a energia da contribuição cúbica passa a ser mandatória.

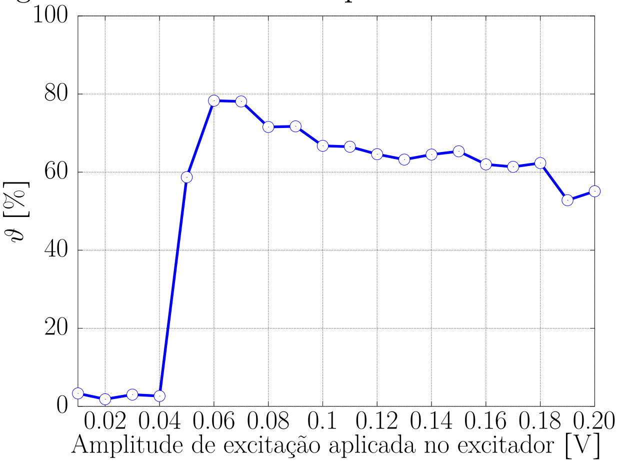
Pode-se, ainda, com base na Eq. (16) calcular o índice de quantificação de comportamento não-linear ϑ. A Fig. 45 mostra a evolução de ϑ conforme amplitude de excitação aumenta. Nota-se, uma grande semelhança entre ϑ e κ_3 isto deve-se, exclusivamente, pela baixa contribuição de κ_2. Pouca informação adicional pode ser obtida, para este caso, da Fig. 45, entretanto, o índice ϑ pode ser uma boa maneira de quantificar comportamento não-linear em estruturas que apesentem contribuição significativa do segundo núcleo e/ou núcleos de alta ordem.

Figura 44 – Contribuição de cada núcleo na resposta total do modelo de Volterra. Linear (κ_1) em ○, quadrática (κ_2) em △ e cúbica (κ_3) em □.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 45 – Índice de comportamento não-linear.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

5.5 Conclusões

Este capítulo apresentou uma aplicação, baseada em dados experimentais, das séries de Volterra na obtenção de um modelo não-linear para uma estrutura que simula a dinâmica de um painel solar. Assim, ao final do capítulo pode-se obter as seguintes conclusões:

- As séries de Volterra são capazes descrever a dinâmica complexa de um painel solar a partir de dados temporais;
- As contribuições lineares e não-lineares podem ser utilizadas o cálculo de um indicador de comportamento não-linear;
- Notou-se que a utilização de um modelo com apenas um modo de vibrar pode não ser recomendado para estruturas com dinâmica complexa.

6 Considerações finais

Este trabalho propôs apresentar a motivação para estudar monitoramento de saúde estrutural usando modelos de Volterra para aplicação em estruturas não-lineares. Ao final do trabalho pode-se obter as seguintes conclusões:

- A séries de Volterra podem ser empregadas para descrever o comportamento dinâmico de sistemas não-lineares. A maioria dos sistemas mecânicos podem sem descritos usando modelos de Volterra de até 3ª ordem, $\eta = 3$;
- Na formulação original as séries de Volterra apresentam problemas com convergência, estabilidade, número de amostras etc. Funções ortogonais, como as funções de Kautz, podem ser utilizadas para resolver os problemas acima citados;
- Os modelos de Volterra ter por característica marcante separar a resposta total em componentes lineares e não-lineares o que pode ser muito interessante para controle não-linear ou demais aplicações;
- O uso de Volterra em SHM é bem vindo pois permite monitorar estruturas não-lineares operando em regime linear ou não-linear usando o mesmo modelo para ambos comportamentos;
- A aplicação das séries de Volterra obtiveram bons resultados quando aplicadas monitoramento das estruturas testadas nesta dissertação;
- Mostrou-se que o uso de um indicador puramente linear (obtido por um modelo linear) pode falhar quando a estrutura opera em regime não-linear;
- O modelo de Volterra se mostrou eficiente na predição de variação estrutural tanto no regime linear quanto no regime não-linear;
- A métrica proposta envolvendo as contribuições não-lineares foi muito superior na detecção correta de variação estrutural quando o sistema operava de maneira não-linear.
- Propôs-se um índice para quantificação de comportamento não-linear.

6.1 Sugestão de trabalhos futuros

Propõem-se, como sugestão para trabalhos futuros, a aplicação das séries de Volterra na identificação de modelos para sistemas mecânicos não-lineares com múltiplos modos de vibração.

Referências

BORNN, L.; FARRAR, C. R.; PARK, G. Damage detection in initially nonlinear systems. **International Journal of Engineering Science**, Philadelphia, v. 48, n. 10, p. 909-920, 2010. ISSN 0020-7225. Structural Health Monitoring in the Light of Inverse Problems of Mechanics. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020722510001059>. Acesso em: 20/08/2015.

CHATTERJEE, A. Identification and parameter estimation of a bilinear oscillator using Volterra series with harmonic probing. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Kidlington, v. 45, n. 1, p. 12-20, 2010. ISSN 0020-7462. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746209001632>. Acesso em: 20/08/2015.

FARRAR, C. R.; WORDEN, K.; TODD, M. D.; PARK, G.; NICHOLS, J.; ADAMS, D. E.; BEMENT, M. T.; FARINHOLT, K. **Nonlinear system identification for damage detection**. [S.l.], 2007. Disponível em: <http://institutes.lanl.gov/ei/_docs/Annual_Workshops/LA_14353_NonlinearReport.pdf?> Acesso em: 20/08/2015.

GATTI, G.; BRENNAN, M.; KOVACIC, I. On the effects of shaker dynamics on the response of a non-linear oscillator under test. **Booklet of Abstracts, EUROMECH Colloquium 503 Non-linear Normal Modes, Dimension Reduction and Localization in Vibrating Systems**, p. 70--73, 2009. Disponível em: <http://w3.uniroma1.it/dsg/euromech503/abstracts/gatti_et_al.pdf>. Acesso em: 20/08/2015.

HANSEN, C.; SHIKI, S. B.; SILVA, S. da. Non-parametric identification of a non-linear buckled beam using discrete-time Volterra series. In: **INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL DYNAMICS - EURODYN 2014**. Porto, Portugal: [s.n.], 2014. p. 2013--2018. Disponível em: <http://paginas.fe.up.pt/~eurodyn2014/CD/papers/279_MS11_ABS_1710.pdf>. Acesso em: 20/08/2015.

______. Structural health monitoring in a buckled beam using volterra series. In: CAM, V. L.; MEVEL, L.; SCHOEFS, F. (Ed.). **EUROPEAN WORKSHOP ON STRUCTURAL HEALTH MONITORING - EWSHM 2014**. Nantes, France, 2014. p. 2282-2289. Disponível em: <http://hal.inria.fr/hal-01022991/document>. Acesso em: 20/08/2015.

HANSEN, C.; SILVA, S. da; FOLTÊTE, E.; COGAN, S.; COGAN, S. Nonlinearity detection and identification using discrete-time Volterra series: application to a solar array structure. In: PAPADRAKAKIS, M.; PAPADOPOULOS, V.; PLEVRIS, V. (Ed.). **5th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering**. Crete Island, Greece: [s.n.], 2015. Acesso em: 20/08/2015.

HANSEN, C.; VILLANI, L. G. G.; SILVA, S. da. Aplicação de séries de Volterra na detecção de danos em uma viga com comportamento não-linear. In: **VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM 2014**. Uberlândia, Brasil: [s.n.], 2014. Disponível em: <http://www.conem2014.com.br/ANAIS/PDFS/CONEM2014-0062.PDF>. Acesso em: 20/08/2015.

HOT, A.; KERSCHEN, G.; FOLTÊTE, E.; COGAN, S. Detection and quantification of non-linear structural behavior using principal component analysis. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 26, n. 0, p. 104-116, 2012. ISSN 0888-3270. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327011002287>. Acesso em: 20/08/2015.

KAUTZ, W. H. Transient synthesis in the time domain. **IRE Transactions on Circuit Theory**, New York, n. 1, p. 29-39, 1954. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org-/stamp/stamp.jsp?arnumber=01083588>. Acesso em: 20/08/2015.

KERSCHEN, G.; WORDEN, K.; VAKAKIS, A. F.; GOLINVAL, J.-C. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 20, n. 3, p. 505-592, 2006. ISSN 0888-3270. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327005000828>. Acesso em: 20/08/2015.

MILANESE, A. **Volterra Series Revisited, With Applications in Nonlinear Structural Dynamics and Aeroelasticity**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) --- Clarkson University, New York, 2009. 182f. Disponível em: <http:/-/adsabs.harvard.edu/abs/2009PhDT........71M>. Acesso em: 20/08/2015.

NICHOLS, J. M.; TODD, M. D. Nonlinear features for shm applications. In: ______. **Encyclopedia of Structural Health Monitoring**. John Wiley & Sons, Ltd, 2009. ISBN 9780470061626. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/9780470061626-.shm049>. Acesso em: 20/08/2015.

RUGH, W. J. **Nonlinear system theory: the Volterra/Wiener approach**. Baltimore: The Johns Hopkins University, 1991.

SCHETZEN, M. **The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems**. New York: Wiley, 1980.

SCUSSEL, O.; VASCONCELOS, G. J. Q.; SHIKI, S. B.; SILVA, S. da. Identification of mechanical systems through Volterra series study of benchmark cases. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES - DINCON 2013. **Anais...** Fortaleza: DINCON, 2013. p. -. Disponível em: <http://www-.sbai2013.ufc.br/pdfs/4248.pdf>. Acesso em: 20/08/2015.

SHIKI, S. B.; HANSEN, C.; SILVA, S. da. Nonlinear features identified by Volterra series for damage detection in a buckled beam. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL NONLINEAR DYNAMICS AND DIAGNOSIS - CSNDD 2014. **Proceedings...** Agadir: CSNDD, 2014. v. 16, p. -. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1051/matecconf/20141602003>. Acesso em: 20/08/2015.

_____. Parameter identification of a nonlinear beam with hardening behavior using Volterra series. In: CONFERENCE ON NONLINEAR VIBRATIONS, LOCALIZATION AND ENERGY TRANSFER - NV 2014, 5. **Proceedings...** Istanbul: NV, 2014.

SHIKI, S. B.; LOPES JR, V.; SILVA, S. da. Identification of parameters in nonlinear structures using discrete Volterra series. In: SYMPOSIUM ON INTELLIGENT MATERIALS AND CONTROL, 4. **Proceedings...** Ilha Solteira, 2012. p. -.

_____. Damage detection in nonlinear structures using discrete-time Volterra series. **Key Engineering Materials**, Pfaffikon, v. 569-570, p. 876-883, 2013. Disponível em: <http://www.scientific.net/KEM.569-570.876>. Acesso em: 20/08/2015.

_____. Identification of nonlinear structures using discrete-time Volterra series. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Heidelberg, v. 36, n. 3, p. 523-532, 2014. ISSN 1678-5878. Disponível em: <http://dx.doi.org/10-.1007/s40430-013-0088-9>.

SHIKI, S. B.; NOËL, J.-P.; KERSCHEN, G.; LOPES JR, V.; SILVA, S. da. Identification of mechanical systems with local nonlinearities through discrete-time Volterra series and Kautz functions. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON RECENT ADVANCES IN STRUCTURAL DYNAMICS - RASD 2013, 11. **Proceedings...** Pisa: RASD, 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/2268/151792>. Acesso em: 20/08/2015.

SHIKI, S. B.; SILVA, S. da; LOPES JR, V. Nonlinear mechanical systems identification through Wiener/Volterra series. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING - COBEM 2013, 22. **Proceedings...** Ribeirão Preto: COBEM, 2013. p. 782-791. ISSN 2176-5480. Disponível em: <http://www.abcm.org.br-/anais/cobem/2013/PDF/175.pdf>. Acesso em: 20/08/2015.

SHIKI, S. B.; SILVA, S. da; NOËL, J.; KERSCHEN, G. Identification of a geometrically nonlinear beam using Volterra series. **Mechanics Research Communications**, Kidlington, Submetido para avaliação, 2013.

SILVA, S. da. Damage detection in a 2 dof nonlinear mechanical systems using Volterra series and Kautz filter. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING - COBEM 2009, 20. **Proceedings...** Gramado: COBEM, 2009. p. -. Disponível em: <http://www.abcm.org.br/anais/cobem/2009/pdf/COB09-0014.pdf>. Acesso em: 20/08/2015.

_____. Non-parametric identification of mechanical systems by Kautz filter with multiple poles. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 25, n. 4, p. 1103-1111, 2011. ISSN 0888-3270. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com-/science/article/pii/S0888327010004139>. Acesso em: 20/08/2015.

SILVA, S. da; COGAN, S.; FOLTÊTE, E. Nonlinear identification in structural dynamics based on Wiener series and Kautz filters. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 24, n. 1, p. 52-58, 2010. ISSN 0888-3270. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327009001897>. Acesso em: 20/08/2015.

SILVA, W. Identification of nonlinear aeroelastic systems based on the Volterra theory: Progress and opportunities. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 39, n. 1-2, p. 25-62, 2005. ISSN 0924-090X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-005-1907-z>. Acesso em: 20/08/2015.

VIRGIN, L. **Introduction to Experimental Nonlinear Dynamics: A Case Study in Mechanical Vibration**. Cambridge: Cambridge University, 2000. ISBN 9780521779319. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=L8dLzjTpyhAC>. Acesso em: 20/08/2015.

WORDEN, K.; FARRAR, C. R.; HAYWOOD, J.; TODD, M. A review of nonlinear dynamics applications to structural health monitoring. **Structural Control and Health Monitoring**, Chichester, v. 15, n. 4, p. 540-567, 2008. ISSN 1545-2263. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/stc.215>. Acesso em: 20/08/2015.

WORDEN, K.; TOMLINSON, G. R. **Nonlinearity in Structural Dynamics - Detection, Identification and Modelling**. London: Institute of Physics, 2001. ISBN 0750303565.