132

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

UNESP - I.F.T. - BIBLIOTECA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT–D.007/98

OK

Formulação Covariante da Termodinâmica

Jorge Castiñeiras Rodriguez

Orientador

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA - BIBLIOTECA
013

Agosto 1998

A Manuel Castiñeiras Ferreiro, in memoriam.

Agradecimentos

Ao Prof. Geore Matsas pela sua competência, disponibilidade e paciência. Obrigado por fazer-nos sentir mais colaboradores do que alunos.

À minha família que mesmo distante, esteve sempre presente.

A Ângela e Crispino pelo apoio constante e incondicional. Obrigado por terem sido minha família no Brasil.

Aos meus amigos pela força na luta diária.

A todos os professores funcionários e alunos do Instituto de Física Teórica, sempre dispostos a colaborar.

À FAPESP pelo suporte financeiro.

Ao Brasil pelo apoio incondicional e por fazer-me sentir em casa.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram ou incentivaram a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma formulação covariante da termodinâmica dum meio contínuo num espaço curvo. Para isto associamos a cada estado do meio um conjunto de "variáveis primárias": um tensor de energia momento simétrico e conservado $T^{\mu\nu}$, R quadricorrentes conservadas $N_r{}^{\mu}$ $(r = 1, 2, ...R)$ e uma quadrivelocidade $u_o{}^{\mu}$ associada ao estado de equilíbrio. Assume-se então a existência dum quadrivetor fluxo de entropia S^{μ} com divergência não negativa, função das variáveis primárias. Esta relação funcional deve ser válida para pequenos desvios fora do equilíbrio incorporando automaticamente a relação linear entre o fluxo de entropia e os fluxos de calor e de partículas. As configurações de equilíbrio são obtidas impondo a condição de que a geração de entropia seja nula $(S^{\mu}{}_{;\mu} = 0)$. Constata-se que neste caso exite um campo de Killing tipo tempo β^{μ} (e portanto o espaço-tempo deve ser necessariamente estacionário), o movimento do fluido é rígido, a temperatura varia com a posição de acordo com a lei de Tolman $T\sqrt{-g_{00}} =$ const e analogamente para o potencial químico: $\mu\sqrt{-g_{00}} =$ const. Discute-se também os problemas associados à definição da "temperatura relativa".

Abstract

We present a covariant formulation of thermodynamics for a continuous medium in a curved space time. We associate a set of "primary variables" to each state of the system: a (symmetric, conserved) energy tensor $T^{\mu\nu}$, R conserved four-currents N_r^μ $(r = 1, 2, ...R)$ and a four-velocity ${u_o}^\mu$ associated to the equilibrium state. It is assumed the existence of an entropy flux four-vector S^μ (with non-negative divergence) as a function of the primary variables. This functional relationship is supposed to be valid for small deviations from equilibrium, so incorporating automatically the relationship among entropy, heat and particle fluxes. Equilibrium configurations are obtained imposing a null entropy generation condition $({S^\mu}_{;\mu} = 0)$. It is shown that for equilibrium states, there exists a time-like Killing vector field β^μ (and so the space-time must be stationary), that the motion of the fluid is rigid, that the temperature varies with position according to Tolman's law $T\sqrt{-g_{00}} = \text{const}$ and analogously for the chemical potential: $\mu\sqrt{-g_{00}} = \text{const}$. Problems related to "relative temperature" definition are also discussed .

Índice

I Introdução **8**

II Transformação relativística da temperatura **12**

II.1 Detetores de Unruh-DeWitt num banho térmico 13

II.2 Tipos de Termômetros 14

II.3 Abordagem Clássica 16

III Cinemática dum meio contínuo **18**

III.1 Famílias de observadores 18

III.2 Meio Contínuo 20

III.3 Velocidade do meio 23

III.4 Movimento relativo de elementos de fluido vizinhos 25

III.4.1 Coordenadas comóveis normalizadas 25

III.4.2 Vetor posição relativa 26

III.4.3 Velocidade relativa 28

III.4.4 Distância e direção relativa 30

III.5 Quantidades cinemáticas 31

III.5.1 Expansão 32

III.5.2 Deformação 32
III.5.3 Vorticidade 33

IV Teoria fenomenológica e termodinâmica 35

IV.1 Leis de conservação 36
IV.2 Restrições gerais 37
IV.3 Quadricorrente de entropia 40
IV.4 Fluido simples 42
IV.5 Termodinâmica de Equilíbrio 45
IV.6 Termodinâmica irreversível 50

V Conclusões 57

A Velocidade dinâmica e diagonalizabilidade do tensor de energia-momento 60

Referências Bibliográficas 68

Capítulo I

Introdução

Desde o surgimento da relatividade especial em 1905, inúmeros esforços por parte de Einstein [1, 2], Minkowski [3], Planck [4] e quase todos os físicos mais relevantes da época, foram dedicados ao problema de adaptar a termodinâmica, assim como a eletrodinâmica e a mecânica de sistemas contínuos aos requerimentos da invariância de Lorentz. Em particular, a questão de como se transforma a temperatura por transformações de Lorentz levou alguns físicos a conclusões totalmente opostas àquelas obtidas por outros. De acordo com Einstein, Plank, Tolman, Pauli e von Laue, entre outros, um observador num sistema de referência S' que se move com velocidade constante v com relação ao referencial de repouso inercial S dum sistema termodinâmico dado mediria uma temperatura $T' = T\sqrt{1-v^2}$ (onde T é a temperatura medida em S). Posteriormente, Ott e Arzeliès, por exemplo, chegaram exatamente à conclusão oposta i.e. $T' = T/\sqrt{1-v^2}$, enquanto que Landsberg obteve que $T' = T$. Em todos estes casos não estava claro como esta temperatura seria medida e de que forma estas quantidades ajudariam a descrever os processos e estados físicos.

No começo, o desconhecimento da existência de sistemas que precisassem de tal teoria relativística, fez com que estes estudos não fossem desenvolvidos por muitos anos.

Hoje contamos com uma visão mais ampla do nosso universo e conhecemos muitas áreas da física de altas energias, da astrofísica e da cosmologia onde os efeitos relativísticos desempenham um papel importante e inclusive dominante. Podemos citar como exemplos a física de produção de píons em colisões hadrônicas de altas energias; fenômenos envolvendo plasma na magnetosfera de pulsares, fontes de raios X e quasares, e a equação de estado da matéria a densidades supranucleares no interior de estrelas de nêutrons e nos primórdios do universo.

Finalmente com a previsão de novos fenômenos como a radiação Hawking, que prevê a evaporação de buracos negros [5], e o efeito Unruh, [6, 7] que prediz que observadores uniformemente acelerados no vácuo de Minkowski detectam no seu referencial de repouso um banho térmico caracterizado por uma temperatura proporcional a sua aceleração própria, estimulou-se ainda mais o estudo das relações entre a termodinâmica, a teoria quântica de campos e a gravitação.

Infelizmente as tentativas de construir uma teoria fenomenológica a partir de teorias microscópicas tais como a mecânica estatística e a teoria cinética não tiveram muito êxito. Isto se deve por um lado ao fato de não contarmos com uma mecânica estatística de partículas com interações de grande alcance que seja invariante de Poincaré e por outro lado ao fato de, apesar da teoria cinética relativística ter sido bastante desenvolvida, ela poder ser aplicada somente em casos muito particulares.

A respeito desta situação é de bom alvitre citar a W. Israel e J. M. Stewart no artigo "Progress in Relativistics Thermodynamics and Electrodynamics of Continuous Media" [8] onde os autores afirmam : "In a theory as long-established as relativity it is something of a scandal that to this day there is no generally accepted formulation of the dynamics and thermodynamics of a continuous medium in interaction with external fields".

Considerando tudo o que foi mencionado acima, entende-se ser importante tentar construir uma formulação covariante da termodinâmica sobre a base do que já tem sido feito e dedicando particular atenção àquelas formulações fenomenológicas que evitam o uso do "referencial de repouso" de modo que se possa predizer o resultado das medições feitas por um observador arbitrário (que em geral não esteja em repouso no referencial do elemento de volume do sistema).

Nesta dissertação pretendemos resumir os progressos na teoria termodinâmica relativística e o seu papel fundamental na obtenção de equações de evolução temporal para meios contínuos num espaço-tempo arbitrário . Como mostraremos, para descrever a dinâmica de um meio relativístico vamos precisar de equações adicionais, pois cairemos num sistema com mais incógnitas do que equações. Estas equações adicionais (equações de estado) serão fornecidas pelas propriedades termodinâmicas do meio em questão. E parece possível que, os princípios gerais, dos quais estas equações são derivados, possam ser enunciados duma forma totalmente covariante.

Ao longo deste trabalho usaremos principalmente a notação de componentes para os tensores e vetores embora, em algumas ocasiões, usaremos a notação livre de índices. A signatura da métrica que usaremos é $(-+++)$. Enquanto que como sistema de unidades usaremos $c = 8\pi G = \hbar = k = 1$, onde c é a velocidade da luz, G é a constante da gravitação de Newton, $2\pi\hbar$ é a constante de Planck e k é a constante de Boltzmann. Portanto todas as quantidades físicas são números puros.

Capítulo II

Transformação relativística da temperatura

Uma boa forma de começar a nossa dissertação sobre a formulação covariante da termodinâmica poderia ser esclarecendo a chamada polêmica "Planck-Ott" a respeito da definição de temperatura relativística, à qual nos referimos na introdução, ou em outras palavras, responder à pergunta: Um corpo em movimento "parece" mais frio ou mais quente?

Dois artigos muito esclarecedores neste sentido são os de Costa e Matsas [9] e Landsberg e Matsas [10]. No primeiro, usando-se apenas teoria quântica de campos e sem fazer nenhum tipo de hipóteses termodinâmicas, estuda-se o comportamento dum termômetro que se move com velocidade constante v através dum banho térmico, ou seja, que se move com velocidade v com relação ao sistema inercial S no qual o banho térmico é isotrópico e mostra um espectro planckiano caraterizado pela temperatura T.

II.1 Detetores de Unruh-DeWitt num banho térmico

Um método que tem-se mostrado muito útil no contexto da gravitação semi-clássica em conexão com a evaporação de buracos negros tem sido o de usar um detetor de Unruh-DeWitt como termômetro.

Este detetor de Unruh-DeWitt é um monopolo de dois níveis com um "gap" de energia $\Delta E = \omega'$ entre os estados fundamental e excitado, e que detecta partículas escalares sem massa ou equivalentemente "fótons de spin zero" que representam o banho térmico.

Desta forma obtém-se que a taxa de e excitação do detetor é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dP^{exc}}{d\tau} &= C_0 \frac{T\sqrt{1-v^2}}{4\pi v} \\ &\times \ln\left(\frac{1-\exp(-\omega'\sqrt{1+v}/T\sqrt{1-v})}{1-\exp(-\omega'\sqrt{1-v}/T\sqrt{1+v})}\right) , \end{aligned} \tag{II.1}$$

onde C_0 é uma pequena constante de acoplamento entre o detetor e o campo escalar.

Portanto a distribuição de número de partículas bosônicas $n'(\omega', T, v)$ no referencial S' do detetor é dada por:

$$\begin{aligned} n'(\omega', T, v)d\omega' &= \frac{\omega' T\sqrt{1-v^2}}{4\pi^2 v} \\ &\times \ln\left(\frac{1-\exp(-\omega'\sqrt{1+v}/T\sqrt{1-v})}{1-\exp(-\omega'\sqrt{1-v}/T\sqrt{1+v})}\right) d\omega' . \end{aligned} \tag{II.2}$$

Note que de (II.1) e (II.2) está claro que o detetor em movimento não se excita de acordo com um espectro de corpo negro, embora no limite $v \to 0$

obtenha-se a distribuição Planckiana,

$$n(\omega,T)d\omega = \frac{\omega^2}{2\pi^2\left(e^{\omega/T}-1\right)}d\omega \; . \tag{II.3}$$

II.2 Tipos de Termômetros

Para um termômetro que seja sensível ao setor infravermelho do espectro i.e. $(\omega' \ll T)$ e para $v \ll 1$ de (II.2) e (II.3) temos que,

$$n'(\omega' \ll T) \approx \frac{T}{2\pi}(1 - v^2/6) \tag{II.4}$$

e

$$n(\omega \ll T) \approx \frac{T}{2\pi} \tag{II.5}$$

e portanto, neste caso, comparando (II.4) e (II.5) é possível definir uma temperatura efetiva T' do banho térmico, assim como medida em S', da seguinte forma,

$$T' \approx T(1 - v^2/6) \; . \tag{II.6}$$

Por outro lado, como a densidade de partículas $\bar{n}$ associada a uma distribuição $n(\omega)$ é dada por

$$\bar{n} = \int n(\omega) d^3k \, , \tag{II.7}$$

para um termômetro sensível a todo o espectro, obtém-se substituindo (II.3) em (II.7), que no referencial S

$$\bar{n} = \frac{T^3\zeta(3)}{\pi^2} \, , \tag{II.8}$$

(onde $\zeta(x)$ é a função zeta). Analogamente, obtemos no referencial S' substituindo (II.2) em (II.7)

$$\bar{n}' = \frac{\gamma T^3 \zeta(3)}{\pi^2} , \tag{II.9}$$

(onde $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$). Comparando (II.8) e (II.9) pode-se definir a temperatura efetiva T' do banho térmico assim como medida no referencial S' como dada por

$$T' = T(1 - v^2)^{-1/6} . \tag{II.10}$$

No limite $v \ll 1$ Eq. (II.10) se reduz a

$$T' = T(1 + v^2/6) . \tag{II.11}$$

Portanto, definindo a temperatura efetiva relativa desta forma, temos que, para baixas velocidades, um termômetro sensível à parte menos energética do espectro, de acordo com (II.9) mediria uma temperatura efetiva $T' < T$ enquanto que um termômetro sensível a todo o espectro mediria, de acordo com (II.6), uma temperatura $T' > T$. Estes fatos ao invés de expressarem uma contradição, somente refletem o fato de que o espectro de freqüências no referencial em movimento S' não é planckiano. Ou seja, que não existe nenhuma transformação continua $T' = T'(T, v)$ (sem nenhuma dependência angular) que nos permita expressar (II.2) na forma do espectro dum corpo negro,

$$n'(\omega', T')d\omega' = \frac{\omega'^2}{2\pi^2 \left(e^{\omega'/T'} - 1\right)} d\omega' . \tag{II.12}$$

E como o conceito de temperatura dum corpo negro está inevitavelmente associado ao espectro térmico plankiano e qualquer transformação relativística universal para a temperatura teria que poder aplicar-se, pelo menos, ao caso do corpo negro, conclui-se que tal transformação relativística para a temperatura não existe. Portanto só a temperatura própria T permanece como a única temperatura com significado universal.

Qualquer definição de temperatura relativa baseada em algum procedimento operacional, do tipo: " Temperatura é aquilo que certo dispositivo predeterminado em S' mede" seria arbitrária pois como já foi ilustrado, diferentes "termômetros" e diferentes procedimentos de medição levariam a diferentes dependências funcionais.

II.3 Abordagem Clássica

O resultado (II.2) pode ser obtido classicamente de forma exata sem fazer nenhuma alusão à teoria quântica de campos. Usando apenas as transformações de Lorentz obtém-se que para um observador em S' a densidade de fótons no intervalo de freqüências $d\omega'$ que chegam no intervalo de ângulo sólido $d\Omega'$ está dada por

$$n'(\omega', T, v, \theta')d\omega' d\Omega' = \frac{\omega'^2}{2\pi^2 \left(e^{\omega'/T'_{\theta'}} - 1\right)} d\omega' d\Omega' \qquad \text{(II.13)}$$

onde $T'_{\theta'}$ é a "*temperatura direcional*" definida como [11] e [12],

$$T'_{\theta'}(T, v, \theta') = \frac{T\sqrt{1 - v^2}}{1 - v\cos\theta'} \qquad \text{(II.14)}$$

e θ' é o ângulo entre o eixo em que se move S' e a direção de observação.

A expressão (II.2) para a distribuição de número de partículas bosônicas $n'(\omega', T, v)$ no referencial S' do detetor obtêm-se integrando (II.13) sobre todo o ângulo sólido e dividindo o resultado por $\int d\omega' = 4\pi$:

$$n'(\omega', T, v)d\omega' = \frac{1}{4\pi}\int n'(\omega', T'_{\theta'})d\Omega' d\omega' \,. \tag{II.15}$$

Ou seja, deste ponto de vista vemos que um observador movendo-se com velocidade v com relação ao banho térmico continua observando em cada direção um espectro planckiano (II.13) mas com uma "temperatura direcional" que depende do angulo θ' entre a direção do movimento e a direção de observação. A radiação que chega na direção do movimento estará desviada para o azul e portanto nesta direção a "temperatura" será maior enquanto que a radiação que chega na direção contrária estará desviada para o vermelho pelo que nesta direção a "temperatura" será menor. Assim o espectro registrado pelo detetor de Unruh-DeWitt (II.2) é uma media de diferentes distribuições planckianas cada uma com uma "temperatura" diferente.

Capítulo III

Cinemática dum meio contínuo

Nesta seção vamos introduzir as variáveis termodinâmicas relativísticas de uma forma natural através do estudo da cinemática dum meio contínuo.

III.1 Famílias de observadores

Seja M uma variedade espaço-temporal munida de uma métrica **g**, e O um aberto de M. Uma família de observadores em O sempre pode ser representada por uma congruência tipo tempo C, ou seja, por uma família de curvas tipo tempo tal que por cada ponto de O passe uma, e somente uma, curva de C.

Como a tangente de uma congruência define um campo vetorial em O, e todo campo vetorial contínuo gera uma congruência de curvas, diremos que uma congruência de curvas é suave se o correspondente campo vetorial for também suave.

Seja $u^\mu(x)$ o campo vetorial contínuo, tipo tempo e unitário ($\forall x \in$

O, $u^\mu u_\mu = -1$) que descreve a família de observadores. Para todo $u^\mu(x)$ sempre é possível definir os projetores

$$P_{u\|}{}^{\mu}{}_{\nu} = -u^\mu u_\nu \tag{III.1}$$

e

$$P_{u\perp}{}^{\mu}{}_{\nu} = g^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu \ , \tag{III.2}$$

onde $P_{u\perp}{}^{\mu}{}_{\nu}$ é o tensor de projeção na hipersuperfície perpendicular a u^μ enquanto que $P_{u\|}{}^{\mu}{}_{\nu}$ é o tensor de projeção paralelo a u^μ .
Note que $P_{u\|}{}^{\mu}{}_{\nu}$ e $P_{u\perp}{}^{\mu}{}_{\nu}$ são simétricos e perpendiculares entre si, i.e.,

$$P_{u\|\mu\nu} = P_{u\|\nu\mu} \ , \tag{III.3}$$

$$P_{u\perp\mu\nu} = P_{u\perp\nu\mu} \tag{III.4}$$

e

$$P_{u\|}{}^{\mu}{}_{\nu} P_{u\perp}{}^{\nu}{}_{\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda. \tag{III.5}$$

Note também que

$$P_{u\|}{}^{\mu}{}_{\nu} u^\nu = -u^\mu u_\nu u^\nu = u^\mu \ , \tag{III.6}$$

$$P_{u\perp}{}^{\mu}{}_{\nu} u^\nu = (g^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu)\, u^\nu = u^\mu - u^\mu = 0 \ , \tag{III.7}$$

$$P_{u\|}{}^{\mu}{}_{\mu} = 1 \ , \tag{III.8}$$

$$P_{u\perp}{}^{\mu}{}_{\mu} = 3 \tag{III.9}$$

e

$$P_{u\|}{}^{\mu}{}_{\nu} + P_{u\perp}{}^{\mu}{}_{\nu} = g^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \ . \tag{III.10}$$

Usando a equação (III.10), qualquer campo vetorial ou tensorial pode, em cada um dos seus índices, ser decomposto em uma parte paralela a u_μ e outra perpendicular, qualquer que seja o campo u_μ.

Note, finalmente, que para dois vetores arbitrários w^μ e v^μ ortogonais a u^μ ($w_\mu u^\mu = 0$ e $v_\mu u^\mu = 0$)

$$P_{u\perp\mu\nu} w^\mu v^\nu = g_{\mu\nu} w^\mu v^\nu \tag{III.11}$$

e

$$P_{u\perp\mu\nu} w^\mu w^\nu \geq 0 \; , \tag{III.12}$$

ou seja, $P_{u\perp\mu\nu}$ atua como uma métrica positiva definida no subespaço tangente, ortogonal ao campo u^μ . O correspondente tensor métrico inverso é simplesmente ele mesmo na sua forma contravariante, pois satisfaz

$$P_{u\perp}{}^{\mu\alpha} P_{u\perp\alpha\nu} = P_{u\perp}{}^{\mu}{}_{\nu} = \delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu \; . \tag{III.13}$$

Portanto, no caso dos tensores definidos em M e que são ortogonais a u^μ , $P_{u\perp}{}^{\mu\nu}$, que também denotaremos como $h^{\mu\nu}$ i.e.

$$h^{\mu\nu} \equiv P_{u\perp}{}^{\mu\nu} , \tag{III.14}$$

pode ser usado no lugar da métrica $g^{\mu\nu}$.

III.2 Meio Contínuo

Todo meio contínuo em M será descrito por um tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$, por um quadrivetor fluxo de partículas[1] N^μ, por um quadrivetor fluxo de "massa em repouso" J^μ e, em geral, por R quadrivetores $N_r{}^\mu$ ($r =$

[1]Entenda-se número de moles que atravessam uma superfície unitária por unidade de tempo, para evitar o máximo possível qualquer alusão a conceitos microscópicos como "número de partículas".

$1, 2, ..., R$) associados a R quantidades conservadas, por exemplo: número de bárions, carga elétrica, etc.

No caso de sistemas de várias componentes, indicadas pelo índice A, basta redefinir o tensor de energia momento e as quadricorrentes como a soma sobre todas as componentes:

$$T^{\mu\nu} = \sum_A T_A{}^{\mu\nu} , \tag{III.15}$$

$$N^\mu = \sum_A N_A{}^\mu , \quad \text{etc.} \tag{III.16}$$

Contudo, a fim de simplificar, consideraremos apenas sistemas de uma só componente e usaremos o quadrivetor fluxo de matéria, N^μ, como representação de todas as possíveis quadricorrentes associadas ao sistema.

Usando a equação (III.10) temos, que para qualquer família de observadores com quadrivelocidade u^μ,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= T_{\alpha\beta} \left(P_{u\|}{}^{\alpha\mu} + P_{u\perp}{}^{\alpha\mu} \right) \left(P_{u\|}{}^{\beta\nu} + P_{u\perp}{}^{\beta\nu} \right) \\ &= \rho u^\mu u^\nu - 2q^{(\mu}u^{\nu)} + P^{\mu\nu} , \end{aligned} \tag{III.17}$$

onde,

$$\rho \equiv T^{\mu\nu} u_\mu u_\nu , \tag{III.18}$$

$$q^\mu \equiv T^{\alpha\beta} u_\alpha h_\beta{}^\mu , \tag{III.19}$$

e

$$P^{\mu\nu} \equiv T^{\alpha\beta} h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \tag{III.20}$$

Note que q^μ e $P^{\mu\nu}$ são ortogonais a u^μ, i.e.,

$$q^\mu u_\mu = 0 , \tag{III.21}$$

e

$$P^{\mu\nu}u_\nu = 0\,. \qquad \text{(III.22)}$$

Como $T^{\mu\nu}u_\nu$ é a densidade de quadrimomento medida pelos observadores com velocidade u^μ, então ρ é a densidade de energia que eles medem e q^μ é a densidade de fluxo espacial de energia ou densidade de trimomento (pois estamos assumindo que a velocidade da luz $c = 1$). Como $T^{\mu\nu}e_\nu$ (onde e^μ é um vetor tipo espaço, i.e. $e^\mu e_\mu > 0$) é o fluxo de momento através de um elemento de superfície unitário e ortogonal a e^μ, ou seja, é a força por unidade de área que atua sobre esta superfície, então $P^{\mu\nu}$ representará as pressões ou tensões quando medidas por observadores que tem velocidade $u^\mu \perp e^\mu$.

Definindo, então, a pressão isotrópica média p como

$$p \equiv \frac{1}{3}P^\mu{}_\mu \qquad \text{(III.23)}$$

e o tensor simétrico ortogonal a u^μ e de traço zero [veja (III.9) e (III.23)]

$$\pi^{\mu\nu} \equiv P^{\mu\nu} - ph^{\mu\nu}\,, \qquad \text{(III.24)}$$

o tensor de energia-momento arbitrário pode ser escrito finalmente como:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu - 2q^{(\mu}u^{\nu)} + ph^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}\,. \qquad \text{(III.25)}$$

O tensor de traço zero, $\pi^{\mu\nu}$, é o que vai descrever a viscosidade e as pressões anisotrópicas.

Da mesma forma, usando a equação (III.10), os quadrivetores N^μ, J^μ e $N_r{}^\mu$ em geral, podem ser decompostos numa parte paralela e outra ortogonal a u^μ, por exemplo:

$$N^\mu = N^\nu \delta_\nu{}^\mu$$

$$
\begin{aligned}
&= N^\nu \left(P_{u\|\nu}{}^\mu + P_{u\perp\nu}{}^\mu \right) \\
&= n u^\mu + i^\mu , \qquad \text{(III.26)}
\end{aligned}
$$

onde,

$$
n \equiv -N^\nu u_\nu , \qquad \text{(III.27)}
$$

é a densidade de partículas assim como medidas por os observadores com quadrivelocidade u^μ e

$$
i^\mu \equiv N^\mu - (N^\nu u_\nu) u^\mu = N^\nu h_\nu{}^\mu , \qquad \text{(III.28)}
$$

é o fluxo espacial de partículas. Resumindo, vemos que todo meio no espaço-tempo será descrito por um tensor de energia-momento ($T^{\mu\nu}$)e por várias quadricorrentes conservadas[2] (N^μ, $N_r{}^\mu$, etc.). Estes campos tensoriais e vetoriais podem ser escritos para qualquer campo u^μ, tipo tempo e unitário associado a uma família de observadores, na forma (III.25) e (III.26) em termos dos parâmetros ρ, n, q^μ, i^μ, p, $\pi^{\mu\nu}$ e de u^μ.

III.3 Velocidade do meio

Para poder fazer uma descrição do movimento dum meio contínuo é preciso associar a este meio um campo de quadrivelocidades u^μ ou congruência de curvas C em particular que pode ser visto como as linhas de mundo de "pontos" hipotéticos do meio, aos quais chamaremos de "partículas do meio" ou "elementos de fluido". Este campo de quadrivelocidades pode ser escolhido de diversas formas. As mais usuais são:

[2] Ao menos dentro de determinados limites de energia.

- *Velocidade cinemática* $u_k{}^\mu$: quando u^μ é escolhido paralelo a N^μ ($N^\mu \propto u_k{}^\mu$). Neste caso i^μ é zero, i.e., observadores movendo-se com esta velocidade não verão fluxo de matéria em nenhuma direção.

- *Velocidade dinâmica* $u_D{}^\mu$: quando u^μ é escolhido de tal forma que na expressão (III.25) o termo q^μ é zero. Observadores movendo-se com esta velocidade não medirão densidade de momento, nem fluxo de energia. No apêndice A mostraremos que esta quadrivelocidade será um autovetor tipo tempo do tensor de energia-momento e acharemos as restrições sobre o tensor de energia-momento necessárias para a existência deste tipo de observadores.

- *Velocidade baricêntrica* $u_B{}^\mu$: quando u^μ é escolhido proporcional à densidade de corrente de massa de repouso J^μ ($u_B{}^\mu \propto J^\mu$).

- *Velocidade bariônica* $u_{B'}{}^\mu$: quando u^μ é escolhido proporcional à densidade de corrente de bárions. Esta velocidade é muito útil, pois a densidade de corrente de bárions é conservada em quaisquer circunstâncias.

Nestes termos, definimos um *processo adiabático* como aquele no qual existe um campo u^μ tal que $i^\mu = 0$ e $q^\mu = 0$ (neste caso $u_k{}^\mu = u_D{}^\mu$). Ou seja, existe uma família de observadores que não observam nem fluxo de matéria, nem fluxo de energia.

Diremos também que um gás é *ideal* ou *perfeito* quando existe um campo u^μ para o qual $q^\mu = 0$ e $\pi^{\mu\nu} = 0$, de forma que o tensor de energia-momento fica:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p h^{\mu\nu}$$

$$= \quad (\rho - p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \ . \qquad \text{(III.29)}$$

Por fim, chamaremos de *poeira* àqueles sistemas que além disto satisfazem $p = 0$, em cujo caso temos

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \ . \qquad \text{(III.30)}$$

III.4 Movimento relativo de elementos de fluido vizinhos

III.4.1 Coordenadas comóveis normalizadas

Dada uma congruência tipo tempo C em O, definamos um *sistema de coordenadas comóvel normalizado* ou *propriamente comóvel* (y^a, s) $(a = 1, 2, 3)$ de forma tal que para cada curva de C todos os pontos da curva possuem as mesmas coordenadas y^a em quanto que a coordenada s é dada pelo tempo próprio ao longo desta curva, medido a partir do ponto de interseção desta curva com uma hipersuperfície tipo espaço Σ escolhida arbitrariamente.

Nestas coordenadas cada curva de C é definida pelas equações,

$$y^a = \text{const.} \qquad (a = 1, 2, 3) \ , \qquad \text{(III.31)}$$

enquanto que o campo $u^\mu(x)$ tangente as curvas de C em cada ponto (usando a base coordenada associada) é,

$$u^\mu \doteq \delta^\mu{}_0 \, , \qquad \text{(III.32)}$$

onde usamos o símbolo "$\doteq$" para diferenciar as equações que são válidas apenas no sistema de coordenadas comóvel.

Num sistema de coordenadas arbitrário,

$$x^\mu = x^\mu(y^a, s)\,, \tag{III.33}$$

a quadrivelocidade é dada por,

$$u^\mu = \left.\frac{dx^\mu}{ds}\right|_{y^a=\text{const.}}\,. \tag{III.34}$$

III.4.2 Vetor posição relativa

Consideremos agora as linhas de mundo de duas partículas vizinhas, **O** e **G** com coordenadas y^a e $y^a+\delta y^a$ respetivamente. O vetor X^μ, com componentes $(X^a \doteq \delta y^a, X^0 \doteq 0)$ na base de coordenadas comóveis, conecta estas duas curvas para todo s. Chamaremos assim a X^μ de *vetor conector*, que em coordenadas arbitrárias (III.33) tem componentes,

$$X^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\right)\delta y^a\,. \tag{III.35}$$

e por tanto de (III.34) e (III.35), a variação de X^μ na direção de u^μ é,

$$\begin{aligned}
X^\mu{}_{;\nu}u^\nu &= X^\mu{}_{;\nu}\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right)\\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu}(X^\mu) + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}X^\lambda\right]\frac{dx^\nu}{ds}\\
&= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\right)\delta y^a\right]\frac{dx^\nu}{ds} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^a}\delta y^a\right)\frac{dx^\nu}{ds}\\
&= \frac{d}{ds}\left[\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\right)\delta y^a\right] + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right)\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^a}\delta y^a\right)\\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\right)\delta y^a + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\frac{d(\delta y^a)}{ds} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right)\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^a}\delta y^a\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial y^a}\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)\delta y^a + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right)\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^a}\delta y^a\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^a}\delta y^a + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right)\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^a}\delta y^a\right) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right) + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right)\right]\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^a}\delta y^a \\
&= u^\mu{}_{;\lambda}X^\lambda\,, \qquad \text{(III.36)}
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
X^\mu{}_{;\nu}u^\nu = u^\mu{}_{;\nu}X^\nu\,. \qquad \text{(III.37)}
$$

Onde usamos que a conexão é simétrica nos seus dois índices inferiores ($\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} = \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$), que as coordenadas y^a são constantes ao longo das curvas de C parametrizadas por s $d(\delta y^a)/ds = 0$, [vide Eq.(III.31)] e que as derivadas cruzadas comutam

$$
\frac{d}{ds}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} = \frac{\partial}{\partial y^a}\frac{dx^\mu}{ds}\,.
$$

Note que, geometricamente, a equação (III.37) significa que a derivada de Lie de **X** com relação a **u** se anula, i.e.

$$
\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{X} = X^\mu{}_{;\nu}u^\nu - u^\mu{}_{;\nu}X^\nu = 0\,. \qquad \text{(III.38)}
$$

Portanto um vetor conector deve satisfazer a equação (III.37) e como $u^\mu{}_{;\nu}u^\nu = a^\mu$ é, em geral, diferente de zero (i.e. $u^\mu{}_{;\nu}$ não é ortogonal a u^μ em geral) o vetor conector não permanecerá no subespaço ortogonal à quadrivelocidade u^μ. Por isso é útil definir o *vetor posição relativa* $X_\perp{}^\mu$ de **G** com relação a **O** como a projeção do vetor conector X^μ no subespaço ortogonal a u^μ, i.e.

$$
X_\perp{}^\mu \equiv h^\mu{}_\nu X^\nu \qquad \text{(III.39)}
$$

III.4.3 Velocidade relativa

O vetor *velocidade relativa* V^μ de G com relação a O é definido então como a parte espacial da velocidade com que muda o vetor posição relativa, i.e.

$$V^\mu = h^\mu{}_\nu \left(X_\perp{}^\nu{}_{;\lambda} u^\lambda \right) \tag{III.40}$$

$$= h^\mu{}_\nu \left[\left(h^\nu_\xi X^\xi \right)_{;\lambda} u^\lambda \right] . \tag{III.41}$$

Como $h^\mu{}_\nu$ é definido pelas Eqs.(III.1) e (III.14) e a métrica é transportada paralelamente ($g^\mu{}_{\xi;\lambda} = 0$) temos que,

$$\begin{aligned} h^\nu{}_{\xi;\lambda} u^\lambda &= u^\nu{}_{;\lambda} u^\lambda u_\xi + u^\nu u_{\xi;\lambda} u^\lambda \\ &= a^\nu u_\xi + u^\nu a_\xi \end{aligned} \tag{III.42}$$

e usando (III.7) (III.37) e (III.42) em (III.41) obtemos,

$$\begin{aligned} V^\mu &= h^\mu{}_\nu u^\nu{}_{;\lambda} u^\lambda u_\xi X^\xi + h^\mu{}_\nu u^\nu{}_{;\lambda} X^\lambda \\ &= h^\mu{}_\nu u^\nu{}_{;\lambda} \left(u^\lambda u_\xi + g^\lambda{}_\xi \right) X^\xi \\ &= h^\mu{}_\nu u^\nu{}_{;\lambda} h^\lambda{}_\xi X^\xi \\ &= h^\mu{}_\nu h^\lambda{}_\kappa u^\nu{}_{;\lambda} h^\kappa{}_\xi X^\xi \end{aligned} \tag{III.43}$$

Ou seja,

$$V^\mu = v^\mu{}_\kappa X_\perp{}^\kappa , \tag{III.44}$$

onde

$$v_{\mu\kappa} \equiv h_\mu{}^\nu h_\kappa{}^\lambda u_{\nu;\lambda} . \tag{III.45}$$

Daqui vemos que o vetor velocidade relativa duma partícula vizinha depende do vetor posição relativa de forma linear e o tensor que determina essa transformação é a parte espacial da derivada covariante da quadrivelocidade ($u_{\mu;\nu}$).

A derivada covariante, $u_{\mu;\nu}$ pode ser decomposta, em cada um dos seus dois índices, numa parte paralela a u^μ e outra perpendicular (veja Eq.(III.10)):

$$u_{\mu;\nu} = u_{\alpha;\beta}\left(P_{u\|}{}^{\alpha}{}_{\mu} + P_{u\perp}{}^{\alpha}{}_{\mu}\right)\left(P_{u\|}{}^{\beta}{}_{\nu} + P_{u\perp}{}^{\beta}{}_{\nu}\right) \ . \tag{III.46}$$

Considerando agora, que $u_{\mu;\nu}$ não é necessariamente simétrico, e sabendo que $(u^\mu u_\mu)_{;\alpha} = 0$, esta expressão se reduz a:

$$u_{\mu;\nu} = \omega_{\mu\nu} + \theta_{\mu\nu} - a_\mu u_\nu, \tag{III.47}$$

onde,

$$\omega_{\mu\nu} \equiv u_{\alpha;\beta} h^{\alpha}{}_{[\mu} h^{\beta}{}_{\nu]} \ , \tag{III.48}$$

$$\theta_{\mu\nu} \equiv u_{\alpha;\beta} h^{\alpha}{}_{(\mu} h^{\beta}{}_{\nu)} \ , \tag{III.49}$$

e

$$a_\mu \equiv u_{\mu;\nu} u^\nu \ . \tag{III.50}$$

Ou seja, $\omega_{\mu\nu}$ é a parte antissimétrica da projeção ortogonal de $u_{\mu;\nu}$ nos dois índices, $\theta_{\mu\nu}$ é a parte simétrica, e a_μ é a quadriaceleração.

Dividindo a parte simétrica, $\theta_{\mu\nu}$, numa parte sem traço e outra com traço:

$$\theta_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} \ , \tag{III.51}$$

onde

$$\theta \equiv \theta^{\mu}{}_{\mu} = u^{\mu}{}_{;\mu} \ , \tag{III.52}$$

e

$$\sigma^{\mu}{}_{\mu} = 0 \ , \tag{III.53}$$

temos que :

$$u_{\mu;\nu} = \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} - a_\mu u_\nu \ . \tag{III.54}$$

Usando a Eq. (III.54) podemos escrever a Eq. (III.45) como

$$v_{\mu\kappa} = \omega_{\mu\kappa} + \sigma_{\mu\kappa} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\kappa} \tag{III.55}$$

III.4.4 Distância e direção relativa

Para entender melhor o significado de cada um destes termos dividamos o vetor posição relativa ${X_\perp}^\kappa$ de **G** com relação a **O** em uma *distância relativa* δl e uma *direção relativa* n^μ de forma que,

$$X_\perp{}^\mu = n^\mu \delta l \,, \tag{III.56}$$

onde $n_\mu n^\mu = 1$ e $n_\mu u^\mu = 0$. Portanto,

$$(\delta l)^2 = h^{\mu\nu} X_\mu X_\nu \ . \tag{III.57}$$

Substituindo (III.56) e (III.55) em (III.44) e (III.41) temos que,

$$\begin{aligned} h^\mu{}_\nu \left(n^\nu \delta l\right)_{;\delta} u^\delta &= v^{\mu\nu} n_\nu \delta l \\ h^\mu{}_\nu \left[n^\nu{}_{;\delta} u^\delta \delta l + n^\nu \left(\delta l_{;\delta} u^\delta\right)\right] &= \left(\omega^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta h^{\mu\nu}\right) n_\nu \delta l \,. \end{aligned} \tag{III.58}$$

Multiplicando (III.58) por n_μ e tendo em conta que $\omega^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 0$ e $h^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 1$ obtemos que,

$$n_\nu \left(n^\nu{}_{;\delta} u^\delta\right) \delta l + (\delta l)_{;\delta} u^\delta = \left(\sigma^{\mu\nu} n_\mu n_\nu + \frac{1}{3}\theta\right) \delta l \tag{III.59}$$

mas como $n_\mu n^\mu = 1$ então

$$n_\nu (n^\nu{}_{;\delta} u^\delta) = 0 \tag{III.60}$$

e substituindo (III.60) em (III.59) obtemos que a *taxa de variação da distância relativa* é

$$u^\mu \frac{\delta l_{;\mu}}{\delta l} = \sigma^{\mu\nu} n_\mu n_\nu + \frac{1}{3}\theta = \theta^{\mu\nu} n_\mu n_\nu \ . \tag{III.61}$$

Por último substituindo (III.61) em (III.58) obtemos a *taxa de variação da direção*;

$$h^{\mu}{}_{\nu}\left(n^{\nu}{}_{;\delta}u^{\delta}\right) = \left[\omega^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} - \left(\sigma^{\xi\lambda}n_{\xi}n_{\lambda}\right)h^{\mu\nu}\right]n_{\nu}\,. \tag{III.62}$$

Note que (III.62) nos dá a taxa de variação da direção de elementos de fluido vizinhos com relação a uma base de vetores ortonormais *Fermi-propagada.* Lembramos que uma base de vetores ortonormais e^{ν} Fermi-propagada ao longo de uma curva γ definida por vetores tangentes u^{μ} satisfaz

$$h^{\mu}{}_{\nu}\left(e^{\nu}{}_{;\delta}u^{\delta}\right) = 0\,, \tag{III.63}$$

para cada vetor da base e^{ν}, $(e^{\nu}e_{\nu} = 1)$ e $(e^{\nu}u_{\nu} = 0)$. Fisicamente esta base representa o referencial associado a três giroscópios mutuamente perpendiculares que são transportados com o elemento de fluido.

III.5 Quantidades cinemáticas

Analisando as Eqs. (III.61) e (III.62) vemos que $u_{\mu;\nu}$ carateriza completamente o movimento relativo entre elementos de fluido vizinhos já que como visto acima $\sigma^{\mu\nu}$, $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$ são funções diretas de $u_{\mu;\nu}$ [vide Eqs. (III.47)-(III.54)]. Observando o comportamento dos elementos de fluido sobre uma pequena esfera em torno de um ponto, após um pequeno intervalo de tempo próprio podemos entender melhor o papel de cada um dos termos em que pode ser decomposta $u_{\mu;\nu}$ [vide Eq. (III.54)].

III.5.1 Expansão

Da Eq.(III.61) podemos ver que $\theta^{\mu\nu}$ (parte simétrica da projeção ortogonal de $u_{\mu;\nu}$ nos dois índices) pode ser chamado de *tensor de expansão* pois ele determina a velocidade com que muda a distância do elemento de fluido vizinho situado na direção n^μ. Decompondo $\theta^{\mu\nu}$ numa parte sem traço e noutra com traço [vide Eq. (III.51)], a parte isotrópica da Eq. (III.61) i.e. aquela que não depende de direções n^μ, é determinada por $\theta = \theta^\mu{}_\mu$ que pode ser chamado de *taxa de expansão*. Assim, a presença de θ, apenas, ($\sigma^{\mu\nu} = 0$ e $\omega^{\mu\nu} = 0$) transforma a esfera de fluido em outra similar de diferente volume, mas sem rotação, pois neste caso a Eq. (III.62) implica que para todo n^μ temos $h^\mu{}_\nu \left(n^\nu{}_{;\delta} u^\delta\right) = 0$.

III.5.2 Deformação

O tensor $\sigma_{\mu\nu}$ é simétrico, real e ortogonal a u^μ nos dois índices, levando vetores ortogonais a u^μ em vetores ortogonais a u^μ. Como no subespaço ortogonal a u^μ a métrica é positiva-definida então podemos afirmar que existe uma base ortogonal formada pelos autovetores de $\sigma_{\mu\nu}$ na qual este tensor é diagonal.

Se considerarmos que em (III.61) e (III.62) só os termos que contêm $\sigma_{\mu\nu}$ são diferente de zero i.e.,

$$u^\mu \frac{\delta l_{;\mu}}{\delta l} = \sigma^{\mu\nu} n_\mu n_\nu \tag{III.64}$$

e

$$h^\mu{}_\nu \left(n^\nu{}_{;\delta} u^\delta\right) = \left[\sigma^{\mu\nu} - \left(\sigma^{\xi\lambda} n_\xi n_\lambda\right) h^{\mu\nu}\right] n_\nu \, , \tag{III.65}$$

então para um n^μ igual a um autovetor de $\sigma_{\mu\nu}$, i.e., $\sigma^\mu{}_\nu n_\nu = \lambda n^\mu$, temos que $h^\mu{}_\nu \left(n^\nu{}_{;\delta} u^\delta\right) = 0$, enquanto que $u^\mu \delta l_{;\mu}/\delta l = \lambda$. Assim a presença de $\sigma_{\mu\nu}$ deforma a esfera num elipsóide mas preservando a direção dos eixos principais (autovetores de $\sigma_{\mu\nu}$) e a taxa de variação do tamanho dos semi-eixos do elipsóide é dada pelos autovalores de $\sigma_{\mu\nu}$.

Note por último que o volume dum elipsóide de semi-eixos a, b e c é dado por $V = \frac{4}{3}\pi abc$. Temos portanto que

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \frac{dc}{c}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \ , \end{aligned} \tag{III.66}$$

onde na última igualdade usamos $u^\mu \delta l_{;\mu}/\delta l = \lambda$. Assim, a taxa de variação do volume do elipsóide de fluido será igual à soma dos autovalores de $\sigma_{\mu\nu}$ o que dá zero pois o traço de $\sigma_{\mu\nu}$ é zero.

Dito isto, podemos chamar $\sigma_{\mu\nu}$ de *tensor de deformação.* A magnitude de $\sigma_{\mu\nu}$ é a deformação σ definida por $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$. Note que $\sigma^2 \geq 0$ para qualquer $\sigma_{\mu\nu}$ e que portanto $\sigma = 0 \iff \sigma_{\mu\nu} = 0$.

III.5.3 Vorticidade

Por último, se considerarmos que em (III.61) e (III.62) só são diferente de zero os termos que contêm a parte antissimétrica da projeção ortogonal de $u_{\mu;\nu}$ nos dois índices ($\omega_{\mu\nu}$) temos que,

$$u^\mu \frac{\delta l_{;\mu}}{\delta l} = 0 \tag{III.67}$$

e

$$h^\mu{}_\nu \left(n^\nu{}_{;\delta} u^\delta\right) = \omega^{\mu\nu} n_\nu \ . \tag{III.68}$$

Como $\omega^{\mu\nu}$ é antissimétrico podemos definir um vetor

$$\omega_\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\xi\lambda}u_\nu\omega_{\xi\lambda} \ . \tag{III.69}$$

Invertendo a relação acima escrevemos

$$\omega_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\xi\lambda}\omega^\xi u^\lambda \ , \tag{III.70}$$

(onde $\epsilon^{\mu\nu\xi\lambda}$ é o pseudotensor totalmente antissimétrico com $\epsilon^{1234} = 1$), tal que $\omega^\mu u_\mu = 0$ e $\omega^\mu\omega_{\mu\nu} = 0$. Assim a taxa de variação da direção n^μ, Eq.(III.68), pode ser escrita como

$$h_{\mu\nu}\left(n^\nu{}_{;\delta}u^\delta\right) = \epsilon_{\mu\nu\xi\lambda}\omega^\xi u^\lambda n^\nu \ . \tag{III.71}$$

Assim a taxa de variação da direção n^μ é ortogonal a n^μ, ω^μ e u^μ e pode ser vista como o produto vetorial de n_μ com ω^μ no subespaço ortogonal a u^μ. Note que o lado direito da Eq. (III.71) é igual a zero para $n^\mu = \omega^\mu$ enquanto que a taxa de variação da distância entre as partículas vizinhas é nula [vide Eq.(III.67)] *para qualquer direção* n_μ.

Vemos assim, que o tensor $\omega_{\mu\nu}$, que chamaremos de ***tensor de vorticidade***, produz uma rotação rígida da esfera de fluido entorno da direção ω^μ. Este vetor ω^μ é chamado de ***vetor de vorticidade***. A magnitude deste vetor é a ***vorticidade*** ω, onde $\omega = (\omega^\mu\omega_\mu)^{\frac{1}{2}} = (\omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})^{\frac{1}{2}}$. Como $\omega_{\mu\nu}$ é ortogonal a u_μ então $\omega \geq 0$. Em particular temos que $\omega = 0 \iff \omega_\mu = 0 \iff \omega_{\mu\nu} = 0$.

Podemos, então, definir um *movimento irrotacional* do meio, como aquele onde $\omega_{\mu\nu} = 0$ e um *movimento rígido* quando $\theta_{\mu\nu} = 0$.

Capítulo IV

Teoria fenomenológica e termodinâmica

Na descrição do movimento dum meio contínuo exposta na seção anterior, vimos que as variáveis associadas ao meio são $T^{\mu\nu}$ e N^{μ}. Equivalentemente, para cada campo vetorial tipo tempo e unitário u^{μ} as variáveis termodinâmicas serão ρ, n, p, i^{μ}, q^{μ} e $\pi^{\mu\nu}$, (onde $\pi^{\mu\nu}$ e q^{μ} são ortogonais a u^{μ} , e $\pi^{\mu\nu}$ é simétrico e de traço zero), ou seja, temos no total 14 variáveis (3 variáveis par i^{μ}, 3 para q^{μ}, 5 para $\pi^{\mu\nu}$, 1 para ρ, 1 para n e 1 para p) e, afim de descrever a evolução do sistema vamos necessitar de equações que as vinculem.

Uma das vias para obter estas equações é por meio de critérios macroscópicos, (sem fazer nenhum tipo de hipóteses sobre a estrutura microscópica do meio), i.e., mediante uma teoria da termodinâmica que nos proporcione as equações de estado.

Apesar de que a forma de enunciar os princípios termodinâmicos, para a obtenção destas equações, no contexto relativístico diferem de um autor para outro, existem alguns princípios básicos e situações mais simples em que a maior parte dos autores concordam, e que mostraremos a seguir.

IV.1 Leis de conservação

As duas primeiras equações que irão restringir a dinâmica do nosso sistema são as sempre assumidas conservação local de $T^{\mu\nu}$ e N^{μ} (assim como para qualquer outra quadricorrente conservada presente no sistema):

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{IV.1}$$

e

$$N^{\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{IV.2}$$

onde a Eq.(IV.1) também pode ser escrita nas suas componentes paralela e perpendicular a u^{μ}

$$u_{\mu}T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \,, \tag{IV.3}$$

$$h_{\lambda\mu}T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \,. \tag{IV.4}$$

Substituindo as formas gerais do tensor de energia-momento Eq. (III.25), e do vetor fluxo de partículas Eq. (III.26) nas Leis de conservação Eqs. (IV.2), (IV.3) e (IV.4) e fazendo uso, depois, da decomposição de $u_{\mu;\nu}$ Eq.(III.54), obtém-se as equações gerais que devem satisfazer as variáveis termodinâmicas até agora definidas

$$\rho_{;\mu}u^{\mu} + (\rho + p)\,\theta + \pi_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + q^{\mu}{}_{;\mu} + q^{\mu}a_{\mu} = 0 \,, \tag{IV.5}$$

$$(\rho+p)a_\mu+h^\nu{}_\mu\left(p_{;\nu}+\pi^\lambda{}_{\nu;\lambda}+q_{\nu;\lambda}u^\lambda\right)+\left(\omega_{\mu\nu}+\sigma_{\mu\nu}+\frac{4}{3}\theta h_{\mu\nu}\right)q^\nu=0\ , \quad \text{(IV.6)}$$

e

$$n_{;\mu}u^\mu+n\theta+i^\mu{}_{;\mu}=0\ . \quad \text{(IV.7)}$$

onde a^μ é a quadriacelera'ccão: $a_\mu=u^\nu u_{\mu;\nu}$.

IV.2 Restrições gerais

Como $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = \rho$ representa fisicamente a densidade de energia do meio assim como medida pelos observadores com quadrivelocidade u^μ , acredita-se que para todo tipo de matéria clássica, esta densidade de energia é não negativa, i.e.,

$$\rho=T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\geq 0 \quad \text{(IV.8)}$$

para todo u^μ tipo-tempo. Esta suposição é conhecida como a *condição fraca para a energia.*

A quantidade $-T^\mu{}_\nu u^\nu = q^\mu$ representa fisicamente a densidade de quadrimomento da matéria ou fluxo de energia que um observador com quadrivelocidade u^μ mediria. Assume-se também que para todo vetor u^μ tipo tempo que aponta para o futuro, $-T^\mu{}_\nu u^\nu$ deve ser tipo-tempo ou tipo-luz e deve apontar para o futuro, i.e.,

$$T_{\mu\nu}T^\mu_\lambda u^\nu u^\lambda\leq 0 \ \text{ e } \ T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu>0\ , \quad \text{(IV.9)}$$

para todo vetor u^μ tipo tempo que aponta par o futuro. Esta condição é conhecida como *condição dominante para a energia* e pode ser interpretada como que a velocidade do fluxo de energia da matéria é sempre menor ou igual que a velocidade da luz.

Como na Relatividade Geral (especialmente no estudo de soluções singulares da equação de Einstein e como veremos posteriormente, na termodinâmica relativística) ρ aparece muitas vezes somada com a pressão isotrópica. Assume-se também que a pressão nunca será suficientemente negativa para violar a *condição forte para a energia* i.e.,

$$\rho + p \geq 0 \ . \tag{IV.10}$$

Note que para um gás perfeito (i.e. $q^\mu = 0$ e $\pi^{\mu\nu} = 0$) temos, da conservação do momento Eq. (IV.6), que

$$(\rho + p)\, a_\mu = -p_{;\nu} h^\nu_\mu \ . \tag{IV.11}$$

Portanto a condição forte para a energia Eq.(IV.10) garante que o fluido se acelerará na direção contraria ao gradiente espacial da pressão.

Note também que a condição forte para a energia não implica na satisfação da condição fraca. Esta é "forte" apenas, no sentido de que é mais restritiva.

Por último assumiremos também que para todo vetor w^μ tipo-tempo ou tipo-luz

$$T_{\mu\nu} w^\mu w^\nu > 0 \ . \tag{IV.12}$$

Esta condição pode ser chamada de *condição de diagonalizabilidade* do tensor de energia-momento. Lembre que pelo fato da métrica do espaço-tempo não ser positiva-definida, um operador linear simétrico e real não tem que ser necessariamente diagonalizavel e os seus autovalores não precisam ser necessariamente reais (vide apêndice A). Note que a condição (IV.12) garante a satisfação da condição fraca (IV.8) pois (IV.12) deve ser satisfeita tanto para vetores tipo-tempo como para vetores tipo luz. Pelo mesmo motivo (IV.8) não implica em (IV.12). De fato o caráter positivo da energia (IV.8), embora garantido por (IV.12) não é condição suficiente para que os autovalores de $T^{\mu\nu}$ sejam reais. Como mostraremos no apêndice A a condição (IV.12) garante que o tensor de energia-momento é diagonalizavel, que possui quatro autovalores reais e um autovetor ${u_D}^{\mu}$ tipo tempo, sendo os outros autovetores tipo espaço. Observadores movendo-se com esta velocidade ${u_D}^{\mu}$ não medirão fluxo espacial de energia ($T_{\mu\nu}{u_D}^{\mu}h^{\nu}_{\lambda} = q_{\lambda} = 0$) de forma que o tensor de energia-momento pode ser escrito da forma.

$$T^{\mu\nu} = \rho {u_D}^{\mu}{u_D}^{\nu} + P^{\mu\nu} \ , \tag{IV.13}$$

onde ${u_D}^{\mu}u_{D\mu} = -1$ e $P^{\mu\nu}u_{D\mu} = P^{\nu\mu}u_{D\mu} = 0$. Ou seja (IV.12) garante a existência da velocidade dinâmica ${u_D}^{\mu}$ do fluido, definida no capítulo anterior (de aí o subíndice D usado acima para o autovetor tipo tempo de $T^{\mu\nu}$) .

É fácil ver que para uma onda eletromagnética plana, monocromática a condição (IV.12) não é satisfeita (vide apêndice A). Isto acontece em geral para qualquer sistema formado por partículas que se movam com a velocidade da luz e todas numa mesma direção i.e. para um *fluido nulo*, descrito pelo tensor de energia-momento

$$T^{\mu\nu} = \rho l^{\mu}l^{\nu} + p_1 x^{\mu}x^{\nu} + p_2 y^{\mu}y^{\nu} \ , \tag{IV.14}$$

onde l^{μ} é tipo luz ($l^{\mu}l_{\mu} = 0$) enquanto que x^{μ} e y^{μ} são tipo espaço e ortogonais a l^{μ} ($l^{\mu}x_{\mu} = l^{\mu}y_{\mu} = 0$). Note que $T^{\mu\nu}l_{\mu}l_{\nu} = 0$ violando assim a condição (IV.12). Contudo, isso não deve ser fonte de preocupação pois um sistema cujas partículas encontram-se todas no mesmo estado com energia e direção de propagação bem definidas não parece passível de ser descrito como um sistema em equilíbrio termodinâmico.

IV.3 Quadricorrente de entropia

O objetivo fundamental da termodinâmica clássica é o de achar qual será a configuração de equilíbrio a qual um sistema macroscópico tende de forma natural, uma vez alterada alguma restrição interna (vide [19]). Para achar este estado, utiliza-se um critério de extremização. Desta forma, postula-se a existência da entropia S como uma função de todos os parâmetros extensivos do sistema (X_j) (S dependendo de forma monótona com relação à energia). Os estados de equilíbrio serão aqueles que, para as restrições internas estabelecidas, o sistema alcance um valor máximo de entropia. Para cumprir sua função, a entropia é definida como uma quantidade extensiva, isto faz com que seja uma função homogênea de primeira ordem com relação as suas variáveis, permitindo assim que possa ser escrita da seguinte forma (equação de Euler na representação de entropia),

$$S = \sum_j F_j X_j \,, \tag{IV.15}$$

onde os F_j são as derivadas parciais da entropia com relação a cada um dos parâmetros extensivos, sendo eles mesmos necessariamente quantidades intensivas.

No caso de um fluido simples os parâmetros extensivos são, a energia U, o volume V e o número de partículas N, e os parâmetros intensivos são, a temperatura T, a pressão P, e o potencial químico μ. Neste caso a equação de Euler (IV.15) fica,

$$S = \left(\frac{1}{T}\right) U + \left(\frac{P}{T}\right) V - \left(\frac{\mu}{T}\right) N \; , \tag{IV.16}$$

e dividindo toda equação pelo volume V obtemos

$$s = \left(\frac{1}{T}\right) \rho + \left(\frac{P}{T}\right) - \left(\frac{\mu}{T}\right) n \; , \tag{IV.17}$$

onde s é a densidade de entropia, ρ é a de energia e n a de partículas.

Da mesma forma, no caso relativístico, assume-se sempre a existência duma quadricorrente de entropia, S^μ que satisfaz a desigualdade:

$$S^\mu{}_{;\mu} \geq 0 \; . \tag{IV.18}$$

A respeito desta inequação, note que tomando duas hipersuperfícies tipo espaço Σ_τ e $\Sigma_{\tau+d\tau}$ e, assumindo que S^μ tende a zero no infinito espacial, esta desigualdade implica que a entropia total em $\Sigma_{\tau+d\tau}$ (ou seja, o fluxo de S^μ através desta superfície) será maior do que a entropia total em Σ_τ, ou seja, que a entropia aumenta com o tempo próprio.

Na literatura há um consenso em afirmar que não existe uma relação entre $T^{\mu\nu}$, N^ν e S^μ que seja sempre válida, mas que qualquer modelo do comportamento da matéria deve satisfazer as condições, (IV.1), (IV.2) e (IV.18) gerais. As quantidades $T^{\mu\nu}$, N^ν e S^μ são chamadas de variáveis primárias.

Como acontece com N^μ, S^μ pode ser decomposto usando a Eq.(III.10), numa parte ortogonal e noutra paralela a u^μ ,

$$S^\mu = s u^\mu + s^\mu \; , \tag{IV.19}$$

onde

$$s = -S^{\mu}u_{\mu} \tag{IV.20}$$

e

$$s^{\mu} = S^{\nu}h_{\nu}{}^{\mu} \; . \tag{IV.21}$$

Note que $s^{\mu}u_{\mu} = 0$.

A desigualdade (IV.18) pode ser escrita então como

$$s_{;\mu}u^{\mu} + s\theta + s^{\mu}{}_{;\mu} \geq 0 \; . \tag{IV.22}$$

IV.4 Fluido simples

Tendo em consideração as difusões internas, definimos um *fluido simples* de uma componente (para simplificar, pois o caso de várias componentes é totalmente análogo) como aquele para o qual existe um campo de quadrivelocidade $u_o{}^{\mu}$ preferencial, tal que com relação a este campo a densidade de entropia s é uma função da densidade de energia ρ e da densidade de número de partículas n

$$s = f(\rho, n) \tag{IV.23}$$

e para o qual a tricorrente fluxo de entropia s^{μ} é função das tricorrentes fluxo de calor e fluxo de difusão de partículas de acordo com a relação

$$s^{\mu} = \frac{1}{T}q^{\mu} - \frac{\mu}{T}i^{\mu} \tag{IV.24}$$

onde

$$T \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^{-1} \geq 0 \tag{IV.25}$$

é a temperatura absoluta,

$$\mu \equiv -T\frac{\partial f}{\partial n} \tag{IV.26}$$

é o potencial químico, e onde a equação de estado, f, vale para qualquer ponto do espaço-tempo.

Substituindo as definições das tricorrentes, Eqs. (III.19) (III.28) e (IV.21) na equação (IV.24) temos que

$$S^\nu h_\nu{}^\mu = -\frac{1}{T}T^{\lambda\nu}u_\lambda h_\nu{}^\mu - \frac{\mu}{T}N^\nu h_\nu{}^\mu \ , \tag{IV.27}$$

ou seja,

$$S^\nu h_\nu{}^\mu = \left(-T^{\nu\lambda}\beta_\lambda - \alpha N^\nu\right) h_\nu{}^\mu \ , \tag{IV.28}$$

onde,

$$\beta^\mu \equiv \frac{u^\mu}{T} \tag{IV.29}$$

$$\alpha \equiv \frac{\mu}{T} \ . \tag{IV.30}$$

Desta forma é possível escrever,

$$S^\mu = -T^{\mu\nu}\beta_\nu - \alpha N^\mu + P\beta^\mu \ , \tag{IV.31}$$

onde o último termo é, por definição, proporcional a $u_o{}^\mu$ e se anula quando multiplicamos toda a equação pelo projetor ortogonal h^μ_ν .

Para entender o significado do campo escalar P basta contrair toda a equação (IV.31) com $u_o{}^\mu$, obtendo assim,

$$s = \frac{1}{T}\rho - \frac{\mu}{T}n + \frac{P}{T} \ , \tag{IV.32}$$

que, multiplicando pelo campo V (volume ocupado por N partículas assim como medido pelos observadores que se movem com velocidade $u_o{}^\mu$) obtemos que,

$$S = \frac{1}{T}U - \frac{\mu}{T}N + \frac{P}{T}V \ , \tag{IV.33}$$

onde S, U e N são a entropia, a energia interna e o número de partículas contidos no volume V, assim como medidos pelos observadores com velocidade $u_o{}^\mu$. Comparando a equação (IV.33) com a equação de Euler da termodinâmica clássica, vemos que o campo P representa a pressão termodinâmica medida por estes observadores e portanto, a Eq.(IV.31) pode ser vista como a versão tensorial da equação de Euler. Note, em primeiro lugar, que esta equação em forma covariante incorpora a quadrivelocidade $u_o{}^\mu$ como uma variável termodinâmica extra do sistema e portanto, ela descreve os efeitos de mudar $u_o{}^\mu$. Em segundo lugar, ela incorpora automaticamente a relação linear entre fluxo de entropia, fluxo de calor e difusão de partículas, descrevendo assim o sistema para pequenos desvios (até primeira ordem) fora do equilíbrio. Note também que de (IV.32) temos que,

$$ds = \frac{1}{T}(d\rho - n d\mu - \mu dn + dP) - \frac{s}{T}dT \tag{IV.34}$$

e portanto, para que continuem valendo (IV.23), (IV.25) e (IV.26), ou seja, que

$$ds = \frac{1}{T}d\rho - \frac{\mu}{T}dn \ , \tag{IV.35}$$

é preciso que,

$$dP = n d\mu + s dT \ , \tag{IV.36}$$

que é a conhecida relação de Gibbs-Duhem entre os parâmetros intensivos. Esta equação implica em que a pressão termodinâmica P seja função de T e

μ, i.e. $P = P(T, \mu)$ e que,

$$\frac{\partial P}{\partial \mu} = n \tag{IV.37}$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial T} = s\,. \tag{IV.38}$$

Como vimos acima a pressão termodinâmica P é introduzida independente da pressão isotrópica p definida, em termos do tensor de energia-momento, pela Eq. (III.23). Estas duas pressões diferem em geral e não devem ser confundidas.

IV.5 Termodinâmica de Equilíbrio

Diremos que um gás simples está em equilíbrio quando as seguintes condições são satisfeitas:

- A entropia produzida é zero,

$$S^{\mu}{}_{;\mu} = 0\,. \tag{IV.39}$$

  pois o estado de equilíbrio é caracterizado por um máximo da entropia.

- As variáveis primárias são espacialmente isotrópicas i.e. existe um único campo de quadrivelocidade u^{μ} ($u^{\mu}u_{\mu} = -1$) tal que,

$$S^{\mu} = su^{\mu}\ , \tag{IV.40}$$

$$N^{\mu} = nu^{\mu}\,, \tag{IV.41}$$

$$T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu}u^{\nu} + Ph^{\mu\nu}\,, \tag{IV.42}$$

ou seja não existe nem fluxo de energia, nem fluxo de partículas e nem pressões anisotrópicas. Note que assumimos também que a pressão termodinãmica $P = P(T, \mu)$ definida pela Eq. (IV.36) é igual à pressão isotrópica p definida, em termos do tensor de energia-momento, pela Eq. (III.23).

- O movimento do fluido é rígido (o fluido não se expande, $\theta = 0$, nem se deforma, $\sigma^{\mu\nu} = 0$) i.e.,

$$h^{\xi\mu} h^{\lambda\nu} u_{(\mu;\nu)} = \theta_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} + \theta h_{\mu\nu} = 0 \ , \tag{IV.43}$$

como foi definido no final do capítulo anterior.

Notemos primeiramente que as leis de conservação da energia e da quadri-corrente N^μ [Eqs. (IV.5) e (IV.7)] para $T^{\mu\nu}$ e N^μ dados pelas Eqs. (IV.41) e (IV.42) são

$$\rho_{;\mu} u^\mu + (\rho + P)\theta = 0 \tag{IV.44}$$

e

$$n_{;\mu} u^\mu + n\theta = 0 \ . \tag{IV.45}$$

Devido a condição de que o movimento do fluido é rígido [Eq. (IV.43)] as equações acima se reduzem a

$$\rho_{;\mu} u^\mu = 0 \tag{IV.46}$$

e

$$n_{;\mu} u^\mu = 0 \ . \tag{IV.47}$$

Como a temperatura T é função de ρ e n [vide Eq. (IV.25)] temos então

$$T_{;\mu} u^\mu = \frac{\partial T}{\partial \rho} \rho_{;\mu} u^\mu + \frac{\partial T}{\partial n} n_{;\mu} u^\mu \ , \tag{IV.48}$$

que se anula devido a (IV.46) e (IV.47). Analogamente, como o potencial químico μ e a pressão termodinâmica P também são funções de ρ e n [vide Eqs. (IV.26) e (IV.36)] temos que a temperatura T, o potencial químico μ e conseqüentemente a pressão termodinâmica P são constantes ao longo do fluido:

$$T_{;\mu}u^{\mu} = \mu_{;\mu}u^{\mu} = P_{;\mu}u^{\mu} = 0 \ . \tag{IV.49}$$

Substituindo daqui a equação de Euler relativística (IV.31) na condição de equilíbrio (IV.39) e tendo em conta as leis de conservação (IV.1) e (IV.2) obtemos que

$$S^{\mu}{}_{;\mu} = -T^{\mu\nu}\beta_{\nu;\mu} - \alpha_{;\mu}N^{\mu} + P_{;\mu}\beta^{\mu} + P\beta_{;\mu}u^{\mu} + P\beta\theta = 0 \ , \tag{IV.50}$$

onde relembramos que $\beta = 1/T$ e $\beta^{\mu} = \beta u^{\mu}$.

Usando agora as condições de equilíbrio (IV.43) e (IV.49) temos que ,

$$S^{\mu}{}_{;\mu} = -T^{\mu\nu}\beta_{\nu;\mu} = 0 \tag{IV.51}$$

Como $T^{\mu\nu}$ é simétrico e arbitrário obtemos que

$$\beta_{(\nu;\mu)} = 0 \ . \tag{IV.52}$$

Note que a Eq.(IV.52) implica $\mathcal{L}_{\beta}\mathbf{g} = \mathbf{0}$, i.e., β^{μ} deve ser um campo de Killing tipo tempo. Portanto podemos concluir que o espaço-tempo dum fluido em equilíbrio térmico tem que ser necessariamente estacionário.

Note que no caso em que $\rho = 3p$, i.e. para um gás de partículas sem massa (fótons por exemplo), basta que β^{μ} seja apenas um campo de Killing conforme, i.e.,

$$\beta_{(\nu;\mu)} \propto g_{\nu\mu} \ , \tag{IV.53}$$

pois neste caso,

$$T^{\mu\nu}\beta_{\nu;\mu} \propto T^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = -\rho + 3p = 0 \ . \tag{IV.54}$$

Analisemos agora as conseqüências de que β^μ seja um campo de Killing tipo tempo Eq. (IV.52). Lembrando que $\beta^\mu = \beta u^\mu$ temos que

$$\beta_{;(\mu}u_{\nu)} + \beta u_{(\nu;\mu)} = 0 \tag{IV.55}$$

onde da Eq. (III.47) temos que $u_{(\nu;\mu)} = \theta_{\mu\nu} - a_{(\mu}u_{\nu)}$. Mas $\theta_{\mu\nu} = 0$ pela condição de equilíbrio (IV.43). Assim

$$[\beta_{;(\mu} - \beta a_{(\mu}]u_{\nu)} = 0 \tag{IV.56}$$

Como $u^\mu \neq 0$ então

$$\beta_{;\mu} - \beta a_\mu = 0 \tag{IV.57}$$

e

$$a_\mu = (\ln\beta)_{;\mu} = -(\ln T)_{;\mu} \tag{IV.58}$$

Para entender melhor o significado deste resultado tomamos um sistema de coordenadas comóvel, no qual $u^\mu \propto \partial/\partial x^0$ e como $u^\mu u_\mu = -1$, temos que

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}, \vec{0}\right). \tag{IV.59}$$

Calculando então a quadriaceleração temos

$$a_\mu = u_{\mu;\nu}u^\nu = \left(\ln\sqrt{-g_{00}}\right)_{;\mu} , \tag{IV.60}$$

que substituindo em (IV.58) fornece

$$\left[\ln\left(T\sqrt{-g_{00}}\right)\right]_{;\mu} = 0 , \tag{IV.61}$$

ou seja,

$$T\sqrt{-g_{00}} = const. \tag{IV.62}$$

pelo que a temperatura irá mudar de um ponto a outro do espaço segundo a lei

$$T \propto (-g_{00})^{-1/2} , \tag{IV.63}$$

que é a conhecida Lei de Tolman [20] para un sistema em equilíbrio termodinâmico num campo gravitacional. Essa relação reflete a chamada "inércia do calor" que estabelece que em equilíbrio térmico a temperatura é maior onde o campo gravitacional for mais intenso.

Note que como o fluido é estático (a sua quadrivelocidade u^μ é tangente ao campo de Killling β^μ), devido ao "red-shift" gravitacional, se no ponto $\mathbf{O}_1$ for emitida uma radiação de freqüência ω_1 (assim como medida por observadores comóveis com o fluido), esta radiação chegará no ponto $\mathbf{O}_2$ com freqüência ω_2 tal que (em coordenadas comóveis)

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{(\sqrt{-g_{00}})_2}{(\sqrt{-g_{00}})_1} . \tag{IV.64}$$

Por outro lado, da lei dos deslocamentos de Wien temos que a freqüêcia ω que maximiza a distribuição planckiana está relacionada com a temperatura T desta distribuição da seguinte forma:

$$\frac{T}{\omega} = \text{const.} \tag{IV.65}$$

ou seja,

$$\frac{T_1}{\omega_1} = \frac{T_2}{\omega_2} , \tag{IV.66}$$

onde T_i e ω_i ($i = 1, 2$) são a temperatura e a freqüência característica da radiação no ponto $\mathbf{O}_i$. Assim, usando a Eq. (IV.64) temos que

$$T_1 \left(\sqrt{-g_{00}}\right)_1 = T_2 \left(\sqrt{-g_{00}}\right)_2 = \text{const.} \tag{IV.67}$$

Deste modo vemos que a distribuição de temperaturas dada por (IV.63) garante que o equilíbrio entre quaisquer dois elementos do meio não é afetado pelo "red-shift" gravitacional.

Um fato curioso a ser notado aqui é que esta mesma relação Eq. (IV.63) é obtida de forma totalmente independente no contexto da Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos onde obtém-se que observadores estáticos na região externa a um buraco negro provindo do colapso de uma estrela detetam uma radiação térmica caracterizada por uma temperatura $T = (-g_{00})^{-1/2}/8\pi M$. O efeito Hawking é típico para espaços-tempos com horizontes de Killing bifurcado tal como encontrado no espaço-tempo de de Sitter e no "Rindler wedge".

IV.6 Termodinâmica irreversível

A diferença fundamental entre a termodinâmica reversível e a irreversível é que nesta última a entropia não é mais coservada, com efeito ela aumenta. A taxa de produção de entropia é dada pela inequação (IV.18).

No caso irreversível as condiçoes de equilíbrio dadas na seção IV.5 em geral não se cumprem pelo que neste caso a pressão termodinâmica P diferirá da pressão isotrópica p. A diferença entre estas duas pressões será chamada de pressão viscosa isotrópica e será denotada por

$$\Pi = p - P \ . \tag{IV.68}$$

Assim, o tensor de energia-momento [Eq. (III.25)] toma a forma

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu - 2q^{(\mu}u^{\nu)} + (P + \Pi)h^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} \ . \tag{IV.69}$$

Como veremos a seguir, cada termo a mais em (IV.69) (em comparação com o caso de equilíbrio [vide Eq. (IV.42)]) associado com q^μ, Π e $\pi^{\mu\nu}$ dará uma contribuição à geração de entropia.

Para simplificar analisaremos primeiro o caso em que só temos condução de calor. Neste caso ($\Pi = 0$ e $\pi^{\mu\nu} = 0$) e assim de (IV.69) temos

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - 2q^{(\mu}u^{\nu)} + Pg^{\mu\nu} \tag{IV.70}$$

e

$$N^\mu = nu^\mu \ . \tag{IV.71}$$

Aplicando a lei de conservação local da energia relativa a um observador com quadrivelocidade u^μ, i.e.

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}u_\mu = 0, \tag{IV.72}$$

obtemos que

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}u_\mu = -\rho_{;\mu}u^\mu - (\rho + P)\theta - q^\mu a_\mu - q^\mu{}_{;\mu} = 0 \ , \tag{IV.73}$$

onde

$$\theta \equiv u^\mu{}_{;\mu} \tag{IV.74}$$

é a taxa de expansão do fluido e

$$a^\mu \equiv u^\mu{}_{;\nu} u^\nu \tag{IV.75}$$

é a quadriaceleração. Note que na Eq. (IV.73) o primeiro termo descreve a variação no tempo da densidade de energia interna do sistema, assim como medida pelos observadores com quadrivelocidade u^μ. O segundo termo representa o trabalho feito pela Pressão P sobre cada elemento do fluido, devido à expansão do mesmo, e o quarto termo descreve o fluxo de calor para cada porção infinitesimal de fluido, limitada por uma superfície (ou tubo) tipo tempo e duas superfícies tipo espaço. Note portanto que o único termo essencialmente relativístico é o terceiro termo que envolve a quadriaceleração.

Analogamente, impondo a lei de conservação do número bariônico,

$$N^\mu{}_{;\mu} = 0 \,, \tag{IV.76}$$

obtemos que

$$n_{;\mu} u^\mu = -n\theta \,, \tag{IV.77}$$

ou seja, que a variação no tempo da densidade de partículas depende apenas da taxa de expansão do fluido.

Tendo em conta que neste caso estamos considerando apenas condução de calor, i.e., $i^\mu = 0$ na Eq. (IV.24), temos da Eq. (IV.19) que

$$S^\mu = s u^\mu + \frac{1}{T} q^\mu \,. \tag{IV.78}$$

Derivando a equação anterior temos

$$S^\mu{}_{;\mu} = s_{;\mu} u^\mu + s\theta + \frac{1}{T} q^\mu{}_{;\mu} + \left(\frac{1}{T}\right)_{;\mu} q^\mu \,. \tag{IV.79}$$

Mas como $s = s(\rho, n)$ [vide Eq.(IV.23)] então

$$s_{;\mu}u^{\mu} = \frac{\partial s}{\partial \rho}\rho_{;\mu}u^{\mu} + \frac{\partial s}{\partial n}n_{;\mu}u^{\mu} \tag{IV.80}$$

e usando as Eqs. (IV.25), (IV.26) e (IV.77) temos que,

$$s_{;\mu}u^{\mu} = \frac{1}{T}\rho_{;\mu}u^{\mu} + \frac{\mu}{T}n\theta\ . \tag{IV.81}$$

Substituindo então a Eq. (IV.81) em (IV.79) e usando a Eq. (IV.32) obtemos

$$S^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{T}\left[\rho_{;\mu}u^{\mu} + (\rho + P)\theta + q^{\mu}{}_{;\mu}\right] + \left(\frac{1}{T}\right)_{;\mu} q^{\mu}\ . \tag{IV.82}$$

Usando agora a lei de conservação da energia (IV.73), a equação acima se reduz a

$$S^{\mu}{}_{;\mu} = -\frac{1}{T^2}\left(a_{\mu}T + T_{;\mu}\right)q^{\mu}\ . \tag{IV.83}$$

Daqui vemos que a forma mais simples de garantir a satisfação da inequação (IV.18) é impondo uma relação linear entre o "fluxo" q^{μ} e a correspondente "força termodinâmica" $(a_{\mu}T + T_{;\mu})$ (que é a maneira usual de se chamar o fator que multiplica cada fluxo na expressão para a taxa de geração de entropia), i.e.

$$q^{\mu} = -\lambda\left(a_{\mu}T + T_{;\mu}\right)\ , \tag{IV.84}$$

onde $\lambda = \lambda(\rho, n)$ é a condutividade térmica do meio, e tem que ser ≥ 0 para garantir o caráter positivo da geração de entropia:

$$S^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{q_{\mu}q^{\mu}}{\lambda T^2} \geq 0\ . \tag{IV.85}$$

Estes materiais que mostram uma relação linear entre os "fluxos" e as "forças termodinâmicas" são chamados de *materiais puramente resistivos*

Assim, da Eq. (IV.85), vemos que a condição de equilíbrio (IV.39) é satisfeita se e somente se $q^\mu = 0$ (lembrando que q^μ pertence ao subespaço ortogonal a u^μ onde a métrica é definido-positiva). Como q^μ é dado pela Eq. (IV.84) temos que a condição de equilíbrio (IV.39) se reduz a

$$a_\mu = -(\ln T)_{;\mu} \,. \qquad \text{(IV.86)}$$

que é a lei de Tolman, já obtida na seção anterior.

Por último, da mesma forma que foi feito para o fluxo de calor q^μ, consideremos a contribuição para a geração de entropia de todos os termos dissipativos q^μ, Π, $\pi^{\mu\nu}$ e i^μ do tensor de energia-momento (IV.69) e da quadricorrente N^μ [Eq. (III.26)].

Neste caso a lei de conservação da energia [Eq. (IV.3)] toma a forma geral (IV.5) onde lembramos que $p = \Pi + P$ ou seja ,

$$\rho_{;\mu}u^\mu + (\rho + (\Pi + P))\,\theta + \pi_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + q^\mu{}_{;\mu} + q^\mu a_\mu = 0 \,. \qquad \text{(IV.87)}$$

Note que os termos a mais na Eq. (IV.87) se comparada com (IV.73) são $\Pi\theta$ e $\pi_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ que representam o trabalho feito pelas forças de viscosidade devido à expansão θ e à deformação $\sigma^{\mu\nu}$ do fluido.

A lei de conservação da quadricorrente N^μ [Eq. (IV.2)] toma a forma geral Eq. (IV.7) e o quadrivetor fluxo de entropia [vide Eqs. (IV.19) e (IV.24)] toma a forma

$$S^\mu = su^\mu + \frac{1}{T}q^\mu - \frac{\mu}{T}i^\mu \ . \qquad \text{(IV.88)}$$

Assim, neste caso temos que

$$S^\mu{}_{;\mu} = s_{;\mu}u^\mu + s\theta + \frac{1}{T}q^\mu{}_{;\mu} + \left(\frac{1}{T}\right)_{;\mu} q^\mu - \left(\frac{\mu}{T}\right)_{;\mu} i^\mu - \left(\frac{\mu}{T}\right) i^\mu{}_{;\mu} \ . \qquad \text{(IV.89)}$$

Note que substituindo as Eqs. (IV.25), (IV.26) em (IV.80) e usando neste caso a forma geral da lei de conservação do número de partículas (IV.7) temos que

$$s_{;\mu}u^{\mu} = \frac{1}{T}\rho_{;\mu}u^{\mu} + \frac{\mu}{T}n\theta + \frac{\mu}{T}i^{\mu}{}_{;\mu} . \tag{IV.90}$$

Substituindo a Eq. (IV.90) em (IV.89) e usando a Eq. (IV.32) obtemos

$$S^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{T}\left[\rho_{;\mu}u^{\mu} + (\rho+P)\theta + q^{\mu}{}_{;\mu}\right] + \left(\frac{1}{T}\right)_{;\mu} q^{\mu} - \left(\frac{\mu}{T}\right)_{;\mu} i^{\mu} . \tag{IV.91}$$

Usando a lei de conservação da energia (IV.87), esta última equação se reduz a

$$S^{\mu}{}_{;\mu} = -\frac{1}{T}\left[\theta\Pi + \sigma_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} + ((\ln T)_{;\mu} + a_{\mu})\, q^{\mu}\right] - \left(\frac{\mu}{T}\right)_{;\mu} i^{\mu} \tag{IV.92}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{T}\left[\theta\Pi + \sigma_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} + ((\ln T)_{;\mu} + a_{\mu})\, q^{\mu}\right. \\ &\quad \left. + (\mu_{;\mu} - \mu(\ln T)_{;\mu})\, i^{\mu}\right] . \end{aligned} \tag{IV.93}$$

Assumindo que o material é puramente resistivo definimos as seguintes equações constitutivas:

$$\Pi = -\zeta\theta , \tag{IV.94}$$

$$\pi^{\mu\nu} = -\eta\sigma^{\mu\nu} , \tag{IV.95}$$

$$q_{\mu} = -\lambda\left((\ln T)_{;\mu} + a_{\mu}\right) , \tag{IV.96}$$

$$i_{\mu} = -\mathcal{D}\left(\mu_{;\mu} - \mu(\ln T)_{;\mu}\right) , \tag{IV.97}$$

onde $\zeta(\rho, n)$ é a viscosidade volumétrica, $\eta(\rho, n)$ é a viscosidade de deformação, $\lambda(\rho, n)$ é a condutividade térmica e $\mathcal{D}(\rho, n)$ é o coeficiente de difusão . Assim, o caráter positivo da geração de entropia é garantido sempre que

$$\zeta \geq 0, \qquad \eta \geq 0, \qquad \lambda \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{D}(\rho, n) \geq 0 . \tag{IV.98}$$

Da Eq. (IV.92) vemos que a condição para que se anule a geração de entropia devida a difusão de partículas é que (μ/T) = const. Como no equilíbrio a distribuição de temperatura é tal que $T\sqrt{-g_{00}}$ = const [vide Eq. (IV.62)] temos que no equilíbrio a distribuição do potencial químico deve satisfazer $\mu\sqrt{-g_{00}}$ = const. Resumindo podemos dizer que um sistema em equilíbrio termodinmico é caracterizado pelas seguintes condições:

$$\theta = 0\,, \qquad \sigma^{\mu\nu} = 0\,, \qquad T\sqrt{-g_{00}} = \text{const} \quad e \quad \mu\sqrt{-g_{00}} = \text{const} \tag{IV.99}$$

Note que a condição de que o sistema seja puramente resistivo não é a única forma de garantir o caráter positivo da taxa de geração de entropia. Na realidade existem sistemas com relações não lineares entre os "fluxos" e as "forças termodinâmicas" e sistemas onde cada "fluxo" depende também das "forças" correspondentes a outros "fluxos". As Eqs. (IV.94)-(IV.97) representam o caso mais simples de equações constitutivas mas mesmo assim elas descrevem satisfatoriamente grande parte dos sistemas de interesse.

Capítulo V

Conclusões

Na versão relativística da termodinâmica de um meio contínuo que discutimos nesta dissertação, associamos a cada estado arbitrário do meio um conjunto de "variáveis primárias": um tensor de energia-momento simétrico e conservado $T^{\mu\nu}$, R quadricorrentes conservadas $N_r{}^{\mu}$ ($r = 1, 2, ...R$) e um quadrivetor fluxo de entropia S^{μ} com divergência não negativa (que expressa o caráter positivo da geração de entropia). Neste contexto não se associou ao meio nenhuma quadrivelocidade, este é um conceito que (para estados de não equilíbrio) pode ser introduzido de diversas formas, em termos de fluxo de partículas, bárions, energia, etc.

Agora, para sistemas simples em equilíbrio associa-se uma quadrivelocidade u^{μ} tal que

$$S^{\mu} = -T^{\mu\nu}\beta_{\nu} - \mu\beta N^{\mu} + P\beta^{\mu} \tag{V.1}$$

onde $\beta^{\mu} = u^{\mu}/T$ e

$$\frac{\partial P}{\partial \mu} = -\frac{1}{\beta} N^{\mu}\beta_{\mu} \tag{V.2}$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{1}{\beta^3} S^\mu \beta_\mu \,, \tag{V.3}$$

sendo que T é a temperatura, μ é o potencial químico e $P = P(T, \mu)$ é a pressão termodinâmica. As características mais relevantes de tal sistema são: a geração de entropia é zero ($S^\mu{}_{;\nu} = 0$), o movimento do fluido é rígido ($h^{\xi\mu} h^{\lambda\nu} u_{(\mu;\nu)} = 0$), o campo β^μ satisfaz a equação de Killing $\beta_{\mu;\nu} + \beta_{\nu;\mu} = 0$, a temperatura varia com a posição de acordo com a lei de Tolman $T\sqrt{-g_{00}} =$ const e analogamente para o potencial químico: $\mu\sqrt{-g_{00}} =$ const. A lei de Tolman reflete a chamada "inércia do calor" e estabelece que em equilíbrio térmico a temperatura é maior na parte externa de um disco que gira ou no fundo de um poço de potencial.

A equação (V.1) no "referencial de repouso", (contraída com u_μ) se reduz à equação de Euler na representação de entropia,

$$S = \frac{1}{T} U - \frac{\mu}{T} N + \frac{P}{T} V \,, \tag{V.4}$$

mas ela representa mais do que isso. Em primeiro lugar ela descreve o efeito de mudar a quadrivelocidade u^μ , ou seja, a formulação covariante incorpora a quadrivelocidade como uma variável termodinâmica adicional. Em segundo lugar, a Eq. (V.1) permanece válida para pequenos desvios fora do equilíbrio incorporando automaticamente a relação linear entre o fluxo de entropia e os fluxos de calor e de partículas.

Nesta abordagem, a entropia aparece tanto como um quadrivetor S^μ quanto como uma densidade $s = -S^\mu u_\mu$. A temperatura T aparece como um escalar, tal como s, n e p. Estas quantidades são freqüentemente referidas como "medidas por um observador local comóvel". Este procedimento parece ser mais simples, menos ambíguo e, tendo em vista as aplicações em astrofísica, mais realístico que o modo tradicional de considerar leis em termos de quantidades extensivas como V, U e S para um fluido confinado numa caixa. Não parece haver qualquer necessidade adicional de se introduzir temperaturas relativas, T', para observadores não comóveis. O conteúdo físico das leis da termodinâmica pode ser adequadamente descrito pelas leis locais Eqs. (IV.1), (IV.2) e (IV.18) em conjunção com as equações constitutivas, tal como foi visto acima.

Comentemos por último que este formalismo que apresentamos aqui para descrever termodinamicamente um fluido pode ser estendido para a descrição de sólidos elásticos [21] [22]. Para isto, considerando que as difusões são desprezíveis ($i^\mu = 0$), basta impor que a densidade de entropia $s = S^\mu u_\mu$ [Eq. (IV.23)], em vez de ser função da densidade de partículas n, seja função do tensor de projeção $h^{\mu\nu}$. Como o tensor $h^{\mu\nu}$ constitui uma métrica positivo-definida no sub-espaço tangente ortogonal a u^μ, ele caracteriza o estado local instantâneo de deformação do sistema e não apenas a taxa de variação desta deformação, a qual, como já vimos, pode ser descrita por $u_{\mu;\nu}$. O caso particular de um fluido é obtido quando se impõe a condição de que não existam direções privilegiadas em nenhum estado.

Apêndice A

Velocidade dinâmica e diagonalizabilidade do tensor de energia-momento

Como já foi visto no capítulo III.2 o fluxo de energia q^μ medido por um observador com quadrivelocidade u^μ ($u^\mu u_\mu = -1$) é dado por

$$
\begin{aligned}
q_\mu &= -T^{\lambda\nu} u_\nu h_{\lambda\mu} && \text{(I.1)}\\
&= -T^{\lambda\nu} u_\nu \left(u_\mu u_\lambda + g_{\mu\lambda}\right) && \text{(I.2)}\\
&= -\left(T^{\lambda\nu} u_\lambda u_\nu\right) u_\mu - T_\mu{}^\nu u_\nu \ . && \text{(I.3)}
\end{aligned}
$$

Assim estes observadores não medirão fluxo de energia (i.e. $q_\mu = 0$) se e somente se existir um ϱ tal que

$$T_\mu{}^\nu u_\nu = -\varrho u_\mu \ , \qquad \text{(I.4)}$$

ou seja, se e somente se u^μ é um autovetor do tensor de energia-momento $T_\mu{}^\nu$. No caso deste ϱ existir e (for real) então

$$\varrho = T^{\lambda\nu}u_\lambda u_\nu \ , \tag{I.5}$$

é interpretado como a densidade de energia medida pelo observador com quadrivelocidade u^μ (que não mede fluxo de energia).

Tendo em consideração a definição de velocidade dinâmica dada na seção III.3, denotaremos por $u_D{}^\mu$ o autovetor, tipo tempo de $T_\mu{}^\nu$, caso este exista e seja único. Como todos nossos cálculos a seguir serão locais, usamos por simplicidade uma base na qual $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ sem perda de generalidade.

Naturalmente, como a métrica do espaço-tempo $\eta^{\mu\nu}$ não é positiva-definida, temos que vetores com norma nula não são necessariamente nulos. Este simples fato faz com que os teoremas tradicionais da álgebra linear sobre a diagonalizabilidade e o caráter real dos autovalores duma matriz simétrica e real não possam ser aplicados neste caso.

Neste apêndice mostraremos que a condição de que

$$T^{\mu\nu}w_\mu w_\nu > 0 \tag{I.6}$$

para todo w^μ que satisfaça $w^\mu w_\mu = -1$ ou $w^\mu w_\mu = 0$ é suficiente para que

- $T^{\mu\nu}$ seja diagonalizavel
- $T^{\mu\nu}$ possua um autovetor tipo tempo $u_D{}^\mu$ e três tipo espaço.
- Os autovalores de $T^{\mu\nu}$ sejam todos reais

Introduziremos abaixo um critério para encontrar autovetores tipo tempo e tipo luz baseado numa extremização funcional de $\varrho = T^{\mu\nu}w_\mu w_\nu$ [25]. Se definimos a função F como

$$F = T^{\mu\nu} w_\mu w_\nu + \lambda \left(\eta^{\mu\nu} w_\mu w_\nu + \epsilon \right) \quad , \tag{I.7}$$

onde

$$\epsilon = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \eta_{\mu\nu} w^\mu w^\mu = 0 \\ 1 & \text{se} \quad \eta_{\mu\nu} w^\mu w^\mu = -1 \end{cases} \tag{I.8}$$

Calculando a derivada funcional abaixo

$$\frac{\partial F}{\partial w_\lambda} = (T^{\mu\nu} + \lambda \eta^{\mu\nu}) \left(\delta_\mu{}^\lambda w_\nu + w_\mu \delta_\nu{}^\lambda \right) \tag{I.9}$$

$$= 2 \left(T^{\lambda\nu} + \lambda \eta^{\lambda\nu} \right) w_\nu \quad , \tag{I.10}$$

obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial w_\lambda} = 0 \iff T^{\lambda\nu} w_\nu = -\lambda w^\lambda \quad , \tag{I.11}$$

ou seja, achando componentes w^μ de um vetor tipo tempo ou tipo luz que extremize funcionalmente a quantidade $\varrho = T^{\mu\nu} w_\mu w_\nu$ teremos achado um autovetor de $T^{\mu\nu}$.

Trataremos primeiramente o caso em que w^μ é tipo luz. Deste modo

$$-(w^0)^2 + \sum_{i=1}^{3} (w^i)^2 = 0 \tag{I.12}$$

e

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{w^i}{w^0} \right)^2 = 1 \quad . \tag{I.13}$$

Assim, se definimos o vetor unitário tridimensional l^i $(i = 1, 2, 3)$ como

$$l^i \equiv \frac{w^i}{w^0} \quad \text{e} \quad |\vec{l}| = \sum_{i=1}^{3} \left(l^i \right)^2 = 1 \quad , \tag{I.14}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}\varrho &= T_{\mu\nu}w^\mu w^\nu \\ &= T_{00}w^0w^0 + 2T_{i0}w^iw^0 + T_{ij}w^iw^j \\ &= (w^0)^2\left[T_{00} + 2T_{i0}l^i + T_{ij}l^il^j\right] \qquad \text{(I.15)}\end{aligned}$$

Assim, exigindo que $T_{\mu\nu}w^\mu w^\nu > 0$ para todo w^μ que satisfaça $w^\mu w_\mu = 0$, garantimos que

$$\left(T_{00} + 2T_{i0}l^i + T_{ij}l^il^j\right) > 0 \ , \qquad \text{(I.16)}$$

para todo vetor tridimensional e unitário l^i, i.e. $\sum_{i=1}^3 (l^i)^2 = 1$, tal que $\omega^\mu = \omega^0(1, \vec{l})$.

Consideramos agora o caso em que w^μ é tipo tempo e unitário. Temos neste caso que

$$-(w^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (w^i)^2 = -1 \qquad \text{(I.17)}$$

e portanto

$$-(w^0)^2\left[1 - \sum_{i=1}^3\left(\frac{w^i}{w^0}\right)^2\right] = -1 \ . \qquad \text{(I.18)}$$

Assim, definindo o vetor velocidade tridimensional v^i $(i = 1, 2, 3)$ como

$$v^i \equiv \frac{w^i}{w^0} \ , \qquad \text{(I.19)}$$

temos que

$$w^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \ , \qquad \text{(I.20)}$$

onde

$$0 \leq v^2 \equiv \sum_{i=1}^3 (v^i)^2 < 1 \ , \qquad \text{(I.21)}$$

ou seja,

$$-1 < v < 1 \ . \tag{I.22}$$

Assim escrevemos

$$v^i = v l^i \ , \tag{I.23}$$

onde l^i é um vetor tridimensional unitário na direção de v^i .

Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \varrho &= T_{\mu\nu} w^\mu w^\nu \\ &= T_{00} w^0 w^0 + 2T_{i0} w^i w^0 + T_{ij} w^i w^j \\ &= (w^0)^2 \left[T_{00} + 2T_{i0} v^i + T_{ij} v^i v^j \right] \\ &= \frac{T_{00} + 2vT_{i0} l^i + v^2 T_{ij} l^i l^j}{1 - v^2} \ , \end{aligned} \tag{I.24}$$

Usando agora a condição que $T_{\mu\nu} w^\mu w^\nu > 0$ para todo w^μ tal que $w^\mu w_\mu = -1$, concluímos que o numerador em (I.24) é positivo para todo v. Por outro lado, no limite $v \to \pm 1$, o numerador de (I.24) tende a $(T_{00} \pm 2T_{i0} l^i + T_{ij} l^i l^j)$ que pela condição (I.16) é positivo e finito para todo $\vec{l}$ unitário, enquanto que o denominador $(1 - v^2)$ tende a zero. Assim, qualquer que seja v com $-1 < v < 1$ e $\vec{l}$ unitário ($|\vec{l}| = 1$), temos $0 < T^{\mu\nu} w_\mu w_\nu < \infty$ e

$$\lim_{v \to \pm 1} T^{\mu\nu} w_\mu w_\nu = +\infty \ . \tag{I.25}$$

Deste modo, podemos afirmar que para cada vetor unitário $\vec{l}$ existe algum v' $(-1 < v' < 1)$ para o qual $T^{\mu\nu} w_\mu w_\nu$ possui um extremo local. Este valor extremo, $T^{\mu\nu} w_\mu w_\nu |_{v=v'}$ será função de $\vec{l}$. Como o conjunto dos vetores unitários $\vec{l}$ pode ser identificado com o conjunto dos pontos da superfície duma esfera unitária, se plotarmos cada um dos valores de $T^{\mu\nu}w_\mu w_\nu|_{v=v'}$ sobre esta esfera vemos que, deverá existir algum ponto e portanto alguma direção $\vec{\mathbf{l}}'$, onde $T^{\mu\nu}w_\mu w_\nu|_{v=v'}$ alcançará um valor extremo $T^{\mu\nu}w_\mu w_\nu|_{v=v' \text{ e } \vec{\mathbf{l}}=\vec{\mathbf{l}}'} = \varrho'$ que será real, pois $T^{\mu\nu}$ e w^μ são reais. Como vimos acima, estes v' e $\vec{\mathbf{l}}'$ definem um vetor tipo tempo $\mathbf{w}' = (1 - v'^2)^{-1/2}(1, v\vec{\mathbf{l}}')$, que extremiza a quantidade $T^{\mu\nu}w_\mu w_\nu$ e que portanto é um autovetor do tensor de energia-momento.

Resumindo, até agora mostramos que da condição de que $T^{\mu\nu}w_\mu w_\nu > 0$ para todo w^μ que satisfaça $w^\mu w_\mu = -1$ ou $w^\mu w_\mu = 0$ podemos garantir a existência de um autovalor de $T^{\mu\nu}$ real e negativo $-\varrho$ associado a um autovetor tipo tempo $w'^\mu \equiv u_D{}^\mu$.

A respeito dos outros autovalores e autovetores de $T^{\mu\nu}$, note que:

- Para toda base ortonormal $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, onde $\mathbf{e}_0 = \mathbf{u}_D$ e $\mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}$, o conjunto de todos os vetores

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \ , \tag{I.26}$$

  formam um subespaço tridimensional ortogonal a $\mathbf{u}_D$ onde a métrica $\mathbf{g}$ é positiva-definida.

- O tensor $T^{\mu\nu}$ leva vetores x^μ ortogonais a $u_D{}^\mu$ ($u_D{}^\mu x_\mu = 0$) em vetores ortogonais a $u_D{}^\mu$,

$$u_D{}^\mu (T_{\mu\nu} x^\nu) = (u_D{}^\mu T_{\mu\nu}) x^\nu = -\varrho u_{D\nu} x^\nu = 0 \ , \tag{I.27}$$

  onde usamos que $u_D{}^\mu$ é autovetor de $T^{\mu\nu}$.

Assim, no subespaço ortogonal a $u_D{}^\mu$ onde a métrica é positiva-definida $T^{\mu\nu}$ representa um operador linear simétrico e real, de modo que, podemos usar os teoremas tradicionais da álgebra linear que garantem a existência de três autovetores de $T^{\mu\nu}$ ortonormais e com autovalores reais associados a eles. Estes autovetores junto a $\mathbf{u}_D$ formam uma base ortonormal do espaço-tempo na qual $T^{\mu\nu}$ é diagonal.

Podemos concluir então que a condição de que $T^{\mu\nu}w_\mu w_\nu > 0$ para todo w^μ que satisfaça $w^\mu w_\mu = -1$ ou $w^\mu w_\mu = 0$ garante que o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ é diagonalizavel, possui um autovetor tipo tempo e três tipo espaço e todos os seus autovalores são reais. Como já dissemos, observadores seguindo a direção do autovetor tipo tempo não medirão fluxo de energia.

Vamos ilustrar nossa análise acima com o campo eletromagnético (vide [24]). Neste caso, o tensor de energia-momento tem a forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\lambda}F_\lambda{}^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\lambda\delta}F_{\lambda\delta}\right) , \tag{I.28}$$

onde num sistema de coordenadas inercial escrevemos

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_x & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{I.29}$$

Assim

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & S_x & S_y & S_z \\ S_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_x & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} , \tag{I.30}$$

onde

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} , \tag{I.31}$$

$$S_i = \frac{1}{4\pi}\epsilon_{ij\nu}E_j H_\nu \tag{I.32}$$

e

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[-E_iE_j - H_iH_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(E^2 + H^2\right)\right] \ . \tag{I.33}$$

Lembrando que

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\xi}F_{\mu\nu}F_{\lambda\xi} = \vec{E}\cdot\vec{H} \tag{I.34}$$

e

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = H^2 - E^2 \tag{I.35}$$

são invariantes de campo, vemos que no caso em que $\vec{E}\cdot\vec{H} = H^2 - E^2 = 0$ ou seja, $\vec{E} \perp \vec{H}$ e $|\vec{E}| = |\vec{H}|$ (onda plana), o módulo do trivetor fluxo de energia S_i [vide Eq. (I.32)],

$$|\vec{S}| = \frac{1}{4\pi}|\vec{E}\times\vec{H}| = \frac{1}{4\pi}|\vec{E}||\vec{H}| = \frac{|\vec{E}|^2}{4\pi} = W > 0 \ , \tag{I.36}$$

é sempre diferente de zero. Neste caso para todos os observadores o fluxo de energia $|\vec{S}|$ é a densidade de energia W multiplicada pela velocidade da luz ($c = 1$). Ou seja, não existirão observadores com velocidade dinâmica (observadores que não medem fluxo de energia).

Como veremos a seguir isto não está em contradição com o teorema mostrado acima pois neste caso existe um vetor tipo luz w^μ para o qual $T_{\mu\nu}w^\mu w^\nu = 0$ violando assim a condição (I.6). Notemos que se w^μ for tipo luz ($w^\mu w_\mu = 0$) e

$$F^{\mu\nu}w_\nu = 0 \ , \tag{I.37}$$

então contraindo (I.28) com w^μ nos dois índices temos que $T_{\mu\nu}w^\mu w^\nu = 0$.

Para construir explicitamente este vetor ω^μ, tomemos um vetor tipo luz genérico $\mathbf{w} = w_0(1, \vec{\mathbf{l}})$ com $w_0 > 0$ e $|\vec{\mathbf{l}}| = 1$ e substituindo a Eq. (I.29) em (I.37) temos

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} = 0 \ , \tag{I.38}$$

que se reduz a

$$\vec{E} \cdot \vec{\mathbf{l}} = 0 \tag{I.39}$$

e

$$\vec{E} - \vec{H} \times \vec{\mathbf{l}} = 0 \ . \tag{I.40}$$

Note que ambas equações são satisfeitas se

$$\vec{E} = \vec{H} \times \vec{\mathbf{l}} \tag{I.41}$$

que para $\vec{\mathbf{l}}$ perpendicular a $\vec{H}$ implica que $\vec{E} \perp \vec{H}$ e $|\vec{E}| = |\vec{H}|$

Resumindo, acabamos de mostrar que no caso da onda plana, ou seja $\vec{E} \perp \vec{H}$ e $|\vec{E}| = |\vec{H}|$, existe um vetor tipo luz $\mathbf{w} = w_0(1, \vec{\mathbf{l}})$ com $w_0 > 0$, $|\vec{\mathbf{l}}| = 1$ e $\vec{\mathbf{l}} \perp \vec{H}$ para o qual $T^{\mu\nu} w_\mu w_\nu = 0$, violando assim a condição suficiente (I.6) para que $T^{\mu\nu}$ seja diagonalizável.

Referências Bibliográficas

[1] A. Einstein, *Jahrb.Radioaktivität Elektronik* **4** (1907) 411.

[2] A. Einstein and J. Laub, *Ann. Phys. (Leipzig)* **27** (1909) 897.

[3] H. Minkowski, *Math. Ann.* **68** (1910) 526.

[4] M. Planck, *Ann. Phys. (Leipzig)* **76** (1908) 1.

[5] S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199.

[6] W.G. Unruh, *Phys. Rev. D* **14,** (1976) 870 .

[7] P.C.W. Davies, *J. Phys. A* **8,** (1975) 609 .

[8] W. Israel and J. M. Stewart, in A. Held, (ed.), *General Relativity, Vol.2*, Plenum, New York, (1980) 491.

[9] S. S. Costa and G. E. A. Matsas *Phys. Lett. A* **209** (1995) 155.

[10] P. T. Landsberg and G. E. A. Matsas *Phys. Lett. A* **223** (1996) 401.

[11] W. Pauli, *Die Relativitätstheorie, Encyclopedia der Mathemathischen Wissenschaften*, Vol. 2 (Teubner, Leipzig, 1921).

[12] P. J. E. Peebles and D. T. Wilkinson, *Phys. Rev.* **174** (1968) 2168.

[13] G. F. R. Ellis: in R. K. Sachs (ed.), *General Relativity and Cosmology*, New York (1973) 104.

[14] N. G. van Kampen *Phys. Rev.* **173** (1968) 295.

[15] R. Maartens, astro-ph/9609119.

[16] J. Ehlers, in G. Shaviv and J. Rosen (eds.), *General Relativity and Gravitation,* Wiley, New York (1975) 213.

[17] W. Israel, *J. Non-Equilib.Thermodyn.* **11** (1986) 295.

[18] W. Israel, *Physica* **106A** (1981) 204.

[19] H. B. Callen *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, John Wiley & Sons. New York (1985).

[20] R. C. Tolman *Relativity Thermodynamics and Cosmology*, Dover Publications, Inc. New York (1987).

[21] B. Carter and H. Quintana *Proc. R. Soc. Lond.* **A. 331** (1972) 57.

[22] J. Ehlers, in W. Israel (ed.), *Relativity, Astrophysics and Cosmology* D.Reider, Dordrecht (1973) 1.

[23] L. D. Landau E. M. Lifshitz *Fluid Mechanics,* 2^{nd} *ed.*, Pergamon Press, New York (1989).

[24] L. D. Landau E. M. Lifshitz *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, New York (1989).

[25] J. L. Synge *Relativity: the special theory,* 2^{nd} *ed.*, North-Holand Publishing Company, Amsterdam (1965).