UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Criando novos tabuleiros para o jogo Tri-Hex e sua validação didático-pedagógica na formação continuada de professores de Matemática: uma contribuição para a Geometria das séries finais do ensino fundamental

Luciana Aparecida Ferrarezi

Orientadora: Profª. Drª Laurizete Ferragut Passos
Co-Orientador: Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2005

516 F374c

Ferrarezi, Luciana Aparecida

Criando novos tabuleiros para o jogo Tri-Hex e sua validação didático-pedagógica na formação continuada de professores de Matemática: uma contribuição para Geometria das séries finais do ensino fundamental / Luciana Aparecida Ferrarezi. – Rio Claro : [s.n.], 2005

148 f. : il., fots.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Orientador: Laurizete Ferragut Passos

Co-orientador: Ruy Madsen Barbosa

1. Geometria. 2. Jogos. 3. Aprendizagem. 3. Formação inicial. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Comissão Examinadora

____
Prof^{a} Dr^{a} Laurizete Ferragut Passos

____
Prof. Dr. Geraldo Perez

____
Prof^{a} Dr^{a} Regina Célia Grando

Luciana Aparecida Ferrarezi
- aluna -

Rio Claro, _______ de ______________________________ de ________

Resultado: ____

A minha mãe, Maria Tereza,
pela dedicação, carinho, amor incondicional e
que sempre acompanhou toda a minha trajetória.
Ao meu pai, Edemar (in memorian) que me deixou no meio
dessa caminhada, faltando tão pouco, mas que com
certeza de algum lugar especial continua torcendo por mim.
Aos meus irmãos, Juliana e Junior, pelo constante apoio,
dedicação, preocupação e bondade.

A G R A D E C I M E N T O S

À DEUS, pela coragem e força.

À querida orientadora Profª Drª Laurizete Ferragut Passos, pelo acolhimento e estímulo durante todo o processo de orientação, pela confiança e por acompanhar este trabalho de pesquisa dando contribuições essenciais para a sua realização.

Ao meu Co-Orientador, Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa, pela sua valiosa sugestão de pesquisa, por ter-me propiciado conhecer e aprender a utilizar jogos na Matemática e por todo o amparo durante o trabalho.

Ao Prof. Dr. Geraldo Perez, com quem eu sempre pude contar não somente para a pesquisa; que nunca mediu esforços para me ajudar e por isso o considero mais que meu professor, meu amigo!

À Profª Drª Regina Célia Grando, pelos importantes encaminhamentos sugeridos ao meu trabalho. Agradeço pelo apoio desde o nosso primeiro encontro antes mesmo do projeto se concretizar.

À Profª. Drª. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin, pela disponibilidade e disposição para todas as nossas conversas que muito contribuíram para o trabalho.

Ao Prof. Dr. Marcos Luiz Lourenço pelo seu exemplo de dedicação ao ensino da Matemática.

Ao meu amigo Doniseti, responsável por todo o desenvolvimento final do trabalho, pela atenção, incentivo, carinho e amizade. Cada palavra, acredite, foi muito importante e levo sempre comigo. Seus comentários, críticas e sugestões em cada momento da escrita possibilitaram-me afinar minhas idéias impulsionando-me a terminar a pesquisa. Os momentos de alegrias e emoções que compartilhamos foram inesquecíveis. Minha profunda gratidão.

À minha amiga Fátima, minha “irmã-gêmea”, pela amizade sincera, por ter me suportado não somente nos momentos agradáveis. Agradeço pelas críticas e sugestões no momento da análise e por ter acreditado em mim.

À amiga Márcia, japonesinha, que sempre esteve por perto me dando o respaldo necessário.

À minha amiga do coração, Tânia Marli, com quem compartilhei muitos momentos do mestrado, desde quando éramos alunas especiais até a seleção. Obrigada pela acolhida, pela amizade sincera e constante apoio que me deu em nossa casa de Rio Claro, nosso cantinho especial de estudo.

À amiga Reiza, minha vizinha, que sempre esteve por perto compartilhando desse momento.

À amiga Romélia, parceira mineiríssima, com quem compartilhei muitas aventuras do mestrado. Agradeço por ter iniciado a análise comigo.

À amiga Regina, com quem pude contar em momentos difíceis e que não mediu esforços para me ajudar.

À amiga Sheila, “irmãzinha”, pelo companheirismo nas discussões e viagens. Obrigada pelo carinho e amizade sincera.

Ao amigo Edilson, pela compreensão às minhas idéias e incertezas, pelos seus comentários e sugestões.

À amiga Bel, por ter acreditado no meu potencial para trabalhar no PEC, com professores de Matemática, onde tudo começou.

Ao amigo Marquinhos, por todo o seu talento que muito me ajudou nas gravações.

À Ana, Elisa, Rosana, Alessandra e Maria José (Zezé), funcionárias do Departamento de Matemática, pela constante atenção e simpatia.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP Rio Claro.

Ao Prof. Dr. Murilo Leal, da UFSJD, pelas valiosas contribuições para os blocos de análise.

Ao Prof. Dr. Plínio Cavalcanti, da UFMG, pela leitura crítica da minha pesquisa.

A FATEC, Diretor, Funcionários e Coordenadores, pelo apoio e compreensão durante esse período.

Ao amigo Nilson, pelo inestimável apoio e que não mediu esforços para que eu ingressasse no mestrado.

Ao Prof. Dr. Antonio Marcos Villa, meu eterno professor, pessoa iluminada, que mesmo após a Licenciatura nunca deixou de me ensinar, principalmente durante o mestrado. Jamais esquecerei seu apoio e sua atenção. Obrigada!

A todos os meus professores do curso de Licenciatura em Matemática da UNIARA, em especial a Profª. Drª. Celi e Profª. Drª. Carmem, pela dedicação e colaboração em minha formação inicial de Matemática.

À Profª. Drª. Mirian Godoy Penteado, pelas inteligentes sugestões e apoio.

Ao Prof. Dr. Sérgio Nobre, Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira e Profª. Drª. Rosa S. Baroni, pessoas incríveis, com quem tive a felicidade de conviver. Obrigada por terem permitido minha entrada como “penetra” em todas as festas do Grupo de História da Matemática!

Ao Prof. Dr. Edson Inforsato (Tamoio) e Prof. Dr. Mauro Romanatto, da UNESP de Araraquara, com quem pude discutir sobre a formação de professores. Obrigada pela acolhida e pela valiosa amizade.

Ao Dr. Quico, amigo especial, com quem posso contar sempre.

Ao Prof. Dr. Luis Roberto Wagner, pela revisão do texto.

À amiga Kátia, pela colaboração e compreensão em todas as minhas dificuldades de Inglês.

Aos professores do Ensino Fundamental da Rede Pública de Taquaritinga pela disponibilidade em participarem das oficinas e a EEPG Profª. Carmela Morano Previdelli, pelo espaço cedido.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

À minha família, pela contribuição na digitação das transcrições das fitas, pelos “chás-calmante”, pelo amor, pelo carinho, pela força, coragem, proporcionados em todos os momentos da minha vida. AMO MUITO VOCÊS!

Enfim, a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização dessa pesquisa.

(...)

"Que eu jamais me esqueça que Deus me ama infinitamente,
que um pequeno grão de alegria e esperança dentro de cada um
é capaz de mudar e transformar qualquer coisa, pois ...
a vida é construída nos sonhos
e concretizada no amor!"

Trecho da Oração do Bem,
Chico Xavier.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS

LISTA DE FOTOS

LISTA DE SIGLAS

ATP – Assistente Técnico Pedagógico

CEFAM – Centro Específico de Formação de Magistério

CENPEC - Centro de Estudos e Pesquisas em Educação, Cultura e Ação Comunitária

DERT - Diretoria Regional de Ensino de Taquaritinga

EEPSG – Escola Estadual de Primeiro e Segundo Grau

FDE – Fundação para o Desenvolvimento da Educação

GPFP – Grupo de Pesquisa sobre Formação de Professores

GTD – Grupo de Trabalho Docente

HTPC – Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais

MMM – Movimento da Matemática Moderna

PCN – Parâmetro Curricular Nacional

PEC – Programa de Educação Continuada

PROMAT – Projeto Oficina de Matemática

SEE-SP – Secretaria de Educação do Estado de São Paulo

TIC – Tecnologias de Informação e Comunicação

UNESCO – Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e a Cultura

UNESP – Universidade Estadual Paulista

RESUMO

Neste trabalho investigamos as potencialidades didático-pedagógicas do jogo Tri-Hex e suas variações, enquanto produtor/revelador de conceitos geométricos em ambiente de formação continuada. A construção do jogo de Configuração Simples, uma adaptação ao Tri-Hex, pode ser utilizada como alternativa para trabalhar conceitos da Geometria Euclidiana em níveis variados de ensino. Nessa investigação realizamos entrevistas e oficinas com professores de matemática da Rede Pública Estadual, focando preferencialmente pontos notáveis do triângulo e sua determinação. Numa abordagem lúdica, introduzimos o conceito de ceviana e a propriedade da concorrência empregando o Teorema de Ceva. Analisando os dados, obtivemos dois focos: Criação de Material Didático e Colaboração do Professor. Este último com quatro blocos: geometria na formação inicial e continuada do professor; utilização de material na prática pedagógica; oficina e participação do professor; condições do trabalho docente. A pesquisa permitiu associar as deficiências do ensino de geometria aos problemas da formação inicial. Percebemos que, para os professores, o jogo constitui uma atividade lúdica embora reconheçam suas potencialidades didáticas. Evidenciou-se o papel do professor gestor e o valor da prática investigativa compartilhando dificuldades e avanços. Concluímos, também, que problemas relacionados à má remuneração e às condições de trabalho influenciam no investimento do professor em sua formação.

Palavras-Chave: Jogo. Matemática. Geometria. Aprendizagem. Formação Continuada.

ABSTRACT

In this work we investigated the didactic-pedagogic potentialities of the game Tri-Hex and your variations, while produtor/revelador of geometric concepts in atmosphere of continuous formation. The construction of the game of Simple Configuration, an adaptation to Tri-Hex, it can be used as alternative to work concepts of the Geometria Euclidiana in varied levels of teaching. In that investigation we accomplished interviews and workshops with teachers of mathematics of the State Public Net, focando preferencialmente notable points of the triangle and your determination. In an approach lúdica, we introduced the ceviana concept and the property of the competition using the Theorem of it Fattens. Analyzing the data, we obtained two focuses: Creation of Didactic Material and Collaboration of the Teacher. This last one with four blocks: geometry in the teacher's initial and continuous formation; material use in practice pedagogic; workshop and the teacher's participation; conditions of the educational work. The research allowed to associate the deficiencies of the geometry teaching to the problems of the initial formation. We noticed that, for the teachers, the game constitutes an activity lúdica although they recognize your didactic potentialities. It was evidenced the teacher manager's paper and the value of the practice investigativa sharing difficulties and progresses. We ended, also, that problems related to the bad remuneration and to the work conditions they influence in the teacher's investment in your formation.

Key-words: Game. Mathematics. Geometry. Learning. Continuous formation.

INTRODUÇÃO

Apesar das transformações econômicas e tecnológicas atuais, a sua influência sobre a cultura e a educação transcorre de forma bastante lenta. Embora a “modernização” no Brasil tenha acontecido de forma surpreendentemente rápida, ela não se fez acompanhar da construção de uma consciência que atingisse a prática do professor em sala de aula.

De acordo com os PCNs, a sociedade brasileira demanda uma educação de qualidade, que garanta uma aprendizagem essencial à formação de cidadãos autônomos, críticos e participativos, capazes de atuar com competência, dignidade e responsabilidade na sociedade em que vivem e na qual esperam ser atendidas suas necessidades individuais, sociais, políticas e econômicas.

Para que isso ocorra, é necessário que haja mudanças. Mudanças em todo o processo educativo, desde a conscientização da família para enviar seus filhos à escola até a metodologia utilizada pelos professores.

Estudos sobre a formação de professores vêem apontando que nesse processo ainda persiste uma dissociação entre a formação e a prática cotidiana, e que a questão dos saberes que são mobilizados na prática, ou seja, os saberes da experiência também são pouco explorados.

Sabe-se, entretanto que esses saberes, adquiridos durante a ação do professor na sala de aula, são importantes e necessitam ganhar mais espaço nos processos de formação continuada. Sem desconsiderar a formação inicial como a base do processo de formação do professor, entendemos que a formação continuada pode contribuir para a elevação da preparação científico-pedagógica e de acordo com Georgen e Saviani (1998), as formas de atualizações existentes – cursos de atualização e aperfeiçoamento, auto-superação, ´treinamentos´ − devem ser transformadas em partes integrantes das práticas e decisões pedagógicas do professor. É também o que aborda Libâneo (1999, p. 82), quando “critica a rigidez curricular e metodológica dos cursos de formação e o desligamento da prática”, evidenciando mais uma vez a questão da prática sendo construída distante da formação.

É importante que o professor considere que nem todas as pessoas têm os mesmos interesses ou habilidades, nem aprendem da mesma maneira, o que exige uma atenção especial, para que todos possam se integrar no processo de aprendizagem. Assim, a partir do reconhecimento das diferenças existentes entre os alunos, a escola irá potencializar a capacidade de ordem cognitiva, afetiva, física, ética, estética e as de relação interpessoal e de inserção social dos mesmos, ajustando sua maneira de selecionar e tratar os conteúdos, de modo a auxiliá-los a desenvolver suas possibilidades ao longo do Ensino Fundamental e Médio.

Como surgiu o interesse pela pesquisa

Trabalhamos na Faculdade de Tecnologia de Taquaritinga desde 1994, na qualidade de Auxiliar Docente, atuando nas aulas práticas ministradas no Laboratório de Informática para turmas do Curso de Processamento de Dados e Produção Industrial. Nesse ambiente acadêmico, nosso maior interesse estava voltado para as disciplinas de Fundamentos da Matemática, Cálculo Diferencial e Integral e Estatística.

No mesmo ano, começamos a cursar Licenciatura em Matemática e acreditávamos que a formação recebida deveria suprir nossas necessidades enquanto profissional. Buscávamos respostas para nossas inquietações em livros, cursos e eventos científicos.

Em 1998, após a conclusão da graduação, tivemos algumas experiências como professora da rede pública e particular, mas ainda vivenciávamos uma angústia freqüentemente característica dos professores em início de carreira, decorrente de um período de formação que, na maioria das vezes, não é suficiente para disponibilizar todos os conteúdos necessários.

A partir de 1999, começamos nosso primeiro contato com alguns cursos de pós-graduação de algumas Universidades Estaduais. Dentre eles, o programa que melhor atendeu a nossas expectativas e que se mostrou comprometido especificamente com a área de Matemática foi o da UNESP - Rio Claro. A decisão de freqüentar a Pós-Graduação em Educação Matemática na UNESP - Rio Claro, veio da necessidade de embasamento teórico capaz de transformar nossas práticas tradicionais em procedimentos que propiciassem uma participação ativa de professores e alunos no processo de construção do conhecimento. Assim, em 2000 ingressamos nesse programa, como aluna especial. Nesse ambiente encontramos um amplo campo de investigação e de ação da Educação Matemática.

Simultaneamente, desempenhando o papel de professora multiplicadora, colaboramos com a Diretoria Regional de Ensino de Taquaritinga-DERT, em parceria com a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo-SEE-SP e a Fundação para o Desenvolvimento da Educação-FDE, no Programa de Educação Continuada-PEC para professores de Matemática do Ensino Fundamental, em oficinas realizadas nos pólos de tecnologia regional.

Aliado a esse projeto pessoal, a produção acadêmica vinha indicando a formação continuada e o uso de materiais concretos como uma possibilidade de viabilizar o desenvolvimento profissional docente e conseqüentemente suprir algumas das deficiências da formação inicial.

A experiência adquirida no PEC juntamente com os subsídios oferecidos pelas disciplinas, em especial “A Utilização da Informática na Educação Matemática”, ministrada pela Profª. Drª Mirian Godoy Penteado, resultou na publicação do artigo “A Formação Continuada de Professores na Era da Tecnologia”. A produção do artigo possibilitou uma reflexão mais acentuada nessa temática e corroborou a nossa decisão de contribuir para a formação de professor através da utilização de novas mídias, neste caso os jogos.

Formulação do problema

As inúmeras e valiosas discussões travadas com os professores de todas as outras disciplinas foram também de grande relevância para essa busca que travamos, em especial a presença do Prof. Dr. Geraldo Perez, que não permitiu, em momento algum, que desistíssemos dos nossos sonhos e a Profª Drª Laurizete Ferragut Passos que abraçou a causa corajosamente e hoje orienta o nosso projeto juntamente com o Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa, nosso co-orientador.

Vale destacar que durante nosso trabalho junto ao PEC, os professores tinham que desenvolver um projeto aplicado à sala de aula. A partir dessa experiência e analisando os projetos desenvolvidos, percebemos que dentre as atividades abordadas nos projetos, as que mais se destacavam e que exerciam maior ação sobre os alunos eram as que utilizavam jogos.

Importante foi o papel da universidade nesse momento, por meio da nossa participação no Grupo de Pesquisa sobre Formação de Professores – GPFP, que vinha confirmando o trabalho de pesquisa e a nossa questão foi sendo construída no decorrer desse percurso.

Assim, o primeiro passo concretizado foi quando iniciamos uma pesquisa sobre um jogo conhecido por Tri-Hex, normalmente utilizado em atividades lúdicas educacionais no ensino americano. No desenvolvimento de estratégias para os jogos, o aluno envolve-se com o levantamento de hipóteses e conjecturas, fundamental para o pensamento científico e lógico-matemático. Nas práticas com jogos, nos cursos de formação de professores, notávamos que os jogos facilitavam a visualização e a compreensão do problema, até mesmo para chegar a sua solução.

Nesse contexto, podemos enunciar a pergunta de pesquisa:

Quais são as potencialidades didático-pedagógicas do jogo Tri-Hex e suas variações, enquanto produtor e revelador de conceitos matemáticos/geométricos, investigados em um ambiente de formação continuada?

A alternativa de utilizar jogos educacionais como atividade pedagógica para o ensino de geometria, na formação continuada de professores do Ensino Fundamental, alavanca o que antes estava estacionado.

> Nesse sentido, a Geometria desempenha um papel primordial no ensino da Matemática, pois a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência. Assim sendo, poderia auxiliar o alcance dessa formação; para que tal fato ocorra, caberia aos professores a grande responsabilidade de viabilizar esse processo por meio de metodologias alternativas. (MISKULIN, 1994, p.36)

O estímulo provocado pelos jogos e a intervenção pedagógica dos professores, favorecem a construção de situações de aprendizagem voltadas para atividades nas quais os alunos aplicam processos que sejam fundamentais para o desenvolvimento do conhecimento. No início desse trabalho, talvez por excessivo entusiasmo e pelas inúmeras possibilidades proporcionadas com o uso dos jogos, esperávamos uma reviravolta na aceitação de uma nova proposta pelos professores. Contudo, constatamos, no decorrer desta pesquisa, que o professor da rede pública de ensino está desestimulado por vários fatores, e dessa forma, existe dificuldade na aceitação e utilização dos jogos.

Como descreve Emerique (1999), o jogo não é nenhuma fórmula mágica. Concordando com o autor, temos consciência de que o jogo em si não vai resolver todos os problemas da educação, mas certamente pode ser um poderoso instrumento de trabalho, que aliado a outros, visa proporcionar maior facilidade no aprendizado.

Justificativa

O presente projeto justifica-se pela importância e influência marcante dos jogos no processo de ensino-aprendizagem verificados no decorrer da nossa trajetória profissional e acadêmica. O conteúdo programático da geometria foi escolhido por se articular com outros blocos da Matemática, por favorecer o desenvolvimento de habilidades e, o que ficou mais evidente, por ser pouco valorizado nas escolas públicas.

Encontramos o jogo Tri-Hex, criado por Thomas H. O´Beirne, nas obras de Gardner (1985 e 1991) e posteriormente em Borin (1996), o que nos levou a consultar a obra de Beirne (1984). O jogo de Beirne publicado também na *New SCientist* (1962), sob o título Tri-Hex, utiliza um tabuleiro de configuração constituída de nove linhas e três células por linha, onde cada um dos dois jogadores busca alinhar três células com suas marcas.

Contudo, a configuração do jogo na forma proposta não possibilita a introdução e desenvolvimento de novos conceitos e propriedades de temas da geometria euclidiana. Diante dessa constatação, nossa pesquisa teve como meta inicial encontrar configurações para o jogo de Beirne que permitissem abordar esse tema.

Para tanto, propõe-se como objetivos:

1. Transformar o Jogo Tri-Hex de Thomas H. O´Beirne em jogo pedagógico, denominado Jogo de Configuração Simples, como uma metodologia alternativa a ser utilizada em sala de aula pelos professores e que possibilite o ensino-aprendizagem, e/ou fixação, de conceitos e propriedades de alguns temas da geometria euclidiana e,
2. Validar o jogo Tri-Hex e suas variações enquanto instrumento didático-pedagógico para o ensino da Geometria, por professores inseridos em um ambiente de formação continuada – oficina de produção de material pedagógico.

Para o desenvolvimento da pesquisa, propomos estruturá-la com a introdução e três capítulos.

Na Introdução, contextualizamos a importância da formação do professor e a necessidade de integrar ao processo educativo as novas metodologias, reconhecendo as potencialidades individuais dos alunos, e definimos a justificativa, os objetivos e a nossa pergunta de pesquisa.

No primeiro capítulo, Referencial Teórico, abordamos aspectos importantes da formação do professor de Matemática no que diz respeito ao investimento pessoal e a construção de uma identidade diante da diversidade da sociedade. Nesse contexto, surge o trabalho através de jogos e a exploração de conteúdos matemáticos.

O segundo capítulo, Procedimentos Metodológicos, é composto pela descrição detalhada da metodologia utilizada para fundamentar o tema e especificar os procedimentos para a coleta de dados e posterior análise.

O terceiro capítulo, Explorando Matematicamente o Tabuleiro do Tri-Hex e suas Variações, contempla um detalhado estudo sobre a adaptação do tabuleiro do Jogo Tri-Hex e suas potencialidades para explorar determinados temas da matemática, em especial as cevianas.

O quarto capítulo, Análise dos Dados, contém uma discussão e a análise dos dados obtidos nas atividades com os professores, a fim de se responder à pergunta de pesquisa. Nessa análise, procuramos percorrer um eixo construído pelos relatos de experiência, relacionando as vivências com a fundamentação teórica, especialmente a geometria na formação inicial e continuada de professores, a prática docente e a utilização de materiais pedagógicos.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

Os tempos atuais exigem do professor uma postura diferente do passado. Para responder a essas exigências, ele precisa estar em constante formação pessoal e atualização de seus conhecimentos, além de desenvolver a capacidade de analisar a educação como um compromisso político repleto de valores éticos e morais, considerando sempre o desenvolvimento integral da pessoa.

1.1 Formação de professores de Matemática

A representação da tarefa educativa construída durante a formação inicial, freqüentemente assombra o professor com a difícil realidade do exercício da vida cotidiana da escola e da sala de aula.

> Aprender a ser professor, nesse contexto, não é, portanto, tarefa que se conclua após estudos de um aparato de conteúdo e técnica de transmissão deles. É uma aprendizagem que deve se dar por meio de situações práticas que sejam efetivamente problemáticas, o que exige o desenvolvimento de uma prática reflexiva competente. Exige ainda que além de conhecimentos, sejam trabalhadas atitudes, as quais são consideradas tão importantes quanto os conhecimentos. (MIZUKAMI et al., 2003, p.12)

Entendemos a formação de professores como um processo de desenvolvimento para toda vida, o que inclui a formação inicial e continuada, ou seja, formação permanente.

> A formação permanente tem como uma de suas funções questionar ou legitimar o conhecimento profissional posto em prática. A formação permanente tem o papel de descobrir a teoria para ordená-la, fundamentá-la, revisá-la e combatê-la, se for preciso. Seu objetivo é remover o sentido pedagógico comum, a fim de recompor o equilíbrio entre os esquemas práticos e os esquemas teóricos que sustentam a prática educativa. (MIZUKAMI et al., 2003, p.15, citando IMBERNÓN, 2000)

É importante considerar o processo de reflexão na formação de professores quando se torna possível uma prática crítica, inovadora e transformadora, que passa a se impor como condição construtiva da vida e da profissão docente.

Concordamos com Marin (2000, p.13), quando ela associa o conceito de formação de professores

> à idéia de inconclusão do homem; identifica-se a formação com percurso, processo – trajetória de vida pessoal e profissional, que implica opções, remete à necessidade de construção de patamares cada vez mais avançados de saber-ser, saber-fazer, fazendo-se.

Portanto, relacionando a formação de professores com o desenvolvimento pessoal e profissional decorre que a formação acontece de maneira indissociável da experiência de vida.

> A própria noção de desenvolvimento já supõe uma noção de evolução e continuidade e, em se tratando de uma formação para a mudança do profissional professor e de sua prática, a perspectiva de superação do caráter tradicionalmente individualista, mecânico e estático que tem permeado a sua formação, precisa ser revisto. (PASSOS, 1997, p. 18)

Do mesmo modo, Marin (2000) considera que a formação do professor é um processo que não se finaliza com a formação inicial; ao contrário, impõe-se, como indispensável, à formação continuada em que as práticas profissionais se tornam o terreno da formação.

A formação inicial fornece base para a constituição do conhecimento pedagógico especializado para o início da profissionalização, que segundo Veenman (1998) in Mizukami et al. (2003), é condição necessária, mas não suficiente em si mesma, para conseguir melhores professores. Ela é capaz de proporcionar, portanto, uma boa fundamentação, a fim de prepará-los para atuar na profissão.

A maior parte dos conhecimentos que os docentes recebem nos cursos de formação inicial ou permanente, ainda que possam estar mais ou menos legitimados academicamente, não foram produzidos nem legitimados pela prática docente.

Ser professor é um processo complexo, que envolve a formação integral da pessoa, seja no aspecto intelectual, social, moral, emocional e físico. É importante questionar as visões simplistas sobre a formação dos professores e compreender a necessidade de uma preparação rigorosa para garantir uma docência de qualidade, tarefa difícil, em função das limitações dos cursos e ainda do tempo da formação inicial.

Procurar cumprir as exigências de formação no período inicial conduziria ao prolongamento dos cursos ou a um tratamento superficial dos conteúdos. Por outro lado, muitos dos problemas do processo de ensino-aprendizagem não adquirem sentido até que o professor os tenha enfrentado em sua prática docente. O estabelecimento de uma estrutura de formação continuada poderia minorar os problemas apontados.

A formação de professores não se esgota no curso de formação inicial e deve ser pensada, conforme Caldeira (1993), como um processo, que como tal não se esgota também em um curso de atualização, mesmo considerando situações que acontecem na escola em que o professor trabalha, local privilegiado de reflexão pedagógica. As propostas de formação continuada são freqüentemente concretizadas por meio de cursos, conferências, seminários e outras situações pontuais nas quais os docentes desempenham o papel de ouvintes e ainda se desconhece que eles têm muito a contribuir e não só a aprender.

Zeichner (1993, p.21) critica a concepção tradicional de formação e de trabalho docente, baseada na "racionalidade técnica", que concebe o professor como aquele que deve "aplicar a teoria produzida nas universidades à sua prática na escola".

Entende-se, assim, que a formação do professor em serviço se construa no cotidiano escolar de forma constante e contínua.

Portanto, cursos de formação continuada têm tido o papel, entre nós, não só de garantir a atualização dos professores, como também de suprir deficiências dos cursos de formação.

Algumas condições que podem aumentar a possibilidade de êxito dos cursos de formação continuada de professores é a participação voluntária, uso de material de apoio e relação entre conteúdo e prática. Atualmente, considera-se necessário que esses cursos tratem de maneira especial os conteúdos específicos, garantindo a atualização dos conhecimentos dos professores em determinadas áreas. Para que isso ocorra, é preciso conhecer a teoria, passar pelos seus processos de construção, incorporá-la, e discutir como deve ser transmitida a outro nível de ensino, para os alunos com idades e experiências diversas.

E mesmo assim, muitas vezes, segundo Perez (2004), eventos inesperados e interrupções variadas podem, por sua vez, mudar igualmente a condução do processo instrucional, visto que nem sempre as aulas saem de acordo como o planejado.

> Os professores lidam diariamente com situações complexas e considerando o ritmo acelerado das atividades e as múltiplas variáveis em interação, há pouca oportunidade para que eles possam refletir sobre os problemas e trazer conhecimentos à tona para analisá-los e interpretá-los. Aprender a ensinar constitui, assim, um processo que perpassa toda a trajetória profissional dos professores, mesmo após a consolidação profissional. (PEREZ, 2004, p. 260)

Um ponto a ser destacado refere-se aos dados resultantes do SAEB − Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica − quando avalia o ensino da Matemática. Essa avaliação está centrada nas seguintes habilidades: a capacidade do estudante para resolver problemas utilizando-se dos conceitos e das operações, tais como aritmética, geometria, grandezas e medidas, e noções de estatística, em graus de dificuldades pertinentes a cada série. Os dados resultantes dessa avaliação podem ser de grande valia como indicadores para nortear as estratégias na formação de professores.

O processo de formação de professores efetivamente funcionaria se fosse promovido no contexto do ambiente escolar, a união dos professores de Matemática através de projetos de trabalho com conteúdos específicos a cada série ou ciclo.

Esses conteúdos poderiam ser levantados a partir das experiências do grupo em relação às próprias dificuldades apresentadas pelos alunos ao longo da carreira docente, haja vista que o professor é detentor desse conhecimento.

> Estar em formação implica um investimento pessoal, um trabalho livre e criativo sobre os percursos e os projectos próprios, com vista à construção de uma identidade, que é também uma identidade profissional. (NÓVOA, 1992, p.25)

Defendemos que poderiam ser fomentados pela direção e coordenação da escola, ou ainda incentivados pelos órgãos competentes, grupos de trabalho de professores, no interior da escola, o que tornaria mais adequada a própria construção de materiais concretos.

> A formação não se constrói por acumulação (de cursos, de conhecimentos ou técnicas), mas sim através de um trabalho de reflexividade crítica sobre as práticas e de (re)construção permanente de uma identidade pessoal. Por isso é tão importante investir *na pessoa* e dar um estatuto ao *saber da experiência.* (NÓVOA, 1992, p.25)

As Diretorias de Ensino e as Universidades podem desenvolver um trabalho conjunto no sentido de fomentar estudos e pesquisas que ofereçam oportunidades para que os professores colaborem no planejamento e construção dos cursos de capacitação, tomando como referência as necessidades dos professores e fazendo uso das suas experiências de sala de aula. Para subsidiar a questão da análise de necessidades na formação de professores, contamos com o auxílio de um estudo português, em que se afirma que

> existe uma convicção muito generalizada, fundamentada em alguma investigação empírica, de que a eficácia das acções de formação contínua, seja de professores, seja de outros trabalhadores, está associada, entre outros aspectos, ao nível de envolvimento e de participação destes em todas as fases da actividade formativa, desde o momento da análise de necessidades e da formulação de objectivos de um dado programa até à sua concretização e avaliação. (RODRIGUES; ESTEVES, 1993, p. 53)

A importância dos grupos de trabalho docente no interior das escolas, reside na possibilidade de compreender o sujeito como um todo, no desenvolvimento de um processo de formação que se dá de forma interativa e dinâmica, aspectos esses com que Nóvoa (1992) caracteriza as redes de (auto) formação participada. Segundo ele, a troca de experiências e a partilha de saberes consolidam espaços de formação mútua, nos quais cada professor desempenha o papel de formador e de formando.

Iniciativas de formação continuada podem ser úteis, inclusive, para a aquisição de metodologias e técnicas emergentes e também quando se faz necessário socializar experiências inovadoras adquiridas ou vividas pelos integrantes do grupo.

Nossa busca é tentar compreender, nesse momento, as exigências da formação de professores de Matemática, discutindo questões que possam contribuir para uma melhor conscientização das suas necessidades práticas e teóricas.

Para Moura (1995, p.21),

> a consciência do papel do conteúdo e do conjunto de estratégias que poderão ser adotadas de modo a contribuir com a formação dos educadores é certamente uma competência a ser adquirida pelo educador matemático nos seus centros de formação.

O conhecimento é algo que está em constante transformação e esse educador matemático deve ter consciência de que sua formação depende da busca constante de novos empreendimentos para uma melhor prática educativa.

> A inquestionável transformação nas relações de trabalho promovidas pelos novos meios de produção nos dá a certeza de que os nossos métodos de formação devem ser repensados. Devemos repensar inclusive os espaços de formação que temos visto como absolutamente normais. Numa realidade complexa as fontes de informação são enormemente diversificadas, e deste modo são também diferenciadas as formas dos sujeitos adquirirem competências em Matemática. Visto assim, tornam-se incontáveis os espaços onde se aprende e se ensina Matemática. (MOURA, 1995, p.22)

Os cursos de Licenciatura, na tentativa de minimizar o número de professores despreparados em relação a alguns conteúdos de Matemática, deveriam redimensionar o papel do professor no que diz respeito ao uso de materiais de ensino.

Essa falta de preparação poderia ser sanada se houvesse uma maior integração entre as Universidades e a Escola Pública, procurando de todas as maneiras realizar estudos e pesquisas que concatenassem a dedicação dos pesquisadores e a experiência dos professores.

> Nesse sentido, a Universidade pode promover a integração dos conhecimentos derivados das ciências básicas e das ciências aplicadas na prática dos professores. No entanto, há de se considerar que na prática da sala de aula as situações são únicas, muitas vezes conflituosas, problemáticas e, portanto, é necessário um cuidado para que a integração não se transforme em uma atividade técnica de aplicação direta e rígida de suas produções. (PASSOS, 1997, p. 29)

Inevitavelmente, esse trabalho em equipe precisa considerar os conhecimentos e experiências dos pesquisadores e professores, de modo a ocorrer a proposição de projetos que sejam ao mesmo tempo inovadores e factíveis. Um esforço conjunto que considere as diversas opiniões pode contribuir para que ocorram sensíveis progressos no campo da educação. A reflexão sistemática e o acompanhamento dos projetos postos em execução são de vital importância para que os projetos sejam avaliados (*feedback*), realimentados e se necessário redimensionados.

Nesta pesquisa, a nossa proposta é verificar as potencialidades didático-pedagógicas de jogos junto a professores de Matemática, em parceria Universidade x Escola, apresentando e discutindo um novo material que visa contribuir com o ensino de geometria. Essa parceria deve chamar o professor para discutir, dar sua opinião e validar ou não um instrumento a ser trabalhado por ele na sala de aula. Dessa forma, pretende-se que essa relação, que se dá em parceria, não se traduza pela simples utilização mecânica do material, voltada para o ensino da geometria.

No contexto da formação de professores de Matemática é visível o descaso do ensino da geometria entre os professores de Matemática da rede pública, como também uma inquietação em relação a ele. Há, entre os professores, sempre um grupo determinado a ensinar geometria, seja por definição em planejamento escolar ou por seguirem o livro didático, o que é realizado no final do ano letivo em sua respectiva sala de aula. A justificativa dada para o não cumprimento do programa de geometria é, em geral, a falta de tempo.

> A maioria dos alunos do 1º grau deixa de aprender geometria, pois os professores das séries iniciais limitam-se, em geral, a trabalhar somente a aritmética e as noções de conjunto. O estudo de geometria passa a ser feito – quando não é eliminado – apenas no 2º grau, com o agravante de que os alunos apresentam uma dificuldade ainda maior em lidar com as figuras geométricas e sua representação porque o Desenho Geométrico é substituído, nos dois graus do ensino, pela Educação Artística. (PAVANELLO, 1993, p.13)

Pavanello (1993) aborda também a dualidade tradicional entre a escola particular, onde se ensina geometria e a escola pública, onde não se ensina geometria.

Segundo Perez (1991), em sua pesquisa com escolas de periferia, o ensino de geometria é quase totalmente nulo nessas escolas, mesmo tendo alunos residentes nas imediações possuindo um rico conhecimento extra-escolar.

A ausência do ensino de geometria e a ênfase no ensino de álgebra, mesmo que o professor acredite que isto trará muito mais proveito para a vida do aluno, pode privá-lo da possibilidade de desenvolvimento de processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos.

Pavanello (1989) ressalta que os motivos que teriam levado os matemáticos a não enfatizar o ensino da geometria – basicamente a euclidiana – nos diferentes graus de ensino, concentram-se em torno de questões relacionadas ao rigor e à visualização.

Apesar do grande interesse dos professores em aprimorar seus conhecimentos de geometria, participando de cursos de capacitação, no final, a prática acaba sendo outra.

De acordo com a pesquisa bibliográfica, notamos um crescente interesse em pesquisadores em relação ao ensino da geometria. Trabalhos publicados mostram a atenção de autores em relação à identificação de problemas, bem como a preocupação de, além de identificar, fazer sugestões para a superação das dificuldades.

Pereira (2001), em seu estudo sobre o abandono da geometria nos currículos do ensino fundamental e médio, baseando-se na literatura produzida nos últimos vinte anos, aponta de forma panorâmica o distanciamento da geometria nas escolas, cujos reflexos interferem nos saberes dos professores em atuação. Ainda afirma que os conteúdos que não foram aprendidos pelos professores também não serão sequer transmitidos, quanto mais interagidos – originando um círculo vicioso – que afeta, por conseguinte, gerações de alunos que não aprendem geometria.

Entretanto, Vianna (1988) justifica o abandono da geometria à falta de tempo para ensinar esse conteúdo, e traz como "proposta alternativa de ensino, não para ser aplicada diretamente em sala de aula, mas direcionada ao professor a fim de convencê-lo sobre a importância do papel do raciocínio dedutivo, tomando o ensino de geometria como lugar privilegiado para o desenvolvimento dessa habilidade cognitiva." (p.14)

Bertonha (1989) vem corroborar com Vianna (1988), quando, no acompanhamento que fez sobre o ensino de geometria no Brasil, verifica que os tópicos referentes ao seu ensino são programados para o final do ano letivo.

Lembramos que o material utilizado pelo professor na sala de aula são basicamente os livros didáticos. Esses livros atualmente já vêm articulando os conteúdos de geometria ao longo de sua proposta pedagógica. O que ocorre é que, mesmo assim, os professores acabam distorcendo essa proposta, deixando o conteúdo de geometria para o final, e justificando "falta de tempo" para o não cumprimento total do programa.

Pavanello (1989) em sua pesquisa apresenta um histórico, bastante completo, sobre o desaparecimento do ensino da geometria do currículo das escolas. A autora lembra que na década de 60, início do Movimento da Matemática Moderna - MMM, tentando axiomatizar a geometria, buscou-se, por exemplo, o enfoque das transformações quando a maioria dos professores não dominava o assunto, ocasionando, por parte de muito deles, o distanciamento da geometria sobre qualquer enfoque. Ela observou ainda que a geometria passou a ocorrer, quando não era eliminada, apenas no ensino médio, e salienta sobre a necessidade de investimento em pesquisas que possa proporcionar novas metodologias aos professores para a melhoria da qualidade do ensino de geometria.

> (...) é preciso melhor formação e interesse dos professores de 1º e 2 graus, assim como dos próprios alunos do curso de graduação em Matemática, na Universidade. Este também é o pensamento dos próprios professores do 1º e 2º graus, que alegam constantemente deficiências em conteúdo e metodologia, com relação ao ensino da geometria. Deixam claro, todavia, que esse ensino, pela sua importância deve ser preservado no currículo escolar. (PEREZ, 1991, p.276)

Sangiacomo (1996) contribui com sua pesquisa, onde faz um trabalho com as dificuldades dos alunos em geometria, em se tratando de figuras geométricas, com o auxílio do *Cabri-Géomètre*.

Nesse mesmo aspecto, Gouvêa (1998) propõe uma reflexão didática sobre o ensino – aprendizagem da geometria como contribuição da prática pedagógica do professor de Matemática do ensino fundamental.

Já o trabalho de Mello (1999) consistiu em desenvolver uma alternativa metodológica para o ensino da geometria na 8ª série, com o objetivo de despertar no aluno o pensamento geométrico dedutivo. Na investigação com o aluno, a autora concluiu um provável abandono do ensino-aprendizagem das técnicas de demonstração da geometria no ensino fundamental. Acrescenta, ainda, que há necessidade de uma formação adequada do professor.

Em contrapartida, Passos (2000) estudando a prática pedagógica no CEFAM – Centro Específico de Formação de Magistério – constatou uma grande aversão, por parte dos futuros professores, que chegaram a afirmar que jamais ensinariam geometria. A autora também verificou, em curso de aperfeiçoamento para professores de 1ª a 4ª séries, o quanto o ensino de geometria tem sido displicente nessa faixa de escolarização. Sua pesquisa revelou que os professores pesquisados não trabalhavam os conceitos geométricos, considerados como os mais elementares no ensino fundamental, e que eram recomendados nas Propostas Curriculares de Matemática do Estado de São Paulo.

Assim, a alternativa de utilizar jogos educacionais como atividade pedagógica, estimula e é capaz de construir situações de aprendizagem, com características que propiciam atividades nas quais alunos e professores possam aplicar processos que sejam fundamentais para aprimorar seus conhecimentos em geometria.

1.2 Jogos

A discussão sobre o uso de jogos no processo educacional vem se acentuando recentemente, apesar dos mesmos já existirem há muito tempo. Essa discussão vem sendo impulsionada pelas tecnologias, especialmente no que se refere à utilização dos jogos computacionais como instrumento de trabalho em sala de aula.

O jogo é, potencialmente, um instrumento através do qual se pode articular certo conhecimento, dentro de uma determinada linha pedagógica. A definição dos meios que vamos ensinar já envolve a opção por uma metodologia, seja o computador, o quadro-negro ou as apostilas.

Embora os jogos educacionais estejam sendo encarados como se fosse uma novidade, na verdade eles já apareceram em outros momentos da história educacional. É claro que com formas de apresentação e abordagem metodológicas diferentes das atuais. De acordo com Kishimoto (2002a), Platão, por exemplo, introduziu o jogo movido pela preocupação de trabalhar a matemática no nível concreto, antes de chegar ao nível abstrato. Os romanos também usavam jogos com a finalidade de transmitir valores e costumes, e os jesuítas, que faziam jogos de emulação (rivalidade, competição) nas aulas, almejavam o aperfeiçoamento da capacidade oratória dos alunos. Havia sempre um estímulo para que as pessoas participassem dessa dinâmica. Comênio trouxe a questão das charadas, das adivinhações. .

Embora haja referências ao uso de jogos na educação ao longo da história antiga, são deste século as contribuições mais relevantes para o aparecimento de propostas de ensino que incorporam o uso de materiais pedagógicos. Apresentamos aqui, algumas delas:

- estabelecer relações entre suas ações e as conseqüências resultantes;
- permitir antecipações de ações e propiciar a análise dos resultados das ações praticadas;
- desenvolver o planejamento seqüencial de ações;
- desenvolver ações coordenadas perceptivo-motoras;
- construir conceitos como: ordenação, seriação, classificação, quantificação, conservação, espaço-tempo;
- aguçar percepções e desenvolver a curiosidade;

- desenvolver a atenção, a concentração e a memória;
- aprender construindo habilidades através do entretenimento;
- propiciar a interação do aluno com a máquina através da possibilidade de controlar eventos e perceber o que diferentes decisões irão acarretar;
- desenvolver estilo cognitivo pessoal;
- atender as necessidades de convivência em grupo;
- fixar conceitos em seu próprio ritmo;
- tratar o erro de forma construtiva.

No âmbito desta pesquisa, voltamos nosso interesse para jogos que possam ser utilizados no ensino da Matemática.

Moura (1992) define que ao jogar, não só incorporamos regras socialmente estabelecidas, mas também criamos possibilidades de significados e desenvolvemos conceitos, justificando, assim, a adoção do jogo como elemento importante nas práticas pedagógicas. Existe ainda uma outra dimensão do jogo que certamente é o que tem sustentado o seu papel de destaque na escola até agora: a ludicidade. É utilizando o jogo numa perspectiva lúdica mediada pelo professor que se podem conseguir resgatar conteúdos matemáticos.

1.2.1 O jogo educativo

Embora seja apontado o século XVI como contexto em que surge o jogo educativo, os primeiros estudos em torno do mesmo situam-se em Roma e na Grécia antiga.

Kishimoto (2002a), quando faz referência a Platão, comenta a importância do "aprender brincando", em oposição à utilização da violência e da repressão. Da mesma forma, Aristóteles sugeriu, para a educação, o uso de jogos que imitassem atividades sérias, como forma de preparo para a vida. Mas, nessa época, ainda não se discutia o emprego do jogo como recurso para o ensino da leitura e do cálculo.

A prática dos ideais humanistas do Renascimento no século XVII provocou a expansão contínua de jogos didáticos e educativos. Os jogos de leitura, como também diversos jogos destinados às áreas de História, Geografia, Religião, Matemática, entre outros, foram amplamente utilizados.

O movimento científico do século XVIII diversificou os jogos que passaram por diversas inovações, chegando ao ponto de criar jogos voltados ao ensino de ciências para a realeza e aristocracia.

> Popularizam-se os jogos. Antes restritos à educação de príncipes e nobres, tornam-se posteriormente veículos de divulgação e crítica. Jogos de trilha contam glória dos reis, suas vidas e ações. Jogos de tabuleiro divulgam eventos históricos e servem como instrumento de doutrinação popular. (KISHIMOTO, 2002a, p.16)

Com o término da Revolução Francesa, início do século XIX, tivemos o aparecimento de materiais pedagógicos para a aquisição de conhecimentos. Mesmo que no passado já se podia observar a ligação entre jogo e aprendizagem, a idéia de jogo estava ainda muito associada à recreação, que se contrapunha à idéia do trabalho escolar.

Para Kishimoto (2002a), as divergências em torno do jogo educativo estão relacionadas à presença concomitante de duas funções: ludicidade e educação. Na função lúdica, o jogo propicia diversão, prazer e até o desprazer quando escolhido voluntariamente; na função educativa o jogo ensina qualquer coisa que complete o indivíduo em seu saber, seus conhecimentos e sua apreensão do mundo. O equilíbrio entre as duas funções é o objetivo do jogo educativo e o desequilíbrio torna-o apenas jogo; não há ensino.

> O jogo deve ser usado na educação matemática obedecendo a certos níveis de conhecimento dos alunos tidos como mais ou menos fixos. O material a ser distribuído para os alunos deve ter uma estruturação tal que lhes permita dar um salto na compreensão dos conceitos matemáticos. (MOURA, 2001, p.78)

Qualquer jogo empregado pela escola pode ter caráter educativo, se permitir livre exploração de conteúdos gerais em salas de aula com a participação do professor, ou a aplicação em atividades orientadas para conteúdos específicos.

1.2.2 O jogo como ferramenta para aprendizagem da matemática

A idéia central de se utilizar jogos na sala de aula parte do princípio da dificuldade do professor em ensinar matemática em salas numerosas da rede pública, principalmente no ensino noturno que se registra um número significativo de evasão após o intervalo. Constata-se esse fato na maioria das escolas estaduais e certamente novas propostas pedagógicas e curriculares, materiais diferenciados que possam vir a auxiliar no processo de ensino-aprendizagem poderiam contribuir para atender a essa demanda.

Para Grando (2000, p.15):

> (...) a organização de uma sociedade mais justa, unida, capaz de defender seus direitos e cumprir seus deveres, depende dos cidadãos que a constituem. É preciso conscientizar futuros professores de matemática de que, mais importante que “ensinar matemática”, é formar cidadãos que sejam capazes de se expressar matematicamente, que saibam criar e manipular conceitos matemáticos segundo suas necessidades atuais, de vida, em sociedade.

Numa sociedade em constante transformação é necessário que o professor participe desse processo evolutivo do conhecimento e permita que seus alunos tenham a oportunidade de ampliarem seu universo.

Nesse aspecto, evidencia-se a necessidade da criação de situações competitivas nas atividades de ensino, que possam ser desencadeadas ludicamente, beneficiando a aprendizagem matemática, buscando assim alternativas para os problemas de ensino através do uso de jogos em sala de aula, indo além da definição que tradicionalmente considera o jogo como sendo diferente de uma situação de trabalho.

> (...) a escola pode assimilar a dimensão lúdica do jogo como importante auxiliar do ensino. Definimos jogo pedagógico como aquele adotado **intencionalmente** de modo a permitir tanto o desenvolvimento de um conceito matemático novo como a aplicação de outro já dominado. (MOURA, 1992, p.53)

Dessa forma, aproximamos o ensino da matemática através dos jogos, que de acordo com Moura (2001) o jogo, na educação matemática, passa a ter caráter de material de ensino quando considerado promotor de aprendizagem. Diante de situações lúdicas, é entendida a lógica de modo que se aprende a matemática presente.

A denominação geral de jogo educativo dado por Kishimoto (1994) considera que qualquer jogo empregado na escola, desde que respeite a natureza do ato lúdico, apresenta caráter educativo.

Evidencia-se que o jogo representa uma atividade lúdica, que envolve o desejo e o interesse do jogador pela própria ação do jogo, e mais, envolve competição e desafio, que motivam o jogador a conhecer seus limites adquirindo confiança e coragem para se arriscar em busca da vitória.

Observamos em atividades práticas com jogos que a reação dos alunos é sempre de contentamento e grande satisfação. O interesse pelo material do jogo, pelas regras, pelo desafio estimula e prende os alunos na atividade de tal forma que, de acordo com alguns professores, garante a aprendizagem; entretanto é necessário um processo de intervenção pedagógica.

O jogo educativo exige que sua utilização seja programada e, sendo assim, requer um planejamento que permita a aprendizagem de conceitos matemáticos e culturais.

De acordo com seus estudos e experiências, Grando (2000) sintetiza algumas contribuições considerando as vantagens e desvantagens da inserção dos jogos no contexto de ensino-aprendizagem:

- Vantagens:
    - fixação de conceitos;
    - introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão;
    - desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas;
    - aprender a tomar decisões e saber avaliá-las;
    - significação de conceitos;
    - interdisciplinaridade;
    - incentiva a participação ativa do aluno na construção do conhecimento;
    - socialização e trabalho em equipe;
    - motivação, criatividade, senso crítico, competição, observação, prazer em aprender;
    - reforçar e recuperar habilidades;
    - identificar, diagnosticar erros de aprendizagem, de atitudes e as dificuldades dos alunos.
- Desvantagens:
    - jogo pelo jogo, quando os jogos são mal utilizados, os alunos não sabem por que jogam;
    - muito tempo gasto com atividades de jogos sacrificando outros conteúdos pela falta de tempo;

- falsas concepções de que se deve ensinar todos os conteúdos através dos jogos;
- perda da "ludicidade" dos jogos pela interferência constante do professor;
- exigência que o aluno jogue, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo;
- dificuldade de acesso ao material sobre uso de jogos que possam vir a subsidiar o trabalho docente.

Essas considerações são muito importantes para o processo de ensino e de aprendizagem quando se optar pela utilização de jogos. Nesse sentido, deve estar bem claro para o professor e amplamente discutido com os seus pares, o objetivo da utilização dos jogos, de modo a contemplar também a interdisciplinaridade para um ensino voltado para a aprendizagem.

> O jogo é uma situação privilegiada afetiva, social e cognitivamente; não pode ser imposto nem dele se exigir resultados; no entanto, é ordem e cria ordem, pois aponta para os limites a serem aceitos ou superados; pode diminuir resistências, pois rompe com a rigidez, com o autoritarismo, o controle e o mando, democratizando as relações; não se confunde com fetiches metodológicos, fórmulas mágicas ou modismo; exige uma postura consistente e uma abertura para o risco, a ambivalência e o incerto; ao mesmo tempo, pode tornar reais o prazer da descoberta, o encantamento que seduz, a entrega ao novo. (EMERIQUE, 1999, p.195)

1.2.3 Jogos tipo trilha

A partir do jogo de Beirne, que constatamos não ser um jogo pedagógico, fizemos uma revisão na literatura sobre outros jogos tipo trilha que pudessem ser utilizados para o ensino de geometria. Na busca, pudemos identificar apenas jogos tipo trilha com aplicações para o estudo da aritmética. Essa constatação levou-nos a retomar o jogo de Beirne e adaptá-lo aos nossos propósitos.

De modo a disponibilizar um histórico sobre jogos e ainda contextualizar nossa busca no processo de criação de um novo jogo, consideramos importante documentar nossa pesquisa apresentando os dados que coletamos. A história dos Jogos de Trilha, abordados neste capítulo, foram extraídos principalmente da obra Os Melhores Jogos do Mundo (1978).

Os fenícios fizeram do Mediterrâneo o seu território através da navegação, onde percorreram também do Atlântico até o norte da Europa e contornaram a África, a serviço de um faraó egípcio. Aonde chegavam com seus navios, exibia um símbolo de seu poderio que era uma representação geopolítica do mundo, mundo este que haviam conquistado através da navegação. Era um símbolo simples, um tabuleiro quadrado que representava o mar, o seu extenso universo de conquistas. Uma casa no centro do tabuleiro simbolizava Tiro, a metrópole fenícia. As outras casas simétricas em torno do centro correspondiam às colônias, como Cádiz, na Espanha e Cartago, no norte da África.

Assim, surgiu o tabuleiro de trilha, um dos mais antigos do mundo, ainda parecidos com os atuais. Os primeiros tabuleiros consistiam de quadrados concêntricos, onde seus lados eram ligados por linhas medianas.

É considerado que o tabuleiro da trilha, por suas relações simbólicas e matemáticas, seria contemporâneo dos primeiros cálculos astronômicos realizados pelos egípcios. No Egito, o templo de Kurna, construído por volta de 1400 a.C., possuía um tabuleiro de trilha esculpido no teto. O diagrama da trilha também era conhecido entre os gregos, pois foi encontrado durante as escavações da primeira cidade de Tróia.

A presença da trilha também pode ser verificada nas regiões do norte da Europa. Na Irlanda um tabuleiro de trilha, esculpido em pedra, foi encontrado em um sítio arqueológico da Idade do Bronze, na localidade de Wicklow Country. Em Gokstad, na Noruega, um tabuleiro de trilha fazia parte de um tesouro funerário de um rei viking, morto por volta do ano 900.

O jogo fazia parte do Livro dos Jogos de Afonso X, rei de Leão e Castela, editado no século XIII, também citado no Talmud, livro sagrado da religião judaica e até mesmo na obra de Shakespeare, além das diversas referências nas obras literárias da Idade Média.

Na França, é conhecido como Jogo do Moinho, com origem no nome *Mérelles* e, também *Merils, Morell, Marelle*. Na Alemanha e em Portugal foi chamado de Moinho, denominação comum no Brasil. No Ceará e Rio Grande do Norte, é chamado Onça, Marella e Firo, denominação parecida com o nome da antiga capital fenícia.

Durante o século XIV, tabuleiros sofisticados já apresentavam um formato de uma caixa baixa com as tampas presas por dobradiças, da qual um lado era usado como tabuleiro de xadrez, o outro como tabuleiro de trilha e quando aberta o seu interior servia como tabuleiro de gamão.

O tabuleiro do jogo consistia na introdução de diagonais aos quadrados concêntricos, Figura 1, onde cada jogador possuía 9 peças de uma determinada cor, por exemplo preto e branco. As peças eram posicionadas alternadamente nos pontos de intersecção das linhas, até que todas tivessem sido posicionadas no tabuleiro. Então, cada jogador movia na sua vez uma de suas peças ao longo de uma linha, deslocando-a de um ponto (intersecção), até um outro que estivesse vazio. Não era permitido pular peças, portanto só poderia ser feito um movimento se houvesse um ponto vazio vizinho a uma das peças.

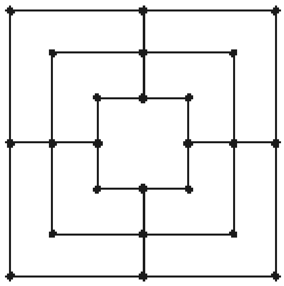


Figura 1: Tabuleiro do jogo Trilha

Quando um jogador conseguia realizar uma trilha, ou seja, alinhar três peças (em um segmento de reta no tabuleiro) ele podia retirar do tabuleiro uma peça de seu oponente. Esta peça não voltava mais para o jogo, lembrando que as peças que estivessem formando uma trilha não podiam ser retiradas, exceto ao final quando o oponente possuísse apenas uma trilha fechada.

Ganhava o jogo aquele que conseguisse reduzir o número de peças de seu oponente a duas, ou bloquear todas as peças dele de forma que não pudessem mais se movimentar.

Neste tipo de jogo, o posicionamento inicial era fundamental para o desempenho do jogador durante a fase de movimentação, a tal ponto que uma partida podia ser perdida ou ganha em função desse posicionamento estratégico.

Entre os ingleses, esse jogo tornou-se conhecido como *Morris*, provavelmente uma adaptação de um termo do francês medieval e suas peças chamadas de homens. Nessa mesma época, surgiu a versão de onze peças (*Eleven Men´s Morris*), levada pelos colonos ingleses para a América do Norte. Atualmente, as variantes mais comuns da trilha são as de nove peças ou de onze peças, pois a de cinco peças caiu em desuso após o século XV.

1.2.3.1 Jogo da Velha

O Jogo da Velha, segundo Gardner (1991), em uma de suas modalidades mais simples, possui um número de jogadas extremamente grande – “15120 (9x8x7x6x5) seqüências diferentes só para os cinco primeiros movimentos”. O total de possíveis jogadas até o final da partida é 362.880.

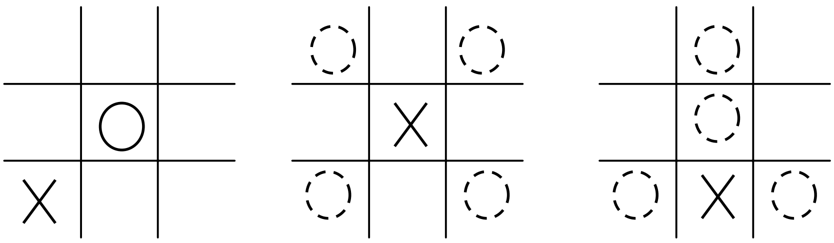
Seu número de estratégias é limitado, assim qualquer jogador pode se tornar invencível em pouco tempo de jogo. Entretanto, suas variações são muito mais complexas e de difícil estratégia.

> “Na linguagem do jogo, *tic-tac-toe* é uma disputa entre duas pessoas na qual não entra o fator sorte, pois é jogada a descoberto, todos os movimentos são conhecidos dos dois parceiros e é finita, isto é, tem final definido”. (GARDNER, 1991, p.38)

A vitória é alcançada quando se consegue surpreender o adversário numa jogada estratégica ou bloquear sua jogada.

A jogada inicial pode ser feita de três maneiras: no canto, no centro ou no meio, onde a mais segura é o canto porque o adversário só terá uma possibilidade de evitar uma armadilha no lance seguinte em oito possíveis escolhas: o centro (Figura 2a). O centro, por seu vez, não representará uma ameaça se for realizado um bloqueio de canto (Figura 2b). Já as jogadas laterais devem ser respondidas pela tomada de uma das quatros casas (Figura 2c) que favorecem a trilha.

A Figura 2 mostra as três jogadas iniciais (X) e as possíveis respostas que o adversário (O) deve jogar para evitar a derrota.



a) **b)** **c)**

Figura 2: Jogo da Velha - as três jogadas iniciais (X) e as respostas do adversário (O)

Variações interessantes de *tic-tac-toe* já eram jogadas muitos séculos antes da era cristã. Cada jogador utilizava três moedas ou fichas diferentes, em tabuleiros 3x3.

Na modalidade mais simples, popular na antiga China, Grécia e Roma, os jogadores iam colocando alternadamente as moedas até que todas as seis estivessem sobre o tabuleiro e se nenhum dos dois jogadores tivesse vencido, fazendo uma trilha (três moedas em linha), o jogo continuaria com movimentos alternados de moedas para qualquer das casas vizinhas. Só eram permitidos deslocamentos ortogonais (Figura 3).

Atualmente, no caso de não se formar a trilha, o jogo não tem continuidade e tem-se o empate.

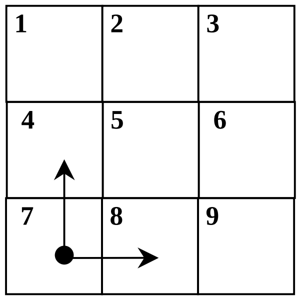


Figura 3: *Tic-tac-toe* jogado em tabuleiro 3x3 com deslocamentos ortogonais

Segundo Gardner (1991), o jogo da velha também era conhecido na Inglaterra, por volta de 1300 e era chamado de "Moinho de Três Homens" (*Three Men´s Morris*): era proibido iniciar o jogo na casa central, pois representava vitória certa para o primeiro a jogar. Com essa restrição, o jogo só terminava com um possível erro do adversário.

Existiu uma outra variação de jogo da velha que permitia deslocamentos ao longo das duas diagonais principais do tabuleiro (Figura 4), sendo que iniciando o jogo pelo centro, a vitória era garantida.

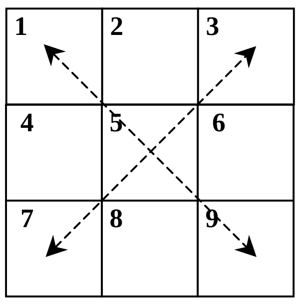


Figura 4: Jogo da velha com deslocamentos em diagonal

Havia outra variação ainda, em que podia haver deslocamentos para quaisquer das casas vizinhas, quer em diagonal quer em movimento ortogonal, por exemplo, da casa seis para a casa oito. Neste caso, era provável que a vitória fosse indefinida.

O antigo jogo japonês *go moku* (cinco pedras), popular no Oriente, era jogado sobre as intersecções de um tabuleiro de *go* (19x19 casas), com número limitado de moedas colocadas alternadamente. A vitória era do jogador que conseguia alinhar cinco moedas, não sendo permitido mover as moedas.

Por volta de 1880, esse jogo tornou-se conhecido na Inglaterra com o nome de *gobang*. Utilizavam um tabuleiro de xadrez comum com a colocação de 12 ou 15 moedas e se não houvesse vencedor, era permitido mover as moedas em qualquer direção.

Um grande número de máquinas elétricas foi fabricado baseado nesse jogo, sendo que o primeiro robô de *tic-tac-toe* foi inventado pelo inglês Charles Babbage no século XIX. Um aspecto interessante era o seu método de escolher entre dois movimentos possíveis entre linhas alternadas. A máquina mantinha um registro das vitórias obtidas. No caso de escolha entre os movimentos A e B, esse total era consultado pela própria máquina que jogava A se o número fosse par e B, se ímpar. No caso de três alternativas o robô dividia o total por três para obter um resto 0, 1 ou 2 que engrenava diferentes lances.

Atualmente, há no mercado muitos tabuleiros em três dimensões, cúbicos, que permitem enfileirar as fichas não só nas diagonais e ortogonais das faces, mas também ao longo das quatro diagonais principais do cubo. No cubo 3x3 o primeiro a jogar vence facilmente.

É importante identificar o estilo de jogo de cada adversário para poder conhecer o tipo de erro mais provável, levando-se em conta o comportamento de suas jogadas. Muito embora pareça um jogo elementar, o jogo da velha pode desencadear questões nada triviais de probabilidade.

1.2.3.2 Three-in-Row

É um jogo tipo trilha, como o próprio nome já diz “Três em Linha”, composto por 8 discos vermelhos, 8 discos azuis, um par de dados e a participação de dois jogadores, cujo objetivo é obter três discos enfileirados verticalmente, horizontalmente ou diagonalmente. A escolha do jogador que iniciará a partida é feita através de sorteio pelos dados; quem tirar o maior número será o primeiro.

Barson (1992) esclarece que a regra consiste em lançar o dado e com os números sorteados identificar uma fração própria. Em seguida, o jogador deve encontrar uma fração equivalente no tabuleiro e cobri-la com o disco.

Por exemplo:

$$\boxed{\mathbf{6}} \quad \boxed{\mathbf{2}} \quad = \frac{2}{6} \rightarrow cobrir \frac{4}{12}$$

Se o oponente já tiver colocado um disco naquele ponto, ele poderá ser removido. É importante considerar que se o jogador sortear números duplicados, ele perderá a vez. O vencedor será o jogador que realizar trilha primeiro. A Figura 5 mostra um modelo de tabuleiro *Three-in-Row*.

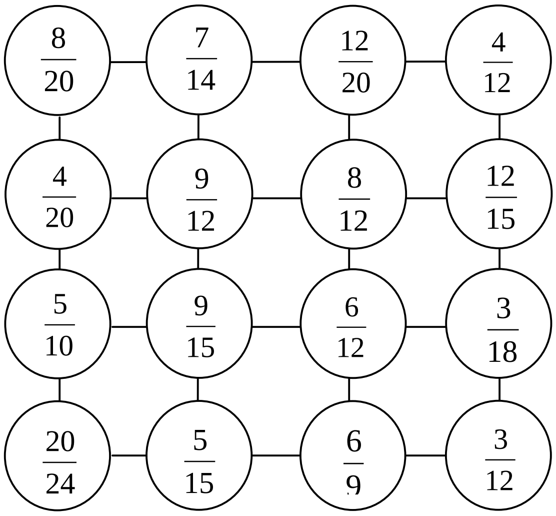


Figura 5: *Three-in-Row* utilizado para o estudo de fração

Os jogadores também podem utilizar regras variadas, não se restringindo apenas à formação de fração própria, que em nosso entender daria maior variabilidade de escolhas aos jogadores.

Kamii (1994) apresenta uma outra variação do Três-em-Linha (Figura 6), que muito embora tenha o mesmo nome não possui a mesma estrutura/funcionamento.

> (...) dois jogadores e 16 fichas, sendo oito de cada cor para cada jogador, que na sua vez, coloca um aro sobre um número no quadrado A e outro no quadrado B. Então ele subtrai o número menor do maior e cobre, com uma de suas fichas, o resultado no quadrado grande. Caso este já esteja coberto ele perde a vez. O primeiro que conseguir colocar três fichas em linha, seja horizontal, vertical ou diagonal, vence o jogo. (KAMII, 1994, p.180)

A			B	
14	13		9	7
12	11		5	3

	10	7	9
2	4	5	3
7	5	6	8
4	9	8	11

Figura 6: Três-em-Linha permite praticar a operação de subtração

A autora estende a idéia para o Quatro-em-linha com o uso de dois tabuleiros (cartolinas numeradas), dois pequenos aros (ou anéis) e 24 fichas, 12 de cada cor. Neste caso, os jogadores colocam os anéis sobre dois números quaisquer no quadrado menor e procura a soma no quadrado maior. Vence o jogo quem for o primeiro a conseguir cobrir quatro números do quadrado grande, em qualquer direção.

O quadrado pequeno pode conter os números: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, nessa ordem numa tabela 3x3; e o maior: 16, 19, 22, 14, 17, 24, 11, 15, 20, 21, 15, 23, 18, 12, 19, 25, 20, 21, 17, 22, 13, 14, 23, 16, 18, respeitando essa ordem numa tabela 5x5.

1.2.3.3 Calculadora Tic-Tac-Toe: um jogo de estimativa

O objetivo desse jogo é possibilitar a prática no cálculo de produtos, quocientes, potências e o uso de calculadoras. As habilidades para resolução de problemas são desenvolvidas nos alunos através da procura de estratégias para vencer o jogo. É indicado para a idade de 7 a 12 anos. O material é composto por planilhas de atividades e uma calculadora de mão.

A dinâmica é feita através da distribuição das planilhas de atividades, uma de cada vez, para cada dupla de estudantes. Os estudantes, por sua vez, devem jogar cada partida até que apareça um vencedor, sempre completando a planilha 1, antes de trabalhar com as planilhas 2 e 3.

Na planilha 1, a atividade inicial é familiarizar os estudantes com alguns jogos de alinhamento em trilha que são similares ao tradicional *tic-tac-toe*. Os estudantes rapidamente descobrem que precisam estimar um produto para marcar uma determinada célula. A atividade também fornece a prática com calculadora e o desenvolvimento de estratégias de ataque e defesa.

Já na planilha 2, a atividade consiste em estimar quocientes usando a calculadora e desenvolver estratégias de ataque.

Na planilha 3, são usados expoentes l, 2, 3, 4 e 5, eles podem ser manipulados com multiplicações repetidas na calculadora. Entretanto, é possível trabalhar outras atividades usando expoentes diferentes com alunos que apresentam maior desenvoltura, utilizando a tecla y^x da calculadora.

Uma extensão dessas atividades é levar os estudantes a selecionar suas próprias operações e números e preenchê-los em seus próprios tabuleiros. Os alunos ficam motivados construindo o jogo para estimar e pensar na solução de um problema. Exemplos de planilhas:

- Planilha 1 - **Produto tac-toe:** Os jogadores jogam alternadamente escolhendo dois números, um em um triângulo e outro em um retângulo, conforme Figura 7. Eles encontram o produto em uma calculadora e fazem sua marca (X ou O) no número mais próximo ao valor calculado. Se o número já estiver marcado, eles marcam o número não marcado mais próximo ao valor calculado (exemplo: 6x77= 462, marca-se 460; 4x69= 276, marca-se 280, se já estiver marcado; então o próximo será 310). O primeiro jogador com três marcas em uma linha vence. O jogador perdedor inicia o próximo jogo. Se nenhum jogador construir trilha, o jogo é reiniciado.

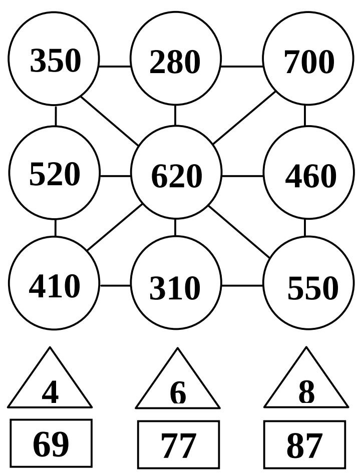


Figura 7: Planilha *Tic-Tac-Toe* para calcular produtos

- Planilha 2 - **Quociente tac-toe:** Os jogadores jogam alternadamente escolhendo dois números, o divisor no triângulo e o dividendo no retângulo, conforme Figura 8. Eles encontram o quociente na calculadora e fazem sua marca no número que não foi marcado mais próximo do valor do quociente calculado. O primeiro jogador com três marcas em uma linha vence, repetindo o mesmo procedimento do anterior.

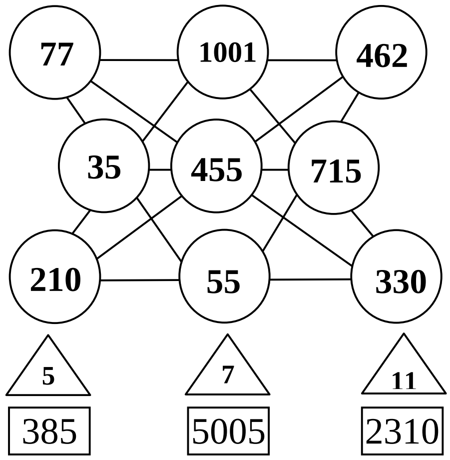


Figura 8: Planilha *Star-Tac-Toe* para calcular divisores

- Planilha 3 - Potência tac-toe: Os jogadores jogam alternadamente escolhendo dois números, o expoente no triângulo e a base no retângulo, conforme Figura 9. Eles encontram a potência na calculadora e fazem sua marca (X ou O) no número mais próximo do valor calculado. O primeiro jogador com três marcas alinhadas vence. O jogador perdedor inicia o próximo jogo. Se nenhum jogador construir trilha, o jogo é reiniciado.

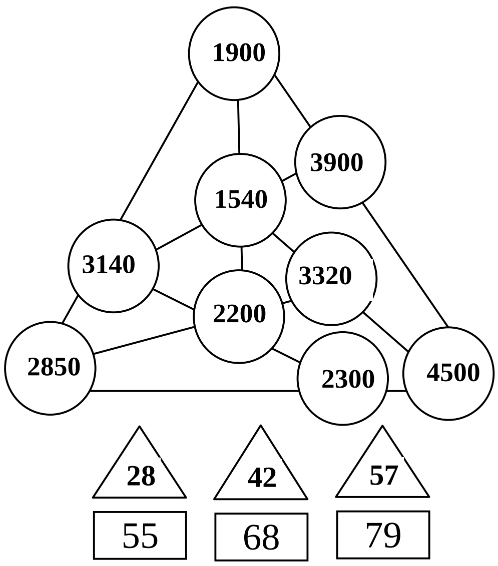


Figura 9: Planilha *Tri-Row-Toe* para calcular potências

As diferentes configurações das planilhas se repetem para o produto, quociente e potência.

1.2.3.4 Contig 60®

Contig 60 foi criado pelo Dr. John C. Del Regato. É um jogo que utiliza Tabuleiro Oficial Pentathlon, 25 marcadores (fichas, feijões, botões ou milho) de um tipo ou cor e 25 de outro, 3 dados, 1 cartão sinalizador, papel e caneta para cada jogador (Figura 10).

Os oponentes jogam alternadamente os três dados construindo uma sentença com os números sorteados e uma ou duas operações diferentes, sendo permitido utilizar as quatro operações básicas. O total de tempo para um torneio é de 45 minutos.

O jogador vencedor será aquele que conseguir o número de pontos necessários, registrado inicialmente em 60, ou ainda identificar cinco fichas de mesma cor em linha em células contíguas alinhadas. O ponto é ganho por colocar uma ficha num espaço desocupado que seja adjacente a um espaço com ficha que esteja posicionada tanto horizontal, vertical ou diagonalmente. Se o jogador marcar num espaço adjacente a mais de um espaço já ocupado, mais pontos serão obtidos.

Se o jogador passar sua jogada, por acreditar que não é possível fazer uma sentença numérica com aqueles valores dos dados e o adversário achar que é possível, ele pode aproveitar esses valores para a sua própria jogada. Neste caso, ele ganhará o dobro do número de pontos e em seguida realizará a jogada da sua vez.

> Trata-se de um jogo onde o cálculo mental com as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), a partir de números naturais, está presente na própria estrutura do jogo, ou seja, para jogar é necessário operar aritmeticamente. Além disso, é fundamental a percepção da ação das operações sobre os números, isto é, perceber, por exemplo, que o que faz um número natural aumentar muito rapidamente é uma multiplicação, já a adição faz esse aumento ser mais reduzido. (GRANDO, 2000, p.77)

Regato (1986) vai além das quatro operações e utiliza combinações, probabilidade, cálculo espacial, habilidade de observar, cálculo dedutivo e indutivo.

As atividades com Contig 60® estão incluídas no material do CENPEC – Centro de Estudos e Pesquisas em Educação, Cultura e Ação Comunitária do Projeto de Correção de Fluxo, do Projeto *Ensinar e Aprender: Impulso Inicial*, um trabalho desenvolvido no estado do Paraná, acreditando que os alunos são capazes e ajudando-os a recuperar a confiança na própria capacidade de aprender.

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
27	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**8**
26	**54**	**55**	**60**	**64**	**66**	**34**	**9**
25	**50**	**120**	**125**	**144**	**72**	**35**	**10**
24	**48**	**108**	**180**	**150**	**75**	**36**	**11**
23	**45**	**100**	**96**	**90**	**80**	**37**	**12**
22	**44**	**42**	**41**	**40**	**39**	**38**	**13**
21	**20**	**19**	**18**	**17**	**16**	**15**	**14**

Figura 10: Contig 60® permite o uso das quatro operações básicas

1.2.3.5 *Take Ten*

Take Ten, uma adaptação do jogo "Pegue 10", de acordo com Kamii (1994) é um jogo de tabuleiro com 66 cartas redondas numeradas de 1 a 7, nas quantidades: 1 (22 cartas), 2 (16 cartas), 3 (12 cartas), 4 (7 cartas), 5 (4 cartas), 6 (2 cartas), 7 (2 cartas) e Coringa (1 carta).

O objetivo do jogo consiste em totalizar dez usando quatro cartas em uma única linha horizontal, vertical ou diagonal. As cartas são embaralhadas, dispostas para baixo e cada jogador pega três. Em seguida, cada jogador, na sua vez, coloca uma carta sobre um círculo qualquer do tabuleiro e pega outra do baralho, sempre permanecendo com três na mão.

Quando um dos jogadores completar uma linha com quatro cartas que totalizem dez ele as pega para si; o coringa pode ser usado para representar qualquer valor. Aquele que conseguir mais cartas é o vencedor.

1.2.3.6 Quinze Mágico

Utiliza-se um tabuleiro quadriculado 3x3 e nove peças quadradas de mesma medida das quadrículas do tabuleiro (Figura 11), com numerais de 1 a 9. Para decidir quem começa o jogo é realizado um sorteio entre os dois jogadores.

As peças são colocadas em qualquer quadrícula de forma alternada entre os participantes. Vence o jogador que conseguir completar três peças alinhadas com soma 15, em linha, coluna ou diagonal.

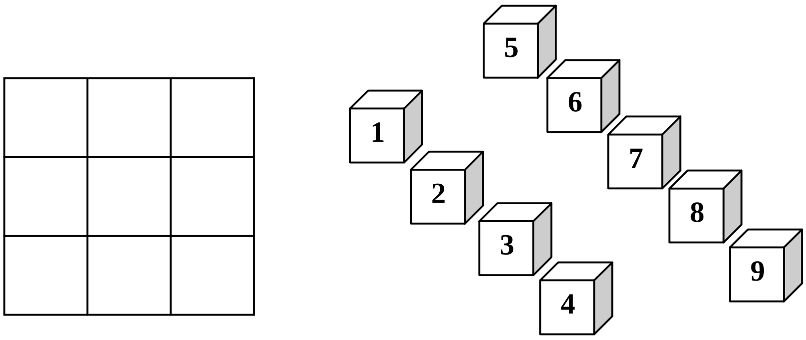


Figura 11: Quinze Mágico

Barbosa (2000) apresenta a importância de o aluno participante descobrir uma estratégia e discuti-la verificando a sua veracidade e completude de possibilidades.

São apresentadas três estratégias pelo autor. A primeira consiste em o primeiro jogador posicionar a peça 5 no centro do tabuleiro; conseqüentemente ele vencerá na segunda jogada independentemente da jogada do seu adversário.

Com a imediata vitória do primeiro jogador para qualquer escolha do segundo jogador, recomenda-se estabelecer uma restrição para a primeira jogada.

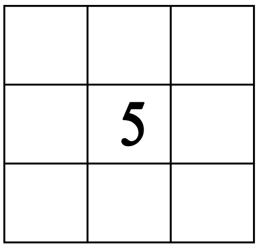


Figura 12: Jogada posicionando a peça 5 no centro do tabuleiro

A segunda é quando o jogador dá início colocando a peça 5 num dos cantos e seu adversário jogar na mesma linha, coluna, ou diagonal, Figura 13, o primeiro jogador ganhará na sua segunda jogada colocando na fila a terceira peça numerada com o complemento em relação a 10 da peça do segundo jogador.

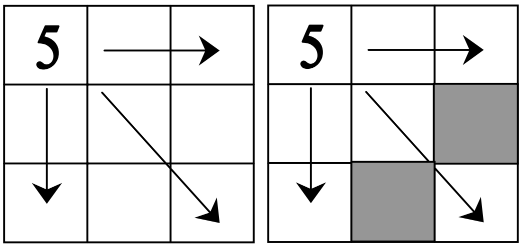


Figura 13: Jogada iniciada com 5 no canto

O adversário não deverá utilizar a jogada anterior, devendo colocar sua peça numa das duas casas restantes. O primeiro jogador colocará na outra casa o complemento da peça, o que torna vencedor o primeiro jogador na sua terceira jogada.

A terceira estratégia, quando o jogador iniciar colocando a peça 5 em lateral na sua casa do meio, Figura 14, seu adversário poderá jogar na mesma linha ou coluna e o primeiro jogador vencerá na segunda rodada. Admitindo que o segundo jogador não faça essa jogada, então deverá colocar sua peça numa das quatro casas restantes. O primeiro jogador colocará na casa oposta a peça complementar a 10. Para qualquer jogada do adversário, basta o primeiro jogador, na sua terceira jogada, colocar sua nova peça para obter a soma 15.

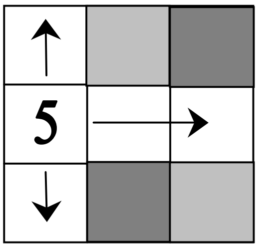


Figura 14: Jogada iniciada com 5 na lateral em sua casa do meio

1.2.3.7 Tri-Hex

Tri-Hex é um jogo *tic-tac-toe*, segundo Gardner (1985), jogado no tabuleiro conforme a Figura 15, composto por nove linhas, com três células por linha. Seu funcionamento é semelhante ao Jogo da Velha tradicional onde os dois jogadores escolhem suas marcas e jogam alternadamente. Vence quem alinhar três células de acordo com as linhas do tabuleiro.

Criado por Thomas H. O´Beirne, autor de “*Puzzles and Paradoxes*”, esse jogo também é abordado por Borin (1996) que afirma, em sua obra, ser o seu jogo uma “adaptação do Tri-Hex”; contudo notamos que é o próprio jogo, salvo algum outro entendimento dado pela autora. Ressalta ainda a importância de os alunos se envolverem com a tarefa de descobrir a estratégia vencedora, bem como de serem organizadas e discutidas com a ajuda do professor. Na hipótese de não partir do aluno, cabe ao professor a iniciativa de pôr em discussão, pelo menos, algumas posições no tabuleiro para saber como se pode jogar para vencer.

As estratégias serão abordadas detalhadamente em um capítulo específico, onde utilizaremos variações para esta configuração, com o objetivo de resgatar temas da geometria.

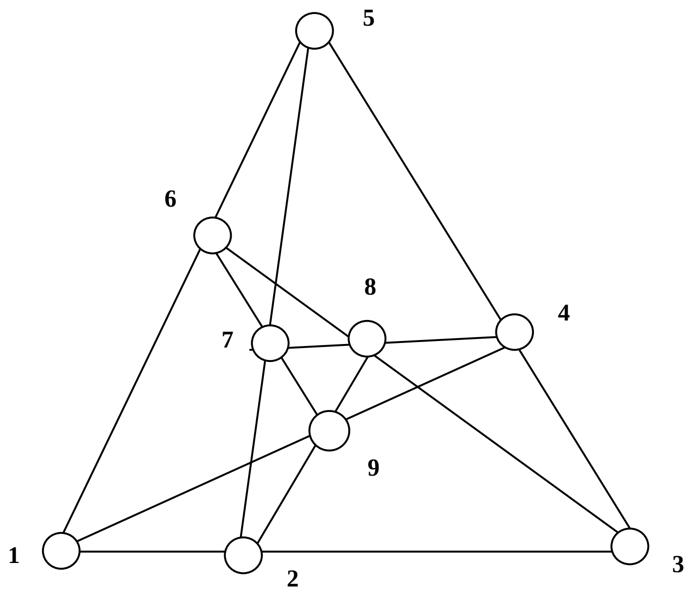


Figura 15: Tri-Hex

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O sucesso de um trabalho de pesquisa depende da metodologia utilizada e da descrição detalhada dos procedimentos utilizados para a coleta e análise de dados. Sendo assim, trataremos agora de fundamentar e justificar a utilização de tais metodologias e procedimentos.

A pesquisa é considerada por Ludke e André (1986), como a promoção do confronto entre os dados, as evidências e as informações coletadas sobre um determinado assunto e o referencial teórico sobre esse mesmo assunto. E esse confronto foi desenvolvido, neste trabalho, levando-se em consideração a pesquisa qualitativa.

A pesquisa caracteriza-se por uma investigação qualitativa quando

> (...) os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. (BOGDAN; BIKLEN, 1991, p. 48)

Tendo como pano de fundo a pesquisa qualitativa, elaboramos nosso referencial teórico por meio de uma detalhada pesquisa bibliográfica levando também em consideração as experiências vivenciadas em nossa prática docente no trabalho com professores em formação continuada.

Pesquisa bibliográfica

No levantamento bibliográfico realizado, constatamos que, nos últimos anos, diversas pesquisas vêm sendo desenvolvidas sobre o ensino da Geometria e a sua inserção nos currículos da Educação Básica (Andrade, 2004). Evidenciamos uma desvalorização do conteúdo de geometria junto aos alunos do ensino fundamental

(Pavanello, 1993, 1989; Perez, 1991; Pereira, 2001; Vianna, 1988; Bertonha, 1989; Sangiacomo, 1996; Gouvea, 1998; Mello, 1999; Passos, 2000) e um analfabetismo geométrico devido ao não resgate das geometrias (Gazire, 2000).

Esse fato foi ratificado pelos professores de Matemática que participaram do PEC e também nos deram indicações de que os livros didáticos poderiam nos fornecer maiores detalhes sobre o assunto.

Outro procedimento trabalhado foi o levantamento realizado junto aos livros didáticos de 7ª e 8ª séries (ANEXO 3) uma vez que o conteúdo pontos notáveis do triângulo e sua determinação são aí desenvolvidos. Ficou demonstrada a relativa escassez de informação e detalhamento com relação ao conhecimento geométrico de retas e pontos notáveis de um triângulo. Sentimos, então, a necessidade de mais informações sobre o tema e métodos alternativos para o seu ensino e aprendizagem. E, visando contribuir, direcionamos nossa pesquisa para o estudo de jogos de estratégias tipo trilha cujo objetivo era alinhar três marcas fazendo analogias com o jogo de Beirne, e que proporcionava situações em que o conteúdo programático da 7ª série, especificamente pontos e retas notáveis, podia ser abordado. Nessa fase, a fim de aprofundar nosso conhecimento a respeito de jogos tipo trilha, realizamos um estudo sobre a história e o desenvolvimento dos jogos e conseguimos identificar diversos tipos, comumente chamados pelos americanos como *tic-tac-toe*.

A pesquisa bibliográfica deu-nos também a oportunidade de pesquisar sobre a formação de professores e pudemos identificar que jogos como o Tri-Hex de Beirne não eram utilizados com fins pedagógicos. Esse fato levou-nos a estabelecer os conceitos e estratégias necessárias para a construção de um tabuleiro denominado por nós de Jogo de Configuração Simples que, utilizando a idéia básica do jogo de Beirne, pudesse ser utilizado pedagogicamente.

Após a confecção do jogo sentimos a necessidade de validá-lo contando com a parceria da escola pública estadual, num processo de cooperação dos professores com o pesquisador na produção de material didático e suas potencialidades didático-pedagógicas. Para viabilizar isso, fomos até a DERT solicitar autorização para entrarmos em contato com os professores das escolas estaduais e iniciar o processo de apresentação, discussão e experimentação com os professores.

Para isso, elaboramos um plano de trabalho de campo, constituído de uma oficina e entrevistas com professores de Matemática do Ensino Fundamental.

A oficina

Alguns obstáculos tiveram que ser superados durante o tempo que transcorreu desde o planejamento das atividades até a sua execução, como por exemplo, os professores que poderiam participar voluntariamente e a indisponibilidade de tempo por parte do corpo docente.

O convite aos professores de Matemática da Rede Pública Estadual para participar da oficina foi feito mediante a aprovação da Dirigente de Ensino da DERT e com o apoio da Assistente Técnico-Pedagógica (ATP) de Matemática da DERT, dos Coordenadores e Diretores de escola.

Para facilitar e incentivar a participação dos professores, a oficina foi realizada durante a semana, utilizando o Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo - HTPC, de modo a compartilhar, naquele momento, o espaço de reflexão pedagógica em parceria com os professores.

Importante comentar que segundo Domenico (1995), a oficina pelo seu caráter experimental é um espaço livre para desenvolver potencialidades, e que, é a ocasião em que o professor pode confeccionar material didático, não sendo necessário estar vinculado a nenhuma ação formal nem estar freqüentando os cursos oferecidos com essa finalidade, podendo fazer o que quer sem se intimidar com suas dúvidas e sem temer seus erros.

Diferente da oficina temos

> as “oficinas didáticas” como ação formal orientada. Estas podem ser organizadas para o professor ou com o professor. A diferença está em que a primeira se dá sob a ótica da capacitação docente, ocasião em que se inscrevem em oficinas para temas específicos, previamente anunciados, constroem seus recursos didáticos com orientação metodológica e os levam para si, para utilizá-los em suas escolas autonomamente. A segunda se dá sob a ótica da parceria, quando é organizada na Universidade junto ao professor da rede escolar e aplicada a seus alunos no laboratório para onde estes se dirigem e/ou na própria escola com assessoramento direto. (DOMENICO, 1995, p. 68-9)

Sem o intuito de realçar demais as diferenças entre uma distinção e outra, ou mesmo identificar fortemente nossa experiência com uma delas, consideramos importante salientar que o trabalho com os professores revelaram características de ambas as oficinas: os professores ficaram à vontade na companhia da pesquisadora; o aspecto lúdico possibilitou que os professores não tivessem medo de errar; a atividade transcorreu como uma parceria entre pesquisadora, professor, escola e universidade.

Um grupo de oito professores participou da oficina, durante o segundo semestre de 2003, os quais em sua totalidade, haviam participado do PEC nos últimos quatro anos. O objetivo dessa parceria com os professores, foi o de proporcionar um ambiente formativo a fim de que eles pudessem trazer novos elementos para o uso dos jogos na sala de aula.

Buscava-se, então, envolver os professores na tarefa de comentar, criticar e dar sugestões, visando, assim, à validação do jogo pelos próprios professores. Do mesmo modo, vislumbrou-se que esse compartilhamento e comprometimento do grupo com a validação do jogo tornava-os co-autores e conduzia-os para o aperfeiçoamento de sua prática.

Os professores trouxeram elementos para a aplicação dos jogos, novas estratégias, questionamentos, discussões, procurando vitalizar o conteúdo da geometria através dos jogos.

A oficina foi planejada para ser executada em quatro encontros com duas horas de duração e para isso foi elaborado um roteiro (ANEXO 2).

A fim de documentar toda a atividade, solicitamos autorização ao grupo para utilizarmos alguns recursos como filmadora móvel, gravador e máquina fotográfica. Autorizados pelo grupo, fizemos uso também de anotações pessoais.

Nas fotos, a fachada externa da escola e, no seu interior, a sala de aula onde realizamos a oficina com discussão teórica e prática.

Foto 1: Visão parcial da fachada da escola

Foto 2: Discussão teórica

Durante a realização da oficina, nos preocupamos em desempenhar duas funções: observar e interagir com o grupo.

Como observadores, concentramos nossa atenção em alguns aspectos que poderiam demonstrar as atitudes dos professores frente ao jogo e às potenciais contribuições para a sua validação. Desse modo, ficamos atentos para descobrir como eles se organizavam no espaço do tabuleiro, como eles dominavam o tabuleiro em termos de direção e sentido, se exploravam diferentes formas de preenchimento do tabuleiro, se a familiarização com o material permitia aos sujeitos uma boa jogada e se procuravam variar seus movimentos em função das estratégias atribuídas.

Ainda como observadores, focalizamos nossa atenção no interesse dos participantes em aprender o jogo, se eles estavam motivados a jogar, se havia interesse em utilizar o jogo em sala de aula e se eles sentiam-se desafiados a encontrar as melhores estratégias para chegar à vitória.

Interessante foi observar se os professores comparavam e estabeleciam correspondências entre as jogadas e partidas, se utilizavam jogadas anteriores para projetar as próximas, se criavam estratégias e se essas se mostravam coerentes e eficientes ou eram por ensaio e erro, e se as ações dos sujeitos eram planejadas e organizadas.

Inicialmente, deixamos os sujeitos jogarem livremente (Foto 3), a partir da utilização do tabuleiro do Tri-Hex (Foto4), procurando, no entanto, fazer com que o jogo fosse devidamente compreendido e as regras obedecidas. Assim que os participantes começaram a discutir sobre suas vitórias e derrotas, começamos a interagir com o grupo, questionando-os sobre as estratégias e decisões utilizadas na partida. Queríamos saber qual a melhor jogada em cada situação, quais opções de jogadas eles possuíam, se as suas estratégias sempre funcionavam etc.

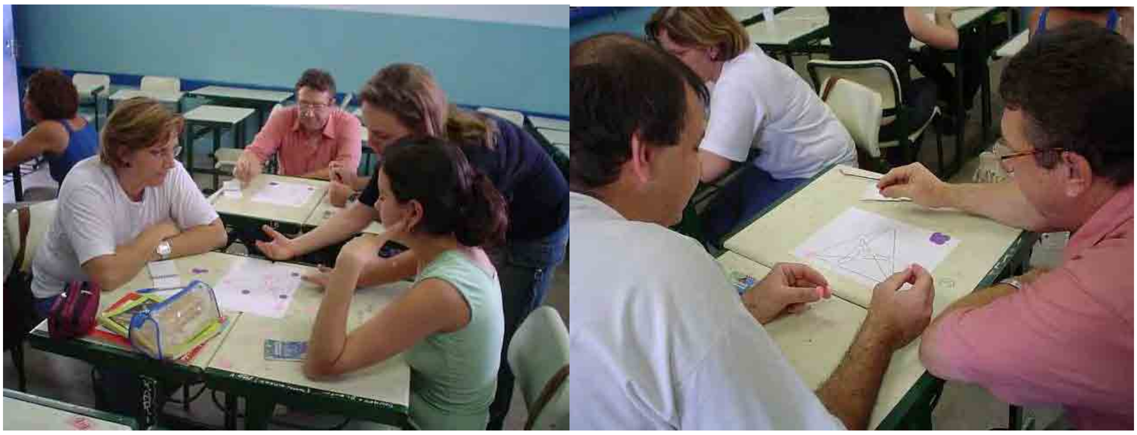


Foto 3: Jogadas livres a partir do Tri-Hex

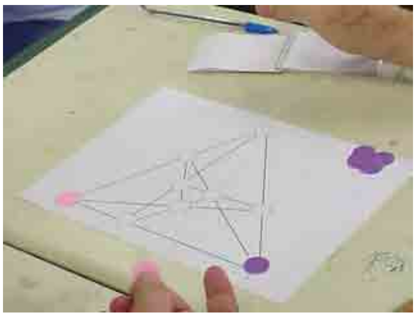


Foto 4: Tabuleiro do Tri-Hex utilizado na prática com os professores

Sempre que conveniente solicitávamos que os sujeitos justificassem suas jogadas e análises apresentadas (Foto 5), sugeríamos que jogassem descrevendo suas intenções de jogo, de modo a identificar os procedimentos utilizados, e na medida do possível procurassem sistematizar os conceitos matemáticos intrínsecos ao jogo (Foto 6).

Foto 5: Análise e discussão das jogadas a partir da Configuração Simples do Tri-Hex

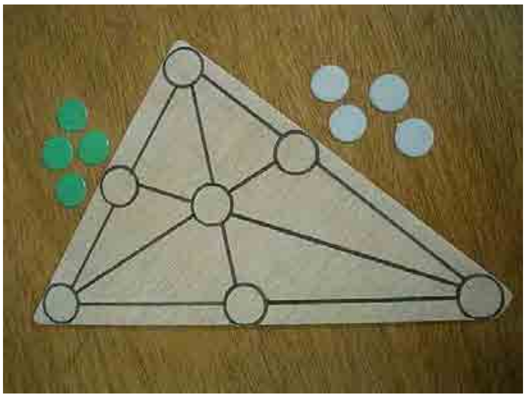


Foto 6: Tabuleiro da Configuração Simples do Tri-Hex confeccionado em madeira

As entrevistas

Para Lüdke e André (1986, p.34) a "entrevista semi-estruturada se desenrola a partir de um esquema básico, porém não aplicado rigidamente, permitindo que o entrevistador faça as necessárias adaptações".

A entrevista é uma das principais técnicas de trabalho em quase todos os tipos de pesquisa utilizados nas ciências sociais. Uma de suas mais importantes características é o caráter de interação que se estabelece entre entrevistador e entrevistado.

> Na abordagem qualitativa, utiliza-se, freqüentemente, a observação participante, que coloca o pesquisador diante da realidade estudada. A entrevista permite um maior aprofundamento das informações obtidas e a análise documental que complementa os dados obtidos através da observação. (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p.9)

Utilizamos com os professores uma entrevista semi-estruturada (ANEXO 1), de modo a não impor uma ordem rígida de questões, que segundo Ludke e André (1986), permite que o entrevistado discorra sobre o tema proposto com base nas informações que ele detém. A entrevista semi-estruturada se desenrola a partir de um esquema básico, porém não aplicado rigidamente, permitindo que se façam as necessárias adaptações.

Foram entrevistados seis dentre os oito professores e as entrevistas ocorreram, após as quatro sessões da oficina, em seus locais de trabalho ou em suas residências, o que permitiu a coleta de informações relacionadas às suas atividades profissionais.

De acordo com Bogdan e Biklen (1991, p. 50) “a direção da pesquisa só se começa a estabelecer após a coleta dos dados e o passar de tempo com os sujeitos”. Desse modo, a análise é feita sob a perspectiva da pergunta de pesquisa colocada no início do trabalho, em que buscamos *as potencialidades didático-pedagógicas do jogo Tri-Hex e suas variações, enquanto produtor e revelador de conceitos matemáticos/geométricos*.

A entrevista, de acordo com Bogdan e Biklen (1991), foi utilizada para obter dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, em nenhuma das entrevistas limitamos tempo, assim como procuramos não influenciar no discurso dos professores.

As entrevistas foram gravadas a fim de obtermos o maior número de informações possíveis, sem perder detalhes. A análise dos dados partiu de uma leitura com afinco das entrevistas de cada professor; a partir daí buscamos identificar a cada nova leitura os dados recorrentes e pertencentes a uma mesma categoria.

3 EXPLORANDO MATEMATICAMENTE O TABULEIRO DO TRI-HEX E SUAS VARIAÇÕES

3.1 Configuração Simples do Tri-Hex: caminhos da criação

Este jogo, também disponível em *software*, utiliza um tabuleiro, (Figura 16) para dois jogadores e tem como objetivo alinhar 3 células com suas marcas em linha reta. Cada jogador escolhe suas marcas ou fichas e jogam alternadamente numa célula qualquer.

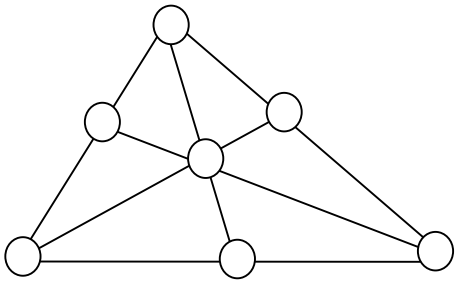


Figura 16: Configuração Simples do Tri-Hex

Elementos do tabuleiro triangular

A construção do tabuleiro foi realizada a partir do estudo dos elementos do triângulo, utilizando ou não o computador. Neste caso, as construções foram feitas a partir da utilização do *Cabri Géomètre II.*

a) Altura: Criar um triângulo qualquer e nomear os vértices de A, B e C (Figura 17).

Criar a reta **r** com os pontos **A** e **B**. Criar a reta **s** que contém os pontos **A** e **C**. Criar a reta **t** com os pontos **B** e **C**. Traçar a reta **p** perpendicular à reta **t** de tal forma que o ponto **A** pertença a essa reta. Traçar a reta **q** perpendicular à reta **r** de tal forma que o ponto **C** pertença a essa reta. Traçar a reta **v** perpendicular à reta **s** de tal forma que o ponto **B** pertença a essa reta. Determinar os pontos **M**, **N**, **O** interseções das retas **p** e **t**;

q e **r**; e **s** e **v**, respectivamente. Criar os segmentos AM, CN, BO. Estes segmentos são as alturas do triângulo.

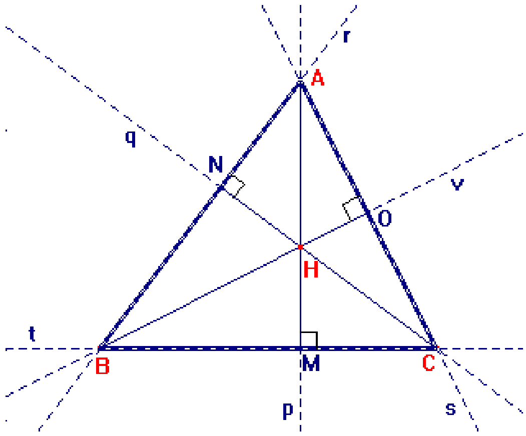


Figura 17: Alturas do ΔABC e Ortocentro (H)

b) Bissetriz: Criar um triângulo qualquer e nomear os seus vértices de **A**, **B** e **C** (Figura 18). Usando o comando Bissetriz, que está no menu construção, dar o comando indicando os ângulos $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ e $B\hat{A}C$.

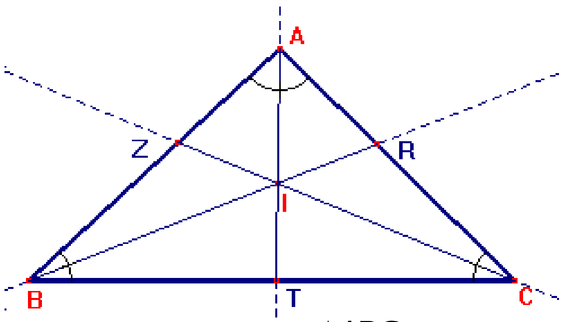


Figura 18: Bissetrizes do ΔABC e Incentro

c) Mediana: Criar um triângulo qualquer e nomear os seus vértices de **A**, **B** e **C** (Figura 19). Construir os pontos médios dos lados desse triângulo. Em seguida, criar segmentos com extremos em cada vértice e no ponto médio do lado oposto. Esses segmentos denominam-se medianas.

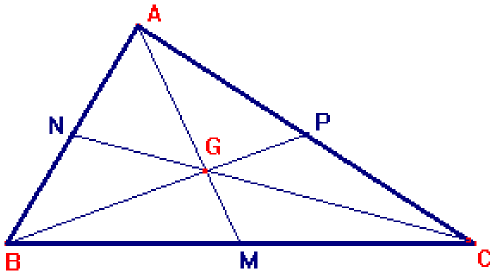


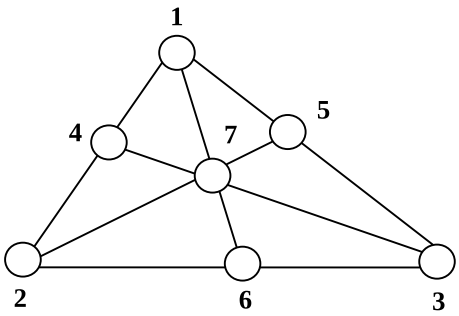
Figura 19: Mediana do ΔABC e Baricentro (G)

Como jogo de estratégia, esperamos que os professores se envolvam na tarefa de descobrir a estratégia vencedora, bem como se organizarem para discutir as jogadas para cada posição no tabuleiro em suas respectivas conseqüências.

3.2 Descoberta de estratégias

Para facilitar a análise da estratégia, estabelecemos algumas convenções:

Nomeação das células
- de canto: 1, 2 e 3
- intermediárias: 4, 5 e 6
- central: 7.



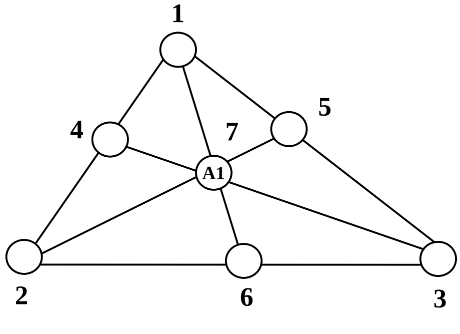
Saídas
- de canto: (3) idênticas
- intermediária: (3) idênticas
- central: (1). Total de saídas = 3.

Indicaremos com Ai a i-ésima jogada de A e com Bj a j-ésima jogada de B, 1º Jogador: A e 2º Jogador: B

No início, os jogadores devem anotar a seqüência de suas jogadas para que, dessa forma, seja possível listar as seqüências de uma jogada vencedora.

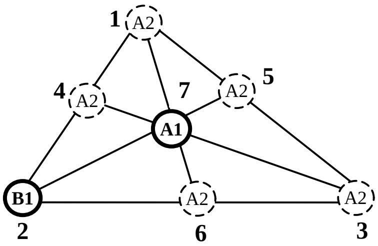
Estudaremos cada jogada começando com a saída dada por A1 primeiramente no centro, célula 7, depois na célula intermediária 6 e, finalmente, na célula de canto 2. Para as jogadas de A1 temos as jogadas de B1, centro, intermediária e canto, com cinco possibilidades restantes para as jogadas de A2.

1º Caso: A1 ocupa o ponto de cruzamento central.



Em primeiro lugar, analisaremos as possibilidades de B1 quando A1 ocupar ponto central, célula 7, variando B1 para as células 2 e 6, a seguir.

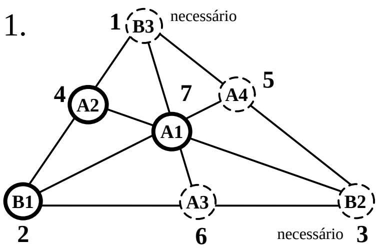
- Jogada de B1 no canto, célula 2, e as possibilidades das jogadas do seu adversário A2



Partindo da posição de B1, analisamos as jogadas de A2, nas células intermediárias 4, 5 e 6:

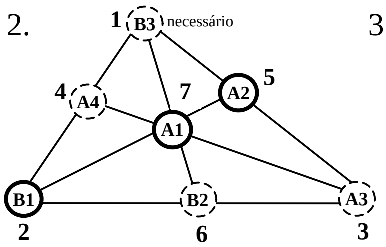
- Possíveis A2

1.



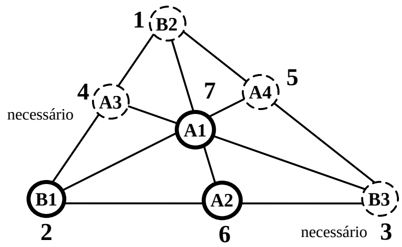
Empate

2.



Vence!

3.

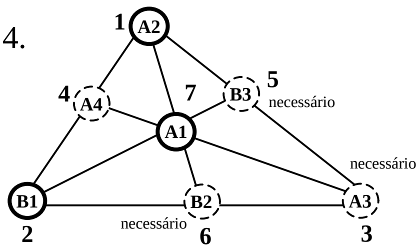


Empate

Observamos as possibilidades no item 2, onde B3 joga na célula 1, obrigatoriamente, para impedir que A vença, mesmo assim, A recebe a vitória para qualquer escolha de B3.

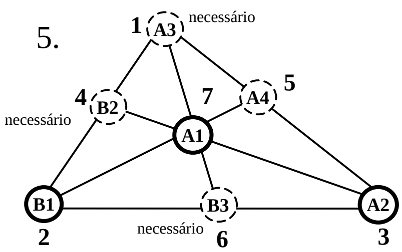
Jogadas de A2, nas células de canto 1 e 3:

4.



Vence!

5.

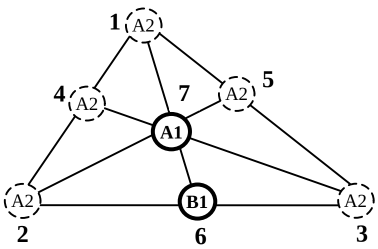


Vence!

Começamos a partir do item 4, onde a terceira jogada é de A2 na célula 1 e B2 realiza jogada necessária na célula 6, assim como A3 necessário na célula 3. Ao final, o jogador A vence para qualquer jogada de B. Para o item 5 a estratégia vencedora se repete.

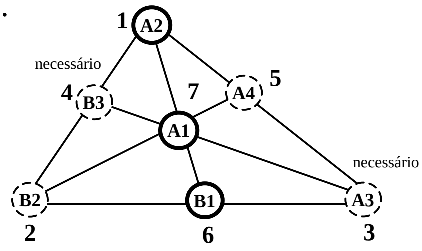
Continuação das possibilidades:

- Jogada de B1 na célula intermediária 6 e as possibilidades das jogadas do seu adversário A2

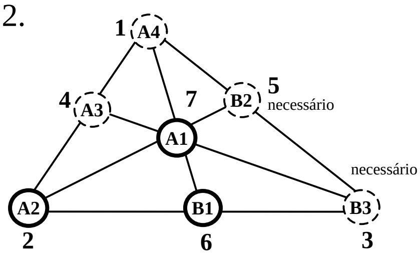


Partindo da posição de B1, analisamos as jogadas de A2, nas células de canto 1, 2 e 3:

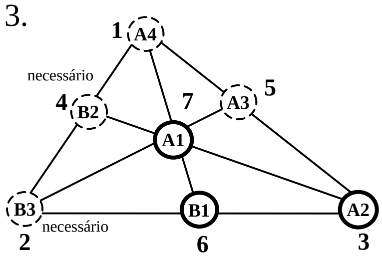
Possíveis A2

1.


Vence!

2.


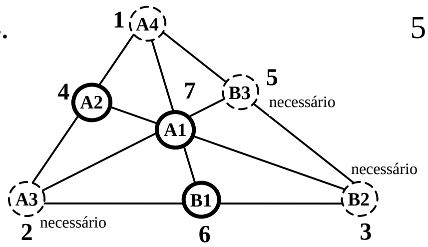
Vence!

3.


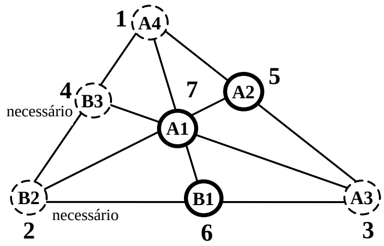
Vence!

No item 1, observamos as possibilidades que B3 joga na célula 4, obrigatoriamente, embora A vença para independente da jogada de B. Nos itens 2 e 3 a estratégia do jogador A se repete, vencendo para qualquer jogada de B3.

Jogadas de A2, nas células intermediárias 4 e 5:

4.


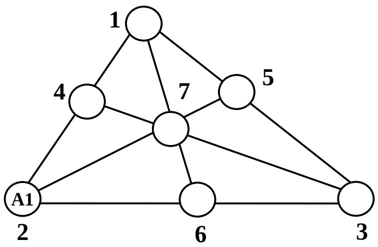
Vence!

5.


Vence!

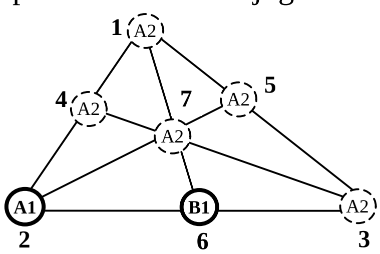
Para os itens 4 e 5, armada a estratégia vencedora do jogador A, o jogador B não possui possibilidades de vencer as partidas.

2º Caso: A1 ocupa o ponto de canto.



Estudaremos as possibilidades de A1 no ponto de canto, célula 2, variando B1 para as células 6, 7 e 3 a seguir.

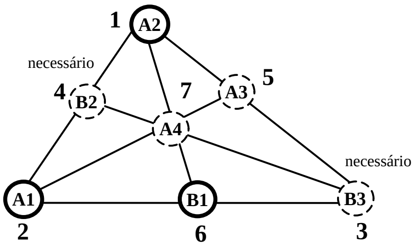
- Jogada de B1 na célula 6 e as possibilidades das jogadas do seu adversário A2



Partindo da posição de B1 analisamos as jogadas de A2 nas células dos cantos 1 e 3:

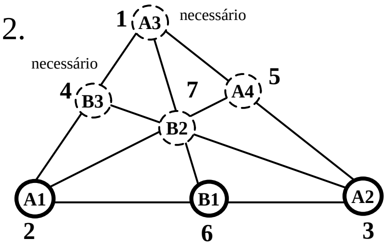
Possíveis A2

1.



Vence!

2.



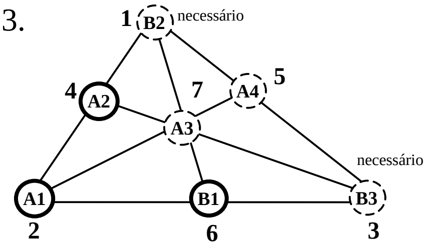
Vence!

O jogador A, nas partidas acima, aplica a estratégia impedindo que B vença.

Partindo da posição de B1 analisamos as jogadas de A2 nas células intermediárias 4, 5 e na célula do centro 7:

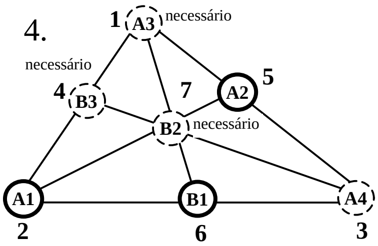
- Possíveis A2

3.



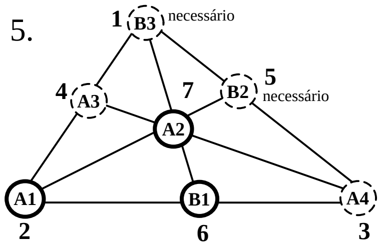
Empate

4.



Empate

5.

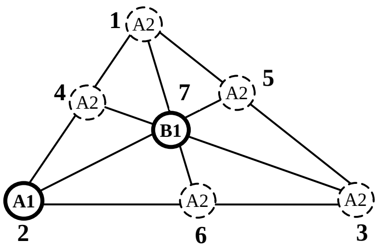


Vence!

Nos itens 3 e 4, B2 joga, obrigatoriamente, nas células 1 e 7 respectivamente para que seu adversário não forme três em linha, impedindo a jogada vencedora e empatando a partida. Observamos as possibilidades na última etapa, item 5, onde B2 joga na célula 5, e posteriormente, B3 na célula 1, para impedir que A vença. Assim, A recebe a vitória para qualquer escolha de B.

Continuação das possibilidades:

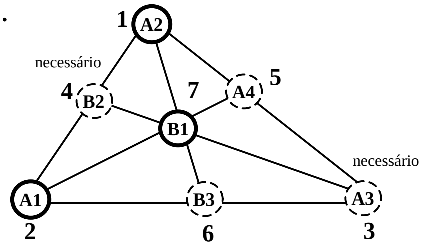
- Jogada de B1 na célula 7 e as possibilidades das jogadas do seu adversário A2



Partindo da posição de B1 analisamos as jogadas de A2 nas células dos cantos 1 e 3:

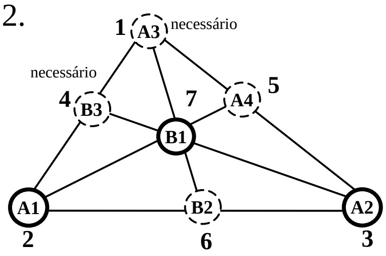
- Possíveis A2

1.



Vence!

2.

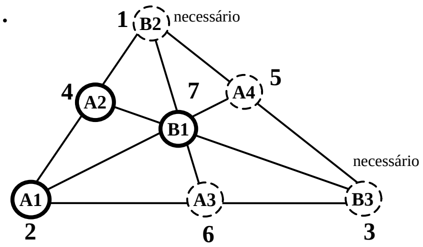


Vence!

Partindo da posição de B1, analisamos as jogadas de A2 nas células intermediárias 4, 5 e 6:

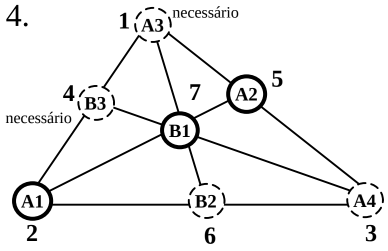
- Possíveis A2

3.



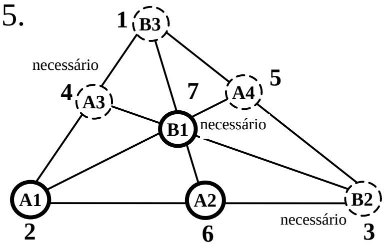
Empate

4.



Vence!

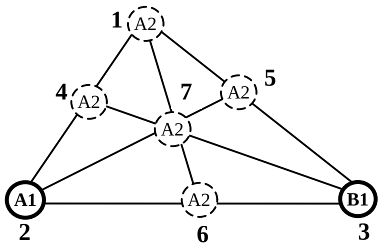
5.



Empate

Continuação das possibilidades:

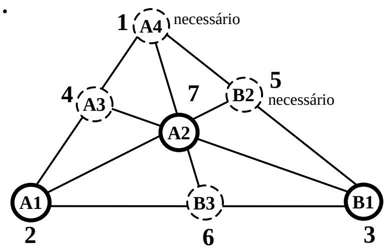
- Jogada de B1 na célula 3 e as possibilidades das jogadas do seu adversário A2



Partindo da posição de B1, analisamos as jogadas de A2 na célula do canto 1 e no centro 7:

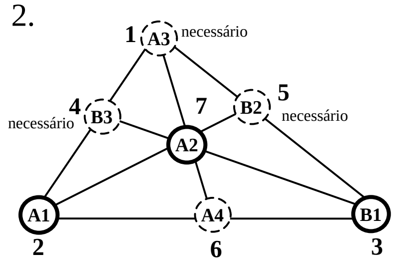
- Possíveis A2

1.



Vence!

2.

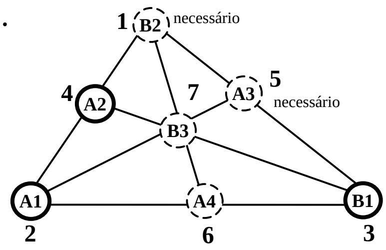


Vence!

Partindo da posição de B1, analisamos as jogadas de A2 nas células intermediárias 4, 5 e 6:

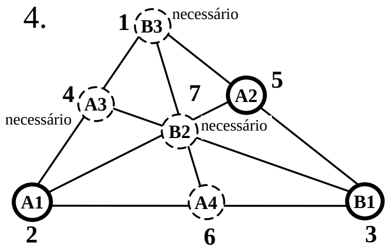
- Possíveis A2

3.



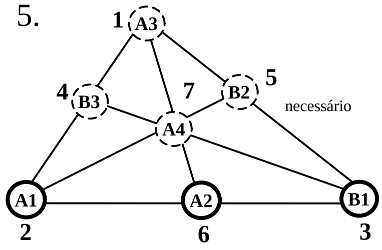
Empate

4.



Empate

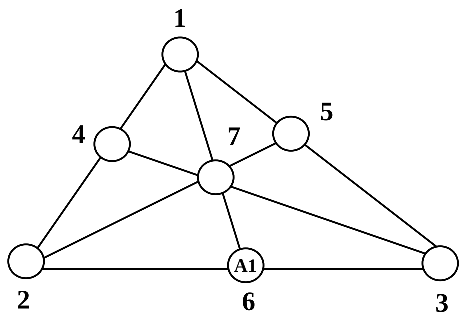
5.



Vence!

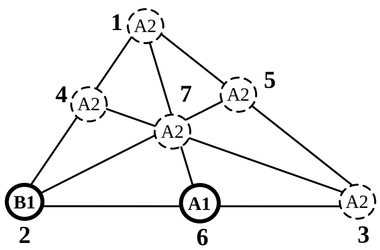
No item 5, após a estratégia de jogadas de A, o jogador B fica sem possibilidades de vencer.

3º Caso: A1 ocupa o ponto intermediário.



Consideraremos as possibilidades de B1 quando A1 ocupar o ponto intermediário, célula 6, variando B1 para as células 2, 5 e 7 a seguir.

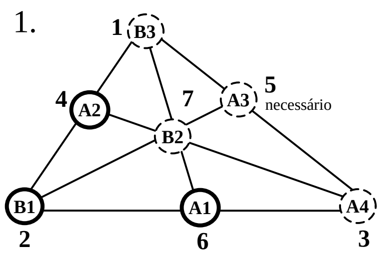
- Jogada de B1 no canto, célula 2, e as possibilidades das jogadas do seu adversário A2



Partindo da posição de B1, analisamos as jogadas de A2, nas células intermediárias 4 e 5:

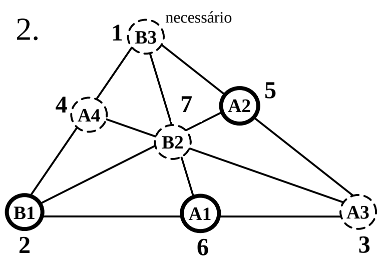
- Possíveis A2

1.



Empate

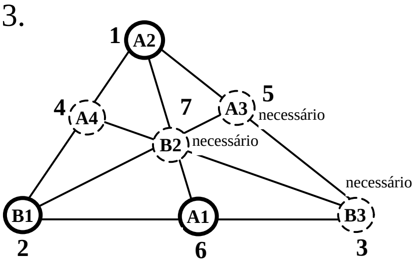
2.



Empate!

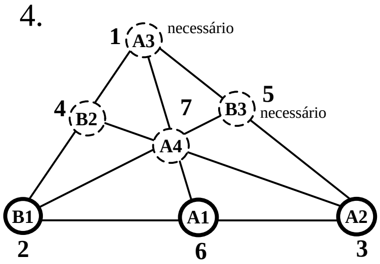
Jogadas de A2, nas células de canto 1, 3 e na célula do centro 7:

3.



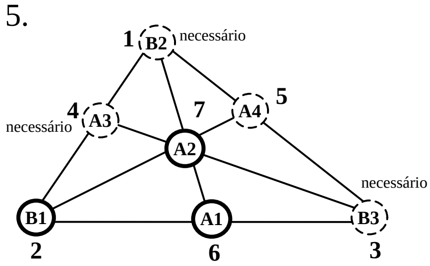
Empate

4.



Vence!

5.

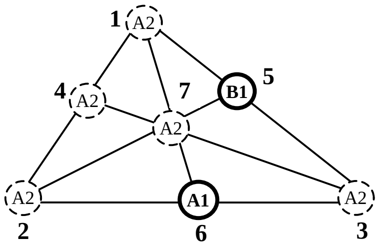


Empate

Vejamos o item 4 onde o jogador A vence para qualquer jogada de B.

Continuação das possibilidades:

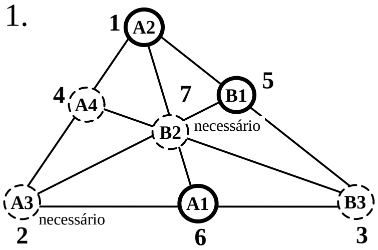
- Jogada de B1 na célula intermediária 5 e as possibilidades das jogadas do seu adversário A2



Partindo da posição de B1, analisamos as jogadas de A2, nas células de canto 1, 2 e 3:

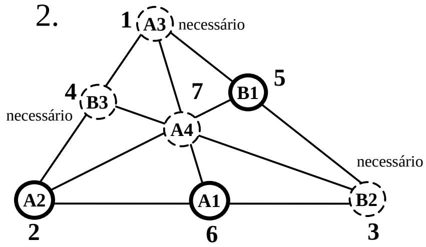
- Possíveis A2

1.



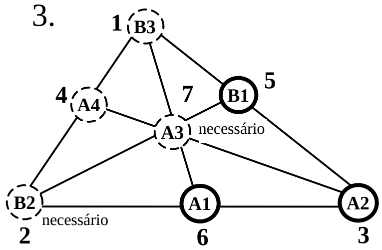
Vence!

2.



Vence!

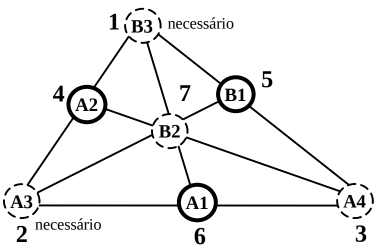
3.



Vence!

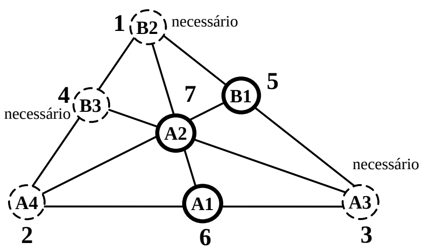
Jogadas de A2, nas células intermediárias 4 e de centro 7:

4.



Vence!

5.

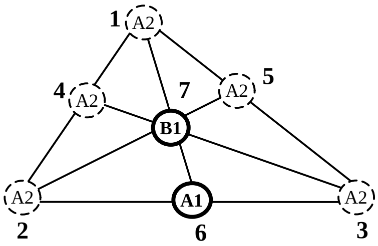


Vence!

Nos itens 1, 2, 3, 4 e 5 o jogador A vence B, para qualquer jogada de B3.

Continuação das possibilidades:

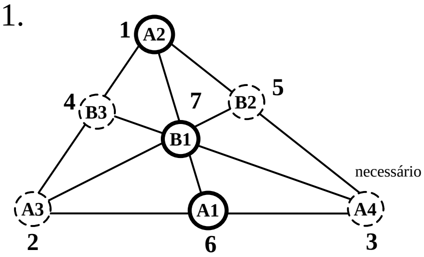
- Jogada de B1 na célula intermediária 5 e as possibilidades das jogadas do seu adversário A2



Partindo da posição de B1, analisamos as jogadas de A2, nas células de canto 1, 2 e 3:

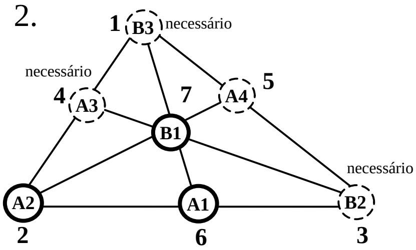
- Possíveis A2

1.



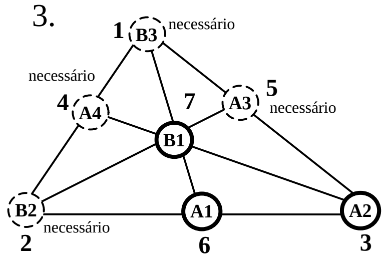
Vence!

2.



Empate

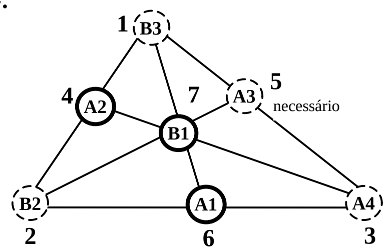
3.



Empate

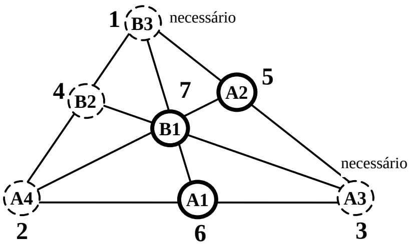
Jogadas de A2, nas células intermediárias 4 e 5:

4.



Empate

5.



Vence!

3.3 Equivalência de configurações

Procuramos mostrar, a seguir, que existem outras configurações que equivalem à Configuração Simples com 6 retas e 7 células; para isso usaremos transformações. Tais transformações conferem "dinamismo" à Geometria até então estática. Esse dinamismo pode ser melhor entendido no trabalho de Andrade (2004, p. 176) que afirma que "o termo - Geometria Dinâmica - refere-se aos ambientes que possuem como recurso o 'arrastar', que permite criar e construir figuras que, quando arrastadas pela tela, podem manter os vínculos estabelecidos nas construções. Com esse recurso há a possibilidade de uma atualização simultânea das medidas dos lados e ângulos, ao se movimentar um determinado objeto”.

Apresentaremos as equivalências dessa configuração a partir da primeira transformação.

a) Primeira transformação

Desloquemos as cevianas 3-4 e 2-5 de tal maneira que a célula 4 pertença ao prolongamento do segmento 1-2 e 5 pertença ao prolongamento de 1-3. Obtemos a configuração dada abaixo, Figura 20, que indicaremos como C nº.1.

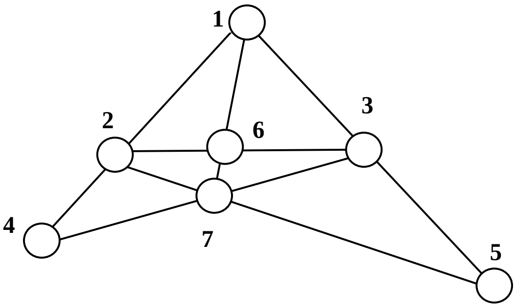
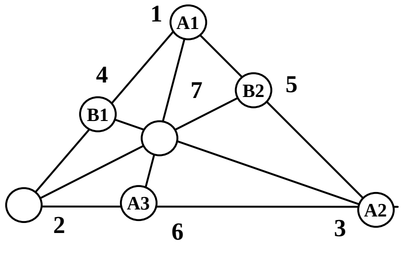


Figura 20: Configuração nº.1 das estratégias da Configuração Simples do Tri-Hex

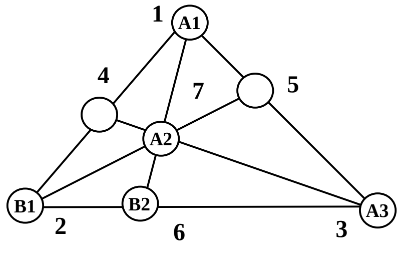
Pelo fato de que as incidências não foram alteradas, as estratégias descobertas para CS são válidas para essa configuração nº.1, como mostraremos a seguir.

Caso I: Na Configuração Simples temos as estratégias para o primeiro jogador A com início em uma das células do canto, neste caso célula 1.

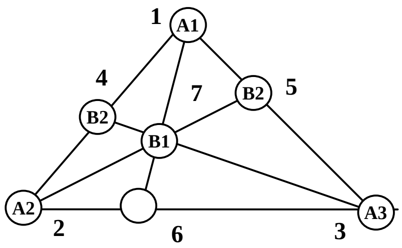
1) B responde na célula 4
intermediária vizinha



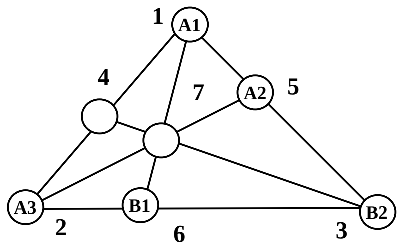
2) B responde na célula 2
de canto



3) B responde na célula 7 central

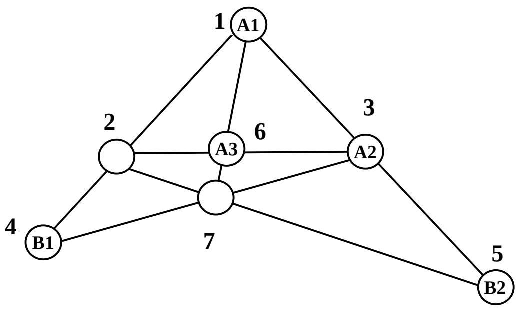


4) B responde na célula 6 intermediária

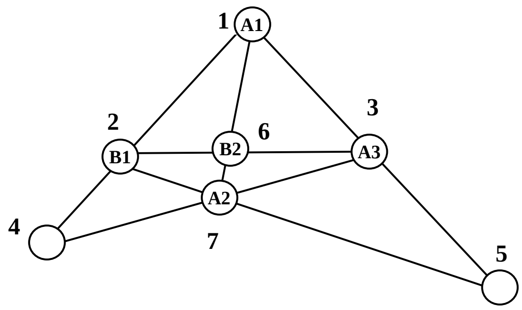


A essas estratégias da Configuração Simples correspondem as estratégias para C nº.1 com A iniciando no canto 1

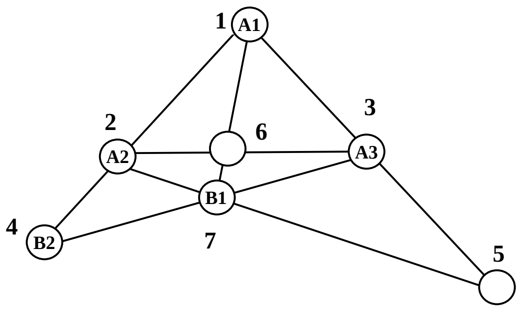
1) B respondendo na célula 4 num canto inferior



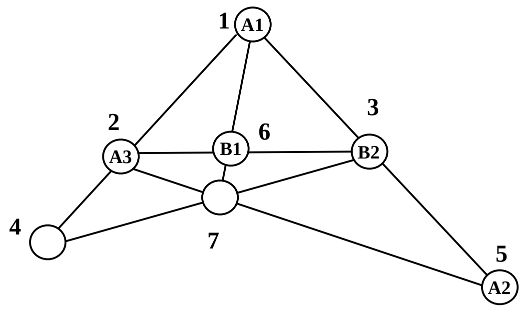
2) B respondendo na célula 4 lateral intermediária



3) B respondendo na célula 7 do ângulo côncavo

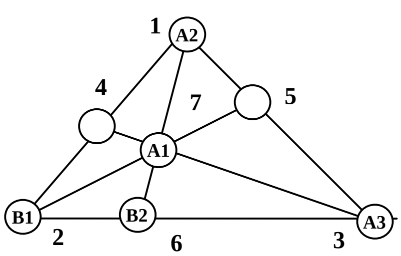


4) B respondendo na célula 6 central

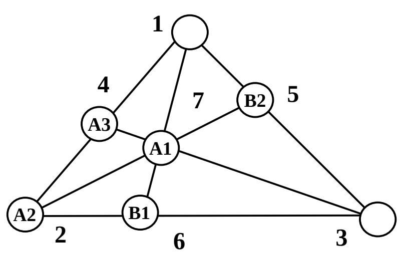


Caso II: Na Configuração Simples temos estratégias para o jogador iniciando na célula central 7

1) B respondendo na célula 2 de canto

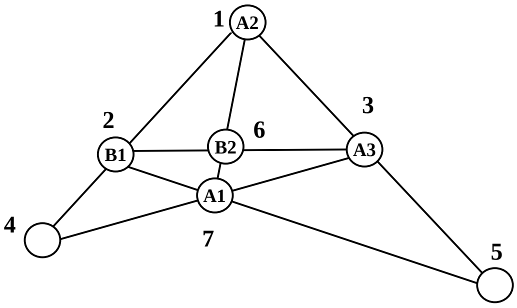


2) B respondendo na célula 6 intermediária

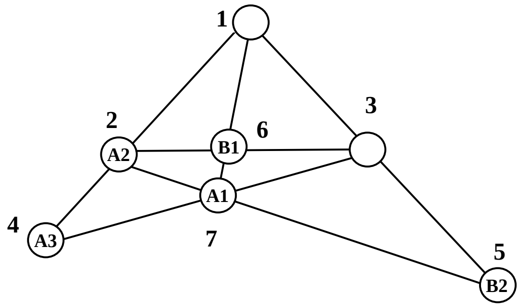


A essas estratégias na Configuração Simples correspondem as estratégias na C nº.1 com A iniciando na célula 6 do ângulo côncavo

1) B respondendo na célula 2 intermediária lateral



2) B respondendo na célula 6 central



b) Segunda transformação

Analogamente podemos efetuar a transformação da Configuração Simples em C nº.2, Figura 21.

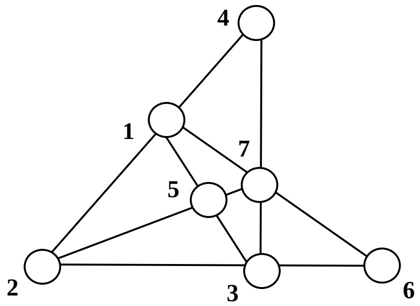


Figura 21: Configuração nº.2 das estratégias da Configuração Simples do Tri-Hex

Podemos fazer as correspondências das estratégias da Configuração Simples para C nº.2, entretanto, dada a C nº.2, sem as indicações numéricas das células, basta girá-la para a direita e as estratégias seriam as mesmas obtidas para C nº.1.

Da mesma forma, poderíamos obter uma configuração C nº.3, mas para que permaneçam as estratégias, basta girá-la convenientemente.

3.4 Introduzindo o tema matemático

Após a prática lúdica com o Tri-Hex jogado em Configuração Simples, pode o professor conduzir os alunos à observação dos elementos constituintes da configuração: o triângulo (seus elementos: vértices e lados), as linhas concorrentes num único ponto interior.

Em separado, no quadro, o professor pode destacar os seus elementos, aproveitando para introduzir o conceito de **ceviana** relativa a um vértice de triângulo, como toda reta à qual pertence esse vértice. Da mesma forma poderá introduzir os conceitos usuais de **mediana**, **altura** e **bissetriz** (interna e externa), todos como **cevianas**.

Construí-las graficamente (com instrumentos tradicionais de desenho ou no computador) levando-os à descoberta ou redescoberta de que as medianas são concorrentes, as alturas são concorrentes e as bissetrizes também são concorrentes, introduzindo desse modo, os conceitos desses pontos notáveis.

3.4.1 O Triângulo

O triângulo é um polígono de três lados. É uma figura de grande importância na geometria, tanto que seu estudo gerou um ramo da matemática: a trigonometria (*tri*=três; *gono*=ângulo; *metria*=medida). A palavra trigonometria tem, então, o significado de **medida no triângulo** e seu estudo procura relacionar as medidas dos lados com as dos ângulos.

- **Elementos de um triângulo**

Podemos destacar os seguintes elementos: vértices (A, B e C), lados ($\overline{AB}, \overline{BC}\ e\ \overline{CA}$); ângulos internos e externos, conforme a Figura 22.

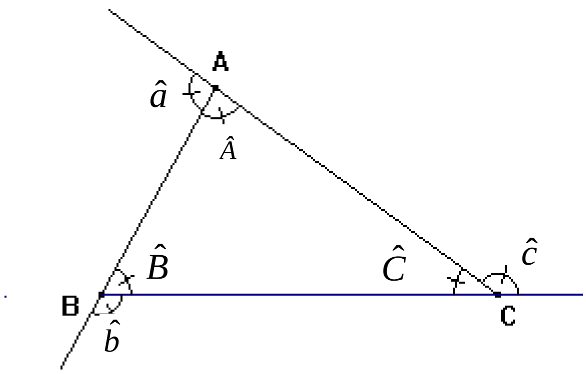


Figura 22: Elementos do triângulo – vértices, lados e ângulos

O triângulo é o único polígono que não possui diagonais. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é de 180º e a soma das medidas dos seus ângulos externos é de 360º.

Podemos classificar os triângulos levando-se em conta dois tipos de elementos: os lados e os ângulos. Em relação aos lados, podemos classificar os triângulos em:

- Eqüilátero: se e só se os três lados são congruentes;

- Isósceles: se e só se apenas dois lados são congruentes,

- Escaleno: se e só se os três lados têm medidas diferentes.

Em relação às medidas dos ângulos, temos:

- Acutângulo: se e só se três ângulos internos são agudos (medidas menor que a de um ângulo reto);

- Retângulo: se e só se um dos ângulos é reto,

- Obtusângulo: se e só se um dos ângulos é obtuso.

Com relação às retas e segmentos notáveis de um triângulo, existem pelo menos três tipos de segmentos de um triângulo que merecem atenção especial, os quais recebem as denominações altura, mediana e bissetriz:

Altura: se e só se o segmento perpendicular à reta suporte de um lado, com extremidades nesta reta e no vértice oposto a este lado.

Mediana: se e só se um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto.

Bissetriz: se e só se um segmento com extremidades num vértice e no lado oposto e que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.

Em geral, as alturas, medianas e as bissetrizes de um triângulo não coincidem; porém, em alguns triângulos especiais, pode haver coincidência entre esses elementos.

Um ponto importante de um triângulo é obtido com o cruzamento das mediatrizes (retas perpendiculares a um segmento nos seus pontos médios) de seus três lados. Este ponto é denominado **circuncentro,** centro da circunferência circunscrita ao triângulo (circunferência determinada pelos três vértices), centro de convergência das três mediatrizes, do latim circum (ao redor, em torno). Além desse ponto, temos **ortocentro, baricentro e incentro**.

3.4.2 Sobre denominações e notas históricas

- **Incentro**

O ponto de concorrência das bissetrizes internas de um triângulo é chamado INCENTRO; denominação bastante adequada, por ser centro da circunferência inscrita ao triângulo.

De fato, desde que todo ponto de bissetriz interna eqüidista dos lados que formam o ângulo então, o ponto de concorrência de duas já eqüidista dos três lados do triângulo; segue que esse ponto é centro da circunferência inscrita (Figura 23).

É interessante observar que a existência do incentro era conhecida de Euclides (Livro IV- prop. 4).

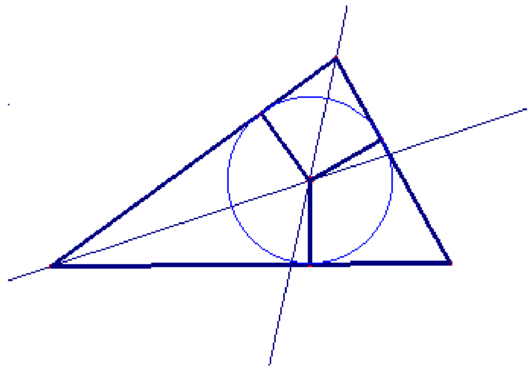


Figura 23: Incentro

- **Excentro (Ou Ex-Incentro)**

Da mesma maneira os três pontos de concorrência de cada par de duas bissetrizes externas (e mais uma interna) são denominados EXCENTROS (ou Exincentros) por serem respectivamente centros das três circunferências tangentes a um lado e aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, Figura 24, chamadas circunferências ex-inscritas.

Também aqui consta o conhecimento da existência desses pontos de concorrência já em Papus (de Alexandria - cerca de 300, último dos geômetras gregos).

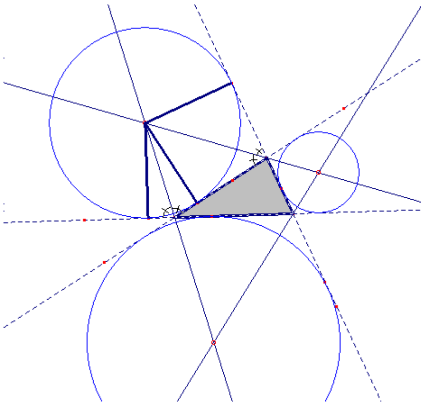


Figura 24: Excentro

- **Circuncentro**

O ponto de concorrência das mediatrizes de um triângulo recebe o nome de CIRCUNCENTRO, por ser centro da circunferência determinada pelos vértices do triângulo, chamada Circunferência Circunscrita. De fato, desde que todo ponto da mediatriz de um lado eqüidista dos seus extremos, segue que o ponto de concorrência de duas mediatrizes eqüidista dos três vértices. É interessante observar o seu posicionamento: a) se o triângulo é acutângulo então o circuncentro é interior ao triângulo; b) se o triângulo é retângulo então o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa; c) se o triângulo é obtusângulo então o circuncentro é externo ao triângulo, conforme Figura 25, respectivamente. Também a existência do circuncentro já aparece em Euclides (livro IV- prop. 5).

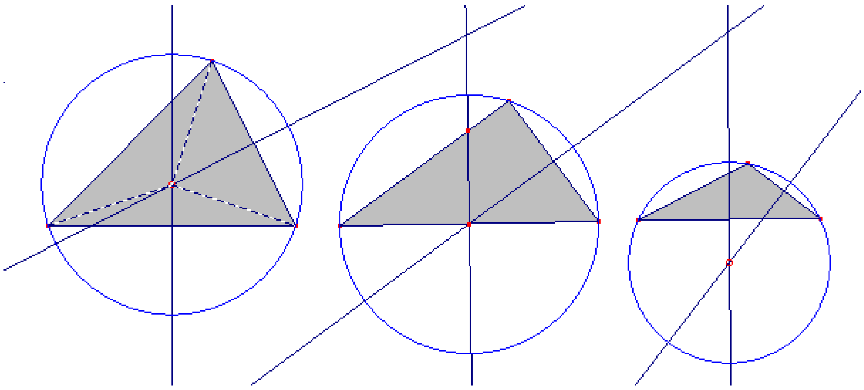


Figura 25: Circuncentro

- **Baricentro**

O ponto de concorrência das medianas de um triângulo recebe o nome BARICENTRO, bari+centro, bari – *barús*, pesado, grave, ocorre em palavras de origem grega ou denominação Centro de Gravidade, ou Centróide.

Sua localização foi dada por Arquimedes (cerca de 225 a.C.) via considerações da mecânica. Assim, o seu posicionamento pode ser obtido imaginando um triângulo como uma placa homogênea e pesada.

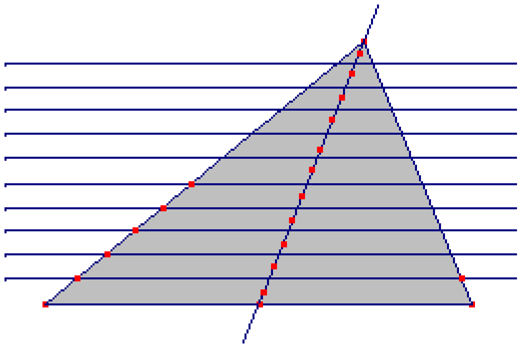


Figura 26: Baricentro

Seja um triângulo ABC (Figura 26) dividido por paralelas a um dos lados formando faixas de pequena largura. Aumentando o seu número podemos considerar as faixas razoavelmente retangulares; e, portanto, com centro de gravidade nos seus pontos médios; em conseqüência o centro de gravidade do triângulo pertence à mediana desse lado.

Repetindo a divisão do triângulo por paralelas aos outros dois lados, obtemos que o centro de gravidade do triângulo está também nas outras medianas, e por ser único, então as três medianas são concorrentes.

Por um aspecto análogo, podemos considerar o triângulo constituído apenas por seus vértices rigidamente articulados, nos quais temos respectivamente três massas idênticas (pesos), que podem ser pensadas como três forças f paralelas iguais (Figura 27).

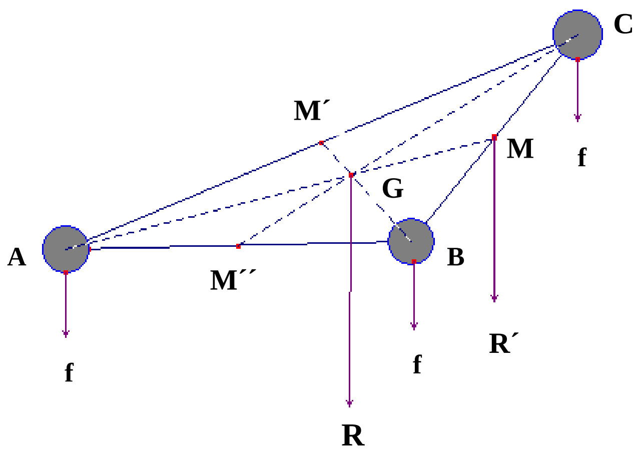


Figura 27: Centro de gravidade

Compondo duas dessas forças, de B e C, teremos uma resultante parcial R' paralela de módulo duplo (2f) aplicada no ponto médio M do seu lado.

Fazendo agora a composição da força paralela do terceiro vértice A com essa resultante parcial obtemos uma resultante paralela R de módulo triplo aplicada no ponto G da mediana AM tal que AG = 2. GM, desde que essa resultante deve ser tal que o momento f. AG seja igual ao momento R'. MG (ou 2f. MG)[1]

Procedendo analogamente, iniciando com outros pares de forças, chegaremos a provar que BG = 2. GM', e sucessivamente que CG = 2. GM" ; e novamente que as medianas são concorrentes num único ponto.

Do ponto de vista didático, essa propriedade da concorrência das medianas no centro de gravidade do triângulo pode ser empregada com sucesso no ensino fundamental, realizando com os alunos uma experiência simples de equilibrar um triângulo recortado (de cartolina, papel cartão, ou outro material), colocando a ponta de um dedo, no triângulo em posição horizontal, exatamente no seu baricentro.

Da mesma maneira, a segunda prova mecânica anterior fornece outra experiência simples, articulando três bolas pequenas (por exemplo, de isopor com pesos internos iguais) por 3 fios finos rígidos de arame, e equilibrando o triângulo por um barbante preso exatamente no seu centróide obtido também com fios de barbante.

Entretanto, essas propriedades *não podem ser confundidas* com a localização do centro de gravidade G' do trilátero (só o contorno do triângulo); portanto do conjunto de lados articulados, propriedade descoberta por L. POINSOT, inserida à p. 178, de sua obra Élèments de Statique, Paris, 1821 (ver Retali e Biggiogero, 1937, p. 184).

De fato, consideremos um triângulo dado apenas por seus lados, portanto um trilátero (seu contorno); e sejam seus lados de algum material pesado homogêneo de mesma espessura. Sejam M, M'e M" os centros de gravidade dos lados BC, AC e AB (Figura 28).

[1] Assunto da disciplina de Ciências do ensino fundamental.

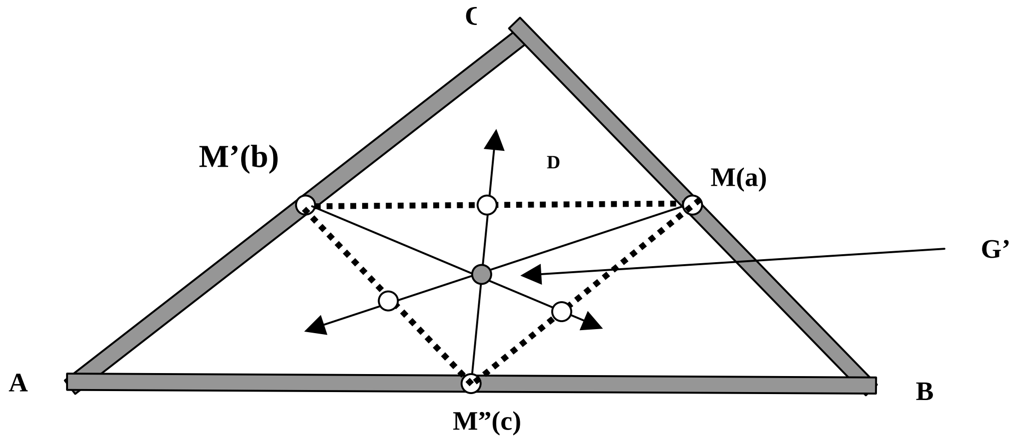


Figura 28: Trilátero

Desde que M, M' e M"são pontos médios segue que o centro de gravidade do trilátero ABC é o centro de gravidade dos 3 pontos M, M' e M" com massas respectivamente a, b e c (massas respectivamente dos lados BC, CA e AB).

Em conseqüência, o centro de gravidade de M e M' localiza-se num ponto D que divide MM' na razão inversa das massas a e b (por igualdade de momentos):

$$MD / M'D = b/a \quad \text{ou } MD / M'D = (b/2)/(a/2)$$

$$\Rightarrow MD / M'D = MM'' / M'M''$$

isto é, D é ponto de interseção da bissetriz interna de M" do triângulo MM'M", ou que o centro de gravidade dos vértices do triângulo medial MM'M" pertence a essa bissetriz .

Analogamente provaríamos que o centro de gravidade do triângulo medial (dos pontos médios por vértices) pertence às outras bissetrizes internas.

Em resumo, o centro de gravidade G' do trilátero ABC é o incentro do triângulo medial MM'M"; e obviamente só em particular coincidiria com G baricentro do triângulo.

- **Ortocentro**

O ponto de concorrência das alturas de um triângulo é chamado ORTOCENTRO, denominação dada W. H. BESSANT, em seu trabalho Conic Sections, London, 1869 (RETALI e BIGGIOGERO, 1937, p. 184). Contudo, Satterly

(1962) cita em notas que o termo ortocentro foi inventado por dois matemáticos Bessant e Ferrers, em 1865.

Verificando o vocábulo ortocentro, de etimologia ort(o) + centro; orthós, reto direito, correto, normal, justo, levantado etc., como aparece, por exemplo, em ortografia = escrita correta, ou ortogonal = ângulo direito, ângulo reto, ou mesmo em ortopedia, ortodontia, ortodoxia, entre outros.

À primeira vista, a segunda parte do nome, parece inadequada, por não ser ponto − centro de circunferência, ou de outros elementos; entretanto, entre outros argumentos notamos que:

a) O ortocentro de um triângulo é circuncentro do triângulo obtido com paralelas pelos vértices aos lados opostos.

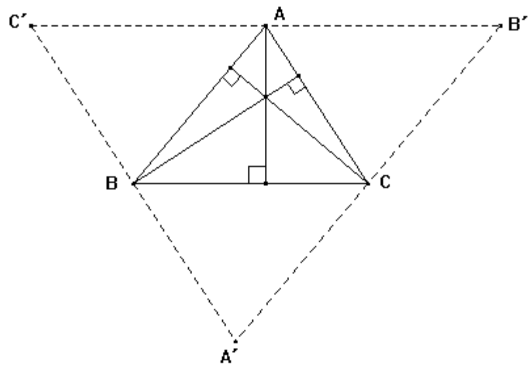


Figura 29: Ortocentro do ΔABC = Circuncentro do $\Delta A'B'C'$

b) O ortocentro de um triângulo acutângulo é o incentro do seu triângulo órtico.

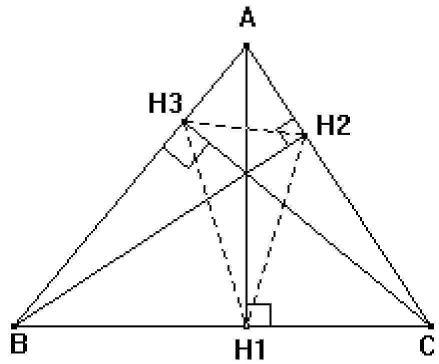


Figura 30: AH1, BH2 e CH3 são bissetrizes internas do Δ H1H2H3 (órtico do Δ ABC)

c) O ortocentro de um triângulo obtusângulo é um excentro do triângulo órtico.

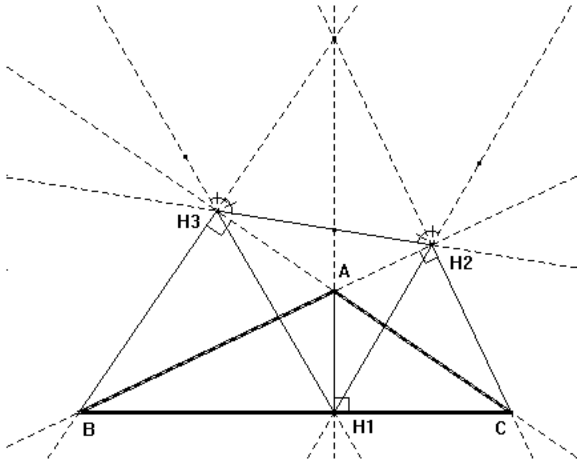


Figura 31: BH3 e CH2 são bissetrizes externas do Δ H1H2H3 (órtico do Δ ABC)

d) Existe uma dualidade entre Ortocentro e Circuncentro de um triângulo com Circuncentro e Ortocentro respectivamente do triângulo A'B'C' onde A', B'e C' são simétricos do circuncentro do triângulo ABC em relação aos lados AB, BC e AC de acordo com Ferrarezi, Passos e Barbosa (2003).

Outros pontos notáveis receberam denominações correspondentes aos seus descobridores, como é o caso de Pontos de Gergonne, Ponto de Lemoine, Ponto de Nagel, Pontos de Euler, etc.

No caso de Ponto de Gergonne, as cevianas relativas aos pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados do triângulo também são concorrentes, a mesma questão acontece para circunferências ex-inscritas.

Finalmente, do exposto verifica-se que o jogo de Beirne é adequado ao tratamento matemático/geométrico, quando utilizamos o tabuleiro de Configuração Simples e suas transformações para conteúdos abordados no ensino fundamental.

3.4.3 Cevianas de um triângulo

Alguns autores definem altura, mediana e bissetriz como segmentos que *unem* um vértice do triângulo a um ponto do lado oposto sob as condições específicas correspondentes, que podem ocasionar interpretações dúbias. No caso da altura, por exemplo, os segmentos MN ou M´N´, Figura 32, unem o vértice A a um ponto do seu lado oposto.

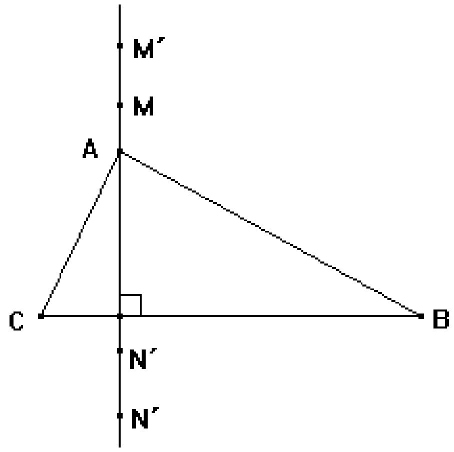


Figura 32: Triângulo com segmento

Entretanto a conceituação dada, no caso das alturas, ocasionou a restrição que impusemos no caso do triângulo ser acutângulo para que houvesse concorrência em ponto interior ao triângulo, pois no triângulo retângulo o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto e no obtusângulo não haveria ponto de concorrência (Figura 33).

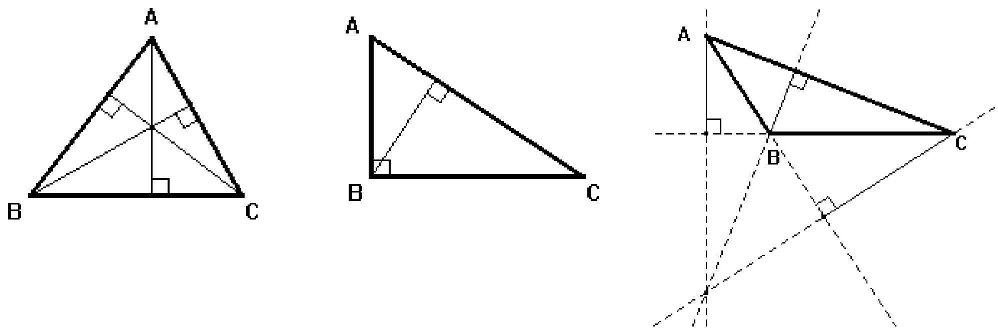


Figura 33: Alturas

Convém, no entanto, lembrarmos que essas conceituações por segmento são empregadas quando se trata de estabelecimento de fórmulas dos cálculos da altura, mediana e bissetriz interna.

Diante do exposto preferiremos introduzir o conceito de **Cevianas**, resgatando uma conceituação clássica da Geometria, além de permitir a inclusão de conceitos correlatos, como é o caso das bissetrizes externas.

Consideraremos:

*Uma reta é **Ceviana** de um triângulo se e somente se um vértice pertence à reta.* Utilizando esse conceito usaremos as alturas, medianas, as bissetrizes internas e as bissetrizes externas como cevianas.

Em particular, com esta conceituação, em qualquer triângulo as alturas são concorrentes num único ponto. Permitimos lembrar que as mediatrizes não são cevianas.

Sugestão de uso em sala de aula

Sugestão resumida do procedimento para o professor introduzir os conceitos, sendo conveniente fazer exemplos numéricos conforme Situação 1 e 2, inseridas no Capítulo 2.

1) Apresentar o jogo aos alunos, com jogadas livres;
2) Incentivar a descoberta de estratégias;
3) Introduzir os elementos do tabuleiro, principalmente a denominação ceviana e casos especiais de ceviana: mediana, bissetriz e altura;
4) Mostrar quando não são concorrentes, não se cruzam, não têm ponto notável;
5) Explorar as condições em que há concorrência;
6) Utilizar a Propriedade Recíproca de Ceva, empregar o caso da mediana, ver Matemática Subjacente;
7) Fornecer os nomes dos pontos de concorrência;
8) Incentivar novas modificações no tabuleiro eestratégias.

3.5 Configuração Desargueana de triângulos perspectivos

Também foi preparado por nós após um estudo completo de estratégias, o jogo de Beirne sobre uma nova configuração composta por 10 linhas e 10 células, sendo 3 em cada linha (Figura 31), que temos denominado Configuração Desargueana.

O jogo disputado sobre um tabuleiro com esta configuração tem por objetivo introduzir o conceito de figuras perspectivas (triângulos perspectivos), e colinearidade de pontos de intersecção de retas e em especial o Teorema de Desargues. Para a colinearidade pode-se empregar a propriedade de Menelaus (de Alexandria, c. 100), considerada Teorema Gêmeo da propriedade de Ceva.

Cada jogador escolhe sua marca ou fichas e jogam alternadamente numa célula qualquer. Seja A o primeiro jogador e B o segundo, para os quais indicaremos com Ai a i-ésima jogada de A e com Bj a j-ésima jogada de B.

- **Obtendo estratégias para o jogo na Configuração Desargueana**

A seguir mostraremos, em parte, com um só exemplo, como se estabelecem as estratégias, que são similares para as saídas das jogadas nos triângulos de vértices nas células 1,9,8 e 3,7, 9.

Seja o jogador A o primeiro jogador iniciando na célula 1 e B o oponente na célula 2.

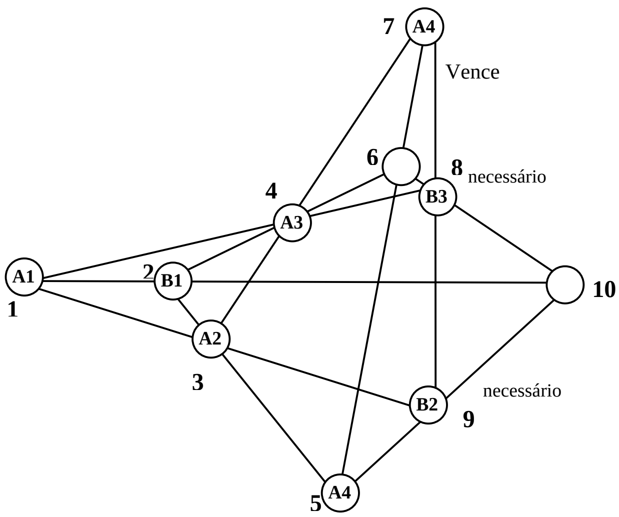


Figura 34: Configuração Desargueana

Observamos que a terceira jogada de B tem duas alternativas necessárias: ou célula 7 ou célula 8. Desde que deve optar por uma delas, por exemplo a 8, automaticamente A4 será na célula 7, conseguindo três em linha, vencendo o jogo. Analogamente, estudamos todas as outras possibilidades, estabelecendo em cada caso a estratégia.

Em nosso entender, o jogo de Beirne sobre essa configuração, pode ser aplicado com sucesso no Ensino Médio, não só por introduzir a noção de perspectiva, mas principalmente pelo fato de que a colinearidade dos pontos de intersecção dos lados homólogos dos triângulos perspectivos ser aceita com simples uso de noções da intersecção de planos da geometria no espaço, Figura 35.

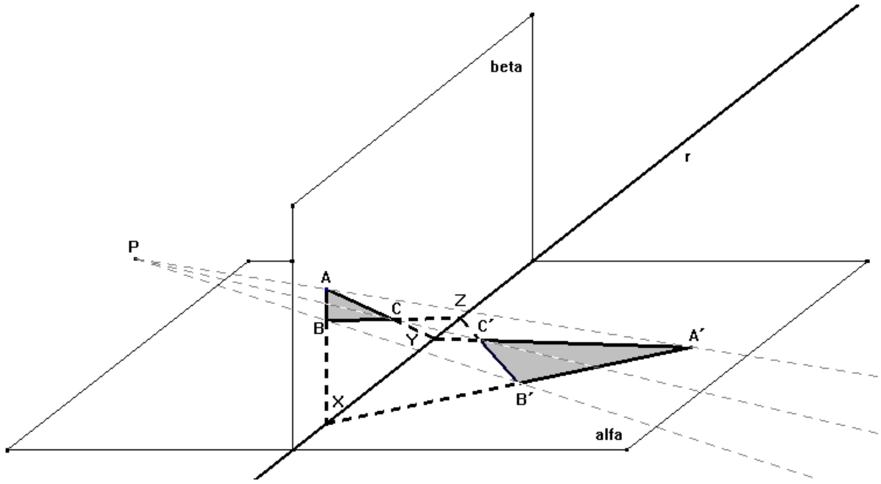


Figura 35: Intersecção de planos

Por outro lado, o jogo pode ser utilizado em disciplinas de Geometria dos Cursos de Licenciatura, quando o emprego da propriedade de Menelaus[1] será mais conveniente. Curiosamente, constata-se que na Configuração Simples (Figura 16) temos a Configuração Desargueana. Nesta situação basta considerar os triângulos perspectivos de células 1, 2, 3 e 4, 5, 6; são perspectivos em relação ao ponto da célula 7.

Dedicamos em nossa pesquisa, especial atenção a algumas configurações mais interessantes adequadas ao desenvolvimento do Tri-Hex. Esta conduta nos permitiu introduzir de maneira lúdica o conceito de ceviana e propriedade da concorrência de cevianas especiais. Trabalhamos algumas extensões dessa propriedade com o emprego unificador do Teorema de Ceva. Empregamos, em particular, uma configuração especial, a de triângulos perspectivos do Teorema de Desargues quando, proposital e rapidamente, tivemos oportunidade de aludir à propriedade de Menelaus. De modo análogo, cuidamos ou apenas relacionamos outras configurações adequadas ao uso do Tri-Hex, buscando inserir na presente dissertação alternativas lúdicas para o trabalho do professor em sala de aula, mas com vistas a possíveis desenvolvimentos de outros conteúdos matemáticos.

[1] Uma condição necessária e suficiente para que três pontos D, E e F das retas dos lados de um ΔABC sejam colineares é que (DBC)(ECA)(FAB) = -1

3.6 Introduzindo a propriedade unificadora

Uma característica comum a todas as cevianas que as fazem ser concorrentes num único ponto é satisfazer a Propriedade Unificadora que foi descoberta pelo italiano Ceva[2].

A Propriedade:

Dado um triângulo ABC,

"Se as cevianas, de A, de B e de C, com pontos de interseção respectivamente α, β, e δ com os lados opostos, são concorrentes, então:

$$(\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}})(\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}})(\frac{\overline{\delta A}}{\overline{\delta B}}) = -1$$

Todos segmentos (com traço superior) indicam segmentos orientados. A propriedade anterior pode ser indicada no seu produto com outra notação, fácil de ser obtida por permutação circular de suas letras latinas ou gregas respectivamente:

$$(\alpha BC)(\beta CA)(\delta AB) = -1$$

Na verdade usa-se a recíproca (da condicional $p \rightarrow q$ é a condicional $q \rightarrow p$) da propriedade unificadora; isto é, vale:

"Se $(\alpha BC)(\beta CA)(\delta AB) = -1$ então, as cevianas de A, de B e de C, com pontos de interseção respectivamente α, β, e δ com os lados opostos, são concorrentes".

Nas duas situações seguintes, acrescemos atividades bastante distintas e julgadas originais.

Situação 1

Consideremos um triângulo ABC com med BC = 7 unidades, med CA = 5 unidades e med AB = 6 unidades. Sejam:

x interior a BC tal que x B = 3,

y interior a CA tal que y C = 2,

e z interior a AB tal que z A = 4;

pois assim teremos o produto (x B C) (y C A) (z A B)

$$= (-3/4)(-2/3)(-4/2) = -1$$

[2] Giovanni Ceva, matemático, nascido em Milão (1647-1734).

portanto, pela propriedade unificadora podemos garantir a concorrência das cevianas.

A construção exibida na Figura 36 correspondente, é julgada auto-instrutiva.

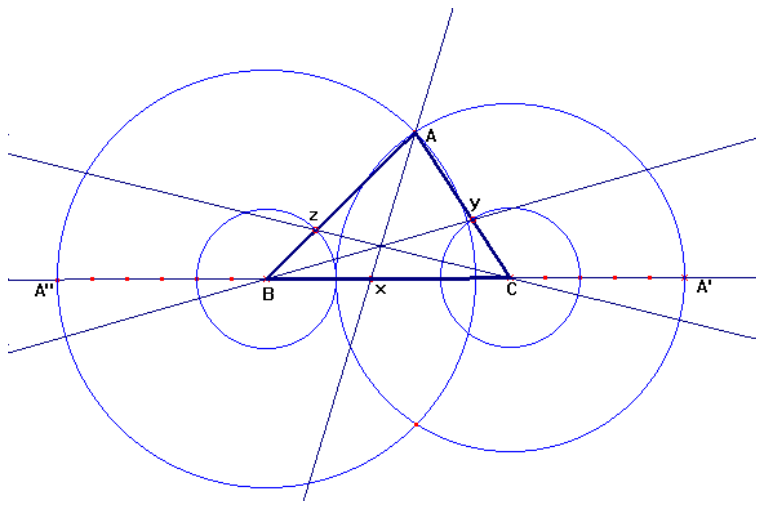


Figura 36: Concorrência de cevianas

Situação 2

Considerar um triângulo ABC com med BC = 7 unidades, med CA = 5 unidades e med AB = 8 unidades.

Sabe-se que: 1) a ceviana de B com o ponto de intersecção y no lado CA é tal que yC=3; 2) a ceviana de C com ponto de intersecção z no lado AB é tal que zA=5.

Pede-se: determinar o ponto de intersecção x no lado BC da ceviana de A, de tal forma que as cevianas sejam concorrentes.

Devemos ter (x B C) (y C A) (z A B) = (x B C) (-3/2) (-5/3) = - 1; de onde obtém-se (x B C) = - 2/5, ou que x B = 2 (Figura 37)

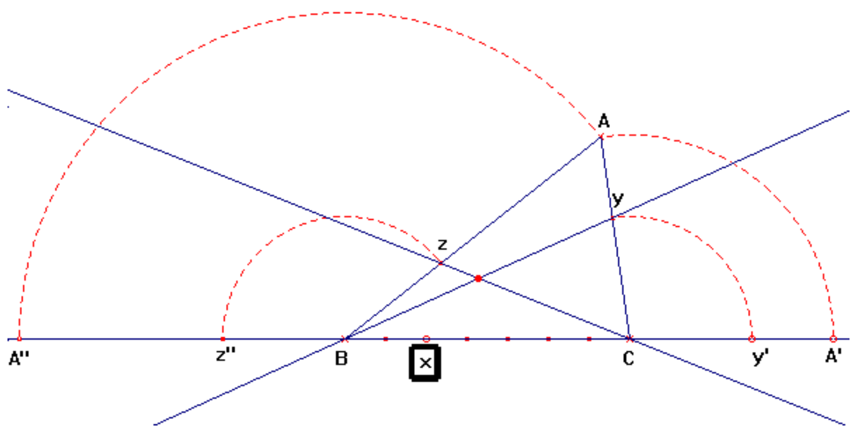


Figura 37: Intersecção de cevianas

3.6.1 Teorema de Ceva

Consideremos um ΔABC qualquer e sejam três cevianas, Aα, Bβ e Cδ, com $\alpha \in$ BC, $\beta \in$ CA e $\delta \in$ AB.

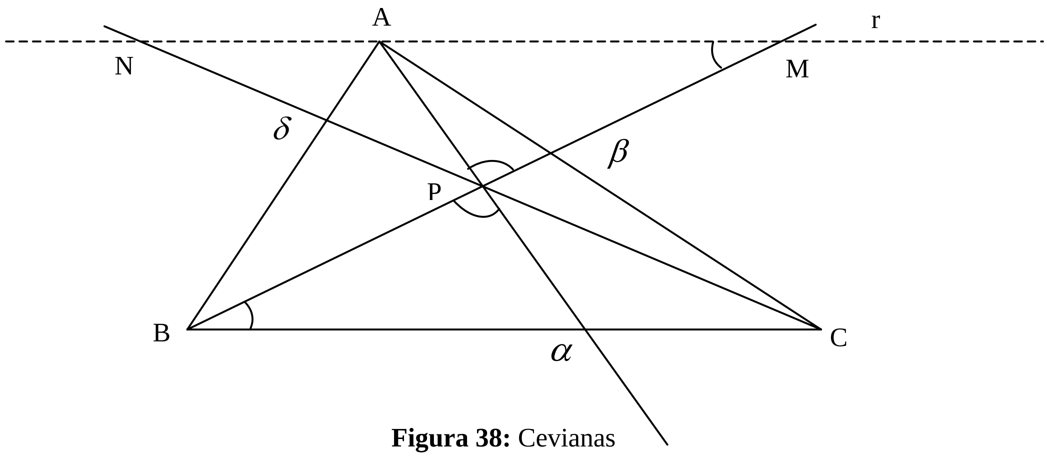


Figura 38: Cevianas

Os pontos α, β e δ determinam sobre os lados do ΔABC três razões (αBC) =αB/αC, (βCA) =βC/βA e (δAB) = δA/δB (de simples memorização desde que podem ser obtidos por permutação circular das letras, latinas ou gregas) considerados os seus sinais em função da orientação dos segmentos.

Teorema

A igualdade (αBC) (βCA) (δAB) = -1 é condição necessária e suficiente para que as cevianas sejam concorrentes em um ponto P.

Prova (Condição Necessária)

Seja P o ponto de concorrência, construímos r // BC por A, determinando M e N nas cevianas Bβ e Cδ, respectivamente.

ΔPBα $\approx$ ΔPMA, pois possuem dois ângulos congruentes,

$\rightarrow$ Bα/AM = Pα/PA (1)

ΔPCα $\approx$ ΔPNA

$\rightarrow$ Cα/AN = Pα/PA (2)

(1) e (2) $\rightarrow$ Bα/AM = Cα/AN

$\rightarrow$ Bα/ Cα= AM/AN (3)

$$\left.\begin{array}{l}\Delta BC\beta \approx \Delta MA\beta \\ \rightarrow C\beta / A\beta = BC/AM \ (4) \\ \Delta BC\delta \approx \Delta NA\delta \\ \rightarrow A\delta / B\delta = NA/BC \ (5)\end{array}\right\} \frac{C\beta}{A\beta}\cdot\frac{A\delta}{B\delta}=\frac{AN}{AM} \ (6)$$

(2) e (6)

$$\frac{B\alpha}{C\alpha}\cdot\frac{C\beta}{A\beta}\cdot\frac{A\delta}{B\delta}=1 \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\delta A}{\delta B}=1$$

Supondo P interior ao ΔABC, então α, β e δ são interiores aos lados do triângulo, e portanto considerando os segmentos orientados, Figura 39, cada razão é negativa, então: $(\alpha BC)(\beta CA)(\delta AB) = -1$

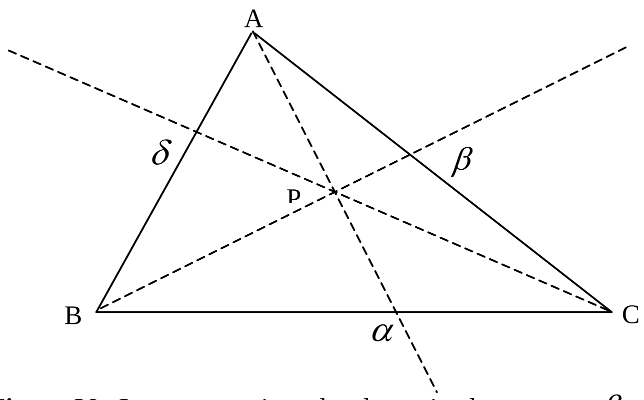


Figura 39: Segmentos orientados determinados por α, β e δ

No caso de P exterior, necessariamente duas razões são positivas e uma negativa, continuando a igualdade

$$(\alpha BC)(\beta CA)(\delta AB) = -1$$

<u>Prova</u> (Condição Suficiente)
Sejam α, β e δ os três pontos de interseção, respectivamente das cevianas de A, de B e de C, com os lados opostos BC, AC e AB, tais que é verificada a igualdade de Ceva

$$(\alpha BC)(\beta CA)(\delta AB) = -1 \qquad (I)$$

Provemos que (I) é suficiente para que as cevianas sejam concorrentes;

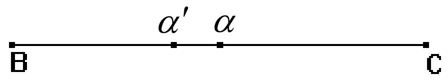
Seja P o ponto comum a duas cevianas, por exemplo de B e de C. Supomos que a ceviana de A que possui P interseciona BC num ponto α', por hora distinto de α.

Pela condição necessária temos

$$(\alpha' BC)(\beta CA)(\delta AB) = -1 \quad \text{(II)}$$

Comparando I e II obtemos

$$(\alpha' BC) = (\alpha BC)$$



de onde, pela unicidade do ponto que divide o segmento BC numa razão dada, resulta que $\alpha' \equiv \alpha$ ou que a ceviana $A\alpha$ também é concorrente em P. O nome ceviana, do francês “cévienne”, foi proposto por S. J. Poulain, professor na Facultá Catholique d´Angel, no Journal de Mathématique Élèmentaire, em 1888.

3.6.2 Aplicações do Teorema de Ceva

Aplicação 1: Concorrência das medianas – Concorrências de Cevianas – (Centróide, Baricentro ou Centro de Gravidade). Seja o ΔABC e M_A, M_B e M_C, respectivamente os pontos médios dos lados BC, AC e AB.

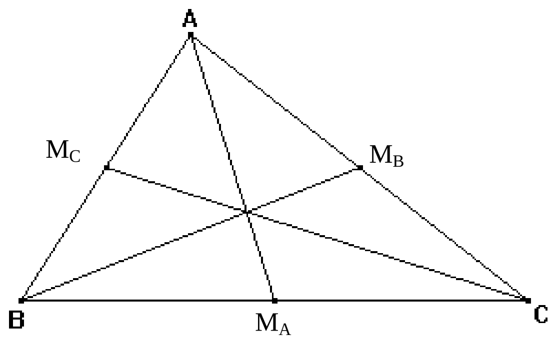


Figura 40: Medianas

Desde que $(M_A BC) = -1$, $(M_B CA) = -1$ e $(M_C AB) = -1$, segue que

$$(M_A BC)\ (M_B CA)\ (M_C AB) = -1$$

e, portanto pela condição suficiente do Teorema de Ceva podemos garantir que as medianas são concorrentes.

<u>Aplicação 2</u>: Concorrência das bissetrizes internas (Incentro)

Seja o ΔABC e I_A, I_B e I_C, respectivamente os pontos de interseção das bissetrizes internas dos ângulos A, B e C com os lados opostos.

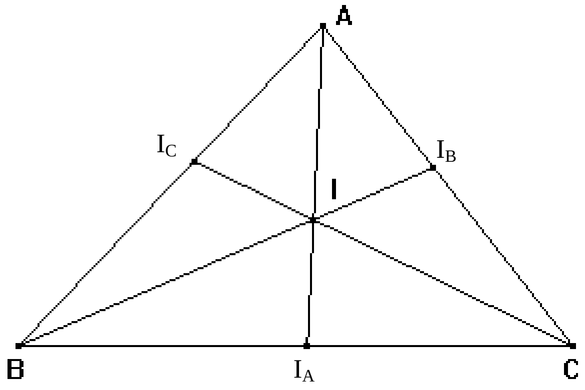


Figura 41: Bissetrizes internas

Pelo Teorema da Bissetriz Interna, a seguir, sabemos que qualquer bissetriz interna divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados do ângulo, assim:

$$\frac{I_A B}{I_A C} = \frac{AB}{AC} \ \text{(I)} \qquad \frac{I_B C}{I_B A} = \frac{BC}{BA} \ \text{(II)} \qquad \frac{I_C A}{I_C B} = \frac{CA}{CB} \text{(III)}$$

$$\text{(I) . (II) . (III)} \ \rightarrow \ \frac{I_A B}{I_A C} \cdot \frac{I_B C}{I_B A} \cdot \frac{I_C A}{I_C B} = 1$$

Desde que I_A, I_B e I_C são internos aos segmentos-lados do triângulo segue que, no caso de considerarmos segmentos orientados, cada razão é negativa, portanto:

$$(I_A\, BC)\ (I_B\, CA)\ (I_C\, AB) = -1$$

e pela condição suficiente do Teorema de Ceva, resulta que as cevianas são concorrentes. O ponto de concorrência (I) chama-se Incentro. O Incentro recebe esse nome por ser o centro da circunferência inscrita ao ΔABC, o que resulta do fato de que toda bissetriz é Lugar Geométrico dos pontos que eqüidistam dos lados do ângulo.

Teorema da Bissetriz Interna (Teorema Usual)

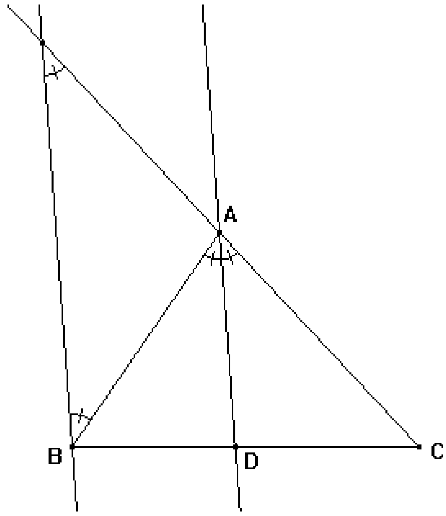


Figura 42: Paralela à bissetriz

Seja a bissetriz AD do ângulo A. Construímos por B a reta paralela à bissetriz, Figura 42, até cruzar o prolongamento, do lado AC em B.

Temos: $\begin{cases} A\hat{B}E = B\hat{A}D \text{ (alternos internos formados por paralelas)} \\ A\hat{E}B = C\hat{A}D \text{ (correspondentes formados por paralelas)} \end{cases}$

Mas, $B\hat{A}D = C\hat{A}D$ pela construção da bissetriz, então $A\hat{B}E = A\hat{E}B$ que implica que o ΔABE é isósceles, de onde AE = AB.

Pelo Teorema e Tales (feixe de paralelas), temos:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AE}{AC} \quad \text{ou} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

<u>Aplicação 3</u>: Concorrência de duas bissetrizes externas e uma interna.

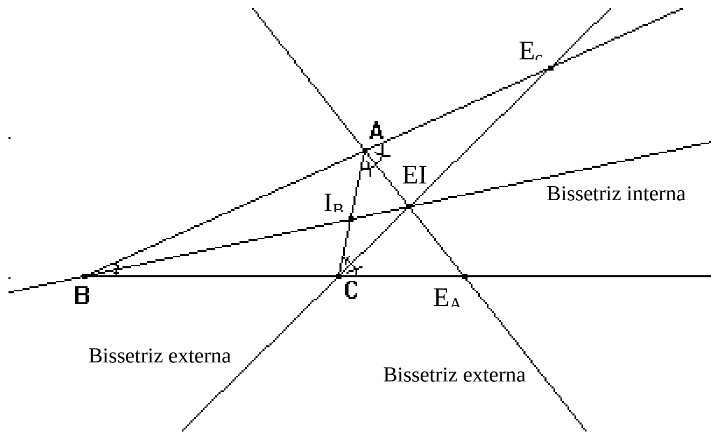


Figura 43: Bissetrizes externas e uma interna

A demonstração é análoga à da aplicação anterior, apenas emprega o Teorema da Bissetriz Externa.

Teorema da Bissetriz Externa

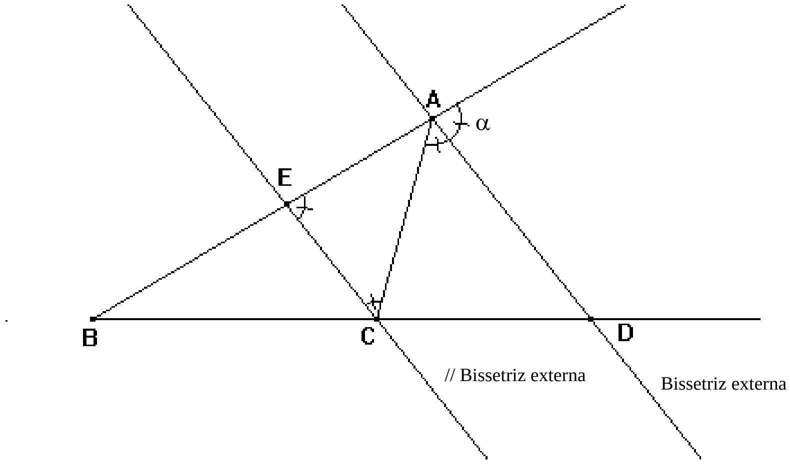


Figura 44: Bissetriz externa

Seja AD a bissetriz externa e D um ponto de interseção com o prolongamento do lado BC, Figura 44.

Construção: CE // AD pelo Teorema de Tales (feixe de paralelas)

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} \quad \text{(I)}$$

mas $\begin{cases} A\hat{C}E = D\hat{A}C & \text{(alternos internos formados por paralelas)} \\ A\hat{E}C = \alpha & \text{(correspondentes formados por paralelas)} \end{cases}$

$\rightarrow$ $A\hat{C}E = A\hat{E}C$ pois $D\hat{A}C = \alpha$ pela construção da bissetriz externa.

$\rightarrow$ Δ ACE é isósceles

$\rightarrow$ AE = AC

Substituindo em (I) temos $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$

Resulta que temos três desses pontos de concorrência, pois temos três bissetrizes internas. Esses três pontos são chamados EX-INCENTROS desde que são centros, respectivamente, de circunferências - tangentes externamente aos três lados do triângulo.

Aplicação 4: Concorrência das Alturas

Seja o ΔABC e H_A, H_B e H_C respectivamente os pontos de interseção das perpendiculares (pés) dos vértices A, B e C com os lados opostos, Figura 45.

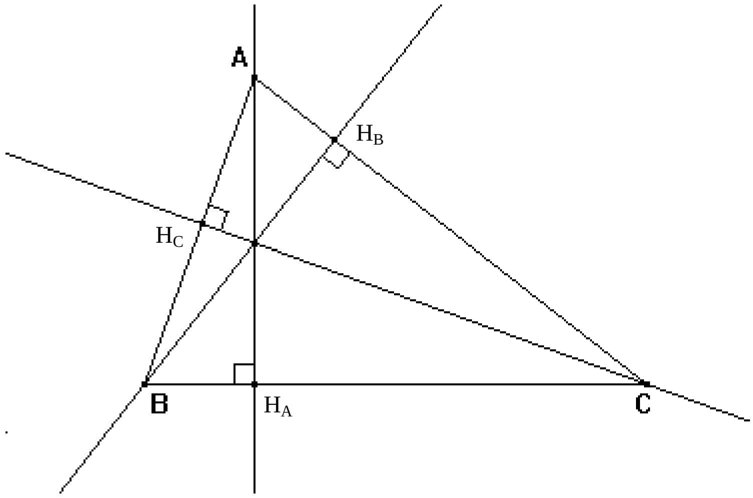


Figura 45: Interseção das perpendiculares

Temos,

a) $\Delta ACH_C \approx \Delta ABH_B$ (dois ângulos congruentes: um reto e $\hat{A}$ comum)

$$\rightarrow \frac{H_C A}{H_B A} = \frac{AC}{AB} \quad \text{(I)}$$

b) $\Delta BAH_A \approx \Delta ABH_C$ (um reto e $\hat{B}$ comum)

$$\rightarrow \frac{H_A B}{H_C B} = \frac{AB}{BC} \quad \text{(II)}$$

c) $\Delta CBH_B \approx \Delta CAH_A$ (um reto e $\hat{C}$ comum)

$$\rightarrow \frac{H_B C}{H_A C} = \frac{CB}{CA} \quad \text{(III)}$$

(I) . (II) . (III)

$$\frac{H_C A}{H_B A} \cdot \frac{H_A B}{H_C B} \cdot \frac{H_B C}{H_A C} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{H_A B}{H_A C} \cdot \frac{H_B C}{H_B A} \cdot \frac{H_C A}{H_C B} = 1$$

Considerando segmentos orientados e que os três pés de alturas são internos aos lados temos:

$$(H_A BC)(H_B CA)(H_C AB) = -1$$

Portanto, pela cond. suf. do Teorema de Ceva as três cevianas (alturas) são concorrentes, Figura 46.

Observação: No caso de um pé de altura ser externo ao lado, obrigatoriamente mais um pé é externo e, novamente o produto é –1, pois duas razões são positivas e uma negativa.

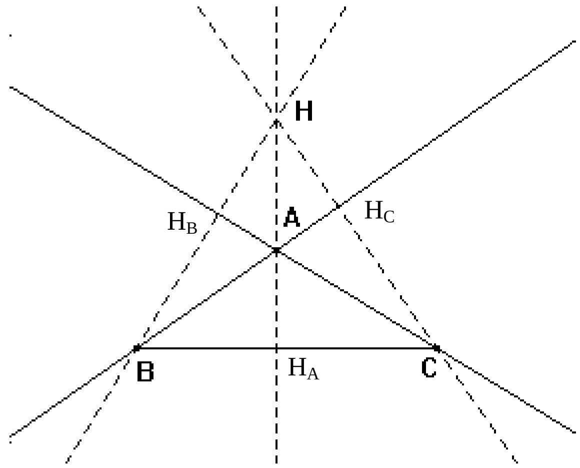


Figura 46: Alturas concorrentes

<u>Aplicação 5</u>: Concorrência das Cevianas aos pontos de Tangência (Pontos de Gergonne[3])

Sejam α, β e δ os pontos de tangência da circunferência inscrita, Figura 47, ao triângulo nos lados BC, CA e AB.

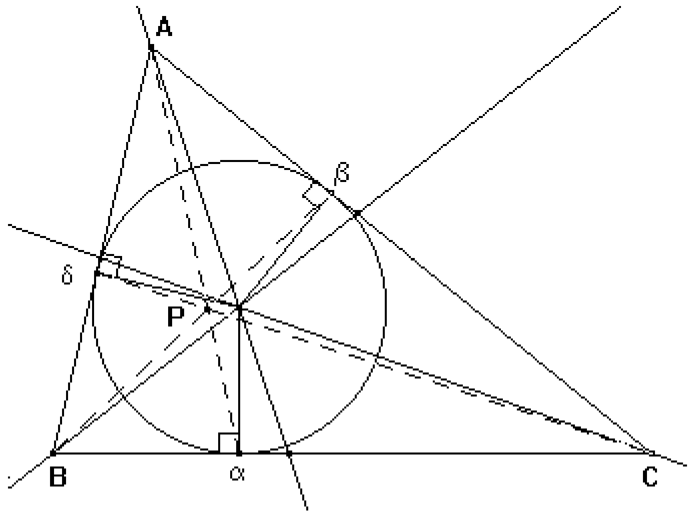


Figura 47: Cevianas determinando o Ponto de Gergone

[3] G.D. Gergonne, nasceu em Nancy (1771-1859), trabalhou na Universidade de Montpellier, fundador da revista Annales des Mathematiques.

Pela Aplicação 2, sabemos que o Incentro é centro dessa circunferência inscrita e, encontra-se na concorrência das bissetrizes internas, portanto temos as igualdades:

$A\delta = A\beta$ ou $\delta A / \beta A = 1$ (I)
$B\alpha = B\delta$ ou $\alpha B / \delta B = 1$ (II)
$C\beta = C\alpha$ ou $\beta C / \alpha C = 1$ (III)

(I) . (II) . (III) $\Rightarrow \dfrac{\alpha B}{\alpha B} . \dfrac{\beta C}{\beta A} . \dfrac{\delta A}{\delta B} = 1 \Rightarrow (\alpha BC)(\beta CA)(\delta AB) = -1$

e pela cond. suf. do Teorema de Ceva[4] as Cevianas Aα, Bβ e Cδ são concorrentes. Esse ponto de concorrência é chamado Ponto de Gergonne. Como temos três circunferências ex-inscritas temos mais três pontos de Gergonne.

3.6.3 Concorrência de cevianas e colinearidade

(em nível de graduação, formação continuada de professores)

Julgamos que os jogos tipo Tri-Hex possam ser utilizados com alunos de Matemática em nível de graduação ou formação continuada de professores e com os mesmos objetivos. Resulta-nos a conveniência de cuidarmos das provas das concorrências das principais cevianas e colinearidade com recursos mais avançados. Assim posto, tratamos do tema via Álgebra Vetorial.

Na busca de uniformidade de tratamento, conseguimos provar as concorrências das medianas, das bissetrizes (internas), das bissetrizes (duas externas e uma interna), e das alturas, preferindo utilizar as equações vetoriais respectivas, e não outras provas alternativas. Desenvolvemos também um estudo vetorial relativo à colinearidade.

3.6.4 Concorrência das Cevianas Principais por Álgebra Vetorial

Das medianas

Consideramos um ΔABC (Figura 48).

Sejam M, M'e M" os pontos médios respectivamente dos lados BC, AC e AB.

---

[4] Justificamos nossa denominação "propriedade unificadora" pelo fato de que a recíproca do Teorema de Ceva constitui um método para todos os casos de concorrência. Lembramos que existem provas usuais e particulares para cada situação em livros de Geometria, assim, por exemplo, citamos a obra Fundamentos da Matemática Elementar, 9: Geometria Plana. DOLCE, POMPEO (1993).

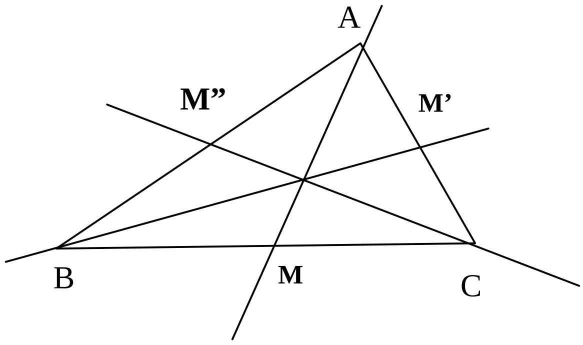


Figura 48: Medianas

- **Equações vetoriais das medianas**

a) Seja P∈ mediana de A

P – A = λ (M – A), e sendo M médio de BC
temos P – A = (λ/2) [(B – A) + (C – A)] (I)

b) Seja Q∈ mediana de B

Q – B = μ (M’ – B), e analogamente obtemos
Q– B = (μ/2)[(C – B) + (A – B)] (II)

c) Seja R∈ mediana de C

R – C = ρ (M”- C), e da mesma maneira obtemos
R – C = (ρ/2)[(A – C) + (B – C)] (III)

- **Intersecções das medianas**

a) mediana de A com a de B

Fazendo P ≡ Q em I e II podemos escrever

A + (λ/2) [(B – A) + (C – A)] = B + (μ/2)[(C – B) + (A – B)]

Transformamos o vetor (C – B) de tal forma que tenhamos só os vetores (C – A) e (B – A), que são linearmente independentes (LI)

A + (λ/2) [(B – A) + (C – A)] = B + (μ/2)[(C – A) + (A – B) + (A – B)]

que implica a igualdade vetorial

$$(\lambda/2 + \mu - 1)\,(B – A) = (\mu/2 - \lambda/2)\,(C – A)$$

de onde por serem LI necessariamente teremos o anulamento dos seus coeficientes

$$\mu/2 - \lambda/2 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda/2 + \mu - 1 = 0$$

que implica a igualdade $\lambda = \mu = 2/3$.

b) mediana de A com a de C

Fazendo P ≡ R em I e III , e usando o mesmo procedimento análogo encontramos $\lambda = \rho = 2/3$. Desde que λ tem o mesmo valor, em ambas as intersecções, resultam que P ≡ Q ≡ R, ou que as *três medianas são concorrentes num único ponto*.

- **Posicionamento do ponto de concorrência nas medianas**

Indicando, em (I), com G o ponto de concorrência P temos

$$G - A = (2/3)\,(M - A) = (2/3)\,[(M - G) + (G - A)]$$

$$\Rightarrow \mathbf{G - A = 2\,(M - G)}$$

Analogamente obtivemos

$$\mathbf{G - B = 2\,(M' - G)} \quad \text{e} \quad \mathbf{G - C = 2\,(M'' - G)}$$

- **Posicionamento do ponto de concorrência em função de um ponto arbitrário do plano**

Trocando, em (I), P por G encontramos $G = A + [(B - A) + (C - A)]/3$

Introduzindo um ponto O arbitrário (do plano ou do espaço):

$$G - O = (A - O) + [(B - O) - (A - O) + (C - O) - (A - O)]/3$$

$$\Rightarrow \mathbf{G - O = [(A - O) + (B - O) + (C - O)]/3}$$

Em Mecânica e também em livros de Cálculo Vetorial, como em Breton (1948) ou Bouligand (1924), baricentro ou centróide dos pontos A1, A2, ... An, com massas m1, m2, ... mn, o ponto

$$G = O + [\sum mi(Ai - 0)]/ \sum mi$$

Segue que, no caso particular de nosso ponto G, cruzamento das medianas, as massas são unitárias.

- **Coordenadas do ponto de concorrência das medianas**

Consideremos O a origem de um sistema cartesiano ortogonal bidimensional.

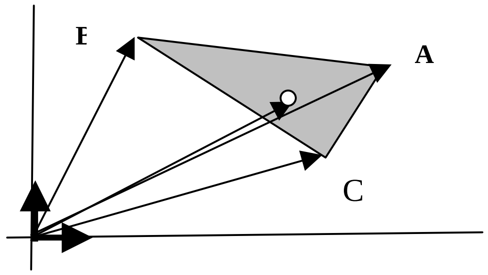


Figura 49: Vetores do vértice

Sejam os vetores dos vértices do triângulo ABC dados em função das suas coordenadas, e pelos versores dos eixos

$$A - O = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$$
$$B - O = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}$$
$$C - O = x_C \vec{i} + y_C \vec{j}$$

E, o vetor do baricentro G dado por $G - O = x\vec{i} + y\vec{j}$

Substituindo na expressão baricêntrica de B.1.5, identificando os coeficientes, encontramos as fórmulas das coordenadas de G:

$$x = (x_A + x_B + x_C)/3 \quad \text{e} \quad y = (y_A + y_B + y_C)/3$$

isto é, são as médias aritméticas das coordenadas dos vértices.

Das bissetrizes internas

Consideramos o ΔABC (Figura 50) com os versores

$$\vec{a} = (C - B)/a$$
$$\vec{b} = (C - A)/b$$
$$\vec{c} = (B - A)/c$$

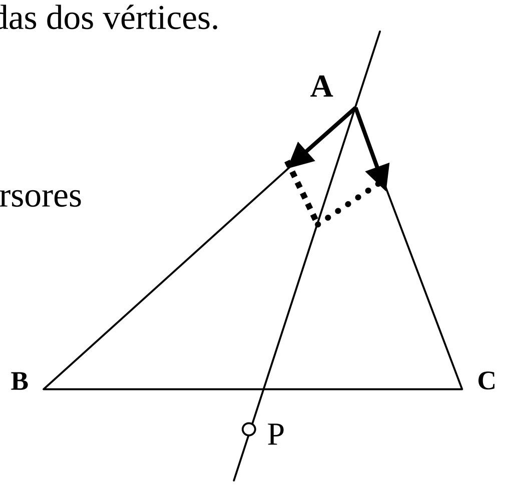


Figura 50: Bissetriz interna

- **Equações vetoriais das bissetrizes**

Seja P ∈ bissetriz de A

A soma dos versores de C – A e de B – A é paralela à bissetriz de A; portanto temos P = A + λ [(C – A)/b + (B – A)/c].

1) e 3) Sejam Q ∈ bissetriz de B e R ∈ bissetriz de C

Analogamente encontramos as equações das duas outras bissetrizes internas, o que pode ser obtido facilmente por permutação circular de A, B e C, e de a, b e c:

$$Q = B + \mu [(A - B)/c + (C - B)/a]$$
$$R = C + \rho [(B - C)/a + (A - C)/b]$$

- **Intersecções das bissetrizes**

a) bissetriz de A com a bissetriz de B (P ≡ Q)

$$A + \lambda [(C - A)/b + (B - A)/c] = B + \mu [(A - B)/c + (C - B)/a]$$

Transformando o vetor (C- B) de tal forma que tenhamos só os vetores C – A) e B – A, que são LI, encontramos:

$$(\lambda/b - \mu/a)\ (C - A) = (\ 1 - \lambda/c - \mu/a - \mu/c)\ (B - A)$$

que nos fornece no primeiro anulamento $\mu = a\lambda/b$

e por substituição no segundo anulamento $\lambda = bc/(a + b + c)$

e em seguida $\mu = ac/(a + b + c)$

b) bissetriz de A com bissetriz de C ($P \equiv R$)

Analogamente obtivemos $\lambda = bc/(a + b + c)$

$\rho = ab/(a + b + c)$

Novamente, por ter λ o mesmo valor em ambas interseções, concluímos que as bissetrizes internas são concorrentes num único ponto.

- **Posicionamento do ponto de concorrência em função de um ponto arbitrário**

Indicando $P \equiv Q \equiv R$ com I (inicial de incentro) teremos a sua expressão dada:

$$I = A + bc/(a + b + c)\ [(C - A)/b + (B - A)/c]$$

e introduzindo uma origem arbitrária O teremos

$$I - O = [a(A - O) + b\ (B - O) + c\ (C - O)]\ /\ (a + b + c)$$

Portanto, em conseqüência, o incentro I é baricentro de A, B e C com massas a, b e c, medidas dos lados opostos do triângulo ABC.

Das alturas

Consideramos o ΔABC, e sejam D, E e F os "pés" das perpendiculares respectivamente de A, B e C nas retas dos lados (Figura 51).

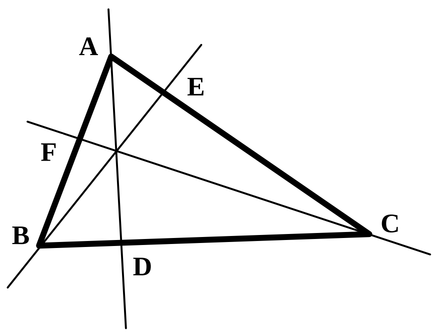


Figura 51: Pés das perpendiculares

- **Equações vetoriais das alturas**

a) Seja $P \in$ altura de A

Temos AD = BD. tg B e AD = CD. tg C
portanto (D – B) tg B = (C – D) tg C
ou [(D –A) + (A – B)] tg B = [(C – A) + (A – D)] tg C
que implica D – A = [(B – A) tg B + (C – A) tg C] / (tg B + tg C)

Desde que $P = A + \lambda (D - A)$ segue que

$$P = A + \lambda\, [(B - A) \operatorname{tg} B + (C - A) \operatorname{tg} C] / (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) \qquad \text{(I)}$$

b) Seja $Q \in$ altura de B
Analogamente encontramos

$$Q = B + \mu\, [(C - B) \operatorname{tg} C + (A - B) \operatorname{tg} A] / (\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A) \qquad \text{(II)}$$

que pode ser obtida facilmente por permutação circular de A, B e C.

c) Seja $R \in$ altura de C
Da mesma maneira obtivemos

$$R = C + \rho\, [(A - C) \operatorname{tg} A + (B - C) \operatorname{tg} B] / (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B) \qquad \text{(III)}$$

- **Intersecção das alturas**

a) da altura de A com a altura de B ($P \equiv Q$)

Igualando as equações de P e de Q; depois, deixando a equação resultante em λ e μ, só em função dos vetores B – A e C – A , que são LI, encontramos

$$[\, \lambda \operatorname{tg} C / (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) - \mu \operatorname{tg} C\, (\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A)]\, (C - A)$$

$$= [\, 1 - \lambda \operatorname{tg} B\, (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) - \mu\,]\, (B - A)$$

que fornece por anulamento do primeiro coeficiente

$$\mu = \lambda\, (\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A) / (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$$

e por substituição no segundo anulamento que

$$\lambda = (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) / (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$$

e em seguida $\mu = (\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A) / (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$

b) da altura de A com a altura de C ($P \equiv R$)

Com procedimento análogo encontramos

$$\lambda = (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) / (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$$

$$\rho = (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} A) / (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$$

De novo, por ter λ o mesmo valor, concluímos que as três alturas são concorrentes num único ponto.

- **Posicionamento do ponto de concorrência das alturas em função de uma origem arbitrária**

Indicando P ≡ Q ≡ R com H teremos a expressão de H dada por:

$$H = A + [(B – A) \text{ tg } B + (C – A) \text{ tg } C] / (\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C)$$

e introduzindo uma origem O arbitrária obtivemos

$$H – O = \{[\text{tg } A\ (A – O) + \text{tg } B\ (B – O) + \text{tg } C\ (C – O)] / (\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C)\}$$

Portanto, em conseqüência, o ortocentro H é baricentro de A, B e C, com massas iguais às tangentes trigonométricas dos seus ângulos.

No caso do triângulo ABC ser retângulo, a igualdade baricêntrica fornecerá uma indeterminação; entretanto não é difícil afastá-la. Seja med $\angle$ A= $\pi/2$, basta considerarmos não esse valor mas a sua tendência a esse valor; assim no limite lim (H – 0)=lim [(A - O)+(B – O)tg B/tg A+(C – O)tg C/tg A] / (1 + tg B/ tg A + tg C / tg A) = A – O ou que H tende ao vértice A do triângulo retângulo.

De duas bissetrizes externas e uma interna

Consideramos um ΔABC (Figura 52)

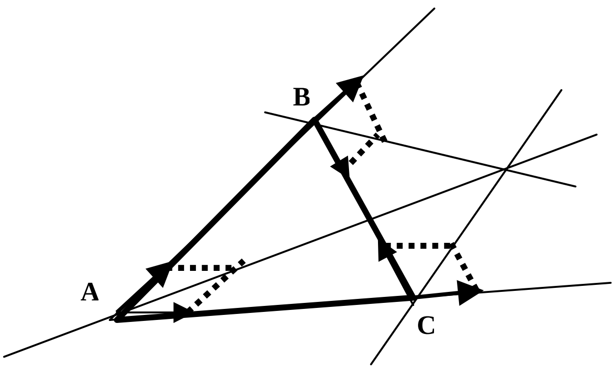


Figura 52: Bissetrizes externas

Sejam os mesmos versores dos lados:

$$\vec{a} = (C - B)/a$$

$$\vec{b} = (C - A)/b$$

$$\vec{c} = (B - A)/c$$

É importante observar que na composição dos versores para a bissetriz externa de C empregamos o versor de C – A e o oposto do versor de C – B.

- **Equações vetoriais**

a) P ∈ bissetriz interna de A
Temos

$$P = A + \lambda(\vec{b} + \vec{c})$$
$$= A + \lambda[(C - A)/b + (B - A)/c]$$

b) Q ∈ bissetriz externa de B
Temos

$$Q = B + \mu(\vec{c} + \vec{a})$$
$$= B + \mu[(B - A)/c + (C - B)/a]$$

c) R ∈ bissetriz interna de C
Temos

$$R = C + \rho(-\vec{a} + \vec{c})$$
$$= C + \rho[(B - C)/a + (C - A)/b]$$

- **Intersecções das bissetrizes**

a) da bissetriz interna de A com a externa de B (P ≡ Q)
Usando os mesmos procedimentos que empregamos para duas bissetrizes internas obtivemos

$$\lambda = b.c / (b + c - a) \quad \text{e} \quad \mu = c.a / (b + c - a)$$

b) da bissetriz interna de A com a externa de C (P ≡ R)
Encontramos

$$\lambda = b.c / (b + c - a) \quad \text{e} \quad \rho = a.b / (b + c - a)$$

Observando a igualdade dos valores de λ em ambas interseções podemos garantir a concorrência das três bissetrizes num único ponto.

- **Posicionamento do ponto de concorrência em função de uma origem arbitrária**

Indicando P ≡ Q ≡ R com EI (exincentro ou excentro) descobrimos a sua expressão pela equação de P:

$$EI = A + c\,(C - AS) / (b + c - a) + b(B - A) / (b + c - a)$$

que fornece, introduzindo uma origem arbitrária O, que:

$$EI - O = [-a(A - O) + b(B - O) + c(C - O)] / (-a + b + c)$$

Nota: Deve ser observado que este excentro é o ponto de concorrência da bissetriz interna de A com as outras duas bissetrizes externas.

Obtém-se analogamente para os outros dois excentros:

$$EI - O = [a(A - O) - b(B - O) + c(C - O)] / (a - b + c)$$

(correspondente ao excentro obtido pela bissetriz interna de B);

$$EI - O = [a(A - O) + b(B - O) - c(C - O)] / (a + b - c)$$

(correspondente ao excentro obtido pela bissetriz interna de C).

Portanto, resulta que os excentros são baricentros dos vértices A, B e C, com massas respectivamente a, b e c, com valores negativos, se e só se o excentro pertence à bissetriz interna do ângulo correspondente.

3.6.5 Colinearidade

- **Colinearidade dos pontos de interseção das bissetrizes externas com as retas dos lados opostos**

Consideramos um ΔABC.(Figura 53).

Sejam L, M e N os pontos de interseção respectivamente das bissetrizes externas dos ângulos A, B e C com as retas dos lados opostos (quando existirem).

Provamos que L, M e N são colineares. Para isso, consideremos novamente os versores

$$\vec{a} = (C - B) / a$$

$$\vec{b} = (C - A) / b$$

$$\vec{c} = (B - A) / c$$

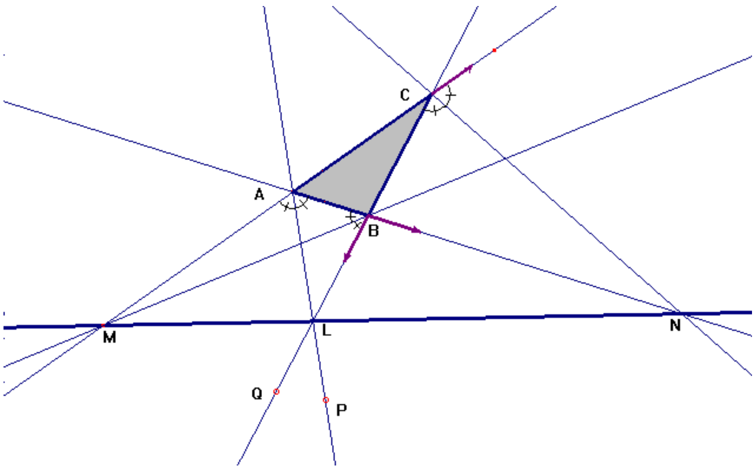


Figura 53: Interseção das bissetrizes externas

- **Ponto L**

Sejam P $\in$ bissetriz externa de A, Q $\in$ reta de B e C

Temos

$$P = A + \lambda(-\vec{b} + \vec{c}) = A + \lambda[(A - C)/b + (A - B)/c]$$

$$Q = C + \mu\vec{a} = C + \mu(B - C)/a$$

Colocando P $\equiv$ Q $\equiv$ L, e transformando os vetores só em função de B–A e A–C (linearmente independentes), obtivemos

$$(\lambda/c - \mu/a)(B - A) = (1 - \mu/a + \lambda/b)(A - C)$$

que forneceu por anulamento de coeficientes $\lambda = bc/(b - c)$ e $\mu = ac/(b - c)$

Segue que L = C + b(B – C) / (b – c)
ou introduzindo uma origem arbitrária

L – O = [b(B – O) – c(C – O)] / (b – c)

Portanto L é baricentro de B e C com massas b e –c [3]

- **Ponto M**

Analogamente obtivemos

M – O = [c(C – O) – a(A – O)] / (c – a)

- **Ponto N**

Deveremos encontrar (o que obtivemos por permutação circular)

N – O = [a(A – O) – b(B – O)] / (a – b)

Das igualdades baricêntricas anteriores teremos

(b – c) (L – O) = b(B – O) – c(C – O)
(c – a) (M – O) = c(C – O) – a(A – O)
(a – b) (N – O) = a(A – O) – b(B – O)

Adicionando membro a membro temos

(b – c) (L – O) + (c – a) (M – O) + (a – b)(N – O) = 0

Fazendo o ponto arbitrário O coincidir com M encontramos

(b – c) (L – M) = (b – a) (N – M)

Desde que admitimos a existência dos 3 pontos L, M e N, a igualdade anterior indica que os vetores L – M e N – M são linearmente dependentes

[3] Em nosso entender pareceu-nos que o sinal positivo é da medida do lado maior e o negativo do menor.

Nota 1: Em particular se a= b e b $\neq$ c o triângulo ABC é isósceles; então teremos o ponto N impróprio, e a reta de L e M é paralela à reta de A e B (Figura 54), desde que a bissetriz externa de C é paralela ao lado oposto AB.

Nota 2: Se a = b e b = c então o triângulo é equilátero e os pontos L, M e N são impróprios, desde que as bissetrizes externas são paralelas aos lados opostos.

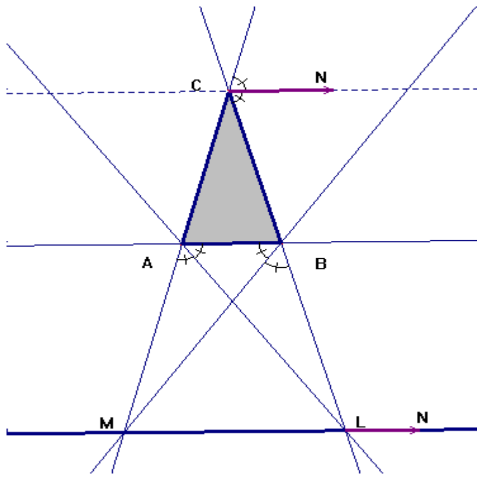


Figura 54: L e M paralela à reta de A e B

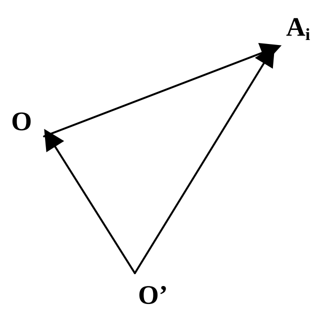
3.6.6 Independência do baricentro

Na definição vetorial de Baricentro dos pontos A_i afetados de massas m_i

$$G - 0 = \Sigma\, m_i\ (A_i - O) / \Sigma\, m_i$$

chamada igualdade baricêntrica, em função de um ponto O arbitrário, pode ficar uma dúvida dessa arbitrariedade da origem. Se escrevermos a igualdade baricêntrica em função de outra origem O’, será que obtemos o mesmo ponto G?

Provaremos, a seguir, que escrita em termos de uma origem O’, obteremos o mesmo ponto G. Supomos que forneça um outro ponto G’ :



$$G' - 0' = \Sigma\, m_i\ (A_i - O') / \Sigma\, m_i$$

Mas, $A_i - O' = (A_i - O) + (O - O')$

$$\Rightarrow \Sigma\, m_i\ (A_i - O') = \Sigma\, m_i\ (A_i - O) + \Sigma\, m_i\ (O - O')$$

$$\Rightarrow (G' - O') \sum m_i = (G - O) \sum m_i + (O - O') \sum m_i$$

$$\Rightarrow [(G' - O') - (G - O) - (O - O')] \sum m_i = 0$$

$$\Rightarrow (G' - O') - (G - O) - (O - O') = 0$$

$$\Rightarrow G' - O = G - O$$

$$\Rightarrow G' \equiv G$$

Este resultado é importante pelo fato de termos obtido as igualdades baricêntricas para os pontos notáveis baricentro (concorrência das medianas), incentro (concorrência das bissetrizes internas), ortocentro (concorrência das alturas) e excentros (concorrência de duas bissetrizes externas e uma interna); portanto para cada ponto de concorrência é possível colocá-lo em função de uma origem efetivamente de nossa opção, que sua posição será inalterada.

4 ANÁLISE DE DADOS

"Os resultados são rapidamente esquecidos, mas as idéias permanecem." (Glaser, 1978)

Neste capítulo apresentamos um panorama da investigação, explicitando as compreensões que emergiram a partir da realização das oficinas, entrevistas e do procedimento de análise que a elas submetemos.

As entrevistas e a oficina foram transcritas, transformando-se, portanto, em textos, passíveis de análise de conteúdo. Para fazer referência às falas utilizamos o seguinte formato: ($_{28}$ Prof5), em que o número identifica a vigésima oitava fala na entrevista do professor 5. Procedemos com a análise, utilizando os parâmetros delineados por Bogdan e Biklen (1994) que nos forneceu subsídios para aprofundarmos a compreensão dos textos e buscar respostas para a questão da pesquisa.

Este trabalho teve dois focos importantes a serem considerados durante o processo de análise: a criação do jogo sobre a Configuração Simples do Tri-Hex de Thomas O´Beirne e a participação dos professores no processo de criação e validação do material didático. O trabalho em si poderia ser estruturado somente com o primeiro foco, relatando o processo de criação do jogo, porém, optamos por ir mais além, pois acreditamos que o professor possui papel preponderante na hora de decidir sobre o melhor material a ser utilizado em sala de aula. A participação do professor na utilização e validação do jogo buscou valorizar o trabalho de investigação.

No primeiro foco, **criação de material didático**, estudaremos o tabuleiro proposto por Beirne, e posteriormente, analisamos as estratégias correspondentes. Isso aconteceu no primeiro semestre de 2002. Nessa pesquisa prévia, contudo, as tentativas foram improdutivas no que se refere à possibilidade de utilizar o jogo de Thomas O´Beirne como jogo pedagógico para desenvolver conceitos da geometria. Então, iniciamos o desenvolvimento de novos tabuleiros a fim de adaptá-lo para explorar conteúdos matemáticos.

Os primeiros sucessos foram alcançados somente em 2003, já no período da pesquisa propriamente dita, visando o trabalho de mestrado.

Durante as oficinas pedagógicas que realizamos, em cursos de formação continuada de professores de matemática, constatamos que o professor, do ensino fundamental ou médio, não utiliza material didático, salvo se for disponibilizado pela escola e esta oferecer todo o suporte técnico necessário. Foi por meio dessa constatação que sentimos a importância da construção do material didático juntamente com os professores.

Isto nos conduziu a buscar na literatura material correlato ao jogo de Beirne, procura esta também infrutífera, apenas parcialmente conveniente, conforme já discutido quando relacionamos os jogos tipo trilha.

Estes fatos nos levaram a um processo de concepção e criação de um jogo parcialmente baseado no Tri-Hex de O´Beirne, que chamamos de Configuração Simples. O nosso jogo, ao mesmo tempo em que atendia as exigências de uma atividade lúdica, possuía recursos sutis para que o professor pudesse realizar um estudo introdutório sobre a geometria.

O segundo foco, **colaboração do professor**, identificado claramente na oficina e nas entrevistas, permitiu emergir alguns blocos de análise, a saber:

- Bloco 1 - Geometria na formação inicial e continuada de professores;
- Bloco 2 - A utilização de material na prática do professor;
- Bloco 3 - A oficina e a participação do professor,
- Bloco 4 - Condições de trabalho dos professores.

Desenvolvimento dos blocos a partir da investigação

No intuito de identificar as possíveis causas da situação em que a escola pública encontra-se atualmente, surgem com bastante evidência a questão da formação inadequada e das condições de trabalho do professor, quais sejam, os baixos salários, a alta carga horária de permanência em sala de aula, as classes com número excessivo de alunos e a necessidade de deslocamento para completar a carga horária.

Assim, a pesquisa de campo proporcionou que vivenciássemos de perto essa realidade e para isso contamos com o apoio dos dados coletados que nos mostraram as limitações e perspectivas dos professores do Ensino Fundamental.

Inicialmente, tentamos identificar algumas referências descritivas sobre os quatro blocos de análise.

Bloco 1 - Geometria na formação inicial e continuada de professores

Inicialmente os professores foram solicitados a comentar sobre três questões: (1) *Durante a Graduação, houve alguma disciplina específica para geometria?* (2) *Se houve, lembra-se de alguns tópicos abordados na disciplina?* e (3) *Na escola em que leciona, aborda conteúdos da geometria? Em que séries?* Muitos deles restringiram suas respostas a "sim" ou "não", evitando desta maneira detalhar o que fazem ou não com o estudo da geometria nas séries em que lecionam.

Esse comportamento leva-nos a afirmar que persiste certa deficiência quanto ao conteúdo de geometria, durante a formação inicial conforme já constataram Manrique (2003), Martos (2002), Murari (1994), Miskulin (1994), Perez (1991).

Dentre os professores entrevistados, 100% deles possuem formação deficiente em relação à geometria, chegando a demonstrar claramente não saberem a diferença entre geometria plana, analítica e espacial, conforme exemplificam, abaixo, os fragmentos selecionados de algumas entrevistas.

A gente tinha geometria analítica, mas não é geometria assim, acho que é de uma forma mais... não é tanto assim aquela parte que você fala de triângulo...(30 Prof4)

Eu não lembro de geometria não. Pode até ser que tenha, mas se teve foi muito pouco, eu não lembro. (28 Prof5)

Lembro de geometria a gente viu... foi geometria espacial, geometria analítica, apesar que geometria não é o meu forte. (40 Prof6)

Tinha uma [disciplina] *que era só parte geométrica, né? Geometria mesmo, agora eu não lembro como era chamada à disciplina, eu lembro que a professora era uma japonesa e era só a parte geométrica mesmo. Misturava... analítica... espacial...* (22 Prof2)

O trabalho de pesquisa de Mello (1999), que procurou despertar o pensamento geométrico dedutivo no aluno, concluiu ser imprescindível a existência de uma formação adequada para o professor.

É indispensável, de acordo com Marin (2000) e Caldeira (1993) que o professor se conscientize de que sua formação vai além de sua formação inicial, e que a formação continuada e as práticas profissionais do cotidiano escolar podem colaborar muito para isso. O professor é um profissional que se forma na ação, e sua formação iniciada na universidade, deveria instrumentalizá-lo para sua prática profissional no mundo do trabalho oferecendo-lhe conteúdos e vivências que constituirão o alicerce de uma formação que é contínua e que não pode prescindir da prática cotidiana. Conforme os autores, é no fazer diário de sua prática pedagógica e posicionando-se como pesquisador, como investigador dessa mesma prática, que o professor vai se constituindo profissionalmente.

As considerações apontadas por Passos (2000) sobre a aversão dos professores em relação ao ensino da Geometria vem ratificar as respostas e comentários dos professores da pesquisa ao indicarem que a geometria é pouco ou nada explorada em sala de aula, seja por não terem conhecimento adequado ou porque tal assunto encontra-se muito no final do livro didático e a sua abordagem fica prejudicada pela falta de tempo para cobrir todo o programa. As frases abaixo, extraídas de algumas entrevistas evidenciam esse ponto de vista.

Aliás, eu posso falar para você que em geometria eu sou deficitário. Em que momento [trabalho geometria] *... eu prefiro deixar para o final do curso. Ela aparece no final, como ela pode ser, de acordo com o planejamento escolar, você pode introduzir ela no começo.* (26,67, 137 Prof1)

Olha a geometria aparece no final, até a gente comenta muito nos planejamentos começar dar geometria ou no começo ou na metade. (52 Prof6)

Fica evidenciado que se dá mais importância para a álgebra em detrimento da geometria e por essa razão ela é ministrada, quando dá tempo, somente no final do curso.

Olha, no final do ano agora eu comecei com a parte de geometria. Mas, se vem no meio eu acho mais válido. Tem o Imenes Lellis ele tem números, geometria, então você vê um pouco de cada coisa. Agora no caso da Conquista tem parte geométrica também, mas a parte mesmo específica [de geometria] *é no final.* ($_{32,36}$Prof2)

Eu acho importante sim, porque os alunos eles tem pouco interesse, não é todo mundo que dá geometria, né? Então eu acho que a geometria deveria vir lá do grupo já, porque eles tem que saber construção, eles não tem noção nenhuma. Mas, a gente tenta impor, mas é complicado né na geometria. Eu acho que a geometria tem que vim, tem que ter uma aula por exemplo, uma disciplina na geometria. Que nem antigamente entrava no desenho, né? Eu acho, até o próprio professor fica mais... que nem, você falou... a maioria gosta mais da álgebra do que da geometria. E a geometria nem na minha época que eu estudava eu vi, quando eu fiz 5ª, 6ª... 8ª série foi dado o mínimo também, então não é de hoje, é coisa de 20, 30 anos atrás. ($_{108,\ 114}$ Prof5)

Algumas falas extraídas da filmagem também apontam interessantes aspectos nesse sentido:

A gente acha que os outros conteúdos é que eles vão precisar mais, utilizar mais do que a Geometria. Mais problemas, mais contas, se der tempo dá Geometria. (Prof6)

Agora temos que parar o conteúdo sempre que aparece um projeto. Não dá para cumprir o programa, muito menos falar do conteúdo da Geometria. É muita coisa! (Prof3)

Não podemos deixar de ressaltar que os livros didáticos atuais já estão explorando a geometria concomitantemente com diversos outros conteúdos da matemática.

Uma consideração importante refere-se às Diretrizes para os cursos de formação inicial do professor e aqui nos referimos às Licenciaturas e a pouca valorização dada até então aos conteúdos articulados desde o início com a prática. De certo modo, segundo Fiorentini e Castro (2003), numa análise das propostas do MEC Brasil (2001), incide sobre a ampliação da carga horária das disciplinas de prática de ensino e estágio supervisionado, propondo que a prática seja desenvolvida ao longo de todo o curso, permeando toda a formação do professor. Por outro lado, para os autores:

> as Diretrizes Curriculares não deixam claro se essas atividades de prática de ensino e estágio supervisionado devem ser acompanhadas e realizadas com a mediação de leituras/estudos e reflexões ou investigações mais sistemáticas sobre a prática, requerendo, para isso, a mesma valorização, o mesmo cuidado, o mesmo planejamento e o mesmo acompanhamento das outras disciplinas do curso. (p.153).

Não é por menos que os professores não façam uso devido do estudo da Geometria em sala de aula, visto que sua própria formação inicial pode ter sido deficiente em alguns aspectos. Com esses pontos, as Diretrizes da Formação Inicial nas Licenciaturas vem apontando não só ampliar a questão da prática de ensino mas trabalhar junto, teoria e prática.

Os resultados da pesquisa de Murari (1999) vêm reiterar muito dos dados encontrados por Perez (1991) e Pavanello (1989) enfatizando que os professores sentem-se inseguros em ensinar geometria por não disporem de conhecimento suficiente para tal, e que, nos livros didáticos adotados, este tema encontra-se no final, permitindo ao professor apoiar-se na “falta de tempo” como motivo para não ensiná-la.

Mas, mesmo assim os professores não desconsideram a sua importância. Longe disso. Os professores simplesmente se eximem da responsabilidade de mudança de postura em relação ao trabalho com geometria e atribuem a “outro” - Governo, programa, livro didático, aluno despreparado - os motivos dessa deficiência.

De acordo com Zeichner (2003) quando cita Scheffler (1968) os professores não podem restringir sua atenção apenas a sala de aula, deixando que outros determinem o contexto mais amplo e os objetivos do ensino. Eles devem assumir ativamente a responsabilidade pelas metas com que estão comprometidos e pelo contexto social em que essas metas podem prosperar. Não sendo meros agentes de outrem, eles precisam determinar sua própria ação por meio de uma avaliação crítica e contínua dos objetivos, das conseqüências e do contexto social de sua atividade.

“A geometria tem sido vista como um tópico da Matemática que tem provocado um sentimento forte de aversão aos que com ela convivem”. (MISKULIN, 1994, p.37). Para a autora, a riqueza intuitiva dos alunos, em relação à geometria, foi “sufocada” pelo sistema escolar.

O próprio professor, muitas vezes, reforça a idéia de que os alunos sejam incapazes de assimilar o conteúdo, caracterizando-os como “lentos”, e esquece que não há necessidade de atingir o final do livro para abordar o assunto; a geometria pode ser explorada juntamente com outros tópicos. A fala seguinte ilustra essa situação.

Aparece no final e pouco tempo e os alunos também, tadinhos eles são "lentinhos", tem que ir devagarinho, sabe aquela coisa...? (44 Prof2)

Podemos perceber claramente que o professor procura justificar o fato de ele não trabalhar com geometria, por meio do que considera incapacidade dos alunos, muito embora, tenhamos identificado algumas tentativas de mudança, quando alguns professores procuram trabalhar a geometria no começo ou durante o curso e utilizam mais tempo na abordagem desse conteúdo.

Isso é claro, você não consegue dar toda a parte da proposta de geometria nós não temos tempo para isso. Mas, este ano eu consegui introduzir algumas coisas e no decorrer do ano, por exemplo, apesar de que a 5ª série eu deixei pro final, nós fizemos um esquema e deixamos pro final, mas até conseguimos trabalhar, por exemplo, o ano passado com a minha 5ª série eu não consegui ver nada de geometria eles eram um pouco mais lentos e eu não sei se construímos mais coisas durante o ano que atrapalharam, porque as vezes tem projetos "disso" projeto "daquilo" e a gente tem que parar com o conteúdo, então você perde um pouco de tempo nisso. O ano passado eu não consegui, tanto é que no começo da 6ª este ano eu dei algumas coisas, pelo menos o principal que eu tinha que ter dado na 5ª série. Agora esse ano com as minhas 5ª eu já consegui dar uma boa parte, deixei pro final, mas eu consegui me esquematizar e até que deu... (62 Prof3)

A geometria foi mais agora no fim, né? Porque a gente que trabalha uma outra parte de proporção, de razão, que depois são coisas que eles vão utilizar o ano que vem o outro ano, entendeu? Então a gente não pode deixar para trás. (58 Prof4)

O depoimento do professor traz à tona os inúmeros projetos que a escola procura desenvolver, e que existem para melhorar a qualidade de ensino e não para "atrapalhar". Sobre esse assunto, algumas questões podem ser levantadas: Porque a escola não tem projetos planejados com a participação dos professores? Porque não desenvolver projetos a partir das necessidades dos professores? Será que é o professor que não se envolve? Ele não tem autonomia para criar um projeto? A reunião pedagógica está voltada para atender às necessidades da escola, dos professores?

Além disso, a preocupação com a carga horária disponível para o cumprimento do programa colabora para que a geometria seja deixada em segundo plano. O que ficou bastante evidenciado é que há uma visão fragmentada do conteúdo, dificultando a inter-relação entre os tópicos estudados.

Por outro lado, em alguns momentos, a geometria é trabalhada pelos professores investigados como momento de descontração. No depoimento que segue percebe-se a própria desvalorização do conteúdo geométrico por parte do professor, visto que ele não a utiliza de forma lúdica, para que o aluno aprenda melhor, mas simplesmente tenciona sair da rotina e aumentar sua interação com os alunos. A valorização da geometria como conhecimento a ser adquirido acaba sendo relegado a uma mera atividade de lazer, para agradar ao aluno.

> *Isso, você tem que trabalhar com coisa diversificada também. Então eu trabalhei essa parte de geometria sim, montando painel, recortando figuras de revista, que formam figuras, sabe? Isso, para ver uma coisa diferente para tentar agradá-los, vamos dizer assim!* ($_{50,52}$ Prof4)

Miskulin (1994) trata da importância da geometria desempenhando um papel primordial no ensino da matemática, que segundo a autora, a intuição, a abstração e a dedução constituem a sua essência, e para auxiliar o alcance dessa formação, cabe ao professor a grande responsabilidade de viabilizar esse processo por meio de metodologias alternativas.

Durante a oficina, um aspecto interessante que lançamos mão, foi provocar nos participantes a exploração do jogo a partir de conteúdos da matemática.

Alguns professores perceberam os conteúdos geométricos passíveis de exploração no jogo, mas notamos a dificuldade dos professores em relação a esses conteúdos e uma deficiência muito grande na formação do professor.

Nas falas retiradas da transcrição da filmagem, notamos a percepção de alguns professores em relação à geometria utilizada a partir do jogo de tabuleiro:

> *Parece mediatriz...* (Prof2)
>
> *Eu poderia fazer cálculo da altura?* (Prof1)

A disposição dos conteúdos nos livros didáticos é uma forma de apresentar de maneira mais organizada e pedagógica a matemática para ser trabalhada na sala de aula, mas que não exatamente necessita ser essa, pois a ordem dos conteúdos que ali estão nem sempre respeita a ordem cronológica de sua descoberta. Por isso, é preciso observar com maior cuidado a cadeia de pré-requisitos, geralmente assumida pelos professores, portadora de uma rigidez que precisa ser questionada. Aliás, o próprio programa deveria ser questionado e adaptado à realidade dos alunos e da escola. A lista de conteúdos a serem ensinados não deve ser estanque e nem apresentar-se como unanimidade nacional bem como o encadeamento entre esses conteúdos. As falas dos professores, recortadas das entrevistas e apresentadas a seguir, demonstram o aprisionamento ocasionado por essa percepção acerca dos conteúdos e seu encadeamento.

> *Eu acho que só consegue fazer isso daí* [trabalhar geometria] *quando você já deu números decimais para o aluno. Quando você deu números decimais você ensina ele a trabalhar movimentando a casa para direita ou para esquerda, com divisão ou multiplicação e quando vê vai trabalhando quilômetro, hectômetro, decâmetro, decímetro, centímetro, milímetro você vai passar que um quilômetro e meio corresponde a tantos metros, tantos centímetros, a tanto decímetros, a tanto decâmetro você tem que saber trabalhar com números decimais, por isso então deve-se jogar a geometria aí na hora que o aluno sabe movimentar essa geometria. Você vai trabalhar área, vamos supor eu quero pôr piso aqui nesta sala eu tenho que achar a área da sala a área do piso, quero saber quantos pisos eu vou colocar, o aluno tem que saber fazer números decimais. Por isso, então eu acho que não é tão oportuno introduzir geometria no começo do ano quando o aluno não tá preparado ainda para trabalhar, só tá até na 4ª série aqueles "numerinhos" decimais muito simplificado.* ($_{139}$ Prof1)

O depoimento acima revela a necessidade de os professores refletirem conjuntamente sobre sua prática de modo a tornarem-se mais autônomos e serem capazes de perceber que o ensino da geometria não está necessariamente atrelado a determinados conteúdos, tais como os números decimais.

Acreditamos também que a reflexão sobre a prática poderia evidenciar para o professor a deficiência na sua formação inicial e valorizar a questão relativa ao tratamento da geometria em cursos de formação continuada.

Seria interessante tentarmos dissociar alguns temas da matemática de seus supostos pré-requisitos, sendo que na verdade os professores estão acostumados a lecionar seguindo a ordem que consta no livro didático. Também consideramos importante ressaltar, que o livro didático parece ser a única referência do professor que o adota e faz dele o programa da disciplina. A ele, o professor recorre para "transmitir" o conteúdo a seus alunos, para tirar suas dúvidas, para propor exercícios e buscar suas respostas. Parece-nos ser muito grande a dependência do professor em relação ao livro didático.

Se, por um lado, a dependência do professor em relação ao livro didático seja negativa, entendemos que ele precisa de um ponto de referência, uma vez que não encontra na escola um espaço para a reflexão sobre a prática. O professor utiliza o livro como um meio de assegurar que suas aulas estejam abordando os conteúdos necessários às determinadas séries. As trocas de experiências e seu envolvimento na elaboração e desenvolvimento de projetos, através do espaço de reflexão da escola, indicam ser um meio dele paulatinamente se "libertar" do livro didático.

Nesse bloco pudemos constatar claramente que a geometria é pouco explorada em sala de aula devido principalmente à falta de conhecimento adequado do corpo docente, em razão de uma deficiente formação inicial. A álgebra é mais valorizada que a geometria. No trabalho com os professores identificamos a necessidade de uma formação inicial de melhor qualidade e que o prepare para possíveis adaptações do conteúdo à realidade dos alunos. Nesse sentido reforça-se o papel da formação continuada e da constante reflexão sobre a prática docente além da importância do compromisso e do envolvimento dos professores em relação ao planejamento escolar.

Bloco 2 - A utilização de material na prática do professor

Uma das preocupações de La Torre (2002) são as estratégias didáticas inovadoras, que têm o propósito de desenvolver uma série de estratégias de formação integral para a melhoria do ensino, melhoria da aprendizagem, solução de problemas, aquisição de novos conhecimentos e busca de qualidade. A tarefa não se limita à elaboração de estratégias e materiais, mas principalmente inovar e investigar tais materiais e estratégias na prática e difundi-los entre os envolvidos com a formação continuada. Para o autor, o conceito de inovação vai além de algo estático ou produto replicável. Ao contrário, supõe que a mesma seja um conjunto articulado de acontecimentos, atividades diversas, estratégias complexas em que ocorrem relações dinâmicas e transformadoras. "A rotina é refúgio e evidencia rigidez, será a atitude flexível à condição fundamental para o êxito e o fenômeno da inovação". (p.49).

No grupo pesquisado evidenciamos essa rigidez com nossos professores que realizam sua prática docente desenvolvendo as mesmas atitudes de sempre. O professor precisa se dispor a assumir a mudança como uma atitude constante em sua rotina de trabalho e superar as resistências provocadas pelo medo dessa mudança e que deriva dos novos desafios.

Com relação à utilização de materiais, questionamos os professores quanto ao uso do livro didático, PCNs, material concreto, informática e jogos.

A adoção e a distribuição do livro didático para os alunos do ensino fundamental foram uma grande conquista, no sentido de procurar organizar todo o conteúdo a ser estudado, facilitando a exposição do conteúdo e permitindo um melhor acompanhamento por parte dos alunos. No entanto, ainda há diversos aspectos mencionados pelos professores que devemos levar em consideração.

Há uma constante preocupação dos professores entrevistados no sentido de tornar o livro didático mais prático, objetivo, resumido, com muitos exercícios e de fácil compreensão. Segundo a concepção desses professores, algumas dessas características ainda não estão tão presentes porque nem todo o corpo docente participa da escolha dos livros didáticos.

Com relação à utilização dos PCN, somente um professor afirmou ter usado em seu planejamento.

Uso PCN para elaborar a proposta, certo? ($_{205}$ Prof1)

Não, [utiliza PCN]. ($_{58}$ Prof2)

Nacarato, Varani e Carvalho (1998) apresentam a questão do controle externo sobre o trabalho pedagógico como uma dificuldade presente no trabalho docente. Esse controle predetermina os objetivos, o conteúdo, a metodologia e a avaliação que deverão orientar o trabalho dos professores. As avaliações externas tendem a se tornar uma camisa de força para o docente, fixando-lhe os conteúdos a serem trabalhados em cada série. Os docentes, ao prepararem o seu planejamento, vêem-se diante de uma série de exigências, com múltiplas variáveis como: PCN, Propostas Curriculares Estaduais, Livro Didático etc; no Ensino Médio atribui-se ao professor a responsabilidade de abordar conteúdos exigidos nos exames vestibulares; no Ensino

Profissionalizante espera-se que ele aborde conteúdos de modo a preparar o estudante para o mercado de trabalho.

Dos professores entrevistados, apenas um fez uso de material concreto em sala de aula, utilizando-se de sólidos geométricos, algumas vezes usando recortes de revistas etc.

Eu uso o que a escola tem: os sólidos geométricos, tangram se usa isso daí, o que a escola tem. Como usar corretamente o esquadro, compasso, transferidor, como você passa num quadrado estático uma porcentagem usando o transferidor num gráfico de segmento total. ($_{233}$ Prof1)

Essa parte de recortes eu gosto bastante porque eles adoram mexer com recorte, revista, tesoura, material diferente. Então é uma coisa que eu gosto sempre de tá usando. Porque aí eles vão pegar revista... então eles vão achar um prédio, qual forma do prédio? É um retângulo, então eles recortam aí eles colocam retângulos. É uma coisa que eles gostam de fazer, né? É que é uma coisa diferente para eles, então eu falo que tá dando certo utiliza, porque é difícil trabalhar com coisas que eles não gostam. Então quando eles aceitam... ($_{70,\,72}$ Prof4)

Em contrapartida, percebemos que os professores em geral não possuem disposição em arriscar a trabalhar com algum tipo de material diversificado tendo em vista a falta de estímulo e prática. Durante as entrevistas muitos demonstraram uma concepção de “material concreto” não necessariamente ligada à aprendizagem dos conceitos matemáticos, chegando até a mencionar a régua e o compasso como material utilizado. Os materiais por eles mencionados são os indispensáveis ao modelo de sala de aula e de exposição de conteúdos, adotados nas escolas (tais como caderno, lápis, régua, borracha etc). O “material concreto” que mencionamos são aqueles levados para a sala de aula com o intuito exclusivo de facilitar a aprendizagem de determinados conceitos ou o desenvolvimento de certos conteúdos.

Olha... que eu te falo, hein? Eu tenho meio medo, ele são indisciplinados, sabe? Eu também tenho um pouco de dificuldade nisso, nessa prática aí, né? Porque eu também não tenho muita prática com o material e tô falando de agora né? Então eu não utilizo. ($_{72}$ Prof2)

Os recursos de informática ainda são utilizados sem um devido planejamento e dentro das limitações da escola. Três, dos seis professores entrevistados, afirmaram que utilizam a sala de informática devido a falta de espaço físico, o que não implica na utilização da informática como ferramenta para o ensino e a aprendizagem da matemática; como não há sala de aula, eles utilizam a sala de informática e forçosamente fazem uso do computador. Dessa forma, verificamos que o emprego do computador torna-se obrigatório por falta de alternativa e não pelo enriquecimento que sua prática traria para o conteúdo das aulas.

Material concreto com eles eu não tenho usado muito não, a gente usa os CDs que a gente tem usado na informática, porque toda sala vai para lá em um dia, a gente tem que se virar como pode. Olha Luciana, eles gostam muito de informática, na verdade informática para eles é tudo. Eles não querem nada pra fazer... hoje vai jogar um pouquinho? Vai... hoje vai por um CD? Está pra eles a informática é de tudo um pouco eles querem que aquele tempo que você vai estar trabalhando com eles, eles querem diversificar. (64, 66 Prof3)

A reação dos alunos durante as atividades no laboratório de informática fornece indícios de que eles gostam e querem novas estratégias de ensino. Compete ao corpo docente utilizar desse entusiasmo para diversificar suas metodologias.

Trabalho com informática. Aquele curso que você deu pra nós "Supermáticas", aquelas coisas que nós aprendemos lá e quando tá tudo funcionando... e o Cabri também pra 8ª série, acho que eu passei, 7ª e 8ª né? (120 Prof5)

Levo, é um barato a sala de computação, às vezes eu me enrosco lá, aí eles falam "calma aí dona, não se apavore", ah queria ter essa agilidade... (78 Prof6)

De acordo com Borba e Penteado (2001), o acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto o estudante deve poder usufruir uma educação que inclua, no mínimo, uma "alfabetização tecnológica". O computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc. E, nesse sentido, a informática na escola passa a ser parte da resposta a questões ligadas a cidadania.

O emprego da tecnologia computacional promove a aquisição do conhecimento, o desenvolvimento de diferentes modos de representação e de compreensão do pensamento.

Segundo Almeida (2000), "os computadores possibilitam representar e testar idéias ou hipóteses, que levam à criação de um mundo abstrato e simbólico, ao mesmo tempo em que introduzem diferentes formas de atuação e de interação entre as pessoas". (p.12).

Um aspecto interessante a se comentar é sobre a percepção dos professores, que sem utilizar jogos, evidenciaram o fato dos alunos desejarem utilizar outras metodologias em sala de aula.

Somente dois professores já fizeram uso de jogos em sala de aula, muito embora tenha prevalecido o aspecto lúdico sobre o didático. A percepção que eles têm da utilização do jogo em sala de aula não vai além da brincadeira, descontração e passa-tempo.

Há uma grande dificuldade para se encarar o jogo como uma ferramenta capaz de trabalhar conceitos e a evidente dificuldade por parte dos professores na adequação de seus conteúdos aos jogos, assim como de elaborar determinado material de acordo com a realidade da sala de aula.

Eu faria, até gosto de conhecer coisas novas, trabalhar com aluno, por que eu acho que isso daí ajuda desinibir o aluno, o raciocínio, tudo mais... uma que eles gostam. Você quer ver a molecada ficar parada é dar um jogo, às vezes brincando eles não percebem que eles estão aprendendo. Mas, eu tenho um pouco de dificuldade, sou sincera. As regras... mas se ele vem pronto com regras não, eu até aplico, normal. Mas, se você pedir para eu montar eu poderia até ter uma idéia, mas só não conseguiria montar. ([64, 68] Prof6)

Um dos professores, a partir de uma prática em um curso de formação continuada, incentivou a utilização de jogos para explorar conteúdos matemáticos envolvendo operações, lógica e geometria.

Jogo, tipo... eles ensinaram um joguinho assim com calculadora, ah eles falam calculadora não pode, não pode... então eles deram uma coisa muito interessante para gente, probleminha com lógica, aqueles que você coloca na lousa e o aluno a primeira coisa que eles perguntam "que conta eu faço?" Não, não é conta, aí ele descobre que não tem que fazer conta, ele adoram isso daí. Então, eu to usando bastante. E quanto à geometria, também, pelo que foi passado para gente eu acho que tem alguma coisa que dá para usar sim. É que agora a gente tá no fim então já não tem mais aluno. Aqui, as escolas já estão acabando, mas com certeza o ano que vem, se tiver oportunidade, tem coisa muito interessante para trabalhar com eles. Que nem, essa daí que eu te falei, na

Teia do Saber é um joguinho que você faz. Você coloca contas para eles resolverem e é jogo, então vai disputando com o outro para ver quanto um acerta, o outro não acerta e eles gostam. (82, 108 Prof4)

Ah, olha o dia que eu passei o joguinho da calculadora, ah meu Deus do céu aquela 5ª série, vai ser um tal de um tacar a calculadora na cabeça do outro...

Eu pedi para quem tivesse calculadora para levar, por que nem todos tem, né? E a escola também tem, é aquelas de 1,99, fui lá pedi, mas não deu. Aí forma assim grupinho de 2, né? Aí eu tirei xerox e falei assim: olha esse joguinho se vai escolher um game e seu amigo vai escolher um game. Tem de 1 a 6, você pode escolher o primeiro, ele escolher o quinto, aí vocês que vejam quem vai começar. Tira par ou ímpar, se quiser passar a vez tudo bem. Aí eles começaram... ah detalhe importante, eles imaginaram que iam usar o tempo todo, ah isso é moleza, e eu quieta. Até aí ok? "Ok dona"! Ah, um detalhe, falei para eles, vocês não podem usar lápis, nem borracha, nem folha de rascunho, nem caneta, nem contar no dedo pode. Então calculadora você só vai poder usar 3 vezes, são 6 exercícios.

O outro que eu deixei na escola são igualdades então é interessante que você resolva o primeiro e você vai perceber que o quarto, ou quinto ou sexto é o mesmo resultado do primeiro, só muda a ordem. Nossa é legal pra caramba.

Numa certa altura do jogo percebem, alguns não percebem, tanto é que eu dei o que eu tenho passei para o 2º C do CEFAM, tanto é que terminou o jogo e alguns ficaram boiando... "ô dona eu não entendi, mas porquê?" Aí, eu fui explicar o porque. Agora a 5ª série é complicado para eles entenderem, né? Com eles eu montei outro com as 4 operações, montei por que aqueles que tinham lá eles não tinham condições de fazer. (86, 88, 90, 92, 94 Prof6)

As atividades de alguns professores demonstram o esforço na tentativa de utilizar uma nova maneira de abordar o conteúdo de matemática. Apesar de todas as dificuldades apontadas, tais como indisciplina, falta de material e defasagem dos alunos, verifica-se o esforço dele no desenvolvimento de uma aula dinâmica e capaz de provocar o exercício intelectual dos alunos.

E eles gostam de jogo viu, eles adoram [os alunos]. (106 Prof4)

Grando (2000) procura explicar que:

> alguns educadores acreditam que, pelo fato de o aluno já se sentir estimulado somente pela proposta de uma atividade com os jogos e estar durante todo o jogo, envolvido em ação, participando, jogando, isto garante a aprendizagem. É necessário fazer mais do que simplesmente jogar determinado jogo. O interesse está garantido pelo prazer que esta atividade lúdica proporciona, entretanto é necessário o processo de intervenção pedagógica a fim de que o jogo possa ser útil à aprendizagem, principalmente para os adolescentes e adultos. (p.26).

Ainda segundo a autora, nos PCNs existe a defesa de que os jogos podem contribuir na formação de atitudes, na socialização, no enfrentamento dos desafios, desenvolvimento da crítica, da intuição e da criatividade.

Há que considerar também, que a deficiência constatada na formação inicial acaba por provocar certa dependência quanto ao livro didático, fazendo com que as aulas sejam expositivas em sua grande maioria. O fato de eles insistirem na falta de tempo e não serem capazes de criar materiais, mostra que o problema possa estar na formação inicial, na falta de conhecimento sobre o assunto a se abordar.

Situações extremas, como a aquisição de material didático (jogos) pelo próprio professor ainda ocorre. O recurso que normalmente a escola disponibiliza é a sala de informática, porém de forma precária.

Notamos que os professores que mais participam de processos de formação continuada, e não ficam presos somente ao livro didático, mostram um trabalho prático mais diferenciado.

> *Eu não uso o livro, eu não sigo aquele livro lá, entende? Eu nem sei o que tem dentro desse livro da escola, porque eu vou pegando o meu, por exemplo, eu abordo lá eu vou no plano tem, pego e vou pegando outros livros e vou fazendo. Mas, na 8ª deu para trabalhar bastante geometria, na 7ª também.* (60 Prof5)

Confirmando este pensamento, Perez (1991) enfoca as deficiências em conteúdo e metodologia, com relação ao ensino da geometria dos professores de ensino fundamental e médio.

A dificuldade na utilização de materiais está intimamente relacionada com o problema de formação. Assim, o Bloco 1, que trata de questões relacionadas ao ensino de geometria e o Bloco 2, que se refere ao uso de material na sala de aula de matemática, convergem para a questão da formação continuada que pode contribuir e melhorar muitos aspectos da formação inicial.

As principais idéias desse bloco evidenciam algumas características dos materiais utilizados pelos professores: o livro didático organiza o conteúdo, facilita a exposição e permite um melhor acompanhamento por parte dos alunos; ainda falta uma maior participação dos professores na escolha do livro didático; o PCN ainda é pouco utilizado; os materiais concretos são raramente usados, devido à falta de conhecimento, estímulo e prática; a informática, com recursos limitados é utilizada sem planejamento e de maneira descontextualizada; o jogo, capaz de formar atitudes, melhorar a socialização, impor desafios, aguçar o senso crítico, despertar a intuição, provocar a criatividade, ampliar o conhecimento, é encarado somente como atividade lúdica. A falta de uma visão mais ampla das potenciais capacidades do jogo como recurso pedagógico pode também estar relacionada às diferentes práticas dos professores que participaram de processos de formação continuada em relação aos professores que não participaram. Estes mostraram maior dependência ao livro didático e suas aulas, por sua vez, eram mais expositivas.

Bloco 3 - A oficina e a participação dos professores

As oficinas, que ofereceram uma vivência dos professores com os jogos, tiveram como objetivo a troca entre os professores, deixá-los à vontade para expor suas dúvidas, suas hipóteses, suas resistências e avanços e, principalmente, experimentar uma prática em que as relações fossem horizontalizadas entre os professores e também entre eles e o pesquisador. Entendemos ainda, que esta seria a oportunidade de uma discussão conceitual sobre a dinâmica do trabalho em sala de aula e sobre o ensino e a aprendizagem dos alunos. Buscamos apoio em Zeichner (2003) quando destaca que “os professores só passarão a ensinar de modo mais democrático e centrado no aluno”, se vivenciarem uma “reorientação conceitual fundamental sobre o seu papel e sobre a natureza do ensinar e aprender”. (p. 38).

Da mesma forma, entendíamos que a vivência nas oficinas poderia possibilitar a reflexão dos professores sobre a necessidade de mudanças em suas práticas. Novamente Zeichner traz um apoio ao se referir que só ocorrerão “mudanças qualitativas na prática na sala de aula quando os professores as compreenderem e aceitarem como suas”. (ZEICHNER, 2003, p. 38).

Assim, convidamos os professores a refletir sobre os jogos e seu uso em sala de aula. Segundo os professores que participaram da oficina, para que ocorra uma prática diferenciada, é necessário um grupo reduzido de alunos, tempo adequado para planejamento e execução, conforme podemos perceber na fala de um dos entrevistados, abaixo transcrita.

> *Dá certo sim, desde que você tenha tempo disponível e turma pequena. Você tem que fazer tipo de um laboratório para fazer aquilo lá... por que se você por toda a molecada para fazer, meia dúzia vai desenhar lá no cantinho, outros querem fazer e querem te segurar aqui e a outra turma dispersa, por isso a turma não pode ser grande. Aliás, eu acho que grupo grande não dá rendimento nenhum, certos tipos de classes não poderiam ter mais que 25 ou 30 alunos.* ($_{235}$ Prof1)

Entendemos, contudo, que o professor não deve esperar sempre que existam condições ideais para aplicar um método diferente do tradicional. Da forma como o professor acima abordou, provavelmente seja difícil ter classes com números reduzidos de alunos, sendo que a realidade atual é de pelo menos 40 alunos por classe.

O sistema “burocrático” de ensino, como aponta Nacarato, Varani e Carvalho (1998), impõe “soluções” que aumentam o trabalho pedagógico no que diz respeito à parte de registros, criando uma infinidade/diversidade de modelos de documentos a serem preenchidos. Assim, o cotidiano do professor, se resume a preparar aulas e atividades complementares ao material didático, corrigir pacotes de provas/trabalhos e preencher uma infinidade de relatórios, nos horários em que poderia estar participando de atualizações pedagógicas, lazer, descanso e convívio social, com uma “justa” remuneração de horas-atividade.

No decorrer das oficinas, solicitamos aos professores para optarem entre trabalhar com jogos no tabuleiro ou no computador e a maioria escolheu o tabuleiro. A escolha demonstrou uma relativa insegurança, talvez por não terem pleno domínio da tecnologia, resultado de pouca vivência junto a esse recurso.

Parte importante do conhecimento profissional dos professores de matemática, segundo Ponte, Oliveira e Varandas (2003), refere-se ao uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) como ferramentas cada vez mais presentes no meio educacional. Estas servem para apoiar a aprendizagem dos alunos, preparar material pedagógico, realizar tarefas administrativas, viabilizar a rápida busca de informações e disponibilizar um ambiente de interação entre os professores.

Segundo os mesmos autores, os cursos de formação inicial de professores precisam levar em conta a importância do desenvolvimento nos respectivos formandos das diversas competências, no que se refere ao uso das TICs, no processo de ensino e aprendizagem. Os futuros professores precisam usar software utilitário, usar e avaliar software educativo, integrar as TICs em situações de ensino e aprendizagem, enquadrar as TICS num novo paradigma do conhecimento e da aprendizagem e conhecer as implicações sociais e éticas das TICs.

Os depoimentos abaixo projetam, de certa forma, o tipo de trabalho que é desempenhado pelo professor com relação ao uso da tecnologia.

Eles falam que gostam no computador, mas eu acho que, sabe assim, no tabuleiro deles manusear assim eu acho que chama mais atenção.

Eu acho que sim, por que no computador, vamos supor, você coloca para jogar esse joguinho lá, daí a pouco eles querem ver outras coisas no computador, eles não ficam só ali. Agora se você coloca o tabuleiro, né... aí eles ficam ligados ali e pronto. ($_{102,\ 104}$ Prof4)

No tabuleiro. O professor e o aluno também, eu acho que o aluno se interessa mais em poder pegar as pecinhas, brincar, pegar o tabuleiro, do que no computador. É minha opinião, tá? ($_{116,\ 118}$ Prof5)

Miskulin (2003) afirma que a função da educação e da escola precisa mudar, proporcionando a formação crítica, consciente e integral do sujeito, voltada à liberdade e possibilitando-lhe o contato com as novas tecnologias, de modo a não ignorar a dimensão do desenvolvimento tecnológico que perpassa o país. A autora questiona ainda se os cursos de formação de professores estão preparando os jovens para "o exercício de funções que lhes propiciem uma vida digna e de qualidade". (p.223).

> A análise dessa questão aponta para a necessidade de as universidades e políticas públicas de formação de professores valorizarem o desenvolvimento da capacidade crítica dos futuros docentes, preparando-os para atuar com autonomia e discernimento na sociedade tecnológica emergente. Essa formação contribuiria para a superação da ignorância informática de que muitos professores são vítimas, nos dias atuais. Ignorância essa que os levam a assumir uma atitude, muitas vezes, técnica e mecanicista em relação ao uso das tecnologias, em lugar de promover um uso crítico e não–alienante. (MISKULIN, 2003, p.223)

Pode-se perceber pelas falas de alguns professores, que ainda falta firmeza da parte deles em relação à utilização do computador e suas diferentes possibilidades de uso. Parece que eles se sentem desconfortáveis com o fato de os alunos, muitas vezes, dominarem o uso do computador e não ficarem restritos às atividades propostas, ou seja, os alunos ficam mais à vontade para explorar a máquina. Tal desconforto pode ser explicado pelo fato de o professor, neste caso, não ser a figura que detêm o maior conhecimento.

E agora o que eu te falo? Bom, no computador eles ficam assim... nas atividades... é que não tem muito programa, muita coisa pra gente assim... no computador para eles, então eu montava probleminha com porcentagem e tal... e eles faziam sabe... eu acho que eles se interessam eles gostam mais de mexer no computador... se tivesse uma coisa assim mais preparadinha, certinha. ($_{80}$ Prof2)

Já com o jogo no tabuleiro, verificamos que o professor sente-se detentor do conhecimento e o aluno restringe-se a atividade proposta.

No tabuleiro é mais interessante. (Prof5)

Também acho mais interessante. (Prof1)

Bom eles passam horas jogando o jogo da velha. (Prof3)

Mais se eles gostarem acabou, eles vão embora. E baralho, eles passam um tempo jogando. (Prof5)

Marco (2004) evidenciou em sua pesquisa que ao utilizar o mesmo jogo nas duas versões, tabuleiro e computacional, os alunos afirmaram a preferência pelo tabuleiro, pois em jogos geométricos a visualização é maior. Na verdade, a tela do computador é uma representação semi-concreta, o que prejudica a visualização.

Eu acho que primeiro teria que ser no tabuleiro, aí ele vai encontrar dificuldade, no momento que você passar para o computador eles já não vão achar mais dificuldade, aí vai ser um caminho bem mais fácil para eles. Uma que a molecada adora ficar em frente de uma tela... ($_{74}$ Prof6)

Embora a maioria dos professores da oficina tenha optado pelo jogo no tabuleiro, outros professores mencionaram que, no tabuleiro o jogo ficava comum e que o número de computadores disponíveis e a falta de manutenção no laboratório dificultavam sua utilização.

É comum, no computador eles gostam, no tabuleiro vai ficar comum. (Prof6)

Temos 10 computadores. (Prof6)

Quebra o computador. Eram 12. (Prof5)

Segundo Borba e Penteado (2001) os professores podem caminhar por duas zonas: zona de conforto ou zona de risco. Na zona de conforto quase tudo é conhecido, previsível e controlável. Mesmo que o professor esteja insatisfeito, ele não se movimenta em direção a um território desconhecido, pois é um caminho que os levariam às incertezas e imprevisibilidades. Já na zona de risco o professor é obrigado a avaliar constantemente as conseqüências das ações propostas e sujeitar-se ao risco de perda de controle e obsolescência. Quando tudo vai bem com a parte técnica e a aula transcorre normalmente, surge às perguntas imprevisíveis, o que requer um tempo mais longo para análise e compreensão. Além disso, o professor tem que atualizar constantemente o seu vocabulário sobre computadores e softwares, em decorrência da velocidade das novidades nesta área. Portanto, não é possível se manter numa zona de risco sem buscar novos conhecimentos.

Em relação à proposta de criação dos jogos, verificamos um distanciamento da realidade do professor, visto que a formação inicial não desenvolveu essa habilidade no decorrer do curso. Uma alternativa interessante seria pesquisar a criação de jogos juntamente com os alunos em sala de aula, muito embora os professores prefiram o material já pronto, justificando não disporem de tempo suficiente para desenvolvê-los.

A questão do material pronto é ideal por que a gente não tem tempo, sempre a correria... tem outras escolas, corre pra cá, corre pra lá. É difícil! Às vezes você tem idéia, né... fala... nossa... poderia fazer isso, isso... mas às vezes acaba passando por causa do tempo mesmo, né? ([94] Prof4)

Durante a oficina os professores também se manifestaram a respeito da correria do dia-a-dia e a falta de material, que influenciavam diretamente na preparação das aulas. Suas observações aparecem nos fragmentos da filmagem:

É muito atropelado o tempo, a gente cobra demais os conteúdos que precisam ser cumpridos no programa. (Prof3)

No atropelo não tem a disposição de preparar o material. (Prof6)

Não há disponibilidade de material. (Prof1)

Não se pode afirmar que os professores participantes da pesquisa vão usar de imediato em sala de aula o jogo trabalhado nesta oficina, denominado Configuração Simples do Tri-Hex, em decorrência de que a utilização de material concreto para eles não significa uma estratégia didática.

As estratégias didáticas, segundo La Torre e Barrios (2002), são caracterizadas por serem inovadoras e impulsoras de mudanças, envolventes para o aluno que adotará papel ativo no processo de aprender, construtivas e facilitadoras da aprendizagem, polivalentes e adaptadas ao grupo de alunos, sua idade, interesse e estilos, entre outros.

Nesse sentido, a oficina contribuiu para sensibilizá-los para possíveis mudanças em suas atuais concepções, de modo a encarar o jogo como uma possibilidade didático-pedagógica, muito embora já tenhamos mencionado que no processo de formação inicial, o trabalho com materiais concretos em situações de ensino e de aprendizagem, não ocupa um lugar de destaque no currículo do curso. Deste modo, os professores acabam desconsiderando a utilização do material didático, especificamente os jogos, como uma estratégia alternativa para sua prática docente.

No decorrer das oficinas, os professores manifestaram sua adesão/validação, estimulados especialmente pelo jogo realizado com duplas. A validação ocorreu durante as tentativas de jogadas feitas de modo aleatório, sem pensar nas estratégias, como mostram as falas extraídas da filmagem:

Na verdade nós não pensamos, foi aleatória a jogada. (Prof3)

Mas se você pôr aqui (indicando o local), eu faço aqui... você não tem saída. (Prof5)

E se a gente não consegue um ganhar do outro? Dá sempre empate, empate toda hora. (Prof2)

Teve uma vencedora! (Prof3)

Depois de conseguir vencer uma partida, os professores começaram a questionar e planejar suas próximas jogadas:

Eu não perco mais nenhuma!! Já peguei o jeito! Se eu por a primeira pedra eu não perco! (Prof5)

Ganhei! Será que sempre vai funcionar pelos pontos extremos?(Prof2)

A segunda pedra define. Perdeu!
Tá vendo como é que é a coisa, se viu como é?(Prof5)

Quem comanda é quem começa, quem joga em segundo plano não tem chance de ganhar. (Prof1)

Até tem. Você começando, vou tentar te bloquear. (Prof5)

No transcorrer do jogo, os professores começaram a arriscar os primeiros palpites sobre as estratégias vencedoras:

Professora! Chegamos em uma conclusão: quem começa ganha. (Prof1)

A não ser que se "coma barrriga"... Pensando alto... Deve ter um jeito... se eu começar em primeiro eu pego ele toda hora. (Prof5)

Aplique uma estratégia. (Prof1)

Ta vendo! Onde eu pôr, ele faz! A não ser que o cara coloque uma pedra errada, senão ele ganha sempre. (Prof5)

Começou pelo meio, ganhou! Hummm... Nem sempre começando pelo meio ganha-se. (Prof2)

Professor, comece pelo meio. (Prof5)

Vou colocar a pedra no meio... (Prof1)

Inicialmente, os professores reconheceram que "*é muito interessante passar pela experiência de utilização de jogos*" (Prof6), porém retrataram o valor do jogo apenas como brincadeira e não como um instrumento para a prática em sala de aula.

Merecem destaque alguns comentários dos professores, quando estes foram questionados quanto à possibilidade de aplicar o Tri-Hex com conteúdos de 7ª série.

Eu achei interessante, mas se fosse um jogar por jogar aí depois de construir, eu acho que na verdade tinha que ser feito com eles, por exemplo, a construção... todos os passos, na minha opinião. Eu acho que eles iam se interessar mais... É com os alunos, eu acho, pode ser que eu me engane, porque eu não tinha 7ª, eu não apliquei. Eu acho que dá [para utilizar aquela configuração triangular, mostrando a concorrência das retas para abordar o conteúdo], *eu achei interessante, na minha opinião eu acho que dá sim. Eu acho que ficou claro.* ($_{42,44,46,48}$ Prof3)

O objetivo da oficina foi fornecer um jogo que simultaneamente fosse utilizado para introduzir ou fixar novos conceitos alcançados a partir da prática dos professores e, motivando assim, a percepção de um outro olhar para os jogos em geral e sua utilização como ferramenta pedagógica.

Para mim foi, tudo que eu faço, assim que eu conheço, que eu aprendo, para mim é bom. Eu acho que um dia eu sempre acabo utilizando, que nem eu falei, esse ano talvez não pela falta de tempo tudo... mas você pode ter certeza que eu vou usar, alguma hora a gente sempre acaba usando, sempre... ah, lembrei... aquilo lá é assim, e a gente usa. ($_{114}$ Prof4)

A participação dos professores, durante a oficina, na validação do jogo, trouxe idéias pertinentes à experiência adquirida com a prática docente ao longo da carreira profissional.

Eu acho que posso trabalhar qualquer jogo na Matemática; o jogo desperta a aceitação da proposta, a certeza do envolvimento do aluno, a familiarização do aluno com a Geometria, com as figuras, com os conteúdos. (Prof1)

Eles gostam, tumultuaram só no começo. (Prof3)

Vê as posições, raciocinar, trocar com o outro, verificar estratégias ... (Prof1)

É interessante fazer a construção com o aluno, do conceito para o jogo, do jogo para o conceito. Fazer associação. A construção seria ideal para isso, fixam muito mais o conceito. Partindo daqui do material concreto estimula muito. (Prof6)

Cabe aqui uma reflexão sobre a questão da relação entre teoria e prática. Segundo Fiorentini, Souza e Melo (1998) esta relação acontece quando concebemos o saber teórico ou aqueles oriundos da produção científica como verdadeiros e indubitáveis, diretamente aplicáveis na prática. Assim, o saber do professor não se restringe em saber aplicar seus conhecimentos teórico ou científico, mas sim, saber negá-lo, não aplicando pura e simplesmente este conhecimento, mas transformando-o em saber complexo e articulado ao contexto em que ele é trabalhado/produzido.

A dimensão teórica e prática docente foi também valorizada por um dos professores como um aspecto importante na utilização dos jogos, o que inclui os saberes da experiência.

Não, com a brincadeira que você desperta e depois você passa já, ou vice-versa mas desde que você não deixa muito disparado para ele poder associar as duas partes: a prática com a teoria. Isso aí foi o que eu conclui lá com a sua prática naquela oficina da sua pesquisa. (283 Prof1)

Entendemos, ainda, que conhecer métodos para o uso de jogos, em sala de aula, contribui para o conhecimento pessoal e profissional do professor, além de criar um ambiente, onde professores e alunos interessados, motivados, passam inclusive a adquirir conhecimento conjunto em geometria. Na verdade, isso pode contribuir para reduzir a evasão e a repetência, além de estimular a criatividade e a solidariedade em sala de aula.

Esse Bloco evidenciou, por meio da oficina, a insegurança dos professores quanto ao uso da tecnologia, que demonstraram claramente maior segurança ao fazerem uso dos jogos utilizando tabuleiro convencional. Embora os professores tenham consciência da importância do uso dos jogos em sala de aula, eles ainda não os utilizam como uma metodologia de ensino em sua prática, devido à falta de condições ideais. Ainda há muitos educadores resistentes a mudanças. A oficina foi importante para que os professores discutissem e identificassem, no processo de validação, a adequação do jogo ao desenvolvimento dos conteúdos matemáticos/geométricos.

De uma forma geral, podemos inferir que os professores necessitam avançar em relação a uma gestão pedagógica de sala de aula mais autônoma e compartilhada com seus pares. O trabalho com jogos exige uma revisão da rotina convencional estabelecida pela escola e um trabalho mais integrado entre professores, coordenadores pedagógicos e diretores. Isso facilitaria a mudança das práticas. Fica fortalecida, mais uma vez, a idéia do professor enquanto gestor de sua sala de aula e do valor da investigação da sua prática e compartilhamento das dificuldades e avanços identificados nas atividades diferenciadas a que se propõe realizar.

<u>Bloco 4</u> - Condições de trabalho dos professores

Tomamos para análise a questão das condições de trabalho do professor, pois ela vem sendo um indicador importante quando se analisa a questão da qualidade do seu trabalho nas escolas e nas salas de aula.

Zeichner (2003), baseado em uma pesquisa mundial realizada pela UNESCO, discute a situação dos professores e chega a afirmar que seu *status* e suas condições de trabalho não melhoraram. Aliás, há indícios que tenham piorado nos últimos anos, mesmo em países com elevado crescimento econômico. Normalmente os professores são mal remunerados e obrigados, muitas vezes, a exercer outras atividades ou sobrecarregar sua carga horária para sustentar suas famílias.

A mesma realidade é constatada aqui no Brasil e junto aos nossos professores pesquisados. A desvalorização do trabalho do professor abrange desde a questão da sua qualificação até as questões mais internas da sala de aula tais como o número de alunos ou a excessiva carga horária.

Em relação à precariedade da qualificação pode-se indicar que ainda não está resolvida e mostra-se como um aspecto que pode estar ligado diretamente às condições de trabalho do professor. Segundo Sampaio e Marin (2004), um estudo sobre a situação dos professores realizada por diversas entidades nacionais e pela Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e a Cultura – UNESCO (2004), aponta que a proporção de docentes com formação superior no país, varia numa escala de 10% no Maranhão a 76% em São Paulo (Brasil, 2002).

Já quando se fala mais diretamente das condições de trabalho, uma de suas facetas é fortemente destacada pelos nossos professores: a carga horária de trabalho e o tamanho das turmas. Este último aspecto tem sido queixa constante dos professores e dados do INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais de 2002, indicaram que o número médio de alunos em salas de aula no Brasil era de 37,6, variando de 30,9 em Roraima a 43,0 em Sergipe.

Os depoimentos dos nossos professores sobre a carga horária de trabalho são fortes indicativos das condições vividas por eles:

Um professor com 60 aulas não tem condições, de que jeito? No mundo das idéias, no mundo da prática não funciona. Do jeito que o professor tem que rebolar não tem tempo. O mundo aqui é outro, dá até impressão de quem está lá na Ciência e Educação não conhece esse nosso mundo aqui. (Prof1)

Tem que ter mudança urgente, impossível o professor dar 60 aulas por semana, ensino fundamental é "bravo". É cansativo, você não tem ânimo. Daí não agüenta mais e começa faltar na aula. Poderia ter assumido mais aulas, mas pensei que não dá pra agüentar. (Prof5)

> Essa ampliação chega, em muitos casos, a fazer com que o(a) professor(a) trabalhe três períodos do dia, durante toda a semana. Acrescenta-se ainda no cotidiano da professora a jornada doméstica. Numa sociedade patriarcal e machista como a nossa, a mulher, além de seu trabalho profissional fora de casa, assume ainda e, muitas vezes, sozinha, todos os afazeres/responsabilidades domésticas. (NACARATO; VARANI; CARVALHO, 1998, p.85)

Desta forma, a baixa remuneração e a falta de tempo refletem no despreparo do professor, pois ele não terá condições financeiras de investir em sua atualização profissional. O fragmento de entrevista, abaixo, ilustra a ligação direta entre as condições precárias de trabalho e a questão do aprimoramento profissional.

É, o professor tinha que ter tempo para se preparar mais, tinha que ganhar o suficiente para se preparar e ter o tempo. Quando eu tinha meus professores eles davam 4 horas por dia, hoje 4 horas por dia não paga a gasolina que ele vai dar aula. Nós estamos desse jeito e uma coisa que eu acho nada mais justo. A mulher adentrando no mercado de trabalho, ... passou a se exigir muito mais em termos de horas de cada professor como a mulher trabalhando junto, partilhando porque o marido não conseguiu nutrir mais a casa, quer dizer, então você dividiu, quer dizer quebrou o professor em quatro, teve que dobrar o horário e que ele e a mulher para formar o que ele fazia sozinho antes e então o professor aí não tem mais onde se preparar adequadamente. ([318] Prof1)

A constrangedora situação de trabalho do professor, conforme pesquisa de Sampaio e Marin (2004), pode também ser percebida pelo valor do salário que recebe em relação ao seu tempo de dedicação às escolas da rede pública. O levantamento realizado pelas autoras posicionou o Brasil acima somente da Indonésia e quase empatado com o Peru e pode ser considerado como um dos sete piores do mundo em relação à remuneração dos seus professores. Todos os outros países oferecem melhor remuneração aos professores da educação primária e da educação secundária.

Lógico [que faria cursos]*! Mas é lógico, é que a gente não tem condições para ir, acaba fechando o horário todo para ter um bom salário, bom salário não... um salário, é complicado. Eu tô com 26, agora esse ano, mas é complicado. Tem gente que tá com 50, 60 aulas por semana, eu acho que fica meio... não dá nem para preparar matéria nenhuma, não dá nada coitados.* (108, 110, 112 Prof2)

> Em documentos do Banco Mundial observa-se a orientação clara para enfatizar-se a capacitação dos professores em serviço. Mas o atendimento dessa "exigência", a respeito da formação de professores em nível superior, pode resultar numa formação barata e de qualidade questionável. A capacitação em serviço pode e deve ser uma das formas de formar professores, porém adotá-la como a única ou a principal forma, em detrimento de outras, como a formação inicial, parece bastante problemático. (BARBOSA, 2005, p.28)

Ficou evidente durante a pesquisa que os professores têm interesse em participar de cursos para aprimoramento profissional, mas a maioria é impedida pelo próprio sistema, uma vez que participam do PEC primeiramente os professores efetivos e somente em caso de sobra de vagas os demais podem participar. Essa última situação raramente ocorre, conforme expresso, abaixo, na voz de um dos nossos entrevistados.

Já, depois do concurso, não desse concurso, do outro concurso, infelizmente não me convocaram prá nenhum curso, o único que eu fiz foi o de informática há dois anos atrás, porque eles dão mais para os efetivos, os efetivos tem preferências. Eu acho, eu acho não eu tenho certeza, o ACT fica um pouquinho de lado, eu pelo menos fiquei, eu não participei. É como hoje, nós respondemos senso, e no senso o único curso que eu tenho lá pra por no senso é esse de informática que eu fiz no Felícia, 30h. por que os outros cursos a gente não... tem os efetivos que eles tão em primeiro lugar, entendeu? Então a ACT... apesar que tem a teia do saber que eu não fiz porque eu preferi ficar estudando para o concurso, do que fazer essa teia do saber que o pessoal tá fazendo. Mas agora, os outros assim nas escolas que eu dei aula eles não convocaram. (60 Prof2)

O discurso vigente da sociedade como um todo atribui o problema do fracasso e da evasão escolar ao fato de os professores estarem mal preparados. Estes não se eximem completamente de tal deficiência e têm consciência de que seu trabalho poderia ser melhor. O fato é que sentem o desgaste das longas jornadas de trabalho decorrentes da má remuneração. E isso, segundo Apple (1987), representa claramente uma das formas pelas quais os privilégios dos docentes são desagregados, contribuindo para o aumento de uma desqualificação intelectual, pois, ao ter que cumprir mais tarefas, o professor reduz seu tempo para pesquisar, participar de cursos ou utilizar outros recursos que contribuiriam para sua qualificação e seu desenvolvimento profissional.

Os próprios professores têm consciência de que os alunos, principalmente da escola pública, não saem preparados para o mercado de trabalho e não têm condições de freqüentar uma universidade pública.

Ainda durante a oficina, os professores puderam expressar, em forma de desabafo, a sua desaprovação com relação aos projetos realizados na escola. Segundo Sampaio e Marin (2004) o desenvolvimento de projetos situa-se na continuidade das práticas que se firmaram nas tentativas de articular e integrar o currículo. A escassez de tempo disponível para o necessário preenchimento de inúmeros formulários dificultou a participação de muitos professores na implementação de tais projetos.

E projeto... agora tem um monte de ficha para preencher. (Prof5)

Quando tem vermelha... por que o aluno não sabe.... o que ele não sabe... por que você não ensinou... (Prof1)

Se acha que vamos ter tempo para encher esse monte de papel? Então eles enganam lá, nós enganamos aqui... e eles sabem o que está acontecendo sim! (Prof5)

Uma outra queixa constante na fala dos professores, ratificada por Sampaio e Marin (2004), referente à precariedade das condições de trabalho, diz respeito ao tamanho das turmas com os quais os professores devem lidar. Há um descontentamento geral com relação a esse aspecto.

A fala de um dos professores mostra que o trabalho com uma turma numerosa prejudica o conteúdo e reflete diretamente nos resultados dos vestibulares.

98% dos alunos não tem noção de Geometria por que não há tempo hábil para isso. É no vestibular... Para 35 alunos, sentam de 3 em 3, de quatro por grupo. Essas dificuldades a gente tem vencido, mas no vestibular isso aparece. (Prof6)

Aí temos o caso de um médico que o paciente quebrou pé esquerdo e o médico operou o pé direito... (Prof6)

Esses fatos, segundo Nacarato, Varani e Carvalho (1998, p.85), trazem como conseqüência o estresse do docente, a queda da qualidade de sua sala de aula, a impossibilidade de aperfeiçoamento e a falta de tempo para preparar e refletir sobre sua prática.

Se preparar para preparar os outros tem que tá bem preparado e então vai no rodão e então é o que tá acontecendo aí, sem contar que a democratização da escola ela arrastou para escola, é diferente do aluno que vai para a escola. Eu quando eu fui na escola eu fui estudar, hoje o aluno é levado na escola para tentar aprender, e isso tá refletindo no rebaixamento da colocação do professor, dessa massa vai sair os educadores de amanhã. Tanto que quando tocou a campainha, nós estávamos falando dos alunos da Santa Giulia e as outras tudo é a mesma coisa, eu dei aula para aluno que chupava o dedo e sentava em cima do caixote de lixo e ficava empurrando tão entrando aí e achando que o vestibular foi fácil, então eu tenho medo do que vai ser esses profissionais do dia de amanhã por que? Por um sistema a culpa não é dele, o sistema não preparou ele antes e tá inserindo ele agora. ($_{320}$ Prof1)

> Do professor tem sido exigida a responsabilidade de ser alquimista – transformar metais comuns (ambiente inadequado, classes numerosas e estudantes desinteressados) em ouro (motivação para aprender, prazer diante do conhecimento, construção da cidadania, estudantes com espírito investigativo e criativo). (NACARATO; VARANI; CARVALHO, 1998, p.83)

A difícil situação em que se encontra o profissional docente caracterizado pela baixa remuneração, carga horária excessiva e a conseqüente falta de tempo para preparar aulas e desenvolver materiais, corroboram diretamente com a dificuldade de trabalhar com jogos em sala de aula.

O ambiente de trabalho do professor, desprovido das condições para a melhoria da qualidade de ensino ou mesmo para estimular certas iniciativas em busca de um ensino diferenciado, pode ser percebido no depoimento abaixo de um dos professores.

Não, é muito difícil, não utilizo nenhum material. Esses dias eu precisava de régua, eu tive que comprar umas réguas para eles, tem na escola mais eles destroem, sabe? A escola às vezes dá... falta muita coisa e não tem condições de comprar material para todo mundo diversificar a aula. ($_{70,\ 106}$ Prof2)

Ademais, os professores da escola pública se sentem desamparados, com a sensação de estarem sozinhos no processo.

Eles ficam lá no ar condicionado... Eles podiam vir substituir umas aulas, na 8ª a noite, por exemplo. Eles precisam ver a realidade. (Prof1)

Mas eles sabem o que está acontecendo precisam mostrar para o mundo que o Brasil está melhorando, para poder pegar dinheiro emprestado. (Prof5)

Se por um lado temos professores que executam prontamente as orientações do diretor e o roteiro do projeto político pedagógico, por outro, sem que se perceba, acabam perdendo o encantamento do cotidiano escolar e aumentam a impossibilidade de promover transformações.

> (...) atribuem-se responsabilidades ao professor, mas as condições de formação que lhes foram/são oferecidas não lhes permitem atendê-las. Isto gera no professor conflitos pessoais e sentimentos profundos de autolimitação, pois ele não consegue ser tão dinâmico, criativo e “competente” para cumprir todos os papéis que lhes são atribuídos, o que acarreta uma imensa sensação de baixa estima – sentem-se desvalorizados, desatualizados, muitas vezes inadequados e incompetentes profissionalmente. (NACARATO; VARANI; CARVALHO, 1998, p.96)

Por outro lado, de acordo com os autores, o docente que questiona e resiste à racionalidade técnica e reflete criticamente sobre sua prática, é aquele que, apesar de todas as tentativas externas de limitações do seu trabalho, volta o seu olhar para o aluno, tratando-o respeitosamente, como um sujeito histórico e inserido num contexto social. É aquele que tenta “driblar” as limitações e busca desenvolver, com o coletivo da escola, projetos de trabalho docente. (p.94).

Apesar de todos esses empecilhos, os professores trabalham pelo desenvolvimento profissional dos seus alunos e lutam para oferecer um ambiente escolar com recursos físicos e didáticos adequados a uma prática diferenciada, além de esperarem por um digno reconhecimento.

Ao tratar das atuais políticas de formação de professores no Brasil, Barbosa (2005) relata o consenso de que, para uma formação de professores de qualidade, devem ser pensadas propostas que articulem três elementos: formação inicial, formação contínua e condições de trabalho. De acordo com a análise do Projeto de Lei nº 1066 de 15/10/2003 que propôs o Plano Estadual de Educação do governo do Estado de São Paulo, reafirma-se que a qualidade do ensino passa pela valorização dos professores, com a “implementação de políticas que contemplam o plano de carreira, salário digno, boas condições de trabalho, cuidados com a saúde, prevenção de doenças no exercício da função, garantia de formação continuada, melhoria da formação profissional inicial”, entre outras.

Notamos que o discurso oficial admite a necessidade de considerar outros elementos para além da formação contínua e/ou capacitação em serviço, no que diz respeito a melhorar a prática dos professores. No entanto, o poder público estadual continua a investir, muitas vezes, somente nessa alternativa. E, quando considera a questão dos salários o faz na forma de bônus que, segundo Barbosa (2005), caracteriza uma política de recompensa e de incentivo às disputas internas na escola e entre escolas, à medida que é diretamente vinculada à avaliação do desempenho dos professores e à sua freqüência.

Nesse bloco, notamos que a má remuneração e a falta de tempo, devido ao excesso na carga horária, influenciam diretamente no despreparo do professor, impossibilitados de fazer quaisquer investimentos em sua formação pessoal. Dificilmente o professor pesquisará novas metodologias para sua prática. Esse fato foi claramente percebido em nossa oficina quando eles demonstraram a dificuldade em se trabalhar com jogos. O corpo docente tem consciência da limitação de seus alunos e concordam que não estão preparados para o mercado de trabalho. Mesmo com dificuldades, os professores continuam desempenhando seu papel da melhor maneira possível.

Por fim, é necessário muito esforço para se garantir o direito de todos para uma educação de boa qualidade, mas acreditamos que o desenvolvimento está ligado às universidades, à escola, ao Estado e ao professor, por meio de seu constante comprometimento com a prática.

Na "formação de professores e na educação em geral, devemos continuar lutando para nos aproximarmos mais de um mundo em que aquilo que queremos para os nossos próprios filhos esteja ao alcance dos filhos de todos". (ZEICHNER, 2003, p.52).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando a singularidade dos participantes, os limites do recorte que fizemos e os resultados obtidos nessa pesquisa, sentimos a necessidade de confrontá-los com a experiência de outros grupos de professores de Matemática participantes do PEC de outras localizações. Gostaríamos também de acompanhar de perto os professores no desenvolvimento de suas atividades práticas junto a seus alunos, no entanto, o tempo que tínhamos para concluir o mestrado obrigou-nos a deixar isso para um trabalho futuro.

A parceria entre universidade e escola pública funcionou como uma estratégia facilitadora no desencadeamento do processo de transformação das práticas pedagógicas e de formação do professor que investiga e reflete sobre sua prática. A presença da universidade no município pode e deve influenciar sobremaneira no processo de formação inicial e continuada dos professores.

A pesquisa foi importante para conscientizar os professores quanto à utilização de jogos como ferramenta facilitadora para o ensino e aprendizagem de conteúdos da geometria e também para provocar atitudes investigativas e propiciar intervenções no processo de validação de um jogo pedagógico. Durante o trabalho de validação do jogo, os professores não tiveram medo de errar e trabalharam seriamente no estudo das dificuldades de aprendizagem deles e dos alunos. Esperamos que isso possa contribuir diretamente na redução da evasão e repetência, além de despertar a criatividade e a solidariedade.

A análise dos dados propiciou importantes constatações sobre a formação inicial do professor de matemática e sua atuação junto aos alunos do ensino fundamental; sinalizou a importância da participação efetiva do professor na definição e preparação dos conteúdos e materiais componentes de um programa de formação continuada para posterior utilização em sua prática profissional.

As capacidades de criação, discussão e aplicação de conhecimentos dos professores mostraram-se bastante evidentes quando eles se depararam com atividades onde puderam expressar-se livremente e colaborar com o andamento da atividade.

A avaliação/validação do jogo Configuração Simples do Tri-Hex junto aos sujeitos, confirma a importância de sua utilização como ferramenta de aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Foi nossa intenção trazer à tona algumas questões fundamentais a respeito da formação inicial e continuada, de modo a oferecer um momento de reflexão. A geometria é um conteúdo importante que não vem sendo explorado como deveria. Assim, a formação continuada pode ser utilizada como um meio de reverter esse processo, muito embora sejamos da opinião de que isso não seria necessário se a formação inicial fosse de qualidade. A formação inicial deveria ser o momento de abarcar esse conteúdo, discuti-lo e vivenciá-lo junto aos futuros professores, no que se refere ao ensino de geometria do ensino fundamental.

Não se trata de pensar que a formação continuada vá solucionar todos os problemas. Trata-se de pensar a escola com grupos de trabalho e parcerias, com oportunidades para planejar em equipe, desenvolver projetos com autonomia, contar com apoio pedagógico e dispor de tempo para pesquisa. Deste modo, o professor poderá até inovar suas atividades de ensino e fazer uso do jogo como uma estratégia didática para ensinar geometria. Este é um enfoque trabalhado por La Torre e Barrius (2002) que tem como uma de suas finalidades capacitar o profissional para melhorar a sua aprendizagem e o ensino.

Por não considerarem ainda o jogo como uma possibilidade didático-pedagógica, como uma estratégia de ensino-aprendizagem, pareceu-nos à primeira vista que os professores envolvidos na pesquisa não farão uso imediato de jogos, em especial, a Configuração Simples do Tri-Hex. Nesse sentido, a oficina foi uma excelente contribuição para sensibilizá-los para possíveis mudanças em suas atuais concepções sobre os jogos.

Há que se contemplar e respeitar o tempo utilizado pelos professores para se adaptarem às novas metodologias, principalmente porque nos depoimentos ficou evidente a preocupação dos mesmos quanto à relação entre teoria e prática.

A maioria dos professores que está em sala de aula vem de uma Licenciatura em que tiveram uma formação inicial deficiente. Felizmente, nos cursos atuais de formação inicial de professores já vislumbramos diversas melhorias. Como só recentemente tivemos concursos públicos, ainda não tivemos oportunidade de perceber com nitidez a atuação desses novos professores.

Antes dessa pesquisa, não tínhamos uma percepção completa dos problemas oriundos da formação inicial. Como capacitadora, procurávamos ajudá-los durante as aulas do Programa de Educação Continuada, mas não conseguíamos muitas mudanças. Era pouco tempo de trabalho de formação continuada para preencher tantas lacunas. Como o foco de nossa atuação era abordar a álgebra através de ferramentas de tecnologia, e indubitavelmente eles eram defasados nessa área, não percebíamos que havia outras dificuldades e que estavam intimamente relacionadas com a formação inicial.

Hoje temos outra visão. De modo algum voltaríamos a atuar da mesma maneira. É urgente elaborar propostas de formação de professores que integre a formação inicial e a formação continuada, levando-se em consideração todas as dificuldades do sistema de ensino, tais como as condições precárias das escolas.

Os professores são ainda bastante resistentes a mudanças e devido a diversas dificuldades já enumeradas nesse trabalho, deixam de produzir aulas, materiais ou mesmo conhecimentos.

Para realizar essa pesquisa, tivemos que percorrer diversas etapas, desde a escolha do trabalho até a análise dos dados obtidos. Infelizmente os professores entrevistados não tiveram a chance de trilhar todas as etapas do trabalho, e talvez por conta disso falta-lhes a sensação da realização, da descoberta, da criatividade. Se soubéssemos o quanto isso é importante, não deixaríamos de explorar os diversos temas da matemática, como o fazem outras disciplinas. O trabalho em equipe e a oficinas, precisam ser encaradas como um ambiente de descoberta, de troca.

A análise dos dados demonstrou que a geometria não é explorada, devido principalmente, à falta de uma formação inicial de melhor qualidade.Valoriza-se mais a álgebra em detrimento da geometria.

Quanto ao livro didático, este é bastante utilizado pelo professor, muito embora, espera-se que ele participe de modo direto em sua criação e adoção. A informática é utilizada sem planejamento e de maneira um tanto quanto descontextualizada. O jogo é encarado, muitas vezes, como atividade lúdica.

Há uma generalizada insegurança dos professores no que se refere ao uso da tecnologia, seja por resistência a mudanças, seja por falta de uma formação mais tecnológica ou mesmo por falta de oportunidade.

A falta de preparação dos professores é causada também pela má remuneração e a falta de tempo, devido ao excesso na carga horária. Porém isso não os impede de desempenhar seu papel com relativa eficiência e eficácia.

Precisamos mudar a escola para mudar a prática do professor. Os conteúdos programáticos precisam ser vistos e revistos periodicamente, de modo a se adequarem aos tempos e às novas técnicas de ensino. Principalmente as reuniões de HTPC, tão desacreditadas, precisam deixar de ser como são. “Os HTPCs raramente são utilizados para rever, debater ou obter auxílios coletivos relativos a questões de efetivação do currículo, e sim como tempo dedicado a questões administrativas”. (SAMPAIO e MARIN, 2004, p.1214). O trabalho em equipe é o que se visualiza como um meio de mudar a escola, melhorar suas condições e o modo de pensar dos professores.

Algumas dessas mudanças estão previstas para esse ano, nas palavras do Ministro da Educação, Tarso Genro, que elegeu 2005 como o ano da qualidade na educação. Segundo ele, um dos gargalos da educação é a baixa qualidade do ensino, e, portanto, desenvolverá ações para resolver esse problema, começando pela formação de professores que estão em sala de aula, mas que têm formação pedagógica deficiente. Uma das três áreas a serem trabalhadas é a matemática. O ensino de qualidade, na sua opinião, é uma educação com boa estrutura escolar e métodos pedagógicos adequados à nossa sociedade, e professores bem remunerados.

Apontamos, para finalizar, outras possibilidades de investigação decorrentes do trabalho de pesquisa e que não puderam ser aqui aprofundadas devido à própria natureza desse trabalho e que poderiam ser objetos de pesquisas futuras:

- Cruzar os resultados desse trabalho com uma outra pesquisa de campo com alunos do ensino fundamental, médio e graduação, utilizando talvez diversos outros tabuleiros. Nossa pesquisa de campo restringiu-se aos professores de matemática do ensino fundamental.

- Explorar outros tipos de tabuleiros de modo a demonstrar e aprofundar:
  - A homotetia, visto que a homotetia conserva os tipos de cevianas e os pontos notáveis.
  - A reta de Euler.

- Investigar o conteúdo relativo a Pontos e Retas Notáveis do Triângulo, a partir de livros didáticos utilizados na maioria das escolas.
- Preparar um texto especificamente apropriado ao trabalho docente, utilizando principalmente o Tri-Hex com o tabuleiro de Configuração Simples, procurando dessa maneira atender às necessidades dos professores no que se refere ao material didático-pedagógico e primordialmente captar os seus interesses para ao trabalho em sala de aula. As investigações e resultados obtidos no decorrer dessa pesquisa poderiam ser utilizados como a base desse material.

REFERÊNCIAS

APPLE, M. *Relações de classe e de gênero e modificações no processo de trabalho docente*, in Cadernos de Pesquisas, nº 60, São Paulo, fev., p. 3-14.

ARITMÉTICA*:* novas perspectivas – implicações da teoria de Piaget. Tradução C. KAMII, Campinas: Papirus, 1994.

BARBOSA, A. *Políticas públicas para a formação de professores das séries iniciais do ensino fundamental: uma análise do programa pec formação universitária.* São Paulo, 2005. Dissertação de Mestrado. Educação, USP.

BARBOSA, R. M. *Aprendendo com padrões mágicos*. São Paulo: SBEM, 2000. (Caderno Ensino Aprendizagem de Matemática, nº 1).

BARSON, A. Three-in-a-Row. In: MATHEMATICS Games for Fun and Practice. Addison-Wesley Publishing Company. Parsippany, New Jersey: Dale Seymour Publications, 1992.

BECHELLI, R. A. P. *Estudo de um processo de educação continuada na hora de trabalho pedagógico coletivo (HTPC).* 1998. Dissertação (Mestrado em Psicologia da Educação) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

BERTONHA, R. A. *O ensino da geometria e o dia-a-dia na sala de aula*. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução à teoria e ao métodos. Portugal: Porto, 1991.

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas:* uma estratégia para as aulas de matemática. 2. ed. São Paulo: CAEM/USP, 1996.

BOULIGAND,G. *Leçons de géométrie vectorielle*. Paris: Vuibert, 1924. p.42-43

BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Propostas de diretrizes para a formação inicial de professores da educação básica, em cursos de nível superior*. Brasília, abril de 2001.

BRETON, M. *Le calcul vectoriel*. Paris: Doin, 1948. p.61-64. (Collection pour comprendre).

CALDEIRA, A. M. S. *La prática docente cotidiana de una maestra y el processo de apropriación y construcción de su saber*. 1993. Tese (Doutorado) - Universidade de Barcelona, Barcelona.

CAMMAN, P.; RÉBOUIS, A. G. *Geometria plne.* Paris: Gigord, 1927.

CHASLES, M. *Aperçu historique des méthodos en géométrie.* Paris: Gauthier-Villars, 1889.

COMBETTE, E. *Cours géo métrie élémentaire*. Paris: Germer Bailliere, 1891.

COURT, N. A. *An introduction to modern geometry of the triangle and the circle.* New York: Barnes & Noble, s.d.

COXETER, H. S. M. *Introduction to geometry*. New York: Weley, 1961.

COXETER, H. S.; GREITZER, S. L. *Geometry revisited.* Singer: Randon House, 1962.

DALCIN, M.; HELLMEISTER, A.C.P. A vingança do incentro. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 46, p. 6-12, 2001.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar:* geometria plana. São Paulo: Atual, 1993.

DOMENICO, E. G. Laboratório de ensino e aprendizagem: subsídios de uma experiência para a melhoria da performance do professor. *Temas & Debates,* São Paulo, n. 7, 1995.

DORWART, H. L. *The geometry of incidence*. New Jersey: Prentice-Hall, 1966.

EMERIQUE, P. S. *Estruturas grupais e suas implicações numa situação de jogo com regras*. 1981. Dissertação (Mestrado em Psicologia da Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

EVES, H. *A survey of geometry*. Boston: Allyn and Bacon, 1966. v.1.

FALSARELLA, A. M. *Formação continuada e prática de sala de aula*: um estudo sobre os efeitos da capacitação de professores no projeto das classes de aceleração no Estado de São Paulo. 2001. 176f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação: História, Política e Sociedade, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

FERRAREZI, L. A.; PASSOS, L. F.; BARBOSA R. M. Investigando relacionamentos de pontos notáveis de um triângulo com Cabri II. *Interciência*: Ciências Exatas, Catanduva, v.2, n.1, p. 7-14, 2003.

FERRAREZI, L. A.; GARCIA T. M. R.; LIMA V. L. A formação continuada de professores na era da tecnologia. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo, v. 8, n. 6/7, p.39-45, 2001/2002.

FIORENTINI, D.; CASTRO, F. C. Tornando-se professor de Matemática: o caso de Allan em Prática de Ensino e Estágio Supervisionado. In: FIORENTINI, D. (Org.). *Formação de professores de Matemática*: explorandonovos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado das Letras, 2003.

FIORENTINI, D.; JUNIOR, A. J. S.; MELO, G. F. A. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. A. (Org.). *Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a).* Campinas: Mercado de Letras, 1998.

FLEMMING, D. M.; MELLO, A. C. C. *Criatividade e jogos didáticos*. São José: Saint Germain, 2003.

FULLAN, M.; HARGREAVES, A. *A escola como organização aprendente:* buscando uma educação de qualidade. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

GARDNER, M. *Divertimentos matemáticos*. Tradução de B. Mazza. São Paulo: IBRASA, 1991. 189 p.

______. *Mathematical magic show*. London: Penguin Books, 1985.

GEORGEN, P.; SAVIANI, D. (Org). *Formação de professores:* uma experiência internacional sob olhar brasileiro. Campinas: Autores Associados, 1998.

GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. A. (Org.) *Cartografias do trabalho docente:* Professor(a)-Pesquisador(a). Campinas: Mercado das Letras, 1998.

GOUVÊA, F. A. T. *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração:* uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

GOULART, L. J. *O que é geometria? Por que ensiná-la?* 1989. 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

GRANDO, R.C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. 2000. 224 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S.; FRANCO, F. M. M. *Dicionário Houaiss*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

JACOBS, H. R. *Geometry*. New York: Freeman, 1994.

KINCHELOE, J. L. *A formação do professor como compromisso político:* mapeando o pós-moderno. Tradução de N. M. C. Pellanda, Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

KISHIMOTO, T. M. (Org.). *O brincar e suas teorias*. São Paulo: Pioneira; Thomson Learning, 2002b.

______. *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.* 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

______. *Jogos infantis:* o jogo, a criança e a educação. 8. ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

______. *O jogo e a educação infantil*. São Paulo: Pioneira; Thomson Learning, 2002a.

LA TORRE, S. ; BARRIOS, O. *Curso de Formação de para Educadores*. Tradução de M. Rafael, SP: Madras, 2002.

LIBÂNEO, J. C. *Adeus professor, adeus professora?* Novas exigências educacionais e profissão docente. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1999.

LOURENÇO, M. L. *Cabri-géomètre II*: Introdução e atividades. Catanduva: FAFICA, 2000.

LORIA, G. *Storia delle matematiche*. Milano: Ulrico Hoepli, 1937.

______. *Storia delle mathematiche:* dall´alba della civiltà al secolo XIX. Milano: Ulrico Hoepli Milano, 1950.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACEDO, L.; PETTY, A.L.S.; PASSOS, N. C. *Quatro cores, senha e dominó:* oficinas de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica. São Paulo: Cada do Psicólogo, 1997.

MANRIQUE, A. L. *Processo de formação de professores em geometria:* mudanças em concepções e práticas. 2003. 168 f. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

MARCO, F. F. *Estudos dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental.* 2004. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MARIN, A. J. (Org.). *Educação continuada:* reflexões, alternativas. Campinas: Papirus, 2000. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

MASSARO, W. Incentro. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 14, p. 45-46, 1989.

MARTOS, Z. G. *Geometrias não euclidianas:* uma proposta metodológica para o ensino de geometria no ensino fundamental. 2002. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

MELLO, E. G. D. *Uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria.* 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

MISKULIN, R. G. S. As possibilidades didático-pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). *Formação de professores de Matemática*: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado das Letras, 2003.

MISKULIN, R. G. S. *Concepções teórico-metodológicas baseadas em Logo e em resolução de problemas para o processo ensino-aprendizagem da geometria*. 1994. 284 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MILLLER, W.A. Calculator ti-tac-toe: a game of estimation. *The Mathematics Teacher*, v. 74, n. 9, Pleasant, 1981.

MIZUKAMI, M. G. N. et al. *Escola e aprendizagem da docência:* processos de investigação e formação. São Carlos, SP: EdUFSCAR, 2003.

MOURA, M. O. *A construção do signo numérico em situação de ensino*. 1992. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

______. A séria busca no jogo: o lúdico na Matemática. In: KISHIMOTO, T. M. (Org.). *Jogo, Brinquedo, brincadeira e a educação*. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

______. Formação do profissional de educação matemática. *Temas & Debates*, São Paulo, v.8, n.7, 1995.

______. A séria busca no jogo: do lúdico na matemática*.* *A Educação Matemática em Revista*. São Paulo, n.3, p. 17-24, 1994.

MORGADO, A. C. Coordenadas para os centros do triângulo*.* *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 43, p.26-30, 2000.

MURARI, C. *Ensino-aprendizagem de geometria nas 7ª e 8ª séries via caleidoscópios*. 1999. v.1. Tese (Doutorado em Ecuação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

NACARATO, A. M.; VARANI, A.; CARVALHO, V. O cotidiano do trabalho docente: palco, bastidores e trabalho invisível... abrindo as cortinas. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. A. (Org.). *Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a).* Campinas: Mercado de Letras, 1998.

NÓVOA, A. (Org.). *Os professores e sua formação*. Lisboa, Portugal: Publicações Dom Quixote, 1992.

O´BEIRNE, T. H. New boards for old games. Puzzles and Paradoxes. *New Scientist*, n. 269, p.98-99, jan, 1962.

______. *Puzzles and paradoxes* – fascinating excursions in recreational mathematics. New York: Oxford University Press, 1965.

OGILVY, C. S. *Excursions in geometry*. New York: Dover, 1990.

OS MELHORES *jogos do mundo*. Editora Abril. São Paulo, 1978.

PASSOS, C. L. B. *Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula.* 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PASSOS, L. F. *A colaboração professor-pesquisador no processo de formação em serviço da escola básica.* 1997. 157 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino da geometria* – uma visão histórica. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

______. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Revista Zetetiké*, v. 1, n. 1, p.7-17, 1993.

PEREIRA, M. R. O. *A geometria escolar*: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino. 2001. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

PEREZ, G. Prática reflexiva do professor de matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação matemática:* pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

______. *Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares*. 1991. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de São Paulo, Campinas.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J.M. O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In: FIORENTINI, D. (Org.). *Formação de professores de Matemática*: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado das Letras, 2003.

REGATO, J. C.; GILTEATHES, M.E., SCHWAM, J. A. Jogos do: mathematics pentathlon. A manual of directions and official tournament rules. Division I, Grades K 1. Indianapolis. Pentathlon Institute, 1986.

RESULTADOS do Saeb 2003, Brasil e São Paulo, Brasília DF, junho 2004 - Versão Preliminar. Disponível em : <www.inep.gov.br> . Acesso em: 02 ag. 2004.

ROSAMILHA, N. *Psicologia do jogo e aprendizagem infantil*. São Paulo: Pioneira, 1979.

RODRIGUES, A., ESTEVES, M. *A análise de necessidades na formação de professores*. Lisboa: Porto, 1993. (Coleção Ciências da Educação).

SAMPAIO, M. M. F.; MARIN, A. J. Precarização do trabalho docente e seus efeitos sobre as práticas curriculares. *Educação e Sociedade*, Campinas, v.25, n. 89, p.1203-1225, set. 2004.

SANCHEZ-MARMOL, L.; PEREZ-BEATO, M. *Geometria:* metrica, projectiva y sistemas de representation. Madrid: Tame I, 1945.

SANGIACOMO, L. *O processo de mudança de estatuto:* de desenho para figura geométrica – uma engenharia didática com auxílio do Cabri-Géomètre. 1996. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

SATTERLY, J. Relations between the positions of the altitudes of a plane triangule. *The Mathematical Gazette*, v. 46, n. 355, p. 50-51, feb. 1962.

SERRA, M. *Discovering geometry*: an inductive approach. Berkeley: Key Curriculum Press, 1997.

SEVERINO, A. J. FAZENDA, I. C. A. (Org.) *Formação docente:* rupturas e possibilidades. Campinas: Papirus, 2002.

SHIVELY, L. S. *Introduccion a la geometria moderna.* México: Continental, 1966.

SMITH, D. L. *History of mathematics.* New York: Dover, 1958.

VERA, F. *Lexicón Kapelusz.* Buenos Aires: Kapelusz, 1967.

VIANNA, C.C.S. *O papel do raciocínio dedutivo no ensino de matemática*. 1988. 127 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

ZEICHNER, K. M. *Formando professores reflexivos para a educação centrada no aluno:* possibilidades e contradições. São Paulo: UNESP, 2003.

ZEICHNER, K. M. *O professor como prático reflexivo. In: A formação reflexiva de professores: idéias e práticas.* Lisboa: EDUCA, 1993. p. 13-28.

ZWIKKER, C. *Advanced plane geometry*. Amsterdam: North-Hulland, 1950.

ANEXO 1

Roteiro da Entrevista

1) Nome:

2) Faixa Etária: ( ) 20 a 29 ( ) 30 a 39 ( ) 40 a 49 ( ) acima de 50

3) Escola na qual trabalha:

4) Séries na quais leciona:

5) Livro(s) didático(s) utilizado(s):

6) Faculdade onde cursou a graduação?

7) Qual graduação? Fez Especialização? Em que área?

8) Durante a Graduação, houve alguma disciplina específica para geometria?

9) Se houve, lembra-se de alguns tópicos abordados na disciplina?

10) Na escola em que leciona, aborda conteúdos da geometria? Em que séries?

11) Especificamente, quais conteúdo de Geometria aborda em cada série?

12) Quais são os objetivos dos tópicos estudados em Geometria?

13) Utiliza alguma das sugestões dos PCNs no seu trabalho com Geometria? Comente.

14) Quais métodos de ensino e aprendizagem utiliza? Faça uma descrição breve.

15) Quais recursos metodológicos utiliza? Você usa algum material didático para ensinar geometria?

16) Conhecia o jogo Tri-Hex? Qual a sua impressão? Dificuldades? Você já fez experimentos com seus alunos utilizando esse jogo? Pretende fazer?

17) Você já tem familiaridade com o termo ceviana? Na sua opinião, em quais situações é necessário a utilização das cevianas? Trazer o conceito da utilização foi importante?

18) Na sua opinião você acha melhor trabalhar o jogo no tabuleiro ou no computador? Por que?

19) Você acha que este jogo é adequado para introduzir os conceitos sobre retas e pontos notáveis no triângulo?

20) Sobre as estratégias de jogadas, você conseguiu estabelecer alguma? A estratégia que descobriu é completa?

21) Existe algum incentivo da Secretaria da Educação para ajudar na abordagem e conteúdos e modo geral?

ANEXO 2

Roteiro da Oficina

Encontro 1: Aproximação e justificativa da dinâmica. Embora a proposta seja simples, a presença do professor é fundamental. O jogo na sala de aula é o corresponde ao objeto de estudo e a troca de idéias e experiências a respeito dos encaminhamentos que podem ser dados com esse tipo de alternativa pedagógica é ponto principal.

Questões norteadoras: Já trabalharam com jogos? Quais? Como foi a experiência? Teve dificuldades e/ou facilidades? Quem já trabalhou notou que ajuda a disciplina? Tentar comparar quem tem mais experiência com magistério com quem tem menos, perceber as diferenças.

Encontro 2: Apresentação do trabalho de pesquisa. Jogo livre do Tri-Hex.

Encontro 3: Apresentação realizada pelo pesquisador sobre o Tri-Hex na configuração simples (6 linhas e 7 células) – jogar e estabelecer estratégias.

Encontro 4: Interferência do pesquisador para a observação do visual, da configuração abrindo possibilidade para a conceituação de cevianas, principalmente alturas, medianas e bissetrizes internas e externas. Descobertas da concorrência de cada três cevianas do mesmo tipo, denominações especiais e etimologias respectivas. Construção gráfica com os alunos da mesma configuração do jogo respectivamente para esses tipos de cevianas. Discussão para aplicação em sala de aula, possibilidades de atividades voltadas para 7ª série. Apresentação da propriedade de concorrência estabelecida pelo Teorema de Ceva que unifica os resultados especificados – trabalhos práticos correspondentes.

ANEXO 3

Livros Consultados

A partir do exposto, observamos os conteúdos sobre Mediana e Baricentro, Bissetriz e Incentro, Altura e Ortocentro, nos livros de 7ª e 8ª séries.

A escolha das obras foi feita de maneira aleatória e de acordo com o que tínhamos disponíveis no Laboratório de Ensino da Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho" - UNESP - Campus Rio Claro e Escola Estadual de Primeiro e Segundo Grau – EEPSG "9 de Julho" em Taquaritinga.

Dividimos a análise em três categorias: Livro Consultado, Conteúdo abordado e Comentário, que diz respeito a forma que o conteúdo aparece na obra (definição, enunciado, demonstração ou construção).

7ª Série		
Livro Consultado	**Conteúdo abordado**	**Comentário**
Matemática 7ª Série. Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis. 2ª Edição. São Paulo: Scipione, 1997.	- Mediana e Baricentro - Altura	Definições. Em dicionário anexo ao livro encontramos apenas a definição de Altura, Bissetriz, Baricentro e Mediana.
Matemática – Pensar e descobrir. 7ª Série. Giovanni & Giovanni Jr. São Paulo: FTD, 1996.	- Altura e Ortocentro - Mediana e Baricentro - Bissetriz e Incentro	Definições e construções com exemplos.
Matemática – Pensar e descobrir. 7ª Série. Giovanni & Giovanni Jr. São Paulo: FTD, 2000.	- Altura e Ortocentro - Mediana e Baricentro - Bissetriz e Incentro	Definições e construções com exemplos.
Matemática 7ª Série. Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado. São Paulo: Atual, 1981.	- Altura - Mediana - Bissetriz	Definições e construções passo-a-passo.
Matemática hoje é feita assim. 7ª Série. Antonio José Lopes (Bigode). São Paulo: FTD, 2000.	- Bissetriz e Incentro - Mediatriz e Circuncentro - Altura e Ortocentro - Mediana e Baricentro	Definições e algumas construções.
Pelos Caminhos da Matemática 7ª Série. Benedito Castrucci, Ronaldo G. Peretti, José Rui Giovanni. São Paulo: FTD. s.a.	- Altura e Ortocentro - Mediana e Baricentro - Bissetriz e Incentro	Definições e construções passo-a-passo.
PROMAT – Projeto Oficina de Matemática 7ª Série. Maria Cecília C. Grasseschi, Maria Capucho Andretta, Aparecida Borges dos Santos Silva. São Paulo: FTD, 1999.	- Altura e Ortocentro - Mediana e Baricentro - Bissetriz e Incentro	Definições e construções passo-a-passo.
Matemática 7ª Série. Luiz Carlos Domenico. Curitiba: Arco Íris, 1990.	- Altura e Ortocentro - Mediana e Baricentro - Bissetriz e Incentro	Definições e demonstração.
Matemática 7ª Série. Walter Spinelli, Maria Helena Souza. São Paulo: Ática, 2001.	- Altura - Mediana - Bissetriz	Somente enunciados.
Matemática: na vida e na escola. 7ª Série. Ana Lúcia Bordeaux, Cléa Rubinstein, Elizabeth França, Elizabeth Ogliari, Gilda Portela. São Paulo: Brasil, 1999.	- Altura e Ortocentro - Mediana e Baricentro	Definições e construções passo-a-passo.
Matemática: Uma aventura do pensamento. 7ª Série. 8ª Ed. Oscar Guelli. São Paulo: Ática, 2001.	- Altura e Ortocentro - Mediana e Baricentro - Bissetriz e Incentro	Definições e demonstração.
Matemática na medida certa, 7ª Série. Jakubo, Lellis, Centurión. São Paulo: Scipione, 1999.	- Altura - Mediana - Bissetriz - Mediatriz	Definições e demonstração.

8ª Série		
Livro Consultado	**Conteúdo abordado**	**Comentário**
Matemática hoje é feita assim. 8ª Série. Antonio José Lopes (Bigode). São Paulo: FTD, 2000.	- Altura	Enunciada para o cálculo de medidas.
Matemática 8ª Série. Benedito Castrucci, José Rui Giovanni, Ronaldo G. Peretti. São Paulo: FTD. s.a.	- Bissetriz interna e externa - Altura	Bissetriz apresentada definição e construção. Altura enunciada para o cálculo de medidas.
Pai da Matemática: processo auto-instrutivo. 8ª Série, 1º Grau. Di Pierro Neto, Scipione. 2ª Edição. São Paulo: Saraiva, 1979.	- Altura	Enunciada para o cálculo de medidas.
Matemática: Nova Série 1º Grau. Osvaldo Sangiorgi. 8ª Série. São Paulo: Nacional. s.a.	- Bissetriz - Altura	Altura enunciada para o cálculo de medidas e para definição de ângulos.
Matemática e realidade: 8ª Série. Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado. 2ª Edição. São Paulo: Atual, 1991.	- Bissetriz - Altura - Baricentro	Bissetriz e Baricentro definição. Altura enunciada para o cálculo de medidas e para definição de ângulos.
Matemática Moderna. 8ª Série. Domênico, Lago. São Paulo: IBEP. s.a.	- Altura	Altura enunciada para o cálculo de medidas e para definição de ângulos.
Matemática. 8ª Série. 3ª Edição. Antônio Sardella, Edison da Matta. São Paulo: Ática, 1984.	- Bissetriz - Altura	Bissetriz definição. Altura enunciada para o cálculo de medidas e para definição de ângulos.
Matemática: uma aventura do pensamento. 8ª Série. Qscar Guelli. São Paulo: Ática, 1998.	- Altura	Altura enunciada para o cálculo de medidas e para definição de ângulos.
Matemática. 8ª Série. Imenes & Lellis. São Paulo: Scipione, 1997.	- Altura	Altura enunciada para o cálculo de medidas e para definição de ângulos.
Matemática: idéias e desafios. 8ª Série. Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. 4 Edição.São Paulo: Saraiva, 1997.	- Altura	Altura enunciada para o cálculo de medidas e para definição de ângulos.
Matemática em Movimento. 8ª Série. Adilson Longen. São Paulo: Brasil, 1999.	- Altura	Altura enunciada para o cálculo de medidas e para definição de ângulos.
Matemática: na vida e na escola. 8ª Série. Ana Lúcia Bordeaux, Cléa Rubinstein, Elizabeth França, Elizabeth Ogliari, Gilda Portela. São Paulo: Brasil, 1999.	- Altura	Altura enunciada para o cálculo de medidas e para definição de ângulos.
PROMAT – Projeto Oficina de Matemática 8ª Série. Maria Cecília C. Grasseschi, Maria Capucho Andretta, Aparecida Borges dos Santos Silva. São Paulo: FTD, 1999.	- Altura	Altura enunciada para o cálculo de medidas e para definição de ângulos.
Matemática Pensar e Descobrir: novo. 8ª Série. Giovanni & Giovanni Jr. São Paulo: FTD, 2000.	- Bissetriz interna - Altura	Bissetriz definição e construção. Altura enunciada para o cálculo de medidas e para definição de ângulos.
Matemática na medida certa, 8ª Série. Jakubo, Lellis, Centurión. São Paulo: Scipione, 1999.	- Altura	Altura enunciada para o cálculo de medidas e para definição de ângulos.