

Instituto de Física Teórica Universidade Estadual Paulista

IFT-T.010/11

Quebra da simetria de sabor na interação de mésons charmosos com o núcleon

Carlos Eduardo S. Fontoura

Orientador

Prof. Dr. Gastão Inácio Krein

Outubro de 2011

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram para a finalização deste trabalho, em especial, aos meus meus pais Rosane Fontoura e Deloir Chagas Fontoura e também aos meus irmãos. Aos meus tios Saturno Chagas Vieira e Eva Aparecida Capobianco pela enorme hospitalidade e generosidade, que permitiram que um trabalho deste tipo pudesse ser finalizado. Ao prof. Dr. Gastão Krein pela paciência e indispensável ajuda na elaboração desta tese. Aos meus primos Gabriel e Rodrigo Capobianco pela amizade e companheirismo dos últimos anos. Ao grande colega Gabriel Santos Menezes que, entre outras coisas, possibilitou o contato tanto acadêmico quanto familiar com pessoas fantásticas do Rio de Janeiro. A Denize Rocha Santos A MULHER que admiro e tenho enorme carinho, que se tornou fundamental em minha vida. E também as suas sobrinhas Déborah e Elizabeth, pelo sorriso incrível. E também a todo corpo administrativo do IFT, além de todos os colegas do instituto. Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nós empregamos modelos de quarks para investigar a quebra da simetria de sabor na interação de mésons e bárions charmosos com o núcleon. Nesses modelos a única fonte de quebra da simetria de sabor são as massas dos quarks $u, d, s \in c$. Inicialmente, empregamos o modelo de decaimento forte ³P₀ para calcular constantes de acoplamento hádron-hádron efetivas. Os elementos de matriz do operador de decaimento ${}^3\mathrm{P}_0$ foram calculados usando funções de onda hadrônicas determinadas através da diagonalização exata do Hamiltoniano microscópico de um modelo não-relativístico de quarks em uma base finita de funções de onda Gaussianas. Resultados numéricos foram obtidos para as amplitudes $\pi \pi \rho$, $KK\rho$, $\bar{D}\bar{D}\rho$, $NN\pi$, $N\Sigma_s K$, $N\Lambda_c \bar{D}$, $N\Sigma_c \bar{D}$, $N\Lambda_s K$ e os efeitos da quebra de simetria foram avaliados para as correspondentes constantes de acoplamento. A seguir, investigamos o espalhamento a baixas energias dos mésons estranhos K e charmosos D com o núcleon empregando um modelo microscópico de quarks inspirado na cromodinâmica quântica no calibre de Coulomb que confina a carga de cor e realiza a quebra dinâmica da simetria quiral. O Hamiltoniano microscópico do modelo incorpora um potencial de confinamento do tipo Coulomb e uma interação hiperfina de glúons transversos. Uma função de massa para os quarks constituintes é obtida pela solução de uma equação de gap e funções de onda de estados ligados de mésons e bárions são obtidas no espaço de Fock usando um esquema de cálculo variacional. A seguir, tendo obtido as massas constituintes e as funções de ondas dos hádrons, uma interação efetiva méson-núcleon de alcance curto é derivada a partir do mecanismo de troca quark-glúon. Para descrever a física de distâncias longas, interações de troca de mésons vetoriais e escalares obtidas por meio de Lagrangianas efetivas são incorporadas. Por fim, o potencial efetivo méson-bárion contendo as partes de curta e longa distâncias é usado em uma equação de Lippmann-Schwinger para obter deslocamentos de fase e seções de choque. Os resultados obtidos são comparados com cálculos similares recentes usando o modelo não-relativístico de quarks. Nossos resultados são de interesse em estudos de colisões de íons pesados relativísticos, como também para guiar experimentos futuros que pretendem medir seções de choque envolvendo o espalhamento de partículas charmosas por hádrons leves.

Palavras Chaves: Cromodinâmica quântica; Confinamento de quarks e glúons; Quebra dinâmica da simetria quiral; Modelos de quarks constituintes; Interações hádron-hádron, Mésons charmosos; Interações de mésons charmosos com nucleons.

Àreas do conhecimento: Física de partículas elementares; Teoria de campos.

Abstract

We employ quark models to investigate the breaking of flavor symmetry in the interaction of charmed mesons and baryons with the nucleon. The only source of flavor symmetry breaking are the masses of the quarks u, d, s, and c. Initially, we employ the ${}^{3}P_{0}$ strong decay model to obtain hadron-hadron effective coupling constants. The matrix elements of the ${}^{3}P_{0}$ decay operator were evaluated employing hadron wave-functions calculated by exact diagonalization of the microscopic quark model Hamiltonian in a finite basis of Gaussian wave-functions. Numerical results were determined for the $\pi\pi\rho$, $KK\rho$, $\bar{D}\bar{D}\rho$, $NN\pi$, $N\Sigma_s K$, $N\Lambda_c \bar{D}$, $N\Sigma_c \bar{D}$, $N\Lambda_s K$ amplitudes and the symmetry breaking effects were evaluated for the corresponding coupling constants. Next, we investigate the strong interaction of strange K and charmed \overline{D} mesons by nucleons at low energies using a microscopic quark model inspired in quantum chromodynamics in Coulomb gauge that confines color and realizes dynamical chiral symmetry breaking. The microscopic model Hamiltonian incorporates a confining Coulomb potential and a transverse-gluon hyperfine interaction. A constituent-quark mass function is obtained by solving a gap equation and baryon and meson bound-states are obtained in Fock space using a variational calculation. Next, having obtained the constituent-quark masses and the hadron waves functions, an effective short-range meson-nucleon interaction is derived from a quark-interchange mechanism. To describe long-distance physics vector- and scalar-meson exchanges obtained from effective Lagrangians are incorporated. The derived effective meson-baryon potential is used in a Lippmann-Schwinger equation to obtain cross section and phase shifts. The obtained results are compared with recent similar calculations using the nonrelativistic quark model. Our results are of interest to studies of relativistic heavy ion collisions and also to guide future experiments that plan to measure cross sections involving scattering of charmed particles by light hadrons.

"Os deuses condenaram Sísifo a empurrar incessantemente uma rocha até o alto de uma montanha, de onde tornava a cair pelo seu próprio peso. Pensaram, com certa razão, que não há castigo mais terrível que o trabalho inútil e sem esperança. (...) vemos todo o esforço de um corpo tenso ao erguer a pedra enorme, empurrá-la e ajudá-la a subir em uma ladeira cem vezes recomeçada; vemos o rosto crispado, a bochecha colada contra a pedra, o socorro de um ombro que recebe a massa coberta de argila, um pé que a retém, a tensão dos braços, a segurança totalmente humana de duas mãos cheias de terra. Ao final desse prolongado esforço, medido pelo espaço sem céu e pelo tempo sem profundidade, a meta é atingida. Sísifo contempla então a pedra despencando em alguns instantes até esse mundo inferior de onde ele terá que retornar a subi-la até os picos. E volta à planície.

 \dot{E} durante esse regresso, essa pausa que Sísifo me interessa. Um rosto que padece tão perto das pedras já é pedra ele próprio! Vejo esse homem descendo com passos pesados e regulares de volta para o tormento cujo fim não conhecerá. Essa hora, que é como uma respiração e que se repete com tanta certeza quanto sua desgraça, essa hora é a da consciência. Em cada um desses instantes, quando ele abandona os cumes e mergulha pouco a pouco nas guaridas dos deuses, Sísifo é superior ao seu destino é mais forte que sua rocha. (...) Toda a alegria silenciosa de Sísifo consiste nisso. Seu destino lhe pertence. A rocha é sua casa. Da mesma forma, o homem absurdo manda todos os ídolos se calarem quando contempla seu tormento. (...) Não há sol sem sombra, é preciso conhecer a noite. O homem absurdo diz que sim e seu esforço não terá interrupção. Se há um destino pessoal, não há um destino superior ou ao menos só há um, que ele julga fatal e desprezível. De resto, sabe que é dono de seus dias. No instante sutil em que o homem se volta para sua vida, Sísifo, regressando para sua rocha, contempla essa seguência de ações desvinculadas que se tornou seu destino, criado por ele, unido sob o olhar de sua memória e em breve selado por sua morte. Assim, convencido da origem totalmente humana de tudo o que é humano, cego que deseja ver e que sabe que a noite não tem fim, ele está sempre em marcha. A rocha ainda rola.

Deixo Sísifo na base da montanha! As pessoas sempre reencontram seu fardo. Mas Sísifo ensina a fidelidade superior que nega os Deuses e ergue as rochas. Também ele acha que está tudo bem. Esse universo, doravante sem dono, não lhe parece estéril nem fútil. Cada grão dessa pedra, cada fragmento mineral dessa montanha cheia de noite forma por si só um mundo. A própria luta para chegar ao cume basta para encher o coração de um homem. É preciso imaginar Sísifo feliz."

ALBERT CAMUS: O MITO DE SÍSIFO

Sumário

1	Introdução e Motivação				
2	A C	Cromodinâmica Quântica e o Modelo de Quarks	12		
	2.1	Introdução	12		
	2.2	A Cromodinâmica Quântica	12		
	2.3	O Modelo de Quarks Constituintes	21		
		2.3.1 Redução Não-Relativística da Interação de Troca de um Glúon	23		
		2.3.2 Equações de Estado Ligado no Modelo de Quarks	30		
		2.3.3 Solução do Problema de Dois Corpos	31		
		2.3.4 Solução do Problema de Três Corpos	37		
3	Que	ebra de Simetria de Sabor na Interação Méson-Bárion	50		
	3.1	Introdução	50		
	3.2	O Modelo de Decaimento ${}^{3}\mathrm{P}_{0}$	50		
	3.3	Amplitudes de Decaimento Hadrônicas	54		
	3.4	Amplitudes Mesônicas do Modelo ${}^{3}\mathrm{P}_{0}$	62		
		3.4.1 Amplitude $\pi\pi\rho$	62		
		3.4.2 Amplitudes $\overline{D}\overline{D}\rho \in \overline{D}\overline{D}\omega$	65		
		3.4.3 Amplitudes $KK\rho \in KK\omega$	65		
	3.5	Amplitudes Bariônicas do Modelo ${}^{3}P_{0}$	66		
		3.5.1 Amplitude $NN\pi$	66		
		3.5.2 Amplitudes $N\Sigma_c \overline{D} \in N\Lambda_c \overline{D}$	69		
		3.5.3 Amplitudes $N\Sigma_s K$ e $N\Lambda_s K$	70		
	3.6	Parâmetros da Quebra de Simetria SU(4)	70		
4	Mo	delo de Quarks Inspirado na QCD no Calibre de Coulomb	76		
	4.1	Introdução	76		
	4.2	Hamiltoniano da QCD no Calibre de Coulomb	77		
	4.3	Estrutura do Vácuo da QCD: Formalismo de Szczepaniak e Swanson	80		

	4.4	Estrutura do Vácuo da QCD: Simulações de QCD na Rede \hdots	. 82					
	4.5	Modelo de Quarks com Quebra Dinâmica de Simetria Quiral $\ .\ .\ .$. 84					
		4.5.1 A Massa dos Mésons $\ldots \ldots \ldots$. 90					
		4.5.2 A Massa dos Bárions	. 97					
5	Inte	erações Efetivas Méson-Bárion	103					
	5.1	Introdução	. 103					
	5.2	Modelo de Quark para a Interação Méson-Bárion	. 103					
		5.2.1 O Sistema Méson-Bárion	. 107					
	5.3	Interações de Troca de Mésons	. 117					
6	\mathbf{Res}	ultados Numéricos	120					
	6.1	Introdução	. 120					
	6.2	Soluções Numéricas da Equação de Gap	. 120					
	6.3	Parâmetros Variacionais da Função de Onda	. 125					
	6.4	Deslocamentos Fase e Seções de Choque	. 127					
7	Conclusões Finais e Perspectivas							
A	Not	ação e Convenções	143					
В	Coe	ficientes Angulares $\mathbb{A} \in \mathbb{B}$	145					
С	Funções de Spin e Sabor de Mésons e Bárions							
D) Determinação do Potencial $V_{s_{\mu}s_{\nu}}$							
\mathbf{E}	Pot	encias de Troca de Méson e Fatores de Isospin	152					
	E.1	Fórmulas de Redução: Escalares e Férmions	. 152					
	E.2	Potenciais no Espaço dos Momentos	. 156					
	E.3	Contribuição do Méson σ	. 158					
	E.4	Contribuição do Méson ρ	. 161					
	E.5	Contribuição do Méson ω	. 163					
	E.6	Análise em Ondas Parciais do Potencial de Interação	. 163					
\mathbf{F}	Lag	rangianas de Interação	173					
G	Eleı	mentos de Matriz do Operador $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})$	175					
Re	eferê	ncias	178					

Capítulo 1 Introdução e Motivação

Na presente tese investigamos as consequências da quebra da simetria de sabor na interação de mésons charmosos com o núcleon. As investigações são conduzidas no contexto de modelos de quarks constituintes. Nos modelos estudados, a única fonte de quebra da simetria de sabor são as massas dos quarks u, d, $s \in c$. O assunto é de interesse atual para estudos de colisões de íons pesados relativísticos, como também para guiar experimentos futuros que planejam medir seções de choque de espalhamento de partículas charmosas por hádrons leves. Neste primeiro Capítulo da tese vamos colocar os objetivos e as motivações específicas para este estudo, bem como discutir a necessidade do emprego de modelos fenomenológicos frente a teoria fundamental das interações fortes, a cromodinâmica quântica (QCD).

A QCD é a teoria das interações fortes. Ela é uma teoria de calibre não-abeliana, cujo grupo de simetria é o SU(3) [1]. Os graus de liberdade fundamentais da QCD são os quarks e glúons. Os quarks são partículas fermiônicas massivas de spin 1/2 descritas por campos espinoriais, enquanto os glúons são partículas bosônicas sem massa de spin 1 descritos por campos vetoriais. Os quarks pertencem à representação fundamental do grupo SU(3), de dimensão 3 - eles aparecem em três estados de cargas de "cor", convencionalmente denominadas *red*, green e blue. Os glúons pertencem à representação adjunta de dimensão 8 deste grupo - eles aparecem em oito estados de carga de cor. Em conjunto com o modelo de Glashow-Weinberg-Salam das interações eletrofracas [2], que obteve um êxito extraordinário na unificação das interações eletromagnética e fraca, a QCD forma o chamado modelo padrão das partículas e interações fundamentais.

Como trata-se de uma teoria fundamental, a QCD deve descrever todas as propriedades de sistemas que interagem fortemente. Um dos aspectos marcantes da QCD é que ela prediz que em processos que envolvem grandes momentos transferidos, que corresponde a pequenas distâncias de interação, geralmente alcançados através de reações a altas energias, os quarks e glúons comportam-se como partículas livres, um fenômeno conhecido como liberdade assintótica [3]. Devido a esta propriedade, métodos perturbativos baseados numa expansão na constante de acoplamento da teoria podem ser empregados. Os sucessos alcançados pela QCD nas últimas décadas [4] na descrição desses processos a qualificam como sendo a teoria fundamental das interações fortes. Por outro lado, progressos muito mais lentos têm sido observados na descrição de processos nas escalas de energias baixas e intermediárias, que são da ordem de 100 MeV. Nestas escalas de energia, a constante de acoplamento da QCD torna-se da ordem da unidade, o que inviabiliza o uso dos tradicionais e bem estabelecidos métodos perturbativos. A obtenção de resultados teóricos confiáveis no regime de acoplamento forte da QCD mostrou-se um problema extremamente complicado. A razão principal para este fato é que os métodos da física teórica mais conhecidos para tratar problemas fortemente interagentes de maneira analítica não são de aplicabilidade universal, no sentido de que, em geral, não são baseados em expansões controláveis e passíveis de melhorias sistematicas, como é o caso das expansões perturbativas na constante de acoplamento. No entanto, por mais paradoxal que possa parecer, o fato da constante de acoplamento da QCD não ser fraca a baixas energias é uma propriedade fisicamente desejável, pois, nem quarks nem glúons foram observados como partículas livres, até o momento. Essa é conhecida como hipótese do confinamento. De acordo com ela, somente estados singletos do grupo de calibre são observáveis, o que implica que tanto os quarks quanto os glúons não devem aparecer como partículas livres. Os mais simples estados singletos do grupo de calibre possíveis são os estados ligados compostos por um quark e um antiquark (mésons) e os estados ligados formados por três quarks (bárions).

Atualmente, o único método que permite tratar, de maneira sistemática e controlável, alguns problemas não-perturbativos a partir de primeiros princípios é baseado em simulações numéricas de larga escala. Esse método consiste em reformular a teoria usando o método da QCD na rede [5]. A formulação de rede mais bem sucedida para a QCD é dada em termos de um formalismo lagrangiano, através de integrais funcionais continuadas analiticamente para o espaço-tempo euclidiano e discretizadas em uma rede (finita) quadridimensional.

Essa discretização das integrais funcionais torna a QCD uma teoria com um número finito de graus de liberdade, em que a função geratriz de funções de Green da teoria quântica se torna uma quantidade análoga a uma função de partição da mecânica estatística clássica, com um peso de Boltzmann positivo-definido. A parte fermiônica da ação é quadrática nos campos e pode, portanto, ser integrada analiticamente, resultando desta integração um determinante da matriz do propagador dos férmions. A integral funcional remanescente envolve somente variáveis bosônicas, as quais podem ser simuladas numericamente com algoritmos de Monte Carlo.

Wilson, no artigo em que colocou as bases da formulação da QCD na rede [6], mostrou que o confinamento da cor poderia ser derivado a partir da lagrangiana da teoria em um certo limite. Especificamente, ele mostrou que para acoplamento (de rede) forte, na teoria contendo somente glúons, a energia de interação entre duas fontes de carga de cor cresce linearmente com a distância de separação entre elas, evidenciando uma interação de confinamento através do desenvolvimento de um tubo de fluxo de cor entre as fontes. A demonstração desta propriedade e o estudo da teoria no limite físico — que corresponde a acoplamento de rede fraco (ou, equivalentemente, a espaçamento de rede pequeno) — não podem porém ser realizados de maneira analítica. Tal estudo pode ser feito por simulações computacionais, em analogia com problemas usuais de mecânica estatística, extrapolando-se no final os resultados para o limite de volume infinito e espaçamento de rede nulo. A partir do trabalho original de Wilson e das primeiras propostas de um tratamento computacional para o problema (see e.g. [7]), simulações numéricas da QCD na rede têm confirmado a propriedade de confinamento, e vêm permitindo também o acúmulo de um grande volume de informações sobre outros aspectos do setor nãoperturbativo da teoria, primeiramente para o caso contendo glúons somente. Mais recentemente, tornou-se possível obter controle sobre a inclusão dos quarks leves nas simulações e, atualmente, um intenso programa de cálculos do espectro hadrônico de massas [8, 9], constantes de acoplamento [10], fatores de forma do núcleon [11, 12] e outros observáveis encontra-se em sofisticado estágio de desenvolvimento.

Entretanto, as técnicas da QCD na rede não são universalmente aplicáveis e muitos aspectos das interações fortes ainda permanecem inacessíveis. Dois exemplos de fundamental importância são espalhamentos entre hádrons e sistemas de muitos corpos com densidade bariônica finita. No primeiro caso, o problema é que espalhamentos são processos que ocorrem no espaço de Minkowski e, como tal, são difíceis de serem analisados com simulações no espaço Euclideano – a Ref. [13] apresenta uma discussão sobre métodos que estão sendo desenvolvidos para tratar problemas de espalhamento. No segundo caso, as técnicas de Monte Carlo não podem ser empregadas porque o peso de Boltzmann, sobre o qual estão assentadas as bases dessas técnicas, não é mais positivo. Nesse assunto também há progressos, mas os desafios são ainda grandes, conforme discussão recente na Ref. [14]. Essas dificuldades, sem dúvida, oferecem um enorme empecilho no entendimento das interações fortes. O empecílho não afeta somente o conhecimento de natureza teórica, pois há um grande esforço experimental em curso no JLab (Thomas Jefferson National Accelerator Facility), no RHIC (Relativistic Heavy Ions Collider) e no LHC (Large Hadron Collider) produzindo dados experimentais que não podem ser interpretados diretamente com os métodos da QCD na rede. Ainda mais, em breve entrará em funcionamento o laboratório FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research), cujos experimentos planejados necessitam de estudos preliminares sobre interações entre hádrons charmosos com a matéria hadrônica ordinária (formada de prótons e nêutrons) para alimentar códigos de simulações de detetores e também para guiar propostas de medidas de seções de choque e outros observáveis.

Baseado nas observações feitas até aqui, fica claro que apesar das simulações numéricas da QCD na rede responderem a muitas das questões no regime de baixas energias, é necessário complementar esses estudos através de outros métodos que permitam fazer progresso no campo. A literatura apresenta uma variedade de métodos e modelos designados para descrever aspectos não perturbativos da QCD. Um exemplo é o programa de pesquisa baseado nas equações de Dyson-Schwinger e Bethe-Salpeter em calibres covariantes – a Ref. [15] apresenta uma revisão recente sobre esse programa. Essas são equações integrais para os propagadores, estados hadrônicos ligados e de espalhamento. Uma das principais dificuldades nesse programa é que essas equações são parte de uma hierarquia infinita de equações acopladas que precisa ser truncada para se tornar tratável matematicamente. Encontrar um esquema de aproximações que seja sistemático e controlável, e que preserve invariância de Lorentz, simetria local de calibre e outras simetrias internas é o grande desafio. Também, estas equações são em geral resolvidas numericamente no espaço Euclideano e, portanto, sofrem da mesma dificuldade que a QCD na rede para descrever processos no espaço de Minkowski. No entanto, apesar dessas dificuldades, esse programa oferece uma abordagem de primeiros princípios que pode levar ao entendimento de muitos aspectos do regime não perturbativo da QCD. Uma outra abordagem que tem permitido calcular uma quantidade muito grande de observáveis hadrônicos a baixas energias está baseado no esquema das regras de soma da QCD [16]. Neste esquema, não se tenta provar que os quarks e glúons estão confinados; o confinamento é tomado como sendo uma propriedade da QCD. Observáveis hadrônicos, como massas e momentos magnéticos dos bárions, são relacionados a valores esperados no vácuo de produtos de operadores de campo de quarks e glúons, chamados de condensados. Uma variedade enorme de quantidades hadrônicas foi calculada com esse método. Em particular, quantidades relacionadas diretamente com o objeto de estudo da presente tese foram e continuam sendo estudadas com o método das regras de soma da QCD - a Ref. [17] apresenta uma revisão muito recente sobre resultados obtidos com esta abordagem. Uma dificuldade com as regras de soma é o desconhecimento do valor numérico de condensados envolvendo produtos de quatro ou mais operadores de campo de quark ou glúon, o que exige aproximações de difícil controle. Muito recentemente surgiu uma nova abordagem de problemas fortemente interagentes. Ela é inspirada em desenvolvimentos na teoria de cordas e baseada no conceito de dualidade [18]. Segundo esse conceito, certas teorias aparentemente sem a mínima conexão entre elas, na verdade possuem, surpreendentemente, uma correspondência em que o limite de acoplamento forte de uma delas corresponde ao limite de acoplamento fraco da outra. Dependendo do contexto, a correspondência é conhecida como dualidade gravidade/calibre, dualidade corda/calibre ou AdS/CFT (AdS significa anti-de Sitter, CFT significa teoria de campos conforme) - a Ref. [19] apresenta uma discussão não muito técnica sobre esse assunto. Apesar de que correspondências dessa natureza não terem sido encontradas para a QCD, um caso que pode ser de relevância para o entendimento do regime de acoplamento forte da QCD e que tem despertado muito interesse é o de uma teoria de Yang-Mills supersimétrica. Mesmo a QCD não sendo supersimétrica, estudos baseados na correspondência da teoria supersimétrica com uma teoria de gravidade no espaço de anti-de Sitter tem permitido uma variedade de estudos que se mostraram muito úteis no estudo da QCD. Essas correspondências têm sido investigadas também em outros campos da Física além da QCD - a Ref. [20] discute algumas aplicações em Física da Matéria Condensada.

Na presente tese vamos empregar uma outra abordagem, a dos modelos de quarks constituintes. Esses modelos são amplamente empregados desde os primórdios da física dos quarks [21] e continuam desempenhando papel importante no estudo de fenômenos não perturbativos da QCD. Historicamente, o modelo de quarks precedeu ao desenvolvimento da QCD. A descoberta da simetria SU(3) de sabor dos bárions e mésons abriu o caminho para a criação do modelo de quarks [22, 23]. O objetivo inicial do modelo de quarks foi o de classificar os hádrons em termos de um número reduzido de constituintes, os quarks, através de uma estrutura matemática da teoria de grupos. Esse modelo, além de permitir classificar os hádrons conhecidos em termos de multipletos do grupo SU(3), levou também a predições da existência de novos hádrons com base somente na estrutura matemática do modelo. Esse fato, além de dados experimentais de espalhamento de elétrons indicarem a existência de centros espalhadores puntiformes no interior de prótons e nêutrons, levou a pesquisadores incorporarem, de maneira fenomenológica, uma dinâmica aos quarks. Especificamente, foi postulada um potencial atrativo entre os quarks e uma massa de maneira que massas, raios e outros observáveis hadrônicos pudessem ser calculados através de uma equação de Schrödinger. Atribuindo uma massa da ordem de 300 MeV aos quarks e antiquarks, os resultados obtidos por esse modelo estavam surpreendentemente em boa concordância com os dados experimentais da espectroscopia de hádrons no estado fundamental. Esse modelo evidenciou a necessidade da introdução de um novo número quântico, a carga cor, para dar conta do Princípio de Pauli em certos estados bariônicos.

Após a descoberta da liberdade assintótica e a introdução da idéia do confinamento da cor na QCD, A. De Rújula, H. Georgi e S.L. Glashow [24] introduziram esses conceitos no modelo de quarks. Eles incorporaram ao modelo de quarks a troca de um glúon (OGE) entre quarks e antiquarks, a qual introduz forças dependentes do spin. Essas forças são de curto alcance e são capazes de explicar a estrutura fina e hiperfina no espectro hadrônico de baixas energias.

Nas últimas décadas, o modelo não-relativístico de quarks constituintes tem sido aplicado na descrição de um vasto domínio de fenômenos da física de hádrons. Ele tem oferecido uma das mais completas descrições das propriedades hadrônicas e, provavelmente é o modelo fenomenológico que melhor descreva a estrutura de bárions e mésons a baixas energias de excitação. Em um caminho completamente unificado, tanto o espectro de massas [25, 26, 27, 28, 29] quanto as interações hádronhádron [30, 32, 31, 33, 34] são explicadas de maneira muito natural dentro desta abordagem. Além disso, um intenso programa de estudos tem sido realizado no setor de decaimento forte de hádrons [35, 36, 37, 38], e uma gama enorme de processos de decaimento tem sido calculados.

Com o estabelecimento da QCD como teoria fundamental das interações fortes, a busca do entendimento do modelo de quarks dentro dessa teoria é um objetivo ainda a ser alcançado. A busca principal é de diminuir o número de parâmetros livres e evitar hipóteses arbitrárias . Uma das características mais buscadas é a implementação do confinamento da carga de cor - a esmagadora maioria dos modelos levam ao confinamento de quarks e antiquarks, mas não possuem mecanismos físicos que impeçam estados ligados que não sejam singletos de cor. Uma outra característica da QCD que eventualmente precisa ser incorporada em modelos de quarks é a quebra dinâmica da simetria quiral. Nambu, muito antes do advento da QCD, fazendo uso de analogias com fenômenos de quebra de simetria na física da matéria condensada, chamou à atenção para a possível existência e importância fundamental dessa simetria nas interações fortes. A simetria quiral é uma simetria aproximada da QCD. Com base nessa simetria aproximada é possível entender a pequena massa do méson π ($m_{\pi} \simeq 140$ MeV) - a massa é pequena em comparação as massas dos outros hádrons leves, que são da ordem de 1 GeV. Ela seria uma simetria exata se as massas dos quarks fossem nulas. Nesse caso, a simetria seria dinâmicamente quebrada e o bóson de Goldstone correspondente seria um méson com os mesmos números quânticos do méson π . Como esse méson possui uma massa não nula, sua pequena massa seria atribuída ao remanescente da dinâmica que levaria a uma quebra dinâmica da simetria, caso ela fosse exata. Dito de outra maneira, as forças que levariam à quebra dinâmica da simetria exata ainda se manifestam quando a simetria é apenas aproximada. Isto é o que realmente parece acontecer na QCD, pois os quarks leves u e d, também chamados de quarks de corrente, têm massas muito pequenas, $m_{u,d} \simeq 10 \,\text{MeV}$, em comparação com a escala $\Lambda_{QCD} \simeq 250 \,\text{MeV}$. Uma discussão sobre o assunto no contexto da QCD na rede aparece na Ref. [40].

A quebra dinâmica da simetria pode ser entendido como uma transição de fase, em que o parâmetro de ordem associado a essa quebra de simetria é o condensado de quarks, $\langle \bar{q}q \rangle$. Em particular, é precisamente o condensado de quarks responsável pela geração de uma massa dinâmica para os quarks. Assim, o resultado da quebra dinâmica da simetria quiral, é que os quarks de corrente leves que aparecem na Lagrangiana da QCD, e que possuem massa pequena, adquirem uma massa grande, da ordem de 300 MeV, e esse aumento é proporcional a $\langle \bar{q}q \rangle$. Esses quarks com massa da ordem de 300 MeV são chamados de quarks constituintes, em contra-partida aos quarks de corrente, que aparecem na Lagrangiana da QCD. Sendo assim, é a partir da quebra dinâmica da simetria quiral que modelos de quarks constituintes fazem contato com a QCD.

Os modelos de quarks mais bem sucedidos na descrição da estrutura e interações hadrônicas a baixas energias, que genericamente vamos nos referir como sendo *modelos tipo Isgur e Karl* (a Ref. [41] apresenta um ótimo curso sobre as bases do modelo e discute resultados importantes), apresentam sérias limitações em sua estrutura conceitual. Uma dessas limitações, por exemplo, é a sua clara ineficácia na explicação da origem das massas constituintes dos quarks, que devem ser supostamente geradas pela quebra dinâmica da simetria quiral (D χ SB). As massas dos quarks e as interações são especificadas independentemente no modelo. Um outro ponto sensível dessa classe de modelos é a impossibilidade de estudar efeitos de temperatura e densidade bariônica sobre a estrutura e interações hadrônicas. Para tratar, por exemplo, mudanças nas propriedades quirais dos hádrons num meio hadrônico precisa-se que realize (D χ SB) de maneira explícita e, idealmente, incorporar o confinamento da carga de cor. Além disso, a partir de um tal Hamiltoniano deve ser possível a construção de esquemas de aproximação para se obter funções de onda de estado ligado e também potenciais de interação efetivos que possam ser usados para calcular observáveis do espalhamento, como seções de choque e deslocamentos de fase. Todas essas características devem ainda ser tais que permitam que esses cálculos sejam realizados de maneira simples e, sempre que possível, evitem um grande esforço computacional.

Com base nos argumentos que apresentamos até aqui, fica evidente que uma excelente alternativa para se fazer progressos no entendimento do regime de baixas energia da QCD, sem que um intenso esforço computacional seja exigido, é o uso do modelo de quarks constituintes. No entanto, esse modelo, tal como se apresenta, necessita de aprimoramentos. E é este um dos objetivos a que esta tese se propõe, ou seja, desenvolver um esquema de cálculo com a mesma estrutura do modelo não-relativístico de quarks constituintes mas que incorpore explicitamente tanto os efeitos da (D χ SB) quanto do confinamento de cor. Para isso, usamos um formalismo Hamiltoniano inspirado na QCD no calibre de Coulomb. A motivação básica para empregar uma formulação Hamiltoniana é que técnicas tradicionais da teoria quântica de muitos corpos, além de estarem bem desenvolvidas e consolidadas, podem ser diretamente implementadas no estudo de sistemas hadrônicos a temperatura e densidade bariônica finitas.

No contexto da QCD, o uso do calibre de Coulomb vem despertando bastante atenção e um extenso programa de pesquisa vem sendo desenvolvido a partir dessa abordagem [42, 43, 44, 45]. Um dos grandes atrativos do calibre de Coulomb está no fato dele ser extremamente eficaz para o estudo de estados ligados, pois todos os graus de liberdade empregados são físicos e uma norma positiva definida dos estados no espaço de Fock existe. Além disso, a resolução dos vínculos do calibre de Coulomb produz uma interação instantânea, o análogo não-abeliano da interação de Coulomb, que ajuda na geração de estados ligados. Uma outra vantagem do calibre de Coulomb, é que ele possibilita o desenvolvimento de métodos analíticos no contínuo para o tratamento das funções de Green da teoria [46].

A construção de um Hamiltoniano no calibre de Coulomb a partir da rede, também já foi tratada na literatura [47, 48]. Uma aplicação bem sucedida desse formalismo foi feita em uma recente investigação do comportamento no infravermelho do potencial efetivo de Coulomb [49]. Um dos pontos a serem destacados neste estudo, foi que esses autores forneceram uma parametrização para o potencial de Coulomb no infravermelho obtido diretamente de simulações na rede. Dessa forma, também é possível usar essa interação tanto para se estudar o espectro de mésons e bárions quanto a interação hádron-hádron.

A presente tese vai se concentrar no estudo da interação de mésons charmosos

D, formados de um quark leve e um quark charm, com o núcleon [50, 51, 52, 53, 54, 55, 56], um problema de grande interesse atual. Em particular, essa interação é de interesse em problemas de restauração da simetria quiral na matéria hadrônica, pois é um fato conhecido que as propriedades quirais dos quarks leves u e d no méson D são extremamente sensíveis a temperatura e densidade bariônica. Dessa forma, podemos esperar que certas modificações nas propriedades desses mésons possam trazer informações sobre a física da simetria quiral no meio hadrônico. No entanto, para que seja possível extrair informações relevantes em um tal cenário, é necessário um entendimento mais detalhado dessa interação no espaço livre.

No espaço livre, a interação $\overline{D}N$, onde \overline{D} corresponde ao dubleto de isospin (D^{-}, D^{0}) , foi estudada no contexto de um modelo híbrido [57]. Neste modelo, a parte de curto-alcance da interação foi descrita pelo mecanismo de troca de quarkglúon no contexto do modelo de quarks não-relativístico. A parte de longa-distância da interação foi descrita pela troca de mésons e bárions, que foi originalmente desenvolvida para investigar a interação K^+N pelos autores da Ref. [58]. Neste estudo da Ref. [57], foi mostrado que o mecanismo de troca de quark-glúon é responsável por parte significativa dos valores dos deslocamentos da fase da onda-S experimentais. A troca de mésons σ , $\rho \in \omega$ são cruciais para a descrição detalhada desta onda, como também são cruciais para a descrição de ondas parciais mais altas. No entanto, os autores da Ref. [57] têm chamado à atenção para o fato de que um dos pontos centrais na extensão do modelo KN [58] para o caso DN é a hipótese de uso da simetria SU(4) de sabor pois, a partir desta, foi possível fixar as constantes de acoplamento relevantes no estudo. No entanto, a simetria SU(4), ao nível das massas dos quarks, é fortemente quebrada, ela foi invocada por um motivo prático, como esquema de trabalho. Como é conhecido, a nível das massas dos quarks temos $m_u \simeq m_d < m_s \ll m_c$. Dessa forma, é de extrema importância no estudo da interação entre mésons charmosos e o núcleon a obtenção de estimativas para avaliar o efeito da quebra da simetria SU(4) no acoplamento DN. Um dos objetivos da presente tese é justamente esse, ou seja, obter estimativas para a quebra da simetria SU(4) no contexto da interação $\overline{D}N$. Essas estimativas são importantes para se ter uma idéia do efeito que a grande diferença entre as massas dos quarks u, d, s em relação ao c podem ter no acoplamento entre hádrons charmosos e o núcleon.

Especificamente, inicialmente empregamos o modelo de decaimento forte ${}^{3}P_{0}$, o qual permite calcular constantes de acoplamento hádron-hádron efetivas. Os elementos de matriz do operador de decaimento ${}^{3}P_{0}$ foram calculados usando funções de onda hadrônicas determinadas através da diagonalização exata do Hamiltoniano microscópico de um modelo não-relativístico de quarks em uma base finita de funções de onda Gaussianas. Resultados numéricos foram obtidos para as amplitudes $\pi \pi \rho$, $KK\rho$, $\bar{D}\bar{D}\rho$, $NN\pi$, $N\Sigma_s K$, $N\Lambda_c \bar{D}$, $N\Sigma_c \bar{D}$, $N\Lambda_s K$ e os efeitos da quebra de simetria foram avaliados para as correspondentes constantes de acoplamento.

A seguir, investigamos o espalhamento a baixas energias dos mésons estranhos K e charmosos \overline{D} com o núcleon empregando um modelo microscópico de quarks inspirado na cromodinâmica quântica no calibre de Coulomb que confina a carga de cor e realiza a quebra dinâmica da simetria quiral. O Hamiltoniano microscópico do modelo incorpora um potencial de confinamento do tipo Coulomb e uma interação hiperfina de glúons transversos. Uma função de massa para os quarks constituintes é obtida pela solução de uma equação de gap e funções de onda de estados ligados de mésons e bárions são obtidas no espaço de Fock usando um esquema de cálculo variacional. A seguir, tendo obtido as massas constituintes e as funções de ondas dos hádrons, uma interação efetiva méson-núcleon de alcance curto é derivada a partir do mecanismo de troca quark-glúon. Para descrever a física de distâncias longas, interações de troca de mésons vetoriais e escalares obtidas por meio de Lagrangianas efetivas são incorporadas. O potencial efetivo méson-bárion contendo as partes de curta e longa distâncias é usado em uma equação de Lippmann-Schwinger para obter deslocamentos de fase e seções de choque. Os resultados obtidos são comparados com cálculos similares recentes usando o modelo não-relativístico de quarks.

Esta tese está dividida em sete capítulos. No capítulo 2, apresentamos uma breve revisão sobre a cromodinâmica quântica (QCD). Discutimos os conceitos de confinamento de quarks e glúons e também de quebra dinâmica da simetria quiral. Discutimos também as bases do modelo não-relativístico de quarks constituintes e mostramos um esquema de cálculo para se obter as massas e funções onda de estado ligado de mésons e bárions no estado fundamental. No capítulo 3, discutimos os efeitos da quebra de simetria SU(4) de sabor no acoplamento de mésons e bárions charmosos com o núcleon no contexto do modelo não-relativístico de quarks constituintes. Inicialmente apresentamos uma revisão do modelo de decaimento forte ³P₀ e mostramos como determinar de maneira completamente geral amplitudes de decaimento para processos envolvendo mésons e bárions. Usamos as funções de onda de estado ligado expandidas como uma combinação linear de Gaussianas, tal como discutido no capítulo 2, para determinar essas amplitudes. A partir dessas amplitudes determinamos razões relativas entre constantes de acoplamento associadas a vértices do tipo méson-méson-méson e méson-bárion-bárion e computamos os desvios dessas quantidades em relação ao caso simétrico na forma de uma parâmetro de quebra. No capítulo 3 discutimos a formulação da QCD no calibre de Coulomb. Apresentamos de maneira sucinta, os formalismos de Szczepaniak-Swanson e de QCD na rede para a estrutura do vácuo da QCD. Formalismos esses que fornecem uma interação confinante entre as cargas de cor. A partir dessa formulação da QCD no calibre de Coulomb, desenvolvemos um modelo de quarks constituintes que realiza a quebra dinâmica da simetria quiral e confina a carga de cor. No capítulo 4 usamos o Hamiltoniano microscópico desse modelo de quarks inspirado no calibre de Coulomb da QCD para obter de maneira completamente geral a interação microscópica mésonbárion. Para isso, usamos o resonating group method (RGM), seguindo de perto a discussão original da Ref. [59]. No capítulo 5 discutimos e aplicamos o formalismo para obtenção de potenciais de interação devido a troca de um méson a partir do formalismo de redução LSZ. No capítulo 6 usamos o modelo microscópico de quarks desenvolvido, juntamente com o modelo de troca de mésons, para estudar as seções de choque e deslocamentos de fase para onda-S dos sistemas $\overline{D}N \in KN$. E, por fim, no capítulo 7, apresentamos nossas conclusões finais e perspectivas futuras.

Capítulo 2

A Cromodinâmica Quântica e o Modelo de Quarks

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos uma breve revisão das principais características da Cromodinâmica Quântica (QCD) e do modelo não-relativístico de quarks constituintes. Para isso, começaremos apresentando de maneira introdutória os aspectos mais relevantes sobre a QCD. A seguir, iremos discutir o conceito de simetria quiral e as implicações de sua quebra no contexto da densidade Lagrangiana da QCD. Uma vez tenhamos feito isso, trataremos do modelo não-relativístico de quarks constituintes e apresentaremos as suas mais importantes implicações para o espectro hadrônico.

2.2 A Cromodinâmica Quântica

O estudo das forças nucleares e das interações fortes estão intimamente relacionados desde o advento do méson π , introduzido teoricamente por Yukawa (1935) [60] e detectado experimentalmente por Lattes, Occhialini e Powell (1947). A imagem tradicional do núcleo, na física nuclear de baixas energias, é aquele de um sistema de muitos corpos formado por partículas sem estrutura interagindo entre si. Essas partículas são os prótons e os nêutrons. Nós entendemos por física nuclear de baixas energias aquela onde as energias de excitação, que denominaremos por δE , sejam menores que a energia de Fermi, $\epsilon_F \simeq 30 - 40$ MeV, e os momentos transferidos sejam tais que $\delta q \leq 1/R_0$, onde R_0 é o raio nuclear.

Esse cenário é alterado quando δE ou δq é aumentado de algumas centenas de MeV até alguns GeV, o domínio de energias intermediárias da física. Neste ponto, graus de liberdade mesônicos começam a ser diretamente visíveis. Em especial, o

píon que é o mais leve dos mésons com uma massa de cerca de $m_{\pi} = 140 \text{ MeV}$, passa a ser de fundamental importância. Intrinsecamente conectado com o grau de liberdade piônico está a $\Delta(1232)$. Esse bárion possui spin- $\frac{3}{2}$ e isospin- $\frac{3}{2}$ e decai em um núcleon (mais um píon de carga apropriada) por meio de uma transição forte, cuja energia de excitação é da ordem de $\delta E = M_{\Delta} - M \simeq 300 \text{ MeV}$, que é a diferença de massa Δ -núcleon.

Descrições completamente unificadas de muitos corpos para o núcleo, a energias baixas e intermediárias, são geralmente baseadas na hipótese do núcleon e da $\Delta(1232)$ como quase-partículas, interagindo pela troca de mésons. Essa abordagem além de ser muito bem sucedida na descrição fenomenológica das forças nucleares [61, 62], não faz qualquer referência explícita aos graus de liberdade de quarks. Progressos similares também foram feitos, paralelamente, com o modelo de troca de mésons da interação núcleon-núcleon a longas e intermediárias distâncias $r \geq 0.8 \text{ fm}$ [63].

Ao mesmo tempo em que esses desenvolvimentos ocorriam, a física de altas energias fornecia fortes evidências acerca da estrutura de quarks e glúons dos hádrons. Como consequência, existia a necessidade óbvia de se investigar a fenomenologia dos constituintes nucleares e forças a partir de um ponto de vista mais fundamental. Uma tal descrição foi proposta. Nesta, os quarks e glúons não aparecem como partículas livres, e estão confinados dentro dos hádrons pela interação quark-glúon. Essa interação, entre os quarks e os glúons e também entre os próprios glúons, é descrita por uma teoria de calibre cujo grupo de simetria é o $SU(3)_c$ de cor. Esta teoria é conhecida como cromodinâmica quântica ou simplesmente (QCD).

A densidade Lagrangiana da QCD é definida pela seguinte expressão

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\Psi} \left(i\gamma^{\mu} D_{\mu} - m \right) \Psi - \frac{1}{4} F^{a}_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$
(2.1)

onde os campos de matéria, que representam os quarks, são denotados por Ψ , o tensor de campo dos bósons de calibre da teoria é dado por

$$F^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{a}_{\mu} - g f^{abc} A^{b}_{\mu} A^{c}_{\nu}$$
(2.2)

com a derivada covariante de calibre sendo dada pela seguinte expressão

$$D_{\mu} = \delta_{cc'} \,\partial_{\mu} - \frac{i\,g}{2} [\lambda^a]_{cc'} \,A^a_{\mu} \tag{2.3}$$

Além disso, os campos de Yang-Mills que representam os glúons são denotados por A^a_{μ} . Os índices gregos $\mu, \nu = 0, \ldots, 3$ representam os índices vetoriais de Lorentz; os índices $a, b, c = 1 \ldots, 8$ são os índices da representação adjunta de grupo $SU(3)_c$. Já os quarks tem suas massas designadas por m.

A Lagrangiana da QCD é invariante sob transformações de calibre locais do seguinte tipo

$$\Psi \to \Psi' = e^{-i\,\tau^a\,\theta^a(x)}\,\Psi\tag{2.4}$$

onde é $\tau^a = \frac{\lambda^a}{2}$ com a = 1, ..., 8. As matrizes 3×3 de Gell-Mann $\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^8$, são tais que, têm traço nulo e são Hermiteanas. Além disso, satisfazem a seguinte álgebra do grupo de simetria SU(3)

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c \tag{2.5}$$

Essa simetria, por ser local, implica que os parâmetros da transformação de calibre sejam funções do espaço-tempo $x \equiv x_{\mu}$.

A invariância da densidade Lagrangiana da QCD sob transformações de calibre locais tem implicações importantes. Primeiro, ela requer o aparecimento de bósons de calibre vetoriais e sem massa na teoria. Segundo, ela é responsável pela forma da interação entre os bósons de calibre e os campos de matéria. E em terceiro, ela gera a interação entre os próprios bósons de calibre. Essa auto-interação é uma consequência imediata do fato de que na QCD os geradores das transformações de calibre λ^a não comutam entre si, ver Eq.(2.5). A assinatura dessa importante característica pode ser vista diretamente no termo $g f^{abc} A^b_{\mu} A^c_{\nu}$ que aparece na Eq.(2.2). É importante notar também, que a interação forte é independente do sabor, ou seja, os índices de sabor na densidade Lagrangiana da QCD não são afetados por transformações de calibre do grupo $SU(3)_c$ de cor. A QCD ainda possui duas outras propriedades notáveis que são o confinamento e a liberdade assintótica.

E um fato empírico que tanto os quarks, quanto os glúons estão confinados dentro dos hádrons. Essa é uma propriedade que ainda não pode ser demonstrada de maneira direta das equações da QCD, e uma das causas que contribuem para isso é a seguinte: depois de renormalizada a constante de acoplamento g da QCD passa a ser uma constante de acoplamento efetiva que depende do momento transferido, ou seja, $\alpha_s(q^2)$. Essa constante de acoplamento efetiva é tal que, possue um grande valor para $q^2 \rightarrow 0$, regime de baixas energias, o que torna inviável a utilização das usuais técnicas perturbativas nos cálculos envolvendo essas equações. Esse regime, também é conhecido como regime de acoplamento forte da QCD. Por isso, dizemos que os quarks estão confinados em estados que são singletos de cor. Os mais simples estados singletos de cor são os mésons e bárions. Os mésons, são formados pela combinação de um quark com um antiquark, e os bárions são estados formados pela combinação de três quarks. Já para processos nos quais grandes momentos sejam transferidos $q^2 \rightarrow \infty$, regime de altas energias, a constante de acoplamento efetiva torna-se pequena e as técnicas perturbativas podem ser usadas. Devido a essa propriedade peculiar da constante de acoplamento da QCD, dizemos que ela é uma teoria assintoticamente livre.

Os quarks u, d que aparecem na densidade Lagrangiana da QCD tem massas em torno de alguns MeV [64], ou seja

$$m_u \approx (5.1^* \pm 1.5) \,\mathrm{MeV}, \quad m_d \approx (8.9 \pm 2.6) \,\mathrm{MeV}$$
 (2.6)

Tais massas são muito pequenas quando comparadas com a escala de massa dos hádrons que elas compõe, que são da ordem de $\simeq 1 \text{ GeV}$. O fato dessas massas serem relativamente pequenas indica a possível existência de uma simetria global da \mathcal{L}_{QCD} que é denominada simetria quiral. Trata-se de uma simetria aproximada, que se tornaria exata no limite em que $m_u = m_d = 0$. Essa simetria, ou melhor, a quebra desta simetria tem implicações importantes no espectro de hádrons, e portanto, é significativo que algumas considerações sobre ela sejam feitas.

Vamos considerar primeiro que as massas dos quarks de corrente na densidade Lagrangiana da QCD sejam nulas, para todos os seis sabores. Sob essa imposição a Eq.(2.1) adquire a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{QCD} = i\bar{\Psi}\,\gamma^{\mu}\,D_{\mu}\,\Psi - \frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \tag{2.7}$$

Apenas por uma questão didática, vamos restringir nossa discussão a uma teoria simplificada contendo apenas dois sabores $N_f = 2$. Dessa forma nós teremos para os campos $\Psi \in \overline{\Psi}$ o seguintes dubletos

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} \quad \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_u & \bar{\psi}_d \end{pmatrix}$$
(2.8)

onde por uma questão de simplicidade na notação nós omitimos os índices de cor dos campos de quarks, visto que, a simetria quiral esta associada a transformações que atuam sobre os índices de sabor e não de cor. Não é difícil verificar que uma densidade Lagrangiana igual àquela que aparece na Eq.(2.7), com os campos de quarks definidos como em (2.8), é invariante sob as seguintes transformações vetoriais (V) e axiais (A)

$$\Psi \to \Psi' = e^{-i\frac{\tau^a}{2}\theta_V^a}\Psi \tag{2.9}$$

$$\Psi \to \Psi' = e^{-i\gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \theta^a_A} \Psi$$
(2.10)

Já os campos conjugados $\overline{\Psi}$ se transformam de uma maneira similar, ou seja

$$\bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} e^{i\frac{\tau^a}{2}\theta_V^a} \tag{2.11}$$

$$\bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} e^{i \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \theta^a_A} \tag{2.12}$$

^{*}Nesta tese usaremos o ponto (.) ao invés da vírgula (,) para números decimais.

Nestas equações, como é usual, τ^a refere-se as matrizes de Pauli do grupo $SU(2)_F$ de sabor, $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, e θ^a_V e θ^a_A (a = 1, 2, 3) são números reais. Dizemos assim, que a Lagrangiana sem massa da QCD é invariante sobre o grupo $SU(2)_V \times$ $SU(2)_A$. Apenas por completeza, devemos mencionar também que existem dois grupos adicionais de transformações que são designados por $U(1)_V \times U(1)_A$. $U(1)_V$ está relacionado com a conservação do número bariônico, enquanto $U(1)_A$ é quebrada a nível quântico devido a anomalia abeliana.

Associada a simetria vetorial e axial, estão as correntes conservadas de Noether axial e vetorial

$$V^a_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu \frac{\tau^a}{2}\Psi \tag{2.13}$$

$$A^a_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \Psi \tag{2.14}$$

Essa invariância é chamada de simetria quiral devido ao fato de que a parte que envolve os campos fermiônicos da Lagrangiana dada na Eq.(2.7) sempre pode ser decomposta em componentes de mão-direita e de mão-esquerda

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\Psi}_L \, i\gamma^\mu \, D_\mu \, \Psi_L + \bar{\Psi}_R \, i\gamma^\mu \, D_\mu \, \Psi_R - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} \tag{2.15}$$

contendo campos que são autoestados dos operadores helicidade, ou seja

$$\Psi_L = P_L \Psi = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \Psi \qquad \Psi_R = P_R \Psi_R = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \Psi \qquad (2.16)$$

O grupo de simetria associado a essas transformações de mão-esquerda e mão-direita, pode ser escrito como $SU(2)_L \times SU(2)_R$, e as correntes conservadas associadas são $L^a_\mu \in R^a_\mu$. Essas estão relacionadas com as correntes nas Eqs.(2.13) e (2.14) por

$$V^{a}_{\mu} = L^{a}_{\mu} + R^{a}_{\mu} = \bar{\Psi}\gamma_{\mu} \frac{\tau^{a}}{2}\Psi \qquad (2.17)$$

$$A^{a}_{\mu} = L^{a}_{\mu} - R^{a}_{\mu} = \bar{\Psi}\gamma_{\mu}\gamma_{5}\frac{\tau^{a}}{2}\Psi \qquad (2.18)$$

As correspondentes cargas conservadas são obtidas pela integração da componente $\mu = 0$ das correntes que aparecem nas Eqs. (2.17) e (2.18), ou seja

$$Q_V^a = Q_L^a + Q_R^a = \int d^3x \,\Psi^{\dagger} \,\frac{\tau^a}{2} \Psi$$
 (2.19)

$$Q_{A}^{a} = Q_{L}^{a} - Q_{R}^{a} = \int d^{3}x \,\Psi^{\dagger} \,\gamma_{5} \,\frac{\tau^{a}}{2} \Psi \qquad (2.20)$$

Como consequência da conservação de corrente, esses operadores de carga são quantidades constantes, ou seja, são independentes do tempo

$$\frac{dQ_V^a}{dt} = 0 \tag{2.21}$$

$$\frac{d Q_A^a}{dt} = 0 \tag{2.22}$$

Isto significa que eles comutam com o Hamiltoniano sem massa da QCD, isto é

$$[H_{QCD}, Q_V^a] = 0 (2.23)$$

$$\left[H_{QCD}, Q_A^a\right] = 0 \tag{2.24}$$

Se usarmos agora, os operadores de projeção P_L e P_R que aparecem na Eq.(2.16), ou seja

$$P_L = \frac{1}{2} \left(1 + \gamma_5 \right) \tag{2.25}$$

$$P_R = \frac{1}{2} \left(1 - \gamma_5 \right) \tag{2.26}$$

não é difícil mostrar que os operadores de carga Q_L^a e Q_R^a que aparecem na Eq.(2.19) satisfazem a seguinte álgebra de Lie de $SU(2)_L \times SU(2)_R$

$$\left[Q_L^a, Q_L^b\right] = i\epsilon_{abc}Q_L^c \tag{2.27}$$

$$\left[Q_R^a, Q_R^b\right] = i\epsilon_{abc}Q_R^c \tag{2.28}$$

$$\left[Q_L^a, Q_R^b\right] = 0 (2.29)$$

onde ϵ_{abc} é o tensor totalmente antissimétrico. Decorre das Eqs.(2.27), (2.28), (2.29), juntamente com as combinações lineares, $Q_V^a = Q_L^a + Q_R^a$, $Q_A^a = Q_L^a - Q_R^a$, as seguintes relações

$$\left[Q_V^a, Q_V^b\right] = \left[Q_R^a + Q_L^b, Q_R^a + Q_L^b\right]$$
(2.30)

$$= \left[Q_R^a, Q_R^b \right] + \left[Q_L^a, Q_L^b \right]$$
(2.31)

$$= i\epsilon_{abc} Q_R^c + i\epsilon_{abc} Q_L^c \tag{2.32}$$

$$= i\epsilon_{abc} Q_V^c \tag{2.33}$$

$$\left[Q_A^a, Q_A^b\right] = \left[Q_R^a - Q_L^a, Q_R^b - Q_L^b\right]$$
(2.34)

$$= \left[Q_R^a, Q_R^b \right] + \left[Q_L^a, Q_L^b \right]$$
(2.35)

$$= i\epsilon_{abc} Q_R^c + i\epsilon_{abc} Q_L^c \tag{2.36}$$

$$= i\epsilon_{abc} Q_V^c \tag{2.37}$$

$$\left[Q_V^a, Q_A^b\right] = \left[Q_R^a + Q_L^b, Q_R^a - Q_L^b\right]$$
(2.38)

$$= \left[Q_R^a, Q_R^b \right] - \left[Q_L^a, Q_L^b \right]$$
(2.39)

$$= i\epsilon_{abc} Q_R^c - i\epsilon_{abc} Q_L^c \tag{2.40}$$

$$= i\epsilon_{abc} Q_A^c \tag{2.41}$$

Esses resultados mostram claramente que os operadores de carga axial não formam uma álgebra fechada, isto é, o comutador de dois operadores de carga axial não é um operador de carga axial. Mas a álgebra quiral é fechada.

Podemos concluir a partir da discussão feita acima que, no limite em que as massas dos quarks leves sejam nulas a Lagrangiana e/ou o Hamiltoniano da QCD são invariantes frente transformações quirais. Essa invariância está associada a quantidades conservadas, como cargas e correntes que devem ter certas implicações no espectro de Hádrons. Para deixar mais claro que tipo de implicações nós estamos nos referindo, vamos analisar a seguinte situação. Seja $|h, +\rangle$ um auto-estado do Hamiltoniano da QCD sem massa com auto-valor m

$$H_{QCD} | h, + \rangle = m | h, + \rangle \tag{2.42}$$

tendo paridade positiva

$$\mathcal{P} | h, + \rangle = + | h, + \rangle \tag{2.43}$$

Se definirmos o estado $|\,\Omega\,\rangle = Q^a_A\,|\,h,+\,\rangle,$ devido à Eq.(2.24), nós teremos que

$$H_{QCD} | \Omega \rangle = H_{QCD} Q_A^a | h, + \rangle$$
(2.44)

$$= Q_A^a H_{QCD} | h, + \rangle \tag{2.45}$$

$$= m Q_A^a | h, + \rangle \tag{2.46}$$

$$= m | \Omega \rangle \tag{2.47}$$

ou seja, o novo estado $|\Omega\rangle$ é degenerado com $|h, +\rangle$. Se juntarmos a isso, o fato de que sob transformação de paridade , $\mathcal{P} = \gamma^0$, esse estado $|\Omega\rangle$ é tal que

$$\mathcal{P} | \Omega \rangle = \underbrace{\left(\mathcal{P} Q_A^a \mathcal{P}^{-1} \right)}_{-Q_A^a} \mathcal{P} | h, + \rangle = -Q_A^a \left(+ | h, + \rangle \right) = - | \Omega \rangle \tag{2.48}$$

nós chegaremos à conclusão de que se a simetria quiral é uma boa simetria da natureza, então no espectro de hádrons, que são supostos auto-estados de H_{QCD} , devemos observar multipletos de partículas degenerados em massa, mas com paridades contrárias. A manifestação de uma simetria de um determinado Hamiltoniano através de multipletos degenerados é conhecida como realização *a lá Wigner*. Uma forma equivalente de se dizer isso é a seguinte: se o estado-fundamental da QCD é simétrico frente a essas transformações, então as cargas vetoriais e axiais devem aniquilar o vácuo, ou seja

$$[H_{QCD}, Q_V^a] = 0 \quad \longrightarrow \quad Q_V^a | 0 \rangle = 0 \tag{2.49}$$

$$[H_{QCD}, Q_A^a] = 0 \quad \longrightarrow \quad Q_A^a | 0 \rangle = 0 \tag{2.50}$$

No entanto, no espectro hadrônico é observado o aparecimento de partículas em dubletos de paridade oposta, mas estes não são nem aproximadamente degenerados em massa. Sendo assim, estamos num impasse, já que essa simetria da QCD não se manifesta no modo de Wigner.

Se nós desejarmos manter a hipótese de que a QCD sem massa é uma boa teoria fundamental para as interações fortes, nós devemos abandonar a hipótese expressa na Eq.(2.50). Ao invés disso nós assumiremos que o Hamiltoniano da QCD permanece invariante, mas o vácuo não, sob transformações do grupo quiral

$$[H_{QCD}, Q_V^a] = 0 \quad \longrightarrow \quad Q_V^a | 0 \rangle = 0 \tag{2.51}$$

$$[H_{QCD}, Q_A^a] = 0 \quad \longrightarrow \quad Q_A^a | 0 \rangle \neq 0 \tag{2.52}$$

Quando isso acontece, ou seja, quando o Hamiltoniano de uma teoria não possui a mesma simetria que o estado fundamental, nós dizemos que a simetria foi quebrada dinamicamente. E a sua manifestação no espectro é chamada de realização *a lá* Nambu-Goldstone. Naturalmente que, para uma teoria como a QCD sem massa, a escolha entre (2.50) e (2.52) não é arbitrária. Em princípio a própria teoria deveria estabelecer qual simetria ou parte da simetria é quebrada ou não. No entanto, o problema de se calcular a quebra dinâmica da simetria quiral na QCD não foi ainda satisfatoriamente resolvido. Dessa forma, vamos assumir o cenário descrito pela Eq.(2.52) e explorar as suas consequências na esperança de encontrar suporte para nossa hipótese.

A consequência mais importante de uma quebra de simetria tal como discutida acima pode ser resumida pelo teorema de Goldstone, que associa partículas de massa nula como sendo os responsáveis por carregarem os números quânticos do gerador da simetria quebrada. Um simples argumento heurístico a cerca desse teorema é o seguinte [65, 66]: se $Q_A^a | 0 \rangle \neq 0$, então existe um estado $Q_A^a | 0 \rangle$ degenerado com o vácuo devido a $[H_{QCD}, Q_A^a] = 0$. Pela sucessiva aplicação de Q_A^a nós podemos construir um número infinito de estados degenerados. Um bóson de massa nula com números quânticos internos, spin e paridade do gerador Q_A^a deve existir para levar em conta essa degenerescência. Como a quebra esta associada a simetria axial, os bósons de massa zero devem ser pseudo-escalares. O fato interessante aqui, é que no espectro hadrônico existe uma partícula com características similares a este bóson, que é o píon. Este méson possui a menor massa do espectro das partículas que interagem via interação forte. Como a massa do píon não é igual a zero, temos uma forte indicação de que essa simetria do Hamiltoniano da QCD não é exata mas apenas aproximada.

Naturalmente, que algum mecanismo foi o responsável pela quebra da simetria do vácuo da QCD. Esse mecanismo esta associado ao fato de que o vácuo da QCD é não-trivial, ou seja, ele é povoado por pares de condensados $\bar{q}q$ que quebram sua quiralidade. Estes condensados, devido a um fenômeno dinâmico completamente não-perturbativo fazem com que

$$\langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle \tag{2.53}$$

$$= -(230 \,\mathrm{MeV})^3 \tag{2.54}$$

Um outro efeito devido a esse vácuo condensado é o da geração de uma massa dinâmica para os quarks, que é muito maior que a massa dos quarks de corrente. Qualitativamente, um quark movendo-se nesse vácuo não trivial sente a presença dos pares condensados exatamente da mesma maneira que uma partícula com spin em um ferromagneto sente o campo magnético criado por todos os spins alinhados. Essa interação tem como efeito líquido, criar uma massa efetiva para os quarks. Essa massa, que foi gerada dinamicamente, é denominada de massa constituinte. São essas as massas que entram no modelo não-relativístico de quarks e desempenham um importante papel na fenomenologia dos hádrons. Para o setor de quarks leves elas são da ordem de

$$m_u \approx m_d \approx 300 \,\mathrm{MeV}$$
 (2.55)

Um modelo simples que incorpora as principais características de uma realização *a lá Nambu-Goldstone* e permite um entendimento do mecanismo responsável pela quebra dinâmica da simetria quiral (D χ SB) em maior detalhe, é o modelo de Nambu-Jona-Lasino (NJL) [67]. No entanto, nesta tese nós optamos por apresentar uma discussão mais detalhada da (D χ SB) no contexto de um modelo mais realístico obtido a partir da formulação da QCD no calibre de Coulomb no Capítulo 4.

Um dos fatos relevantes acerca da discussão que fizemos até aqui, sobre as implicações da quebra dinâmica da simetria quiral na teoria das interações fortes (QCD), é que no regime de baixas energias os quarks são partículas massivas. E são tais que satisfazem aos mesmos aspectos que aquelas do modelo não-relativístico de quarks constituintes (MNRQ). Sendo assim, nosso próximo passo será discutir as bases e principais características desse modelo.

2.3 O Modelo de Quarks Constituintes

Os hádrons são uma família de partículas subatômicas que interagem através da força forte, e subdividem-se em bárions e mésons. Vamos a seguir discutir um dos mais bem sucedidos modelos para estudar propriedades estáticas e dinâmicas dessas partículas, o chamado modelo não-relativístico de quarks constituintes (MNRQ). De acordo com esse modelo os hádrons não são mais considerados como entidades fundamentais, mas sim possuidores de uma estrutura formada por fermions chamados quarks/antiquarks e bósons chamados glúons, que são os mediadores da interação entre os quarks. Existem seis tipos de quarks que aparecem em estados de sabor: u(up), d(down), s(strange), c(charm), t(top) e b(bottom), que possuem massas diferentes e carga elétrica fracionária – ver Tabela 2.1. São os quarks e antiquarks que,arranjados sob diferentes combinações, conferem aos hádrons propriedades como $spin e carga. Os mésons são estados ligados de um quark e um antiquark (<math>\bar{q}q$) e os bárions são estados ligados de três quarks (qqq). Os bárions carregam spin semi-inteiro e os mésons carregam spin inteiro ou zero – ver Tabelas 2.2 e 2.3.

Sabor	Carga	Massa (MeV/c^2)	Spin	S	С	b	t
up	2/3	330	1/2	0	0	0	0
down	-1/3	333	1/2	0	0	0	0
strange	-1/3	486	1/2	-1	0	0	0
charm	2/3	1650	1/2	0	1	0	0
bottom	-1/3	4500	1/2	0	0	-1	0
top	2/3	164000	1/2	0	0	0	1

Tabela 2.1: Quarks Constituintes e suas propriedades.

Bárion	Quarks	Massa (Mev/c^2)	S	Ι	I_Z	Carga
p	uud	938	0	1/2	1/2	1
n	udd	940	0	1/2	-1/2	0
Σ^+	uus	1189	-1	1	1	1
Σ^0	uds	1192	-1	1	0	0
Σ^{-}	dds	1197	-1	1	-1	-1
Ξ^0	uss	1315	-2	1/2	1/2	0
Ξ^-	dss	1321	-2	1/2	-1/2	-1
Λ^0	uds	1116	-1	0	0	0

Tabela 2.2: Barions que carregam $j^P = 1/2^+$.

Méson	Quarks	Massa (Mev/c^2)	S	Ι	I_Z	Carga
K^+	$u\bar{s}$	494	1	1/2	1/2	1
K^0	$d\bar{s}$	498	1	1/2	-1/2	0
$ar{K}^0$	\bar{ds}	498	-1	1/2	1/2	0
K^{-}	$\bar{u}s$	494	-1	1/2	-1/2	-1
π^+	$u \bar{d}$	139.6	0	1	1	1
π^0	$\frac{d\bar{d}-u\bar{u}}{\sqrt{2}}$	135	0	1	0	0
π^{-}	$\bar{u}d$	139.6	0	1	-1	-1
η^0	$\frac{d\bar{d}-u\bar{u}}{\sqrt{2}}$	549	0	0	0	0

Tabela 2.3: Octeto de mésons pseudo-escalares que carregam $j^P = 0^-$.

Méson	Quarks	Massa (Mev/c^2)	S	Ι	I_Z	Carga
K^{*+}	$u\bar{s}$	892	1	1/2	1/2	1
K^{*0}	$d\bar{s}$	892	1	1/2	-1/2	0
\bar{K}^{*0}	\bar{ds}	892	-1	1/2	1/2	0
K^{*-}	$\bar{u}s$	892	-1	1/2	-1/2	-1
$ ho^+$	$u \bar{d}$	770	0	1	1	1
$ ho^0$	$\frac{d\bar{d}-u\bar{u}}{\sqrt{2}}$	770	0	1	0	0
$ ho^-$	$\bar{u}d$	770	0	1	-1	-1
ω^0	$\frac{d\bar{d}-u\bar{u}}{\sqrt{2}}$	783	0	0	0	0

Tabela 2.4: Octeto de mésons vetoriais que carregam $j^P = 1^-$.

2.3.1 Redução Não-Relativística da Interação de Troca de um Glúon

Nessa seção vamos discutir a obtenção do potencial de interação entre quarks constituintes devido a troca de um glúon. Para isso, vamos definir o Hamiltoniano relativístico do qual partiremos, isto é

$$H = T + V \tag{2.56}$$

onde na equação (2.56) a energia cinética (T) e a energia potencial (V) são dadas respectivamente por

$$T = \sum_{f} \sum_{c} \int d^{3}x \,\Psi_{f}^{c\dagger}(\boldsymbol{x}) \Big[-i\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla + \beta \,m_{f} \Big] \Psi_{f}^{c}(\boldsymbol{x})$$
(2.57)

$$V = \frac{1}{2} \int d^3x \, d^3y \, J^{\mu a}(\boldsymbol{x}) \, \mathcal{D}_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \, J^{\nu a}(\boldsymbol{y}) \tag{2.58}$$

onde $\mathcal{D}_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ é o propagador do glúon trocado, $J^{\mu a}$ é a corrente de cor carregada pelos quarks cuja forma explícita é

$$J^{\mu a}(\boldsymbol{x}) = \sum_{f_i} \sum_{c_i c_j} \bar{\Psi}^{c_i}_{f_i}(\boldsymbol{x}) \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_i c_j} \gamma^{\mu} \Psi^{c_j}_{f_i}(\boldsymbol{x})$$
(2.59)

sendo $\Psi(\boldsymbol{x}) \in \overline{\Psi}(\boldsymbol{x})$ os operadores de campo de Dirac. Em t=0, podem ser expandidos na forma

$$\Psi_{f}^{c}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^{3}p \ e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \sum_{s} \left[u_{fs}(\boldsymbol{p})q_{fs}^{c}(\boldsymbol{p}) + v_{fs}(-\boldsymbol{p})\bar{q}_{fs}^{c\dagger}(-\boldsymbol{p}) \right] \quad (2.60)$$

$$\bar{\Psi}_{f}^{c}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^{3}p \ e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \sum_{s} \left[\bar{u}_{fs}(\boldsymbol{p}) q_{fs}^{c\dagger}(\boldsymbol{p}) + \bar{v}_{fs}(-\boldsymbol{p}) \bar{q}_{fs}^{c\dagger}(-\boldsymbol{p}) \right]$$
(2.61)

Os operadores q^{\dagger} e q são respectivamente os operadores de criação e aniquilação de quarks, \bar{q}^{\dagger} e \bar{q} são os operadores de criação e aniquilação de anti-quarks, os quais obedecem as seguintes relações de anticomutação

$$\{q_{fs}^{c}(\boldsymbol{p}), q_{f's'}^{c'}(\boldsymbol{p}')\} = \{\bar{q}_{fs}^{c}(\boldsymbol{p}), \bar{q}_{f's'}^{c'}(\boldsymbol{p}')\} = 0$$

$$\{q_{fs}^{c}(\boldsymbol{p}), q_{f's'}^{c'\dagger}(\boldsymbol{p}')\} = \{\bar{q}_{fs}^{c}(\boldsymbol{p}), \bar{q}_{f's'}^{c'\dagger}(\boldsymbol{p}')\} = \delta cc' \delta_{ff'} \delta ss' \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \qquad (2.62)$$

Os espinores, $u_{fs}(\boldsymbol{p}) \in v_{fs}(-\boldsymbol{p})$ são dados pelas seguintes equações

$$u_{fs}(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}f} + m_f}{2E_f}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}f} + m_f} \end{pmatrix} \chi_s \qquad (2.63)$$

$$v_{fs}(-\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}f} + m_f}{2E_f}} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}f} + m_f} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \chi_s^c$$
(2.64)

onde $\chi^{\prime s}$ são os espinores de duas componentes de Pauli, normalizados como

$$\chi_s^* \chi_{s'} = \chi_s^{c*} \chi_{s'}^c = \delta_{ss'}$$
(2.65)

com a energia sendo dada por

$$E_{\boldsymbol{p}f} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_f^2} \tag{2.66}$$

Uma simples maneira de se determinar a interação entre quarks é a partir de um Hamiltoniano efetivo, obtido de uma redução não-relativística da Eq.(2.56). Para conseguir isso, basta expandir os espinores $u_{fs}(\mathbf{p}) \in v_{fs}(-\mathbf{p})$ em potências de (\mathbf{p}/m) e manter apenas aqueles termos que tenham ordem quadrática nos momentos

$$u_f(\mathbf{p}) \cong \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \frac{\mathbf{p}^2}{8m_f^2} \\ \frac{\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m_f} \end{pmatrix} \chi_s$$
 (2.67)

$$v_f(-\boldsymbol{p}) \cong \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m_f}\\ \mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{p}^2}{8m_f^2} \end{pmatrix} \chi_s^c$$
 (2.68)

onde usamos o fato de que no regime não-relativístico

$$E_{pf} = \sqrt{p^2 + m_f^2} = m_f \sqrt{\frac{p^2}{m_f^2} + 1} \cong m_f \left(1 + \frac{p^2}{2m_f^2}\right)$$
(2.69)

De posse das Eqs.(2.67) e (2.68), das definições das matrizes de Dirac que são apresentadas no Apêndice A, é possível verificar que o operador de campo de quark, dado na Eq.(2.60), pode ser expandido em potências de $\mathbf{p} = i \nabla$ como segue

$$\Psi_f^c(\boldsymbol{x}) \cong \left[\mathbf{1} - \frac{(-i\nabla)^2}{8m_f^2} + \frac{i\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla}{2m_f} \right] \Psi_f^{\prime c}(\boldsymbol{x})$$
(2.70)

onde o campo de Dirac modificado $\Psi_f^{\prime c}(\boldsymbol{x})$ é dado pela seguinte equação

$$\Psi_f^{\prime c}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \sum_s \left[q_{fs}^c(\boldsymbol{p}) \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{q}_{fs}^{c\dagger}(-\boldsymbol{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s^c \end{pmatrix} \right]$$
(2.71)

A partir da Eq.(2.71), e de seu respectivo adjunto, podemos computar a redução não-relativística da parte livre do hamiltoniano, ou seja

$$T = \sum_{f} \sum_{c} \int d^{3}x \,\Psi_{f}^{c\dagger}(\boldsymbol{x}) \left[-i\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla + \boldsymbol{\beta}m_{f}\right] \Psi_{f}^{c}(\boldsymbol{x})$$
$$\cong \sum_{f} \sum_{c} \int d^{3}x \,\Psi_{f}^{\prime c\dagger}(\boldsymbol{x}) \left[\boldsymbol{\beta}m_{f} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{2m_{f}}\nabla^{2}\right] \Psi_{f}^{\prime c}(\boldsymbol{x}) \qquad (2.72)$$

Vamos agora definir a seguinte equação para energia cinética não-relativística

$$T_f(\boldsymbol{x}) \equiv m_f - \frac{\nabla^2}{2m_f} \tag{2.73}$$

Podemos reescrever a Eq.(2.72) como

$$T \cong \sum_{f} \sum_{c} \int d^{3}x \ \Psi_{f}^{\prime c\dagger}(\boldsymbol{x}) \ \beta \ T_{f}(\boldsymbol{x}) \ \Psi_{f}^{\prime c}(\boldsymbol{x})$$
(2.74)

Se usarmos a Eq.(2.71) juntamente com seu adjunto podemos escrever a Eq.(2.74) como

$$T \cong \sum_{f} \sum_{c} \sum_{ss'} \int d^{3}x \int \frac{d^{3}p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{d^{3}p'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} T_{f}(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

$$\times \left[q_{fs'}^{c\dagger}(\mathbf{p}') \begin{pmatrix} \chi_{s'}^{\dagger} \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{q}_{fs'}^{c}(-\mathbf{p}') \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{s'}^{c\dagger} \end{pmatrix} \right] \beta$$

$$\times \left[q_{fs}^{c}(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \chi_{s} \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{q}_{fs}^{c\dagger}(-\mathbf{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{s'}^{c} \end{pmatrix} \right]$$
(2.75)

Sendo assim, depois de realizarmos todos os produtos e de usarmos as relações dadas na Eq.(2.65), nós finalmente obtemos

$$T \cong \sum_{f,c} \int d^3 p \ T_f(p) \Big[q_{fs}^{c\dagger}(\boldsymbol{p}) q_{fs}^c(\boldsymbol{p}) + \bar{q}_{fs}^{c\dagger}(\boldsymbol{p}) \bar{q}_{fs}^c(\boldsymbol{p}) \Big]$$
(2.76)

Na Eq.(2.76) nós usamos o fato que a relação entre a energia cinética no espaço das coordenadas e dos momentos é dada por

$$\int d^3x \ e^{-i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}} \ T_f(\boldsymbol{x}) \ e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}) \ T_f(\boldsymbol{p}')$$
(2.77)

 com

$$T_f(p) \equiv m_f + \frac{p^2}{2m_f} \tag{2.78}$$

Já para obtermos a parte relacionada a interação quark-quark nós partiremos da equação

$$V = \frac{1}{2} \int d^3x \, d^3y \, J^{\mu a}(\boldsymbol{x}) \, \mathcal{D}_{\mu\nu}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, J^{\nu a}(\boldsymbol{y}) \tag{2.79}$$

Se utilizarmos agora a definição de corrente de cor dada na Eq.(2.59) e dos operadores de campo de quarks nós podemos escrever o potencial V_{qq} em termos dos espinores $u_{fs}(\mathbf{p})$ e $v_{fs}(-\mathbf{p})$, e a equação resultante é a seguinte

$$V = \frac{1}{2} \int \frac{d^{3}p_{1} \cdots d^{3}p_{4}}{(2\pi)^{3}} \, \delta^{(3)}(\boldsymbol{p}_{1} - \boldsymbol{p}_{3} + \boldsymbol{p}_{2} - \boldsymbol{p}_{4})$$

$$\times \sum_{f_{1} \cdots f_{4}} \sum_{c_{1} \cdots c_{4}} \sum_{s_{1} \cdots s_{4}} \left(\frac{\lambda^{a}}{2}\right)^{c_{3}c_{1}} \left(\frac{\lambda^{a}}{2}\right)^{c_{4}c_{2}} \, \delta_{f_{1}f_{3}} \, \delta_{f_{2}f_{4}}$$

$$\times \left[\bar{u}_{f_{3}s_{3}}(\boldsymbol{p}_{3}) \, q_{f_{3}s_{3}}^{c_{3}\dagger}(\boldsymbol{p}_{3}) + \bar{v}_{f_{3}s_{3}}(-\boldsymbol{p}_{3}) \, \bar{q}_{f_{3}s_{3}}^{c_{3}}(-\boldsymbol{p}_{3})\right] \, \gamma^{\mu}$$

$$\times \left[u_{f_{1}s_{1}}(\boldsymbol{p}_{1}) \, q_{f_{1}s_{1}}^{c_{1}}(\boldsymbol{p}_{1}) + v_{f_{1}s_{1}}(-\boldsymbol{p}_{1}) \, \bar{q}_{f_{1}s_{1}}^{c_{1}\dagger}(-\boldsymbol{p}_{1})\right]$$

$$\times D_{\mu\nu}(\boldsymbol{p}_{1} - \boldsymbol{p}_{3})$$

$$\times \left[\bar{u}_{f_{4}s_{4}}(\boldsymbol{p}_{4}) \, q_{f_{4}s_{4}}^{c_{4}\dagger}(\boldsymbol{p}_{4}) + \bar{v}_{f_{4}s_{4}}(-\boldsymbol{p}_{4}) \, \bar{q}_{f_{4}s_{4}}^{c_{4}}(-\boldsymbol{p}_{4})\right] \, \gamma^{\nu}$$

$$\times \left[u_{f_{2}s_{2}}(\boldsymbol{p}_{2}) \, q_{f_{2}s_{2}}^{c_{2}}(\boldsymbol{p}_{2}) + v_{f_{2}s_{2}}(-\boldsymbol{p}_{2}) \, \bar{q}_{f_{2}s_{2}}^{c_{2}\dagger}(-\boldsymbol{p}_{2})\right] \quad (2.80)$$

Na Eq.(2.80) está implícita a realização de uma integração espacial da seguinte forma

$$\int d^3x \ d^3y e^{-i(\boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}_4 \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{y})} \ \mathcal{D}_{\mu\nu}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = (2\pi)^3 \delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_4) \mathcal{D}_{\mu\nu}(q)$$
(2.81)

onde a relação entre o propagador no espaço dos momentos e das coordenadas é dada por

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(q) = \int d^3 z \ e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{z}} \ \mathcal{D}_{\mu\nu}(\boldsymbol{z})$$
(2.82)

Vamos agora separar o propagador do glúon, $\mathcal{D}_{\mu\nu}(q)$, em componentes espaciais e temporais. Para cada uma dessas componentes, nós estaremos assumindo as seguintes relações

$$D_{00}(q) = V_C(q) (2.83)$$

$$D_{ij}(q) = \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2}\right) V_T(q)$$
(2.84)

Se substituirmos as definições dos auto-espinores de momento dados nas Eqs.(2.67) e (2.68), juntamente com as matrizes γ na Eq.(2.80) e logo a seguir expandirmos seus elementos de matriz, obteremos o seguinte resultado

$$V = V_{qq} + V_{q\bar{q}} + V_{\bar{q}\bar{q}}$$
(2.85)

com cada uma das quantidades, $V_{qq},\,V_{\bar{q}\bar{q}}$
e $V_{q\bar{q}}$ dadas por

$$V_{qq} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_1 \cdots d^3 p_4}{(2\pi)^3} \delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_4) \sum_{f_1 \cdots f_4} \sum_{c_1 \cdots c_4} \sum_{s_1 \cdots s_4} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_3 c_1} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_4 c_2} \\ \times U_{f_1 f_2 s_1 s_2 s_3 s_4}^{qq}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}) q_{f_3 s_3}^{c_3 \dagger}(\boldsymbol{p}_3) q_{f_4 s_4}^{c_4 \dagger}(\boldsymbol{p}_4) q_{f_2 s_2}^{c_2}(\boldsymbol{p}_2) q_{f_1 s_1}^{c_1}(\boldsymbol{p}_1) \delta_{f_1 f_3} \delta_{f_2 f_4}$$
(2.86)

$$V_{\bar{q}\bar{q}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_1 \cdots d^3 p_4}{(2\pi)^3} \delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_4) \sum_{f_1 \cdots f_4} \sum_{c_1 \cdots c_4} \sum_{s_1 \cdots s_4} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_3 c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_4 c_2} \\ \times U_{f_1 f_2 s_1 s_2 s_3 s_4}^{\bar{q}\bar{q}}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}) \bar{q}_{f_3 s_3}^{c_3 \dagger}(\boldsymbol{p}_3) \bar{q}_{f_4 s_4}^{c_4 \dagger}(\boldsymbol{p}_4) \bar{q}_{f_2 s_2}^{c_2}(\boldsymbol{p}_2) \bar{q}_{f_1 s_1}^{c_1}(\boldsymbol{p}_1) \delta_{f_1 f_3} \delta_{f_2 f_4}$$
(2.87)

$$V_{q\bar{q}} = \int \frac{d^3 p_1 \cdots d^3 p_4}{(2\pi)^3} \delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_4) \sum_{f_1 \cdots f_4} \sum_{c_1 \cdots c_4} \sum_{s_1 \cdots s_4} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_3 c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2}\right)^{c_4 c_2} \\ \times U_{f_1 f_2 s_1 s_2 s_3 s_4}^{q\bar{q}}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}) q_{f_3 s_3}^{c_3^{\dagger}}(\boldsymbol{p}_3) \bar{q}_{f_4 s_4}^{c_4^{\dagger}}(\boldsymbol{p}_4) \bar{q}_{f_2 s_2}^{c_2}(\boldsymbol{p}_2) q_{f_1 s_1}^{c_1}(\boldsymbol{p}_1) \delta_{f_1 f_3} \delta_{f_2 f_4}$$
(2.88)

Por conveniência, introduzimos nas Eqs.(2.86),(2.87) e (2.88) as funções U^{qq} , $U^{\bar{q}\bar{q}}$ e $U^{q\bar{q}}$ cujas formas explícitas são dadas pelas seguintes expressões

$$U^{qq} = \left[\frac{\boldsymbol{p}_{1} \cdot \boldsymbol{p}_{2}}{m_{f_{1}}m_{f_{2}}}\delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{2}} - \frac{(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p}_{1})(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p}_{2})}{m_{f_{1}}m_{f_{2}}q^{2}}\delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{2}} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{s_{3}s_{1}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{s_{4}s_{2}})q^{2}}{4m_{f_{1}}m_{f_{2}}} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_{s_{4}s_{2}} \cdot (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}_{1})}{2m_{f_{1}}m_{f_{2}}}\delta_{s_{3}s_{1}} - \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{s_{3}s_{1}} \cdot \boldsymbol{q})(\boldsymbol{\sigma}_{s_{4}s_{2}} \cdot \boldsymbol{q})}{4m_{f_{1}}m_{f_{2}}} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_{s_{3}s_{1}} \cdot (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}_{2})}{2m_{f_{1}}m_{f_{2}}}\delta_{s_{4}s_{2}}\right]V_{T}(q)$$

$$+ \left[\frac{i\boldsymbol{\sigma}_{s_{3}s_{1}} \cdot (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}_{1})}{4m_{f_{1}}^{2}}\delta_{s_{4}s_{2}} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_{s_{4}s_{2}} \cdot (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}_{2})}{4m_{f_{2}}^{2}}\delta_{s_{3}s_{1}} - \left(\frac{q^{2}}{8m_{f_{1}}^{2}} + \frac{q^{2}}{8m_{f_{2}}^{2}}\right)\delta_{s_{3}s_{1}}\right]$$

$$+ \delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{2}}\right]V_{C}(q) \qquad (2.89)$$

$$\begin{split} U^{\bar{q}\bar{q}} &= -\left[\frac{(\mathbf{p}_{1} \cdot \mathbf{p}_{2})}{m_{f_{1}}m_{f_{2}}}\delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{2}} - \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_{1})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_{2})}{m_{f_{1}}m_{f_{2}}q^{2}}\delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{2}} - \frac{i\sigma_{s_{4}s_{2}}^{c} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_{1})}{2m_{f_{1}}m_{f_{2}}}\delta_{s_{3}s_{1}}\right] \\ &- \frac{(\sigma_{s_{3}s_{1}}^{c} \cdot \mathbf{q})(\sigma_{s_{4}s_{2}}^{c} \cdot \mathbf{q})}{4m_{f_{1}}m_{f_{2}}} + \frac{i\sigma_{s_{3}s_{1}}^{c} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_{2})}{2m_{f_{1}}m_{f_{2}}}\delta_{s_{4}s_{2}} + \frac{(\sigma_{s_{3}s_{1}}^{c} \cdot \sigma_{s_{4}s_{2}}^{c})q^{2}}{4m_{f_{1}}^{2}}\right]V_{T}(q) \\ &+ \left[\frac{i\sigma_{s_{3}s_{1}}^{c} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_{1})}{4m_{f_{1}}^{2}}\delta_{s_{4}s_{2}} - \frac{i\sigma_{s_{4}s_{2}}^{c} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_{2})}{4m_{f_{2}}^{2}}\delta_{s_{3}s_{1}} - \left(\frac{q^{2}}{8m_{f_{1}}^{2}} + \frac{q^{2}}{8m_{f_{2}}^{2}}\right)\delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{1}} \\ &+ \delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{2}}\right]V_{C}(q) \end{aligned} \tag{2.90}$$

$$U^{q\bar{q}} = \left[\frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_{1})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_{2})}{m_{f_{1}}m_{f_{2}}q^{2}}\delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{2}} - \frac{\mathbf{p}_{1} \cdot \mathbf{p}_{2}}{m_{f_{1}}m_{f_{2}}}\delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{2}} - \frac{i\sigma_{s_{4}s_{2}}^{c} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_{2})}{4m_{f_{2}}^{2}}\delta_{s_{3}s_{1}}\right]V_{T}(q) \\ &- \left(\frac{\sigma_{s_{3}s_{1}} \cdot \sigma_{s_{4}s_{2}}}{4m_{f_{1}}m_{f_{2}}}q^{2}} + \frac{(\sigma_{s_{3}s_{1}} \cdot q)(\sigma_{s_{4}s_{2}}^{c} \cdot q)}{4m_{f_{1}}m_{f_{2}}}} + \frac{i\sigma_{s_{4}s_{2}}^{c} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_{1})}{2m_{f_{1}}m_{f_{2}}}}\delta_{s_{3}s_{1}}\right]V_{T}(q) \\ &+ \left[\frac{i\sigma_{s_{3}s_{1}} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_{1})}{4m_{f_{1}}^{2}}\delta_{s_{4}s_{2}}} - \frac{i\sigma_{s_{4}s_{2}} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_{2})}{2m_{f_{1}}m_{f_{2}}}}\delta_{s_{3}s_{1}} - \left(\frac{q^{2}}{8m_{f_{2}}^{2}} + \frac{q^{2}}{8m_{f_{2}}^{2}}\right)\delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{2}} + \delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{2}}\right]V_{T}(q) \\ &+ \left[\frac{i\sigma_{s_{3}s_{1}} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_{1})}{4m_{f_{1}}^{2}}\delta_{s_{4}s_{2}} - \frac{i\sigma_{s_{4}s_{2}} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_{2})}{2m_{f_{1}}m_{f_{2}}}\delta_{s_{3}s_{1}} - \left(\frac{q^{2}}{8m_{f_{1}}^{2}} + \frac{q^{2}}{8m_{f_{2}}^{2}}\right)\delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{2}} \\ &+ \delta_{s_{3}s_{1}}\delta_{s_{4}s_{2}}\right]V_{C}(q) \end{aligned}$$

Para obtermos uma interpretação física mais clara a cerca do conteúdo das Eqs.(2.89), (2.90) e (2.91), é instrutivo obtermos sua versão no espaço das coordenadas. E para nosso estudo do modelo não-relativístico de quarks constituintes nós podemos usar uma forma simples para os potenciais V_C e V_T dados pela seguinte expressão

$$V_C(q) = -V_T(q) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\alpha_c}{q^2}$$
(2.92)

onde α_c é uma constante de acoplamento. Sendo assim, podemos realizar a transformada de Fourier sobre cada uma das quantidades $U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q})$. Naturalmente, que como todas as três contribuições possuem a mesma estrutura podemos computar apenas, ver Ref. [24]

$$U(\mathbf{p}_{1}, \mathbf{p}_{2}, \mathbf{r}) = \int d^{3}q \, e^{i \, \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \, U(\mathbf{p}_{1}, \mathbf{p}_{2}, \mathbf{q})$$

= $U^{(coul)} + U^{(hyp)} + U^{(corr)} + U^{(so)} + U^{(tens)}$ (2.93)

Na Eq.(2.93) $U^{(coul)}$ o termo de Coulomb e tem a seguinte forma

$$U^{(coul)} = \left[\frac{\alpha_c}{r} - \frac{\alpha_c}{2m_{f_1}m_{f_2}} \left(\frac{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2}{r} + \frac{\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}_1) \boldsymbol{p}_2}{r^3}\right)\right] \delta_{s_3 s_1} \delta_{s_4 s_2}$$
(2.94)

o termo hiperfino responsável pelo desdobramento de massas dos hádrons com diferentes spins é dado pela seguinte equação

$$U^{(hyp)} = -\frac{8\pi\,\alpha_c}{3\,m_{f_1}m_{f_2}}\,\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2\,\,\delta^3(\,r\,) \tag{2.95}$$

onde $S = \frac{\sigma}{2}$. O termo que chamaremos de correções relativísticas é dado por

$$U^{(corr)} = -\frac{\pi \alpha_c}{2} \left[\frac{1}{m_{f_1}^2} + \frac{1}{m_{f_2}^2} \right] \delta^3(r) \,\delta_{s_3 s_1} \delta_{s_4 s_2} \tag{2.96}$$

já o termo de interação do tipo spin-órbita esta absorvido na seguinte expressão

$$U^{(so)} = \frac{\alpha_c}{r^3} \left[\frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{4 \, m_{f_2}^2} \, \delta_{s_3 s_1} - \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{4 \, m_{f_1}^2} \, \delta_{s_4 s_2} \right] \\ + \frac{\alpha_c}{r^3} \left[\frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{2 \, m_{f_1} \, m_{f_2}} \, \delta_{s_4 s_2} - \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{2 \, m_{f_1} \, m_{f_2}} \, \delta_{s_3 s_1} \right]$$
(2.97)

e por fim temos o termo de interação tensorial dado pela seguinte equação

$$U^{(tens)} = -\frac{\alpha_c}{4 r^3 m_{f_1} m_{f_2}} \left[\frac{3 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \right] \delta_{s_3 s_1} \delta_{s_4 s_2} \qquad (2.98)$$

onde $r = | \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 |.$

Se agora compilarmos os resultados para a parte livre e de interação do Hamiltoniano de Breit-Fermi, nós poderemos reescreve-lo em uma forma compacta, i.e.

$$H = T(\mu)q^{\dagger}_{\mu}q_{\mu} + T(\nu)\bar{q}^{\dagger}_{\nu}\bar{q}_{\nu} + \frac{1}{2}V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)q^{\dagger}_{\mu}q^{\dagger}_{\nu}q_{\rho}q_{\sigma}$$
$$+ \frac{1}{2}V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)\bar{q}^{\dagger}_{\mu}\bar{q}^{\dagger}_{\nu}\bar{q}_{\rho}\bar{q}_{\sigma} + V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)q^{\dagger}_{\mu}\bar{q}^{\dagger}_{\nu}\bar{q}_{\rho}q_{\sigma}$$
(2.99)

onde o termo de interação quark-quark, por exemplo fica

$$V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \equiv \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu} - \boldsymbol{p}_{\rho} - \boldsymbol{p}_{\sigma})\delta_{f_{\mu}f_{\rho}}\delta_{f_{\nu}f_{\sigma}} \mathcal{F}^{a} \cdot \mathcal{F}^{a} U_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)$$
(2.100)

com os índices (μ, ν, σ, ρ) designando os graus de liberdade de momento, spin sabor e cor, e está subentendida a convenção de soma sobre índices repetidos. Na próxima seção iremos discutir as implicações de um tal modelo para o estado fundamental do espectro de mésons e bárions.
2.3.2 Equações de Estado Ligado no Modelo de Quarks

Nosso objetivo nesta seção será apresentar as previsões que o modelo não-relativístico de quarks constituintes faz para o espectro de massas de mésons e bárions. Nós restringiremos nosso estudo a hádrons no estado fundamental. E, afim de tornar nossa discussão mais próxima da literatura existente, nós iremos formular nossa discussão em primeira quantização.

No modelo não-relativístico de quarks (MNRQ) o Hamiltoniano, em primeira quantização e no espaço das coordenadas, que fornece a correta descrição do espectro de mésons e bárions é [31]

$$H = \sum_{i} \left[m_i + \frac{p_i^2}{2m_i} \right] + \sum_{i < j} \left[U^{(cl)}(r_{ij}) + U^{(hyp)}(r_{ij}) \right]$$
(2.101)

A leitura desse Hamiltoniano efetivo é muito clara. Ele contém um termo associado a energia cinética e de repouso dos quarks constituintes e dois potenciais de interação. A parte desses potenciais que é responsável pela interação entre os quarks devido a troca de um glúon (curta distância) e pelo confinamento de cor é

$$U_{ij}^{(cl)}(r_{ij}) = \left[\frac{\alpha_c}{r_{ij}} - \frac{3}{4}br_{ij} + C\right] \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{F}_j$$
(2.102)

onde α_c é a constante de acoplamento, b é o parâmetro de tensão que assegura o confinamento. Uma constante adicional C também é levada em conta, e expressa a inabilidade do modelo em determinar uma escala de energia absoluta para as interações. O setor hiperfino do potencial que torna possível a distinção entre diferentes spins é dado por

$$U_{ij}^{(hyp)}(r_{ij}) = -\frac{8\pi\alpha_c}{3m_im_j} \left[\frac{\sigma^3}{\pi^{\frac{3}{2}}}e^{-\sigma^2 r_{ij}^2}\right] \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \, \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{F}_j$$
(2.103)

onde o termo spin-spin foi suavizado sobre a distribuição da coordenada interquark r_{ij} [25], ou seja

$$\delta^3(r_{ij}) \longrightarrow \frac{\sigma^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-\sigma^2 r_{ij}^2}$$
(2.104)

Além disso, nós devemos notar que o vetor \mathbf{F} é definido em termos das matrizes de Gell-Mann, $\frac{\lambda_i}{2}$ para quarks e $\frac{\lambda_i^*}{2}$ para antiquarks e as matrizes de Pauli estão definidas por meio de $\mathbf{S}_i = \frac{\sigma_i}{2}$.

E importante notar que nós desprezamos contribuições para a interação de termos do tipo spin-órbita e tensorial. Isso se deve a dois motivos básicos. O primeiro deles é porque para onda-S a contribuição do termo spin-órbita, que é proporcional a um fator do tipo $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$, é nulo. O segundo motivo esta associado ao fato conhecido que

os efeitos do termo tensorial começam a ser importantes apenas para ondas parciais mais altas que a onda-S [25]. Sendo assim, a única diferença da presente função $U_{ij}^{(cl)}$ para aquela dada na equação (2.94), a menos de correções relativísticas, é o termo devido ao potencial de confinamento linear $\frac{3}{4}br_{ij}$ e uma constante C. Esses, no entanto, são dois ingredientes importantes requiridos pela fenomenologia de hádrons para a correta descrição do problema de estados ligados.

O Hamiltoniano efetivo do modelo de quarks, Eq.(2.101), possui cinco parâmetros livres: α_c , b, σ , C e m_q . Eles são ajustados para descrever várias propriedades estáticas de mésons e bárions, como por exemplo o estado fundamental do espectro de massa. Uma vez esses parâmetros tenham sido ajustados, o cálculo de outras propriedades dos hádrons podem ser feitas e comparadas aos dados experimentais existentes para testar como o modelo se comporta. No presente estudo nós usamos um conjunto de parâmetros que foram fixados para reproduzir uma ampla gama de massas de hádrons e seguem a Ref. [31]

$$m_u = .375 \,\text{GeV}; \ m_s = .650 \,\text{GeV}; \ m_c = 1.600 \,\text{GeV};$$

 $\alpha_c = .855; \ b = .154 \,\text{GeV}^2; \ \sigma = .70 \,\text{GeV}; \ C = -.4358.$ (2.105)

Neste ponto é importante salientar que estamos usando em nossa discussão que $m_u = m_d$, ou seja, efeitos da quebra de simetria $SU(2)_f$ de sabor estão sendo desconsiderados. Dessa forma, no restante da tese estaremos usando genericamente para as massas dos quarks up e down o símbolo m_u . Nosso desafio agora consiste em resolver a equação de Schröedinger para o problema de dois e três corpos usando o Hamiltoniano de quarks dado na Eq.(2.101).

2.3.3 Solução do Problema de Dois Corpos

Mecânica quântica descreve com grande precisão sistemas microscópicos. Para o caso em que a velocidade das partículas sejam pequenas quando comparadas com a velocidade da luz, isto é $p/m \ll c$, a relatividade pode ser esquecida. Dois exemplos bem conhecidos são os átomos de Hidrogênio e de Hélio. As energias desses sistemas são calculadas por uma equação de Schröedinger que, em geral, pode ser escrita da seguinte forma

$$H\Psi(r) = E\Psi(r) \tag{2.106}$$

E é a energia do estado ligado ou equivalentemente a massa em seu sistema de repouso (em unidades $c = \hbar = 1$). $\Psi(r)$ é a função de onda responsável por "armazenar" toda a informação acerca do sistema. Para um sistema ligado estável, o setor temporal da função de onda, e^{-iEt} , foi convenientemente removido. O Hamiltoniano na Eq.(2.106) envolve a energia cinética não-relativística e a energia potencial de interação. Nesse limite não-relativístico, é possível mostrar que devido à invariância Galileana, o termo de interação depende unicamente da coordenada relativa.

Um méson no MNRQ é um sistema ligado composto por um quark de massa (m_1) e um antiquark de massa (m_2) que, por hipótese, pode ser descrito por uma equação do tipo Schröedinger igual aquela definida na Eq.(2.106). Para um tal sistema, a forma explícita do Hamiltoniano em questão, ver Eq.(2.101), no espaço das coordenadas é

$$H = m_1 + m_2 + \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(r)$$
(2.107)

onde o potencial de interação V(r) é dado por

$$V(r) = \left[\frac{\alpha_c}{r} - \frac{3}{4}br - \frac{8\pi\alpha_c}{3m_1m_2} \left(\frac{\sigma^3}{\pi^{\frac{3}{2}}}e^{-\sigma^2 r^2}\right) \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 - C\right] \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2$$
(2.108)

onde $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ é a distância relativa entre o quark na posição \mathbf{r}_1 e o antiquark na posição \mathbf{r}_2 .

Afim de resolver a Eq.(2.106) para esse problema, nosso primeiro passo será fazer uma mudança de coordenadas no Hamiltoniano para reduzir o número de graus de liberdade do sistema e tornar a forma das equações um pouco mais tratáveis. Para isso vamos escrever $\mathbf{r}_1 \in \mathbf{r}_2$ em termos de coordenadas relativas e de c.m.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \qquad \boldsymbol{R} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$$
 (2.109)

Essa mudança implica que os termos de energia cinética sejam escritos na seguinte forma

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_R^2}{2M}$$
(2.110)

onde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ e $M = m_1 + m_2$. A equação equivalente a equação de Schröedinger nesse novo sistema de coordenadas é dada por

$$\left[m_{1}+m_{2}+\frac{p_{\boldsymbol{r}}^{2}}{2\,\mu}+\frac{p_{\boldsymbol{R}}^{2}}{2\,M}+V(\,r)\,\right]\Psi(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r})=E\,\Psi(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r})$$
(2.111)

Para a determinação da energia interna do sistema, é necessário separar a energia devido ao movimento do c.m.. Para fazer isso vamos em primeiro lugar propor uma função de onda teste da seguinte forma $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \zeta(\mathbf{R}) \Phi(\mathbf{r})$, e em seguida substitui-la na Eq.(2.111). O resultado dessa substituição, serão duas equações desacopladas

$$\frac{p_{\boldsymbol{R}}^2}{2M}\,\zeta(\boldsymbol{R}) = E_{\text{c.m.}}\,\zeta(\boldsymbol{R}) \qquad (2.112)$$

$$\left[m_1 + m_2 + \frac{p_r^2}{2\mu} + V(r)\right] \Phi(\mathbf{r}) = E_{\text{int}} \Phi(\mathbf{r}) \qquad (2.113)$$

onde nós temos usado a seguinte definição para a energia do sistema $E = E_{int} + E_{c.m.}$. Essa separação só é razoável pois estamos supondo que nosso sistema está isolado, ou seja, nós estamos desconsiderando a ação de forças externas. A equação para o c.m. é equivalente àquela de uma partícula livre e representa apenas uma translação pura. O espectro é contínuo e com

$$\zeta(\mathbf{R}) = e^{i\mathbf{p}_{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}} \tag{2.114}$$

$$E_{\text{c.m.}} = \frac{p_{\boldsymbol{R}}^2}{2M} \tag{2.115}$$

Uma vez que o termo de c.m. foi isolado, podemos nos concentrar na Eq.(2.113), e a partir de agora definiremos a inergia interna como $E = E_{int}$. Para resolver essa equação vamos expressar agora sua energia cinética em coordenadas esféricas, ou seja

$$\frac{p_r^2}{2\mu} = -\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$
(2.116)

onde nós usamos $p_r \equiv i \nabla_r$. A motivação para implementarmos novamente uma mudança de coordenadas, é porque V(r) é esfericamente simétrico. Sendo assim, podemos reduzir a Eq.(2.113) em uma equação puramente radial pela eliminação de sua dependência angular, bastando para tal usarmos a consagrada técnica de separação de variáveis [68]. Essa técnica estabelece que se introduzirmos na Eq.(2.113) uma função de onda escrita na seguinte forma

$$\Phi(\mathbf{r}) = R(r) Y(\theta, \varphi) \tag{2.117}$$

juntamente com a energia cinética dada na Eq.(2.116), isso nos levará a uma equação radial dada por

$$\left[m_{1} + m_{2} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}} - \frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l(l+1)}{2\mu r^{2}} + V(r)\right]R(r) = ER(r)$$
(2.118)

Devemos notar que na separação de variáveis que fizemos, a solução relacionada a parte angular é dada por um harmônico esférico e sua definição pode ser encontrada em qualquer livro texto de Mecânica Quântica como por exemplo a Ref. [69]. Neste ponto será mais conveniente definirmos um Hamiltoniano relativo H(r)

$$H(r) = m_1 + m_2 - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} + \left[\frac{\alpha_c}{r} - \frac{3}{4} br\right]$$
$$- \frac{8\pi\alpha_c}{3m_1m_2} \left(\frac{\sigma^3}{\pi^{3/2}} e^{-\sigma^2 r^2}\right) \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + C \left[\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2\right]$$
(2.119)

onde nós temos usado a definição do potencial V(r) dado na Eq.(2.108). Assim, todo nosso esforço ficará reduzido à resolução de uma equação que envolve apenas uma variável, a radial. A primeira dificuldade técnica que enfrentaremos para solucionar esse problema, é que a Eq.(2.118) não pode ser resolvida exatamente devido à forma do potencial de interação. No entanto, uma simples abordagem que pode ser usada para determinar a energia do estado fundamental para a qual uma equação do tipo

$$H(r) \Phi(\boldsymbol{r}) = E \Phi(\boldsymbol{r}) \qquad (2.120)$$

seja satisfeita, consiste em expandir $\Phi(\mathbf{r})$ em uma base completa de funções Gaussianas tridimensionais e logo a seguir usa-la para diagonalizar o Hamiltoniano nesta base. Uma vez que a função de onda tenha a seguinte forma

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N} a_n \,\phi_n(\mathbf{r}) \tag{2.121}$$

com a função de onda relativa dada por

$$\phi_n(\mathbf{r}) = e^{-\frac{n}{2}\beta^2 \mathbf{r}^2} \tag{2.122}$$

nós podemos variar os parâmetros $N \in \beta$ independentemente para encontrar o mínimo de energia. Sendo assim, vamos diagonalizar o Hamiltoniano na base da função de onda teste que aparece na Eq.(2.121).

Começaremos a fazer isso reescrevendo a Eq.(2.120) em uma forma mais conveniente, ou seja

$$[H(r) - E] \Phi(r) = 0 \qquad (2.123)$$

O próximo passo será multiplicarmos a Eq.(2.123) em ambos os lados por $\Phi^*(\mathbf{r})$ e logo a seguir integraremos esta

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} a_n^* a_{n'} \int d^3 r \, \phi_n^*(\boldsymbol{r}) \left[H(r) - E \right] \phi_{n'}(\boldsymbol{r}) \tag{2.124}$$

Para facilitar nossa discussão vamos neste ponto definir as seguintes matrizes, que chamaremos respectivamente de matriz Hamiltoniana e matriz overlap

$$H_{n,n'} = \int d^3 r \, \phi_n^*(\mathbf{r}) \, H(r) \, \phi_{n'}(\mathbf{r})$$
(2.125)

$$O_{n,n'} = \int d^3 r \, \phi_n^*(\mathbf{r}) \, \phi_{n'}(\mathbf{r})$$
 (2.126)

Dessa maneira podemos reescrever a Eq.(2.124) em uma forma mais compacta, isto é

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} a_n^* \left[H_{n,n'} - E O_{n,n'} \right] a_n = 0$$
(2.127)

Podemos agora escolher um dos coeficientes da Eq.(2.127) para variar, digamos δa_n^*

$$\sum_{n=1}^{N} \delta a_n^* \sum_{n'=1}^{N} \left[H_{n,n'} - E O_{n,n'} \right] a_{n'} = 0$$
(2.128)

Para uma variação arbitrária do coeficiente a_n^* , que respeite a condição $\delta a_n^* \neq 0$, nós teremos que ter a seguinte relação satisfeita

$$H_{nn'} a_{n'} = E_N O_{n,n'} a_{n'}$$
(2.129)

onde está subentendida uma soma sobre o índice repetido n'. Uma vez que as funções de onda que estamos usando são do tipo Gaussianas, os elementos de matriz das Eqs.(2.125) e (2.126) podem ser calculados analiticamente. Para os elementos de matriz do Hamiltoniano relativo nós temos a seguinte expressão

$$H_{n,n'} = \left[\frac{2\pi}{\beta_N^2(n+n')}\right]^{\frac{3}{2}} \left[M_{q\bar{q}} + \frac{3\beta_N^2}{2\mu} \frac{n\,n'}{n+n'} + \frac{32\,\sigma^3\,\alpha_c}{9\,m_1\,m_2\sqrt{\pi}} \left(\frac{n+n'}{n+n'+\frac{2\,\sigma^2}{\beta_N^2}}\right)^{\frac{5}{2}} \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 - \frac{4}{3}\,\alpha_c\,\beta_N\sqrt{\frac{2}{\pi}(n+n')} + \frac{b}{\beta_N}\sqrt{\frac{8}{\pi\,(n+n')}} + \frac{l(l+1)}{2\,\mu}\beta^2\,(n+n') + \frac{4}{3}\,C\right]$$
(2.130)

com $M_{q\bar{q}} = m_1 + m_2$ e a matriz overlap é dada por

$$O_{n,n'} = \left[\frac{2\pi}{\beta_N^2(n+n')}\right]^{\frac{3}{2}}$$
(2.131)

Na Eq.(2.130) usamos o fato de que $F_1 \cdot F_2 = -4/3$.

Vamos ter agora que resolver a Eq.(2.129) numericamente. Um código em Fortran-90 foi confeccionado para esse fim. A função básica desse código é preencher as matrizes overlap, na Eq.(2.131), e Hamiltoniana, na Eq.(2.130) e passa-las para uma subrotina chamada "RSG" designada para resolver uma variedade de problemas de autovalores generalizados do tipo que aparece na Eq.(2.129). Essa subrotina foi obtida do site: http://www.netlib.org/eispack.

A sistemática desse preenchimento é muito simples e consiste primeiro, em fixar os parâmetros do modelo de quarks, cujos valores são dados na Eq.(2.105). Uma vez isso tenha sido feito, restarão ainda dois parâmetros livres que podem serem variados. Um é o parâmetro de comprimento de oscilador β na função de onda teste. O outro é N, o número de Gaussianas que são usadas na expansão da função de onda teste. Assim, para cada valor de N fixo, o parâmetro β é variado em um certo intervalo. Em cada passo de β , para um dado N, as matrizes $[H] \in [O]$ são preenchidas e passadas para a subrotina "RSG". Essa subrotina, por sua vez, retorna as autoenergias E e os coeficientes a_n de cada autovetor. No entanto, esperamos devido ao princípio variacional, que à medida que variamos β nossas autoenergias irão mostrar um mínimo de energia para um valor de β específico que é estritamente maior que as autoenergias exatas do Hamiltoniano.

Podemos variar o número de Gaussianas N também. E nós esperamos que com o aumento de N os autovalores de energia, em consequência, decresçam. Novamente o princípio variacional estabelece que à medida que o número de Gaussianas aumenta, a função de onda teste se aproxima dos autovetores do sistema, e os autovalores de energia irão se aproximar dos autovalores verdadeiros. Em resumo, para uma quantidade suficientemente grande de Gaussianas devemos observar uma convergência tanto das funções de onda teste quanto das autoenergias na direção de seus valores exatos. Na prática, no entanto, nós observamos que para um pequeno número de Gaussianas N = 6, já é possível obtermos uma boa convergência para os autoestados e para as autoenergias soluções da Eq.(2.129). Nós ilustramos esse comportamento dos autovalores na Tabela 2.5. Note que na primeira linha da Tabela 2.5, entre parênteses, nós mostramos os valores experimentais e nas outras seis linhas nós mostramos a convergência de nossos resultados numéricos na direção dos dados experimentais com o aumento do número de Gaussianas usados na expansão da função de onda teste. Para um número maior que N = 6 Gaussianas, os resultados numéricos para essas massas são praticamente iguais.

Ν	$\pi(1)$	140)	K (4	195)	$\bar{D}(1$	1866)	ρ (7	70)
	β	Massa	β	Massa	β	Massa	β	Massa
1	499	272	499	587	432	2011	313	777
2	468	220	457	552	382	1993	270	772
3	448	152	449	506	476	1957	276	771
4	410	148	413	502	457	1949	260	770
5	399	141	409	497	499	1908	276	770
6	399	140	387	496	499	1897	266	770

Tabela 2.5: Massas e parâmetros variacionais de alguns mésons de interesse nesta tese, todos os resultados são dados em MeV.

Nas Figura 2.1 nós apresentamos os gráficos para as funções de onda dos mésons

que aparecem na Tabela 2.5. Novamente, nossa intenção com esses gráficos é mostrar a convergência das funções de onda, para um valor maior que N = 6 as funções de onda são praticamente idênticas.



Figura 2.1: Funções de onda para os mésons $\pi e \rho/\omega$ de interesse nesta tese.



Figura 2.2: Funções de onda para os mésons $K \in \overline{D}$ de interesse nesta tese.

2.3.4 Solução do Problema de Três Corpos

Nesta seção vamos discutir a solução da equação de Schröedinger à dinâmica de três corpos no modelo não-relativístico de quarks (MNRQ). A técnica que usaremos para esse fim seguirá muito de perto aquela que usamos no caso de dois corpos na seção anterior.

Nosso ponto de partida será a definição do Hamiltoniano de três quarks no espaço das coordenadas, que é obtido explicitamente da Eq.(2.101), ou seja

$$H = m_1 + m_2 + m_3 + \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} + \sum_{i< j=1}^3 V(r_{ij})$$
(2.132)

onde estamos usando a seguinte definição para o termo potencial

$$V(r_{ij}) = \left[\frac{\alpha_c}{r_{ij}} - \frac{3}{4}br_{ij} - \frac{8\pi\alpha_c}{3m_im_j} \left(\frac{\sigma^3}{\pi^{\frac{3}{2}}}e^{-\sigma^2 r_{ij}^2}\right) \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - C\right] \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j \qquad (2.133)$$

A estrutura desse termo envolvendo os potenciais Coulomb + linear e hiperfino para o problema de três partículas é bem mais complicada que aquela relacionada ao caso descrito na seção anterior. Isso por que agora existem três coordenadas inter-quark que contribuem no potencial, ou seja

$$r_{12} = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| \tag{2.134}$$

$$r_{23} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3| \tag{2.135}$$

$$r_{13} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3| \tag{2.136}$$

No entanto, afim de tornar a manipulação do potencial mais simples iremos deixa-lo em sua forma compacta tal como dada na Eq.(2.132).

Vamos começar eliminando as variáveis de c.m. do problema. A estratégia para implementar isso será reescrever as coordenadas r_1 , r_2 e r_3 em termos das coordenadas de Jacobi

$$\rho = r_1 - r_2$$
 (2.137)

$$\boldsymbol{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{m_1 \, \boldsymbol{r}_1 + m_2 \, \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} - \boldsymbol{r}_3 \right)$$
(2.138)

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1 \, \boldsymbol{r}_1 + m_2 \, \boldsymbol{r}_2 + m_3 \, \boldsymbol{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{2.139}$$

A introdução dessas novas variáveis nos permite reescrever a energia cinética do Hamiltoniano como

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} = \frac{p_{\rho}^2}{4\mu} + \frac{p_{\lambda}^2}{3M} + \frac{p_{R}^2}{2\mathcal{M}}$$
(2.140)

onde introduzimos as seguintes razões de massa

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{2.141}$$

$$M = \frac{(m_1 + m_2)m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{2.142}$$

$$\mathcal{M} = m_1 + m_2 + m_3 \tag{2.143}$$

Neste ponto dos cálculos, poderíamos fazer uma simplificação na forma das razões de massa que aparecem nas Eqs.(2.141), (2.142) e (2.143). Isso porque nesta tese

nós estaremos interessados em estudar sistemas ligados de três quarks que sejam formados por dois sabores iguais $(m_1 = m_2)$ e um de sabor diferente (m_3) e também estados com três quarks com o mesmo sabor $(m_1 = m_2 = m_3)$. No entanto, em todos esses casos as razões de massa podem ser simplificadas, mas preferimos deixa-las em sua forma genérica.

As quantidades que são afetadas por essa mudança de variáveis são as magnitudes das coordenadas inter-quark

$$r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |2\,\boldsymbol{\rho}|$$
 (2.144)

$$r_{23} = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3| = \left|\frac{\sqrt{6}}{2}\boldsymbol{\lambda} + m_a\,\boldsymbol{\rho}\right| \qquad (2.145)$$

$$r_{13} = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3| = \left|\frac{\sqrt{6}}{2}\boldsymbol{\lambda} - m_b\,\boldsymbol{\rho}\right| \qquad (2.146)$$

onde, para simplificar a forma das expressões, usamos

$$m_a = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \tag{2.147}$$

$$m_b = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \tag{2.148}$$

A equação de Schröedinger para o problema de três corpos nestas coordenadas pode ser escrita como

$$\left[m_{1} + m_{2} + m_{3} + \frac{p_{\rho}^{2}}{4\mu} + \frac{p_{\lambda}^{2}}{3M} + \frac{p_{R}^{2}}{2M} + \sum_{i< j=1}^{3} V(r_{ij})\right]\Psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}) = E\Psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda})$$
(2.149)

onde devemos notar no termo potencial, que as coordenadas inter-quark que entram nessa expressão são as dadas nas Eqs.(2.144), (2.145) e (2.146). Tal como está escrita, à Eq.(2.149) permite que a contribuição devida a variável de c.m. seja eliminada. Uma vez isso seja feito, teremos como resultado a seguinte equação

$$\left[m_1 + m_2 + m_3 + \frac{p_{\rho}^2}{4\mu} + \frac{p_{\lambda}^2}{3M} + \sum_{i < j=1}^3 V(r_{ij})\right] \Psi(\rho, \lambda) = E \Psi(\rho, \lambda) \qquad (2.150)$$

Agora, analogamente ao caso de dois corpos, escreveremos as energias cinéticas tanto para a variável ρ quanto para a variável λ em coordenadas esféricas e logo a seguir, substituiremos estas na Eq.(2.150). O resultado dessas substituições é uma equação para coordenadas relativas dada por

$$H(\rho, \lambda) \Psi(\rho, \lambda) = E \Psi(\rho, \lambda)$$
(2.151)

onde usaremos a seguinte definição para o Hamiltoniano relativo de três corpos

$$H(\rho,\lambda) = m_1 + m_2 + m_3 - \frac{1}{4\mu} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{L_{\rho}^2}{4\mu\rho^2} - \frac{1}{3M} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\lambda^2 \frac{\partial}{\partial\lambda}\right) + \frac{L_{\lambda}^2}{3M\lambda^2} + \sum_{i< j=1}^3 V(r_{ij}) \qquad (2.152)$$

onde os momentos angulares orbitais relativos são definidos da seguinte maneira

$$L_{\rho}^{2} = \frac{1}{\sin(\theta_{\rho})} \frac{\partial}{\partial \theta_{\rho}} \left(\sin(\theta_{\rho}) \frac{\partial}{\partial \theta_{\rho}} \right) + \frac{1}{\sin(\theta_{\rho})} \frac{\partial^{2}}{\partial \varphi_{\rho}^{2}}$$
(2.153)

$$L_{\lambda}^{2} = \frac{1}{\sin(\theta_{\lambda})} \frac{\partial}{\partial \theta_{\lambda}} \left(\sin(\theta_{\lambda}) \frac{\partial}{\partial \theta_{\lambda}} \right) + \frac{1}{\sin(\theta_{\lambda})} \frac{\partial^{2}}{\partial \varphi_{\lambda}^{2}}$$
(2.154)

Neste ponto devemos remover a dependência angular da equação de Schröedinger por meio da técnica de separação de variáveis. A motivação para implementarmos essa separação é simples, queremos simplificar ao máximo nossa equação pela redução dos seus graus de liberdade. Para os termos associados à energia cinética, que estão escritos convenientemente em coordenadas esféricas, essa separação poderia ser feita de maneira imediata. No entanto, para os termos Coulomb+linear e hiperfino do potencial essa separação não é tão imediata.

A partir das expressões para as coordenadas inter-partícula em (2.144), (2.145) e (2.146), é fácil observar que somente uma delas é diretamente proporcional às novas coordenadas que foram introduzidas. As outras duas são combinações lineares de ρ e λ . Dessa forma, quando for necessário a determinação explícita do módulo envolvido nessas equações, termos proporcionais a $\rho \cdot \lambda$ serão originados. Estes termos, por sua vez dependem do ângulo relativo entre $\rho \in \lambda$, ou seja $\theta_{\rho\lambda}$. Sendo assim, não é uma tarefa muito simples desacoplar completamente as variáveis angulares das relativas, o que inviabiliza a utilização da técnica de separação de variáveis de maneira direta ao termo potencial. Para que seja possível essa separação, será necessário fazermos uma outra mudança de variáveis adequada nesse setor do Hamiltoniano. Essa mudança de variáveis consiste em reescrever as coordenadas de Jacobi $\rho \in \lambda$, que entram no potencial, em termos de novas coordenadas chamadas hiperesféricas [70]. No entanto, por motivos práticos, não será útil fazermos essa mudança de variáveis na instância em que a Eq.(2.151) está escrita. É mais simples formular o problema de autovalores em sua forma matricial e a seguir implementar a mudança de variáveis.

Apenas por completeza, é interessante comentarmos que, em geral, existe uma grande variedade de técnicas que podem ser usadas na solução do problema de três corpos [71, 72]. Mas afim de deixar a discussão em uma forma mais próxima daquela discutida no caso de dois corpos nós optamos pelo uso dessa técnica de introduzir coordenadas hiperesféricos.

O primeiro passo para obtermos a versão matricial do problema de autovalores na Eq.(2.151) é definirmos a função de onda teste para o estado fundamental que usaremos, ou seja

$$\Psi_{LM}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{m} d_{m} \psi_{LM}^{(m)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda})$$
(2.155)

onde d_m é o coeficiente de expansão da função de onda. A função de onda relativa para um dado momento angular total $\mathbf{L} = \mathbf{l}_{\rho} + \mathbf{l}_{\lambda}$ é construída a partir de uma soma de coeficientes de Clebsch-Gordan de funções de onda das coordenadas de Jacobi $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\lambda}$, ou seja

$$\psi_{LM}^{(m)}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\substack{l_{\rho},m_{\rho}\\l_{\lambda},m_{\lambda}}} C_{m_{\rho}\ m_{\lambda}\ M}^{l_{\rho}\ l_{\lambda}\ L} \ e^{-\frac{m}{2}\alpha^{2}\lambda^{2}} \ Y_{l_{\lambda},m_{\lambda}}(\Omega_{\lambda}) \ e^{-\frac{m}{2}\alpha^{2}\rho^{2}} \ Y_{l_{\rho},m_{\rho}}(\Omega_{\rho})$$
(2.156)

Tanto N quanto α são parâmetros que podem ser variados para se minimizar a energia do sistema. Vamos agora reescrever a Eq.(2.151) da seguinte forma

$$[H(\rho,\lambda) - E] \Psi_{LM}(\rho,\lambda) = 0 \qquad (2.157)$$

O próximo passo será multiplicar a Eq.(2.157) em ambos os lados por $\Psi^*_{LM}(\rho, \lambda)$ e logo a seguir integrá-la em cada uma das coordenadas de Jacobi, ou seja

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} d_{m}^{*} d_{m'} \int d^{3}\lambda \ d^{3}\rho \ \psi_{LM}^{(m)*}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}) \ [H(\rho, \lambda) - E] \ \psi_{LM}^{(m')}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (2.158)$$

Afim de simplificar os cálculos, vamos definir neste ponto as seguintes matrizes

$$H_{m,m'} = \int d^3\lambda \ d^3\rho \ \psi_{_{LM}}^{(m)*}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\lambda}) \ H(\rho,\lambda) \ \psi_{_{LM}}^{(m')}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\lambda})$$
(2.159)

$$O_{m,m'} = \int d^3\lambda \ d^3\rho \ \psi_{LM}^{(m)*}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\lambda}) \ \psi_{LM}^{(m')}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\lambda})$$
(2.160)

Após variarmos um dos coeficientes na Eq.(2.158), digamos d_m^* , e fixarmos que $\delta d_m^* \neq 0$ obteremos a seguinte equação matricial

$$H_{m,m'} d_{m'} = E_N O_{m,m'} d_{m'}$$
(2.161)

onde está subentendida uma soma sobre os índices repetidos. Até aqui apresentamos um esquema completamente geral para a resolução do problema de autovalores. Esse esquema é muito similar aquele aplicado ao caso de dois corpos. No entanto, as expressões resultantes do cálculo dos elementos de matriz envolvidos no problema de três corpos são um pouco mais complicadas. No que segue, nós apenas esquematizaremos os procedimentos necessários para a sua resolução.

Usando a função de onda e o Hamiltoniano definidos pelas Eqs.(2.152) e (2.155), podemos calcular os elementos de matriz dados nas Eqs.(2.159) e (2.160) analiticamente. Para os elementos de matriz do Hamiltoniano, partiremos da Eq.(2.159) e obteremos de maneira completamente geral que

$$H_{m,m'} = T_{m,m'} + V_{m,m'}^{cl} + V_{m,m'}^{hyp}$$
(2.162)

onde designamos os elementos de matriz associados a energia cinética e de repouso pelo símbolo (T), os elementos de matriz do potencial Coulomb+linear por (V^{cl}) e do potencial hiperfino por (V^{hyp}) .

O termo $T_{m,m'}$ é obtido a partir do Hamiltoniano dado na Eq.(2.152) e da função de onda Gaussiana na Eq.(2.156), e possui a seguinte forma

$$T_{mm'} = M_{m,m'} + T^{\rho}_{m,m'} + T^{\lambda}_{m,m'}$$
(2.163)

Os elementos de matriz relacionados com a energia de repouso do bárion são

$$M_{mm'} = \sum_{\substack{l_{\rho}, m_{\rho} \\ l_{\lambda}, m_{\lambda}}} \sum_{\substack{l'_{\rho}, m'_{\rho} \\ l'_{\lambda}, m'_{\lambda}}} C^{l_{\rho} \ l_{\lambda} \ L}_{m_{\rho} \ m_{\lambda} \ M} C^{l'_{\rho} \ l'_{\lambda} \ L'}_{m'_{\rho} \ m'_{\lambda} \ M'} M^{l_{\rho}, l_{\lambda} l'_{\rho} l'_{\lambda}}_{m, m'}$$
(2.164)

onde a matriz reduzida de massa $M_{m',m}^{l_\rho,l_\lambda l'_\rho l'_\lambda}$ é escrita como

$$M_{m,m'}^{l_{\rho},l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}} = [m_1 + m_2 + m_3] \int d^3\rho \, d^3\lambda \, e^{-\frac{m}{2}(\rho^2 + \lambda^2)\alpha^2} \, Y^*_{l_{\rho}m_{\rho}}(\Omega_{\rho}) \, Y^*_{l_{\lambda}m_{\lambda}}(\Omega_{\lambda})$$

$$\times e^{-\frac{m'}{2}(\rho^2 + \lambda^2)\alpha^2} \, Y_{l'_{\rho}m'_{\rho}}(\Omega_{\rho}) \, Y_{l'_{\lambda}m'_{\lambda}}(\Omega_{\lambda})$$
(2.165)

A contribuição para à energia cinética devido a variável de Jacobi ρ é dada por

$$T^{\rho}_{mm'} = \sum_{\substack{l_{\rho}, m_{\rho} \\ l_{\lambda}, m_{\lambda}}} \sum_{\substack{l'_{\rho}, m'_{\rho} \\ l'_{\lambda}, m'_{\lambda}}} C^{l_{\rho} \ l_{\lambda} \ L}_{m_{\rho} \ m_{\lambda} \ M} C^{l'_{\rho} \ l'_{\lambda} \ L'}_{m'_{\rho} \ m'_{\lambda} \ M'} T^{(\rho)l_{\rho}, l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}}_{m,m'}$$
(2.166)

onde a matriz reduzida $T^{(\rho)}{}^{l_{\rho},l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}}_{m,m'}$ foi escrita convenientemente da seguinte forma

$$T^{(\rho)}{}^{l_{\rho},l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}}_{m,m'} = \int d^{3}\rho \, d^{3}\lambda \, e^{-\frac{m}{2}(\rho^{2}+\lambda^{2})\alpha^{2}} \, Y^{*}_{l_{\rho}m_{\rho}}(\Omega_{\rho}) \, Y^{*}_{l_{\lambda}m_{\lambda}}(\Omega_{\lambda})$$

$$\times \quad T^{(\rho)} \, e^{-\frac{m'}{2}(\rho^{2}+\lambda^{2})\alpha^{2}} \, Y_{l'_{\rho}m'_{\rho}}(\Omega_{\rho}) \, Y_{l'_{\lambda}m'_{\lambda}}(\Omega_{\lambda}) \tag{2.167}$$

O operador associado à energia cinética da coordenada de Jacobi ρ é definido pela seguinte equação

$$T^{(\rho)} = -\left[\frac{1}{4\mu}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{l_{\rho}(l_{\rho}+1)}{4\mu\rho^2}\right]$$
(2.168)

Já a contribuição para à energia cinética associada a variável de Jacobi λ é

$$T_{mm'}^{(\lambda)} = \sum_{\substack{l_{\rho}, m_{\rho} \\ l_{\lambda}, m_{\lambda}}} \sum_{\substack{l'_{\rho}, m'_{\rho} \\ l'_{\lambda}, m'_{\lambda}}} C_{m_{\rho} \ m_{\lambda} \ M}^{l_{\rho} \ l_{\lambda}} C_{m'_{\rho} \ m'_{\lambda} \ M'}^{l'_{\rho} \ l'_{\lambda} \ L'} T^{(\lambda)l_{\rho}, l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}}_{m,m'}$$
(2.169)

com a matriz reduzida $T^{(\,\lambda\,)l_\rho,l_\lambda l'_\rho l'_\lambda}_{\ m,m'}$ sendo definida por

$$T^{(\lambda)}{}^{l_{\rho},l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}}_{m,m'} = \int d^{3}\rho \, d^{3}\lambda \, e^{-\frac{m}{2}(\rho^{2}+\lambda^{2})\alpha^{2}} \, Y^{*}_{l_{\rho}m_{\rho}}(\Omega_{\rho}) \, Y^{*}_{l_{\lambda}m_{\lambda}}(\Omega_{\lambda})$$

$$\times \quad T^{(\lambda)} \, e^{-\frac{m'}{2}(\rho^{2}+\lambda^{2})\alpha^{2}} \, Y^{*}_{l'_{\rho}m'_{\rho}}(\Omega_{\rho}) \, Y^{*}_{l'_{\lambda}m'_{\lambda}}(\Omega_{\lambda})$$
(2.170)

O operador associado à energia cinética da coordenada de Jacobi λ é definido pela seguinte equação

$$T^{(\lambda)} = -\left[\frac{1}{3M}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) + \frac{l_{\lambda}(l_{\lambda}+1)}{3M\lambda^2}\right]$$
(2.171)

O setor do Hamiltoniano que envolve os potenciais Coulom+lineare hiperfino, tem um estrutura mais complicada e precisam de um tratamento um pouco mais cuidadoso. O ponto central em nosso problema é conseguir separar as variáveis angulares das variáveis espaciais. Para ilustrar o esquema que utilizamos para resolver essa questão nós partiremos, primeiramente, do termo associado ao potencial Coulomb+linear na Eq.(2.162), para reescrevê-lo como

$$V_{m,m'}^{cl} = \sum_{\substack{l_{\rho},m_{\rho} \\ l_{\lambda},m_{\lambda}}} \sum_{\substack{l'_{\rho},m'_{\rho} \\ l'_{\lambda},m'_{\lambda}}} C_{m_{\rho}\ m_{\lambda}\ M}^{l_{\rho}\ l_{\lambda}\ L} C_{m'_{\rho}\ m'_{\lambda}\ M'}^{l'_{\rho}\ l'_{\lambda}\ L'} V^{(cl)}_{m,m'}^{l_{\rho},l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}}$$
(2.172)

onde os elementos de matriz reduzido $V_{m,m'}^{l_\rho,l_\lambda l'_\rho l'_\lambda}$ são dados por

$$V^{(cl)}{}^{l_{\rho},l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}}_{m,m'} = \int d^{3}\rho \, d^{3}\lambda \, e^{-\frac{m}{2}(\rho^{2}+\lambda^{2})\alpha^{2}} \, Y^{*}_{l_{\rho}m_{\rho}}(\Omega_{\rho}) \, Y^{*}_{l_{\lambda}m_{\lambda}}(\Omega_{\lambda})$$

$$\times \quad V^{(cl)}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\lambda}) \, e^{-\frac{m}{2}(\rho^{2}+\lambda^{2})\alpha^{2}} \, Y_{l'_{\rho}m'_{\rho}}(\Omega_{\rho}) \, Y_{l'_{\lambda}m'_{\lambda}}(\Omega_{\lambda}) \qquad (2.173)$$

O potencial Coulomb+linear escrito explicitamente em termos das coordenadas de Jacobi é dado pela seguinte expressão

$$V^{(cl)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{b}{2} \left[|2\,\boldsymbol{\rho}| + \frac{1}{\sqrt{2}} |\sqrt{3}\boldsymbol{\lambda} + m_a\,\boldsymbol{\rho}| + \frac{1}{\sqrt{2}} |\sqrt{3}\boldsymbol{\lambda} - m_b\,\boldsymbol{\rho}| \right] - \frac{2\,\alpha_s}{3} \left[\frac{1}{|2\,\boldsymbol{\rho}|} + \frac{1}{1/\sqrt{2} |\sqrt{3}\boldsymbol{\lambda} + m_a\,\boldsymbol{\rho}|} + \frac{1}{1/\sqrt{2} |\sqrt{3}\boldsymbol{\lambda} - m_b\,\boldsymbol{\rho}|} \right] + 2\,C$$
(2.174)

onde usamos na expressão acima o resultado $F_i \cdot F_j = -2/3$. Nosso próximo passo será fazer uma nova mudança de variáveis na Eq.(2.173). Essa mudança consiste em introduzir as chamadas coordenadas hiperesféricas (ξ, θ)

$$\rho = \xi \sin(\theta) \tag{2.175}$$

$$\lambda = \xi \cos(\theta) \tag{2.176}$$

$$\xi^2 = \rho^2 + \lambda^2 \tag{2.177}$$

onde $\theta = \arctan(\rho/\lambda)$, $0 \le \theta \le \pi/2$ e $d\rho d\lambda = \xi d\theta d\xi$. Junto com essas mudanças de variáveis vamos pegar os termos que envolvem combinações lineares das coordenadas de Jacobi ρ e λ , na Eq.(2.174), e expandi-las de acordo com as seguintes relações

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' \pm \mathbf{r}|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m} \left[\frac{(\mp 1)^l}{(2l+1)} \right] \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\Omega) Y_{lm}(\Omega)$$
(2.178)

$$|\mathbf{r}' \pm \mathbf{r}| = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m} (\mp 1)^{l} \left[\frac{1}{(2l+3)} \frac{r_{<}^{l+2}}{r_{>}^{l+1}} - \frac{1}{(2l-1)} \frac{r_{<}^{l}}{r_{>}^{l-1}} \right] Y_{lm}^{*}(\Omega) Y_{lm}(\Omega) (2.179)$$

onde $\mathbf{r}' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r} = \frac{m_i}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\rho}$ (i = a, b). As expressões explícitas para as distâncias $r_{<}$ e $r_{>}$ estão apresentadas no Apêndice B. Uma vez que tenhamos usado esse conjunto de transformações, é possível reescrever a Eq.(2.173) em uma forma na qual as variáveis $\theta \in \xi$ estejam completamente desacopladas, ou seja

$$V^{(cl)}{}^{l_{\rho},l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}}_{m,m'} = \int_{0}^{\infty} d\xi^{5} \left[\xi \frac{b}{2} \mathbb{A}^{l_{\rho},l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}} - \frac{2\alpha_{s}}{3\xi} \mathbb{B}^{l_{\rho},l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}} + 2C \right] e^{-\frac{(m+m')}{2}\alpha^{2}\xi^{2}} \quad (2.180)$$

Na Eq.(2.180) temos dois coeficientes angulares, a saber, \mathbb{A} , \mathbb{B} . A forma explícita desses coeficientes angulares esta apresentada explicitamente no Apêndice C.

A discussão da contribuição da interação spin-spin será feita agora. No entanto, existem dois importantes detalhes que podemos explorar antes de fazermos qualquer manipulação em nossas equações para o potencial hiperfino. Primeiro, nesta tese nós estaremos interessados no máximo em bárions que possuam dois sabores iguais e um diferente, ou seja, $m_1 = m_2 \neq m_3$. Nunca estaremos interessados no caso que $m_1 \neq m_2 \neq m_3$. Segundo, nós estamos interessados em calcular o elemento de matriz do potencial hiperfino entre dois estados quaisquer $|\alpha\rangle \in |\beta\rangle$

$$\sum_{i< j=1}^{3} \langle \alpha | V^{(hyp)}(r_{ij}) | \beta \rangle = \langle \alpha | V^{(hyp)}(r_{12}) + V^{(hyp)}(r_{13}) + V^{(hyp)}(r_{23}) | \beta \rangle$$
(2.181)

Desde que a função de onda de um bárion, é completamente antissimétrica sob a troca dos quarks 1 e 2 nós temos como consequência imediata que

$$\langle \alpha | V^{(hyp)}(r_{13}) | \beta \rangle = \langle \alpha | V^{(hyp)}(r_{23}) | \beta \rangle$$
(2.182)

Esse simples fato traz uma significativa simplificação no cálculos que serão feitos, pois agora teremos que calcular apenas os seguintes elementos de matriz

$$\sum_{i< j=1}^{3} \langle \alpha | V^{(hyp)}(r_{ij}) | \beta \rangle = \langle \alpha | V^{(hyp)}(r_{12}) + 2V^{(hyp)}(r_{23}) | \beta \rangle$$
(2.183)

Naturalmente, que no caso limite em que $m_1 = m_2 = m_3$ teremos

$$\sum_{i < j=1}^{3} \langle \alpha | V^{(hyp)}(r_{ij}) | \beta \rangle = 3 \langle \alpha | V^{(hyp)}(r_{12}) | \beta \rangle$$
(2.184)

Se utilizarmos os argumentos feitos acima sobre a simetria associada ao cálculo dos elementos de matriz do potencial hiperfino, nós podemos escrever sem perda de generalidades que

$$V_{m,m'}^{(hyp)} = \sum_{\substack{l_{\rho},m_{\rho} \\ l_{\lambda},m_{\lambda}}} \sum_{\substack{l'_{\rho},m'_{\rho} \\ l'_{\lambda},m'_{\lambda}}} C_{m_{\rho}\ m_{\lambda}\ M}^{l_{\rho}\ l_{\lambda}\ L} C_{m'_{\rho}\ m'_{\lambda}\ M'}^{l'_{\rho}\ l'_{\lambda}\ L'} V^{(hyp)}_{m,m'}^{l_{\rho},l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}}$$
(2.185)

onde os elementos de matriz $V^{(\,hyp\,)l'_{\rho},l'_{\lambda}l_{\rho}l_{\lambda}}_{m',m}$ são dados por

$$V^{(hyp)l_{\rho}l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}} = \int d^{3}\rho \, d^{3}\lambda \, e^{\frac{m}{2}(\rho^{2}+\lambda^{2})\alpha^{2}} Y^{*}_{l_{\rho}m_{\rho}}(\Omega_{\rho}) \, Y^{*}_{l_{\lambda}m_{\lambda}}(\Omega_{\lambda})$$
$$\times \quad V^{(hyp)}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\lambda}) \, e^{\frac{m'}{2}(\rho^{2}+\lambda^{2})\alpha^{2}} \, Y_{l'_{\rho}m'_{\rho}}(\Omega_{\rho}) \, Y_{l'_{\lambda}m'_{\lambda}}(\Omega_{\lambda}) \quad (2.186)$$

O potencial hiperfino escrito em termos das coordenadas de Jacobi é dado por

$$V^{(hyp)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{16 \pi^{\frac{1}{2}} \alpha_c}{9 m_1 m_2} e^{-2\sigma^2 \rho^2} \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 + \frac{32 \pi^{\frac{1}{2}} \alpha_c}{9 m_2 m_3} e^{-\sigma^2 |\frac{\sqrt{6}}{2} \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\rho}|^2} \boldsymbol{S}_2 \cdot \boldsymbol{S}_3 \quad (2.187)$$

Para obtermos o potencial hiperfino para o caso do núcleon, basta pegarmos o primeiro termo da Eq.(2.187) e multiplicarmos por 3. A substituição da Eq.(2.187) na Eq.(2.186) resulta em duas contribuições para o potencial hiperfino. Os elementos de matriz do termo proporcional ao inverso de m_1m_2 podem ser determinados de maneira simples e não representam nenhum problema. Já para os elementos de matriz do termo proporcional ao inverso de m_2m_3 , nós temos no expoente da Gaussiana o módulo $|\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda + \rho|$, e no cálculo explícito dos elementos de matriz nós precisaremos utilizar a seguinte expansão

$$e^{r'r\,\cos(\theta_{r'r})} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \operatorname{C}_l(r'r) P_l(\cos(\theta_{r'r}))$$
$$= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{(-1)^l}{(2l+1)} \operatorname{C}_l(r'r) Y_{lm}^*(\Omega_{\rho}) Y_{lm}(\Omega_{\lambda}) \quad (2.188)$$

onde agora $r' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\lambda$, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho$ e o coeficiente da expansão é definido pela seguinte expressão

$$C_{l}(r'r) = \frac{(2l+1)}{2} \int_{-1}^{+1} dx \, e^{r'rx} P_{l}(x)$$
(2.189)

Assim, nós apresentamos todos os ingredientes necessários para o cálculo explícito dos elementos de matriz do problema de três corpos. O passo seguinte é resolver a equação de autovalores dada na Eq.(2.161) usando a subrotina "RSG". A sistemática para fazer isso será idêntica aquela que descrevemos no caso do espectro de mésons. No entanto, em vista da complicada estrutura angular que nossas equações possuem antes que qualquer tipo de cálculo seja implementado nós devemos fazer algumas simplificações em nosso problema.

O primeiro fato que devemos considerar é que nós vamos restringir nossos cálculos ao estado fundamental do espectro de bárions. E ainda mais, só estaremos interessados em estados com paridade positiva. Esses fatos implicam que a função de onda espacial selecionada para descrever nosso sistema tenha L = 0, M = 0, que denotamos Ψ_{00} . Em uma tal configuração, os únicos coeficientes de Clebsch-Gordan diferentes de zero que acoplam o momento angular associado às coordenadas de Jacobi $\rho \in \lambda$ com o momento angular total L = 0, são aqueles que respeitam a seguinte relação

$$|l_{\rho} - l_{\lambda}| \le L = 0 \le l_{\rho} + l_{\lambda} \tag{2.190}$$

Decorre daqui que $l_{\rho} = l_{\lambda}$. Dessa forma, todos os estados do subsistema (ρ, λ) que contribuem para função de onda espacial tem o mesmo momento angular orbital, partindo de $l_{\rho} = l_{\lambda} = 0$. Do vínculo sobre a paridade de nossos estados decorre que $P=(-)^L=(-1)^{l_\rho+l_\lambda}=+1,$ ou seja, a combinação $l_\rho+l_\lambda$ é sempre par. Assim sendo, nós devemos expandir nossos coeficientes de Clebsch-Gordan começando de $l_{\rho} = l_{\lambda} =$ $0, \ldots$, sempre para combinações de momento angular cuja soma $l_{\rho} + l_{\lambda}$ seja par. No entanto, observamos que para valores maiores que $l_{\rho} = l_{\lambda} > 2$, a determinação dos coeficientes angulares $\mathbb{A} \in \mathbb{B}$ em nosso potencial tornam-se extremamente intensa. Se adicionarmos a isso o fato de que no cálculo do espectro hadrônico, com potenciais do tipo Coulomb+Linear, as contribuições dominantes são aquelas no qual $l \leq 2$, é razoável truncarmos nossa expansão até ordem 2. A partir das considerações feitas acima, já estamos em posição de apresentar nossos resultados numéricos para o espectro de bárions obtido com um potencial de confinamento do tipo Coulomb + linear. Mas antes de fazer isso, achamos conveniente fazer uma breve discussão sobre o problema de autovalores para o caso em que o potencial de confinamento seja do tipo oscilador harmônico.

O potencial de oscilador harmônico (OH) é um dos mais úteis e simples potencias em física. O principal aspecto que contribui para esse "status", é sem dúvida o fato de que para ele existem soluções exatas para os autovalores de energia. Historicamente, o potencial de (OH) foi um dos primeiros potenciais usados no modelo não-relativístico de quarks (MNRQ).

A forma do Hamiltoniano para o caso de três corpos para o caso de um potencial do tipo OH é a seguinte

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{\kappa}{2} \sum_{i < j=1}^3 |r_i - r_j|^2$$
(2.191)

onde κ é a constante do oscilador harmônico. Agora, se expandirmos essa soma e usarmos as definições explícitas das coordenadas de Jacobi, que aparecem nas Eqs.(2.144), (2.145) e (2.146), nós poderemos reescrever a Eq.(2.191) da seguinte forma

$$H = \frac{\boldsymbol{p}_{\rho}^2}{2\,\mu'} + \frac{\boldsymbol{p}_{\lambda}^2}{2\,\mathcal{M}'} + \frac{3\,\kappa}{2}\,\left(\,\rho^2 + \lambda^2\right) \tag{2.192}$$

com $\mu' = 2 \mu$, $\mathcal{M}' = \frac{3}{2}\mathcal{M}$ e onde as definições de μ e \mathcal{M} são dadas nas Eqs.(2.141) e (2.142). Vemos assim, que o Hamiltoniano efetivo com potencial de OH pôde ser escrito na seguinte forma

$$H_{OH} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\,m} + \frac{m\,\omega^2}{2}\,\mathbf{r}^2$$
(2.193)

onde ω é a frequência do oscilador harmônico dada por $\omega=\sqrt{\frac{\kappa}{m}}.$

As soluções analíticas do problema do oscilador harmônico tridimensional são apresentadas em qualquer bom livro texto de mecânica quântica, como por exemplo a Ref. [68]. As energia são dadas por

$$E_{OH} = \left(2n+l+\frac{3}{2}\right)\omega\tag{2.194}$$

onde n é o número quântico radial principal, l é o momento angular orbital. Sendo assim, a energia total do oscilador harmônico para o caso de dois osciladores $\rho \in \lambda$ será

$$E_{OH} = E_{nl}^{\rho} + E_{nl}^{\lambda} = \left(2\,n_{\rho} + l_{\rho} + \frac{3}{2}\right)\omega_{\rho} + \left(2\,n_{\lambda} + l_{\lambda} + \frac{3}{2}\right)\omega_{\lambda} \tag{2.195}$$

onde as frequências dos dois osciladores $\omega_{\rho} \in \omega_{\lambda}$ são definidas como

$$\omega_{\rho} = \sqrt{\frac{3\,\kappa}{\mu'}}, \quad \omega_{\lambda} = \sqrt{\frac{3\,\kappa}{\mathcal{M}'}} \tag{2.196}$$

Duas outras expressões importantes podem ser definidas no modelo de OH, que são os parâmetros de comprimento de oscilador

$$\alpha_{\rho} = \sqrt{\mu' \,\omega_{\rho}}, \quad \alpha_{\lambda} = \sqrt{\mathcal{M}' \,\omega_{\lambda}}$$
(2.197)

Se usarmos agora as definições para $\mu \in \mathcal{M}$, juntamente com a Eq.(2.197), obteremos a seguinte relação entre esses parâmetros de oscilador

$$\alpha_{\lambda}^2 = \sqrt{\frac{3}{1+2r_m}} \,\alpha_{\rho}^2 \tag{2.198}$$

com $r_m = \frac{m}{m_3}$ e onde usamos o fato de que $m_1 = m_2 = m$. Uma informação preciosa que a Eq.(2.198) nos traz é que, a medida em que a razão entre as massas das partículas m e m_3 vai ficando menos, a quebra na simetria dos parâmetros $\alpha_{\rho} \in \alpha_{\lambda}$ vai ficando cada vez maior. No caso limite em que $m = m_3$ nós teríamos o caso simétrico $\alpha_{\rho}^2 = \alpha_{\lambda}^2$. No entanto, para o caso onde, por exemplo, $m = m_u = m_d = 330 \text{ MeV}$ e $m_3 = m_c = 1600 \text{ MeV}$, nós temos que $\alpha_{\lambda}^2 \cong 1.4 \alpha_{\rho}^2$. O efeito dessas oscilações assimétricas tem consequências físicas no espectro de bárions como foi bem observado na Ref. [73].

Por outro lado, se lembrarmos da função de onda "teste" para os bárions definida na Eq.(2.156), é fácil notar que nós usamos o mesmo parâmetro variacional α tanto para a Gaussiana associadas a coordenada de Jacobi ρ quanto para a λ . Os efeitos sobre $\alpha_{\rho} \in \alpha_{\lambda}$, então, não estão sendo levados em conta em nosso cálculo variacional. A rigor, nós teríamos que introduzir na função de onda relativa que usamos diferentes parâmetros variacionais $\alpha_{\rho} \in \alpha_{\lambda}$, e estes por sua vez deveriam ser variados independentemente para fixarmos o mínimo de energia em nosso sistema, pelo menos para o caso em que bárions charmosos fossem considerados. No entanto, isso traria complicações adicionais na separação das variáveis espaciais das angulares em nossa solução para o potencial de confinamento do tipo Coulomb + linear e por isso não o fizemos.

Em vista dessa questão, nós usamos o potencial de OH, cuja solução exata nós acabamos de discutir, em nosso esquema variacional e minimizamos a energia do sistema considerando dois parâmetros distintos $\alpha_{\rho} e \alpha_{\lambda}$ na função de onda do bárion. Como sabemos que no cálculo dos elementos de matriz para um potencial do tipo OH termos proporcionais a $\rho \cdot \lambda$ são cancelados, é muito simples obtermos uma separação entre variáveis angulares e espaciais. Logo a seguir, refizemos os cálculos para o caso em que apenas um parâmetro variacional α seja usado na função de onda do bárion. Deste modo, foi possível comparar esses resultados com a solução exata do mesmo problema. Nós observamos que os resultados para os autovalores de energia dos bárions estão mais próximos da solução exata quando são utilizados $\alpha_{\rho} e \alpha_{\lambda}$ na função de onda ao invés de apenas um parâmetro de oscilador α . No entanto, esse efeito não é tão grande. Sendo assim, em vista das possíveis complicações técnicas que a inclusão de dois parâmetros de oscilador acarretaria em nosso problema, nós preferimos manter nossa função de onda com apenas um parâmetro variacional α . Nós retornaremos a essa questão no final do próximo capítulo.

Os resultados numéricos para as massas dos bárions são apresentados na Tabela 2.6. Uma vez, que iremos usar nos cálculos que seguem as funções de onda obtidas pela diagonalização do Hamiltoniano de quarks com potencial do tipo Coulomb + linear, nós optamos por apresentar no corpo da tese apenas os resultados para os autovalores de energia calculados com esse potencial.

Nº	N(940)		$\Lambda_{s}^{0}(1115)$		$\Sigma_{s}^{0}(1196)$		$\Lambda_{c}^{+}(2286)$		$\Sigma_{c}^{+}(2286)$	
	α	Massa	α	Massa	α	Massa	α	Massa	α	Massa
1	326	975	337	1123	326	1202	355	2128	327	2223
2	318	972	328	1120	318	1199	344	2125	326	2231
3	318	969	328	1118	318	1198	344	2123	318	2230
4	318	969	328	1118	318	1197	344	2122	318	2230
5	318	968	328	1117	318	1197	344	2122	318	2230
6	318	968	328	1117	318	1197	344	2122	318	2230

Tabela 2.6: Massas para os bárions de interesse nesta tese. Todos os resultados foram obtidos com o mesmo Hamiltoniano do modelo de quarks com um potencial do tipo Coulomb+linear. Todos os resultados estão em MeV.

É importante salientar também, que analogamente ao caso de mésons nós obtivemos uma convergência muito boa para os autovetores com um número pequeno de Gaussianas.

Nesta, Sec. 2.3.4, e na anterior, Sec. 2.3.3, nós apresentamos as previsões do modelo não-relativístico de quarks para o espectro de massas no estado fundamental de mésons e bárions. O esquema desenvolvido para obter esses resultados além de fornecer valores para as massas que estão em muito boa concordância com os dados experimentais, também permitiu determinarmos as auto-funções desses hádrons. Isso permite que nos cálculos que seguem, nós possamos utiliza-las como uma boa aproximação para as funções de onda espaciais tanto para o caso de mésons como para o de bárions.

Capítulo 3

Quebra de Simetria de Sabor na Interação Méson-Bárion

3.1 Introdução

Nesta seção discutiremos o uso de um modelo de quarks não-relativístico para estudar o acoplamento de mésons charmosos ao núcleon. Para fazer isso, nós calculamos o elemento de matriz do Hamiltoniano de decaimento fornecido pelo modelo ${}^{3}P_{0}$ entre os estados hadrônicos iniciais e finais. Usamos funções de onda dos mésons e bárions envolvidos na transição determinadas pela diagonalização do Hamiltoniano do modelo de quarks em uma base de funções de onda Gaussianas. Uma vez que esse elemento de matriz foi determinado foi possível decompô-lo em termos de uma constante de acoplamento e seu respectivo fator de forma. De posse desse resultado nós então investigamos os efeitos da quebra de simetria de sabor SU(4) devido às diferentes massas dos quarks constituintes $u, d, s \in c$ na interação méson-bárion.

3.2 O Modelo de Decaimento ${}^{3}\mathbf{P}_{0}$

O ingrediente básico para a descrição de processos de decaimento forte, no qual um hádron decai em dois outros, é a determinação do elemento de matriz do operador responsável pela transição

$$h_{fi}(q^2) = \langle B(\text{quark}) C(\text{quark}) | \hat{H}_I | A(\text{quark}) \rangle$$
(3.1)

Em geral, esse elemento de matriz sempre pode ser escrito em termos de uma constante de acoplamento e um fator de forma associado, ou seja

$$h_{fi}(q^2) = g_{fi} F(q^2)$$
 (3.2)

Existem dois inputs que desempenham um papel importante no cálculo explícito da Eq.(3.1). O primeiro, são as funções de onda de estado ligado dos hádrons envolvidos na reação. O segundo, é o Hamiltoniano que descreve a dinâmica de decaimento dos hádrons em termos de quarks constituintes.

Em princípio, a Cromodinâmica Quântica (QCD) deveria fornecer a forma exata tanto dos estados hadrônicos quanto do Hamiltoniano de transição. No entanto, o uso direto da QCD para extrair essas informações na escala de baixas energias é muito difícil. O caráter não-abeliano do grupo de gauge da teoria junto com o grande valor que sua constante de acoplamento assume nesse regime de energias torna intratável qualquer tentativa de aplicá-la a situações realísticas. Alternativamente, uma grande variedade de modelos baseados em conceitos que emergem diretamente da QCD tem sido usados para investigar um vasto domínio da física hadrônica, inclusive processos de decaimento. Entre esses, sem dúvida, o modelo não-relativístico de quarks (MNRQ) é um dos mais bem sucedidos.

No MNRQ o mecanismo responsável pelo decaimento forte de hádrons é assumido como sendo devido a um processo no qual um par quark-antiquark $(q\bar{q})$ é criado a partir do vácuo, dando origem a dois novos hádrons assintóticamente nãointeragentes [74]. O par quark-antiquark, por ter sido criado do vácuo, deve ser um singleto de cor e sabor, deve possuir paridade positiva e também deve ter tanto o momento linear quanto angular total iguais a zero. Dito de outra forma, o par quark-antiquark deve ser um estado tal que possua L = 1 (onda-P) e S = 1. Em notação espectroscópica, ${}^{2S+1}L_J$, esse estado é denominado ${}^{3}P_{0}$.

Existem dois tipos de decaimento onde o mecanismo básico é a criação de um par $(q\bar{q})$: aqueles permitidos e proibidos pela regra de Okubo-Zweig-Iizuka (OZI) [75, 76]. Dizemos que um processo é do tipo OZI-permitido, quando um diagrama de linhas de quarks não pode ser dividido em partes contendo apenas hádrons completos sem que a linha de quarks seja cortada, como é o caso ilustrado na Figura 3.1. Caso contrário este é dito ser OZI-proibido. Neste trabalho estaremos considerando apenas naqueles processos do tipo OZI-permitidos.



Figura 3.1: Representação esquemática do diagrama de linhas de quarks para um decaimento mesônico (esquerda) e bariônico (direita), ambos do tipo OZI-permitido.

O operador responsável pela criação do par $q\bar{q}$ é obtido após realizarmos o limite

não-relativístico do seguinte Hamiltoniano microscópico [77]

$$\hat{H}_{I} = 2 m_{q} \gamma \int d^{3}x \,\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) \hat{\psi}(\boldsymbol{x})$$
(3.3)

onde γ é uma constante de acoplamento, m_q é a massa dos quarks produzidos na reação, $\hat{\psi} e \hat{\psi}$ são operadores de campo dos quarks. Esses operadores são definidos em termos da expansão em ondas planas dos espinores u e v da seguinte forma (os índices de sabor e cor foram suprimidos)

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \sum_{s} \left[u_s(\boldsymbol{p})\hat{q}_s(\boldsymbol{p}) + v_s(-\boldsymbol{p})\hat{q}_s^{\dagger}(-\boldsymbol{p}) \right]$$
(3.4)

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \sum_{s} \left[\bar{u}_s(\boldsymbol{p}) \hat{q}_s^{\dagger}(\boldsymbol{p}) + \bar{v}_s(-\boldsymbol{p}) \hat{\bar{q}}_s(-\boldsymbol{p}) \right]$$
(3.5)

onde os operadores $\hat{q}^{\dagger} \in \hat{q}$ criam e aniquilam quarks e os operadores $\hat{q}^{\dagger} \in \hat{q}$ criam e aniquilam antiquarks. Esses operadores são tais que satisfazem as seguintes relações de anticomutação

$$\{q_s(\boldsymbol{p}), q_{s'}(\boldsymbol{p}')\} = \{\bar{q}_s(\boldsymbol{p}), \bar{q}_{s'}(\boldsymbol{p}')\} = 0$$

$$\{q_s(\boldsymbol{p}), q_{s'}^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\} = \{\bar{q}_s(\boldsymbol{p}), \bar{q}_{s'}^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\} = \delta_{ss'}\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')$$
(3.6)

Já os espinores $u \in v$ são definidos pelas seguintes expressões

$$u_{s}(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}} + m}{2E_{\boldsymbol{p}}}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}} + m} \end{pmatrix} \chi_{s}$$
(3.7)

$$v_s(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2E_{\mathbf{p}}}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \chi_s^c$$
(3.8)

onde a energia relativística dos quarks é $E = \sqrt{p^2 + M^2}$, M é a massa dos quarksconstituintes, χ_s é o espinor de Pauli e $\chi_s^c = -i\sigma_2\chi_s^*$.

Nos últimos anos diferentes modelos para o mecanismo microscópico de decaimento forte têm sido propostos [78, 36, 37]. Na Ref. [78], por exemplo, um cuidadoso estudo foi desenvolvido com o objetivo de se investigar amplitudes de decaimento de mésons assumindo que o mecanismo de produção do par $q\bar{q}$ fosse devido a uma interação de confinamento scalar (sKs) e também devido a um mecanismo de troca de um glúon (OGE). As conclusões dessa investigação mostraram, entre outras coisas, que as taxas de decaimento preditas não eram capazes de fornecer uma boa descrição para processos experimentais de decaimento forte analisados. Nesta tese focamos nossa atenção no mecanismo de decaimento baseado no Hamiltoniano definido na Eq.(3.3). Afim de facilitar a manipulação do Hamiltoniano de transição nos cálculos que iremos realizar, vamos reescrevê-lo em uma forma um pouco mais compacta.

Começaremos primeiro por substituir em (3.3) os campos de Dirac definidos nas Eqs.(3.4) e (3.5), ou seja

$$\hat{H}_{I} = 2 m_{q} \gamma \int \frac{d^{3} p \, d^{3} p' \, d^{3} x}{(2\pi)^{3}} e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{x}} \sum_{s's} \left[\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}') \, \hat{q}_{s'}^{\dagger}(\boldsymbol{p}') + \bar{v}_{s'}(-\boldsymbol{p}') \, \hat{\bar{q}}_{s'}(-\boldsymbol{p}') \right] \\
\times \left[u_{s}(\boldsymbol{p}) \, \hat{q}_{s}(\boldsymbol{p}) + v_{s}(-\boldsymbol{p}) \, \hat{\bar{q}}_{s}^{\dagger}(-\boldsymbol{p}) \right]$$
(3.9)

Após expandirmos todos os produtos e realizarmos a integração na coordenada espacial, obteremos a seguinte expressão

$$\hat{H}_{I} = 2 m_{q} \gamma \int d^{3}p \ d^{3}p' \ \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \sum_{ss'} \left[\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}') \ u_{s}(\boldsymbol{p}) \ \hat{q}_{s'}^{\dagger}(\boldsymbol{p}') \ \hat{q}_{s}(\boldsymbol{p}) \right. \\
+ \left. \bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}') \ v_{s}(-\boldsymbol{p}) \ \hat{q}_{s'}^{\dagger}(\boldsymbol{p}') \ \hat{\bar{q}}_{s}^{\dagger}(-\boldsymbol{p}) + \bar{v}_{s'}(-\boldsymbol{p}') \ u_{s}(\boldsymbol{p}) \ \hat{\bar{q}}_{s'}(-\boldsymbol{p}') \ \hat{q}_{s}(\boldsymbol{p}) \\
+ \left. \bar{v}_{s'}(-\boldsymbol{p}') \ v_{s}(-\boldsymbol{p}) \ \hat{\bar{q}}_{s'}(-\boldsymbol{p}') \ \hat{\bar{q}}_{s}^{\dagger}(-\boldsymbol{p}) \right]$$
(3.10)

onde usamos que

$$\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{x}} = \delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$$
(3.11)

Como estamos tratando com processos que envolvem apenas a criação de um par quark-antiquark, só estaremos interessados em termos proporcionais a operadores do tipo $q^{\dagger}\bar{q}^{\dagger}$, sendo assim a Eq.(3.10) fica reduzida a

$$\hat{H}_{I} = 2 m_{q} \gamma \int d^{3}p \ d^{3}p' \ \delta(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}') \sum_{ss'} \bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}') \ v_{s}(\boldsymbol{p}) \ \hat{q}_{s'}^{\dagger}(\boldsymbol{p}') \ \hat{\bar{q}}_{s}^{\dagger}(\boldsymbol{p})$$
(3.12)

onde fizemos a seguinte mudança de variável $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$. Agora, para abreviar a notação vamos denotar o conjunto de números quânticos necessários para especificar o estado de um quark por $\mu = \{\mathbf{p}', s', c', f'\}$ e de um antiquark por $\nu = \{\mathbf{p}, s, c, f\}$. Esta estratégia nos permite retornar com os índices de sabor e cor na Eq.(3.12), e reescrevê-la na seguinte forma

$$\hat{H}_I = V_{\mu\nu} \, q^{\dagger}_{\mu} \bar{q}^{\dagger}_{\nu} \tag{3.13}$$

onde

$$V_{\mu\nu} = 2 m_q \gamma \,\delta_{f_\mu f_\nu} \delta_{c_\mu c_\nu} \,\delta(\boldsymbol{p}_\mu + \boldsymbol{p}_\nu) \bar{u}_{s_\mu}(\boldsymbol{p}_\mu) \,v_{s_\nu}(\boldsymbol{p}_\mu) \tag{3.14}$$

Nas equações acima esta subentendida a convenção de soma e/ou integração sobre os índices repetidos. Antes de prosseguirmos, no entanto, iremos analisar com um pouco mais de detalhe o fator envolvendo os espinores $\bar{u} \in v$, que aparece na Eq.(3.14). Primeiro iremos computar o elemento de matriz entre esses espinores, isto é

$$u_{s_{\mu}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_{\mu})\gamma^{0}v_{s_{\nu}}(\boldsymbol{p}_{\nu}) = \sqrt{\frac{(E_{p_{\mu}} + m_{q})(E_{p_{\nu}} + m_{q})}{4E_{p_{\mu}}E_{p_{\nu}}}} \left[\frac{\chi_{s_{\mu}}^{*}\sigma \cdot \boldsymbol{p}_{\nu}\chi_{s_{\nu}}^{c}}{E_{\boldsymbol{p}_{\nu}} + m_{q}} - \frac{\chi_{s_{\mu}}^{*}\sigma \cdot \boldsymbol{p}_{\mu}\chi_{s_{\nu}}^{c}}{E_{\boldsymbol{p}_{\mu}} + m_{q}}\right]$$
(3.15)

Se tomarmos o limite não-relativístico desta equação, $E \to m$, teremos

$$u_{s_{\mu}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_{\mu})\gamma^{0}v_{s_{\nu}}(\boldsymbol{p}_{\nu}) \cong -\frac{1}{2m_{q}} \Big[\chi_{s_{\mu}}^{*} \sigma \cdot (\boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\nu}) \chi_{s_{\nu}}^{c} \Big]$$
(3.16)

Agora, vamos escrever a Eq.(3.16) em uma forma mais conveniente, ou seja

$$V_{s_{\mu}s_{\nu}}(\boldsymbol{p}_{\mu},\boldsymbol{p}_{\nu}) \equiv \chi^*_{s_{\mu}} \ \sigma \cdot (\boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\nu}) \ \chi^c_{s_{\nu}}$$
(3.17)

Desta maneira, podemos reescrever a Eq.(3.14) em uma forma mais útil

$$V_{\mu\nu} = -\gamma \,\delta_{f_{\mu}f_{\nu}} \,\delta_{c_{\mu}c_{\nu}} \,\delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \,V_{s_{\mu}s_{\nu}}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \tag{3.18}$$

No que segue, nós iremos focar nossa atenção no mecanismo de decaimento baseado no Hamiltoniano dado na Eq.(3.13). Ele será usado no estudo de dois tipos de processos. Aqueles envolvendo **méson** \rightarrow **méson** + **méson**, que denominaremos processos mesônicos e aqueles casos envolvendo **bárion** \rightarrow **bárion** + **méson**, que denominaremos processos bariônicos. Dessa maneira, estaremos interessados em determinar amplitudes de decaimento que tem a seguinte forma genérica

$$h_{fi}(q^2) = \langle BC | \hat{H}_I | A \rangle / \delta(\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C})$$
(3.19)

onde h_{fi} é a amplitude de decaimento. Além disso, explicitamos na Eq.(3.19) um fator $\delta(\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C})$ com a intenção de reforçar a conservação do momentum nos processos descritos por essa amplitude.

3.3 Amplitudes de Decaimento Hadrônicas

Nosso principal objetivo agora será obter de maneira geral amplitudes de decaimento tanto para processos mesônicos quanto para processos bariônicos a partir do elemento de matriz do Hamiltoniano de transição. O primeiro passo, em ordem de calcular o elemento de matriz desse Hamiltoniano, será definir os estados de mésons e bárions empregando uma notação de segunda quantização. Nesse formalismo, o estado de um méson será escrito em termos de um operador de criação de méson $\hat{M}^{\dagger}_{\alpha}$ da seguinte forma

$$|\alpha\rangle = \hat{M}^{\dagger}_{\alpha}|0\rangle = \Phi^{\mu\nu}_{\beta}\hat{q}^{\dagger}_{\mu}\hat{\bar{q}}^{\dagger}_{\nu}|0\rangle \qquad (3.20)$$

onde $\Phi^{\mu\nu}_{\beta}$ é a função do méson, normalizada como

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta}^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} \tag{3.21}$$

O índice a representa os números quânticos do méson (orbital, spin) e μ,ν representam os números quânticos dos quarks (orbital, cor, spin, flavor). Os operadores de quark (q) e antiquark (\bar{q}), na notação compacta que usaremos daqui para frente, são tais que respeitam as seguintes relações de anticomutação

$$\{ \bar{q}_{\mu'}, \bar{q}^{\dagger}_{\mu} \} = \{ q_{\mu'}, q^{\dagger}_{\mu} \} = \delta_{\mu'\mu}$$

$$\{ \hat{q}_{\mu'}, \hat{q}_{\mu} \} = \{ \hat{q}_{\mu'}, \hat{q}_{\mu} \} = \{ \hat{q}_{\mu'}, \hat{q}^{\dagger}_{\mu} \} = \{ \hat{q}_{\mu'}, \hat{q}^{\dagger}_{\mu} \} = 0$$

$$(3.22)$$

O estado de vácuo é definido de tal modo que

$$\hat{q}_{\mu}|0\rangle = \hat{\bar{q}}_{\mu}|0\rangle = 0 \tag{3.23}$$

A função de onda total de um méson dada em termos de graus de liberdade de quarks é definida como

$$\Phi^{\mu\nu}_{\beta} = C^{c_{\mu}c_{\nu}}_{\beta} \,\chi^{\xi_{\mu}\xi_{\nu}}_{\beta} \,\Phi^{\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{p}_{\nu}}_{\boldsymbol{P}} \tag{3.24}$$

com a parte espacial sendo definida a partir da seguinte expressão

$$\Phi_{\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{p}_{\nu}} = \sum_{n=1}^{N} a_n \, \Phi_{\boldsymbol{P}}^{(n)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \tag{3.25}$$

Nesta tese, estaremos usando para a função de onda relativa o seguinte $Ans \ddot{a}tze$ Gaussiano

$$\Phi_{\boldsymbol{P}}^{(n)}(\boldsymbol{p}_{\mu},\boldsymbol{p}_{\nu}) = \delta(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\nu}) \phi^{(n)}(\boldsymbol{p}_{\mu},\boldsymbol{p}_{\nu})$$
(3.26)

com

$$\phi^{(n)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) = \left[\frac{1}{\beta_{n}^{(N)}}\right]^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\left[m_{1}\,\boldsymbol{p}_{\mu}-m_{2}\boldsymbol{p}_{\nu}\right]^{2}}{8\beta_{n}^{(N)}}}$$
(3.27)

Os parâmetros usados na definição da função de onda espacial relativa dos mésons são o parâmetro de escala do oscilador $\beta_n^{(N)} = n \beta_N^2$ e as razões de massa

$$m_1 = \frac{2m_{\bar{q}}}{m_{\bar{q}} + m_q}, \qquad m_2 = \frac{2m_q}{m_{\bar{q}} + m_q}$$
(3.28)

Os parâmetros β e a_n serão determinados a partir de um esquema variacional. O coeficiente de Clebsch-Gordan correspondendo ao estado de cor do méson β é dado

por $C_{\beta}^{c_{\mu}c_{\nu}} = \frac{\delta^{c_{\mu}c_{\nu}}}{\sqrt{3}}$, e o coeficiente de Clebsch-Gordan correspondendo ao estado de spin-sabor é designado por $\chi_{\beta}^{\xi_{\mu}\xi_{\nu}}$.

Vamos considerar agora um processo de decaimento que tenha a forma $A_{\alpha} \rightarrow B_{\gamma} + C_{\beta}$. Para essa situação, especificaremos ainda que os estados inicial e final só envolvam mésons e sejam definidos da seguinte maneira

$$|i\rangle = \hat{M}^{\dagger}_{\alpha}|0\rangle \tag{3.29}$$

$$|f\rangle = \hat{M}^{\dagger}_{\gamma}\hat{M}^{\dagger}_{\beta}|0\rangle \qquad (3.30)$$

A partir das Eqs.(3.20), (3.29) e (3.30) podemos obter de maneira imediata o seguinte elemento de matriz

$$\langle f | \hat{H}_I | i \rangle = \langle 0 | \hat{M}_\gamma \ \hat{M}_\beta \ \hat{H}_I \ \hat{M}_\alpha^{\dagger} | 0 \rangle$$
(3.31)

$$= \Phi_{\gamma}^{*\mu_{1}\nu_{1}} \Phi_{\beta}^{*\mu_{2}\nu_{2}} V_{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{\mu_{3}\nu_{3}} \langle 0 | \hat{\bar{q}}_{\nu_{1}} \hat{q}_{\mu_{1}} \hat{\bar{q}}_{\nu_{2}} \hat{q}_{\mu_{2}} \hat{q}_{\mu}^{\dagger} \hat{\bar{q}}_{\nu}^{\dagger} \hat{q}_{\mu_{3}}^{\dagger} \hat{\bar{q}}_{\nu_{3}}^{\dagger} | 0 \rangle \qquad (3.32)$$

Depois de realizarmos as contrações entre os operadores de criação e aniquilação de quarks e antiquarks, obteremos quatro amplitudes de decaimento elementares que envolvem as funções de onda dos mésons e um potencial provindo do Hamiltoniano de transição, ou seja

$$\langle 0 | \hat{M}_{\gamma} \, \hat{M}_{\beta} \, \hat{H}_{I} \, \hat{M}_{\alpha}^{\dagger} | 0 \rangle = - \Phi_{\gamma}^{*\mu_{3}\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu_{3}\nu} V_{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{\mu_{3}\nu_{3}} - \Phi_{\gamma}^{*\mu_{2}\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu_{3}\nu} V_{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{\mu_{3}\nu_{3}} + \Phi_{\gamma}^{*\mu_{3}\nu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} V_{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{\mu_{3}\nu_{3}} + \Phi_{\gamma}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu_{3}\nu_{3}} V_{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{\mu_{3}\nu_{3}}$$
(3.33)

No entanto, os únicos termos que representam processos do tipo OZI-permitidos são

$$\langle 0 | \hat{M}_{\gamma} \, \hat{M}_{\beta} \, \hat{H}_{I} \, \hat{M}_{\alpha}^{\dagger} \, | 0 \rangle = - \Phi_{\gamma}^{*\mu_{3}\nu} \, \Phi_{\beta}^{*\mu_{3}\nu} \, V_{\mu\nu} \, \Phi_{\alpha}^{\mu_{3}\nu_{3}} - \Phi_{\gamma}^{*\mu_{\nu_{3}}} \, \Phi_{\beta}^{*\mu_{3}\nu} \, V_{\mu\nu} \, \Phi_{\alpha}^{\mu_{3}\nu_{3}}$$

$$(3.34)$$

Por comodidade iremos redefinir essas amplitudes elementares introduzindo as seguintes definições

$$h_{(1)} \equiv \Phi_{\gamma}^{*\mu_{3}\nu} \; \Phi_{\beta}^{*\mu\nu_{3}} \; V_{\mu\nu} \; \Phi_{\alpha}^{\mu_{3}\nu_{3}} \tag{3.35}$$

$$h_{(2)} \equiv \Phi_{\gamma}^{*\mu\nu_3} \ \Phi_{\beta}^{*\mu_3\nu} \ V_{\mu\nu} \ \Phi_{\alpha}^{\mu_3\nu_3} \tag{3.36}$$

A partir dessas é imediato reescrevermos o elemento de matriz do Hamiltoniano de transição da seguinte forma

$$\langle 0|\hat{M}_{\gamma} \ \hat{M}_{\beta} \ \hat{H}_{I} \ \hat{M}_{\alpha}^{\dagger} \ |0\rangle \equiv h_{fi}^{(M)} = -h_{(1)} - h_{(2)} \tag{3.37}$$

Se usarmos explicitamente agora as Eqs.(3.18) e (3.24) podemos decompor, ainda, cada uma das amplitudes elementares da seguinte maneira

$$h_{(1)} = \mathcal{I}_{(1)}^{s-f} \, \mathcal{I}_{(1)}^c \, \mathcal{I}_{(1)}^{s-e} \tag{3.38}$$

$$h_{(2)} = \mathcal{I}_{(2)}^{s-f} \, \mathcal{I}_{(2)}^c \, \mathcal{I}_{(2)}^{s-e} \tag{3.39}$$

onde \mathcal{I}^{s-f} , $\mathcal{I}^c \in \mathcal{I}^{s-e}$ estão designando os fatores de spin-sabor, cor e spin-espaço, respectivamente. Em termos de coeficientes de Clebsch-Gordon os fatores de sabor e cor relativos as contribuições da amplitude elementar $h_{(1)}$ são

$$\mathcal{I}_{(1)}^{s-f} = \chi_{\gamma}^{*\xi_{\mu_{3}}\xi_{\nu}} \chi_{\beta}^{*\xi_{\mu}\xi_{\nu_{3}}} \chi_{\alpha}^{\xi_{\mu_{3}\nu_{3}}} \delta_{f_{\mu}f_{\nu}}$$
(3.40)

$$\mathcal{I}_{(1)}^{c} = C_{\gamma}^{c_{\mu_{3}}c_{\nu}} C_{\beta}^{c_{\mu}c_{\nu_{3}}} C_{\alpha}^{c_{\mu_{3}\nu_{3}}} \delta_{c_{\mu}c_{\nu}}$$
(3.41)

já os respectivos fatores de sabor e cor associados a amplitude elementar $h_{(2)}$ são dados por

$$\mathcal{I}_{(2)}^{s-f} = \chi_{\gamma}^{*\xi_{\mu}\xi_{\nu_{3}}} \chi_{\beta}^{*\xi_{\mu_{3}}\xi_{\nu}} \chi_{\alpha}^{\xi_{\mu_{3}\nu_{3}}} \delta_{f_{\mu}f_{\nu}}$$
(3.42)

$$\mathcal{I}_{(2)}^{c} = C_{\gamma}^{c_{\mu}c_{\nu_{3}}} C_{\beta}^{c_{\mu_{3}}c_{\nu}} C_{\alpha}^{c_{\mu_{3}\nu_{3}}} \delta_{c_{\mu}c_{\nu}}$$
(3.43)

Para o setor de spin-espaço as equações são um pouco mais complicas, uma vez que envolvem o cálculo de um elemento de matriz do potencial dependente dos setores de spin e espaço. A forma explícita das contribuições dos fatores de spin-espaço são

$$\mathcal{I}_{(1)}^{s-e} = -\gamma \,\,\delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \Phi_{\gamma}^{*\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{p}_{\nu}} \Phi_{\beta}^{*\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{p}_{\nu_{3}}} \,V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(1)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \,\Phi_{\alpha}^{\boldsymbol{p}_{\mu_{3}}\boldsymbol{p}_{\nu_{3}}} \tag{3.44}$$

$$\mathcal{I}_{(2)}^{s-e} = -\gamma \,\,\delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \Phi_{\gamma}^{*\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{p}_{\nu_{3}}} \Phi_{\beta}^{*\boldsymbol{p}_{\mu_{3}}\boldsymbol{p}_{\nu}} \,\,V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(2)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \,\Phi_{\alpha}^{\boldsymbol{p}_{\mu_{3}}\boldsymbol{p}_{\nu_{3}}} \tag{3.45}$$

A partir de agora, nós denominaremos o potencial $V_{s_{\mu}s_{\nu}}$, que aparece nas Eqs.(3.45) e (3.44), de potencial spin-espaço. Sua forma explícita foi definida previamente na Eq.(3.17). Devemos notar, no entanto, que devido ao fato desse potencial depender dos mesmos índices de spin que aparecem nos fatores de spin-sabor, temos que a forma como separamos este potencial daqueles fatores \mathcal{I}^{s-f} é meramente esquemática. Sendo assim, no cálculo explícito desses fatores devemos ter apenas o cuidado de lembrar que os índices de spin (s_{μ}, s_{ν}) que aparecem neste potencial são os mesmos que aparecem nos fatores de spin-sabor.

O cálculo da amplitude bariônica segue um procedimento similar ao caso mesônico. Vamos agora, definir o estado de um bárion na notação de segunda quantização em termos de um operador de criação $\hat{B}^{\dagger}_{\alpha}$, ou seja

$$|\alpha\rangle = \hat{B}^{\dagger}_{\alpha}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Psi^{\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}}_{a} \hat{q}^{\dagger}_{\mu_{1}} \hat{q}^{\dagger}_{\mu_{2}} \hat{q}^{\dagger}_{\mu_{3}}|0\rangle$$
(3.46)

onde $\Psi_{\alpha}^{*\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}}$ é a função de
onda de um bárion que é normalizada da seguinte forma

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Psi_{\alpha}^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\beta}^{\mu_1\mu_2\mu_3} = \delta_{\alpha\beta} \tag{3.47}$$

Os índices $a \in \mu_1, \mu_2, \mu_3$ estão denotando os números quânticos dos bárions e dos quarks, respectivamente. A função de onda total de um bárion em termos de graus de liberdade de quarks é

$$\Psi_{\alpha}^{\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}} = C_{\alpha}^{c_{1}c_{2}c_{3}} \chi_{\alpha}^{\xi_{1}\xi_{2}\xi_{3}} \Psi_{P}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{2}, \boldsymbol{p}_{3})$$
(3.48)

onde a parte espacial será definida a partir da seguinte combinação linear

$$\Psi_{P}(p_{1}, p_{2}, p_{3}) = \sum_{m=1}^{N} d_{m} \Psi_{P}^{(m)}(p_{1}, p_{2}, p_{3})$$
(3.49)

Nós estaremos usando para a função de onda relativa o seguinte Ansätze Gaussiano

$$\Psi_{\boldsymbol{P}}^{(m)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \delta(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3) \psi^{(m)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$$
(3.50)

com

$$\psi^{(m)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \left[\frac{3}{\alpha_m^{(N)^4}}\right]^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{1}{2\alpha_m^{(N)}} \left[\frac{\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2}{\sqrt{2}}\right]^2} e^{-\frac{w_r^2}{2\alpha_m^{(N)}} \left[\frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - 2r_m \boldsymbol{p}_3}{\sqrt{6}}\right]^2}$$
(3.51)

onde os parâmetros usados na definição da função de onda espacial relativa dos bárions são o parâmetro de escala do oscilador $\alpha_m^{(N)} = m \alpha_N^2$ e a razão das massas dos quarks $m_1 \in m_3$

$$w_r = \frac{3}{1+2r_m}, \quad r_m = \frac{m_1}{m_3}$$
 (3.52)

onde α e d_n serão determinados por meio do método variacional. Aqui, $\chi^{\xi_1\xi_2\xi_3}_{\alpha}$ é um coeficientes de Clebsch-Gordan correspondendo ao estado de spin-sabor do bárion α , já o coeficiente de Clebsch-Gordan correspondendo ao estado de cor do bárion é dado por $C^{c_1c_2c_3}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3!}} \epsilon^{c_1c_2c_3}$.

Vamos considerar agora um processo de transição em que no estado inicial tenhamos um bárion (A_{α}) decaindo para um estado final formado por um bárion (B_{β}) e um méson (C_{γ}) . Isso significa definirmos os estados inicial e final como

$$|i\rangle = \hat{B}^{\dagger}_{\alpha}|0\rangle \tag{3.53}$$

$$|f\rangle = \hat{B}^{\dagger}_{\beta}\hat{M}^{\dagger}_{\gamma}|0\rangle \qquad (3.54)$$

Das quantidades definidas acima podemos obter o seguinte elemento de matriz

$$\langle f|\hat{H}_{I}|i\rangle = \langle 0|\hat{M}_{\gamma}\hat{B}_{\beta}\hat{H}_{I}B^{\dagger}_{\alpha}|0\rangle \tag{3.55}$$

$$= \frac{1}{3!} \Phi_{\gamma}^{*\mu_{1}\nu_{1}} \Psi_{\beta}^{*\rho_{1}\rho_{2}\rho_{3}} V_{\mu\nu} \Psi_{\alpha}^{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}} \langle 0|\hat{\bar{q}}_{\nu_{1}}\hat{q}_{\mu_{1}}\hat{q}_{\rho_{3}}\hat{q}_{\rho_{2}}\hat{q}_{\rho_{1}}\hat{q}_{\mu}^{\dagger}\hat{q}_{\nu}^{\dagger}\hat{q}_{\sigma_{1}}^{\dagger}\hat{q}_{\sigma_{2}}^{\dagger}\hat{q}_{\sigma_{3}}^{\dagger}|0\rangle \quad (3.56)$$

Depois de um tedioso processo de contrações entre os operadores de criação e aniquilação de quarks e antiquarks, obteremos as contribuições das amplitudes elementares para o elemento de matriz bariônico. Em geral, esse elemento de matriz é composto pelos seguintes termos

$$\langle 0|\hat{M}_{\gamma} \ \hat{B}_{\beta} \ \hat{H}_{I} \ \hat{B}_{\alpha}^{\dagger} \ |0\rangle = - \Phi_{\gamma}^{*\sigma_{3}\nu} \Psi_{\beta}^{*\sigma_{1}\sigma_{2}\mu} \ V_{\mu\nu} \ \Psi_{\alpha}^{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}} - \Phi_{\gamma}^{*\sigma_{2}\nu} \ \Psi_{\beta}^{*\sigma_{1}\mu\sigma_{3}} \ V_{\mu\nu} \ \Psi_{\alpha}^{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}} - \Phi_{\gamma}^{*\sigma_{1}\nu} \ \Psi_{\beta}^{*\mu\sigma_{2}\sigma_{3}} \ V_{\mu\nu} \ \Psi_{\alpha}^{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}} + \Phi_{\gamma}^{*\mu\nu} \ \Psi_{\beta}^{*\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}} \ V_{\mu\nu} \ \Psi_{\alpha}^{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}} - \Phi_{\gamma}^{*\mu\nu} \ \Psi_{\beta}^{*\sigma_{1}\sigma_{3}\sigma_{2}} \ V_{\mu\nu} \ \Psi_{\alpha}^{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}}$$
(3.57)

No entanto, os únicos termos que representam processos do tipo OZI-permitidos são

$$\langle 0|\hat{M}_{\gamma} \ \hat{B}_{\beta} \ \hat{H}_{I} \ \hat{B}_{\alpha}^{\dagger} \ |0\rangle = - \Phi_{\gamma}^{*\sigma_{3}\nu} \Psi_{\beta}^{*\sigma_{1}\sigma_{2}\mu} \ V_{\mu\nu} \ \Psi_{\alpha}^{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}} - \Phi_{\gamma}^{*\sigma_{2}\nu} \ \Psi_{\beta}^{*\sigma_{1}\mu\sigma_{3}} \ V_{\mu\nu} \ \Psi_{\alpha}^{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}} - \Phi_{\gamma}^{*\sigma_{1}\nu} \ \Psi_{\beta}^{*\mu\sigma_{2}\sigma_{3}} \ V_{\mu\nu} \ \Psi_{\alpha}^{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}}$$
(3.58)

Em analogia ao caso mesônico iremos introduzir definições para cada uma das três amplitudes elementares que compõem o elemento de matriz do Hamiltoniano de transição

$$h_{(1)} \equiv \Phi_{\gamma}^{*\sigma_{1}\nu} \Psi_{\beta}^{*\mu\sigma_{2}\sigma_{3}} V_{\mu\nu} \Psi_{\alpha}^{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}}$$

$$h_{(2)} \equiv \Phi_{\gamma}^{*\sigma_{2}\nu} \Psi_{\beta}^{*\sigma_{1}\mu\sigma_{3}} V_{\mu\nu} \Psi_{\alpha}^{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}}$$

$$h_{(3)} \equiv \Phi_{\gamma}^{*\sigma_{3}\nu} \Psi_{\beta}^{*\sigma_{1}\sigma_{2}\mu} V_{\mu\nu} \Psi_{\alpha}^{\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3}}$$

$$(3.59)$$

Dessa forma é possível escrever o elemento de matriz bariônico como

$$\langle 0|\hat{M}_{\gamma} \ \hat{B}_{\beta} \ \hat{H}_{I} \ \hat{B}_{\alpha}^{\dagger} \ |0\rangle \equiv h_{fi}^{(B)} = -h_{(1)} - h_{(2)} - h_{(3)}$$
(3.60)

As contribuições $h_{(1)}$, $h_{(2)} \in h_{(3)}$ são dadas por

$$h_{(1)} = \mathcal{I}_{(1)}^{s-f} \ \mathcal{I}_{(1)}^c \ \mathcal{I}_{(1)}^{s-e} \tag{3.61}$$

$$h_{(2)} = \mathcal{I}_{(2)}^{s-f} \, \mathcal{I}_{(2)}^c \, \mathcal{I}_{(2)}^{s-e} \tag{3.62}$$

$$h_{(3)} = \mathcal{I}_{(3)}^{s-f} \, \mathcal{I}_{(3)}^c \, \mathcal{I}_{(3)}^{s-e} \tag{3.63}$$

com \mathcal{I}^f , \mathcal{I}^c e \mathcal{I}^{s-e} designando os fatores de sabor, cor e spin-espaço. As formas explícitas dos fatores de spin-sabor e cor em termos de coeficientes de Clebsch-Gordon são

$$\mathcal{I}_{(1)}^{s-f} = \chi_{\gamma}^{*\xi_{1}\xi_{\nu}}\chi_{\beta}^{*\xi_{\mu}\xi_{2}\xi_{3}}\chi_{\alpha}^{\xi_{1}\xi_{2}\xi_{3}}\delta_{f_{\mu}f_{\nu}}$$
(3.64)

$$\mathcal{I}_{(1)}^{c} = C_{\gamma}^{c_{1}c_{\nu}}C_{\beta}^{c_{\mu}c_{2}c_{3}}C_{\alpha}^{c_{1}c_{2}c_{3}}\delta_{c_{\mu}c_{\nu}}$$
(3.65)

$$\mathcal{I}_{(2)}^{s-f} = \chi_{\gamma}^{*\xi_{2}\xi_{\nu}}\chi_{\beta}^{*\xi_{1}\xi_{\mu}\xi_{3}}\chi_{\alpha}^{\xi_{1}\xi_{2}\xi_{3}}\delta_{f_{\mu}f_{\nu}}$$
(3.66)

$$\mathcal{I}_{(2)}^{c} = C_{\gamma}^{c_{2}c_{\nu}} C_{\beta}^{c_{1}c_{\mu}c_{3}} C_{\alpha}^{c_{1}c_{2}c_{3}} \delta_{c_{\mu}c_{\nu}}$$
(3.67)

$$\mathcal{I}_{(3)}^{s-f} = \chi_{\gamma}^{*\xi_{3}\xi_{\nu}} \chi_{\beta}^{*\xi_{1}\xi_{2}\xi_{\mu}} \chi_{\alpha}^{\xi_{1}\xi_{2}\xi_{3}} \delta_{f_{\mu}f_{\nu}}$$
(3.68)

$$\mathcal{I}_{(3)}^{c} = C_{\gamma}^{c_{3}c_{\nu}} C_{\beta}^{c_{1}c_{2}c_{\mu}} C_{\alpha}^{c_{1}c_{2}c_{3}} \delta_{c_{\mu}c_{\nu}}$$
(3.69)

Para os fatores de spin-espaço, temos

$$\mathcal{I}_{(1)}^{s-e} = -\gamma \,\,\delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \Phi_{\gamma}^{*\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{p}_{\nu}} \Psi_{\beta}^{*\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{p}_{3}} \,V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(1)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \,\Psi_{\alpha}^{\boldsymbol{p}_{1}\boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{p}_{3}} \tag{3.70}$$

$$\mathcal{I}_{(2)}^{s-e} = -\gamma \,\,\delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu})\Phi_{\gamma}^{*\boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{p}_{\nu}}\Psi_{\beta}^{*\boldsymbol{p}_{1}\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{p}_{3}}\,V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(2)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu})\,\Psi_{\alpha}^{\boldsymbol{p}_{1}\boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{p}_{3}} \tag{3.71}$$

$$\mathcal{I}_{(3)}^{s-e} = -\gamma \,\,\delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \Phi_{\gamma}^{*\boldsymbol{p}_{3}\boldsymbol{p}_{\nu}} \Psi_{\beta}^{*\boldsymbol{p}_{1}\boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{p}_{\mu}} \,V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(3)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \,\Psi_{\alpha}^{\boldsymbol{p}_{1}\boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{p}_{3}} \tag{3.72}$$

Devemos notar, novamente, que devido ao fato de no caso envolvendo bárions a dependência entre os fatores de spin-sabor ser mais complicada, a forma como separamos os potenciais $V^{(i)}$, i = 1, 3 (ver Eq.(3.17)) das equações para os fatores \mathcal{I}^{s-f} é meramente esquemática, pois os índices de spin (s_{μ}, s_{ν}) que aparecem neste potencial são os mesmos que aparecem nos fatores de spin-sabor.

Até agora, nós desenvolvemos um formalismo suficientemente geral para calcular o elemento de matriz do Hamiltoniano de transição para processos envolvendo mésons e bárions. O ponto central nesse formalismo foi mostrar que sempre é possível expressar esse elemento de matriz em termos de amplitudes de decaimento elementares. E mais, que essas amplitudes elementares podem ser decompostas em fatores associados aos setores de cor, spin, sabor e espaço das funções de onda dos hádrons envolvidos na reação. O próximo passo em nosso esquema seria a especialização dos processos de decaimento de interesse e o cálculo explícito desses fatores. Uma vez feito isso, nós teríamos determinado completamente nosso primeiro objetivo que é a obtenção das amplitudes de decaimento totais tal como aparece na Eq.(3.19). No entanto antes de realizarmos isso, vamos analisar com um pouco mais de detalhe os aspectos gerais de cada um desses fatores. No modelo de decaimento ${}^{3}P_{0}$ o fator de cor dá uma contribuição global de $1/\sqrt{3}$ que pode ser incluída na definição do parâmetro γ .

O fator relacionado a spin e sabor envolve essencialmente coeficientes de Clebsch-Gordon que expressam as regras de conservação de sabor e momento angular nos processos de decaimento. Em muitos casos onde o conteúdo de quarks dos mésons e bárions envolvem diferentes sabores somente uma das amplitudes que compõe o elemento de matriz do Hamiltoniano de transição é diferente de zero. No entanto, para o caso limite onde os sabores de todos os quarks envolvidos são iguais, todas as amplitudes contribuem para esse elemento de matriz.

O fator associado ao setor de spin e espaço tem uma estrutura um pouco mais complicada. Na superposição de funções de onda espaciais existem 12 integrais envolvendo 12 deltas a serem realizadas. Felizmente, devido à presença de funções delta, 9 dessas integrações podem ser realizadas de maneira imediata sem a especificação explícita das funções de onda espaciais relativas envolvidas. Ao final desse procedimento restará ainda uma integral overlap, só que agora tridimensional, multiplicada por uma função delta global. Mas se lembrarmos da definição de amplitude de decaimento, Eq.(3.19), vemos que esta função delta global pode ser removida facilmente. Assim ficaremos com uma última integral tridimensional para resolver. Para que isso seja possível será necessário especificarmos a função de onda espacial relativa. O procedimento padrão na literatura [78] é usar para esse setor uma função Gaussiana devidamente normalizada e com parâmetro de comprimento como input. O que é razoável, uma vez que sabemos que as soluções da equação de Schroedinger para um potencial do tipo oscilador harmônico (OH) são justamente Gaussianas. E além disso, é um fato conhecido no modelo não-relativístico de quarks que funções de onda do tipo oscilador harmônico (OH) são boas aproximações para descrever a porção radial da função de onda de mésons e bárions no estado fundamental.

Nesta tese, no entanto, seguimos um trajeto um pouco diferente que consiste em usarmos para a parte radial, funções de onda determinadas pela diagonalização exata do Hamiltoniano do modelo de quarks em uma base de funções de OH. A motivação para implementarmos um tal esquema está, em primeiro, lugar na expectativa de que a qualidade das funções de onda obtidas sejam melhores que com uma única Gaussiana. E em segundo, acreditamos que esse é um procedimento um pouco mais sistemático e menos arbitrário para se obter funções de onda. Felizmente, a sistemática de obtenção de funções de onda via método variacional já foi feita na Seção.2.3.2 de tal modo que podemos computar diretamente as amplitudes do modelo ³P₀ para os processos mesônicos e bariônicos.

3.4 Amplitudes Mesônicas do Modelo ${}^{3}P_{0}$

Nosso próximo passo será usar as funções de onda para mésons para calcular amplitudes de decaimento forte. Estaremos neste estudo interessados nos vértices que envolvem os seguintes mésons: $\pi \pi \rho$, $KK\rho$, $\bar{D}\bar{D}\rho$. Para os vértices envolvendo $KK\omega$, $\bar{D}\bar{D}\omega$ nós não repetiremos os cálculos pois eles são idênticos aqueles envolvendo os mésons ρ . Uma vez tenhamos determinados essas amplitudes nós poderemos então avaliar efeitos da quebra da simetria de sabor SU(4). Neste estudo, por critérios de simplicidade, nós iremos calcular todos os processos no sistema de repouso da partícula inicial, que esquematicamente significa

$$\alpha \left(\vec{\mathbf{P}} = 0 \right) \to \beta \left(-\vec{\mathbf{P}} \right) + \gamma \left(\vec{\mathbf{P}} \right) \tag{3.73}$$

onde estamos representando os mésons no estado inicial e final de acordo com a seguinte convenção α , $\beta \in \gamma$, respectivamente.

3.4.1 Amplitude $\pi\pi\rho$

Como primeira aplicação nós iremos considerar a amplitude de decaimento envolvendo $\pi\pi\rho$. Para isso, nós iniciaremos especializando o seguinte processo de transição $\pi^+ \to \rho^0(+\hat{z}) + \pi^+$ e, além disso, escolheremos a polarização do méson ρ na direção $(+\hat{z})$. Uma vez que na Tabela 3.1, nós apresentamos os fatores de spin-sabor e de cor, resta apenas fixarmos os fatores relativos ao setor de spin-espaço. Para ob-

Processos Específicos	$\mathcal{I}^{s-f}_{(1)}$	$\mathcal{I}^{s-f}_{(2)}$	\mathcal{I}^{c}
$\pi^+ \to \rho^0 + \pi^+$	-1/2	1/2	$1/\sqrt{3}$
$K^+ \to \rho^0 + K^+$	0	1/2	$1/\sqrt{3}$
$\bar{D}^0 \to \rho^0 + \bar{D}^0$	0	1/2	$1/\sqrt{3}$

Tabela 3.1: Fatores de sabor e cor para os processos de decaimento mesônico que estaremos interessados.

termos os resultados para processos envolvendo o méson ω , basta substituirmos na Tabela 3.1 $\rho^0 \rightarrow \omega^0$. De acordo com a discussão feita sobre as amplitudes de decaimento mesônica, as contribuições provindas do setor de spin-espaço para o processo em questão são duas

$$\mathcal{I}_{(1)}^{s-e} = -\gamma \,\delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \,\Phi_{\gamma}^{*\boldsymbol{p}_{\mu_{3}}\boldsymbol{p}_{\nu}} \,\Phi_{\beta}^{*\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{p}_{\nu_{3}}} \,V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(1)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \,\Phi_{\alpha}^{\boldsymbol{p}_{\mu_{3}}\boldsymbol{p}_{\nu_{3}}} \tag{3.74}$$

$$\mathcal{I}_{(2)}^{s-e} = -\gamma \,\delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \,\Phi_{\gamma}^{*\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{p}_{\nu_{3}}} \,\Phi_{\beta}^{*\boldsymbol{p}_{\mu_{3}}\boldsymbol{p}_{\nu}} \,V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(2)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \,\Phi_{\alpha}^{\boldsymbol{p}_{\mu_{3}}\boldsymbol{p}_{\nu_{3}}} \tag{3.75}$$

Se introduzirmos nas equações acima a definição para a função de onda espacial de mésons dada nas Eqs.(3.25) e (3.26), teremos

$$\mathcal{I}_{(1)}^{s-e} = -\gamma \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{N} \sum_{n_3=1}^{N} a_{n_1}^{(N)} a_{n_2}^{(N)*} a_{n_3}^{(N)*} \int d^3 p_{\mu} d^3 p_{\nu} d^3 p_{\mu_3} d^3 p_{\nu_3} \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \\ \times \delta(\boldsymbol{P}_{\gamma} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\nu_3}) \phi_{\gamma}^{(n_3)*}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu_3}) \delta(\boldsymbol{P}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{\nu} - \boldsymbol{p}_{\mu_3}) \phi_{\beta}^{(n_2)*}(\boldsymbol{p}_{\mu_3}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \\ \times V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(1)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \delta(\boldsymbol{P}_{\alpha} - \boldsymbol{p}_{\mu_3} - \boldsymbol{p}_{\nu_3}) \phi_{\alpha}^{(n_1)}(\boldsymbol{p}_{\mu_3}, \boldsymbol{p}_{\nu_3})$$
(3.76)

$$\mathcal{I}_{(2)}^{s-e} = -\gamma \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{N} \sum_{n_3=1}^{N} a_{n_1}^{(N)} a_{n_2}^{(N)*} a_{n_3}^{(N)*} \int d^3 p_{\mu} d^3 p_{\nu} d^3 p_{\mu_3} d^3 p_{\nu_3} \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \\ \times \delta(\boldsymbol{P}_{\gamma} - \boldsymbol{p}_{\mu_3} - \boldsymbol{p}_{\nu}) \phi_{\gamma}^{(n_3)*}(\boldsymbol{p}_{\mu_3}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \delta(\boldsymbol{P}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\nu_3}) \phi_{\beta}^{(n_2)*}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu_3}) \\ \times V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(2)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \delta(\boldsymbol{P}_{\alpha} - \boldsymbol{p}_{\mu_3} - \boldsymbol{p}_{\nu_3}) \phi_{\alpha}^{(n_1)}(\boldsymbol{p}_{\mu_3}, \boldsymbol{p}_{\nu_3})$$
(3.77)

Agora, podemos antes de substituir explicitamente as funções de onda relativa nos fatores acima, realizar parcialmente as integrações nas variáveis de momentum com ajuda das deltas de conservação. Esse procedimento simplificará enormemente a forma de nossas expressões, e o resultado serão as seguintes contribuições

$$\mathcal{I}_{(1)}^{s-e} = -\gamma \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{N} \sum_{n_3=1}^{N} a_{n_1}^{(N)} a_{n_2}^{(N)*} a_{n_3}^{(N)*} \int d^3 p_\mu \, \phi_{\gamma}^{(n_3)*}(\boldsymbol{p}_\mu, \boldsymbol{P}_\beta - \boldsymbol{p}_\mu) \\ \times \phi_{\beta}^{(n_2)*}(-\boldsymbol{P}_\beta + \boldsymbol{p}_\mu, -\boldsymbol{p}_\mu) \, V_{s_\mu s_\nu}^{(1)}(\boldsymbol{p}_\mu, -\boldsymbol{p}_\mu) \, \phi_{\alpha}^{(n_1)}(-\boldsymbol{P}_\beta + \boldsymbol{p}_\mu, \boldsymbol{P}_\beta - \boldsymbol{p}_\mu) \, (3.78)$$

$$\mathcal{I}_{(2)}^{s-e} = -\gamma \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{N} \sum_{n_3=1}^{N} a_{n_1}^{(N)} a_{n_2}^{(N)*} a_{n_3}^{(N)*} \int d^3 p_{\mu} \phi_{\gamma}^{(n_3)*}(\boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{P}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{\mu}) \\ \times \phi_{\beta}^{(n_2)*}(\boldsymbol{P}_{\beta} + \boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{p}_{\mu}) V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(2)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{p}_{\mu}) \phi_{\alpha}^{(n_1)}(\boldsymbol{P}_{\beta} + \boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{P}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{\mu})$$
(3.79)

Dois ingredientes básicos são necessários ainda para especificar os processos de interesse, o primeiro são as funções de ondas espaciais para os mésons e os potenciais de spin-espaço que aparecem nesses fatores. Para o caso envolvendo $\pi\pi\rho$, os dois potenciais em questão são dados pelas seguintes expressões

$$V_{11}^{(1)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{p}_{\mu}) = V_{11}^{(2)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{p}_{\mu}) = 2\left(P_{x} - iP_{y}\right)$$
(3.80)

onde $s_{\mu} = 1 \equiv +1/2$ e $s_{\nu} = 1 \equiv +1/2$. Devemos lembrar que essas projeções que aparecem no potencial spin-espaço são devidas aos fatores de spin-sabor. No

Apêndice D apresentamos o cálculo explícito desse potencial para diversas projeções de spin. Se substituirmos nas Eqs.(3.78) e (3.79) as definições da função de onda relativa dada na Eqs.(3.27) junto com a Eq.(3.80), teremos como resultado para as duas amplitudes espaciais o seguinte

$$\mathcal{I}_{(1)}^{s-e} = \mathcal{I}_{(2)}^{s-e} \tag{3.81}$$

$$= -\gamma \frac{4\pi^2}{3^{\frac{1}{2}}} \sum_{n_1=1}^N \sum_{n_2=1}^N \sum_{n_3=1}^N a_{n_1}^{(N)} a_{n_2}^{(N)} a_{n_3}^{(N)} \frac{[2r^{(N)} + \varrho^{(N)} + 1]}{[r^{(N)} + \varrho^{(N)} + 1]^{\frac{5}{2}}} \frac{PY_{11}(\Omega)}{\beta_{n_1}^{(N)^{\frac{3}{2}}} \beta_{n_3}^{(N)^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{\Lambda_{\pi\pi\rho}^{(N)}}{8\beta_{n_1}^{(N)}} P^2}$$
(3.82)

onde as razões entre os parâmetros de oscilador $r^{(N)}$
e $\varrho^{(N)}$ são

$$r^{(N)} = \frac{\beta_{n_2}^{(N)}}{\beta_{n_1}^{(N)}} \quad \varrho^{(N)} = \frac{\beta_{n_2}^{(N)}}{\beta_{n_3}^{(N)}} \tag{3.83}$$

com $\beta_{n_1}^{(N)} = n_1 \beta_N^2$, $\beta_{n_2}^{(N)} = n_2 \beta_N^2$, $\beta_{n_3}^{(N)} = n_3 \beta_N^2$ e além disso

$$\Lambda_{\pi\pi\rho}^{(N)} = \frac{\varrho^{(N)} + 1}{[r^{(N)} + \varrho^{(N)} + 1]}$$
(3.84)

É importante salientar que usamos uma notação esquemática para $\rho^{(N)}$ e $r^{(N)}$ querendo deixar claro com isso, que existem somas a serem realizadas sobre essas quantidades. Se multiplicarmos os fatores de sabor e cor, dados na Tabela 3.1, nas amplitudes de espaço-spin apresentadas na Eq.(3.82), nós obteremos o seguinte resultado para a amplitude de decaimento

$$h_{\pi\pi\rho} = -h_{(1)} - h_{(2)} \tag{3.85}$$

$$= -\gamma \frac{2^{\frac{5}{2}\pi^{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} \sum_{n_{1}=1}^{N} \sum_{n_{2}=1}^{N} \sum_{n_{3}=1}^{N} a_{n_{1}}^{(N)} a_{n_{2}}^{(N)} a_{n_{3}}^{(N)} \frac{[2r^{(N)} + \varrho^{(N)} + 1]}{[r^{(N)} + \varrho^{(N)} + 1]^{\frac{5}{2}}} \frac{PY_{11}(\Omega)}{\beta_{n_{1}}^{(N)\frac{3}{2}} \beta_{n_{3}}^{(N)\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\Lambda_{n_{p}}^{(N)}}{8\beta_{n_{1}}^{(N)}}P^{2}}$$
(3.86)

onde redefinimos γ para absorver o fator de cor da seguinte maneira $\gamma = \frac{g}{2m_q\sqrt{3}}$, e essa será a definição que usaremos no restante dessa tese. A abordagem usada no cálculo feito para o decaimento $\pi\pi\rho$, como já foi mencionado, pode ser facilmente estendido para situações envolvendo outras partículas. Para não tornar fastidioso para o leitor, no que segue, iremos apenas apresentar os resultados para as amplitudes de decaimento, estando implícito o fato de que estamos aplicando o mesmo procedimento de cálculo descrito nesta subseção.

3.4.2 Amplitudes $\overline{D}\overline{D}\rho \in \overline{D}\overline{D}\omega$

Para o caso da amplitude envolvendo mésons charmosos, nós especializamos a seguinte transição $\bar{D}^0 \rightarrow \rho^0(+\hat{z}) + \bar{D}^0$. Dessa maneira, se substituirmos a função de onda relativa de mésons definida na Eq.(3.79) e logo a seguir multiplicarmos essas amplitudes pelos fatores de sabor e cor dados na Tabela 3.1, nós obteremos o seguinte resultado

$$h_{\bar{D}\bar{D}\rho} = -\gamma \frac{2^{\frac{3}{2}} \pi^2}{3^{\frac{1}{2}}} \sum_{n_1=1}^N \sum_{n_2=1}^N \sum_{n_3=1}^N a_{n_1}^{(N)} a_{n_2}^{(N)*} a_{n_3}^{(N)*} \frac{2r^{(N)} + 2m_0 \varrho^{(N)} + 1}{\left[r^{(N)} + \varrho^{(N)} + 1\right]^{\frac{5}{2}}} \frac{P}{\beta_{n_1}^{(N)\frac{3}{2}}} \frac{Y_{11}(\Omega)}{\beta_{n_3}^{(N)\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\Lambda_{\bar{D}\bar{D}\rho}^{(N)}}{8\beta_{n_1}^{(N)}}} P^2$$
(3.87)

onde onde as razões entre os parâmetros de oscilador $r^{(N)}$, $\varrho^{(N)}$ e $w^{(N)}$ são

$$r^{(N)} = \frac{\beta_{n_2}^{(N)}}{\beta_{n_1}^{(N)}}, \quad \varrho^{(N)} = \frac{\beta_{n_2}^{(N)}}{\beta_{n_3}^{(N)}}, \quad w^{(N)} = \frac{\beta_{n_1}^{(N)}}{\beta_{n_3}^{(N)}}$$
(3.88)

com $\beta_{n_1}^{(N)} = n_1 \beta_N^2$, $\beta_{n_2}^{(N)} = n_2 \beta_N^2$, $\beta_{n_3}^{(N)} = n_3 \beta_N^2$ e além disso

$$\Lambda_{\bar{D}\bar{D}\rho}^{(N)} = \frac{4 m_2^2 \varrho^{(N)} + m_1^2 w^{(N)} + 1}{[r^{(N)} + \varrho^{(N)} + 1]}$$
(3.89)

Aqui $\beta_{n_1}^{(N)}$ é o parâmetro de comprimento de oscilador do méson charmoso inicial $\overline{D} \in \beta_{n_2}^{(N)}$ junto com $\beta_{n_3}^{(N)}$ são os parâmetros de oscilador dos mésons no estado final $\rho \in \overline{D}$, respectivamente. Um aspecto adicional que não foi observado na amplitude de decaimento para o caso $\pi \pi \rho$ são fatores que envolvem razões entre as massas dos quarks leves (l) e pesados (h). Estes fatores são dados pelas seguintes expressões

$$m_{0} = \frac{r_{m}}{1+r_{m}}, \quad m_{1} = 1 - \frac{2}{1+r_{m}}$$

$$m_{2} = \frac{1}{1+r_{m}}, \quad r_{m} = \frac{m_{l}}{m_{h}}$$
(3.90)

Os resultados para amplitude envolvendo o méson ω são os mesmos que os do méson $\rho.$

3.4.3 Amplitudes $KK\rho \in KK\omega$

Amplitudes de decaimento envolvendo mésons estranhos possuem a mesma estrutura das amplitudes para o caso de mésons charmosos, e pode ser obtidas diretamente daquelas. Será necessário especializar o seguinte subprocesso $K^+ \to \rho^0(+\hat{z}) + K^+$ e fazer a seguintes modificações $\beta_{\bar{D}} \to \beta_K$ e $m_c \to m_s$. Novamente, os resultados para a amplitude envolvendo o méson ω são os mesmos que os do méson ρ .
3.5 Amplitudes Bariônicas do Modelo ³P₀

Os processos de interesse que analisaremos envolvem tanto mésons como bárions. Esquematicamente estaremos especificando amplitudes de decaimento do tipo

$$\alpha \left(\vec{\mathbf{P}} = 0 \right) \to \beta \left(-\vec{\mathbf{P}} \right) + \gamma \left(\vec{\mathbf{P}} \right)$$
(3.91)

onde agora os símbolos α e β estão designando os bárions e γ o méson.

Processos Específicos	$\mathcal{I}^{s-f}_{(1)}$	$\mathcal{I}^{s-f}_{(2)}$	$\mathcal{I}^{s-f}_{(3)}$	\mathcal{I}^c
$p(+1/2) \to p(+1/2) + \pi^0$	5/18	5/18	5/18	$1/\sqrt{3}$
$p(+1/2) \to \Sigma_s^0(+1/2) + K^+$	0	0	1/18	$1/\sqrt{3}$
$p(+1/2) \to \Lambda_s^0(+1/2) + K^+$	0	0	$1/2\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$p(+1/2) \to \Sigma_c^+(+1/2) + \bar{D}^0$	0	0	1/18	$1/\sqrt{3}$
$p(+1/2) \to \Lambda_c^+(+1/2) + \bar{D}^0$	0	0	$1/2\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$

Tabela 3.2: Fatores de spin-sabor e cor para processos bariônicos.

3.5.1 Amplitude $NN\pi$

Em completa analogia com o caso mesônico, nossa primeira aplicação será considerar a amplitude de decaimento para o processo envolvendo $NN\pi$.

Nós iniciaremos com o processo de transição $p(+1/2) \rightarrow p(+1/2) + \pi^0$. De acordo com a discussão feita sobre as amplitudes de decaimento bariônicas, as contribuições provindas do setor de spin-espaço para o processo em questão são três

$$\mathcal{I}_{(1)}^{s-e} = -\gamma \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \Phi_{\gamma}^{*\boldsymbol{p}_{1}\boldsymbol{p}_{\nu}} \Psi_{\beta}^{*\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{p}_{3}} V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(1)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \Psi_{\alpha}^{\boldsymbol{p}_{1}\boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{p}_{3}}$$
(3.92)

$$\mathcal{I}_{(2)}^{s-e} = -\gamma \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \Phi_{\gamma}^{*\boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{p}_{\nu}} \Psi_{\beta}^{*\boldsymbol{p}_{1}\boldsymbol{p}_{\mu}\boldsymbol{p}_{3}} V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(2)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \Psi_{\alpha}^{\boldsymbol{p}_{1}\boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{p}_{3}}$$
(3.93)

$$\mathcal{I}_{(3)}^{s-e} = -\gamma \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \Phi_{\gamma}^{*\boldsymbol{p}_{3}\boldsymbol{p}_{\nu}} \Psi_{\beta}^{*\boldsymbol{p}_{1}\boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{p}_{\mu}} V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(3)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \Psi_{\alpha}^{\boldsymbol{p}_{1}\boldsymbol{p}_{2}\boldsymbol{p}_{3}}$$
(3.94)

Se substituirmos nas equações acima as definições para a função de onda espacial de mésons e bárions dadas nas Eqs.(3.26) e (3.50), teremos

$$\mathcal{I}_{(1)}^{s-e} = -\gamma \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{N} \sum_{n_3=1}^{N} d_{m_1}^{(N)} d_{m_2}^{(N)*} a_{n_3}^{(N)*} \int d^3 p_{\mu} d^3 p_{\nu} d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \\ \times \quad \delta(\boldsymbol{P}_{\gamma} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_{\nu}) \delta(\boldsymbol{P}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3) \delta(\boldsymbol{P}_{\alpha} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3) \phi_{\gamma}^{(n_3)*}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_{\nu}) \\ \times \quad \psi_{\beta}^{(m_2)*}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(1)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{p}_{\mu}) \psi_{\alpha}^{(m_1)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$$
(3.95)

$$\mathcal{I}_{(2)}^{s-e} = -\gamma \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{N} \sum_{n_3=1}^{N} d_{m_1}^{(N)} d_{m_2}^{(N)*} a_{n_3}^{(N)*} \int d^3 p_{\mu} d^3 p_{\nu} d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \\ \times \quad \delta(\boldsymbol{P}_{\gamma} - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_{\nu}) \delta(\boldsymbol{P}_{\beta} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_3) \delta(\boldsymbol{P}_{\alpha} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3) \phi_{\gamma}^{(n_3)*}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_{\nu}) \\ \times \quad \psi_{\beta}^{(m_2)*}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_3) V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(2)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{p}_{\mu}) \psi_{\alpha}^{(m_1)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$$
(3.96)

$$\mathcal{I}_{(3)}^{s-e} = -\gamma \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{N} \sum_{n_3=1}^{N} d_{m_1}^{(N)} d_{m_2}^{(N)*} a_{n_3}^{(N)*} \int d^3 p_{\mu} d^3 p_{\nu} d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu}) \\ \times \delta(\boldsymbol{P}_{\gamma} - \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_{\nu}) \delta(\boldsymbol{P}_{\beta} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_{\mu}) \delta(\boldsymbol{P}_{\alpha} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3) \phi_{\gamma}^{(n_3)*}(\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_{\nu}) \\ \times \psi_{\beta}^{(m_2)*}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_{\mu}) V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(3)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{p}_{\mu}) \psi_{\alpha}^{(m_1)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$$
(3.97)

Depois de realizarmos parcialmente as integrações com ajuda das deltas de conservação de momentum teremos

$$\mathcal{I}_{(1)}^{s-e} = -\gamma \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{N} \sum_{n_3=1}^{N} d_{m_1}^{(N)} d_{m_2}^{(N)*} a_{n_3}^{(N)*} \int d^3 p_{\mu} d^3 p_3 \phi_{\gamma}^{(n_3)*} (-\boldsymbol{P}_{\beta} + \boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{p}_{\mu}) \\ \times \psi_{\beta}^{(m_2)*} (\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{P}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_3) V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(1)} (\boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{p}_{\mu}) \psi_{\alpha}^{(m_1)} (-\boldsymbol{P}_{\beta} + \boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{P}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_3)$$
(3.98)

$$\mathcal{I}_{(2)}^{s-e} = -\gamma \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{N} \sum_{n_3=1}^{N} d_{m_1}^{(N)} d_{m_2}^{(N)*} a_{n_3}^{(N)*} \int d^3 p_{\mu} d^3 p_3 \phi_{\gamma}^{(n_3)*} (-\boldsymbol{P}_{\beta} + \boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{p}_{\mu}) \\ \times \psi_{\beta}^{(m_2)*} (\boldsymbol{P}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_3) V_{s_{\mu} s_{\nu}}^{(2)} (\boldsymbol{p}_{\mu}, -\boldsymbol{p}_{\mu}) \psi_{\alpha}^{(m_1)} (\boldsymbol{P}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_3, -\boldsymbol{P}_{\beta} + \boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_3)$$
(3.99)

Novamente, até aqui, estamos usando um esquema de cálculo geral que é válido para qualquer processo de decaimento, inclusive aqueles envolvendo mésons estranhos e charmosos. Dois ingredientes são necessários para especificar completamente os processos de interesse, as funções de ondas espaciais para os mésons e bárions e os potenciais de spin-espaço. Para o caso envolvendo $NN\pi$, os três potenciais em questão são definidos por (ver Apêndice D)

$$V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(1)}(\boldsymbol{p}_{\mu},-\boldsymbol{p}_{\mu}) = V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(2)}(\boldsymbol{p}_{\mu},-\boldsymbol{p}_{\mu}) = V_{s_{\mu}s_{\nu}}^{(3)}(\boldsymbol{p}_{\mu},-\boldsymbol{p}_{\mu}) = -2P\cos(\theta)$$
(3.101)

Se substituirmos nas Eqs.(3.98), (3.99) e (3.100) as definições dadas nas Eqs.(3.101) e das funções de onda relativa para bárions dada na Eq.(3.51) e mésons dada na Eq.(3.27), obteremos três contribuições idênticas para os fatores spin-espaço

$$\mathcal{I}_{(1)}^{s-e} = \mathcal{I}_{(2)}^{s-e} = \mathcal{I}_{(3)}^{s-e} \\
= \gamma 2^{4} \sum_{n_{1}=1}^{N} \sum_{n_{2}=1}^{N} \sum_{n_{3}=1}^{N} d_{n_{1}}^{(N)} d_{n_{2}}^{(N)*} d_{n_{3}}^{(N)*} \left[\frac{3\pi}{r^{(N)}+1} \right]^{\frac{3}{2}} \frac{[(r^{(N)}+3)\varrho^{(N)}+1]}{[3(r^{(N)}+1)\varrho^{(N)}+2]^{\frac{5}{2}}} \\
\times \frac{P\cos(\theta)}{\alpha_{n_{1}}^{(N)\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\Lambda_{NN\pi}}{24\alpha_{n_{1}}^{(N)}}P^{2}}$$
(3.102)

onde as razões entre os de comprimento de oscilador $r^{(N)}$ e $\varrho^{(N)}$ são

$$r^{(N)} = \frac{\alpha_{n_1}^{(N)}}{\alpha_{n_2}^{(N)}} \quad \varrho^{(N)} = \frac{\beta_{n_3}^{(N)}}{\alpha_{n_1}^{(N)}} \tag{3.103}$$

com $\alpha_{n_1}^{(N)} = n_1 \alpha_N^2, \, \alpha_{n_2}^{(N)} = n_2 \alpha_N^2, \, \beta_{n_3}^{(N)} = n_3 \beta_N^2$ e além disso

$$\Lambda_{NN\pi}^{(N)} = \frac{r^{(N)} \left(24 \, \varrho^{(N)} + 1\right) + 9}{\left[3 \left(r^{(N)} + 1\right) \, \varrho^{(N)} + 2\right]} \tag{3.104}$$

Está subentendida nessas expressões que usamos uma notação esquemática para $\rho^{(N)}$ e $r^{(N)}$ querendo deixar claro com isso, que existem somas a serem realizadas sobre essas quantidades. Se introduzirmos os fatores de spin-sabor e cor, dados na Tabela 3.2, nas amplitudes de espaço-spin calculadas no item anterior obteremos o seguinte resultado para a amplitude de decaimento

$$h_{NN\pi} = -\gamma 40 \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{N} \sum_{n_3=1}^{N} d_{n_1}^{(N)} d_{n_2}^{(N)*} a_{n_3}^{(N)*} \left[\frac{3^{\frac{1}{3}} \pi^2}{r^{(N)} + 1} \right]^{\frac{3}{2}} \frac{\left(r^{(N)} + 3\right) \varrho^{(N)} + 1}{\left[3 \left(r^{(N)} + 1\right) \varrho^{(N)} + 2\right]^{\frac{5}{2}}} \\ \times \frac{P}{\alpha_{n_2}^{(N)3}} \frac{\cos(\theta)}{\alpha_{n_1}^{(N)\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\Lambda_{NN\pi}}{24\alpha_{n_1}^{(N)}} P^2}$$
(3.105)

A abordagem usada no cálculo feito para o decaimento $NN\pi$, como já foi mencionado, pode ser facilmente estendida outros processos processos de decaimento hadrônico. Afim de evitar uma repetição fastidiosa dos cálculos, no que segue, iremos apresentar apenas os resultados para as amplitudes de decaimento, estando implícito o fato de que estamos aplicando o mesmo procedimento de cálculo descrito nesta seção. Uma outra importante informação que cabe notar, é que o resultado obtido para a amplitude $NN\pi$ é igual aquele obtido na Ref.[79] no limite de N = 1 Gaussiana.

3.5.2 Amplitudes $N\Sigma_c \overline{D} \in N\Lambda_c \overline{D}$

Nesta seção iremos extender o cálculo das amplitudes ${}^{3}P_{0}$ ao setor envolvendo bárions charmosos que designaremos por $B_{c} = \Sigma_{c}^{0}(+1/2)$, $\Lambda_{c}^{0}(+1/2)$, o núcleon que rotularemos N = p(+1/2) e o méson \overline{D} . Novamente, seguiremos o esquema feito na seção anterior e, primeiramente, especificaremos a seguinte transição $N(+1/2) \rightarrow B_{c}(+1/2) + \overline{D}^{0}$. Dessa maneira, se usarmos as funções de onda relativas no espaço dos momentos para mésons e bárions multiplicadas pelos fatores de spin-sabor que aparecem na Tabela 3.2 na amplitude dada na Eq.(3.100) obteremos apenas um fator spin-espaço não nulo. A amplitude de decaimento resultante então é dada por

$$h_{NB_{c}\bar{D}} = -\gamma 2^{4} \kappa_{f} \sum_{n_{1}=1}^{N} \sum_{n_{2}=1}^{N} \sum_{n_{3}=1}^{N} d_{n_{1}}^{(N)} d_{n_{2}}^{(N)*} a_{n_{3}}^{(N)*} \left[\frac{3\pi^{2}}{r^{(N)}+1} \right]^{\frac{3}{2}} \frac{m_{0} + 3\varrho^{(N)} m_{1}^{(N)}}{\left[2 + 3\left(r^{(N)}+1\right) \varrho^{(N)} \right]^{\frac{5}{2}}} \\ \times \frac{P}{\alpha_{n_{2}}^{(N)3}} \frac{\cos(\theta)}{\alpha_{n_{1}}^{(N)\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\Lambda_{NB_{c}\bar{D}}}{2\alpha_{n_{1}}^{(N)}}} P^{2}$$
(3.106)

onde as razões entre os de comprimento de oscilador $r^{(N)} \in \varrho^{(N)}$ são

$$r^{(N)} = \frac{\alpha_{n_1}^{(N)}}{\alpha_{n_2}^{(N)}}, \quad \varrho^{(N)} = \frac{\beta_{n_3}^{(N)}}{\alpha_{n_1}^{(N)}}$$
(3.107)

com $\beta_{n_3}^{(N)} = n_3 \beta_N^2$, $\alpha_{n_2}^{(N)} = n_2 \alpha_N^2$, $\alpha_{n_1}^{(N)} = n_3 \beta_N^2$ e além disso

$$\Lambda_{_{NB_c\bar{D}}} = \frac{m_2 \left[m_3 + \left(1 + 6 \, m_4 \, \varrho^{(N)} \right) \, r^{(N)} \right]}{\left[2 + 3 \left(r^{(N)} + 1 \right) \, \varrho^{(N)} \right]} \tag{3.108}$$

Já os fatores de massa são dados pelas seguintes relações

$$m_0 = \frac{2}{1+r_m}, \quad m_1^{(N)} = 1 + \frac{r^{(N)}}{1+2r_m}$$
 (3.109)

$$m_2 = \frac{3r_m^2}{\left[1+3r_m+2r_m^2\right]^2}, \quad m_3 = \left[1+2r_m\right]^2 \tag{3.110}$$

$$m_4 = [1+r_m]^2, \quad r_m = \frac{m_l}{m_h}$$
 (3.111)

A constante κ_f é um simples fator que absorve os diferentes estados de spin-sabor de cada processo de interesse, e pode ser obtido facimente a partir dos fatores de spin-sabor dados na Tabela 3.2

3.5.3 Amplitudes $N\Sigma_s K \in N\Lambda_s K$

A amplitude de decaimento para processos que envolvem bárions estranhos podem ser obtidos diretamente do caso de bárions charmosos, em completa analogia ao caso mesônico. É necessário apenas especializar os seguintes subprocessos $p(+1/2) \rightarrow \Lambda_s^0(+1/2) + K^+$ e $p \rightarrow \Sigma_s^0(+1/2) + K^+$, e juntamente a isso, fazer a seguintes mudanças $\beta_{\bar{D}} \rightarrow \beta_K$, $\alpha_{\Lambda_c} \rightarrow \alpha_{\Lambda_s}$ e $m_c \rightarrow m_s$.

3.6 Parâmetros da Quebra de Simetria SU(4)

Nas últimas duas seções nós usamos o modelo não-relativístico de quarks ${}^{3}P_{0}$ para calcular analiticamente amplitudes de decaimento forte para processos envolvendo mésons e bárions. Essas amplitudes, em geral, sempre podem ser escritas em termos de uma constante de acoplamento e um fator de forma associado, isto é

$$h_{fi}(q^2) = g_{fi} F(q^2) \tag{3.112}$$

O fator de forma é uma função Gaussiana que possui a seguinte forma

$$F(q^2) = e^{-\Lambda q^2}$$
(3.113)

onde Λ é um parâmetro que envolve as razões das massas dos quarks e as razões dos parâmetros de comprimento de oscilador dos hádrons. No limite em que $q^2 = 0$ e $F(q^2 = 0) = 1$, essas amplitudes podem ser usadas para determinar razões entre as constantes de acoplamento associadas aos vértices méson-méson-méson e bárionbárion-méson que aparecem na Figura 3.2. Mais especificamente, esses vértices são: $\bar{D}\bar{D}\rho$, $KK\rho$, $\bar{D}\bar{D}\omega$, $KK\omega \in N\bar{D}\Lambda_c$, $N\bar{D}\Sigma_c, NK\Lambda_s$, $NK\Sigma_s$.



Figura 3.2: Vértices de interesse no estudo do acoplamento méson-bárion. Os mésons pseudo-escalares (P) podem ser o \overline{D} ou K, e N é o núcleon.

Para entender como as razões das constantes de acoplamento trazem informação sobre a quebra da simetria de sabor na interação méson-bárion, devemos lembrar que no contexto do modelo de quarks a quebra dessa simetria é proveniente das diferentes massas dos quarks que estão envolvidos nos processos de decaimento. Nos processos que estaremos investigando aqui, estão presentes as massas do quark up m_u do quark estranho m_s e do quark charmoso m_c . Essas massas são tais que $m_u < m_s \ll m_c$. Além disso, é fácil notar que nas constantes de acoplamento que definimos a partir das amplitudes de decaimento calculadas nas Secs. 3.4 e 3.5, as razões entre as massas dos quarks $m_u/m_s = m_u/m_c$ aparecem explicitamente. Sendo assim, é possível saber quantitativamente, pelo cálculo das razões dessas constantes de acoplamento, qual é o efeito que as diferentes massas têm nos vértices mésonméson-méson e bárion-bárion-méson quando comparadas com o caso em que se supõe que a simetria de sabor SU(4) seja válida, isto é, $m_u = m_s = m_c$.

Recentemente, os autores da Ref. [57] mostraram que a hipótese da simetria SU(4) implica as seguintes relações entre as constantes de acoplamento para o vértice méson-méson

$$g_{KK\rho} = g_{\bar{D}\bar{D}\rho} = \frac{g_{\pi\pi\rho}(6.0)}{2}$$
(3.114)

onde o valor empírico do acoplamento $\pi\pi\rho$, que aparece entre parentes na Eq.(3.114), é o valor usado na Ref [80]. A consequência imediata da Eq.(3.114) é que

$$\frac{g_{\pi\pi\rho}}{2\,g_{\bar{D}\bar{D}\rho}} = \frac{g_{\pi\pi\rho}}{2\,g_{KK\rho}} = \frac{g_{KK\rho}}{g_{\bar{D}\bar{D}\rho}} = 1 \tag{3.115}$$

Esses são os acoplamentos relevantes para a construção da interação entre mésons charmosos (\bar{D}) e estranhos (K) com o núcleon (N) a partir de Lagrangianas efetivas. Os acoplamentos para os casos envolvendo $g_{\bar{D}\bar{D}\omega}$ e $g_{KK\omega}$ são iguais àqueles envolvendo os méson ρ na Eq. (3.114).

No cálculo explícito das amplitudes de decaimento existe apenas um parâmetro livre que é γ . Esse parâmetro é fitado a partir dos dados de vários processos de decaimento forte. Um valor típico para esse parâmetro foi apresentado na Ref. [77, 78] e é $\gamma = 0.4$. Todos os outros parâmetros envolvidos em nossos cálculos foram determinados pela diagonalização do Hamiltoniano do modelo de quarks. Devemos notar apenas, que no cálculo das amplitudes de decaimento forte a função de onda espacial relativa tanto de mésons quanto de bárions está no espaço dos momentos enquanto que as funções de onda discutidas no esquema variacional que usamos na Sec. 2.3.3 e na Sec. 2.3.4 estão no espaço das coordenadas. No entanto, isso não é nenhum problema pois sabemos que a relação da função de onda espacial no espaço das coordenadas com a função de onda espacial no espaço dos momentos é uma simples transformada de Fourier. Vamos introduzir agora, as definições das razões entre as amplitudes de decaimento. Começaremos com o caso mesônico. Primeiramente devemos notar, que as amplitudes mesônicas envolvendo os vértices $\pi \pi \rho$, $KK\rho \in \bar{D}\bar{D}\rho$, no limite de validade da simetria SU(4), satisfazem a seguinte relação

$$h_{KK\rho}^{(N)} = h_{\bar{D}\bar{D}\rho}^{(N)} = \frac{h_{\pi\pi\rho}^{(N)}}{2}$$
(3.116)

onde devido a estrutura de spin e sabor das amplitudes de decaimento – ver Tabela 3.1, a ampliude $\pi \pi \rho$ é duas vezes maior que aquelas envolvendo $KK\rho \in \bar{D}\bar{D}\rho$ tal como aparece na Eq. (3.116). Sendo assim, no limite em que a simetria estiver quebrada podemos definir as seguintes relações

$$\varepsilon_{\pi\pi\rho/KK\rho}^{(N)} = \frac{h_{\pi\pi\rho}^{(N)}}{2h_{KK\rho}^{(N)}}\Big|_{q^2=0} = \frac{g_{\pi\pi\rho}^{(N)}}{2g_{KK\rho}^{(N)}}$$
(3.117)

$$\varepsilon_{\pi\pi\rho/\bar{D}\bar{D}\rho}^{(N)} = \frac{h_{\pi\pi\rho}^{(N)}}{2h_{\bar{D}\bar{D}\rho}^{(N)}}\Big|_{q^2=0} = \frac{g_{\pi\pi\rho}^{(N)}}{2g_{\bar{D}\bar{D}\rho}^{(N)}}$$
(3.118)

$$\varepsilon_{KK\rho/\bar{D}\bar{D}\rho}^{(N)} = \frac{h_{KK\rho}^{(N)}}{h_{\bar{D}\bar{D}\rho}^{(N)}}\Big|_{q^2=0} = \frac{g_{KK\rho}^{(N)}}{g_{\bar{D}\bar{D}\rho}^{(N)}}$$
(3.119)

onde ε é o parâmetro de quebra, que serve para avaliar quanto a simetria de sabor SU(4) é violada devido a presença das diferentes massas dos quarks, e o índice Nfoi introduzido para reforçar que os resultados numéricos foram calculados para um certo número de Gaussianas usado na expansão da função de onda dos mésons. Dessa forma, nós esperamos que para um número suficientemente grande de Gaussianas os resultados numéricos para os parâmetros de quebra convirjam para um certo valor. Na prática, nós observamos que uma convergência muito rápida dos resultados numéricos para esses parâmetros é obtida para um número pequeno de Gaussianas, a partir de N = 6 Gaussianas. No entanto, estimamos os valores para esses parâmetros de quebra usando um número um pouco maior de Gaussianas, em torno de N = 12Gaussianas. Os resultados obtidos são

$$\varepsilon_{\pi\pi\rho/KK\rho}^{(N=12)} = 1.04 \tag{3.120}$$

$$\varepsilon_{\pi\pi\rho/\bar{D}\bar{D}\rho}^{(N=12)} = 1.28$$
 (3.121)

$$\varepsilon_{_{KK\rho/\bar{D}\bar{D}\rho}}^{(N=12)} = 1.22 \tag{3.122}$$

Esses resultados sugerem que a simetria SU(4) de sabor esta quebrada em torno de 20% – 28%, quando comparada com o caso simétrico dado na Eq.(3.115). Na Figura 3.3 mostramos o comportamento do parâmetro de quebra ε em função do

número de Gaussianas. Podemos ver apartir da Figura 3.3 a rápida convergência dos valores numéricos para os parâmetros de quebra ε a partir de N = 6 Gaussianas.



Figura 3.3: Parâmetros de quebra para processos envolvendo mésons como função do número de Gaussianas.

Agora, estamos em posição de discutir os resultados numéricos para os parâmetros de quebra no caso onde bárions estejam envolvidos. As expressões analíticas para as amplitudes bariônicas usadas na definição destes parâmetros são dadas nas Eqs.(3.105) e (3.106). Novamente, todos os resultados numéricos para esses parâmetros foram determinados para $q^2 = 0$. Os resultados numéricos para os parâmetros de quebra foram calculados para um número menor de Gaussianas que o caso mesônico, em torno de N = 6 Gaussianas

$$\varepsilon_{NN\pi/N\Lambda_sK}^{(N=6)} = 1.07 \qquad \varepsilon_{NN\pi/N\Sigma_sK}^{(N=6)} = 1.08$$
 (3.123)

$$\varepsilon_{NN\pi/N\Lambda_c\bar{D}}^{(N=6)} = 1.20 \qquad \varepsilon_{NN\pi/N\Sigma_c\bar{D}}^{(N=6)} = 1.22 \qquad (3.124)$$

$$\varepsilon_{_{N\Lambda_sK/N\Lambda_c\bar{D}}}^{(N=6)} = 1.12 \qquad \varepsilon_{_{N\Sigma_sK/N\Sigma_c\bar{D}}}^{(N=6)} = 1.14 \qquad (3.125)$$

Nas Figuras. 3.4 e 3.5 é possível observar a sensibilidade dos resultados numéricos como função do número de Gaussianas Esses resultados claramente sugerem que para o caso bariônico a simetria SU(4) é quebrada em torno de 10% - 20%, o que é um pouco menor que no caso mesônico.



Figura 3.4: Parâmetros de quebra para processos envolvendo os bárions Λ_s e Λ_c como função do número de Gaussianas.



Figura 3.5: Parâmetros de quebra para processos envolvendo os bárions Σ_s and Σ_c como função do número de Gaussianas.

Antes de finalizarmos essa seção, nós devemos fazer algumas considerações sobre o efeito que diferentes parâmetros de oscilador $\alpha_{\rho} e \alpha_{\lambda}$ podem ter sobre as amplitudes de decaimento para o caso do vértice bárion-bárion-méson. Havíamos comentado brevemente na Seção 2.3.4 que ao analisarmos o problema de três corpos usando um potencial de OH, foi observado que para o caso em que as massas dos quarks $m_u e m_c$ estavam envolvidas, as frequências de oscilação associadas as variáveis ρ e λ diferiam entre si por um valor que dependia da razão entre as massas desses quarks, isto é, $r_m = \frac{m_u}{m_c}$. Mais precisamente tínhamos a seguinte relação $\alpha_{\lambda}^2 \cong 1.4 \alpha_{\rho}^2$. Essa é justamente a situação que deve ser observada para o caso dos bárions charmosos, seja ele o Λ_c ou o Σ_c . Esse efeito foi aparentemente negligenciado ao implementarmos o esquema variacional para o potencial do tipo Coulomb+linear. Isso porque, em nossa função de onda "teste", nós usamos o mesmo parâmetro de oscilador variacional α para ambas as coordenadas de Jacobi. A razão para que isso fosse feito, estava associada ao fato de que o uso de diferentes parâmetros de oscilador em nosso problema complicaria sensivelmente o método de separação de variáveis usado. Sendo assim, é uma questão importante avaliar se a negligência desse efeito pode ter alguma influência em nosso problema ou não.

A maneira que encontramos para fazer isso, foi usar o potencial de OH no método variacional onde as complicações angulares estão ausentes. Usamos para a função de onda "teste" tanto dois parâmetros variacionais $\alpha_{\lambda} \in \alpha_{\rho}$, quanto um apenas α . Uma vez feito isso, foi possível recalcular as amplitudes de decaimento bariônica e com estas determinar as seguintes razões entre amplitudes de decaimento

$$\frac{h_{N\bar{D}\Lambda_c}(\alpha)}{h_{N\bar{D}\Lambda_c}(\alpha_{\lambda},\alpha_{\rho})} = \frac{h_{N\bar{D}\Sigma_c}(\alpha)}{h_{N\bar{D}\Sigma_c}(\alpha_{\lambda},\alpha_{\rho})} \cong 1.01$$
(3.126)

para uma base com N = 6 Gaussianas.

A partir do resultado da Eq.(3.126), podemos concluir que apesar do modelo de OH sugerir que os efeitos dos parâmetros variacionais $\alpha_{\lambda} \in \alpha_{\rho}$ sejam visíveis no espectro de energia dos bárions, eles são extremamente pequenos quando considerados nas amplitudes de decaimento e portanto não introduzem nenhum efeito sensível em nossos cálculos. Assim, nós achamos que seria um preciosismo desnecessário introduzir mais esse efeito no cálculo das funções de onda "teste" dos bárions para o caso em que o Hamiltoniano do modelo envolva um potencial do tipo Coulomb+linear.

Capítulo 4

Modelo de Quarks Inspirado na QCD no Calibre de Coulomb

4.1 Introdução

Esse é um dos principais capítulos da presente tese. Nosso objetivo aqui será formular um modelo de quarks a partir do Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb para investigar a interação méson-bárion. Nosso primeiro passo será apresentar uma breve revisão do formalismo Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb. Nós iniciaremos nossa discussão motivando o aparecimento de cada um dos termos presentes neste Hamiltoniano. A seguir, nós iremos discutir o formalismo de Szczepaniak e Swanson para descrever a estrutura do vácuo da QCD. Uma vez feito isso, nós iremos fazer contato com as simulações na rede que têm recentemente oferecido uma parametrização para o potencial de Coulomb no infravermelho. Também discutiremos uma possível parametrização para a parte transversa V_T da interação que é responsável pelo desdobramento hiperfino do espectro hadrônico. Por fim, nós iremos discutir a formulação do modelo de quarks constituintes a partir desse Hamiltoniano no calibre de Coulomb. Esse modelo confina a cor, no sentido de que somente estados ligados singletos de cor têm energia finita, e realiza a quebra dinâmica da simetria quiral. Dadas as massas dos quarks constituintes, que são obtidas a partir de uma equação de gap, obteremos as massas dos bárions e mésons e também suas respectivas funções de onda pela diagonalização do Hamiltoniano do modelo em uma base de funções de onda Gaussianas. Nosso objetivo final será usar essas funções de onda para investigar a interação méson-bárion e, assim, obter uma estimativa para a quebra de simetria na interação DN.

4.2 Hamiltoniano da QCD no Calibre de Coulomb

Existem inúmeras razões que motivam o uso da formulação Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb. Sem dúvida, uma das principais é o entendimento do problema do confinamento de cor [81]. No ambiente da QCD no calibre de Coulomb, obtém-se um potencial atrativo entre as fontes que carregam cor. No entanto, os glúons, que são os mediadores desta força, estão ausentes do espectro de estados físicos conhecido. Estes dois aspectos não são muito bem descritos em calibres covariantes. No calibre de Coulomb, ao contrário, eles coexistem de maneira confortável: A força confinante é dada por uma interação Coulombiana instantânea que cresce para valores pequenos do momento tri-dimensional, enquanto que o propagador físico do glúon transverso é suprimido, o que reflete a ausência de estados coloridos no espectro físico. Um outro aspecto extremamente interessante, é que no calibre de Coulomb todos os graus de liberdade são físicos. Isso faz com que o formalismo Hamiltoniano seja muito semelhante ao modelo de quarks constituintes que discutimos nos capítulos iniciais desta tese. Além disso, uma vez que o potencial instantâneo de Coulomb possui uma interpretação física que é análoga à interação de Coulomb da QED, ele pode ser usado para o estudo de estados ligados.

No que segue, nós iremos seguir os argumentos da Ref. [81]. Esses autores, apresentam uma discussão do Hamiltoniano em termos dos campos dos quarks $\bar{\psi}$, ψ e dos campos dos glúons transversos A^a , com seu respectivo momento canonicamente conjugado Π^a . Além disso, os campos dos glúons transversos respeitam um vínculo adicional que é dado pela seguinte relação $\nabla \cdot A^a = 0$. Em completa analogia com a QED, podemos definir um campo cromo-elétrico em termos dos campos A^a

$$\boldsymbol{E}^{a} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}^{a}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} A^{0a} + g f^{abc} A^{0b} \boldsymbol{A}^{c}$$

$$\tag{4.1}$$

onde o campo cromo-elétrico é tal que satisfaz a lei de Gauss, ou seja

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}^a + \frac{\partial \boldsymbol{A}^a}{\partial t} = g \,\rho_q^a \tag{4.2}$$

Na Eq.(4.2), a densidade de cor de quarks é definida pela seguinte expressão

$$\rho_q^a = \psi^\dagger \frac{\lambda^a}{2} \,\psi \tag{4.3}$$

Se nós agora introduzirmos a definição de derivada covariante na representação adjunta, ou seja

$$\boldsymbol{D}^{ab} = \delta^{ab} \, \boldsymbol{\nabla} + i \, g \, T^c_{ab} \, \boldsymbol{A}^c \tag{4.4}$$

podemos reescrever a Eq.(4.2) da seguinte forma

$$\boldsymbol{D}^{ab} \cdot \boldsymbol{E}^b = g \,\rho_q^a \tag{4.5}$$

onde nós usamos que $T_{abc}^c = i f^{abc}$ e, além disso, estamos usando a convenção de soma sobre indices repetidos. Se decompormos o campo cromo-elétrico em termos de suas componentes transversa e longitudinal, isto é

$$\boldsymbol{E}^{a} = \boldsymbol{E}^{a}_{tr} - \boldsymbol{\nabla}\phi^{a} \tag{4.6}$$

é possível reescrever a Eq.(4.5) da seguinte forma

$$-\left(\boldsymbol{D}^{ab}\cdot\boldsymbol{\nabla}^{b}\right)\phi^{a}=g\,\rho^{a}\tag{4.7}$$

Na Eq.(4.7) nós introduzimos a densidade de carga de cor completa, ou seja

$$\rho^a = \rho^a_q + \rho^a_g \tag{4.8}$$

onde a densidade de carga cor dos glúons é: $\rho_g^a = f^{abc} E_{tr}^b \cdot A^c$. É importante notar que o campo escalar ϕ^a pode ser reescrito em termos da densidade total de carga de cor por meio da seguinte expressão

$$\phi^a = -g \left(\frac{1}{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}}\right)^{ab} \rho^b \tag{4.9}$$

Em um caminho similar, podemos eliminar a componente zero do potencial vetor fazendo uso da Eq.(4.2), ou seja

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}^{a} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}^{ab} A^{0b} = -\nabla^{2} \phi^{a}$$
(4.10)

que leva à seguinte expressão

$$A^{0b} = g \left[\frac{1}{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}} \left(-\nabla^2 \right) \frac{1}{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}} \right]^{ab} \rho^b$$
(4.11)

onde usamos a Eq.(4.9). Por fim, a evolução temporal do potencial vetor A^a é determinada pelo campo transverso Π^a de acordo com a seguinte equação

$$\boldsymbol{\Pi}^{a} \equiv -\boldsymbol{E}_{tr}^{a} = \frac{\partial \boldsymbol{A}^{a}}{\partial t} + g\left(1 - \frac{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}}{\nabla^{2}}\right) f^{abc} A^{0b} \boldsymbol{A}^{c}$$
(4.12)

Uma vez a quantização canônica for implementada, o campo transverso Π^a torna-se o momento canonicamente conjugado do potencial vetor A^a .

A obtenção do Hamiltoniano a partir da Lagrangiana é feita por uma transformada de Legendre. Nessa passagem, no entanto, termos proporcionais a $(\nabla \phi)^2$ são produzidos a partir das componentes longitudinais do campo E^2 , termos proporcionais a $g \rho_q A^0$ são produzidos a partir do vértice quark-glúon, $g \bar{\psi} \gamma^0 A^{0a} \lambda^0 / 2\psi$ e além disso, também são produzidos termos proporcionais a $g \Pi^a \cdot A^b A^{0c} f^{abc}$ da parte $E_{tr} \cdot \frac{\partial A^a}{\partial t}$ de E^2 . Uma vez esses ingredientes sejam todos combinados, e substituindo a expressão para A^0 de (4.11) nós então obteremos uma interação instantânea Coulombiana do tipo não-abeliana dada por

$$H_{C} = \frac{1}{2} \int d^{3}x \, d^{3}y \, \rho^{a}(x) \, K_{ab}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{A}) \, \rho^{b}(y)$$
(4.13)

com

$$K_{ab}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{A}) \equiv \langle \boldsymbol{x}, a | \frac{g}{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}} \left(-\nabla^2 \right) \frac{g}{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}} | \boldsymbol{y}, b \rangle$$
(4.14)

e onde a densidade de carga cor total é dada pela seguinte expressão

$$\rho^{a} = \rho_{q}^{a} + \rho_{g}^{a} = \psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}) \frac{\lambda^{a}}{2} \psi(\boldsymbol{x}) + f^{abc} \boldsymbol{A}^{b}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\Pi}^{c}(\boldsymbol{x})$$
(4.15)

Adicionalmente, o momento gluônico conjugado transverso satisfaz à seguinte relação de comutação

$$\left[A^{0,i}(\boldsymbol{x}),\Pi^{b,j}(\boldsymbol{y})\right] = i\delta^{ab}\left(\delta^{ij} - \frac{\nabla^i \nabla^j}{\nabla^2}\right)$$
(4.16)

Seguindo a notação da Ref. [82], $\langle \, \pmb{x}, a \, | \, \dots \, | \, \pmb{y}, b \, \rangle$ representa os "kernels" dos operadores integrais

$$\langle \boldsymbol{x}, a | \boldsymbol{D} | \boldsymbol{y}, b \rangle = \left[\delta^{ab} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} + g f^{abc} \boldsymbol{A}^{c}(\boldsymbol{x}) \right]$$
 (4.17)

Naturalmente, que no limite em que $D \to \nabla$

$$K \to -g^2 \langle \boldsymbol{x}, a | \frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2} | \boldsymbol{y}, b \rangle = \frac{g^2 \, \delta^{ab}}{4\pi | \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} |}$$
(4.18)

nós resgataremos a interação Coulombiana.

Um caminho de derivar uma Hamiltoniana quântica, é por meio de uma transformação do calibre no qual $A^0 = 0$ para o calibre de Coulomb e, como foi mostrado pela Ref. [82], essa é similar a uma transformação de coordenadas cartesiana para coordenadas curvilíneas, e gera um Jacobiano, o determinante de Faddeev-Popov

$$\mathcal{J} = det\left(\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}\,\right) \tag{4.19}$$

O determinante de Faddeev-Popov pode ser removido trabalhando com uma Hamiltoniana modificada dada por

$$H \to \mathcal{J}^{1/2} H \, \mathcal{J}^{-1/2} \tag{4.20}$$

que é Hermitiana com respeito a $(\Phi|\Psi) = \int \mathcal{D} \boldsymbol{A} \, \Phi^*(\boldsymbol{A}) \Psi(\boldsymbol{B})$

O resultado final para o Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb, então, é dado pela seguinte expressão

$$H = H_q + H_g + H_{qg} + H_C (4.21)$$

$$H_q = \int d^3x \,\Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}) \left[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m\boldsymbol{\beta} \right] \Psi(\boldsymbol{x})$$
(4.22)

$$H_g = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\mathcal{J}^{-1} \boldsymbol{E}^a_{tr}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathcal{J} \boldsymbol{E}^a_{tr}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}^a(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{B}^a(\boldsymbol{x}) \right]$$
(4.23)

$$H_{qg} = -g \int d^3x \, \boldsymbol{J}^a(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{A}^a(\boldsymbol{x})$$
(4.24)

$$H_C = \frac{1}{2} \int \int d^3x \, d^3y \, \mathcal{J}^{-1} \rho^a(\boldsymbol{x}) K_{ab}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathcal{J} \rho^b(\boldsymbol{y})$$
(4.25)

A Eq.(4.21) encerra de maneira completa o Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb. No entanto, tal como está escrita este Hamiltoniano possui uma série de complexidades que torna impraticável qualquer tentativa de sua diagonalização. Dentre essas, estão a presença do determinante de Faddeev-Popov e não-linearidades introduzidas pelos de termos de auto-interação dos campos dos glúon. Com o intuito de tratar algumas dessas dificuldades, formalismos têm sido desenvolvidos na literatura. Nas próximas duas seções nós iremos discutir de forma sucinta dois deles. Nosso objetivo será meramente o de apresentar as principais idéias que estão envolvidas nesses formalismos.

4.3 Estrutura do Vácuo da QCD: Formalismo de Szczepaniak e Swanson

O formalismo de Szczepaniak e Swanson (SS) é baseado na utilização de uma técnica padrão da teoria de muitos-corpos, a aproximação de campo médio. No presente caso, ela é aplicada para a obtenção do estado de vácuo da QCD. Trata-se de um modelo para o setor gluônico da teoria. Mas especificamente, o formalismo começa introduzindo um *Ansätze* Gaussiano para o estado de vácuo da teoria por meio da seguinte expressão

$$\Psi[\mathbf{A}] = \langle \mathbf{A} | \omega \rangle = \mathcal{J}^{-\alpha} \exp\left[-\frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \mathbf{A}^{\alpha}(\mathbf{k}) \,\omega(k) \,\mathbf{A}^{\alpha}(-\mathbf{k})\right]$$
(4.26)

onde a energia dos glúon é dada por $\omega(k)$, \mathcal{J} é equivalente ao Jacobiano da transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas curvilíneas e α é um número. A função de onda teste é determinada minimizando a densidade de energia do vácuo, ou seja

$$\frac{\delta}{\delta\,\omega}\langle\,\omega|H|\omega\,\rangle = 0\tag{4.27}$$

onde o parâmetro variacional é a energia do glúon ω . Uma vez determinado ω , $|\omega\rangle$ fica determinado. Esses autores prosseguem a discussão expandindo os operadores de campo $A^a(\mathbf{x}) \in \mathbf{\Pi}^a(\mathbf{x})$ em termos de operadores de criação e aniquilação de glúon, isto é

$$\boldsymbol{A}^{a}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^{3}k}{(2\pi)^{3}} \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \left[\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda) \,\alpha(\boldsymbol{k},\lambda,c) + \boldsymbol{\epsilon}^{*}(\boldsymbol{k},\lambda) \,\alpha^{\dagger}(-\boldsymbol{k},\lambda,c) \right] \, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{\Pi}^{a}(\boldsymbol{x}) = -i \int \frac{d^{3} k}{(2\pi)^{3}} \sqrt{\frac{\omega(k)}{2}} \left[\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda) \,\alpha(\boldsymbol{k},\lambda,c) - \boldsymbol{\epsilon}^{*}(\boldsymbol{k},\lambda) \,\alpha^{\dagger}(-\boldsymbol{k},\lambda,c) \right] \, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}(4.29)$$

Os operadores de aniquilação α são tais que respeitam a seguinte relação

$$\alpha(\boldsymbol{k},\lambda,c)|\,\omega\,\rangle = 0\tag{4.30}$$

Devido à forma extremamente complicada do Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb a obtenção da equação de gap para $\omega(k)$ é uma tarefa não muito simples. Isso ocorre porque a forma da função de gap depende de um conjunto de equações integrais acopladas que descrevem a densidade de energia do vácuo e as interações que são usadas para obter esta densidade de energia. Para maiores detalhes ver Refs. [81, 83]. O ponto relevante, para as discussões desta tese, esta relacionada com as soluções que estes autores obtiveram do esquema variacional. Essas soluções foram obtidas tanto para $\omega(k)$ quanto para $V_C(k) \equiv K^{ab}(k)$. Aqui $K^{ab}(k)$ é o kernel de Coulomb, que é o potencial de interação entre as cargas de cor. Para $\alpha = 1/2$, as soluções para $V_C(k)$ foram obtidas numericamente, e foram parametrizadas de acordo com uma parte de longo-alcance (V_l) e outra de curto-alcance (V_c), ou seja [83]

$$V_C(k) = V_l(k) + V_s(k)$$
(4.31)

onde as forma explícitas de V_l e V_s são dados pelas seguintes equações

$$V_l(k) = \frac{8\pi\sigma}{k^4} \tag{4.32}$$

$$V_s(k) = \frac{4\pi\alpha(k)}{k^2} \tag{4.33}$$

e com a constante "running" $\alpha(k)$ definida como

$$\alpha(k) = \frac{4\pi Z}{\beta^{3/2} \ln^{3/2} \left(c + \frac{k^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)}$$
(4.34)

Os parâmetros no potencial são $\Lambda_{QCD} = 250 \text{ MeV}, Z = 5.94, \beta = 121/12, c = 40.68.$

Um outro resultado extremamente importante do trabalho de Szczepaniak e Swanson está relacionado com o estudo a tempos iguais do propagador dos glúons transversos. De acordo com o Ansätze Gaussiano para o estado de vácuo da teoria dado na Eq.(4.26), nós temos que

$$D^{tr}(k) = \frac{1}{2\omega(k)} \tag{4.35}$$

onde o potencial transverso é determinado pela função $\omega(k)$. O ponto central, foi que esses autores mostraram que no infravermelho, $k \to 0$, a função $\omega(k)$ é pouco dependente do momento e é determinada por uma escala de massa m_g . No limite do ultravioleta, $k \to \infty$, a função $\omega(k)$ cresce quase que linearmente com o momento.

4.4 Estrutura do Vácuo da QCD: Simulações de QCD na Rede

A obtenção do Hamiltoniano QCD no calibre de Coulomb na rede também já foi discutida na literatura [47, 48]. Esse Hamiltoniano tem sido empregado, entre outras coisas, na investigação da estrutura do vácuo da QCD. Nesse contexto, um dos resultados de maior importância foi a indicação de que no infravermelho o propagador dos glúon transversos é finito e parece concordar uma fórmula prescrita por Gribov [84]. Esses resultados são devido a Cucchieri e Zwanziger [85]. Formalmente, o propagador dos glúon transversos a tempos iguais é dado pela seguinte expressão

$$D^{ij}(x) = \left(\delta^{ij} - \frac{\nabla^i \nabla^j}{\nabla^2}\right)_{\boldsymbol{x}} D_T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$
(4.36)

$$\equiv D^{tr}(x) = \langle \omega | T \left[A_a^i(\boldsymbol{x}, t) A_b^j(0, 0) \right] | \omega \rangle_{t=0}$$
(4.37)

$$= \delta_{ab} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right)_{\boldsymbol{x}} D^{tr}(k) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$
(4.38)

As simulações na rede implementadas pela Ref. [85] para $D^{tr}(k)$, podem ser fitadas pela função

$$D^{tr}(k) = \frac{1}{2E(k)}$$
(4.39)

onde $E(k) = \frac{1}{k}\sqrt{k^4 + M_G^4}$ e M_G é a chamada massa de Gribov. O fato do propagador ser finito para k = 0 tem uma consequência importante, que é o anulamento do potencial transverso que, por sua vez, indica a ausência de uma escala de massa. É importante notarmos, que toda essa discussão foi motivada pelo que se conhece como cenário de confinamento de Gribov. Em linhas gerais, de acordo com esse, os glúon confinados não se propagam. E uma forma que Gribov concebeu para que os glúon não se propagassem, foi uma função correlação que se anule quando k = 0. Recentemente os autores da Ref. [81], como foi comentado na seção anterior, estudaram o comportamento de glúon transversos a tempos iguais e obtiveram um resultado que indicava uma escala de massa no infravermelho. No entanto, esse resultado, não contradiz o cenário de Gribov apenas indica que a forma da função de correlação sugerida por Gribov seja diferente.

Um outro resultado da QCD na rede, foi feito em uma recente investigação do comportamento no infravermelho do potencial efetivo de Coulomb [49]. Esses autores forneceram uma parametrização para o potencial de Coulomb no limite $k \rightarrow 0$ diretamente de simulações na rede, a partir da seguinte expressão

$$V_l(k) = \frac{8\pi\sigma}{k^4} + \frac{4\pi C}{k^2}$$
(4.40)

onde $\sigma = 552 \,\mathrm{MeV^2}$ e C = 6. Para chegar nesses resultados foi necessário fixar a escala física das simulações numéricas. Isso porque, o espaçamento da rede não é fixado a priori. Para maiores detalhes do procedimento usado para obter os parâmetros envolvidos na Eq.(4.40) veja a Ref. [49]. O fitting que esses autores usaram para fixar os valores de $\sigma \in C$, na Eq.(4.40) descreve bem os dados na região $0.2 \,\mathrm{GeV}^2 \leq k^2 \leq 6 \,\mathrm{GeV}^2$.

Nós temos discutido, até aqui, importantes resultados obtidos recentemente na literatura a cerca de estudos sobre a estrutura do vácuo da QCD. No entanto, para as discussões que serão feitas nas próximas seções desta tese nós precisaremos de alguns elementos adicionais que nem o formalismo de Szczepaniak e Swanson (SS) nem as simulações na rede tem fornecido.

O primeiro ponto, está associado ao fato de que a rede não oferece nenhuma parametrização para o potencial dado na Eq.(4.40) para valores de momento maiores que $k^2 > 6 \text{ GeV}^2$. Isso corresponderia a parte de curto alcance (s) da interação. Em vista desse cenário nós utilizaremos uma parametrização análoga a da solução devida a Szczepaniak e Swanson (SS), que consiste em tomar para $k > m_g$ a seguinte expressão

$$V_s(k) = \frac{C}{k^2 \ln^{1.42} \left[\tau_c + \frac{k^2}{m_g^2} \right]}$$
(4.41)

Os parâmetros C = 8 e $\tau_c = 1.41$ são escolhidos para que no limite em que $k = m_g$ os setores correspondentes às partes de longa e de curta distâncias se conectem de maneira suave. Uma outra questão que devemos discutir agora está relacionada com a parte transversa da interação de Coulomb. Nas discussões tanto do formalismo de Szczepaniak e Swanson (SS) quanto da rede (LTT), não foi dada nenhuma parametrização para para o potencial V_T que possa ser empregada nesta tese. O resultado obtido das simulação na rede – ver Eq.(Ref. 4.39), por exemplo, é devido a uma integral no espaço Euclideano sobre a componente temporal do momento da seguinte forma

$$D^{tr}(k) = \int \frac{dk_4}{(2\pi)} \frac{1}{k_4^2 + E^2(k)} = \frac{1}{2E(k)}$$
(4.42)

Naturalmente, se existisse uma parametrização para os resultados numéricos para E(k), seria possível utiliza-lo para definir o potencial transverso.

Sabemos, no entanto, da discussão feita na Sec. 2.3 sobre o modelo não-relativístico de quarks constituintes, que o potencial transverso tem implicações no desdobramento hiperfino do espectro hadrônico. Além disso, recentemente, os autores da Ref. [42] fizeram um estudo onde foram utilizadas quatro diferentes formas funcionais para V_T e suas influências sobre o desdobramento hiperfino do espectro mesônico foi avaliada. O fato interessante é que essas interações diferiam entre si no limite em que $k \to 0$ (infravermelho), mas tinham o mesmo tipo de comportamento quando $k \to \infty$ (ultravioleta). O comportamento no ultravioleta tinha a mesma forma que aquele, $V_s(k)$, usado por Szczepaniak e Swanson na Ref. [81]. Em vista da ausência de um esquema mais elaborado para a determinação de V_T , nós utilizaremos a mesma abordagem da Ref. [42], ou seja, usaremos para a parte transversa do modelo (SS) que $V_T^{(SS)}(k) = V_s(k)$. Já para a parte transversa do modelo (LTT) nós usaremos uma expressão que interpola entre uma Yukawa e o comportamento no ultravioleta de Szczepaniak e Swanson, isto é

$$V_T^{(LTT)}(k) = \frac{4\pi \alpha_T}{(k^2 + m_0^2) \ln^{1.42} \left[\tau_c + \frac{k^2}{m_g^2}\right]}$$
(4.43)

onde os parâmetros α_T , $m_0^2 \in \tau$ são ajustáveis. No entanto, não há uma grande liberdade para a variação destes, eles são ajustados para que os valores dos observáveis quirais sejam razoáveis. Os detalhes desse ajuste serão discutidos no próximo capítulo.

4.5 Modelo de Quarks com Quebra Dinâmica de Simetria Quiral

O modelo não-relativístico de quarks constituintes (MNRQ) é muito bem sucedido na descrição de inúmeras propriedades da física hadrônica. Na Sec. 2.3 nós apresen-

tamos o que talvez seja uma de suas previsões mais importantes, que é o espectro de massas de bárions e mésons. Apesar de termos focado nossa atenção no estado fundamental desse espectro, o MNRQ também fornece resultados extremamente bons para estados em ondas mais altas, e tem se mostrado uma excelente abordagem para tratar com estados exóticos como glueballs e hybrids. Além disso, a partir do modelo não-relativístico de quarks é possível estudar processos dinâmicos tais como espalhamentos e decaimentos. Isso permite avaliar, entre outras coisas, como a interação confinante usada no modelo trabalha.

No entanto, o MNRQ possui inúmeros aspectos que o tornam frágil do ponto de vista conceitual. O mais dramático desses aspectos está associado ao fato de que esse modelo é claramente inábil em explicar a origem das massas dos quarks constituintes, que é um dos ingredientes fundamentais do modelo. Em nossa discussão na Sec. 2.2 nós argumentamos, ao menos qualitativamente, que a massa dos quarks constituintes é gerada pela quebra de uma simetria aproximada que o setor fermiônico da Lagrangiana da QCD possui, chamada simetria quiral. Trata-se de um fenômeno dinâmico de natureza não-perturbativa, que além de explicar a massa desconcertantemente pequena dos píons, permite que se entenda porque os quarks constituintes são mais massivos que os quarks de corrente que aparecem na Lagrangiana da QCD. Entretanto, no MNRQ as massas dos quarks e as interações são especificadas independentemente no modelo.

Em vista desses fatos torna-se um ponto extremamente relevante que o modelo de quarks constituintes seja aprimorado, e incorpore explicitamente os efeitos da quebra dinâmica da simetria quiral (D χ SB). Além disso, um requisito adicional seria que o setor gluônico do modelo pudesse ser obtido em um caminho mais sistemático a partir de esquemas mais próximos da teoria fundamental, a QCD. Dessa forma, talvez fosse mais transparente entender como tanto o mecanismo de confinamento quanto os efeitos da D χ SB se manifestam no espectro de bárions e mésons.

Os requisitos discutidos acima são preenchidos se formularmos o modelo de quarks a partir de um Hamiltoniano efetivo inspirado no Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb, ou seja

$$H = \int d\boldsymbol{x} \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}) \left[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta \, m_0 \right] \Psi(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2} \int d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{y} \, \rho^a(\boldsymbol{x}) \, V_C(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \, \rho^a(\boldsymbol{y}) \\ + \frac{1}{2} \int d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{y} \, J_i^a(\boldsymbol{x}) \, V^{ij}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \, J_j^a(\boldsymbol{y})$$

$$(4.44)$$

onde $\Psi(\boldsymbol{x})$ é o operador de campo dos quarks (com os indices de cor e sabor suprimidos), m_0 é a matriz de massa dos quarks de corrente, e $\rho^a(\boldsymbol{x})$ e $J_i^a(\boldsymbol{x})$ são as densidade de carga e de corrente, dadas por

$$\rho^{a}(\boldsymbol{x}) = \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}) T^{a} \Psi(\boldsymbol{x})$$
(4.45)

$$J_i^a(\boldsymbol{x}) = \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}) T^a \alpha_i \Psi(\boldsymbol{x})$$
(4.46)

com $T^a = \lambda^a/2, a = 1, \dots, 8$, onde λ^a são as matrizes de Gell-Mann. O conteúdo do Hamiltoniano da Eq.(4.44) é muito claro: Primeiro termo descreve a energia cinética do campo dos quarks, $V_C(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|)$ é interpretado como o potencial instantâneo de Coulomb e $V^{ij}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|)$ é o potencial hiperfino de glúon transversos cuja estrutura é da forma

$$V^{ij}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) = \left(\delta^{ij} - \frac{\nabla^i \nabla^j}{\nabla^2}\right) V_T(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|)$$
(4.47)

O Hamiltoniano efetivo é completamente determinado uma vez os potenciais V_C e V_T sejam especificados. Naturalmente que agora a escolha desses potenciais não é arbitrária, e segue um caminho sistemático tal como foi discutido na Sec. 4.3 e Sec. 4.4. Uma das propriedades desejáveis que esse Hamiltoniano possui é que ele realiza a quebra dinâmica da simetria quiral (D χ SB) e confina cor.

Nosso objetivo nesta seção será desenvolver um modelo de quarks constituintes que permita estudar em um caminho unificado tanto a estrutura quanto as interações hadrônicas. A base desse modelo será o Hamiltoniano dado na Eq.(4.44), com os potenciais de interação V_C e V_T apresentados na Sec. 4.3 e Sec. 4.4. Nesse modelo de quarks constituintes, os bárions no estado fundamental são estados ligados compostos de três quarks e os mésons são estados ligados compostos por um quarkantiquark. As massas desses quarks constituintes são geradas pela $D\chi SB$. A mesma interação envolvida nessa geração de massa também é usada para obter as funções de onda de estado ligado para os mésons e bárions. Uma vez que esses ingredientes que descrevem a estrutura dos hádrons estiverem determinados, é possível utilizar o mesmo Hamiltoniano para descrever a interação hádron-hádron. Essa abordagem tem como grande vantagem o fato de que todos os parâmetros envolvidos são determinados pelo próprio modelo, ou fixado diretamente da QCD. Esse é um aspecto importante pois minimiza a liberdade de ajuste de parâmetros. Sendo assim, no restante desse capitulo nós desenvolveremos os detalhes quantitativos do modelo descrito acima.

O primeiro passo será obter explicitamente a massa dos quarks constituintes a partir do Hamiltoniano da Eq.(4.44). Nós partiremos da abordagem de Bogoliubov-Valatin para discutir a D χ SB. Primeiramente, expandimos os operadores de campo de quarks em uma base de ondas planas, ou seja

$$\Psi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s} [u_s(\boldsymbol{p})q_s(\boldsymbol{p}) + v_s(\boldsymbol{p})\bar{q}_s^{\dagger}(-\boldsymbol{p})] e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}$$
(4.48)

onde os espinores $u \in v$ são escritos como

$$u_s(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{E_p + M_p}{2E_p}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{E_p + M_p} \end{pmatrix} \chi_s$$
(4.49)

$$v_s(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{E_p + M_p}{2E_p}} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{E_p + M_p} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_s^c$$
(4.50)

 com

$$E_p = \sqrt{p^2 + M_p^2} \tag{4.51}$$

onde M_p é a função de massa dos quarks constituintes, χ_s é o espinor Pauli, e $\chi_s^c = -i\sigma^2\chi_s^*$. Os operadores $q_s^{\dagger}(\boldsymbol{p}), q_s^{\dagger}(\boldsymbol{p}), \bar{q}_s(\boldsymbol{p})$, e $\bar{q}_s(\boldsymbol{p})$ são os operadores de criação e aniquilação de quarks constituintes, isto é

$$q_s(\boldsymbol{p})|\Omega\rangle = 0 \tag{4.52}$$

$$\bar{q}_s(\boldsymbol{p})|\Omega\rangle = 0 \tag{4.53}$$

onde $|\Omega\rangle$ é o estado de vácuo em que a simetria quiral está quebrada dinamicamente. E além disso, satisfazem as usuais relações de anticomutação

$$\{q_s(\boldsymbol{p}), q_{s'}^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\} = \{\bar{q}_s(\boldsymbol{p}), \bar{q}_{s'}^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\} = \delta_{ss'}\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')$$

$$(4.54)$$

$$\{q_s(\boldsymbol{p}), q_{s'}(\boldsymbol{p}')\} = \{\bar{q}_s(\boldsymbol{p}), \bar{q}_{s'}(\boldsymbol{p}')\} = \{q_s(\boldsymbol{p}), \bar{q}_{s'}(\boldsymbol{p}')\} = \{\bar{q}_s(\boldsymbol{p}), \bar{q}_{s'}^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\} = 0 \ (4.55)$$

Isto é, quando $m_0 = 0$ o Hamiltoniano na Eq.(4.44) é quiralmente simétrico mas o estado de vácuo quebra essa simetria

$$\langle \Omega | \bar{\Psi} \Psi | \Omega \rangle \neq 0 \tag{4.56}$$

A função de massa dos quarks constituintes, M_p , dependente do momento é determinada da seguinte maneira. Primeiro, vamos reescrever o Hamiltoniano dado na Eq.(4.44) em uma forma mais compacta, ou seja

$$H = \int d\boldsymbol{x} \, \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}) \left[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta \, m_0 \right] \Psi(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2} \int d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{y} \, J^a_{\mu}(\boldsymbol{x}) \, D^{\mu\nu}_{ab}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \, J^b_{\nu}(\boldsymbol{y})$$
(4.57)

onde usamos as definições

$$D_{ab}^{00}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) = V_C(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) \qquad J_0^a(\boldsymbol{x}) = \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x})\,\Gamma_0^a\,\Psi(\boldsymbol{x}) \qquad \Gamma_0^a = T^a \qquad (4.58)$$

$$D_{ab}^{ij}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) = V_{ij}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) \qquad J_i^a(\boldsymbol{x}) = \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x})\,\Gamma_i^a\,\Psi(\boldsymbol{x}) \qquad \Gamma_i^a = T^a\,\alpha_i \quad (4.59)$$

Agora, vamos substituir os operadores de campo Ψ da Eq.(4.48) e o seu correspondente conjugado Ψ^{\dagger} na Eq.(4.57), e usar o teorema de Wick para deixar esse Hamiltoniano ordenado normalmente com respeito aos operadores de quarks constituintes. Esse procedimento leva o Hamiltoniano a seguinte forma

$$H = \mathcal{E} + H_2 + H_4 \tag{4.60}$$

onde \mathcal{E} é um c-number, a energia do estado de vácuo, e H_2 e H_4 contém termos ordenados normalmente bilineares e quadrilineares nos operadores de campo dos quarks Ψ , respectivamente. A forma específica de cada um desses termos é dada por

$$\mathcal{E} = \int d^3x : \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}) \left[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta \, m_0 \right] \Psi(\boldsymbol{x}) :$$

+ $\frac{1}{2} \int d^3x \, d^3y : \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}) \Gamma^a_{\mu} \Psi(\boldsymbol{x}) D^{\mu\nu}_{ab}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{y}) \Gamma^b_{\nu} \Psi(\boldsymbol{y}) :$ (4.61)

$$H_{2} = \int d^{3}x : \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}) \left[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m_{0} \right] \Psi(\boldsymbol{x}) :$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^{3}x \, d^{3}y : \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x})\Gamma^{a}_{\mu}\Psi(\boldsymbol{x})D^{\mu\nu}_{ab}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\Psi^{\dagger}(\boldsymbol{y})\Gamma^{b}_{\nu}\Psi(\boldsymbol{y}) :$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^{3}x \, d^{3}y : \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x})\Gamma^{a}_{\mu}\Psi(\boldsymbol{x})D^{\mu\nu}_{ab}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\Psi^{\dagger}(\boldsymbol{y})\Gamma^{b}_{\nu}\Psi(\boldsymbol{y}) : \qquad (4.62)$$

$$H_4 = \int d^3x \, d^3y : \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}) \Gamma^a_{\mu} \Psi(\boldsymbol{x}) D^{\mu\nu}_{ab}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{y}) \Gamma^b_{\nu} \Psi(\boldsymbol{y}) : \qquad (4.63)$$

Nas Eqs.(4.61), (4.62) e (4.63) as contrações de Wick entre os operadores de campo dos quarks são dadas pelas seguintes expressões

$$\Psi_{\beta}^{cf\dagger}(\boldsymbol{y})\Psi_{\alpha}^{c'f'}(\boldsymbol{x}) = \delta^{cc'}\delta^{ff'}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p^f} \left[E_p^f - \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} - \beta M_p^f\right]_{\alpha\beta} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}$$

$$= \delta^{cc'}\delta^{ff'}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\Lambda_{-}^f(\boldsymbol{p})\right]_{\alpha\beta} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}$$
(4.64)

$$\Psi_{\alpha}^{cf}(\boldsymbol{y})\Psi_{\beta}^{c'f'\dagger}(\boldsymbol{x}) = \delta^{cc'}\delta^{ff'}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p^f} \left[E_p^f + \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + \beta M_p^f\right]_{\alpha\beta} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}$$

$$= \delta^{cc'}\delta^{ff'}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\Lambda_+^f(\boldsymbol{p})\right]_{\alpha\beta} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}$$
(4.65)

Nas equações acima, nós introduzimos as definições dos projetores de energia positiva e negativa $\Lambda^f_+ \in \Lambda^f_-$, que satisfazem, $\Lambda^f_+ + \Lambda^f_- = 1$. E além disso, nós retornamos com os índices de sabor e cor nas expressões. Por simples conveniência, vamos reescrever os projetores entre colchetes nas Eqs.(4.64) e (4.65) em termos das seguintes quantidades

$$\sin(\phi_p^f) = \frac{M_p^f}{E_p^f} \tag{4.66}$$

$$\cos(\phi_p^f) = \frac{p}{E_p^f} \tag{4.67}$$

dessa forma nós obteremos expressões em termos da função ϕ_p^f

$$\Lambda^{f}_{+}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} \left[1 + \beta \sin(\phi^{f}_{p}) + \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \cos(\phi^{f}_{p}) \right]$$
(4.68)

$$\Lambda_{-}^{f}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} \left[1 - \beta \sin(\phi_{p}^{f}) - \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \cos(\phi_{p}^{f}) \right]$$
(4.69)

onde ϕ é o chamado ângulo quiral. A partir desses resultados, não é difícil mostrar que, uma vez realizadas as contrações de Wick, o termo associado à energia do estado de vácuo \mathcal{E} pode ser escrito da seguinte forma

$$\mathcal{E} = 3 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \operatorname{Tr} \left[\Lambda_{-}^{f}(\boldsymbol{p}) \left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta \, m_0 \right) \right] \\ + 2 \int \frac{d^3 p \, d^3 q}{(2\pi)^6} \operatorname{Tr} \left[\Lambda_{+}^{f}(\boldsymbol{p}) \Lambda_{-}^{f}(\boldsymbol{q}) \right] V_C(|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|) \\ + 2 \int \frac{d^3 p \, d^3 q}{(2\pi)^6} \operatorname{Tr} \left[\alpha^i \Lambda_{+}^{f}(\boldsymbol{p}) \, \alpha^i \Lambda_{-}^{f}(\boldsymbol{q}) \right] V_{ij}(|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|)$$
(4.70)

Se agora, reescrevermos a Eq.(4.70) em termos apenas de $\Lambda^f_{-}(\boldsymbol{q})$ e minimizarmos a energia do estado de vácuo com respeito ao ângulo quiral, ou seja

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \phi_p^f} = 0 \tag{4.71}$$

nós obteremos a equação de gap para os quarks constituintes, que pode ser escrita em termos de E_p^f e M_p^f ao invés de sin (ϕ_p^f) e cos (ϕ_p^f)

$$M_{p}^{f} = m_{0}^{f} + \frac{2}{3} \int \frac{d^{3}q}{(2\pi)^{3}} \left[\mathfrak{f}_{1}^{f}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) V_{C}(|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|) + 2 \,\mathfrak{g}_{1}^{f}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) V_{T}(|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|) \right]$$
(4.72)

onde para facilitar a notação nós introduzimos as funções do momento \mathfrak{f}_1^f e \mathfrak{g}_1^f definidas da seguinte forma

$$\mathfrak{f}_1^f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{M_q^f}{E_q^f} - \frac{M_p^f}{E_q^f} \frac{q}{p} \hat{p} \cdot \hat{q}$$

$$(4.73)$$

$$\mathfrak{g}_{1}^{f}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \frac{M_{q}^{f}}{E_{q}^{f}} + \frac{M_{p}^{f}}{E_{q}^{f}} \frac{q}{p} \frac{(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} - p^{2})(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} - q^{2})}{p q |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|^{2}}$$
(4.74)

Usando a equação de gap em H_2 , na Eq.(4.62), ela pode ser colocada na forma diagonal

$$H_2 = \int d^3 p \,\varepsilon_p \,\sum_s \left[\,q_s^{\dagger}(\boldsymbol{p}) q_s(\boldsymbol{p}) + \bar{q}_s^{\dagger}(\boldsymbol{p}) \bar{q}_s(\boldsymbol{p}) \right] \tag{4.75}$$

onde a energia dos quarks constituintes ε_p é dada por

$$\varepsilon_{p}^{f} = \frac{p^{2} + m_{0}^{f} M_{p}^{f}}{E_{p}^{f}} + \frac{2}{3} \int \frac{d^{3}q}{(2\pi)^{3}} \Big[\mathfrak{f}_{2}^{f}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) V_{C}(|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|) + 2 \,\mathfrak{g}_{2}^{f}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) V_{T}(|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|) \Big] \quad (4.76)$$

onde

$$\mathfrak{f}_{2}^{f}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \frac{M_{p}^{f}}{E_{p}^{f}} \frac{M_{q}^{f}}{E_{q}^{f}} + \frac{\boldsymbol{p}}{E_{p}^{f}} \cdot \frac{\boldsymbol{q}}{E_{q}^{f}}$$
(4.77)

$$\mathfrak{g}_{2}^{f}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \frac{M_{p}^{f}}{E_{p}^{f}} \frac{M_{q}^{f}}{E_{q}^{f}} + \frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}-p^{2})(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}-q^{2})}{E_{p}^{f}E_{q}^{f}|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^{2}}$$
(4.78)

A equação de gap em (4.72) é uma equação integral auto-consistente para a variável M_p^f . Essa equação só pode ser resolvida numericamente e para que isso seja implementado, é razoável que antes, uma análise cuidadosa nos limites assintóticos de suas soluções sejam feitas afim de que possíveis divergências sejam tratadas. No entanto, iremos analisar essas soluções no último capítulo desta tese, que será dedicado ao estudo numérico das equações.

4.5.1 A Massa dos Mésons

Uma vez obtida a função de massa dos quarks constituintes, nosso próximo passo será determinar as funções de onda de estado ligado e as massas dos mésons. Empregaremos o método variacional idêntico ao desenvolvido na Sec. 2.3.2. Para isso, partiremos do termo H_2 dado na Eq.(4.75) junto com o termo H_4 dado na Eq.(4.63)

$$H = \int d^3 p \,\varepsilon_p \left[q_s^{\dagger}(\boldsymbol{p}) q_s(\boldsymbol{p}) + \bar{q}_s^{\dagger}(\boldsymbol{p}) \bar{q}_s(\boldsymbol{p}) \right] + \int d^3 x \, d^3 y : \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}) \Gamma^a_{\mu} \Psi(\boldsymbol{x}) D^{\mu\nu}_{ab}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \Psi^{\dagger}(\boldsymbol{y}) \Gamma^b_{\nu} \Psi(\boldsymbol{y}) : \qquad (4.79)$$

Se retornarmos com os índices de sabor e cor no Hamiltoniano acima, nós podemos reescrevê-lo em uma forma mais compacta e útil, de maneira àquela que fizemos na Sec. 2.3.1 na Eq.(2.99). Naturalmente, que não iremos repetir todos os passos que fizemos naquela seção, mas é possível mostrar que podemos escrever o Hamiltoniano como

$$H = \varepsilon(\mu)q^{\dagger}_{\mu}q_{\mu} + \varepsilon(\nu)\bar{q}^{\dagger}_{\nu}\bar{q}_{\nu} + \frac{1}{2}V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)q^{\dagger}_{\mu}q^{\dagger}_{\nu}q_{\rho}q_{\sigma}$$
$$+ \frac{1}{2}V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)\bar{q}^{\dagger}_{\mu}\bar{q}^{\dagger}_{\nu}\bar{q}_{\rho}\bar{q}_{\sigma} + V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)q^{\dagger}_{\mu}\bar{q}^{\dagger}_{\nu}\bar{q}_{\rho}q_{\sigma} \qquad (4.80)$$

Aqui, ε é a energia de partícula única dos quarks e anti-quarks dada na Eq.(4.76) e os índices μ,ν,σ e ρ designam os números quânticos espaciais, cor, spin e sabor dos quarks e antiquarks, { \mathbf{p}, c, s, f }. Além disso, está implícita uma soma e/ou integração sobre índices repetidos.

Para determinarmos as formas explícitas de $V_{q\bar{q}}$ e V_{qq} nós seguimos o mesmo procedimento feito na Sec. 2.3.1. A única modificação, é que agora a massa do quark constituinte que entra nos espinores $u_s(\mathbf{p}) \in v_s(\mathbf{p})$, como também nas energias E_p^f , que naquela instância foi colocado à "mão", agora é uma função do momento $M^f \rightarrow$ M_p^f , sendo solução da Eq.(4.72). Isso, em princípio, torna a forma das equações para $V_{q\bar{q}}$ e V_{qq} extremamente complicadas. No entanto, na determinação da massa dos bárions, como também na dos mésons, os principais ingredientes são, as funções de onda dos hádrons envolvidos e os potenciais de interação V_C e V_T . Basicamente, estaremos interessados nos estados de mais baixa energia do espectro de hádrons. Para esses estados, as amplitudes $\psi e \phi$ são dominadas pelas componentes de baixos momentos. Isso significa que as amplitudes $\psi \in \phi$ decaem rapidamente para valores altos de momento, de tal modo que as componentes de altos momentos nas integrais que envolvem os espinores $u_s(\mathbf{p}) \in v_s(\mathbf{p})$ são fortemente suprimidas. Esse é um fato extremamente importante, pois ele nos habilita a fazer uma aproximação em nosso esquema de cálculo que apesar de não ser extremamente necessária, permite que uma sensível simplificação nos cálculos seja obtida e resultados analíticos possam ser obtidos. Essa aproximação consiste em expandir M_p em série de Taylor como

$$M_p = M - M_1 p - M_2 p^2 + \mathcal{O}(p^3) \tag{4.81}$$

de tal forma que nos espinores $u_s(\mathbf{p})$ e $v_s(\mathbf{p})$ somente termos da ordem $\mathcal{O}(p^2/M^2)$ sejam retidos, ou seja

$$u_f(\boldsymbol{p}) \cong \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{8m_f^2} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{2m_f} \end{pmatrix} \chi_s \quad v_f(-\boldsymbol{p}) \cong \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{2m_f} \\ \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{8m_f^2} \end{pmatrix} \chi_s^c \quad (4.82)$$

onde m_f é o primeiro termo da Eq.(4.81). O efeito dessa aproximação é fazer com que as expressões obtidas para $V_{q\bar{q}} \in V_{qq}$ sejam muito parecidas com as que determinamos nas Eqs.(2.86) e (2.88).

O Hamiltoniano microscópico do modelo está completamente determinado. Dessa forma, podemos utiliza-lo para calcular a massa dos hádrons e também as interações microscópicas que serão usadas para estudar problemas de espalhamento. Estas duas quantidades, no entanto, são essencialmente dominadas pela onda-S. Isso indica que termos proporcionais a ângulos são suprimidos. Além disso, é um fato conhecido na literatura, que no contexto do modelo de troca de um glúon (OGE), de todas a contribuições da interação de Breit, apenas aqueles termos que dependem de q^2 e de spin-spin são importantes para a interação hádron-hádron. Para maiores detalhes ver por exemplo as Refs.[86, 87]. Como na presente tese, estamos trabalhando com um modelo de quarks cujas escalas de massa são da mesma ordem que no modelo OGE, nas expressões para $V_{q\bar{q}}$ e V_{qq} nós só estaremos interessados apenas nos termos que dependem de q^2 e de spin-spin. Sendo assim, as componentes do potencial de Breit que usaremos são

$$\left. \begin{array}{l} V_{qq} \\ V_{q\bar{q}} \end{array} \right\} = \delta^{(3)} \left(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}' \right) \left(\mathcal{F}^{a} \right)^{c_{\mu}c_{\sigma}} \left(\mathcal{F}^{a} \right)^{c_{\nu}c_{\rho}} v(q)$$
(4.83)

onde $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\sigma}$ e $\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{p}_{\rho} - \boldsymbol{p}_{\nu}$. Além disso, na Eq.(4.83) o potencial v(q) é definido pela seguinte equação

$$v(q) = V_C(q) + \frac{2}{3} \frac{q^2}{M_\mu M_\nu} \mathbf{S}_{s_\mu s_\sigma} \cdot \mathbf{S}_{s_\nu s_\rho} V_T(q)$$
(4.84)

com o setor de cor, dado pelas matrizes de Gell-Mann, respeitando a seguinte relação

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{2} & \text{para quarks,} \\ -\frac{(\lambda^a)^T}{2} & \text{para antiquarks.} \end{cases}$$
(4.85)

Para o cálculo da massa dos mésons nós procederemos da seguinte maneira. Primeiramente, iremos pegar o setor do Hamiltoniano dado na Eq.(4.80) que envolva quarks e antiquarks

$$H_{q\bar{q}} = \varepsilon(\mu)q^{\dagger}_{\mu}q_{\mu} + \varepsilon(\nu)\bar{q}^{\dagger}_{\nu}\bar{q}_{\nu} + \frac{1}{2}V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)q^{\dagger}_{\mu}\bar{q}^{\dagger}_{\nu}\bar{q}_{\rho}q_{\sigma}$$
(4.86)

Uma vez tendo definido o Hamiltoniano, nós partiremos da seguinte equação para computar a massa dos mésons

$$\langle \beta | H_{q\bar{q}} | \beta' \rangle_{\beta=\beta'} = E_{\beta} \langle \beta | \beta' \rangle_{\beta=\beta'}$$
(4.87)

aqui o índice β designa de maneira compacta os números quânticos que caracterizam o méson, ou seja, $\beta = \{$ spin, isospin, espaço $\}$. Agora será necessário definir o estado de um méson em nosso formalismo de segunda quantização.

O estado de um méson é descrito em termos de um operador de criação M_{β}^{\dagger}

$$|\beta\rangle = M^{\dagger}_{\beta}|0\rangle = \Phi^{\mu\nu}_{\beta}q^{\dagger}_{\mu}\bar{q}^{\dagger}_{\nu}|0\rangle \qquad (4.88)$$

É importante notar que o operador M_{β}^{\dagger} atua sobre um estado de vácuo quebrado quiralmente. A função de onda total de um méson em termos de graus de liberdade de quarks é, (ver a Eq.(3.24))

$$\Phi_{\beta}^{\mu\nu} = \frac{\delta^{c_{\mu}c_{\nu}}}{\sqrt{3}} \,\chi_{\beta}^{\xi_{\mu}\xi_{\nu}} \,\Phi_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) \tag{4.89}$$

Por simplicidade substituimos $C_{\beta}^{c_{\mu}c_{\nu}} = \frac{\delta^{c_{\mu}c_{\nu}}}{\sqrt{3}}$. A parte espacial é definida a partir da seguinte combinação linear

$$\Phi_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) = \sum_{n=1}^{N} a_n \Phi_{\boldsymbol{P}}^{(n)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu})$$
(4.90)

Nesta tese, estaremos usando para a função de onda relativa o seguinte $Ans \ddot{a} tze$ Gaussiano

$$\Phi_{\boldsymbol{P}}^{(n)}(\boldsymbol{p}_{\mu},\boldsymbol{p}_{\nu}) = \delta(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\nu}) \phi^{(n)}(\boldsymbol{p}_{\mu},\boldsymbol{p}_{\nu})$$
(4.91)

 com

$$\phi^{(n)}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\nu}) = \left[\frac{1}{\beta_{n}^{(N)}}\right]^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\left[m_{1} \boldsymbol{p}_{\mu} - m_{2} \boldsymbol{p}_{\nu}\right]^{2}}{8\beta_{n}^{(N)}}}$$
(4.92)

Os parâmetros usados na definição da função de onda espacial relativa dos mésons são o parâmetro de escala do oscilador $\beta_n^{(N)} = n \beta_N^2$ e as razões de massa

$$m_1 = \frac{2m_{\bar{q}}}{m_{\bar{q}} + m_q} \tag{4.93}$$

$$m_2 = \frac{2m_q}{m_{\bar{q}} + m_q} \tag{4.94}$$

Os parâmetros $\beta \in a_n$ serão determinados a partir de um esquema variacional. Agora, usando a Eq.(4.88) obtemos

$$\langle \beta | \beta' \rangle = \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta'}^{\mu'\nu'} \langle 0 | \bar{q}_{\nu} \bar{q}_{\mu} q_{\mu'}^{\dagger} \bar{q}_{\nu'}^{\dagger} | 0 \rangle$$

$$(4.95)$$

$$= \delta_{\beta\beta'} \int d^3 p_1 \, d^3 p_2 \, \Phi_{P}^*(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \, \Phi_{P'}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$$
(4.96)

Usando a Eq.(4.90) em (4.96) é imediato obtermos, no limite em que $\beta = \beta'$, a seguinte equação

$$\langle \beta | \beta' \rangle_{\beta=\beta'} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} a_n^* a_{n'} O_{nn'}$$
 (4.97)

onde por conveniência nós introduzimos uma matriz que chamaremos overlap

$$O_{nn'} = \int d^3 p_1 \, d^3 p_2 \, \Phi_{\boldsymbol{P}}^{(n)*}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \, \Phi_{\boldsymbol{P}'}^{(n')}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \tag{4.98}$$

Nosso objetivo, agora, será calcular os elementos de matriz do Hamiltoniano, lado esquerdo da Eq.(4.87). E para isso, substituiremos (4.88), e seu adjunto, nesta equação

$$\langle \beta | H_{q\bar{q}} | \beta' \rangle = \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} \varepsilon(\mu) \Phi_{\beta'}^{\mu'\nu'} \langle 0 | \bar{q}_{\nu}q_{\mu}q_{\mu}^{\dagger}q_{\mu} q_{\mu'}^{\dagger}\bar{q}_{\nu'}^{\dagger}|0\rangle$$

$$+ \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} \varepsilon(\nu) \Phi_{\beta'}^{\mu'\nu'} \langle 0 | \bar{q}_{\nu}q_{\mu}\bar{q}_{\nu}^{\dagger}\bar{q}_{\nu} q_{\mu'}^{\dagger}\bar{q}_{\nu'}^{\dagger}|0\rangle$$

$$+ \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Psi_{\beta'}^{\mu'\nu'} \langle 0 | \bar{q}_{\nu}q_{\mu} q_{\mu}^{\dagger}q_{\mu}\bar{q}_{\rho}q_{\sigma}q_{\mu'}^{\dagger}\bar{q}_{\nu'}^{\dagger}|0\rangle$$

$$(4.99)$$

Assim, após realizarmos as contrações entre os operadores de criação e aniquilação, obtemos o seguinte resultado

$$\langle \beta | H_{q\bar{q}} | \beta' \rangle = \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} \varepsilon(\mu) \Phi_{\beta'}^{\mu\nu} + \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} \varepsilon(\nu) \Phi_{\beta'}^{\mu\nu} + \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Psi_{\beta'}^{\sigma\rho}$$
(4.100)

Nosso último passo será computar cada um dos termos que aparecem na Eq.(4.100). Vamos começar pelo termo envolvendo a energia de partícula única

$$\langle \varepsilon(\mu) \rangle \equiv \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} \ \varepsilon(\mu) \ \Phi_{\beta'}^{\mu\nu} \tag{4.101}$$

Se substituirmos em (4.101) a Eq.(4.89), nós teremos o seguinte resultado

$$\langle \varepsilon(\mu) \rangle = \delta_{\beta\beta'} \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} a_n^* a_{n'} \int d^3 p_1 d^3 p_2 \Phi_{P}^{(n)*}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \varepsilon_{\boldsymbol{p}_1}^{f_1} \Phi_{P'}^{(n')}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$$
(4.102)

E analogamente para a antipartícula, nós teremos que

$$\langle \varepsilon(\nu) \rangle = \delta_{\beta\beta'} \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} a_n^* a_{n'} \int d^3 p_1 \, d^3 p_2 \, \Phi_{\boldsymbol{P}}^{(n)*}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \, \varepsilon_{\boldsymbol{p}_2}^{f_2} \, \Phi_{\boldsymbol{P}'}^{(n')}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \quad (4.103)$$

Para o termo envolvendo a interação quark-antiquark, nós iremos usar as Eqs.(4.83) e (4.84). Sendo assim vamos calcular o termo potencial da Eq.(4.99), ou seja

$$\langle V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \rangle \equiv \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\sigma\rho}$$
(4.104)

Ao substituirmos na Eq.(4.104) a definição dada em (4.89), nós obteremos que

$$\langle V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \rangle = \frac{1}{3} \,\delta^{c_3c_4} \,\delta^{c_1c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_4c_2} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2}\right)^{c_3c_1} \chi_{\beta}^{*\xi_1\xi_2} \times \int d^3p_1 \,d^3p_2 \,\Phi_{\mathbf{P}}^*(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) \,\Phi_{\mathbf{P}'}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) \,U_{q\bar{q}}(\mathbf{q}) \,\chi_{\beta'}^{\xi_1\xi_2}$$
(4.105)

Nós podemos ainda reescrever a Eq.(4.105) em termos da Eq.(4.84), ou seja

$$\langle V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)\rangle = -\frac{4}{3} \int d^3p_1 \, d^3p_2 \, \Phi_{\boldsymbol{P}}^*(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2) \, \Phi_{\boldsymbol{P}'}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2) \\ \times \left[V_C(q) + \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_{f_1}m_{f_2}} \left\langle \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 \right\rangle V_T(q) \right]$$
(4.106)

Apenas por completeza, na passagem da Eq.(4.105) para a Eq.(4.106) nós usamos o seguinte resultado

$$\frac{1}{3}\delta^{c_3c_4}\delta^{c_1c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{c_3c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2}\right)^{c_4c_2} = -\frac{4}{3}$$
(4.107)

e além disso, a partir de agora nós iremos usar a seguinte definição

$$\langle \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 \rangle \equiv \chi_{\beta}^{*\xi_1 \xi_2} \boldsymbol{S}_{s_3 s_1} \cdot \boldsymbol{S}_{s_4 s_2} \chi_{\beta'}^{\xi_1 \xi_2}$$
(4.108)

Podemos, neste ponto, substituir na Eq.(4.106) a função de onda de um bárion dada na Eq.(4.90), para obter o resultado

$$\langle V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \rangle = -\frac{4}{3} \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} a_{n}^{*} a_{n'} \int d^{3}p_{1} d^{3}p_{2} \Phi_{P}^{(n)*}(\boldsymbol{p}_{1},\boldsymbol{p}_{2}) \Phi_{P'}^{(n')}(\boldsymbol{p}_{1},\boldsymbol{p}_{2}) \\ \times \left[V_{C}(q) + \frac{2}{3} \frac{q^{2}}{m_{f_{1}}m_{f_{2}}} \left\langle \boldsymbol{S}_{1} \cdot \boldsymbol{S}_{2} \right\rangle V_{T}(q) \right]$$
(4.109)

Por fim vamos juntar as Eqs.(4.102), (4.103) e (4.109), no limite em que $\beta = \beta'$, e reescrever a Eq.(4.99) da seguinte forma

$$\langle \beta | H_{q\bar{q}} | \beta' \rangle = \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} a_n^* a_{n'} \int d^3 p_1 \, d^3 p_2 \, \Phi_{P}^{(n)*}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}) \, \mathcal{H}^{q\bar{q}} \, \Phi_{P'}^{(n')}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}) \quad (4.110)$$

onde introduzimos

$$\mathcal{H}^{q\bar{q}} = \varepsilon_{\boldsymbol{p}_1}^{f_1} + \varepsilon_{\boldsymbol{p}_2}^{f_2} - \frac{4}{3} \left[V_C(q) + \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_{f_1} m_{f_2}} \left\langle \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 \right\rangle V_T(q) \right]$$
(4.111)

Por conveniência vamos definir uma matriz Hamiltoniana, da seguinte forma

$$\mathcal{H}_{nn'}^{q\bar{q}} = \int d^3 p_1 \, d^3 p_2 \, \Phi_{\boldsymbol{P}}^{(n)*}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}) \, \mathcal{H}^{q\bar{q}} \, \Phi_{\boldsymbol{P}'}^{(n')}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}) \tag{4.112}$$

de tal modo que teremos

$$\langle \beta | H^{q\bar{q}} | \beta' \rangle = \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} a_n^* a_{n'} \mathcal{H}_{nn'}^{q\bar{q}}$$
 (4.113)

Finalmente, vamos agora substituir as Eqs.(4.113) e (4.97) em (4.87), e obter depois de um simples rearranjo que

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} a_{n}^{*} a_{n'} \left[\mathcal{H}_{nn'}^{q\bar{q}} - E_{\beta} O_{nn'} \right] = 0$$
(4.114)

A partir do resultado acima, junto com a condição que $\delta a_n^* \neq 0$, nós obteremos a conhecida equação de autovalores

$$\mathcal{H}_{nn'}^{q\bar{q}} \ a_{n'} = E \ O_{nn'} \ a_{n'} \tag{4.115}$$

Como estamos usando Gaussianas para a parte espacial da função de onda, nós podemos computar tanto a matriz overlap quando a matriz Hamiltoniana de maneira imediata, para isso basta usar as Eqs.(4.91) e (4.92) e logo a seguir realizar as integrais nas variáveis de momento. O resultado desse procedimento, para $P_{\beta} = 0$ será

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{nn'}^{q\bar{q}} &= \left[\frac{2\pi}{\beta_N^2(n+n')}\right]^{\frac{3}{2}} \left[\frac{(n+n')}{2\pi\beta_N^2(nn')}\right]^{\frac{3}{2}} \int d^3p \left[\frac{p^2}{E_p^{f_1}} + m_{f_1}\frac{M_p^{f_1}}{E_p^{f_1}} + \frac{p^2}{E_p^{f_2}} + m_{f_2}\frac{M_p^{f_2}}{E_p^{f_2}}\right] \\ \times e^{-\frac{(n+n')p^2}{2(nn')\beta_N^2}} + \frac{2}{3} \left[\frac{2\pi}{\beta_N^2(n+n')}\right]^{\frac{3}{2}} \left[\frac{(n+n')}{2\pi\beta_N^2(nn')}\right]^{\frac{3}{2}} \int \frac{d^3q d^3p}{(2\pi)^3} \left[\mathfrak{f}_2^{f_1}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) + \mathfrak{f}_2^{f_2}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) - 2\right] \\ \times e^{-\frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2}{(n+n')\beta_N^2}} V_C(|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|)e^{-\frac{(n+n')p^2}{2(nn')\beta_N^2}} + \frac{4}{3} \left[\frac{2\pi}{\beta_N^2(n+n')}\right]^{\frac{3}{2}} \left[\frac{(n+n')}{2\pi\beta_N^2(nn')}\right]^{\frac{3}{2}} \int \frac{d^3q d^3p}{(2\pi)^3} \left[\times \mathfrak{g}_2^{f_1}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) + \mathfrak{g}_2^{f_2}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) - \frac{2}{3}\frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2}{m_{f_1}m_{f_2}} \langle \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 \rangle e^{-\frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2}{(n+n')\beta_N^2}} V_T(|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|)e^{-\frac{(n+n')p^2}{2(nn')\beta_N^2}} (4.116) \end{aligned}$$

onde
$$C_{q\bar{q}}$$
 é uma constante necessária, e expressa a inabilidade do modelo em lidar
com uma escala de energia absoluta para energia. Uma tal constante foi levada
em conta na Sec. 2.3.2 para obter uma boa descrição do espectro de massas dos
mésons. Em nosso modelo de quarks, seja (SS) ou (LTT), o valor usado para essa
constante foi de $C_{q\bar{q}} = 1$ GeV. E por completeza, o termo associado à matriz overlap
da Eq.(4.115) é dado por

$$O_{nn'} = \left[\frac{2\pi}{\beta_N^2 (n+n')}\right]^{\frac{3}{2}}$$
(4.117)

Já as funções $f_2^f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, $g_2^f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ foram definidas nas Eqs. (4.77) e (4.78). Devemos notar que devido a forma extremamente complicada dos potenciais de Coulomb e transverso, não é possível determinar os elementos de matriz do Hamiltoniano de forma completamente analítica e, por isso, as integrais restantes serão determinadas numericamente. Uma vez essas integrais sejam calculadas, nós usaremos o mesmo método numérico da Sec. 2.3.3 e Sec. 2.3.4 para resolver o problema de autovalores da Eq.(4.114). Os resultados numéricos dessas simulações para os mésons de interesse nesta tese serão apresentados no capítulo 6.

Algumas observações importantes devem ser feitas neste ponto. Na equação para o Hamiltoniano que será usado para calcular a massa dos mésons na Eq.(4.116), está presente a interação de confinamento V_C , que é divergente no infravermelho. Mas o fato notável a ser observado, é que esta contribuição divergente vem tanto da energia de partícula única ε_p^f , quanto da energia de interação. E esses termos são tais que, para estados singleto de cor, elas se cancelam exatamente. Para ver que esse cancelamento realmente acontece, basta notar que quando $\mathbf{p} \to \mathbf{q}$, ponto em que a integral se torna fortemente divergente, nós temos que

$$\mathfrak{f}_{2}^{f_{1}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}) = \frac{M_{\boldsymbol{p}}^{f_{1}}}{E_{\boldsymbol{p}}^{f_{1}}} \frac{M_{\boldsymbol{p}}^{f_{1}}}{E_{\boldsymbol{p}}^{f_{1}}} + \frac{\boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}}^{f_{1}}} \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}}^{f_{1}}} \to 1$$
(4.118)

$$\mathbf{\mathfrak{f}}_{2}^{f_{2}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}) = \frac{M_{\boldsymbol{p}}^{f_{2}}}{E_{\boldsymbol{p}}^{f_{2}}} \frac{M_{\boldsymbol{p}}^{f_{2}}}{E_{\boldsymbol{p}}^{f_{2}}} + \frac{\boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}}^{f_{2}}} \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}}^{f_{2}}} \to 1$$
(4.119)

$$e^{-\frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p})^2}{(n+n')\beta_N^2}} \to 1 \tag{4.120}$$

Dessa forma é fácil ver que os termos que multiplicam V_C se anulam identicamente para qualquer número de Gaussianas que sejam usadas, ou seja

$$\left[\mathfrak{f}_{2}^{f_{1}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) + \mathfrak{f}_{2}^{f_{2}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) - 2e^{-\frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^{2}}{(n+n')\beta_{N}^{2}}}\right]V_{C} \rightarrow \left[1+1-2\right]V_{C}$$
(4.121)

Naturalmente, trata-se de um delicado cancelamento numérico de duas divergências.

4.5.2 A Massa dos Bárions

No cálculo da massa dos bárions será necessário apenas o setor do Hamiltoniano dado na Eq.(4.80) que envolva quarks, ou seja

$$H_{qq} = \varepsilon(\mu)q^{\dagger}_{\mu}q_{\mu} + \frac{1}{2}V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)q^{\dagger}_{\mu}q^{\dagger}_{\nu}q_{\rho}q_{\sigma} \qquad (4.122)$$

Para determinarmos explicitamente essa massa nós partiremos da seguinte equação

$$\langle \alpha | H_{qq} | \alpha' \rangle_{\alpha = \alpha'} = E_{\alpha} \langle \alpha | \alpha' \rangle_{\alpha = \alpha'}$$
 (4.123)

onde o índice α designa de maneira compacta os números quânticos que caracterizam o bárion, ou seja, $\alpha = \{ \text{spin}, \text{isospin}, \text{espaço} \}$. Temos a condição adicional de que ao final dos cálculos dos elementos de matriz devemos fazer $\alpha = \alpha'$ e também tomar o momento de c.m. $\mathbf{P}_{\alpha} = 0$.

O estado de um bárion é descrito em termos de um operador de criação B^{\dagger}_{α}

$$|\alpha\rangle = B^{\dagger}_{\alpha}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Psi^{\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}}_{\alpha} q^{\dagger}_{\mu_{1}} q^{\dagger}_{\mu_{2}} q^{\dagger}_{\mu_{3}}|0\rangle$$
(4.124)

onde $\sqrt{3!}$ é um fator de normalização. A função de onda total do bárion é

$$\Psi_{\alpha}^{\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}} = \frac{1}{\sqrt{3!}} \epsilon^{c_{1}c_{2}c_{3}} \chi_{\alpha}^{\xi_{1}\xi_{2}\xi_{3}} \Psi_{P}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{2}, \boldsymbol{p}_{3})$$
(4.125)

onde a parte espacial é definida a partir da seguinte combinação linear

$$\Psi_{P}(p_{1}, p_{2}, p_{3}) = \sum_{m=1}^{N} d_{m} \Psi_{P}^{(m)}(p_{1}, p_{2}, p_{3})$$
(4.126)

Nós estaremos usando para a função de onda relativa o seguinte Ansätze Gaussiano

$$\Psi_{\boldsymbol{P}}^{(m)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \delta(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_3}) \psi^{(m)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$$
(4.127)

com

$$\psi^{(m)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \left[\frac{3}{\alpha_m^{(N)^4}}\right]^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{1}{2\alpha_m^{(N)}} \left[\frac{\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2}{\sqrt{2}}\right]^2} e^{-\frac{w_r^2}{2\alpha_m^{(N)}} \left[\frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - 2m_r \boldsymbol{p}_3}{\sqrt{6}}\right]^2}$$
(4.128)

onde os parâmetros usados na definição da função de onda espacial relativa dos bárions são o parâmetro de escala do oscilador $\alpha_m^{(N)} = m \alpha_N^2$ e a razão das massas dos quarks leve m_l e pesados m_h

$$w_r = \frac{3}{1+2r_m}$$
(4.129)

$$r_m = \frac{m_l}{m_h} \tag{4.130}$$

onde α e d_n serão determinados por meio do método variacional. Mas nesta tese, estaremos interessados apenas no núcleon que possui $m_l = m_h = m_u$.

Vamos iniciar nosso cálculo a partir do lado esquerdo da Eq.(4.123)

$$\langle \alpha | \alpha' \rangle = \Psi_{\alpha}^{*\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}} \Psi_{\alpha'}^{\mu_{1}'\mu_{2}'\mu_{3}'} \langle 0 | q_{\mu_{3}}q_{\mu_{2}}q_{\mu_{1}}q_{\mu_{1}'}^{\dagger}q_{\mu_{2}'}^{\dagger}q_{\mu_{3}'}^{\dagger} | 0 \rangle$$

$$(4.131)$$

$$= \delta_{\alpha\alpha'} \Psi_{\alpha}^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\alpha'}^{\mu_1\mu_2\mu_3}$$
(4.132)

$$= \delta_{\alpha\alpha'} \int d^3 p_1 \, d^3 p_2 \, d^3 p_3 \, \Psi_{P}^*(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) \, \Psi_{P'}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) \quad (4.133)$$

Depois de substituirmos a Eq.(4.126) na Eq.(4.133) nós obteremos o seguinte resultado

$$\langle \alpha | \alpha' \rangle = \sum_{m=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} d_{m}^{*} d_{m'} O_{mm'}$$
 (4.134)

onde por conveniência nós definimos a seguinte matriz overlap

$$O_{mm'} = \int d^3 p_1 \, d^3 p_2 \, d^3 p_3 \, \Psi_{\boldsymbol{P}}^{(m)*}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) \, \Psi_{\boldsymbol{P}'}^{(m')}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) \tag{4.135}$$

Nosso próximo passo será calcular os elementos de matriz do Hamiltoniano do lado direito da Eq.(4.123), ou seja

$$\langle \alpha | H_{qq} | \alpha' \rangle = \Psi_{\alpha}^{*\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}} \varepsilon(\mu) \Psi_{\alpha'}^{\mu'_{1}\mu'_{2}\mu'_{3}} \langle 0 | q_{\mu_{3}}q_{\mu_{2}}q_{\mu_{1}} q_{\mu}^{\dagger}q_{\mu'_{1}}^{\dagger}q_{\mu'_{2}}^{\dagger}q_{\mu'_{3}}^{\dagger} | 0 \rangle + \frac{1}{2} \Psi_{\alpha}^{*\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}} V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \Psi_{\alpha'}^{\mu'_{1}\mu'_{2}\mu'_{3}} \langle 0 | q_{\mu_{3}}q_{\mu_{2}}q_{\mu_{1}} q_{\mu}^{\dagger}q_{\nu}^{\dagger}q_{\rho}q_{\sigma} q_{\mu'_{1}}^{\dagger}q_{\mu'_{2}}^{\dagger}q_{\mu'_{3}}^{\dagger} | 0 \rangle$$

$$(4.136)$$

Depois de realizarmos as contrações entre os operadores de criação e aniquilação nós obteremos a seguinte expressão

$$\langle \alpha | H_{qq} | \alpha' \rangle = 3 \Psi_{\alpha}^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \varepsilon(\mu_1) \Psi_{\alpha'}^{\mu_1\mu_2\mu_3} + 3 \Psi_{\alpha}^{*\mu\nu\mu_3} V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \Psi_{\alpha'}^{\sigma\rho\mu_3}$$
(4.137)

Nosso último passo agora, será computar cada um dos termos que aparecem na Eq.(4.137). Vamos começar pelo termo envolvendo a energia de partícula única

$$\langle \varepsilon(\mu_1) \rangle \equiv 3 \,\Psi_{\alpha}^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \,\varepsilon(\mu_1) \,\Psi_{\alpha'}^{\mu_1\mu_2\mu_3} \tag{4.138}$$

Se substituirmos na Eq.(4.138), a função de onda de um bárion, dada na Eq.(4.125), nós teremos como resultado a seguinte expressão

$$\langle \varepsilon(\mu_{1}) \rangle = 3 \,\delta_{\alpha\alpha'} \sum_{m'=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} d_{m}^{*} d_{m'} \int d^{3} p_{1} d^{3} p_{2} \, d^{3} p_{3} \Psi_{P}^{(m)*}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{2}, \boldsymbol{p}_{3}) \varepsilon_{\boldsymbol{p}_{1}}^{f_{1}} \Psi_{P'}^{(m')}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{2}, \boldsymbol{p}_{3})$$

$$(4.139)$$

Para o termo potencial vamos partir da seguinte equação

$$\langle V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \rangle \equiv 3 \Psi_{\alpha}^{*\mu\nu\mu_3} V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \Psi_{\alpha'}^{\sigma\rho\mu_3}$$
(4.140)

onde nós iremos usar para a interação de Breit as Eqs.(4.83) e (4.84). Se agora, nós substituirmos na Eq.(4.140) a definição de função de onda total do bárion, ver Eq.(4.125), nós obteremos que

$$\langle V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \rangle = \frac{3}{3!} \, \varepsilon^{c_4 c_3 c} \, \varepsilon^{c_2 c_1 c} \, \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^{c_4 c_2} \, \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^{c_3 c_1} \, \delta_{f_4 f_2} \, \delta_{f_3 f_1} \, \frac{1}{18} \, \chi^{*\xi_4 \xi_3 \xi}_{\alpha}$$

$$\times \, \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \, \Psi^*_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) \, \Psi_{\boldsymbol{P}'}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) \, U_{qq}(\boldsymbol{q}) \, \chi^{\xi_2 \xi_1 \xi}_{\alpha'} \, (4.141)$$

Essa expressão ainda pode ser reescrita explicitamente como

$$\langle V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \rangle = -2 \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \Psi_{\boldsymbol{P}}^*(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) \Psi_{\boldsymbol{P}'}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$$

$$\times \left[V_C(\boldsymbol{q}) + \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_{f_1} m_{f_2}} \langle \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 \rangle V_T(\boldsymbol{q}) \right]$$

$$(4.142)$$

onde por completeza, nós devemos notar que na passagem da Eq.(4.141) para a Eq.(4.142) foi usado o seguinte resultado

$$\frac{3}{3!} \varepsilon^{c_4 c_3 c} \varepsilon^{c_2 c_1 c} \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^{c_4 c_2} \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^{c_3 c_1} = -4 \tag{4.143}$$

Além disso, para compactar a notação, usamos

$$\langle \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 \rangle \equiv \frac{1}{18} \chi^{*\xi_4 \xi_3 \xi} \boldsymbol{S}_{s_3 s_1} \cdot \boldsymbol{S}_{s_4 s_2} \chi^{*\xi_2 \xi_1 \xi}$$
(4.144)

Agora nós podemos substituir na Eq.(4.143) a função de onda de um bárion dada na Eq.(4.125), e obter o seguinte resultado

$$\langle V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \rangle = \sum_{m=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} d_{m}^{*} d_{m'} \int d^{3}p_{1} d^{3}p_{2} d^{3}p_{3} \Psi_{P}^{(m)*}(\boldsymbol{p}_{1},\boldsymbol{p}_{2},\boldsymbol{p}_{3}) \Psi_{P'}^{(m')}(\boldsymbol{p}_{1},\boldsymbol{p}_{2},\boldsymbol{p}_{3}) \\ \times \left[V_{C}(q) + \frac{2}{3} \frac{q^{2}}{m_{f_{1}}m_{f_{2}}} \langle \boldsymbol{S}_{1} \cdot \boldsymbol{S}_{2} \rangle V_{T}(q) \right]$$
(4.145)

Por fim, se juntarmos as Eqs.(4.139) e (4.145), no limite em que $\alpha = \alpha'$, nós podemos reescrever o Hamiltoniano dado na Eq.(4.137), como

$$\langle \alpha | H_{qq} | \alpha' \rangle = \sum_{m=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} d_{m}^{*} d_{m'} \int d^{3}p_{1} d^{3}p_{2} d^{3}p_{3} \Psi_{P}^{(m)*}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{2}, \boldsymbol{p}_{3}) \mathcal{H}^{qq} \Psi_{P'}^{(m')}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{2}, \boldsymbol{p}_{3})$$

$$(4.146)$$

 com

$$\mathcal{H}^{qq} = 3 \varepsilon_{\boldsymbol{p}_1}^{f_1} - 2 \left[V_C(q) + \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_{f_1} m_{f_2}} \left\langle \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 \right\rangle V_T(q) \right]$$
(4.147)

Uma forma mais conveniente para a Eq.(4.146) é obtida se definirmos uma matriz Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_{mm'}^{qq} = \int d^3 p_1 \, d^3 p_2 \, d^3 p_3 \, \Psi_{\boldsymbol{P}}^{(m)*}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) \, \mathcal{H}_{qq} \, \Psi_{\boldsymbol{P}'}^{(m')}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) \tag{4.148}$$

De tal modo que teremos

$$\langle \alpha | H^{qq} | \alpha' \rangle = \sum_{m=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} d_m^* d_{m'} \mathcal{H}_{mm'}^{qq}$$
 (4.149)

Finalmente, vamos agora substituir as Eqs.(4.134) e (4.149) em (4.123), e depois de uma simples manipulação obter que

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} d_{m}^{*} d_{m'} \left[\mathcal{H}_{mm'}^{qq} - E_{\alpha} O_{mm'} \right] = 0$$
(4.150)

A partir da Eq.(4.150), junto com a condição que $\delta d_m^* \neq 0$, nós obteremos uma equação de autovalores da seguinte forma

$$\mathcal{H}_{mm'}^{qq} d_{m'} = E_{\alpha} O_{mm'} d_{m'} \tag{4.151}$$

Uma vez que estamos usando Gaussianas para a parte espacial da função de onda, nós podemos computar tanto a matriz overlap quando a matriz Hamiltoniana facilmente, para isso basta usar as Eqs.(4.127) e (4.128) e logo a seguir realizar as integrais nas variáveis de momento. Assim, nós teremos para $\mathbf{P}_{\alpha} = 0$ que

$$\mathcal{H}_{mm'}^{qq} = 3 \left[\frac{2\pi}{\alpha_N^2(m+m')} \right]^3 \left[\frac{3(m+m')}{4\pi\alpha_N^2(mm')} \right]^{\frac{3}{2}} \int d^3p \left[\frac{p^2}{E_p^{f_1}} + m_{f_1} \frac{M_p^f}{E_p^f} \right] e^{-\frac{3(m+m')p^2}{4(mm')\alpha_N^2}} \\ + 2 \left[\frac{2\pi}{\alpha_N^2(m+m')} \right]^3 \left[\frac{3(m+m')}{4\pi\alpha_N^2(mm')} \right]^{\frac{3}{2}} \int \frac{d^3q d^3p}{(2\pi)^3} \left[\mathfrak{f}_2^{f_1}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) - e^{-\frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2}{\alpha_N^2(m+m')}} \right] V_C(|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|) \\ \times e^{-\frac{3(m+m')p^2}{4(m'm)\alpha_N^2}} + 4 \left[\frac{2\pi}{\alpha_N^2(m+m')} \right]^3 \left[\frac{3(m+m')}{4\pi\alpha_N^2(mm')} \right]^{\frac{3}{2}} \int \frac{d^3q d^3p}{(2\pi)^3} \left[\mathfrak{g}_2^{f_1} + \frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2}{3m_{f_1}^2} \langle \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 \rangle \\ \times e^{-\frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2}{(m+m')\alpha_N^2}} \right] V_T(|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|) e^{-\frac{(m+m')p^2}{2(mm')\alpha_N^2}}$$

$$(4.152)$$

onde C_{qqq} é uma constante necessária para obter uma boa descrição do espectro de massas dos bárions. Em nosso modelo de quarks, seja (SS) ou (LTT), o valor usado para essa constante foi de $C_{qqq} = 1 \text{ GeV}$. Já a matriz overlap é dada por

$$O_{mm'} = \left[\frac{2\pi}{\alpha_N^2(m+m')}\right]^3$$
(4.153)

As integrais restantes serão determinadas numericamente, de maneira análoga ao caso de mésons. Uma vez essas integrais estejam calculadas, nós usaremos o mesmo método numérico da Sec. 2.3.3 e Sec. 2.3.4 para resolver o problema de autovalores da Eq.(4.114). No entanto, antes que isso seja feito é necessário que algumas observações sejam feitas.
Na equação para o Hamiltoniano que será usado para calcular a massa dos bárions em (4.152), novamente esta presente a interação de confinamento V_C , que é divergente no infravermelho. Para ver que o cancelamento das duas contribuições que acompanham V_C , realmente ocorre basta notar que para $\mathbf{p} \to \mathbf{q}$, ponto em que a integral se torna fortemente divergente nós temos que

$$\mathfrak{f}_{2}^{f_{1}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}) = \frac{M_{\boldsymbol{p}}^{f_{1}}}{E_{\boldsymbol{p}}^{f_{1}}} \frac{M_{\boldsymbol{p}}^{f_{1}}}{E_{\boldsymbol{p}}^{f_{1}}} + \frac{\boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}}^{f_{1}}} \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}}^{f_{1}}} \to 1 \qquad e^{-\frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p})^{2}}{(n+n')\alpha_{N}^{2}}} \to 1 \qquad (4.154)$$

É fácil ver, então, que os termos que multiplicam V_C se anulam identicamente para qualquer número de Gaussianas que sejam usadas, ou seja

$$\left[\mathfrak{f}_{2}^{f_{1}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})-e^{-\frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^{2}}{(n+n')\alpha_{N}^{2}}}\right]V_{C}\rightarrow\left[1-1\right]V_{C}$$
(4.155)

Capítulo 5

Interações Efetivas Méson-Bárion

5.1 Introdução

Neste capítulo vamos discutir a obtenção de interações efetivas méson-bárion de curto-alcance, devido ao mecanismo de troca de quark-glúon, e de longo-alcance, devido a troca de mésons. Para fazer isso, nós primeiramente apresentaremos um esquema de aproximação para obter interações efetivas méson-bárion a partir do *Resonating Group Method* (RGM). Logo a seguir, nós discutiremos a obtenção das potenciais de troca de mésons através do formalismo de redução (LSZ).

5.2 Modelo de Quark para a Interação Méson-Bárion

Até agora, nós determinamos completamente a forma das interações microscópicas e também dos estados hadrônicos no espaço de Fock. O próximo passo em nossa abordagem será derivar as interações hadrônicas efetivas. Para fazer isso, usaremos o *Resonating Group Method* (RGM). Existe uma extensa literatura de revisão do RGM – ver Refs. [88, 89, 59]. Além disso, é preciso comentar que também existem outras abordagens que podem ser usadas para se obter interações microscópicas hádron-hádron – ver Ref. [90].

Nós estaremos interessados neste capítulo, especificamente, na interação mésonbárion. No entanto, essa já foi determinada originalmente na tese de doutoramento de Victor Vizcarra [59]. Dessa forma, na discussão que segue, nós nos restringiremos a descrever de maneira resumida os principais passos realizados naquela referência.

O esquema utilizado para determinar as interações efetivas méson-bárion tem como ponto de partida o RGM. O RGM foi um formalismo desenvolvido por Wheeler [91] na década de 30 para investigar a interação núcleo-núcleo. Sua grande vantagem é permitir o tratamento coletivo de sistemas envolvendo muitos corpos, ou seja, ele permite a solução de problemas que envolvam partículas compostas. No contexto do modelo de quarks, o RGM foi formulado na notação segundo-quantizada no trabalho original desenvolvido na Ref. [92]. A idéia básica por trás desse esquema, é expandir o kernel de antissimetrização em potências das amplitudes de Fock dos mésons e bárions. O resultado desse procedimento fornece um potencial efetivo para a interação méson-bárion que tem uma estrutura extremamente similar a um outro método, devido a Barnes-Swanson [30, 32], chamado *Quark Born Diagram Method* (QBD).

Uma vez que, no contexto do modelo de quarks, existe uma interpretação diagramática dos resultados analíticos para o RGM, ele se torna uma ferramenta muito transparente e de fácil interpretação. A única restrição que faremos em nossa discussão, é que trataremos apenas de sistemas de partículas onde não existam canais de aniquilamento envolvidos. Isso porque, em um tal cenário existiria a possibilidade de formação de ressonâncias. No entanto, esse tipo de estrutura não é incorporada ainda pelo modelo que usaremos, e para que isso seja feito é necessário um estudo em separado.

O Hamiltoniano relevante para nossa discussão foi definido na Eq.(4.80), e sua forma explícita é

$$H = \varepsilon(\mu)q^{\dagger}_{\mu}q_{\mu} + \varepsilon(\nu)\bar{q}^{\dagger}_{\nu}\bar{q}_{\nu} + \frac{1}{2}V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)q^{\dagger}_{\mu}q^{\dagger}_{\nu}q_{\rho}q_{\sigma}$$
$$+ \frac{1}{2}V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)\bar{q}^{\dagger}_{\mu}\bar{q}^{\dagger}_{\nu}\bar{q}_{\rho}\bar{q}_{\sigma} + V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)q^{\dagger}_{\mu}\bar{q}^{\dagger}_{\nu}\bar{q}_{\rho}q_{\sigma}$$
(5.1)

Nessa formulação de segunda quantização é possível definir os estados de mésons e bárions em um caminho completamente análogo aquele feito nas Secs. 4.5.1 e 4.5.2. Mas por completeza iremos, repeti-los aqui.

O estado de um méson no formalismo segundo-quantizado é descrito em termos de um operador de criação M_{β}^{\dagger} , e é definido da seguinte forma

$$|\beta\rangle = M^{\dagger}_{\beta}|0\rangle = \Phi^{\mu\nu}_{\beta}q^{\dagger}_{\mu}\bar{q}^{\dagger}_{\nu}|0\rangle$$
(5.2)

Já o estado de um bárion é descrito em termos de um operador de criação $B^{\dagger}_{\alpha},$ como

$$|\alpha\rangle = B^{\dagger}_{\alpha}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Psi^{\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}}_{\alpha} q^{\dagger}_{\mu_{1}} q^{\dagger}_{\mu_{2}} q^{\dagger}_{\mu_{3}}|0\rangle$$
(5.3)

Os operadores de quark (q) e antiquark (\bar{q}) são tais que respeitam as seguintes relações de anticomutação

$$\{ \bar{q}_{\mu'}, \bar{q}^{\dagger}_{\mu} \} = \{ q_{\mu'}, q^{\dagger}_{\mu} \} = \delta_{\mu'\mu} \{ q_{\mu'}, q_{\mu} \} = \{ q_{\mu'}, \bar{q}_{\mu} \} = \{ \bar{q}_{\mu'}, \bar{q}_{\mu} \} = \{ q_{\mu'}, \bar{q}^{\dagger}_{\mu} \} = 0$$
 (5.4)

Nosso primeiro passo será determinar as relações de comutação e anticomutação para os operadores compostos de mésons $M_{\beta}^{\dagger} \in M_{\beta}$ e bárions $B_{\alpha}^{\dagger} B_{\alpha}$, respectivamente. Para fazer isso, vamos começar determinando o produto interno do estado de um mésons, ou seja

$$\langle \beta | \beta' \rangle = \langle 0 | M_{\beta} M_{\beta}^{\dagger} | 0 \rangle = \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta'}^{\mu\nu}$$
(5.5)

Da mesma maneira para o estado de um bárion

$$\langle \alpha | \alpha' \rangle = \langle 0 | B_{\alpha} B_{\alpha}^{\dagger} | 0 \rangle = \Psi_{\alpha}^{* \mu_{1} \mu_{2} \mu_{3}} \Psi_{\alpha'}^{\mu_{1} \mu_{2} \mu_{3}}$$
(5.6)

Agora, se assumirmos que as amplitudes de Fock para mésons e bárions satisfaças as seguintes relações de ortonormalização

$$\Phi_{\beta}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta'}^{\mu\nu} = \delta_{\beta\beta'} \tag{5.7}$$

$$\Psi_{\alpha}^{*\,\mu_1\mu_2\mu_3}\,\Psi_{\alpha'}^{\mu_1\mu_2\mu_3} = \delta_{\alpha\alpha'} \tag{5.8}$$

é possível mostrar, com ajuda das Eqs.(5.5) e (5.7), que o operador de méson é tal que respeita as seguintes relações

$$[M_{\beta}, M_{\beta'}] = 0 (5.9)$$

$$[M_{\beta}, M_{\beta'}^{\dagger}] = \delta_{\beta\beta'} - \Delta^{M}_{\beta\beta'}$$
(5.10)

onde $\Delta^{M}_{\beta\beta^{\prime}}$ é o kernel de antissimetrização mesônico

$$\Delta^{M}_{\beta\beta\prime} = \Phi^{*\,\mu\nu}_{\beta} \,\Phi^{*\,\mu\sigma}_{\beta\prime} \,\bar{q}^{\dagger}_{\sigma} \bar{q}_{\nu} + \Phi^{*\,\mu\nu}_{\beta} \,\Phi^{\rho\nu}_{\beta\prime} \,q^{\dagger}_{\rho} q_{\mu} \tag{5.11}$$

Além disso, nós temos ainda as seguintes relações adicionais

$$[q_{\mu}, M_{\beta}] = [\bar{q}_{\nu}, M_{\beta}] = 0$$
(5.12)

$$[q_{\mu}, M_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\mu\mu'} \Phi_{\beta}^{*\,\mu'\nu} \bar{q}_{\nu}^{\dagger}$$
(5.13)

$$\left[\bar{q}_{\nu}, M_{\beta}^{\dagger}\right] = -\delta_{\nu\nu'} \Phi_{\beta}^{*\,\mu\nu'} q_{\mu}^{\dagger}$$

$$(5.14)$$

Para o caso de bárions, usando as Eqs. (5.6) e (5.8) obtermos

$$\{B_{\alpha}, B_{\alpha'}\} = 0 \tag{5.15}$$

$$\{B_{\alpha}, B_{\alpha'}^{\dagger}\} = \delta_{\alpha\alpha'} - \Delta^B_{\alpha\alpha'}$$
(5.16)

onde o kernel de antissimetrização bariônico, $\Delta^B_{\alpha\alpha'}$, é dado por

$$\Delta^{B}_{\alpha\alpha'} = 3 \,\Psi^{*\,\mu_1\mu_2\mu_3}_{\alpha} \,\Psi^{*\,\mu_1\mu_2\nu_3}_{\alpha'} \,q^{\dagger}_{\mu_3}q_{\nu_3} - \frac{3}{2} \,\Psi^{*\,\mu_1\mu_2\mu_3}_{\alpha} \,\Psi^{*\,\mu_1\nu_2\nu_3}_{\alpha'} \,q^{\dagger}_{\nu_3}q^{\dagger}_{\nu_2}q_{\mu_2}q_{\mu_3} \tag{5.17}$$

Temos ainda as seguintes relações adicionais

$$\{q_{\mu}, B_{\alpha}\} = 0 \tag{5.18}$$

$$\{q_{\mu}, B_{\alpha}^{\dagger}\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi^{*\mu\mu_{2}\mu_{3}} q_{\mu_{2}}^{\dagger} q_{\mu_{3}}^{\dagger}$$
(5.19)

$$\{q_{\mu}^{\dagger}, B_{\alpha}^{\dagger}\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi^{*\mu\mu_{2}\mu_{3}} q_{\mu_{2}} q_{\mu_{3}}$$
(5.20)

O fato relevante nestes resultados que obtivemos acima são os termos $\Delta_{\beta\beta'}^{M} e \Delta_{\alpha\alpha'}^{B}$. Estes termos trazem informação sobre a estrutura interna de mésons e bárions. Naturalmente, a existência destes termos torna extremamente complicado o tratamento de sistemas de partículas em que esses graus de liberdade internos não podem ser desconsiderados. Isso porque no formalismo de teoria de campos os operadores devem satisfazer relações canônicas de anticomutação (para férmions) e comutação (para bósons). Aqui, claramente, isso foi violado. Além disso, um outro aspecto que também devemos comentar está associado ao fato de que os operadores $M_{\alpha} e B_{\beta}$, juntamente com seus adjuntos, não são boas variáveis dinâmicas já que as relações de comutação nas Eqs.(5.12-5.14) como as de anticomutação nas Eqs.(5.18-5.20) são diferentes de zero.

As equações de movimento para mésons e bárions também podem ser obtidas via o princípio variacional. Para o caso envolvendo mésons nós temos que

$$\delta \langle \beta | \left(H_{q\bar{q}} - E^M_\beta \right) | \beta \rangle = 0 \tag{5.21}$$

onde os ingredientes envolvidos nesta equação são o Hamiltoniano definido na Eq.(5.1)e os estados que aparecem nas Eqs.(5.2) e (5.3). Sendo assim, não é difícil mostrar que a equação de movimento para mésons resultante, depois de realizadas todas as contrações entre os operadores de criação e aniquilação de quarks e antiquarks, é

$$H_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi^{\sigma\rho}_{\beta} = E^M_{\beta} \Phi^{\mu\nu}_{\beta}$$
(5.22)

onde o Hamiltoniano para aos estados mesônicos é dado por

$$H_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) = \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}[T(\sigma) + T(\rho)] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho)$$
(5.23)

Em um caminho completamente equivalente, é possível obter a versão desta equação de movimento para o caso envolvendo bárions

$$H_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\Psi_{\beta}^{\sigma\rho\chi} = E_{\beta}^{B}\Psi_{\beta}^{\mu\nu\chi}$$
(5.24)

onde o Hamiltoniano para os estados bariônicos é dado por

$$H_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) = 3 \left[\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} T(\sigma) + V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \right]$$
(5.25)

Nas Eqs.(5.22) e (5.24), E^M_{β} e E^B_{α} são as energias totais do méson e do bárion, respectivamente. Uma vez nós fixamos as equações de movimento para os estados de mésons e de bárions nesta notação, vamos descrever o esquema para obtenção da interação méson-bárion a partir do RGM.

5.2.1 O Sistema Méson-Bárion

Vamos começar a discussão pela definição do estado méson-bárion no formalismo de segunda quantização

$$|a\rangle = \psi_a^{\beta\alpha} M_\beta^{\dagger} B_\alpha^{\dagger} |0\rangle$$
(5.26)

onde $\psi_a^{\beta\alpha}$ é a função de onda relativa méson-bárion. Agora, se assumirmos a condição de normalização $\langle a | a' \rangle = \delta_{aa'}$, não é difícil mostrar que,

$$\langle a | a' \rangle = \psi_a^{*\beta\alpha} \langle 0 | B_\beta M_\alpha M_{\alpha'}^{\dagger} B_{\beta'}^{\dagger} | 0 \rangle \psi_{a'}^{\beta\alpha}$$

$$= \psi_a^{*\beta\alpha} N(\alpha\beta; \alpha'\beta') \psi_{a'}^{\beta\alpha} \equiv \delta_{aa'}$$
(5.27)

onde nós usamos as definições dos operadores $M_{\beta} \in B_{\alpha}$ de acordo com as Eqs.(5.2) e (5.3), juntamente com as usuais relações de anticomutação dadas em (5.4). Devemos notar ainda que na Eq.(5.27) a quantidade $N(\alpha\beta; \alpha'\beta')$ é o chamado kernel de normalização para o sistema méson-bárion, e este é definido pela seguinte expressão

$$N(\alpha\beta; \alpha'\beta') = \delta_{\alpha\alpha'} - N_E(\alpha\beta; \alpha'\beta')$$
(5.28)

onde $N_E(\alpha\beta; \alpha'\beta')$ é o kernel de troca definido como

$$N_E(\alpha\beta;\alpha'\beta') = \Psi_{\alpha}^{*\,\mu\nu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\,\rho\lambda} \Phi_{\beta'}^{\sigma\lambda} \Psi_{\alpha'}^{\mu\nu\rho} + \Psi_{\alpha}^{*\,\mu\nu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\,\rho\lambda} \Phi_{\beta'}^{\nu\lambda} \Psi_{\alpha'}^{\mu\rho\sigma} + \Psi_{\alpha}^{*\,\mu\nu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\,\rho\lambda} \Phi_{\beta'}^{\mu\lambda} \Psi_{\alpha'}^{\rho\nu\sigma}$$
(5.29)

Aqui, $\Phi_{\beta} \in \Psi_{\alpha}$ são as funções de onda de mésons e bárions respectivamente. A equação de movimento para o sistema méson-bárion é obtida a partir do mesmo procedimento que foi feito para obtenção das Eqs.(5.22) e (5.24). Assim vamos pegar o Hamiltoniano dado na Eq.(5.1) e o estado méson-bárion definido em (5.26), com seu adjunto e vamos calcular a seguinte equação

$$\delta \langle a \mid (H - E_a) \mid a \rangle = 0 \tag{5.30}$$

Depois de realizadas as contrações entre os operadores de criação e aniquilação de quarks e antiquarks e efetuarmos a variação teremos

$$\left[H_{RGM}(\alpha\beta;\alpha'\beta') - E_a N(\alpha\beta;\alpha'\beta')\right] \psi_a^{\beta'\alpha'} = 0$$
(5.31)

onde o Hamiltoniano RGM para o sistema méson-bárion é

$$H_{RGM}(\alpha\beta;\alpha'\beta') = T_{RGM}(\alpha\beta;\alpha'\beta') + V_{RGM}(\alpha\beta;\alpha'\beta')$$
(5.32)

O primeiro termo, T_{RGM} , é dado explicitamente pela seguinte expressão

$$T_{RGM}(\alpha\beta;\alpha'\beta') = \delta_{\beta\beta'} \Phi_{\beta}^{*\,\mu\nu} H_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\sigma\rho} + \delta_{\alpha\alpha'} \Psi_{\alpha}^{*\,\mu\nu\mu_3} H_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \Psi_{\alpha'}^{\sigma\rho\mu_3}$$
(5.33)

e o segundo termo, V_{RGM} , é dado em termos de três contribuições

$$V_{RGM}(\alpha\beta;\alpha'\beta') = V_{mb}^{dir}(\alpha\beta;\alpha'\beta') + V_{mb}^{ex}(\alpha\beta;\alpha'\beta') + V_{mb}^{intra-ex}(\alpha\beta;\alpha'\beta')$$
(5.34)

com

$$V_{mb}^{dir}(\alpha\beta;\alpha'\beta') = + 3 \Psi_{\alpha}^{*\,\mu\mu_{2}\mu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\,\chi\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\chi\rho} \Psi_{\alpha'}^{\sigma\mu_{2}\mu_{3}}$$

$$+ 3 \Psi_{\alpha}^{*\,\nu\mu_{2}\mu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\,\mu\lambda} V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\sigma\lambda} \Psi_{\alpha'}^{\rho\mu_{2}\mu_{3}}$$

$$+ 3 \Psi_{\alpha}^{*\,\mu\mu_{2}\mu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\,\nu\lambda} V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\rho\lambda} \Psi_{\alpha'}^{\sigma\mu_{2}\mu_{3}}$$
(5.35)

$$V_{mb}^{ex}(\alpha\beta;\alpha'\beta') = - 3 \Psi_{\alpha}^{*\nu\mu_{2}\mu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\mu\lambda} V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\rho\lambda} \Psi_{\alpha'}^{\sigma\mu_{2}\mu_{3}}$$

$$- 3 \Psi_{\alpha}^{*\mu\mu_{2}\mu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\mu\lambda} V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\sigma\rho} \Psi_{\alpha'}^{\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}}$$

$$- 6 \Psi_{\alpha}^{*\mu_{1}\nu\mu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\mu\lambda} V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\mu\lambda} \Psi_{\alpha'}^{\sigma\rho\mu_{3}}$$

$$- 6 \Psi_{\alpha}^{*\mu_{1}\mu\mu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\chi\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\mu\lambda\rho} \Psi_{\alpha'}^{\chi\sigma\mu_{3}}$$
(5.36)

$$V_{mb}^{intra-ex}(\alpha\beta;\alpha'\beta') = - \frac{3}{2} \Psi_{\alpha}^{*\,\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\,\mu\nu} H_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\mu_{1}\rho} \Psi_{\alpha'}^{\sigma\mu_{2}\mu_{3}} - \frac{3}{2} \Psi_{\alpha}^{*\,\mu\mu_{2}\mu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\,\mu_{1}\nu} H_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\sigma\rho} \Psi_{\alpha'}^{\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}} - 3 \Psi_{\alpha}^{*\,\mu\nu\mu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\,\chi\lambda} H_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\mu_{3}\lambda} \Psi_{\alpha'}^{\sigma\rho\chi}$$
(5.37)

Na Eq.(5.37) os Hamiltonianos $H_{q\bar{q}} \in H_{qq}$, são dados nas Eqs.(5.22) e (5.24).

Se notarmos agora a forma da Eq.(5.31) é fácil notar que ela não está na forma de uma equação de Schroedinger, como por exemplo, a Eq.(5.22) e a (5.24). E o motivo é simples, na Eq.(5.31) existe a presença do kernel de normalização $N(\alpha\beta; \alpha'\beta')$ multiplicando o autovalor de energia. Dessa forma, não é possível interpretarmos a interação V_{RGM} como um potencial méson-bárion que entraria em uma equação de espalhamento do tipo Lippmann-Schwinger

$$T = V_{RGM} + V_{RGM} \frac{1}{E_a + i\epsilon - H_{RGM}} V_{RGM}$$
(5.38)

A estratégia para contornar esse problema, e conseguir construir interações hádronhádron que possam ser iteradas em uma equação de Lippmann-Schwinger, é implementar um esquema de renormalização das funções de onda méson-bárion. Esse esquema de renormalização consiste em primeiro definir uma função de onda renormalizada por meio da seguinte equação

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}_{a}^{\beta\alpha} = N^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \alpha'\beta') \, \boldsymbol{\psi}_{a}^{\beta'\alpha'} \tag{5.39}$$

onde N é o kernel de renormalização correspondente ao estado méson-bárion. Esses estados são tais que respeitam a seguinte relação de normalização

$$\bar{\psi}_a^{*\,\beta\alpha} \ \bar{\psi}_{a'}^{\beta\alpha} = \delta_{aa'} \tag{5.40}$$

Nosso próximo passo é definir o Hamiltoniano RGM renormalizado

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta;\alpha'\beta') = N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta;\gamma\delta) \ H_{RGM}(\gamma\delta;\gamma'\delta') \ N^{\frac{1}{2}}(\gamma'\delta';\alpha'\beta')$$
(5.41)

Dessa forma, não é difícil mostrar que a equação de movimento agora é do tipo Schroedinger, ou seja

$$\left[\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta;\alpha'\beta') - E_a \,\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\right] \,\bar{\psi}_a^{\beta'\alpha'} = 0 \tag{5.42}$$

onde o Hamiltoniano, é definido por meio da seguinte equação

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta;\alpha'\beta') = H_{RGM}(\alpha\beta;\alpha'\beta') + \Delta H_{RGM}(\alpha\beta;\alpha'\beta')$$
(5.43)

O termo ΔH_{RGM} contém potências dos chamados kernels de estados ligados para mésons (m) e bárions (b), respectivamente

$$\Delta_m(\mu\nu;\sigma\rho) = \Phi^{\mu\nu}_{\alpha} \Phi^{*\mu\nu}_{\alpha}$$
$$\Delta_b(\mu_1\mu_2\mu_3;\nu_1\nu_2\nu_3) = \Psi^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{\alpha} \Phi^{*\nu_1\nu_2\nu_3}_{\alpha}$$
(5.44)

onde esta implícita uma soma sobre o índice α . Esses kernels são tais que respeitam ainda as seguintes propriedades

$$\Delta_m(\mu\nu;\sigma\rho)\,\Phi^{\sigma\rho}_{\alpha} = \Phi^{\mu\nu}_{\alpha} \tag{5.45}$$

$$\Delta_b(\mu\nu\tau;\sigma\rho\lambda)\Psi_{\alpha}^{\sigma\rho\lambda} = \Psi_{\alpha}^{\mu\nu\tau}$$
(5.46)

Afim de simplificar o problema, e evitar a utilização de cálculos numéricos nesta instância, faremos uma expansão do kernel de normalização da seguinte forma

$$N^{-\frac{1}{2}} = (1 - N_E)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}N_E\dots$$
 (5.47)

e reteremos apenas o primeiro termo. Esta aproximação apesar de parecer drástica, introduz um erro no potencial efetivo hádron-hádron que é menor que 5% tal como estudos realizados pela Ref. [92] mostraram. Sendo assim, ao assumirmos essa aproximação é possível mostrar que o termo ΔH_{RGM} tem a seguinte forma

$$\Delta H_{RGM}(\alpha\beta;\alpha'\beta') = + \frac{3}{2} \Psi_{\alpha}^{*\theta\kappa\omega} \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} H_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Delta_m(\sigma\rho;\chi\lambda) \Phi_{\beta'}^{\omega\lambda} \Psi_{\alpha'}^{\theta\kappa\chi}$$
(5.48)

+
$$\frac{3}{2} \Psi^{*\,\theta\kappa\omega}_{\alpha} \Phi^{*\,\chi\lambda}_{\beta} \Delta_m(\omega\lambda;\mu\nu) H_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi^{\sigma\rho}_{\beta'} \Psi^{\theta\kappa\chi}_{\alpha'}$$
 (5.49)

+
$$3 \Psi^{* \mu \nu \tau}_{\alpha} \Phi^{* \chi \lambda}_{\beta} H_{qq}(\mu \nu; \sigma \rho) \Delta_b(\sigma \rho \tau; \theta \kappa \omega) \Phi^{\omega \lambda}_{\beta'} \Psi^{\theta \kappa \chi}_{\alpha'} (5.50)$$

Se $\Phi^{\mu\nu}$ e $\Psi^{\mu\nu\sigma}$ são tais que respeitem as Eqs.(5.22) e (5.24), e junto a isso sejam os kernels de estado ligados $\Delta_m(\mu\nu;\mu'\nu')$ e $\Delta_b(\mu\nu\sigma;\mu'\nu'\sigma')$ tais que satisfaçam as propriedades dadas em (5.45) e (5.46), é possível então mostrar que ΔH_{RGM} cancela exatamente o termo $V_{mb}^{intra-ex}$ na Eq.(5.37). Sendo assim, os únicos dois termos que restam em V_{RGM} são V_{mb}^{ex} e V_{mb}^{dir} . Mas agora, se notarmos que o termo V_{mb}^{dir} corresponde a uma interação entre um méson e um bárion através de uma interação gluônica, e lembrarmos que, estados descoloridos como são o méson e o bárion, não podem trocar cor, teremos que V_{mb}^{dir} também tem que ser identicamente nulo. Naturalmente, que esse anulamento não é importante, ele é resultado de um cálculo explícito. Assim, só resta um termo, V_{mb}^{ex} , que corresponde à troca simultânea de um quark e um glúon entre o méson e o bárion. A partir da representação de diagramas, é muito fácil entender cada uma das quatro contribuições de V_{mb}^{ex} – ver Figura 5.1.



Figura 5.1: Diagrama do processo de quark-gluon-interchange que contribui para a interação méson-bárion descrita pelo termo V_{mb}^{ex} .

Vamos agora escrever o potencial da Eq.(5.36) em uma forma mais prática para se manipular, ou seja, vamos defini-lo como

$$V_{mb}^{ex}(\alpha\beta;\alpha'\beta') = V_{(1)} + V_{(2)} + V_{(3)} + V_{(4)}$$
(5.51)

onde cada uma das quatro contribuições desse potencial, que estão convenientemente descritas na Figura 5.1, são dadas por

$$V_{(1)} = -3 \Psi_{\alpha}^{*\nu\mu_{2}\mu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\mu\lambda} V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\rho\lambda} \Psi_{\alpha'}^{\sigma\mu_{2}\mu_{3}}$$
(5.52)

$$V_{(2)} = -3 \Psi_{\alpha}^{*\,\mu\mu_{2}\mu_{3}} \Phi_{\beta}^{*\,\mu_{1}\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\sigma\rho} \Psi_{\alpha'}^{\mu_{1}\mu_{2}\mu_{3}}$$
(5.53)

$$V_{(3)} = -6 \Psi_{\alpha}^{* \,\mu_1 \nu \mu_3} \Phi_{\beta}^{* \,\mu \lambda} V_{qq}(\mu \nu; \sigma \rho) \Phi_{\beta'}^{\mu_1 \lambda} \Psi_{\alpha'}^{\sigma \rho \mu_3}$$
(5.54)

$$V_{(4)} = -6 \Psi_{\alpha}^{*\,\mu_1\mu\mu_3} \Phi_{\beta}^{*\,\chi\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu;\sigma\rho) \Phi_{\beta'}^{\mu_1\rho} \Psi_{\alpha'}^{\chi\sigma\mu_3}$$
(5.55)

Podemos, ainda, substituir nas formas explícitas de $\Phi^{\mu\nu}$, dadas nas Eqs.(4.89) e (4.125). E, juntamente com isso, iremos usar para os potenciais V_{qq} e $V_{q\bar{q}}$ as Eqs.(4.83) e (4.84). Uma vez feito isso, será possível decompor cada uma das quatro contribuições nas Eqs.(5.52)-(5.55) em termos de fatores de cor C, spin-sabor W e espacial I, da seguinte forma

$$V_{mb}^{ex} = -3 C_{(1)} W_{(1)} I_{(1)} - 3 C_{(2)} W_{(2)} I_{(2)} - 6 C_{(3)} W_{(3)} I_{(3)} - 6 C_{(4)} W_{(4)} I_{(4)}$$
(5.56)

As formas explícitas dos fatores de cor são dadas por

$$C_{(1)} = \frac{\epsilon^{c_{\nu}c_2c_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta^{c_{\mu}c_{\lambda}}}{\sqrt{3}} \left(\mathcal{F}^a\right)^{c_{\mu}c_{\sigma}} \left(\mathcal{F}^a\right)^{c_{\nu}c_{\rho}} \frac{\delta^{c_{\rho}c_{\lambda}}}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon^{c_{\sigma}c_2c_3}}{\sqrt{6}}$$
(5.57)

$$C_{(2)} = \frac{\epsilon^{c_{\mu}c_{2}c_{3}}}{\sqrt{6}} \frac{\delta^{c_{1}c_{\nu}}}{\sqrt{3}} \left(\mathcal{F}^{a}\right)^{c_{\mu}c_{\sigma}} \left(\mathcal{F}^{a}\right)^{c_{\nu}c_{\rho}} \frac{\delta^{c_{\sigma}c_{\rho}}}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon^{c_{1}c_{2}c_{3}}}{\sqrt{6}}$$
(5.58)

$$C_{(3)} = \frac{\epsilon^{c_1 c_{\nu} c_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta^{c_{\mu} c_{\lambda}}}{\sqrt{3}} (\mathcal{F}^a)^{c_{\mu} c_{\sigma}} (\mathcal{F}^a)^{c_{\nu} c_{\rho}} \frac{\delta^{c_1 c_{\lambda}}}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon^{c_{\sigma} c_{\rho} c_3}}{\sqrt{6}}$$
(5.59)

$$C_{(4)} = \frac{\epsilon^{c_1 c_\mu c_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta^{c_\chi c_\nu}}{\sqrt{3}} (\mathcal{F}^a)^{c_\mu c_\sigma} (\mathcal{F}^a)^{c_\nu c_\rho} \frac{\delta^{c_1 c_\rho}}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon^{c_\chi c_\sigma c_3}}{\sqrt{6}}$$
(5.60)

As formas explícitas dos fatores de spin-sabor são dadas por

$$W_{(1)} = \frac{\chi_{\alpha}^{*\xi_{\nu}\xi_{2}\xi_{3}}}{\sqrt{18}} \chi_{\beta}^{*\xi_{\mu}\xi_{\lambda}} (\mathcal{T}_{i})^{\xi_{\mu}\xi_{\sigma}} (\mathcal{T}_{i})^{\xi_{\nu}\xi_{\rho}} \chi_{\beta'}^{\xi_{\rho}\xi_{\lambda}} \frac{\chi_{\alpha'}^{\xi_{\sigma}\xi_{2}\xi_{3}}}{\sqrt{18}}$$
(5.61)

$$W_{(2)} = \frac{\chi_{\alpha}^{*\xi_{\mu}\xi_{2}\xi_{3}}}{\sqrt{18}} \chi_{\beta}^{*\xi_{1}\xi_{\nu}} (\mathcal{T}_{i})^{\xi_{\mu}\xi_{\sigma}} (\mathcal{T}_{i})^{\xi_{\nu}\xi_{\rho}} \chi_{\beta'}^{\sigma\rho} \frac{\chi_{\alpha'}^{\xi_{1}\xi_{2}\xi_{3}}}{\sqrt{18}}$$
(5.62)

$$W_{(3)} = \frac{\chi_{\alpha}^{*\xi_1\xi_\nu\xi_3}}{\sqrt{18}} \chi_{\beta}^{*\xi_\mu\xi_\lambda} (\mathcal{T}_i)^{\xi_\mu\xi_\sigma} (\mathcal{T}_i)^{\xi_\nu\xi_\rho} \chi_{\beta'}^{\xi_1\xi_\lambda} \frac{\chi_{\alpha'}^{\xi_\sigma\xi_\rho\xi_3}}{\sqrt{18}}$$
(5.63)

$$W_{(4)} = \frac{\chi_{\alpha}^{*\xi_{1}\xi_{\mu}\xi_{3}}}{\sqrt{18}} \chi_{\beta}^{*\xi_{\chi}\xi_{\nu}} (\mathcal{T}_{i})^{\xi_{\mu}\xi_{\sigma}} (\mathcal{T}_{i})^{\xi_{\nu}\xi_{\rho}} \chi_{\beta'}^{\xi_{1}\xi_{\rho}} \frac{\chi_{\alpha'}^{\xi_{\chi}\xi_{\sigma}\xi_{3}}}{\sqrt{18}}$$
(5.64)

Nas Eqs.(5.61)-(5.64) o símbolo \mathcal{T}_i foi introduzido para designar uma matriz identidade para o primeiro termo da eq.(4.84) e o operador S_i para o segundo termo da Eq.(4.84). As formas explícitas dos fatores espaciais são dadas pelas seguintes expressões

$$I_{(1)} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} d_{m}^{(N)*} d_{m'}^{(N)} a_{n}^{(N)*} a_{n'}^{(N)} \int d^{3}p_{\lambda} d^{3}p_{2} d^{3}p_{3} d^{3}p_{\mu} d^{3}p_{\nu} d^{3}p_{\sigma} d^{3}p_{\rho}$$

$$\times \delta(\boldsymbol{p}_{\alpha} - \boldsymbol{p}_{\nu} - \boldsymbol{p}_{2} - \boldsymbol{p}_{3}) \psi_{\alpha}^{(m)*}(\boldsymbol{p}_{\nu}, \boldsymbol{p}_{2}, \boldsymbol{p}_{3}) \delta(\boldsymbol{p}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\lambda}) \phi_{\beta}^{(n)*}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\lambda})$$

$$\times \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu} - \boldsymbol{p}_{\sigma} - \boldsymbol{p}_{\rho}) \mathcal{V}(\boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\sigma}) \delta(\boldsymbol{p}_{\beta'} - \boldsymbol{p}_{\rho} - \boldsymbol{p}_{\lambda}) \phi_{\beta'}^{(n')}(\boldsymbol{p}_{\rho}, \boldsymbol{p}_{\lambda})$$

$$\times \delta(\boldsymbol{p}_{\alpha'} - \boldsymbol{p}_{\sigma} - \boldsymbol{p}_{2} - \boldsymbol{p}_{3}) \psi_{\alpha'}^{(m')}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{2}, \boldsymbol{p}_{3}) \qquad (5.65)$$

$$I_{(2)} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} d_{m}^{(N)*} d_{m'}^{(N)} a_{n'}^{(N)*} a_{n'}^{(N)} \int d^{3}p_{1} d^{3}p_{2} d^{3}p_{3} d^{3}p_{\mu} d^{3}p_{\nu} d^{3}p_{\sigma} d^{3}p_{\rho}$$

$$\times \delta(\boldsymbol{p}_{\alpha} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{2} - \boldsymbol{p}_{3}) \psi_{\alpha}^{(m)*}(\boldsymbol{p}_{\nu}, \boldsymbol{p}_{2}, \boldsymbol{p}_{3}) \delta(\boldsymbol{p}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{1} - \boldsymbol{p}_{\nu}) \phi_{\beta}^{(n)*}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{\nu})$$

$$\times \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu} - \boldsymbol{p}_{\sigma} - \boldsymbol{p}_{\rho}) \mathcal{V}(\boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\sigma}) \delta(\boldsymbol{p}_{\beta'} - \boldsymbol{p}_{\sigma} - \boldsymbol{p}_{\rho}) \phi_{\beta'}^{(n')}(\boldsymbol{p}_{\sigma}, \boldsymbol{p}_{\rho})$$

$$\times \delta(\boldsymbol{p}_{\alpha'} - \boldsymbol{p}_{1} - \boldsymbol{p}_{2} - \boldsymbol{p}_{3}) \psi_{\alpha'}^{(m')}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{2}, \boldsymbol{p}_{3}) \qquad (5.66)$$

$$I_{(3)} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} d_{m}^{(N)*} d_{m'}^{(N)} a_{n}^{(N)*} a_{n'}^{(N)} \int d^{3}p_{\lambda} d^{3}p_{1} d^{3}p_{3} d^{3}p_{\mu} d^{3}p_{\nu} d^{3}p_{\sigma} d^{3}p_{\rho}$$

$$\times \delta(\boldsymbol{p}_{\alpha} - \boldsymbol{p}_{1} - \boldsymbol{p}_{\nu} - \boldsymbol{p}_{3}) \psi_{\alpha}^{(m)*}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{\nu}, \boldsymbol{p}_{3}) \delta(\boldsymbol{p}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\lambda}) \phi_{\beta}^{(n)*}(\boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{\lambda})$$

$$\times \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu} - \boldsymbol{p}_{\sigma} - \boldsymbol{p}_{\rho}) \mathcal{V}(\boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\sigma}) \delta(\boldsymbol{p}_{\beta'} - \boldsymbol{p}_{1} - \boldsymbol{p}_{\lambda}) \phi_{\beta'}^{(n')}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{\lambda})$$

$$\times \delta(\boldsymbol{p}_{\alpha'} - \boldsymbol{p}_{\sigma} - \boldsymbol{p}_{\rho} - \boldsymbol{p}_{3}) \psi_{\alpha'}^{(m')}(\boldsymbol{p}_{\sigma}, \boldsymbol{p}_{\rho}\boldsymbol{p}_{3}) \qquad (5.67)$$

$$I_{(4)} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} d_{m}^{(N)*} d_{m'}^{(N)} a_{n'}^{(N)*} a_{n'}^{(N)} \int d^{3}p_{\chi} d^{3}p_{1} d^{3}p_{3} d^{3}p_{\mu} d^{3}p_{\nu} d^{3}p_{\sigma} d^{3}p_{\rho}$$

$$\times \quad \delta(\boldsymbol{p}_{\alpha} - \boldsymbol{p}_{1} - \boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{3}) \ \psi_{\alpha}^{(m)*}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{\mu}, \boldsymbol{p}_{3}) \ \delta(\boldsymbol{p}_{\beta} - \boldsymbol{p}_{\chi} - \boldsymbol{p}_{\nu}) \ \phi_{\beta}^{(n)*}(\boldsymbol{p}_{\chi}, \boldsymbol{p}_{\nu})$$

$$\times \quad \delta(\boldsymbol{p}_{\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu} - \boldsymbol{p}_{\sigma} - \boldsymbol{p}_{\rho}) \ \mathcal{V}(\boldsymbol{p}_{\mu} - \boldsymbol{p}_{\sigma}) \ \delta(\boldsymbol{p}_{\beta'} - \boldsymbol{p}_{1} - \boldsymbol{p}_{\rho}) \ \phi_{\beta'}^{(n')}(\boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{p}_{\rho})$$

$$\times \quad \delta(\boldsymbol{p}_{\alpha'} - \boldsymbol{p}_{\chi} - \boldsymbol{p}_{\sigma} - \boldsymbol{p}_{3}) \ \psi_{\alpha'}^{(m')}(\boldsymbol{p}_{\chi}, \boldsymbol{p}_{\sigma}, \boldsymbol{p}_{3})$$
(5.68)

Nas Eqs.(5.65)-(5.68) nós usamos o símbolo \mathcal{V} para designar o termo associado ao potencial $V_C(q)$ ou o termo associado ao potencial $V_T(q)$. A forma do potencial efetivo dado nas Eqs.(5.52)- (5.55) é completamente geral, e é válida para qualquer processo elástico méson-bárion cujos estados do méson e do bárion sejam descritos pelas Eqs.(4.89) e (4.125). Nesta tese, no entanto, nós estaremos interessados no espalhamento de mésons $K \in \overline{D}$ por nucleons. Então, sendo o méson estranho K um estado ligado de $K^+ = u\overline{s}, K^0 = d\overline{s}$ e o méson charmoso \overline{D} um estado ligado de $D^- = d\overline{c}, \ \overline{D}^0 = u\overline{c}$, unicamente processos que envolvem a troca de um méson leve podem contribuir no diagrama da Figura 5.1, os quarks $\overline{c} \in \overline{s}$ não são trocados. O cálculo explícito dos fatores de cor, spin-sabor foram todos determinados na Ref. [59]. Aqui, estendemos o cálculo dos fatores espaciais para o caso de funções de onda que são combinações lineares de N Gaussianas. Uma vez todos esses fatores estejam determinados, o potencial efetivo méson-bárion pode ser escrito na seguinte forma

$$V_{MB}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} \omega_i \left[V_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') + V_i(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}) \right]$$
(5.69)

com cada uma das contribuições dos potenciais V_i sendo dadas por

$$V_{i}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') = \sum_{m=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} d_{m}^{(N)*} d_{m'}^{(N)} a_{n}^{(N)*} a_{n'}^{(N)} \left[\frac{3g^{(N)}}{4g^{(N)}(1 + \mathbf{r}_{m}^{(N)}) + 6(1 + \mathbf{r}_{b}^{(N)})} \right]^{\frac{3}{2}} \times \mathbb{I}_{m,m'}^{n,n'}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$$
(5.70)

onde a função integral I é dada pela seguinte expressão

$$\mathbb{I}_{m,m'}^{n,n'}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}') = \left[\frac{2^{3} g'^{(N)} \pi^{2}}{\alpha_{m}^{(N)} \alpha_{m'}^{(N)3} (1 + \mathbf{r}_{b}^{(N)})}\right]^{\frac{3}{2}} e^{-c_{i}^{(N)} p^{2} - d_{i}^{(N)} p'^{2} + e_{i}^{(N)} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}'} \\
\times \int \frac{d^{3} q}{(2\pi)^{3}} v(q) e^{-a_{i}^{(N)} q^{2} + \boldsymbol{b}_{i}^{(N)} \cdot \boldsymbol{q}}$$
(5.71)

Aqui, $a_i^{(N)}$, $b_i^{(N)}$, $c_i^{(N)}$, $d_i^{(N)}$, $e_i^{(N)}$ são coeficientes que envolvem o parâmetro de comprimento de oscilador $\alpha_m^{(N)} = m \alpha_N^2$ e $\beta_n^{(N)} = n \beta_N^2$ dos hádrons, e as massas constituintes M_u , M_s e M_c dos quarks. Além disso, temos também as razões dos parâmetros de oscilador dos bárions $\mathbf{r}_b^{(N)} = \frac{\alpha_{m'}^{(N)}}{\alpha_m^{(N)}}$, mésons $\mathbf{r}_m^{(N)} = \frac{\beta_{n'}^{(N)}}{\beta_n^{(N)}}$ e os parâmetros $g^{(N)} = \frac{\alpha_{m'}^{(N)}}{\beta_n^{(N)}}$, $g'^{(N)} = \frac{\alpha_{m'}^{(N)}}{\beta_{n'}^{(N)}}$ e $\rho = \frac{M_q}{M_{\bar{q}}}$. A forma explícita dos parâmetros $a_i^{(N)} \dots e_i^{(N)}$ serão apresentados no fim desta seção. Já os coeficientes ω_i , que levam em conta os fatores de cor-spin-flavor para a interação $\bar{D}N$ para cada canal de isospin estão dados na Tabela 5.1. Os estados acoplados de isospin são dados em termos dos estados de carga D^-N e \bar{D}^0N por

$$|I = 0, M = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|n \bar{D}^{0}\rangle - |p D^{-}\rangle \right]$$
 (5.72)

$$I = 1, M = 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|n \bar{D}^{0} \rangle + |p D^{-} \rangle \right]$$
(5.73)

$$|I = 1, M = 1\rangle = |p\bar{D}^0\rangle$$
(5.74)

$$|I = 1, M = -1\rangle = |nD^{-}\rangle$$

$$(5.75)$$

A obtenção dos coeficientes ω_i para a interação KN podem ser extraídas diretamente da Tabela 5.1 fazendo as seguintes mudanças $\bar{D}^0 \to K^+ \in D^- \to K^0$ em cada um dos processos dessa tabela.

Processos	C	υ_1	(ω_2	ω_3		ω_4	
	$1_i 1_j$	$S_i S_j$	$1_i 1_j$	$S_i S_j$	$1_i 1_j$	$S_i S_j$	$1_i 1_j$	$S_i S_j$
$p\bar{D}^0 \to p\bar{D}^0$	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/18	1/3	1/18
$n\bar{D}^- ightarrow n\bar{D}^-$	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/18	1/3	1/18
$p\bar{D}^- ightarrow p\bar{D}^-$	1/3	1/6	1/3	1/6	1/3	1/9	1/3	1/9
$n\bar{D}^0 \to n\bar{D}^0$	1/3	1/6	1/3	1/6	1/3	1/9	1/3	1/6
$p\bar{D}^- ightarrow n\bar{D}^0$	1/3	1/6	1/3	1/6	1/3	-1/18	1/3	-1/18
I = 0	0	0	0	0	0	-1/6	0	-1/6
I = 1	-4/9	-1/3	4/9	-1/3	4/9	-1/18	-4/9	-1/18

Tabela 5.1: Coeficientes ω_i de cor-spin-sabor para o processo de troca de quarkglúon devido a interação central $1_i 1_j$ e spin-spin $S_i S_j$, e para os canais de isospin I = 0 e I = 1.

Nós apresentaremos abaixo os parâmetros necessários para a completa determinação dos fatores espaciais do potencial de interação microscópico MB. Para simplificar a notação nós fizemos $\mathbf{r}_b \equiv \mathbf{r}_b^{(N)}, \, \mathbf{r}_m \equiv \mathbf{r}_m^{(N)}, \, g^{(N)} \equiv g$ e $g'^{(N)} \equiv g'.$

• Diagrama (1)

$$\begin{aligned} a_1^{(N)} &= \frac{3g\left(1+r_b\right)\left(1+r_m\right)}{\alpha_m \left[4g\left(1+r_m\right)+6(1+r_b\right)\right]}, \\ b_1^{(N)} &= -\frac{g\left[\left(3+r_b\right)\left(1+r_m\right)\rho-2r_br_m+r_b+3\right]\boldsymbol{p}}{\alpha_m(1+\rho)\left[2g\left(1+r_m\right)+3(1+r_b\right)\right]} \\ &- \frac{g\left[\left(1+3r_b\right)\left(1+\rho\right)r_m+3\rho r_b+\rho-2\right]\boldsymbol{p}'}{\alpha_m\left(1+\rho\right)\left[2g\left(1+r_m\right)+3\left(1+r_b\right)\right]} \\ c_1^{(N)} &= \frac{6g^2r_m+g\left[\left((\rho-2)^2r_m+(1+\rho)^2\right)r_b+9\left(2\rho+(1+r_m)\rho^2+1\right)\right]+6(1+\rho)^2r_b}{6\alpha_m(1+\rho)^2\left[2g(1+r_m)+3(1+r_b)\right]} \\ d_1^{(N)} &= \frac{6g^2r_m+g\left[9\rho^2r_b+(1+9r_b)(1+\rho)^2r_m+\rho^2-4\rho+4\right]+6(1+\rho)^2r_b}{6\alpha_m(1+\rho)^2\left[2g\left(1+r_m\right)+3(1+r_b\right)\right]} \\ e_1^{(N)} &= \frac{2g^2r_m-g\left(1+\rho\right)\left[\left((\rho-2)r_m+\rho\right)r_b+\rho r_m+\rho-2\right]+2\left(1+\rho)^2r_b}{\alpha_m\left(1+\rho\right)^2\left[2g\left(1+r_m\right)+3\left(1+r_b\right)\right]} \end{aligned}$$
(5.76)

• Diagrama (2)

$$a_{2}^{(N)} = \frac{g\left(2\,g\,\mathbf{r}_{m}+3\,(1+\mathbf{r}_{b})\right)}{\alpha_{m}\left[4\,g\,(1+\mathbf{r}_{m})+6\,(1+\mathbf{r}_{b})\right]}$$

$$b_{2}^{(N)} = \frac{\left[g\left(\mathbf{r}_{b}+3\right)\left(1+\rho\right)+2\,g^{2}\,\mathbf{r}_{m}\right]\,\boldsymbol{p}+\left[g\left(3\,\mathbf{r}_{b}\,\rho+\rho-2\right)-2\,g^{2}\,\mathbf{r}_{m}\right]\,\boldsymbol{p}'}{\alpha_{m}\,(1+\rho)\left[2\,g\,(\,\mathbf{r}_{m}+1\,)+3\,(1+\mathbf{r}_{b}\,),\,\right]}$$

$$c_{2}^{(N)} = c_{1}^{(N)}$$

$$d_{2}^{(N)} = d_{1}^{(N)}$$

$$e_{2}^{(N)} = e_{1}^{(N)}$$
(5.77)

• Diagrama (3)

$$a_{3}^{(N)} = \frac{g\left(3+4r_{b}\right)\left(1+r_{m}\right)+6\left(1+r_{b}\right)r_{b}}{2\alpha_{m}\left(1+r_{b}\right)\left[2g\left(1+r_{m}\right)+3\left(1+r_{b}\right)\right]}$$

$$b_{3}^{(N)} = -\frac{\left[3g\left(\rho r_{m}+\rho+1\right)+3\left(\rho+1\right)r_{b}\right]\boldsymbol{p}}{\alpha_{m}\left(1+\rho\right)\left[2g\left(1+r_{m}\right)+3\left(1+r_{b}\right)\right]}$$

$$-\frac{\left[g\left(r_{m}\rho+r_{m}+\rho-2\right)-3\left(\rho+1\right)r_{b}\right]\boldsymbol{p}'}{\alpha_{m}\left(1+\rho\right)\left[2g\left(1+r_{m}\right)+3\left(1+r_{b}\right)\right]}$$

$$c_{3}^{(N)} = c_{1}^{(N)}$$

$$d_{3}^{(N)} = d_{1}^{(N)}$$

• Diagrama (4)

$$\begin{split} a_4^{(N)} &= \frac{2 \, g^2 \, (1 + \mathbf{r}_b) \mathbf{r}_m + g \, [\, (4 + 3 \, \mathbf{r}_b) \, \mathbf{r}_b \, \mathbf{r}_m + 4 \, \mathbf{r}_b + 3 \,] + 6 \, (1 + \mathbf{r}_b) \, \mathbf{r}_b}{2 \, \alpha_m \, (\mathbf{r}_b + 1) \, [\, 2 \, g \, (1 + \mathbf{r}_m) + 3 \, (1 + \mathbf{r}_b) \,] } \end{split}, \\ \mathbf{b}_4^{(N)} &= \frac{[-2 \, g^2 \, \mathbf{r}_m + g \, (\, (\rho - 2) \, \mathbf{r}_b \, \mathbf{r}_m - 3 \, (1 + \rho) \,) - 3 \, (1 + \rho) \, \mathbf{r}_b \,] \, \mathbf{p}}{\alpha_m (1 + \rho) \, [\, 2 \, g \, (1 + \mathbf{r}_m) + 3 \, (1 + \mathbf{r}_b) \,] } \\ &+ \frac{[2 \, g^2 \, \mathbf{r}_m + g \, (\, 3 \, (1 + \rho) \, \mathbf{r}_b \, \mathbf{r}_m + 2 - \rho \,) + 3 \, (1 + \rho) \, \mathbf{r}_b \,] \, \mathbf{p}'}{\alpha_m \, (1 + \rho) \, [\, 2 \, g \, (1 + \mathbf{r}_m) + 3 \, (1 + \mathbf{r}_b) \,] } \end{split}$$

E importante notar que no limite em nós temos uma única Gaussiana (N=1), ou seja, m = n = 1 e $r_b = 1$, $r_m = 1$ e g' = g, cada um dos coeficientes que aparecem nas Eqs.(5.76)-(5.79) reduz-se para aqueles dados na Ref. [59].

5.3 Interações de Troca de Mésons

É um fato conhecido, que nas reações a baixas energias envolvendo hádrons o mecanismo de troca de mésons desempenha um papel importante [63][58]. Esses processos são importantes para descrever a parte de longo-alcance das interações hadrônicas a baixas energias. No caso da reação K^+N , por exemplo, o mecanismo de troca de quarks contribui essencialmente para as ondas-S, e a troca dos mésons σ , $\omega \in \rho$ são cruciais para a descrição correta desta como também de ondas parciais mais altas [86]. No entanto, a dinâmica de troca de mésons sozinha não é capaz de descrever com suficiente precisão todos os dados experimentais para a interação KN [58],[80]. É necessário que tanto os efeitos de troca de méson quanto os de troca de quarkglúon, discutidos na seção anterior, sejam levados em conta. Sendo assim, nesta seção nós iremos discutir a obtenção de potenciais de interação devido a troca de mésons. Conforme já dito, estamos incluindo estes processos de troca de mésons para descrever a parte de mais longo alcance da interação, já que a interação de troca quark-glúon é de muito curto alcance. Iremos seguir de perto a abordagem originalmente desenvolvida na Ref. [57] para o sistema K^+N e $\overline{D}N$.

Uma das principais conclusões da Ref. [57] foi que as contribuições dominantes no modelo de troca de mésons são devido a troca dos mésons vetoriais ρ , ω e também de contribuições escalares que nós parametrizamos aqui em termos da troca de um méson σ – ver Figura 5.2. Os autores dessa referência notaram, também, que a substituição da troca de $\pi\pi$ correlacionados pela troca de um único méson σ não é uma aproximação ruim para o canal de isospin I = 0, mas para o canal I = 1ele fornece somente 50% do efeito total [57]. Portanto, esse fato deve ser levado em conta nos resultados aqui discutidos.

No Apêndice E, nós iremos, apresentar as principais relações que foram utilizadas na obtenção das fórmulas de redução para processos de espalhamento envolvendo partículas escalares e fermiônicas. A partir dessas relações foi possível empregarmos as técnicas de teoria de perturbações para obtermos a matriz-S para processos de espalhamento envolvendo esses campos. Dessa matriz-S, foi possível identificar um potencial de interação efetivo que pode ser iterado numa equação de Lippmann-Schwinger para determinar seções de choque e deslocamentos de fase.

Nós aplicamos esse formalismo para determinar os potenciais de interação para o

sistema $\bar{D}N$. Estamos interessados no seguintes processos de espalhamento elástico: $p \bar{D}^0 \rightarrow p \bar{D}^0, n \bar{D}^0 \rightarrow n \bar{D}^0, p D^- \rightarrow p D^-, n D^- \rightarrow n D^-$ e $p D^- \rightarrow n \bar{D}^0$. Nós também temos investigado o sistema K^+N . As densidades Lagrangianas associadas aos vértices méson-méson e méson-bárion – ver Figura 5.2, assim como os campos escalares e fermiônicos necessários em nossos cálculos são dados no Apêndice F.



Figura 5.2: Contribuição devido a troca de um méson válida para a interação $\overline{D}N$ e KN. Neste diagrama \overline{D} ou K, é a partícula pseudoescalar P e N é o núcleon.

Os potenciais em ondas parciais em termos das projeções dos potenciais central (C) e spin-órbita (SO) que obtivemos, em ordem mais baixa de teoria de perturbações, são dados pelas seguintes expressões, para $(i = \sigma, \rho, \omega)$

$$L_{+} = 0: \quad V_{i}^{I,J,L_{+}} = V_{C}^{I,L_{+}}$$
(5.80)

$$L_{\pm} \ge 1: \quad V_i^{I,J,L_{\pm}} = V_C^{I,L_{\pm}} + \frac{L_{\pm} + 1}{2L_{\pm} + 1} V_{SO}^{I,L_{\pm} + 1} + \frac{L_{\pm}}{2L_{\pm} + 1} V_{SO}^{I,L_{\pm} - 1} - V_{SO}^{I,L_{\pm}}$$
(5.81)

onde o momento angular orbital pode ser $L_+ = J - 1/2$ e $L_- = J + 1/2$ para os canais de isospin I = 0 e I = 1. As forma explícitas de V_C e V_{SO} são dadas no Apêndice E. Os estados de isospin I = 0 e I = 1 para os estados de carga D^-N e $\bar{D}^0 N$ são dados nas Eq.(5.72). Na tabela abaixo, nós apresentamos os valores para os fatores que devemos multiplicar os potenciais de interação para cada canal de isospin. Naturalmente, que esses coeficientes são os mesmos para o sistema K^+N .

Méson	Canal de Isospin $I = 0$	Canal de Isospin $I = 1$
ρ	- 3	1
ω	1	1
σ	1	1

Tabela 5.2: Tabela com os fatores de isospin necessários ao potencial de interação no modelo de troca de mésons.

Para regularizar os potenciais de troca de mésons, nós usamos fatores de forma do tipo monopolo em cada um dos vértices da Figura 5.2:

$$F_i(\boldsymbol{q}^2) = \left(\frac{\Lambda_i^2 - m_i^2}{\Lambda_i^2 + \boldsymbol{q}^2}\right)$$
(5.82)

onde $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}$, m_i é a massa do bóson trocado no propagador e Λ_i é o cutoff. Nesta tese usamos para o núcleon, kaon e \bar{D} as massas: $m_N = 939 \text{ MeV}$, $m_K = 496 \text{ MeV}$ e $m_{\bar{D}} = 1886.9 \text{ MeV}$.

Part. Trocada	Massa	Λ_M	Λ_B	
	[MeV]	[MeV]	[MeV]	
ρ	769	1400	1500	
ω	783.4	1500	1600	
σ	600	1700	1200	

Tabela 5.3: Parâmetros usados nos vértices do modelo de troca de méson para a interação KN e $\bar{D}N$.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

6.1 Introdução

O objetivo desse capítulo é apresentar os resultados numéricos do modelo de quarks constituintes que confina cor e realiza a quebra dinâmica da simetria quiral, que nós desenvolvemos nos Capítulos 4 e 5 desta tese. Esse modelo será aplicado para os cálculos das seções de choque e deslocamentos de fase da onda-S para as reações $KN \in DN$. Especificamente, para fazer isso, nós iremos em primeiro lugar discutir a solução da equação de gap para as funções de massa dos quarks constituintes. Uma vez obtidas as massas dos quarks, nós obteremos os parâmetros variacionais $\alpha \in \beta$, os coeficientes de expansão $a_n \in d_m$ das funções de onda dos mésons D, Ke do núcleon, e além disso determinaremos as respectivas massas desses hádrons. Para todas essas quantidades, nós precisaremos apenas de um "input", que são os potencias de interação V_C e V_T . Para isso nós usaremos tanto as interações no Calibre de Coulomb (SS) e (LTT) quanto aquela devido ao modelo (OGE) - para detalhes ver Ref. [57]. A partir daí, podemos obter as interações efetivas de curto-alcance méson-bárion. Para a parte de longo-alcance da interação mésonbárion nós usaremos os potenciais de interação devido a troca dos mésons ω , ρ e σ . Esses potenciais de interação que obtivemos, por sua vez, serão iteradas em uma Equação de Lippmann-Schwinger para obter observáveis da reação $DN \in KN$.

6.2 Soluções Numéricas da Equação de Gap

O primeiro passo em nosso esquema de cálculo será resolver a equação de gap para obter as massas dos quarks constituintes – ver Eq. (4.72). Nós usaremos nessa simulação numérica os potenciais V_C e V_T como discutidos na Sec. 4.3 e na Sec. 4.4. Antes de fazer qualquer simulação numérica é importante notar que a interação de Coulomb V_C é fortemente divergente para baixos momentos transferidos. Especificamente, no limite em que $q \to 0$ o potencial de Coulomb diverge como $V_C \to 1/q^4$. No entanto, apesar dessa interação confinante ser divergente quando $q \to 0$, a equação de gap é finita devido a um cancelamento de dois termos divergentes. O problema é que um tal cancelamento é bastante difícil de ser controlado numericamente, o que torna necessário a utilização de algum esquema de regularização.

Vamos iniciar a discussão do esquema de regularização que utilizamos reescrevendo a equação de gap dada em (4.72) em uma forma mais conveniente, ou seja,

$$M_{p}^{f} = m_{0}^{f} + \frac{2}{3} \int \frac{d^{3}q}{(2\pi)^{3}} \left(\frac{M_{q}^{f}}{E_{q}^{f}} - \frac{M_{p}^{f}}{E_{q}^{f}} \frac{q}{p} \hat{p} \cdot \hat{q} \right) V_{C}(|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|) + \frac{2}{3} \int \frac{d^{3}q}{(2\pi)^{3}} \left(\frac{M_{q}^{f}}{E_{q}^{f}} + \frac{M_{p}^{f}}{E_{q}^{f}} \frac{q}{p} \frac{(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} - p^{2})(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} - q^{2})}{p q |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|^{2}} \right) V_{T}(|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|) \quad (6.1)$$

Como estaremos interessados apenas na integral proporcional a interação de Coulomb, que iremos chamar de I_C , vamos separa-lá da Eq.(6.1)

$$I_C = \frac{2}{3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\frac{M_q^f}{E_q^f} - \frac{M_p^f}{E_q^f} \frac{q}{p} \hat{p} \cdot \hat{q} \right) V_C(|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|)$$
(6.2)

Para regularizar I_C usaremos a mesma estratégia utilizada pelos autores das Refs. [93, 94], que consiste em adicionar um zero convenientemente nesse termo. A forma explícita desse zero é dada por,

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|) \frac{M_p^f}{E_p^f} \frac{\hat{p}}{p} \cdot (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$$
(6.3)

Naturalmente, que para ficar mais claro que essa integral é realmente zero basta fazer a seguinte mudança de variáveis,

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|) \frac{M_p^f}{E_p^f} \frac{\hat{p}}{p} \cdot (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \underset{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}{\longrightarrow} \frac{M_p^f}{E_p^f} \frac{1}{p^2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(q) (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}) (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})$$
(6.4)

o que nos leva a uma integral nula por paridade.

Vamos agora subtrair o termo dado na Eq. (6.3) daquele dado na Eq. (6.2)

$$I_{C} = \frac{2}{3} \int \frac{d^{3}q}{(2\pi)^{3}} \left(\frac{M_{q}^{f}}{E_{q}^{f}} - \frac{M_{p}^{f}}{E_{q}^{f}} \frac{q}{p} \hat{p} \cdot \hat{q} - \frac{M_{p}^{f}}{E_{p}^{f}} \frac{\hat{p}}{p} \cdot (p - q) \right) V_{C}(|p - q|)$$
(6.5)

Uma vez que essa subtração tenha sido feita, é imediato reescrevermos a Eq. (6.5) da seguinte maneira

$$I_C = \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\left(\frac{M_q^f}{E_q^f} - \frac{M_p^f}{E_q^f} \right) - \left(\frac{M_p^f}{E_q^f} - \frac{M_p^f}{E_p^f} \right) \left(\frac{q}{p} \hat{p} \cdot \hat{q} - 1 \right) \right] V_C(|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|)$$

$$\tag{6.6}$$

Nessa última expressão é fácil notar que no ponto em que o potencial é fortemente divergente, ou seja, quando $p \rightarrow q$, os dois termos que multiplicam V_C se anulam independentemente da integral sobre os ângulos, o que torna o procedimento numérico mais simples de ser controlado. Uma vez que I_C está escrita em uma forma regularizada, podemos retornar com este termo para a equação de gap para resolvê-la numericamente.

A equação foi resolvida por iteração, ou seja, dado um valor de inicial para M_p , as integrais sobre a variável q são resolvidas para cada valor de p. Uma vez obtido o novo valor de M_p , o procedimento é repetido até encontrarmos um valor para a massa que não difira de seu antecessor por um valor maior que $\epsilon \approx 10^{-5}$, para cada valor de q. Nós temos empregado nesse procedimento, uma subrotina chamada "FIXPDF" que foi obtida do site: http://www.netlib.org/hompack/index.html.

Como havíamos comentado, em nossas simulações numéricas nós temos usado para os potenciais de Coulomb V_C dois modelos: o modelo que denominaremos de Szczepaniak-Swanson (SS) e o modelo da rede (LTT). Os parâmetros típicos usados nesses potenciais foram apresentados nas Sec. 4.3 e na Sec. 4.4. Para a parte transversa V_T da interação, nós utilizamos o potencial parametrizado pela Eq.(4.43). Os parâmetros necessários para fixar esse potencial foram fitados para que a solução da equação de gap para a massa de corrente dos quarks leves $m_0 = 10$ MeV fosse da ordem de M = 300 MeV, que é o valor das massas dos quarks constituintes que aparecem em modelos de quarks não-relativístico. Os valores desse parâmetros são $\alpha_T = 0.5, m_0 = m_g/2$ e $\tau = 1.05$. Nossos resultados numéricos para essas simulações são mostrados nos dois painéis da Fig. 6.1.

Existem alguns importantes fatos a cerca dos resultados a serem notados. Primeiro, para momentos $k \leq \Lambda_{QCD} = 250$ MeV como também $k \leq m_g = 550$ MeV, as funções de massa tem uma pequena dependência no momento (em uma escala logarítmica). Esse é um fato importante, pois mostra sendo as componentes da função de onda para altos momentos fortemente suprimidas, a aproximação de baixos momentos que usamos para as massas M(k = 0) pode não ser muito ruim. Segundo, com o aumento de m_0 os efeitos da D χ SB diminuem, como pode ser visto para a massa do charm m_c . Terceiro, para valores de momento menor que 500 MeV os resultados para as massas dos quarks $m_u, m_s \in m_c$ coincidem com aqueles do modelo não-relativístico de quarks constituintes que discutimos no início desta tese. E por fim, devemos fazer alguns comentários com relação ao resultado numérico que obtivemos para o condensado $\langle \bar{q}q \rangle$. O valor do condensado extraído da fenomenologia é $(-\langle \bar{q}q \rangle)^{1/3} \approx 250$ MeV. Nesta tese, nós obtivemos um valor para o condensado da ordem de $(-\langle \bar{q}q \rangle)^{1/3} \approx 350$ MeV. Para entender um pouco o significado do



Figura 6.1: Massa dos quarks constituintes M_p como função do momento. No painel superior são mostrados os resultados para a interação do modelo da rede (LTT). Já no painel inferior são apresentados os resultados para a interação do modelo de Szczepaniak-Swanson (SS).

nosso resultado para o condensado, devemos analisar o comportamento no limite ultravioleta tanto do condensado quanto da equação de gap.

A forma geral para o condensado no limite do ultravioleta é a seguinte

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{3}{\pi^2} \int^{\Lambda} dp \, p^2 \left[\frac{M_p}{\sqrt{p^2 + M_p^2}} + \frac{m_0}{\sqrt{p^2 + m_0^2}} \right]$$
(6.7)

onde Λ é um número grande. Já para a equação de Gap no limite quiral, não é

difícil mostrar que

$$M_p \to m_0 + \frac{2}{3} \left[V_C(p) + 2 V_T(p) \right] \int^p dq \, q^2 \frac{M_q}{E_q}$$
 (6.8)

Para interações no limite do ultravioleta da seguinte forma

$$V(p) \to \frac{4\pi \,\alpha_s}{p^2 \,\ln^\lambda(p^2)} \tag{6.9}$$

onde $\lambda \neq 1$ e α_s são constantes, a equação de gap M_p , tem o seguinte comportamento

$$M_p \to \frac{1}{p^2 \ln^{\lambda}(p^2)} \tag{6.10}$$

Se substituirmos na Eq. (6.7), no limite quiral, na Eq. (6.10) nós obteremos

$$\langle \bar{q}q \rangle \sim -\int^{\Lambda} dp \, p^2 \frac{1}{p^3 \ln^{\lambda}(p^2)}$$

 $\sim \ln^{1-\lambda}(\Lambda^2)$ (6.11)

Este resultado traz a importante informação, que para as interações que estamos usando na presente tese, que possuem $\lambda > 1$, a integral do condensado no limite quiral é finita para valores grandes de momento.

No entanto, a propriedade de liberdade assintótica da QCD estabelece que $\lambda = 1$ e devemos retomar a análise feita no parágrafo acima. Mais precisamente, em QCD nós temos além de λ , que a constante de acoplamento $\alpha_s = d \pi$, sendo $d = 12/(33 - N_f)$ onde N_f é o número de sabores de quarks. Para este caso, a integral do condensado diverge logaritmicamente [95]. Nesta situação, se invoca o conceito de condensado "running", ou seja, se usa o fato de que o condensado depende de uma escala de momento μ da seguinte forma

$$\langle \bar{q}q \rangle_{\mu} = \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \right]^{-d} \langle q\bar{q} \rangle_{\Lambda}$$
 (6.12)

Isso significa que na prática a integral do condensado é determinada para um valor de momento cortado em um grande valor de Λ , e assim o valor do condensado é obtido para um dado μ usando a Eq.(6.12). Dessa forma, quando se diz que $(-\langle q\bar{q} \rangle) \approx 250$ MeV, na verdade o que se quer dizer é que esse condensado tem esse valor para uma dada escala de energia, que é escolhida por convenção como sendo $\mu = 1$ GeV, sendo assim $(-\langle \bar{q}q \rangle_{\mu=1 \text{ GeV}})^{1/3} \approx 250$ MeV.

Caso tenhamos $m_0 \neq 0$, no limite ultravioleta, a equação de gap tem como limite m_0 . Para este caso, independentemente do valor de λ , não é possível definir

um condensado. Assim, para contornar esse problema, se usa o fato de que a massa de corrente também é uma quantidade "running", ou seja, também depende de uma escala de momento $m_0(\mu)$. Uma excelente discussão sobre esse assunto pode ser encontrada na Ref. [95]. Nesta tese, no entanto não discutiremos tais aspectos. Um dos motivos para isso, é que na presente tese o importante é o valor da massa dos quarks constituintes na região de baixas energias e momentos.

Em resumo, a partir da discussão feita acima sobre o condensado, nós temos um forte indicativo de que o tipo de interações que estamos empregando na presente tese, que foi da ordem de ≈ 350 MeV, podem ser adequadas para descrever uma boa fenomenologia quiral.

6.3 Parâmetros Variacionais da Função de Onda

Uma vez as massas dos quarks constituintes estejam fixadas, o próximo passo é obter os parâmetros variacionais α_N , d_m , $\beta_N \in a_n$, que aparecem nas funções de ondas do nucleon e dos mésons $\overline{D} \in K$, além das respectivas massas desses hádrons. Para isso, utilizamos as Eqs.(4.115) e (4.151) junto com o esquema variacional descrito nas Secs.2.3.3 e 2.3.4. Afim de evitar uma repetição desnecessária, não iremos repetir a discussão desse esquema variacional novamente. Por consistência, em nossas soluções numéricas nós usamos as mesmas interações $V_C \in V_T$ e as massas dos quarks constituintes determinadas acima.

Nós observamos que para os potencias dos modelos de interação da rede (LTT) e de Szczepaniak-Swanson (SS), uma convergência muito rápida dos resultados numéricos para os autovalores de energia e para os autovetores foram obtidos com um pequeno número de Gaussianas usado para as funções de onda de mésons e bárions. Mais precisamente o esquema converge para N = 6 Gaussianas. Nas Tabelas. 6.2 e 6.1 apresentamos os resultados obtidos para as massas e parâmetros variacionais $\alpha \in \beta$ para o núcleon, o kaon e méson \overline{D} para ilustrar a rápida convergência dos resultados.

Cabe mencionar, que só apresentamos os resultados desses três hádrons, pois apenas eles serão de interesse para a presente discussão. No entanto, nós desenvolvemos um esquema de cálculo suficiente geral que pode ser estendido para outros mésons e bárions do espectro. Todos os parâmetros necessários foram determinados para a obtenção da mesma massa para os quarks constituintes leves $M \approx 300$ MeV. Dessa forma, nós esperamos que nossos resultados numéricos para as massas dos mésons e bárions que obtivemos com o modelo de quarks no calibre de Coulomb não sejam tão bem ajustadas aos valores experimentais quanto aquelas do (MNRQ).

N ^o Gaussianas	N		K		D	
	α	Massa	β	Massa	β	Massa
1	565	1001	425	650	505	1993
2	595	992	465	648	405	1987
3	545	992	425	640	375	1987
4	555	991	445	627	445	1983
5	535	991	415	625	425	1982
6	535	991	435	620	445	1980

Tabela 6.1: Massas e parâmetros variacionais para bárions e mésons obtidos com o modelo de interação (LTT). Todas as quantidades estão em MeV.

Nº Coursiones	N		K		 D	
n Gaussianas			ſ	Λ		D
	α	Massa	β	Massa	β	Massa
1	485	947	375	743	425	1960
2	545	912	435	728	375	1960
3	375	910	405	719	405	1956
4	375	909	445	701	455	1945
5	375	909	415	699	435	1943
6	375	909	445	699	465	1936

Tabela 6.2: Massas e parâmetros variacionais para bárions e mésons obtidos com o modelo de interação (SS). Todas as quantidades estão em MeV.

A seguir, vamos discutir o cálculo das seções de choque e deslocamentos de fase para o modelo OGE. Para esse cálculo, nós usamos os parâmetros que obtivemos na Seção. 2.3.2. Vamos, especificamente, discutir os resultados numéricos para o espalhamento KN e $\overline{D}N$. Vamos apresentar resultados das seções de choque e deslocamento de fase para onda-S para os canais de isospin I = 0 e I = 1. Nós resolvemos a equação de Lippmann-Schwinger para os potenciais V_{KN} e V_{DN} obtidos a partir de V_C e V_T e as respectivas funções de onda hadrônicas discutidas acima.

6.4 Deslocamentos Fase e Seções de Choque

Para determinar os deslocamentos de fase $\delta_L(E)$ para um certo momento angular Le para uma dada energia E, usamos a seguinte equação – ver Ref. [96]

$$\delta_L(E) = \frac{\operatorname{Im} T_L}{\operatorname{Re} T_L} \tag{6.13}$$

onde T_L é a componente de momento L da matriz T on-shell. A matriz T é obtida a partir da solução da equação de Lippmann-Schwinger, cuja decomposição em ondas parciais é dada por

$$T_L(p, p', k^2) = V(p, p') + \frac{\pi}{2} \int_0^\infty dq \, q^2 \frac{V_L(q, p', k^2)}{k^2 + q^2 + i0} \tag{6.14}$$

onde $k^2 = 2 m_{red} E$, E é a energia cinética do sistema méson-bárion e a massa reduzida é dada por $m_{red} = m_N m_{\bar{D}} / (m_N m_{\bar{D}})$. Em (6.14) o potencial V_L é

$$V_L(p, p') = \pi^2 \int_{-1}^{1} d\theta \, \sin(\theta) \, P_L(\theta) \, V_{MB}(p, p') \tag{6.15}$$

onde as interações efetivas méson-bárion, $V_{MB}(p, p')$, que utilizamos foram obtidas no capítulo 6 e são formadas pelas contribuições devido ao mecanismo microscópico de quark-glúon interchange e pela troca de mésons. A solução numérica da equação de Lippmann-Schwinger envolveu a utilização do método da matriz Γ , cujos detalhes podem ser obtidos na Ref. [96]. O código numérico, que foi gentilmente cedido pelo prof. Lauro Tomio, é o mesmo que foi empregado com sucesso para obter os resultados da Ref. [97]. Uma vez que a equação de Lippmann-Schwinger tenha sido resolvida para obtermos T_L , nós determinamos os deslocamentos de fase δ_L a partir da Eq.(6.13), e com este nós calculamos as seções de choque elásticas

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{L=0}^{\infty} \left(2L + 1 \right) \sin^2(\delta_L)$$
(6.16)

Nós seguiremos o esquema variacional discutido na seção anterior para definir as funções de onda para os mésons e bárions, ou seja, usaremos para os modelos de quarks (OGE), (LTT) e (SS) funções de onda compostas por combinações lineares de N = 6 Gaussianas. Isso porque, nós observamos uma boa convergência dos observáveis de espalhamento para este pequeno número de Gaussianas. Para ilustrar essa rápida convergência dos resultados numéricos quando o número de Gaussianas nas funções de onda do kaon, méson \overline{D} e do núcleon aumentam, mostramos nas Figs. 6.2, os deslocamentos de fase para o sistema KN e $\overline{D}N$, respectivamente.



Figura 6.2: Convergência dos deslocamentos de fase KN para diferentes número de Gaussianas para os modelos de quarks (OGE), (SS) e (LTT).



Figura 6.3: Convergência dos deslocamentos de fase $\overline{D}N$ para diferentes número de Gaussianas para os modelos de quarks (OGE), (SS) e (LTT).

Na Fig. 6.4 mostramos os resultados para as seções de choque para os sistemas $KN \in \bar{D}N$ como como função da energia cinética do centro-de-massa (c.m.) para o modelo de interação OGE. Nós usamos na interação OGE as massas dos quarks leves como sendo $m_u = m_d = 300$ MeV e para as massas dos quarks estranho e charm nós usamos $m_s = 550$ MeV e $m_c = 1600$ MeV. A constante de acoplamento quark-glúon é $\alpha_s = 0.6$. Todos os outros parâmetros envolvidos foram obtidas pela diagonalização do Hamiltoniano do modelo de quarks – Seção. 2.3.2. O primeiro aspecto a ser notado nos resultados para essas seções de choque é que em ambos os casos, $KN \in \bar{D}N$, a contribuição spin-spin no OGE é mais importante que a componente de Coulomb, como enfatizado na Ref. [57].

Os resultados também mostraram que as seções de choque para os canais de isospin I = 0 and I = 1 são praticamente constantes. As seções de choque preditas para o sistema $\bar{D}N$ são aproximadamente 1.5 vezes maiores que as do sistema KN. Este é um efeito dos diferentes tamanhos e das diferentes massas dos quarks dos hádrons $K \in \bar{D}$.



Figura 6.4: Seções de choque $KN \in DN$ devido ao mecanismo de OGE para N=6 Gaussianas. As curvas tracejadas e pontilhadas são resultado da parte spin-spin nos canais de isospin $I = 1 \in I = 0$, respectivamente. A curva sólida foi obtida depois de adicionarmos a parte spin-spin a parte de Coulomb no canal de isospin I = 1. Para o canal de isospin I = 0 a componente de Coulomb é zero de tal modo que o modelo completo coincide com a parte spin-spin.

As predições para as seções de choque baseadas no modelo de interação do Calibre de Coulomb (SS) e (LTT) são mostradas na Fig. 6.5. Esses resultados são muito similares ao modelo OGE, entretanto, como o tamanho dos hádrons nesse modelo são sensivelmente maiores que aqueles do OGE, observamos seções de choque um pouco maiores que no OGE – Tabelas. 6.2, 6.1, 2.5 e 2.6. Também notamos que diferentemente da contribuição spin-spin no modelo SS, que é similar à do OGE, no modelo LTT a parte de Coulomb é mais importante.



Figura 6.5: Seção de choque $KN \in \overline{D}N$ para os modelos de interação (SS) para N=6 Gaussianas. Mesma descrição que as curvas na Fig. 6.4.



Figura 6.6: Seção de choque KN e $\overline{D}N$ para os modelos de interação (LTT) para N=6 Gaussianas. Mesma descrição que as curvas na Fig. 6.4.

O papel da adição de interações de troca de mésons ao potencial de curto alcance gerado a partir do mecanismo de quark-gluon interchange nos observáveis de espalhamento do sistema $\overline{D}N$ foram primeiramente analisados na Ref. [57]. Aqui vamos usar nessa primeira etapa dos cálculos, as constantes de acoplamento dadas na Eq. (E.145). Dessa forma, estaremos assumindo a simetria de sabor SU(4) para fixar o valor dos acoplamentos $g_{\bar{D}\bar{D}\rho} \in g_{\bar{D}\bar{D}\omega}$.

Os autores da Ref. [57] mostraram que, analogamente à reação KN, as contribuições dominantes são devidas pelos mésons vetoriais (ρ , ω) junto com contribuições escalares, que nesta tese nós parametrizamos em termos da troca de um único méson σ . Naquele estudo foi observado que no canal de isospin I = 0 existe uma interferência destrutiva entre as contribuições atrativa do méson ρ e repulsiva do méson ω . A inclusão do escalar σ tem um pequeno efeito atrativo neste canal. No entanto, para o canal de isospin I = 1 a interferência entre os mésons ρ e ω são construtivas. A contribuição devido a troca de um σ é bem pequena como em I = 0. Nós ilustramos essas interferências nos deslocamentos de fase da onda-S para os sistemas KN e $\overline{D}N$ na Fig. 6.7.



Figura 6.7: Deslocamentos de fase para os sistemas $KN \in \overline{D}N$ para os canais de isospin I = 0 e I = 1 para o modelo de troca de mésons (ME).

Nas Figs. 6.8 e 6.9 , nós apresentamos os resultados após combinarmos as contribuições desses três mésons com a parte microscópica devida aos modelos OGE, SS e LTT. Em cada um desses gráficos é fácil ver que a contribuição devido à troca de mésons tem o efeito de aumentar a seção de choque em ambos os canais. Especificamente, para o canal de isospin I = 1 (linha sólida), o efeito do aumento da seção de choque é muito maior que no canal isospin I = 0 (linha pontilhada). Este é um resultado esperado, uma vez que nesse canal de isospin, os mésons ρ e ω contribuem construtivamente para a seção de choque, e para o canal I = 0 esse efeito é praticamente nulo uma vez que esses mésons interferem destrutivamente.

Uma questão natural que poderia surgir neste ponto é sobre o possível efeito de dupla contagem quando são considerados simultaneamente os mecanismos de troca de quarks e troca de mésons. De fato, somente parte da troca do mésons ω (a componente $\mu = 0$ do campo $\phi_{\mu}^{(\omega)}$) é equivalente à troca de quark [98]. Um caminho para evitar essa dupla contagem é usar um fator de forma que corte a parte de curta distância devida à troca do ω . Um procedimento tal já foi empregado na Ref. [87] para a interação NN. Lá, o ponto importante era que apesar da troca do mésons ω ser genuinamente de curto alcance, ele desempenhava um papel importante naquela reação. Um efeito similar é esperado para a reação \overline{DN} , como para a reação K^+N . Na presente tese nós não implementamos esse corte, mas certamente quando o efeito da parte de curto alcance do campo do $\phi_0^{(\omega)}$ for removido os resultado podem mudar um pouco. Nós temos a intenção de estudar tais efeitos em um trabalho futuro.



Figura 6.8: Seção de choque $KN \in \overline{D}N$ para os canais de isospin I = 0 (linha tracejada) e I = 1 (linha Sólida). As curvas são resultado do modelo completo, i.e., incluindo contribuições devido a ME + OGE.



Figura 6.9: Seção de choque KN e $\overline{D}N$ para os canais de isospin I = 0 (linha tracejada) e I = 1 (linha Sólida). As curvas são resultado do modelo completo, i.e., incluindo contribuições devido a ME + SS e ME + LTT. Em todos os modelos de quarks nós usamos funções de onda formadas pela combinação linear de N=6 Gaussianas.

Nas Figs. 6.10 e 6.11, apresentamos os resultados para os deslocamentos de fase para a onda-S para os sistemas KN e $\bar{D}N$ para os canais de isospin I = 0 e I = 1. Nessas figuras, nos painéis a esquerda nós apresentamos os resultados devido aos modelos de quarks sozinhos. Nos painéis a direita são apresentados os resultados após termos adicionado em cada um dos aos modelos de quarks a contribuição devido a troca de mésons. Como sempre, o mecanismo de troca de quarks leva a interações repulsivas. Nós notamos que a repulsão é um pouco maior no presente modelo que no OGE.



Figura 6.10: Deslocamentos de fase KN para os canais de isospin I = 0 e I = 1 e $\overline{D}N$ para o canal de isospin I = 0. O painel a esquerda mostra os resultados para a interação devido aos modelos quarks OGE (linha sólida), para LTT (linha tracejada-pontilhada) e para SS (linha tracejada). O painel a direita mostra os resultados após incluirmos as contribuições do modelo de (ME). Em todos os modelos de quarks usamos funções de onda formadas pela combinação linear de N=6 Gaussianas



Figura 6.11: Deslocamentos de fase $\overline{D}N$ para o canal de isospin I = 1. O painel a esquerda mostra os resultados para a interação devido aos modelos quarks OGE (linha sólida), para LTT (linha tracejada-pontilhada) e para SS (linha tracejada). O painel a direita mostra os resultados após incluirmos as contribuições do modelo de (ME). Em todos os modelos de quarks usamos funções de onda formadas pela combinação linear de N=6 Gaussianas

Para finalizar nossa discussão de apresentação dos resultados numéricos, vamos apresentar os resultados para seções de choque e deslocamentos de fase para o processo $\bar{D}N$ para os modelos OGE + ME, SS + ME e LTT + ME, levando em conta agora os efeitos da quebra de simetria SU(4). Isso significa que nas constantes de acoplamento $g_{\bar{D}\bar{D}\rho}$ e $g_{\bar{D}\bar{D}\omega}$, cujos valores foram fixados a partir da constante $g_{\pi\pi\rho} = 6.0$ por meio da seguinte relação [57]

$$g_{\bar{D}\bar{D}\rho} = g_{\bar{D}\bar{D}\omega} = g_{KK\rho} = g_{KK\omega} = \frac{g_{\pi\pi\rho}}{2}$$
(6.17)

nós iremos adicionar os 28% que estimamos na Seção. 3.6. Esse efeito nos leva a constantes de acoplamento com o seguinte valor,

$$g_{\bar{D}\bar{D}\rho} = g_{\bar{D}\bar{D}\omega} = 3.84.$$
 (6.18)

Recentemente, os autores da Ref.[99] forneceram o seguinte valor para $g_{\bar{D}\bar{D}\rho} = 3.81$. Na Ref.[100] também foi obtido um valor para a constante $g_{\bar{D}\bar{D}\rho} = 2.9 \pm 0.4$ usando Regras de Soma da QCD. Nós usamos o valores dos acoplamentos dados na Eq.(6.18) e recalculamos as seções de choque e deslocamento de fase para a reação $\bar{D}N$. Os resultados desse cálculo foram comparados com o caso simétrico nas Figs. 6.12 e 6.13.



Figura 6.12: Seções de choque para o sistema $\overline{D}N$. As linhas sólidas representam as seções de choque para o caso dos modelos de quarks + ME com acoplamento com quebra de simetria SU(4) – Eq.(6.18). As linhas tracejadas representam as seções de choque para o caso dos modelos de quarks + ME com acoplamento simétrico.


Figura 6.13: Deslocamentos de fase para o sistema $\overline{D}N$. As linhas sólidas representam os deslocamentos de fase para o caso dos modelos quarks + ME com acoplamento com quebra de simetria SU(4)– Eq.(6.18). As linhas tracejadas representam os deslocamentos de fase para o caso dos modelos quarks + ME com acoplamento simétrico.

Nas Figs. 6.12 e 6.13, nós apresentamos os resultados comparativos das seções de choque e deslocamentos de fase para os canais de isospin I = 0 e I = 1 para a reação $\bar{D}N$, usando no modelo de troca de méson as constantes de acoplamento $g_{DD\rho}$ e $g_{DD\omega}$ obtidas a partir da simetria de sabor SU(4) (linha tracejada) e também levando em conta o efeito de 28% que nós calculamos na Seção. 3.6 (linha contínua). Os resultados mostraram, que o aumento da constante de acoplamento devido a quebra de simetria de sabor tem um efeito pequeno mas não desprezível, que faz com que as seções de choque nos modelos ME+OGE, ME+SS e ME+LTT aumente. Os deslocamentos de fase, para cada um dos três modelos, tornaram-se também um pouco mais repulsivo nos três modelos. Esses resultados indicam que os efeitos da quebra de simetria de sabor SU(4) devem ser consideradas no estudo dos observáveis de espalhamento para a reação $\bar{D}N$. No entanto, observamos que as implicações dessa quebra de simetria não são tão dramáticas quanto parecem ao analisarmos a quebra apenas à nível das massas dos quarks,ou seja, $m_u = m_d < m_s \ll m_c$.

Capítulo 7 Conclusões Finais e Perspectivas

Nesta tese nós investigamos o acoplamento de mésons e bárions charmosos ao núcleon no contexto de um modelo não-relativístico de quarks. Também propomos a implementação de um modelo de quarks inspirado no Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb para determinar as interações méson-bárion.

Inicialmente, nós empregamos o modelo de decaimento forte ${}^{3}P_{0}$ para obter as razões das constantes de acoplamento para os vértices méson-méson-méson e bárionbárion-méson. Mais especificamente, os vértices analisados foram os seguintes: $\pi\pi\rho$, $KK\rho$, $\bar{D}\bar{D}\rho \in NN\pi$, $N\Sigma_{s}K$, $N\Lambda_{c}\bar{D}$, $N\Sigma_{c}\bar{D}$, $N\Lambda_{s}K$. Para determinar os elementos de matriz do operador de decaimento ${}^{3}P_{0}$ usamos funções de onda de estado ligado obtidas pela diagonalização exata do Hamiltoniano do modelo microscópico de quarks em uma base finita de funções de onda Gaussianas. Nós analisamos os efeitos da quebra da simetria SU(4) de sabor sobre as constantes de acoplamento devido as diferentes massas dos quarks (u; d), $s \in c$. Nossos resultados mostraram uma quebra no setor mesônico da ordem de 20% - 28%. Já no setor bariônico, a quebra é da ordem de 10% - 20%. Esses valores numéricos para a quebra da simetria são suficientemente grandes para que seus efeitos na interação entre mésons charmosos e o núcleon não fossem investigados, em particular com relação às predições das Refs. [56] e [57].

A seguir, nós discutimos a formulação de um modelo de quarks a partir de um Hamiltoniano inspirado no Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb. Nesse modelo, os efeitos dos graus de liberdade gluônicos aparecem no potencial de confinamento do tipo Coulomb e um potencial de gluôns transversos. As características mais importantes do modelo é que o Hamiltoniano confina a cor e realiza a quebra dinâmica da simetria quiral (D χ SB). O confinamento de cor no modelo significa que somente estados singleto de cor tem energia finita. A D χ SB significa, neste contexto, que a massa dos quarks constituintes *não é* um parâmetro livre, mas sim, gerada pelas interações microscópicas. Ainda mais, essas interações microscópicas são também responsáveis pela formação dos estados ligados hadrônicos e também pela interação entre hádrons.

Nós usamos esse modelo para estudar as seções de choque e deslocamentos de fase para processos elásticos envolvendo os sistemas $KN \in \overline{D}N$. Nenhum ajuste de parâmetros foi utilizado, toda a parametrização necessária para avaliar esses observáveis de espalhamento foram determinados pelo próprio modelo. Nós discutimos os resultados para as seções de choque e deslocamentos de fase da onda-S para estados acoplados de isospin I = 0 e I = 1. As funções de onda dos mésons e bárions envolvidos nas reações foram expandidas como uma soma de funções de onda do tipo Gaussianas. Os parâmetros dessas funções de onda foram obtidos a partir de um esquema variacional que envolveu a diagonalização do Hamiltoniano. Para as interações microscópicas, empregamos resultados obtidos via simulações de QCD na rede no calibre de Coulomb (LTT) e a partir de um estudo variacional, semi-analítico baseado na idéia de quasi-partículas (SS). Os resultados obtidos foram confrontados com as predições do tradicional modelo de quarks não relativístico com troca de um glúon (OGE). A sensibilidade dos resultados obtidos com cada modelo em termos do tamanho da base de funções Gaussianas foi analisado. Observamos que para os três modelos de interação utilizados, LTT, SS e OGE, os resultados dos observáveis de espalhamento estabilizaram para N = 6 Gaussianas. Isso sem dúvida, é uma assinatura da boa convergência dos autovalores de energia, como mostrado nas Tabelas 6.2 e 6.1.

Especificamente, os resultados que obtivemos com o modelo de quarks no calibre de Coulomb, LTT e SS, tanto para as seções de choque quanto para os deslocamentos de fase, são um pouco maiores que aquelas obtidas a partir do modelo não-relativístico de quarks com troca de um glúon, OGE. A explicação para os resultados maiores, é devido ao fato de que nos modelos LTT e SS as funções de onda dos hádrons levam a tamanhos menores que o modelo OGE. Esse tamanho menor dos hádron favorece superposições maiores entre as funções de onda dos hádrons no espaço dos momentos, o que favorece o mecanismo de troca quark-glúon (*quarkgluon interchange*). Além disso, as interações microscópicas dos modelos LTT e SS são mais intensas que aquelas do modelo OGE, uma caracterítica que também leva ao aumenta da intensidade da interação de troca quark-glúon. O mecanismo de troca quark-glúon leva a uma interação de alcance curto. Para levar em conta forças de alcance longo, nós também incluímos a troca de mésons. Inicialmente, empregamos constantes de acoplamento fixadas pela simetria de sabor SU(4). Uma vez que nós usamos as mesmas constantes de acoplamento, massa dos mésons e cutoff de massas que aquelas das Refs [56] e [57], nossos resultados são idênticos aos obtidos por essas referências para a parte de longo alcance gerada por esses mésons. A seguir, consideramos o efeito da quebra de simetria de sabor SU(4)nas constantes de acoplamento para a interação $\overline{D}N$ no modelo de troca de mésons (ME). Conforme já discutido, avaliamos essa quebra nas constantes de acoplamento $g_{\overline{D}\overline{D}\rho}$ e $g_{\overline{D}\overline{D}\omega}$. Observamos um aumento nos valores dessas constantes, o que se refletiu no aumento nos valores das seções de choque, e os os deslocamentos de fase tornaram-se um pouco mais repulsivos. No entanto, esses aumentos *não são* muito grandes. Por um lado, isso significa que as predições das Refs. [56] e [57] não se alteram muito devido à incorporação dos efeitos da quebra de simetria de sabor nas constantes de acoplamento dos mésons.

O modelo de quarks desenvolvido na presente tese deixa espaço para aprimoramentos e uma variedade de outras aplicações. Um possível aprimoramento que pode ser implementado com algum esforço computacional seria evitar o uso da aproximação de baixos momentos no cálculo da função de massa M(k). O custo computacional, como já dito anteriormente nesta tese, é a necessidade de realizar integrais multidimensionais via métodos de Monte Carlo para a determinação do espectro dos hádrons e do potencial efetivo méson-bárion. Um outro aprimoramento seria um trabalho conjunto com praticantes de QCD na rede para gerar interações de glúons transversos V_T para a inclusão num Hamiltoniano efetivo como o empregado nesta tese. Lembramos que a interação V_T que empregamos foi parametrizada devido á ausência de cálculos de QCD na rede para essa interação.

Em resumo, nós acreditamos que modelos como esse que apresentamos na presente tese são um importante avanço para o estudo sobre as interação a baixas energias entre hádrons. Não existem informações experimentais sobre essas reações e qualquer novo desenvolvimento pode ser de grande ajuda como um guia em futuros experimentos como aqueles propostos para o laboratório FAIR [101]. Em adição, um modelo de quarks que é baseado e um Hamiltoniano que realiza D χ SB deve ser considerado com um importante avanço em relação ao tradicional modelo de quarks onde não existe nenhuma conexão entre as massas constituintes e as interações microscópicas. Um modelo que faz um tal link é§ muito mais adaptado para estudos sobre restauração quiral no meio hadrônico denso e quente.

Apêndice A

Notação e Convenções

Neste trabalho estaremos usando a seguinte convecção para os quadrivetores contravariantes (x^{μ}) e covariante (x_{μ})

$$x^{\mu} = (t, \boldsymbol{x}) \quad x_{\mu} = (t, -\boldsymbol{x}) \tag{A.1}$$

$$p^{\mu} = (E, \mathbf{p}) \quad p_{\mu} = (E, -\mathbf{p})$$
 (A.2)

e para o tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
(A.3)

As matrizes gamma $\gamma^{\mu} = (\gamma^0, \gamma)$, obe decem

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = \{\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$$
(A.4)

e na representação de (Dirac-Pauli), podem ser escritas como

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_{5} = \gamma^{5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(A.5)

com as matrizes de Pauli dadas por

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
(A.6)

Para os espinores de Pauli de duas componentes temos as seguintes relações

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \chi_2^c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A.7)$$

Além dessas a seguinte relação para matrizes gama será útil

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \gamma^{\mu}) \tag{A.8}$$

com $\mu \neq \nu$. As matrizes de Isospin de Pauli, $\boldsymbol{\tau}(\tau_x, \tau_y, \tau_z)$, são dadas por

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
(A.9)

Em termos do tensor esférico, podemos introduzir

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\tau_x \pm i \tau_y \right] \tag{A.10}$$

Apêndice B Coeficientes Angulares $\mathbb{A} \in \mathbb{B}$

Na Sec. 2.3.4 nós temos introduzido três coeficientes angulares no potencial de interação "Coulomb + Linear", $\mathbb{A}^{l_{\rho},l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}}$, $\mathbb{B}^{l_{\rho},l_{\lambda}l'_{\rho}l'_{\lambda}}$ e \mathbb{C} . Esses coeficientes são decorrentes da separação de das variáveis angulares das especiais. A forma explícita do coeficiente devido ao termo de Coulomb do potencial é dado por

$$\mathbb{B}^{l_{\rho},l_{\lambda}l_{\rho}'l_{\lambda}'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin(\theta) \cos^{2}(\theta) \delta_{l_{\rho}'l_{\rho}} \delta_{l_{\lambda}'l_{\lambda}} \delta_{m_{\rho}'m_{\rho}} \delta_{m_{\lambda}'m_{\lambda}} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[\frac{4\pi}{(2l+1)} \right] \\ \times C_{l}(\theta) \int d\Omega_{\rho} Y_{l_{\rho}m_{\rho}}^{*}(\Omega_{\rho}) Y_{lm}(\Omega_{\rho}) Y_{l_{\rho}'m_{\rho}'}^{*}(\Omega_{\rho}) \int d\Omega_{\lambda} Y_{l_{\lambda}m_{\rho}}^{*}(\Omega_{\lambda}) Y_{lm}(\Omega_{\lambda}) Y_{l_{\lambda}'m_{\lambda}'}^{*}(\Omega_{\lambda})$$
(B.1)

onde nós temos introduzido o coeficiente $C_l(\theta)$, que denominaremos de Coulomb, por meio da seguinte relação

$$C_{l}(\theta) = (-1)^{l} \int_{0}^{\arctan(2)} d\theta \sin^{2}(\theta) \cos^{2}(\theta) \left[\left(\frac{2}{3^{l+1}} \right) \left(\frac{\sin^{l}(\theta)}{\cos^{l+1}(\theta)} \right) \right] \\ + (-1)^{l} \int_{\arctan(2)}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^{2}(\theta) \cos^{2}(\theta) \left[\left(2 \cdot 3^{l} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\cos^{l}(\theta)}{\sin^{l+1}(\theta)} \right) \right] \\ + (+1)^{l} \int_{0}^{\arctan(2)} d\theta \sin^{2}(\theta) \cos^{2}(\theta) \left[\left(\frac{2}{3^{l+1}} \right) \left(\frac{\sin^{l}(\theta)}{\cos^{l+1}(\theta)} \right) \right] \\ + (+1)^{l} \int_{\arctan(2)}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^{2}(\theta) \cos^{2}(\theta) \left[\left(2 \cdot 3^{l} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\cos^{l}(\theta)}{\sin^{l+1}(\theta)} \right) \right]$$
(B.2)

Já forma explícita do coeficiente devido ao termo linear do potencial é dado por

$$\mathbb{A}^{l_{\rho},l_{\lambda}l_{\rho}'l_{\lambda}'} = \sqrt{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^{3}(\theta) \cos^{2}(\theta) \delta_{l_{\rho}'l_{\rho}} \delta_{l_{\lambda}'l_{\lambda}} \delta_{m_{\rho}'m_{\rho}} \delta_{m_{\lambda}'m_{\lambda}} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[\frac{4\pi}{(2l+1)} \right]$$
$$\times \mathcal{L}_{l}(\theta) \int d\Omega_{\rho} Y_{l_{\rho}'m_{\rho}}^{*}(\Omega_{\rho}) Y_{lm}(\Omega_{\rho}) Y_{l_{\rho}'m_{\rho}'}^{*}(\Omega_{\rho}) \int d\Omega_{\lambda} Y_{l_{\lambda}'m_{\rho}}^{*}(\Omega_{\lambda}) Y_{lm}(\Omega_{\lambda}) Y_{l_{\lambda}'m_{\lambda}'}^{*}(\Omega_{\lambda})$$
(B.3)

onde nós temos introduzido o coeficiente $\mathcal{L}_l(\theta),$ que denominaremos de linear, por meio da seguinte relação

$$\begin{split} \mathcal{L}_{l}(\theta) &= (-1)^{l} \int_{0}^{\arctan(2)} d\theta \sin^{2}(\theta) \cos^{2}(\theta) \left[\frac{1}{(2l+3)} \left(\frac{1}{2 \cdot 3^{l+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin^{l+2}(\theta)}{\cos^{l+1}(\theta)} \right) \right] \\ &- \frac{1}{(2l-1)} \left(\frac{1}{2 \cdot 3^{l-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin^{l}(\theta)}{\cos^{l-1}(\theta)} \right) \right] + (-1)^{l} \int_{\arctan(2)}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^{2}(\theta) \cos^{2}(\theta) \\ &\times \left[\frac{1}{(2l+3)} \left(\frac{3^{l+2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\cos^{l+2}(\theta)}{\sin^{l+1}(\theta)} \right) - \frac{1}{(2l-1)} \left(\frac{3^{l}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\cos^{l}(\theta)}{\sin^{l-1}(\theta)} \right) \right] \\ &+ (+1)^{l} \int_{0}^{\arctan(2)} d\theta \sin^{2}(\theta) \cos^{2}(\theta) \left[\frac{1}{(2l+3)} \left(\frac{1}{2 \cdot 3^{l+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin^{l+2}(\theta)}{\cos^{l+1}(\theta)} \right) \\ &- \frac{1}{(2l-1)} \left(\frac{1}{2 \cdot 3^{l-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin^{l}(\theta)}{\cos^{l-1}(\theta)} \right) \right] + (+1)^{l} \int_{\arctan(2)}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^{2}(\theta) \cos^{2}(\theta) \\ &\times \left[\frac{1}{(2l+3)} \left(\frac{3^{l+2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin^{l+2}(\theta)}{\cos^{l+1}(\theta)} \right) - \frac{1}{(2l-1)} \left(\frac{1}{2 \cdot 3^{l-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\cos^{l}(\theta)}{\sin^{l-1}(\theta)} \right) \right] \end{aligned}$$
(B.4)

Apêndice C

Funções de Spin e Sabor de Mésons e Bárions

Neste apêndice vamos apresentar as funções de spin e sabor para os bárions e mésons estudados neste trabalho. Por completeza, vamos usar as seguinte notação para as projeções de spin e sabor do quark e antiquark

- Spin: $s = 1 \rightarrow \uparrow e \ s = 2 \rightarrow \downarrow$,
- Sabor: $f_{\mu} = 1 \rightarrow u, f_{\mu} = 2 \rightarrow d, f_{\mu} = 3 \rightarrow s, c.$

$$|p\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 2u_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) + 2d_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)u_{\uparrow}(3) + 2u_{\uparrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) \\ -u_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\uparrow}(3) - u_{\uparrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) - d_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) \\ -d_{\uparrow}(1)u_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) - u_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) - u_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\uparrow}(3) \end{bmatrix}$$
(C.1)

$$\begin{split} |\Sigma_{s}^{0}\uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{36}} \quad \left[2d_{\uparrow}(1)s_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) - d_{\downarrow}(1)s_{\uparrow}(2)u_{\uparrow}(3) - s_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) \\ &- 2s_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\uparrow}(3) + 2u_{\uparrow}(1)d_{\uparrow}(2)s_{\downarrow}(3) - u_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)s_{\uparrow}(3) \\ &- u_{\uparrow}(1)s_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) + 2u_{\uparrow}(1)s_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) + 2s_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\uparrow}(3) \\ &- s_{\uparrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) - d_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)s_{\uparrow}(3) + 2d_{\uparrow}(1)u_{\uparrow}(2)s_{\downarrow}(3) \\ &- s_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) - u_{\downarrow}(1)s_{\uparrow}(2)d_{\uparrow}(3) - d_{\uparrow}(1)s_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) \\ &- d_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)s_{\uparrow}(3) - u_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)s_{\uparrow}(3) - s_{\uparrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) \right] \quad (C.2) \end{split}$$

$$\begin{split} |\Lambda_{s}^{0}\uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}} \quad \left[u_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)s_{\uparrow}(3) - u_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)s_{\uparrow}(3) - d_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)s_{\uparrow}(3) \right. \\ &+ d_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)s_{\uparrow}(3) + s_{\uparrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) - s_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) \\ &- s_{\uparrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) + s_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) + d_{\downarrow}(1)s_{\uparrow}(2)u_{\uparrow}(3) \\ &- d_{\uparrow}(1)s_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) - u_{\downarrow}(1)s_{\uparrow}(2)d_{\uparrow}(3) + u_{\uparrow}(1)s_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) \right] \quad (C.3) \end{split}$$

É imediato obteremos os estados de spin-sabor para os bárions charmosos Λ_c^+ e Σ_c^+ das Eqs.(C.2 eC.3) pela substituição $s \to c$.

$$|K^{+}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[u_{\uparrow}(1)\bar{s}_{\downarrow}(2) - u_{\downarrow}(1)\bar{s}_{\uparrow}(2) \right]$$
(C.4)

$$|\bar{D}^{0}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[u_{\uparrow}(1)\bar{c}_{\downarrow}(2) - u_{\downarrow}(1)\bar{c}_{\uparrow}(2) \right]$$
(C.5)

$$|\pi^{+}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[u_{\uparrow}(1)\bar{d}_{\downarrow}(2) - u_{\downarrow}(1)\bar{d}_{\uparrow}(2) \right]$$
(C.6)

$$|\pi^{0}\rangle = \frac{1}{2} \Big[u_{\uparrow}(1)\bar{u}_{\downarrow}(2) - u_{\downarrow}(1)\bar{u}_{\uparrow}(2) - d_{\uparrow}(1)\bar{d}_{\downarrow}(2) + d_{\downarrow}(1)\bar{d}_{\uparrow}(2) \Big]$$
(C.7)

$$|\rho^{+}\rangle = -\left[u_{\uparrow}(1)\bar{d}_{\uparrow}(2)\right]$$
 (C.8)

Apêndice D Determinação do Potencial $V_{s_{\mu}s_{\nu}}$

Em geral neste trabalho precisamos calcular a parte de spin do potencial $V_{s_{\mu}s_{\nu}}$, isto é, precisaremos determinar a seguinte expressão

$$V_{ss'} = \sum_{ss'} \chi_{s'}^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P} \right) \chi_s^c \tag{D.1}$$

Se expandirmos a soma sobre os spins teremos o seguinte resultado

•

$$V_{ss'} = \chi_1^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P}\right) \chi_1^c + \chi_1^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P}\right) \chi_2^c + \chi_2^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P}\right) \chi_1^c + \chi_2^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P}\right) \chi_2^c \qquad (D.2)$$

Nosso próximo passo será calcular cada um dos quatro termos que apetecem nessa expansão, e para isso usaremos as definições das matrizes e dos espinores de Pauli dadas nas Eqs.(A.6 e A.7).

$$\chi_1^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P} \right) \chi_1^c = \chi_1^* \left(\sigma_x \cdot P_x + \sigma_y \cdot P_y + \sigma_z \cdot P_z \right) \chi_1^c$$
$$\chi_1^* \left(\sigma_x \cdot P_x \right) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_x = P_x \tag{D.3}$$

$$\chi_1^* \left(\sigma_y \cdot P_y \right) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_x = -iP_x \qquad (D.4)$$

$$\chi_1^* \left(\sigma_z \cdot P_z \right) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_z = 0 \tag{D.5}$$

•
$$\chi_1^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P}) \chi_2^c = \chi_1^* (\sigma_x \cdot P_x + \sigma_y \cdot P_y + \sigma_z \cdot P_z) \chi_2^c$$

 $\chi_1^* (\sigma_x \cdot P_x) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_x = 0$ (D.6)

$$\chi_1^* \left(\sigma_y \cdot P_y \right) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_x = 0 \qquad (D.7)$$

$$\chi_1^* \left(\sigma_z \cdot P_z \right) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_z = -P_z \qquad (D.8)$$

•
$$\chi_2^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P} \right) \chi_1^c = \chi_2^* \left(\sigma_x \cdot P_x + \sigma_y \cdot P_y + \sigma_z \cdot P_z \right) \chi_1^c$$

$$\chi_2^* \left(\sigma_x \cdot P_x \right) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_x = 0 \tag{D.9}$$

$$\chi_2^* \left(\sigma_y \cdot P_y \right) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_x = 0 \qquad (D.10)$$

$$\chi_2^* \left(\sigma_z \cdot P_z \right) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_z = -P_z \qquad (D.11)$$

•
$$\chi_2^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P} \right) \chi_2^c = \chi_2^* \left(\sigma_x \cdot P_x + \sigma_y \cdot P_y + \sigma_z \cdot P_z \right) \chi_2^c$$

 $\chi_2^* \left(\sigma_x \cdot P_x \right) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_x = -P_x \quad (D.12)$

$$\chi_2^* \left(\sigma_y \cdot P_y \right) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_x = -iP_y \quad (D.13)$$

$$\chi_2^* \left(\sigma_z \cdot P_z \right) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_z = 0$$
 (D.14)

Podemos agora, resumir todos os resultados obtidos da seguinte maneira

$$\chi_1^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P} \right) \chi_1^c = \left[P_x - i P_y \right] \tag{D.15}$$

$$\chi_1^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P} \right) \chi_2^c = -P_z \tag{D.16}$$

$$\chi_2^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P} \right) \chi_1^c = -P_z \tag{D.17}$$

$$\chi_2^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P} \right) \chi_2^c = -\left[P_x + i P_y \right] \tag{D.18}$$

Serão úteis também neste Trabalho as seguintes expressões envolvendo harmônicos

$$Y_{1\pm 1}(\Omega_P) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{i\Phi} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left[\frac{P_x \pm iP_y}{P} \right]$$
(D.19)

$$Y_{1\pm0}(\Omega_P) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\cos(\theta) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{P_z}{P}$$
(D.20)

Apêndice E

Potencias de Troca de Méson e Fatores de Isospin

Neste Apêndice nós apresentamos todos os cálculos necessários para a determinação dos potenciais de troca de méson dados no Capítulo 5.

E.1 Fórmulas de Redução: Escalares e Férmions

Nossa intenção aqui, será descrever os principais resultados apresentados pelos autores da Ref. [102].

Os elementos da matriz-S no espaço dos momentos, descrevendo a amplitude de transição de n-partículas incidentes (in) em m-partículas ejetadas (out), são definidos pela seguinte expressão

$$S_{fi} = \langle \boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_m; \text{out} | \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n; \text{in} \rangle$$
 (E.1)

No espaço de Fock, os estados de n-partículas são obtidos por sucessivas aplicações de operadores de criação bosônicos livres no vácuo, isto é

$$|\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n; \mathrm{in}\rangle \equiv \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}_1, \mathrm{in}} \dots \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}_n, \mathrm{in}} |0\rangle$$
 (E.2)

Esses operadores são tais que respeitam as usuais relações canônicas de comutação [102].

O operador de campo para uma partícula escalar neutra, $\phi_{in/out}$, pode ser sempre expandido em termos de ondas planas da seguinte forma

$$\hat{\phi}_{\rm in}(x) = \int d^3p \left[\hat{a}_{\boldsymbol{p},\rm in} f_{\boldsymbol{p}}(x) + \hat{a}_{\boldsymbol{p},\rm in}^{\dagger} f_{\boldsymbol{p}}^*(x) \right]$$
(E.3)

onde na Eq.(E.3), além dos operadores de campo $a \in a^{\dagger}$, nós temos também os fatores

$$f_{\mathbf{p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_k}} e^{-ik \cdot x} \quad f_{\mathbf{p}}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_k}} e^{ik \cdot x}$$
(E.4)

onde as energias das partículas escalares respeitam a seguinte relação de dispersão,

$$w_k = \sqrt{k^2 + \mu^2} \tag{E.5}$$

A conexão entre os campos incidentes (in) e os ejetados (out) é feita por meio de uma transformação unitária,

$$\hat{\phi}_{\text{out}}(x) = \hat{S}^{-1} \,\hat{\phi}_{\text{in}}(x) \,\hat{S} \tag{E.6}$$

onde \hat{S} é um operador que satisfaz a condição

$$\hat{S}^{\dagger}\hat{S} = \mathbb{I} \tag{E.7}$$

E, por hipótese, a relação entre os operadores de campo interagentes $\hat{\phi}(x)$ e livres $\hat{\phi}_{in/out}(x)$ é feita pela chamada condição assintótica, ou seja

$$\lim_{x_0 \to -\infty} \langle b | \hat{\phi}(x) | a \rangle = \sqrt{Z} \langle b | \hat{\phi}_{in}(x) | a \rangle, \qquad (E.8)$$

$$\lim_{x_0 \to +\infty} \langle b | \hat{\phi}(x) | a \rangle = \sqrt{Z} \langle b | \hat{\phi}_{\text{out}}(x) | a \rangle$$
(E.9)

onde Z é uma constante de renormalização a ser fixada. Além disso, estamos assumindo que $f_p(x)$ e seu complexo conjugado satisfazem a equação de Klein-Gordon,

$$\left(\Box + \mu^2\right) f_p(x) = 0 \tag{E.10}$$

A Eq.(E.3) pode ser facilmente invertida em favor dos operadores aniquilação e criação, $\hat{a} \in \hat{a}^{\dagger}$, isto é

$$\hat{a}_{\boldsymbol{p},\mathrm{in}} = i \int d^3x f_{\boldsymbol{p}}^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \hat{\phi}_{\mathrm{in}}(x)$$
 (E.11)

$$\hat{a}_{\boldsymbol{p},\mathrm{in}}^{\dagger} = -i \int d^3x f_{\boldsymbol{p}}(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \hat{\phi}_{\mathrm{in}}(x)$$
(E.12)

A idéia, agora, é expressar os elementos de matriz-S definidos na Eq.(E.1) em termos do valor esperado de um produto de operadores de campo ordenado temporalmente. A quantidade fundamental de interesse é a função de Green de n-pontos. A expressão que conecta a matriz S e a função de Green de n-pontos é conhecida como fórmula de redução LSZ.

A fórmula de redução para campos escalares neutros pode ser obtida a partir de alguns passos simples que seguem o seguinte esquema. Primeiro, devemos extrair um operador de criação $\hat{a}_{p,in}$ do estado inicial da Eq.(E.1). Segundo, devemos expressar este operador em termos dos operadores de campo assintóticos $\hat{\phi}_{in}(x)$ e $\hat{\phi}_{out}(x)$, para isso basta usar as Eqs.(E.11) e (E.12). E, por fim, devemos usar as Eqs.(E.8) e (E.9) para conectar os campos assintóticos $\hat{\phi}_{in/out}(x)$ com os campos interagentes $\hat{\phi}(x)$. Esse procedimento deve ser aplicado sucessivamente na Eq.(E.1), para todas as partículas presentes tanto no estado inicial quanto no final. De tal modo que, ao final teremos obtido o valor esperado do vácuo de um produto de operadores de campo da seguinte forma

$$S_{if} = \left(\frac{i}{\hat{Z}}\right)^{n+m} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \ d^4 y_1 \dots d^4 y_m \ f^*_{\boldsymbol{q}_1}(y_1) \dots f^*_{\boldsymbol{q}_m}(y_m)$$

$$\times \overrightarrow{(\Box_{y_1} + \mu^2)} \dots \overrightarrow{(\Box_{y_m} + \mu^2)} \ \langle 0 | T \left(\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \hat{\phi}(y_1) \dots \hat{\phi}(y_m)\right) | 0 \rangle$$

$$\times \overleftarrow{(\Box_{x_1} + \mu^2)} \dots \overleftarrow{(\Box_{x_n} + \mu^2)} \ f_{\boldsymbol{p}_1}(x_1) \dots \ f_{\boldsymbol{p}_n}(x_n)$$
(E.13)

onde nós estamos usando a seguinte notação $\hat{Z} = \sqrt{Z}$. Além disso, em nossa notação, a quantidade $T(\ldots)$ é o operador de ordenamento temporal. O valor esperado do produto de operadores de campo escalares ordenado no tempo, é a função de Green de n-pontos.

Para o caso envolvendo férmions vamos seguir o mesmo esquema. Os operadores de campo assintóticos para partículas com spin-1/2 podem ser expandidos em ondas planas como

$$\hat{\psi}_{in}(x) = \int d^3p \sum_{s} \left[\hat{b}_{in}(\boldsymbol{p},s) u_{\boldsymbol{p}s}(x) + \hat{d}_{in}^{\dagger}(\boldsymbol{p},s) v_{\boldsymbol{p}s}(x) \right]$$
(E.14)

$$\hat{\psi}_{in}^{\dagger}(x) = \int d^3p \sum_{s} \left[\hat{b}_{in}^{\dagger}(\boldsymbol{p}, s) \, u_{\boldsymbol{p}s}^*(x) + \hat{d}_{in}(\boldsymbol{p}, s) \, v_{\boldsymbol{p}s}^*(x) \right]$$
(E.15)

onde na equação acima os auto-espinores no espaço dos momentos são dados por

$$u_{ps}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} e^{-ip \cdot x} u(p, s)$$
 (E.16)

$$v_{ps}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} e^{+ip \cdot x} v(p, s)$$
 (E.17)

Esses espinores são tais que ele devem obedecer à equação de Dirac livre

$$(i\partial - m) u_{ps}(x) = (p - m) u_{ps}(x) = 0$$
 (E.18)

$$(i\partial - m) v_{ps}(x) = (-p - m) v_{ps}(x) = 0$$
 (E.19)

Podemos, de maneira análoga ao caso dos campos escalares, reescrever as Eqs.(E.14) e (E.15) em favor dos operadores de criação e aniquilação, como segue

$$\hat{b}_{\rm in}^{\dagger}(\boldsymbol{p},s) = \int d^3x \, \hat{\psi}_{\rm in}^{\dagger}(x) \, u_{\boldsymbol{p}s}(x) \tag{E.20}$$

$$\hat{d}_{\rm in}(\boldsymbol{p},s) = \int d^3x \, v_{\boldsymbol{p}s}^{\dagger}(x) \, \hat{\psi}_{\rm in}(x)$$
(E.21)

$$\hat{b}_{\text{out}}(\boldsymbol{p},s) = \int d^3x \, u_{\boldsymbol{p}s}^{\dagger}(x) \, \hat{\psi}_{\text{out}}(x)$$
(E.22)

$$\hat{d}_{\text{out}}(\boldsymbol{p},s) = \int d^3x \, \hat{\psi}_{\text{out}}^{\dagger}(x) \, v_{\boldsymbol{p}s}(x)$$
(E.23)

As condições assintóticas para os campos de Dirac $\hat{\psi}_{in/out}(x)$ são definidas de maneira análoga ao caso de Klein-Gordon, ou seja

$$\lim_{x_0 \to -\infty} \langle b | \hat{\psi}(x) | a \rangle = \sqrt{Z} \langle b | \hat{\psi}_{in}(x) | a \rangle$$
 (E.24)

$$\lim_{x_0 \to +\infty} \langle b | \hat{\psi}(x) | a \rangle = \sqrt{Z} \langle b | \hat{\psi}_{\text{out}}(x) | a \rangle$$
 (E.25)

Se seguirmos os mesmos passos descritos para os campos escalares, nós obteremos a fórmula de redução para os campos fermiônicos, ou seja

$$S_{if} = \left(\frac{-i}{\hat{Z}}\right)^{n+m} \left(\frac{i}{\hat{Z}}\right)^{\bar{n}+\bar{m}} \int d^4x_1 \dots d^4x_n d^4\bar{x}_1 \dots d^4\bar{x}_n d^4y_1 \dots d^4y_m d^4\bar{y}_1 \dots d^4\bar{y}_m \bar{u}_{q_m r_m}(y_m)$$

$$\times \quad \overline{(i\partial_{y_m} - m)} \dots \bar{u}_{q_1 r_1}(y_1) \overline{(i\partial_{y_1} - m)} \bar{v}_{\bar{p}_n \bar{s}_n}(\bar{x}_n) \overline{(i\partial_{\bar{x}_n} - m)} \dots \bar{v}_{\bar{p}_1 \bar{s}_1}(\bar{x}_1) \overline{(i\partial_{\bar{x}_1} - m)}$$

$$\times \quad \left\langle 0 \mid T \left(\hat{\psi}(\bar{y}_{\bar{m}}) \dots \hat{\psi}(\bar{y}_m) \hat{\psi}(y_m) \dots \hat{\psi}(y_1) \hat{\psi}(x_1) \dots \hat{\psi}(x_n) \hat{\psi}(\bar{x}_1) \dots \hat{\psi}(\bar{x}_m) \right) \mid 0 \right\rangle$$

$$\times \quad \overline{(-i\partial_{x_1} - m)} u_{p_1 s_1}(x_1) \dots \overline{(-i\partial_{x_n} - m)} u_{p_n s_n}(x_n) \overline{(-i\partial_{\bar{y}_1} - m)} v_{\bar{p}_1 \bar{s}_1}(\bar{y}_1)$$

$$\times \quad \overline{(-i\partial_{\bar{y}_{\bar{m}}} - m)} v_{\bar{p}_{\bar{m}} \bar{s}_{\bar{m}}}(\bar{y}_{\bar{m}}) \qquad (E.26)$$

ons estamos designando as antipartículas por quantidades com "barra" e, além disso, estamos usando a seguinte notação $\hat{Z} = \sqrt{Z}$. Novamente, em nossa notação a quantidade $T(\ldots)$ é um operador de ordenamento temporal. O valor esperado do produto de operadores de campo fermiônico ordenado no tempo é a função de Green de n-pontos.

Nosso próximo passo será calcular a função de Green de n-pontos, e para fazer isso, usaremos teoria de perturbações. Vamos introduzir a seguinte definição para a função de Green, para o caso de campos escalares

$$G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \mathcal{N} \langle 0 | T\left(\hat{\phi}_{in}(x_1)\ldots\hat{\phi}_{in}(x_n) e^{-i\int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathcal{L}_I(t)}\right) | 0 \rangle$$
(E.27)

onde para normalizar o estado de vácuo à unidade, $\langle 0|0\rangle = 1$, nós precisamos impor a seguinte condição

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\langle 0 | e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \,\mathcal{L}_I(t)} | 0 \rangle}$$
(E.28)

Após empregarmos a expansão perturbativa usual da função de Green, nós obteremos a seguinte expressão

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{N} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int d^4 y_1 \dots d^4 y_k$$
$$\times \langle 0 | T \left(\hat{\phi}_{in}(x_1) \, \hat{\phi}_{in}(x_2) \dots \hat{\phi}_{in}(x_n) \, \hat{\mathcal{L}}_I(y_1) \dots \hat{\mathcal{L}}_I(y_k) \right) | 0 \rangle \quad (E.29)$$

Esse esquema pode ser aplicado de maneira completamente análoga na obtenção da função de Green em processos envolvendo campos de fermiônicos.

E.2 Potenciais no Espaço dos Momentos

No que segue estaremos interssados na obtenção da interação de mésons charmosos com núcleons. O méson \overline{D} é uma partícula pseudo-escalar com spin 0 e isospin 1/2, já o núcleon possui tanto spin quanto isospin 1/2. No espaço de isospin essas partículas correspondem a um dubleto definido por $\overline{D} = (\overline{D}^0, D^-)$ e N = (p, n).

Em ordem mais baixa da teoria de perturbações, a matriz S correspondente a processos de espalhamento elástico que estaremos interessados nesta tese é dada por

$$S_{fi} = \delta_{fi} + \frac{1}{Z_1 Z_2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 y_1 d^4 y_2 f^*_{p_3}(y_2) \overrightarrow{(\Box_{y_2} + \mu^2)} \bar{u}_{p_4, s_4}(x_2) \overrightarrow{(i\partial_{x_2} - m^2)} \\ \times G^{(4)}(x_1, x_2, y_1, y_2) \overleftarrow{(i\partial_{x_1} - m^2)} u_{p_2, s_2}(x_1) \overleftarrow{(\Box_{y_1} + \mu^2)} f_{p_1}(y_1)$$
(E.30)

Uma das quantidades essenciais na matriz S são as funções de Green de 4-pontos, e para as reações que estaremos interessados estas são

$$G_{m}^{(4)} = \frac{(-i)^{2}}{2!} \int d^{4}z_{1}d^{4}z_{2} \langle 0|T\left(\hat{\psi}^{(N)}(x_{1})\,\hat{\psi}^{(N)}(x_{2})\hat{\phi}^{(\bar{D}^{0})}(y_{1})\hat{\phi}^{(\bar{D}^{0})}(y_{2})\mathcal{L}_{1}(z_{1})\mathcal{L}_{2}(z_{2})\right)|0\rangle$$
(E.31)
$$G_{m}^{(4)} = \frac{(-i)^{2}}{2!} \int d^{4}z_{1}d^{4}z_{2} \langle 0|T\left(\hat{\psi}^{(N)}(x_{1})\,\hat{\psi}^{(N)}(x_{2})\hat{\phi}^{*(D^{-})}(y_{1})\hat{\phi}^{(D^{+})}(y_{2})\mathcal{L}_{1}(z_{1})\mathcal{L}_{2}(z_{2})\right)|0\rangle$$
(E.32)

$$G_m^{(4)} = \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \langle 0 | T \Big(\hat{\psi}^{(N)}(x_1) \, \hat{\psi}^{(N)}(x_2) \hat{\phi}^{*(D^-)}(y_1) \hat{\phi}^{(\bar{D}^0)}(y_2) \mathcal{L}_1(z_1) \mathcal{L}_2(z_2) \Big) | 0 \rangle$$
(E.33)

onde m é o rotulo que designa o méson trocado e, além disso, afim de compactar a notação nós omitidos o argumento da função de Green $G_m^{(4)} \equiv G_m^{(4)}(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Nestas equações nós temos ainda que \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_1 , são as densidades Lagrangianas associadas a cada um dos vértices que aparecem na Figura.E.1. A forma explícita dessas Lagrangianas, como também dos campos escalares e fermiônicos são dadas no Apêndice F.

Uma fato importante a ser notado é que essas densidades Lagrangianas, ver Apêndice F, possuem uma estrutura de isospin. No entanto, nossa experiência mostra que é possível implementarmos todos os cálculos necessários para a obtenção das funções de Green e, consequentemente, os elementos de matriz-S, sem mencionarmos esse setor das Lagrangianas, o que simplifica enormemente os cálculos. Mas não podemos esquecer, obviamente, que ao final dos cálculos devemos resgatar corretamente os fatores decorrentes da parte de isospin dessas Lagrangianas. Em resumo, no que segue, nós omitiremos qualquer informações sobre isospin nos cálculos e somente no final de nossa discussão nós adicionaremos corretamente estes fatores no potencial. Além disso, nós devemos mencionar que toda a discussão será feita para o sistema $\overline{D}N$ mas com algumas simples modificações nas constantes de acoplamento como também na massa dos mésons é possível obter os potenciais de interação para o sistema K^+N . Na linguagem de diagramas de Feynman tais processos são pictoriamente representado como na Figura.E.1.



Figura E.1: Contribuição devido a troca de um méson válida para a interação DN e KN. Neste diagrama \overline{D} ou K, é a partícula pseudoescalar P e N é o núcleon.

E.3 Contribuição do Méson σ

O elemento de matriz S no espaço dos momentos correspondente a contribuição de um méson escalar σ é dado por

$$S_{fi}^{(\sigma)} = \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 y_1 d^4 y_2 f_{p_3}^*(y_2) \overrightarrow{(\Box_{y_2} + \mu^2)} \overline{u}_{p_4, s_4}(x_2) \overrightarrow{(i\partial_{x_2} - m^2)} \\ \times G_{\sigma}^{(4)}(x_1, x_2, y_1, y_2) \overleftarrow{(i\partial_{x_1} - m^2)} u_{p_2, s_2}(x_1) \overleftarrow{(\Box_{y_1} + \mu^2)} f_{p_1}(y_1)$$
(E.34)

Depois de utilizarmos a técnica de contrações de Wick na função de Green, nós obteremos a função de 4-pontos para a troca do méson σ , isto é

$$G_{\sigma}^{(4)}(x_1, x_2, y_1, y_2) = -g_{NN\sigma} g_{\bar{D}\bar{D}\sigma} \int d^4 z_1 \, d^4 z_2 \Big[i \Delta^{(\bar{D}^0)}(z_1 - y_1) \, i \Delta^{(\bar{D}^0)}(z_1 - y_2) \\ \times i \Delta^{(\sigma)}(z_2 - z_1) \, i S^{(N)}(x_2 - z_2) i S^{(N)}(z_2 - x_1) \Big]$$
(E.35)

Na Eq.(E.35) $S(x - y) \in \Delta(x - y)$ são os propagadores de férmions e escalares. Se lembrarmos agora das seguintes relações

$$\overline{\left(\Box_x + \mu^2\right)} \Delta_F(x - y) = -\delta^{(4)}(x - y)$$
(E.36)

$$\overrightarrow{(i\partial_x - m^2)}S_F(x - y) = \delta^{(4)}(x - y)$$
(E.37)

é imediato obtermos a matriz-S em uma forma mais compacta, isto é

$$S_{fi}^{(\sigma)} = -g_{NN\sigma} g_{\bar{D}\bar{D}\sigma} \int d^4 z_1 d^4 z_2 f_{\boldsymbol{p}_3}^*(z_1) f_{\boldsymbol{p}_1}(z_1) i\Delta^{(\sigma)}(z_2 - z_1) \bar{u}_{\boldsymbol{p}_4, s_4}(z_2) u_{\boldsymbol{p}_2, s_2}(z_2)$$
(E.38)

Após substituirmos em (E.38) as definições dadas nas Eqs.(E.4), (E.16) e (E.17), obteremos após algumas manipulações a seguinte expressão

$$S_{fi}^{(\sigma)} = \frac{-g_{NN\sigma}g_{\bar{D}\bar{D}\sigma}}{2^4\pi^3(w_{\boldsymbol{p}}w_{\boldsymbol{p}'})^{\frac{1}{2}}} \int d^4z_1 d^4z_2 e^{i(p_3-p_1)\cdot z_1} \Big[\bar{u}_{\boldsymbol{p}_4,s_4}(z_2)i\Delta^{(\sigma)}(z_2-z_1)u_{\boldsymbol{p}_2,s_2}(z_2)\Big] e^{i(p_4-p_2)\cdot z_2}$$
(E.39)

Agora vamos expandir as seguintes quantidades

$$i(p_3 - p_1) \cdot z_1 = i(E_3 - E_1)t_1 - i(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{x}_1$$
$$i(p_4 - p_2) \cdot z_2 = i(E_4 - E_2)t_2 - i(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}_2$$
(E.40)

Após introduzirmos, na Eq.(E.40), as seguintes mudanças de variáveis

$$t = t_2 - t_1, \quad T = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$
 (E.41)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$$
 (E.42)

podemos escrever que

$$(E_3 - E_1) \cdot t_1 + (E_4 - E_2) \cdot t_2 = (E_3 - E_1 + E_4 - E_2) \cdot T + \frac{1}{2}(E_3 - E_1 + E_4 - E_2) \cdot t \quad (E.43)$$

 $(p_3 - p_1) \cdot x_1 + (p_4 - p_2) \cdot x_2 = (p_3 - p_1 + p_4 - p_2) \cdot X + \frac{1}{2}(p_3 - p_1 + p_4 - p_2) \cdot x$

Se usarmos essas relações na Eq.(E.39) e realizarmos a integração, obteremos a seguinte matriz S

$$S_{fi}^{(\sigma)} = -(2\pi)^4 \,\delta^{(3)}(p_3 + p_4 - p_2 - p_1) \,\delta(E_3 + E_4 - E_2 - E_1) \,i\mathcal{M}_{fi}^{(\sigma)} \tag{E.44}$$

onde a matriz \mathcal{M}_{fi} é dada por

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\sigma)} = f_1^*(\boldsymbol{p}_3) \ \bar{u}_2(\boldsymbol{p}_4, s_4) \ \mathcal{V}^{(\sigma)}(\omega, \boldsymbol{q}) \ u_2(\boldsymbol{p}_2, s_2) \ f_1(\boldsymbol{p}_1)$$
(E.45)

onde na Eq.(E.45), as transformadas de Fourier do potencial são dadas por

$$\mathcal{V}^{(\sigma)}(\omega, \boldsymbol{q}) = \int d^3x \, e^{-i\boldsymbol{q}\cdot x} \, \mathcal{V}^{(\sigma)}(\omega, \boldsymbol{x}) \tag{E.46}$$

$$\mathcal{V}^{(\sigma)}(\omega, \boldsymbol{x}) = \int dt \, e^{i\omega t} \, \mathcal{V}^{(\sigma)}(t, \boldsymbol{x}) \tag{E.47}$$

onde para a troca de um méson sigma temos

$$-i\mathcal{V}^{(\sigma)}(t,\boldsymbol{x}) = [-ig_{NN\sigma}]i\Delta^{(\sigma)}(x)[-ig_{\bar{D}\bar{D}\sigma}]$$
(E.48)

Nas Eqs.(E.46) e (E.47) nós usamos a seguinte nomenclatura

$$x = (t, \boldsymbol{x}) = (t_2 - t_1, \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) , \quad q = (\omega_{CM}, \boldsymbol{q}_{CM})$$
 (E.49)

$$\boldsymbol{q}_{CM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_4 - \boldsymbol{p}_3) , \ \omega_{CM} = \frac{1}{2}(E_1 - E_2 + E_4 - E_3)$$
 (E.50)

É conveniente agora introduzirmos o momento transferido \boldsymbol{q} , e para tal usaremos que, no sistema de centro-de-massa

$$p_1 + p_2 = 0 e p_4 + p_3 = 0$$
 (E.51)

isso nos permite definir então

$$-p_2 = p_1 = p$$
, $-p_3 = p_4 = p' e q = p' - p$ (E.52)

Com base nesta transformação podemos reescrever a equação para a matriz- \mathcal{M} em uma forma mais compacta, ou seja

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\sigma)} = f_1^*(-\boldsymbol{p}') \, \bar{u}_2(\boldsymbol{p}, s_4) \, \mathcal{V}^{(\sigma)}(q) \, u_2(\boldsymbol{p}, s_2) f_1(-\boldsymbol{p}) \tag{E.53}$$

agora com

$$-i\mathcal{V}^{(\sigma)}(q) = [-ig_{NN\sigma}]i\Delta^{(\sigma)}(q)[-ig_{DD\sigma}]$$
(E.54)

Devemos notar que os índices 1 e 2 colocados nos espinores de momento, u, \bar{u} e nas funções f^* e f na Eq.(E.53), afetam os símbolos γ_0, γ, σ e χ que aí aparecem, e servem para indicar como as matrizes de Pauli e Dirac devem ser agrupadas e em que funções elas agem.

Para podermos usar a Eq.(E.53) em simulações numéricas será mais útil reescrevê-la como

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\sigma)} = \frac{g_{NN\sigma}g_{\bar{D}\bar{D}\sigma}}{2^4\pi^3(\omega_{\mathbf{p}'}\omega_{\mathbf{p}})^{\frac{1}{2}}} \bar{u}(\mathbf{p}',s') u(\mathbf{p},s) \frac{1}{q_{\sigma}^2 - m_{\sigma}^2 + i\epsilon}$$
(E.55)

onde usamos a expressão para o propagador da partícula escalar (σ) no espaço dos momentos

$$\Delta^{(\sigma)}(q) = \frac{1}{q_{\sigma}^2 - m_{\sigma}^2 + i\epsilon}$$
(E.56)

Agora, como sabemos que

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}',s')\,\bar{u}(\boldsymbol{p},s) = \sqrt{\frac{(E_{\boldsymbol{p}'}+M_N)(E_{\boldsymbol{p}}+M_N)}{4E_{\boldsymbol{p}'}E_{\boldsymbol{p}}}}\chi^{\dagger}_{s'}\left[1 - \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}')(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{(E_{\boldsymbol{p}'}+M_N)(E_{\boldsymbol{p}}+M_N)}\right]\chi_s \tag{E.57}$$

podemos reescrever a Eq.(E.55) como:

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\sigma)} = \frac{g_{NN\sigma}g_{\bar{D}\bar{D}\sigma}}{2^{4}\pi^{3}(\omega_{\mathbf{p}'}\omega_{\mathbf{p}})^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{(E_{\mathbf{p}'}+M_{N})(E_{\mathbf{p}}+M_{N})}{4E_{\mathbf{p}'}E_{\mathbf{p}}}}$$
$$\times \chi_{s'}^{\dagger} \left[1 - \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}')(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{(E_{\mathbf{p}'}+M_{N})(E_{\mathbf{p}}+M_{N})}\right]\chi_{s}\frac{1}{q_{\sigma}^{2}-m_{\sigma}^{2}+i\epsilon} \qquad (E.58)$$

No entanto, é mais conveniente escrevermos a Eq.(E.58) em uma forma mais compacta

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\sigma)} = \chi_{s'}^{\dagger} \left[F^{\sigma}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}) + G^{\sigma}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}) \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}'\right) \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}\right) \right] \chi_{s}$$
(E.59)

sendo $\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ e onde F e G são amplitudes definidas da seguinte maneira

$$F^{\sigma}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \sqrt{\frac{(E_{\mathbf{p}'} + M_N)(E_{\mathbf{p}} + M_N)}{4E_{\mathbf{p}'}E_{\mathbf{p}}}} A_{fi}^{\sigma}$$
(E.60)

$$G^{\sigma}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{(E_{\boldsymbol{p}'}-M_N)(E_{\boldsymbol{p}}-M_N)}{4E_{\boldsymbol{p}'}E_{\boldsymbol{p}}}}B^{\sigma}_{fi}$$
(E.61)

Além disso, \mathbf{A}^{σ} e \mathbf{B}^{σ} são dados por

$$A_{fi}^{\sigma} = \frac{g_{NN\sigma}g_{\bar{D}\bar{D}\sigma}}{2^{4}\pi^{3}(w_{p'}w_{p})^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{q_{\sigma}^{2} - m_{\sigma}^{2} + i\epsilon}\right]$$
(E.62)

$$B_{fi}^{\sigma} = -\frac{g_{NN\sigma}g_{\bar{D}\bar{D}\sigma}}{2^{4}\pi^{3}(w_{p'}w_{p})^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{q_{\sigma}^{2} - m_{\sigma}^{2} + i\epsilon}\right]$$
(E.63)

O potencial de interação devido a troca de um méson sigma pode ser identificado como

$$V^{(\sigma)}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}) = [F^{\sigma}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}) + G^{\sigma}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}')(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})]$$
(E.64)

E.4 Contribuição do Méson ρ

O elemento de matriz S no espaço dos momentos devido à contribuição do méson vetorial ρ é dado por

$$S_{fi}^{(\rho)} = \int d^{4}x_{1} d^{4}x_{2} d^{4}y_{1} d^{4}y_{2} f_{\mathbf{p}_{3}}^{*}(y_{2}) \overrightarrow{(\Box_{y_{2}} + \mu^{2})} \overline{u}_{\mathbf{p}_{4},s_{4}}(x_{2}) \overrightarrow{(i\partial_{x_{2}} - m^{2})} \\ \times G_{\rho}^{(4)}(x_{1}, x_{2}, y_{1}, y_{2}) \overleftarrow{(i\partial_{x_{1}} - m^{2})} u_{\mathbf{p}_{2},s_{2}}(x_{1}) \overleftarrow{(\Box_{y_{1}} + \mu^{2})} f_{\mathbf{p}_{1}}(y_{1})$$
(E.65)

A função de 4-pontos que usaremos na Eq.(E.65) tem a seguinte forma

$$G_{\rho}^{(4)}(x_{1}, x_{2}, y_{1}, y_{2}) = -g_{NN\rho} g_{\bar{D}\bar{D}\rho} \int d^{4}z_{1} d^{4}z_{2} \Big[i\Delta^{(\bar{D}^{0})}(z_{1} - y_{1}) (i\overleftrightarrow{\partial_{\mu}^{z_{1}}}) i\Delta^{(\bar{D}^{0})}(z_{1} - y_{2}) \\ \times iD^{\mu\nu}(z_{2} - z_{1}) iS^{(N)}(x_{2} - z_{2}) \gamma_{\nu}^{(2)} iS^{(N)}(z_{2} - x_{1}) \\ + \left(\frac{\kappa_{\rho}}{2m_{N}}\right) i\Delta^{(\bar{D}^{0})}(z_{1} - y_{1}) (i\overleftrightarrow{\partial_{\mu}^{z_{1}}}) i\Delta^{(\bar{D}^{0})}(z_{1} - y_{2}) \\ \times iS^{(N)}(x_{2} - z_{2}) iD^{\mu\nu}(z_{2} - z_{1}) \sigma_{\xi\nu}(i\overleftrightarrow{\partial^{\xi z_{2}}}) iS^{(N)}(z_{2} - x_{1}) \Big]$$
(E.66)

onde no operador derivativo (∂) o índice z indica em que variável este operador irá atuar e o índice ξ esta associado a cada uma das suas 4- componentes de Lorentz. Se seguirmos os passos esquematizados para o caso da troca do méson σ obteremos a seguinte matriz-S

$$S_{fi}^{(\rho)} = -(2\pi)^4 \delta^{(3)}(p_3 + p_4 - p_2 - p_1) \delta(E_3 + E_4 - E_2 - E_1) \, i \, \mathcal{M}_{fi}^{(\rho)} \tag{E.67}$$

onde a matriz $\mathcal{M}^{(\rho)}$ é dada por

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\rho)} = \frac{g_{NN\rho} g_{\bar{D}\bar{D}\rho}}{2^4 \pi^3 (w_{\mathbf{p}'} w_{\mathbf{p}})^{\frac{1}{2}}} \Big[(p'_{\bar{D}} + p_{\bar{D}})_{\mu} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma_{\nu} D^{\mu\nu}(q) u(\mathbf{p}, s) - \left(\frac{\kappa_{\rho}}{2m_N}\right) (p'_{\bar{D}} + p_{\bar{D}})_{\mu} \bar{u}(\mathbf{p}', s') i D^{\mu\nu}(q) \sigma_{\xi\nu} q^{\xi} u(\mathbf{p}, s) \Big]$$
(E.68)

onde o propagador do méson vetorial é dado por

$$D^{\mu\nu}(q) = \left[-g^{\mu\nu} + \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{m_{\rho}^2}\right] \frac{1}{(p'-p)^2 - m_{\rho}^2 + i\varepsilon}$$
(E.69)

Se usarmos agora as seguintes relações,

$$(p'_{\bar{D}} + p_{\bar{D}})^{\nu} \sigma_{\xi\nu} q^{\xi} = 2 Q^{\nu} i \sigma_{\xi\nu} q^{\xi}, \qquad (E.70)$$

$$(p'_{\bar{D}} + p_{\bar{D}})^{\nu} \gamma_{\nu} = (p'_{\bar{D}} + p_{\bar{D}})_{\mu} \gamma^{\mu} = 2Q_{\mu} \gamma^{\mu} = 2Q \qquad (E.71)$$

poderemos então escrever

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\rho)} = -\frac{g_{NN\rho} g_{\bar{D}\bar{D}\rho}}{2^4 \pi^3 (w_{\mathbf{p}'} w_{\mathbf{p}})^{\frac{1}{2}}} \left[2 Q^{\nu} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left(\gamma_{\nu} + \frac{\kappa_{\rho}}{2m_N} i \sigma_{\nu\xi} q^{\xi} \right) u(\mathbf{p}, s) \right] \left[\frac{1}{t - m_{\rho}^2 + i\varepsilon} \right]$$
(E.72)

Além disso, se lembrarmos da identidade de Gordon, podemos então reescrever a matriz- ${\cal M}$ como

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\rho)} = -\frac{g_{NN\rho} g_{\bar{D}\bar{D}\rho}}{2^4 \pi^3 (w_{\mathbf{p}'} w_{\mathbf{p}})^{\frac{1}{2}}} \Big[2 (1 + \kappa_{\rho}) \bar{u}(\mathbf{p}', s') \mathcal{Q}(\mathbf{p}, s) \\ - \left(\frac{\kappa_{\rho}}{2m_N}\right) (p'_{\bar{D}} + p_{\bar{D}})^{\nu} (p' + p)_{\nu} \bar{u}(\mathbf{p}', s') u(\mathbf{p}, s) \Big] \Big[\frac{1}{t - m_{\rho}^2 + i\varepsilon} \Big] \quad (E.73)$$

onde $q^{\xi} \equiv (p'-p)^{\xi}$ e $t = (p'-p)^2$. Devemos notar que apenas o termo $g_{\mu\nu}$ do propagador do méson ρ , ver Eq.(E.69), contribui para matriz \mathcal{M} . Assim, podemos identificar o potencial de interação

$$V^{(\rho)}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}) = \bar{u}(\boldsymbol{p}',s') \left[\mathbf{A}_{fi}^{\rho} + \mathcal{Q} \mathbf{B}_{fi}^{\rho} \right] u(\boldsymbol{p},s)$$
(E.74)

onde $A \in B$ são amplitudes dadas por

$$A_{fi}^{\rho} = \frac{g_{NN\rho}g_{\bar{D}\bar{D}\rho}}{2^{4}\pi^{3}(w_{p}'w_{p})^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\frac{\kappa_{\rho}}{2m_{N}}\right)(p_{\bar{D}}'+p_{\bar{D}})^{\nu}(p'+p)_{\nu} \right] \left[\frac{1}{t-m_{\rho}^{2}+i\varepsilon} \right]$$
(E.75)

$$B_{fi}^{\rho} = -\frac{g_{NN\rho}g_{\bar{D}\bar{D}\rho}}{2^{4}\pi^{3}(w_{p}'w_{p})^{\frac{1}{2}}} 2(\kappa_{\rho}+1) \left[\frac{1}{t-m_{\rho}^{2}+i\varepsilon}\right]$$
(E.76)

onde $p, p', p_{\bar{D}} \in p'_{\bar{D}}$ são os quadri-momentos do núcleon e dos mésons charmosos, respectivamente. Devemos notar, agora, uma importante relação que usaremos

$$\bar{u}(\mathbf{p}',s')\mathcal{Q}\,u(\mathbf{p},s) = \sqrt{\frac{(E_{\mathbf{p}'}+m_N)(E_{\mathbf{p}}+m_N)}{4E_{\mathbf{p}'}E_{\mathbf{p}}}} \left[\frac{1}{2}(W+W'-2m_N) + \frac{1}{2}(W+W'+2m_N)\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})}{(E_{\mathbf{p}'}+m_N)(E_{\mathbf{p}}+m_N)}\right] \quad (E.77)$$

 com

$$W = w_{p} + E_{p}$$
, $W' = w_{p'} + E_{p'}$ (E.78)

Se usarmos agora as Eqs.(E.57) e (E.77), poderemos escrever a contribuição do méson ρ ao potencial de transição da seguinte forma

$$V^{(\rho)}(\mathbf{p'}, \mathbf{p}) = \sqrt{\frac{(E_{\mathbf{p'}} + m_N)(E_{\mathbf{p}} + m_N)}{4E_{\mathbf{p'}}E_{\mathbf{p}}}} \left[A^{\rho}_{fi} + \frac{1}{2}(W + W' - 2m_N)B^{\rho}_{fi} \right] - \sqrt{\frac{(E_{\mathbf{p'}} - m_N)(E_{\mathbf{p}} - m_N)}{4E_{\mathbf{p'}}E_{\mathbf{p}}}} \left[A^{\rho}_{fi} - \frac{1}{2}(W + W' + 2m_N)B^{\rho}_{fi} \right] \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}'})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})$$
(E.79)

onde $\hat{p} = p/|p|$. Agora introduziremos as seguintes quantidades,

$$F^{\rho}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \sqrt{\frac{(E_{\mathbf{p}'} + m_N)(E_{\mathbf{p}} + m_N)}{4E_{\mathbf{p}'}E_{\mathbf{p}}}} \left[A^{\rho}_{fi} + \frac{1}{2}(W + W' - 2m_N)B^{\rho}_{fi} \right]$$
(E.80)

$$G^{\rho}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{(E_{\boldsymbol{p}'} - m_N)(E_{\boldsymbol{p}} - m_N)}{4E_{\boldsymbol{p}'}E_{\boldsymbol{p}}}} \left[-A^{\rho}_{fi} + \frac{1}{2}(W + W' + 2m_N)B^{\rho}_{fi} \right] \quad (E.81)$$

de tal modo que poderemos escrever o potencial na seguinte forma

$$V^{(\rho)}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}) = \left[F^{\rho}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}) + G^{\rho}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}) \left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}'\right)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}) \right]$$
(E.82)

E.5 Contribuição do Méson ω

Nesta seção nós deveríamos apresentar uma discussão para obtenção do potencial de interação devido a contribuição do méson ω . No entanto, afim de evitar uma repetição nos cálculos nós apenas mencionaremos aqui que a expressão para esta contribuição pode ser obtida diretamente do potencial do méson ρ fazendo as seguintes substituições, primeiro nas amplitudes $F \in G$ tomar $\kappa_{\rho} = 0$ e também mudar a massa do méson trocado no propagador, isto é, $m_{\rho} \to m_{\omega}$. Além disso devemos fazer a substituição nas constantes de acoplamento $g_{NN\rho} g_{\bar{D}\bar{D}\rho} \to g_{NN\omega} g_{\bar{D}\bar{D}\omega}$.

E.6 Análise em Ondas Parciais do Potencial de Interação

Até aqui, nós mostramos que após algumas manipulações na matriz S, dos processos de espalhamento hádron-hádron, é sempre possível escrever esta em termos de uma matriz \mathcal{M} que pode ser identificada como um potencial de interação efetivo. Além disso, sempre foi possível escrever este potencial em uma forma compacta que dependia apenas de dois operadores angulares $\hat{1} \in (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})$. Podemos resumir esse potencial de transição com a seguinte expressão

$$V(\mathbf{p}', \boldsymbol{p}) = \left[F(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}) \,\hat{\mathbf{1}} + G(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}) \,(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}')(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) \,\right] \tag{E.83}$$

onde F e G são simples amplitudes que dependem dos momentos p, p', do ângulo θ entre estes dois vetores e da massa do méson trocado. O fato é que, tal como aparece na Eq.(E.83) esse potencial é de pouca utilidade prática.

Para ser possível utiliza-lo na análise de observáveis do espalhamento tais como como seções de choque e deslocamentos de fase, será necessário expandi-lo em termos de ondas parciais. Desta forma, nesta seção nós iremos apresentar de maneira sucinta o formalismo usado para fazer isso.

Para uma partícula sem spin, o momento angular total J é igual ao momento angular orbital L, de tal modo que podemos construir autovetores que fornecem uma representação na qual $\{J^2, J_z\}$ sejam diagonais, pela simples projeção de estados de ondas planas com harmônicos esféricos $Y_m^l(\theta, \phi)$. Os estados de onda plana são definidos da seguinte forma

$$\langle \boldsymbol{r} | \boldsymbol{p} \rangle = e^{i \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}$$

 $\langle \boldsymbol{R} | \boldsymbol{P} \rangle = e^{i \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{R}}$ (E.84)

Se lembrarmos que a expansão multipolar de uma onda plana é dada por

$$e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} = (4\pi) \sum_{lm} i^l j_l(pr) Y_m^{l*}(\hat{\boldsymbol{p}}) Y_m^l(\hat{\boldsymbol{r}})$$
(E.85)

e que a normalização para estes estados é definida da seguinte maneira

$$\langle \boldsymbol{r}' | \boldsymbol{r} \rangle = \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})$$
 (E.86)

$$\langle \boldsymbol{p}' | \boldsymbol{p} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})$$
 (E.87)

e usarmos a seguinte definição

$$|plm\rangle = \int d\Omega_{\hat{p}} Y_m^l(\hat{p}) |p\rangle, \qquad (E.88)$$

podemos escrever que

$$|\boldsymbol{p}\rangle = \sum_{lm} Y_m^{l*}(\hat{\boldsymbol{p}}) | p \, l \, m \,\rangle \tag{E.89}$$

Uma vez que tenhamos as Eqs.(E.89), (E.88), podemos escrever

$$\langle \boldsymbol{p} | p l m \rangle = \left[\frac{(2\pi)^3 \,\delta(p'-p)}{p^2} \right] Y_m^l(\hat{\boldsymbol{p}}) \tag{E.90}$$

No caso da partícula possuir spin (s), podemos estender o esquema anterior para encontrar os autoestados na representação onde tanto o quadrado do operador momento angular total quanto a terceira componente deste sejam diagonais. Para isto, basta projetarmos a onda plana no harmônico hiperesférico

$$\mathcal{Y}_{L}^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}, s) = \sum_{LM} C_{m \ m_s \ M}^{L \ 1/2 \ J} Y_{m}^{L}(\hat{\boldsymbol{p}}) \chi_{m_s}^{(1/2)}(s)$$
(E.91)

Teremos, assim, os seguintes estados nesta nova base

$$|pLJM\rangle = \int d\Omega_{\hat{p}} \mathcal{Y}_{L}^{JM}(\hat{p}, s) |p\rangle \qquad (E.92)$$

o que implica em

$$\langle \boldsymbol{p}s | p L J M \rangle = \left[\frac{(2\pi)^3 \,\delta(p'-p)}{p^2} \right] \,\mathcal{Y}_L^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}, s) \tag{E.93}$$

Vamos agora reescrever a Eq.(E.83) em uma forma mais esquemática para tornar mais simples sua manipulação

$$\hat{V} = \hat{F} + \hat{G} \tag{E.94}$$

 com

$$\hat{F} \equiv \hat{F} \otimes \hat{1}$$
 [Central] (E.95)

$$\hat{G} \equiv \hat{G} \otimes (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}')(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) \quad [\text{Não-Central}]$$
 (E.96)

Na Eq.(E.95) o operador $\hat{1}$ é uma matriz 2×2 unitária no espaço de spin. Vamos agora multiplicar ambos os lados da Eq.(E.94) por $|pLJMIM_I\rangle$

$$\langle p_f L' J' M' I' M'_I | \hat{V} | p_i L J M I M_I \rangle = \langle p_f L' J' M' I' M'_I | \hat{F} | p_i L J M I M_I \rangle$$

$$+ \langle p_f L' J' M' I' M'_I | \hat{G} | p_i L J M I M_I \rangle (E.97)$$

onde introduzimos convenientemente os índices de isospin I e sua projeção M_I . De fato, como sempre podemos escrever o estado méson-bárion na forma de um produto direto

$$|pLJMIM_I\rangle = |pLJM\rangle \otimes |IM_I\rangle \tag{E.98}$$

e como toda a álgebra de momento angular não interfere no setor de isospin, podemos tratar cada setor do potencial de maneira independente. Para implementar isto, iremos escrever a Eq.(E.97) da seguinte maneira

$$\langle p_f L' J' M' I' M'_I | \hat{V} | p_i L J M I M_I \rangle = \langle p_f L' J' M' | \left[\hat{F}^I + \hat{G}^I \right] | p_i L J M \rangle \quad (E.99)$$

onde na Eq.(E.99) queremos denotar com o índice I apenas a que canal de isospin as amplitudes $F \in G$ do potencial de interação estão associadas. Agora se definirmos

$$\hat{F}^{I} + \hat{G}^{I} = \langle I' M_{I}' | \left[\hat{F} + \hat{G} \right] | I M_{I} \rangle$$
(E.100)

$$\hat{V}^{I} = \langle I' M'_{I} | \hat{V} | I M_{I} \rangle$$
(E.101)

podemos escrever, ainda, a Eq.(E.99) como

$$\langle p_f L' J' M' | \hat{V}^I | p_i L J M \rangle = \langle p_f L' J' M' | \left[\hat{F}^I + \hat{G}^I \right] | p_i L J M \rangle$$
(E.102)

No que segue, nós iremos tratar apenas do setor angular do potencial, e na seção seguinte nós determinaremos os fatores de isospin. Para tornar mais claro o tratamento da parte angular do potencial, vamos separá-la em duas, uma que chamaremos central, V_C , e outra em não-central, V_{NC} , definindo as seguintes quantidades

$$V_C^I(\boldsymbol{p}_f, \boldsymbol{p}_i) \equiv \langle p_f \, L' \, J' \, M' | \hat{F}^I | p_i \, L \, J \, M \rangle \tag{E.103}$$

$$V_{NC}^{I}(\boldsymbol{p}_{f},\boldsymbol{p}_{i}) \equiv \langle p_{f} L' J' M' | \hat{G}^{I} | p_{i} L J M \rangle$$
(E.104)

Nós iniciaremos nossa discussão pela Eq.(E.103), que definimos como a parte central do potencial de interação

$$V_C^I(\boldsymbol{p}_f, \boldsymbol{p}_i) = \langle p_f \, L' \, J' \, M' | \hat{F}^I | p_i \, L \, J \, M \rangle \tag{E.105}$$

Agora introduziremos o conjunto completo

$$\mathbb{I} = \sum_{s} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} | \boldsymbol{p} s \rangle \langle \boldsymbol{p} s |$$
(E.106)

de tal maneira que teremos

$$V_C^I(\boldsymbol{p}_f, \boldsymbol{p}_i) = \sum_{s_i, s_f} \int \frac{d^3 p'_i \, d^3 p'_f}{(2\pi)^6} \left\langle p_f \, L' \, J' \, M' \right| \boldsymbol{p}'_f \, s_f \left\rangle \left\langle \, \boldsymbol{p}'_f \, s_f \left| \hat{F}^I \right| \, \boldsymbol{p}'_i \, s_i \right\rangle \left\langle \, \boldsymbol{p}'_i \, s_i \right| p_i \, L \, J \, M \right\rangle$$
(E.107)

Mas por outro lado, também sabemos que

$$\langle p_{i} L J M | \mathbf{p}_{i}' s_{i} \rangle = \left[\frac{(2\pi)^{3} \delta(p_{i}' - p_{i})}{p_{i}'^{2}} \right] \mathcal{Y}_{L}^{JM}(\hat{\mathbf{p}}_{i}', s_{i})$$

$$\langle \mathbf{p}_{f}' s_{f} | p_{f} L' J' M' \rangle = \left[\frac{(2\pi)^{3} \delta(p_{f}' - p_{f})}{p_{f}'^{2}} \right] \mathcal{Y}_{L'}^{J'M'*}(\hat{\mathbf{p}}_{f}', s_{f}) \qquad (E.108)$$

além disso sabemos que o operador $\hat{1}$ é diagonal no espaço de spin, de tal modo que

$$\langle \boldsymbol{p}_{f}' s_{f} | \hat{F}^{I} | \boldsymbol{p}_{i}' s_{i} \rangle = \langle \boldsymbol{p}_{f}' | \hat{F}^{I} | \boldsymbol{p}_{i}' \rangle \langle s_{f} | \hat{\mathbf{1}} | s_{i} \rangle$$

$$= F^{I}(\boldsymbol{p}_{f}', \boldsymbol{p}_{i}') \delta_{s_{f}s_{i}}$$
(E.109)

Agora vamos expandir a amplitude $F(\pmb{p}_{f}',\pmb{p}_{i}')$ em ondas parciais, isto é

$$F^{I}(\mathbf{p}_{f}', \mathbf{p}_{i}') = \sum_{l=0}^{\infty} [2l+1] F_{l}^{I}(p_{f}', p_{i}') P_{l}(\hat{\mathbf{p}}_{f}', \hat{\mathbf{p}}_{i}')$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} [2l+1] F_{l}(p_{f}', p_{i}') \sum_{n=-l}^{l} \left[\frac{4\pi}{2l+1}\right] Y_{n}^{l}(\hat{\mathbf{p}}_{f}') Y_{n}^{l*}(\hat{\mathbf{p}}_{i}')$$

$$= (4\pi) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^{l} F_{l}(p_{f}', p_{i}') Y_{n}^{l}(\hat{\mathbf{p}}_{f}') Y_{n}^{l*}(\hat{\mathbf{p}}_{i}') \quad (E.110)$$

Compilando esses resultados podemos reescrever a Eq.(E.107) como

$$V_{C}^{I}(\boldsymbol{p}_{f},\boldsymbol{p}_{i}) = (4\pi) \sum_{s_{i},s_{f}} \int d^{3}p_{f}' d^{3}p_{i}' \frac{\delta(p_{f}'-p_{f})}{p_{f}'^{2}} \mathcal{Y}_{L'}^{J'M'*}(\hat{\boldsymbol{p}}_{f}',s_{f}) \sum_{l=0}^{\infty} F_{l}^{I}(p_{f}',p_{i}')$$

$$\times \sum_{n=-l}^{l} Y_{n}^{l}(\hat{\boldsymbol{p}}_{f}') Y_{n}^{l*}(\hat{\boldsymbol{p}}_{i}') \delta_{s_{f}s_{i}} \frac{\delta(p_{i}'-p_{i})}{p_{i}'^{2}} \mathcal{Y}_{L}^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}_{i}',s_{i})$$
(E.111)

Agora se introduzirmos nesta equação a definição de harmônico hiperesférico, e realizarmos as integrais angulares, podemos rearranjar a equação para o potencial da seguinte forma

$$V_{C}^{I}(\boldsymbol{p}_{f},\boldsymbol{p}_{i}) = (4\pi) \sum_{l=0}^{\infty} F_{l}^{I}(p_{f},p_{i}) \sum_{m',m} \sum_{n=-l}^{l} C_{m \ s \ M}^{L \ 1/2 \ J} C_{m' \ s \ M'}^{L' \ 1/2 \ J'} \delta_{lL'} \delta_{nm'} \delta_{lL} \delta_{nm} \quad (E.112)$$

$$= (4\pi) F_{L}^{I}(p_{f}, p_{i}) \delta_{L'L} \delta_{M'M} \delta_{J'J}$$
(E.113)

Para o caso do operador não-central, nós seguiremos um esquema completamente análogo ao caso anterior, e para isso partiremos da Eq.(E.104)

$$V_{NC}^{I}(\boldsymbol{p}_{f},\boldsymbol{p}_{i}) = \langle p_{f} L' J' M' | \hat{G}^{I} | p_{i} L J M \rangle$$
(E.114)

Se inserirmos o conjunto completo, ver (E.106), na equação para o potencial não-central teremos

$$V_{NC}^{I}(\boldsymbol{p}_{f},\boldsymbol{p}_{i}) = \sum_{s_{i},s_{f}} \int \frac{d^{3}p_{i}'d^{3}p_{f}'}{(2\pi)^{6}} \langle p_{f} L' J' M' | \boldsymbol{p}_{f}' s_{f} \rangle \langle \boldsymbol{p}_{f}' s_{f} | \hat{G}^{I} | \boldsymbol{p}_{i}' s_{i} \rangle \langle \boldsymbol{p}_{i}' s_{i} | p_{i} L J M \rangle$$
(E.115)

Como agora temos elementos de matriz de um operador que atua no setor de spin, teremos

$$\langle \boldsymbol{p}'_{f} s_{f} | \hat{G}^{I} | \boldsymbol{p}'_{i} s_{i} \rangle = \langle \boldsymbol{p}'_{f} | \hat{G}^{I} | \boldsymbol{p}'_{i} \rangle \langle s_{f} | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}'_{f}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_{i}) | s_{i} \rangle$$
 (E.116)

$$= G^{I}(\boldsymbol{p}_{f}^{\prime},\boldsymbol{p}_{i}^{\prime}) \sum_{s} \langle s_{f} | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_{f}^{\prime}) | s \rangle \langle s | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_{i}^{\prime}) | s_{i} \rangle \quad (E.117)$$

onde temos usado novamente a relação de completeza

$$\mathbb{I} = \sum_{s} |s\rangle\langle s| \tag{E.118}$$

A expansão em ondas parciais para a amplitude $G^{I}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p})$ é dada por

$$G^{I}(\boldsymbol{p}_{f}',\boldsymbol{p}_{i}') = (4\pi) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^{l} G^{I}_{l}(p_{f}',p_{i}') Y^{l}_{n}(\hat{\boldsymbol{p}}_{f}') Y^{l*}_{n}(\hat{\boldsymbol{p}}_{i}')$$
(E.119)

Assim, podemos reescrever a equação para o potencial não-central, ver a Eq.(E.115), da seguinte forma

$$V_{NC}^{I}(\boldsymbol{p}_{f},\boldsymbol{p}_{i}) = (4\pi) \sum_{s_{i},s_{f},s} \sum_{n=-l}^{l} \sum_{l=0}^{\infty} G_{l}^{I}(p_{f},p_{i}) \int d^{3}\Omega_{\hat{\boldsymbol{p}}_{f}} \mathcal{Y}_{L_{f}}^{J'M'*}(\hat{\boldsymbol{p}}_{f},s_{f}) \langle s_{f} | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_{f}) | s \rangle$$

$$\times Y_{m}^{l}(\hat{\boldsymbol{p}}_{f}) \int d^{3}\Omega_{\hat{\boldsymbol{p}}_{i}} Y_{n}^{l*}(\hat{\boldsymbol{p}}_{i}) \langle s | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_{i}) | s_{i} \rangle \mathcal{Y}_{L_{i}}^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}_{i},s_{i})$$
(E.120)

Se usarmos agora, a definição de harmônico hiperesférico, poderemos reescrever a Eq.(E.120) na seguinte forma

$$V_{NC}^{I}(\boldsymbol{p}_{f},\boldsymbol{p}_{i}) = (4\pi) \sum_{s_{i},s_{f},s} \sum_{n=-l}^{l} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m',m'_{s_{f}}} \sum_{m',m'_{s_{i}}} G_{l}^{I}(p_{f},p_{i})$$

$$\times \int d^{3}\Omega_{\hat{\boldsymbol{p}}_{f}} C_{m'\,m'_{s_{f}}M'}^{L'\,1/2} Y_{m'}^{L_{f}*}(\hat{\boldsymbol{p}}_{f}) \langle s_{f} | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_{f}) | s \rangle Y_{m}^{l}(\hat{\boldsymbol{p}}_{f}) \chi_{m'_{s_{f}}}^{(1/2)}(s_{f})$$

$$\times \int d^{3}\Omega_{\hat{\boldsymbol{p}}_{i}} C_{m\,m_{s_{i}}M}^{L\,1/2} Y_{n}^{l*}(\hat{\boldsymbol{p}}_{i}) \langle s | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_{i}) | s_{i} \rangle Y_{m}^{L_{i}}(\hat{\boldsymbol{p}}_{i}) \chi_{m_{s_{i}}}^{(1/2)}(s_{i}) (E.121)$$

Para realizar a integração sobre as variáveis angulares na Eq.(E.121) será necessário computar a ação do operador de spin sobre o harmônico hiperesférico. Esse cálculo foi feito em detalhe no Apêndice. F, e aqui iremos apenas dar os resultados dessa operação que são

$$\sum_{s_i} \langle s | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_i) | s_i \rangle \, \mathcal{Y}_{L_i}^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}_i, s_i) = a_{L'L_i} \, \mathcal{Y}_{L'}^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}_i, s_i)$$
$$\sum_{s_f} \, \mathcal{Y}_{L_f}^{J'M'*}(\hat{\boldsymbol{p}}_f, s_f) \, \langle s | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_f) | s_f \rangle = a_{L_f L''} \, \mathcal{Y}_{L''}^{J'M'*}(\hat{\boldsymbol{p}}_f, s_f) \quad (E.122)$$

onde $a_{L'L}$ é uma matriz 2×2 cujos únicos elementos não nulos estão fora da diagonal e são -1. Podemos agora voltar para a Eq.(E.121), com esses resultados obtidos para o elemento de matriz do operador de spin, e realizar a integração angular e as somas em um caminho completamente análogo ao caso central. O resultado desse procedimento é

$$V_{NC}^{I}(\boldsymbol{p}_{f}, \boldsymbol{p}_{i}) = (4\pi) \sum_{l=0}^{\infty} G_{l}^{I}(p_{f}, p_{i}) a_{L_{f}l} a_{lL_{i}} \delta_{J'J} \delta_{M'M}$$
(E.123)

Assim, finalmente, após fazermos $l \to L'$, teremos

$$V_{NC}^{I}(\boldsymbol{p}_{f}, \boldsymbol{p}_{i}) = (4\pi) \sum_{L'=0}^{\infty} G_{L'}^{I}(p_{f}, p_{i}) a_{L_{f}L'} a_{L'L_{i}} \delta_{J'J} \delta_{M'M}$$
(E.124)

Uma importante propriedade da interação forte é que esta conserva a paridade, isto é, $(-1)^L = (-1)^{L'}$, o que implica em L = L'. Por outro lado, sabemos também que o sistema méson-bárion é caracterizado por dois números quânticos angulares, $J \in L$. De tal forma que, para um dado valor de L, o momento angular total só pode assumir dois valores possíveis $J = L \pm 1/2$. Decorre dessas propriedades que a amplitude de espalhamento do sistema $\overline{D}N$ distingue entre estados com paridade $\mathcal{P} = (-1)^{L_-=J+1/2}$ e $\mathcal{P} = (-1)^{L_+=J-1/2}$. Se invocarmos a invariância rotacional do potencial, teremos que este é diagonal em $J,L \in M$. Além disso, desde que a probabilidade de transição não pode depender da orientação do sistema completo, o potencial independe do número quântico M, de tal modo que podemos escrever

$$\langle p_f L' J' M' | \hat{V}^I | p_i L J M \rangle = (4\pi) V^{I,J,L_{\pm}}(p_f, p_i) \delta_{J'J} \delta_{M'M}, \delta_{L'L}$$
 (E.125)

onde a relação entre o potencial V^{JL} e as projeções das amplitudes F_L^I e G_L^I em ondas parciais, dadas nas Eqs.(E.113) e (E.124), são

$$V^{I,J,L_{+}}(p_{f},p_{i}) = \left[F^{I}_{L_{+}}(p_{f},p_{i}) + \sum_{L''} a_{L_{+}L''} G^{I}_{L''}(p_{f},p_{i}) a_{L''L_{+}}\right] \quad (E.126)$$

$$V^{I,J,L_{-}}(p_{f},p_{i}) = \left[F^{I}_{L_{-}}(p_{f},p_{i}) + \sum_{L''} a_{L_{-}L''} G^{I}_{L''}(p_{f},p_{i}) a_{L''L_{-}}\right]$$
(E.127)

Na forma matricial, podemos escrever esse potencial da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} V^{I,J,L_{+}} & 0\\ 0 & V^{I,J,L_{-}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} F^{I}_{J+1/2} + G^{I}_{J-1/2} \end{bmatrix} & 0\\ 0 & \begin{bmatrix} F^{I}_{J-1/2} + G^{I}_{J+1/2} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$
(E.128)

que equivale as seguintes expressões escritas em uma notação compacta

$$V^{I,J,L_{\pm}}(p_f,p_i) = \left[F^I_{L_{\pm}}(p_f,p_i) + G^I_{L_{\pm}\pm 1}(p_f,p_i)\right]$$
(E.129)

onde devemos mencionar que na Eq.(E.129) nós usamos a seguinte substituição

$$L_{+} + 1 = J - 1/2 + 1 = J + 1/2$$
 (E.130)

$$L_{-} - 1 = J + 1/2 - 1 = J - 1/2$$
 (E.131)

Uma outra forma extremamente útil de escrever a Eq.(E.83) é usando a seguinte relação

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}')(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) = \cos(\theta) + i \, \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, \qquad \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}|}$$
(E.132)

Dessa forma, poderemos escrever facilmente que

$$V(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}) = F(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}) + G(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p})\,\cos(\,\theta\,) + \,i\,G(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$$
(E.133)

Sendo assim, não é difícil expressar o potencial expandido em ondas parciais em termos das projeções central (C) e spin-órbita (SO) do potencial. Para isso basta primeiro notar que a relação entre $F \in G$, e os potenciais central e spin-órbita é

$$F = V_C + V_{SO} \cos(\theta), \qquad G = -V_{SO}$$
(E.134)

e além disso notar, que as expansões em ondas parciais de F e G são dadas por

$$F_L(p',p) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d \cos(\theta) F(\mathbf{p}',\mathbf{p}) P_L(\cos(\theta))$$
(E.135)

$$G_{L}(p',p) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d \cos(\theta) G(p',p) P_{L}(\cos(\theta))$$
(E.136)

Dessa forma, é possível escrever o potencial em ondas parciais em termos das projeções dos potenciais central e spin-órbita, ou seja

$$L_{+} = 0: \quad V^{I,J,L_{+}} = V_{C}^{I,L_{+}}$$
(E.137)

$$L_{\pm} \ge 1: \quad V^{I,J,L_{\pm}} = V_C^{I,L_{\pm}} + \frac{L_{\pm} + 1}{2L_{\pm} + 1} V_{SO}^{I,L_{\pm} + 1} + \frac{L_{\pm}}{2L_{\pm} + 1} V_{SO}^{I,L_{\pm} - 1} - V_{SO}^{I,L_{\pm}} (E.138)$$

Antes de finalizarmos essa seção, nós devemos mencionar que para a determinação dos observáveis de espalhamento ainda é necessário levarmos em conta certos fatores devido à estrutura de isospin dos potenciais de interação. Para tornar mais claro isso, nós devemos lembrar que a chave para a obtenção dos potenciais de interação para troca dos mésons σ , $\rho \in \omega$ foram as funções de Green dadas nas Eqs. (E.31)-(E.33). Nestas, as densidades Lagrangianas nos forneciam os vértices para cada processo de espalhamento. Naquela instância dos cálculos, realizamos as contrações de Wick sem especificarmos a parte de isospin dos campos envolvidos nestes processos, mas sabemos que fatores multiplicativos devem. Para introduzirmos corretamente estes fatores nos elementos de matriz nós deixamos um I rotulando os potenciais.

De maneira completamente geral, nós podemos escrever os elementos de matriz do potencial no espaço de isospin como

$$\hat{V}^{I} = \omega^{I} \langle I' M_{I}' | \hat{V} | I M_{I} \rangle$$
(E.139)

onde ω^{I} é um coeficiente associado aos processos envolvendo os sistemas $D^{-}N \in \overline{D}^{0}N$ para os estados acoplados de isospin I = 0 and I = 1. Além disso, na Eq.(E.139), nós suprimimos os índices angulares $L \in J$ para simplificar a notação. Esses estados de isospin I = 0 e I = 1 podem ser escritos ainda em termos dos estados de carga $D^{-}N \in \overline{D}^{0}N$ da seguinte forma

$$|I = 0, M = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|n\bar{D}^{0}\rangle - |pD^{-}\rangle \right]$$
 (E.140)

$$|I = 1, M = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|n\bar{D}^{0}\rangle + |pD^{-}\rangle \right]$$
 (E.141)

$$|I = 1, M = 1\rangle = |p\bar{D}^0\rangle$$
(E.142)

$$|I = 1, M = -1\rangle = |nD^{-}\rangle$$
(E.143)

Na Tabela E.1, apresentamos os valores para os coeficientes ω^{I} para cada canal de isospin. Naturalmente, esses coeficientes são os mesmos para o sistema $K^{+}N$.

Méson	Canal de Isospin $I = 0$	Canal de Isospin $I = 1$
ρ	- 3	1
ω	1	1
σ	1	1

Tabela E.1: Tabela com os fatores de isospin necessários ao potencial de interação.

Os potenciais devido à troca de mésons têm que ser regularizados fenomenológicamente para evitar divergências na equação de Lippmann-Schwinger. Nesta tese, nós usaremos fatores de forma em cada um dos vértices da Figura. E.1. Os fatores de forma são do tipo monopolo

$$F_i(\boldsymbol{q}^2) = \left(\frac{\Lambda_i^2 - m_i^2}{\Lambda_i^2 + \boldsymbol{q}^2}\right) \tag{E.144}$$

onde $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}$, m_i é a massa do bóson trocado no propagador e Λ_i é o cutoff. Usamos constantes de acoplamento fixados pela simetria de sabor SU(4) [57], isto é as constantes de acoplamento dos mésons estranhos e charmosos são relacionados a $g_{\pi\pi\rho}$ por meio da seguinte relação

$$g_{\bar{D}\bar{D}\rho} = g_{\bar{D}\bar{D}\omega} = g_{KK\rho} = g_{KK\omega} = \frac{g_{\pi\pi\rho}}{2}$$
(E.145)

Nós usamos o valor empírico de $g_{\pi\pi\rho}$, i.e. $g_{\pi\pi\rho} = 6.0$ e $\kappa_{\rho} = 6.1$. No entanto, no capítulo dedicado à discussão dos resultados numéricos nós iremos também apresentar os resultados para as seções de choque e deslocamentos de fase para o caso em os efeitos da quebra de simetria sejam levados em conta nas constantes de acoplamento, tal como discutido na Sec. 3.6. Por completeza, vamos também mencionar que para o núcleon, kaon e \bar{D} as seguintes massas $m_N = 939$ MeV, $m_K = 496$ MeV e $m_{\bar{D}} = 1886.9$ MeV.

Part. Trocada	Mass	$g_M/\sqrt{4\pi}$	$g_B/\sqrt{4\pi}$	Λ_M	Λ_B
	[MeV]			[MeV]	[MeV]
ρ	769	0.843	0.917	1400	1500
ω	783.4	0.843	2.750	1500	1600
σ	600	0.250	0.250	1700	1200

Tabela E.2: Parâmetros usados nos vértices do modelo de troca de méson para a interação $KN \in \overline{D}N$.

Apêndice F Lagrangianas de Interação

Nesta tese nós usamos as seguintes densidades Lagrangianas efetivas responsáveis pelos vértices de interação méson-méson e méson-bárion [103, 104, 105].

$$\mathcal{L}_{NNS}(x) = g_{NNS}\bar{\psi}^{(N)}(x)\phi^{(S)}(x)\psi^{(N)}(x)$$
(F.1)

$$\mathcal{L}_{PPS}(x) = g_{PPS}\varphi^{(P)}(x)\phi^{(S)}(x)\varphi^{(P)}(x)$$
(F.2)

$$\mathcal{L}_{PPV}(x) = ig_{PPV} \Big[\varphi^{(P)}(x) \left(\partial_{\nu} \varphi^{(P)}(x) \right) \boldsymbol{\tau} - \left(\partial_{\nu} \varphi^{(\bar{P})}(x) \right) \boldsymbol{\tau} \varphi^{(P)}(x) \Big] \cdot \boldsymbol{\phi}_{\nu}^{(V)}(x) \quad (F.3)$$

$$\mathcal{L}_{NNV}(x) = g_{NNV} \Big[\bar{\psi}^{(N)}(x) \gamma^{\mu} \psi^{(N)}(x) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}^{(V)}_{\mu}(x) + \left(\frac{\kappa_V}{2M_N}\right) \bar{\psi}^{(N)}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi^{(N)}(x) \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_{\nu} \boldsymbol{\phi}^{(V)}_{\mu}(x) \Big]$$
(F.4)

Nessas, $\psi^{(N)}$ denota o dubleto do núcleon, $\phi^{(P)}(x)$ o dubleto de mésons estranho e charmosos, $\phi^{(V)}_{\mu}(x)$ o iso-tripleto de mésons ρ , e τ são as matrizes de Pauli. As densidades Lagrangianas para o mésons ω são obtidas tomando $\tau \to 1$, $\kappa_V = 0$, nas Eqs.(F.4) e (F.3). Os operadores de campo dos mésons e bárions em termos das cargas de isospin são definidas abaixo.

• Operadores de Campo do Núcleon

$$\psi^{(p)}(x) = \sum_{s} \int d^{3}p \left[b_{p}(\boldsymbol{p},s)u_{\boldsymbol{p},s}(x) + d^{\dagger}_{\bar{p}}(\boldsymbol{p},s)v_{\boldsymbol{p},s}(x) \right]$$
(F.5)

$$\bar{\psi}^{(p)}(x) = \sum_{s} \int d^{3}p \left[b_{p}^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)\bar{u}_{\boldsymbol{p},s}(x) + d_{\bar{p}}(\boldsymbol{p},s)\bar{v}_{\boldsymbol{p},s}(x) \right]$$
(F.6)
• Operadores de Campo dos mésons charmosos

$$\varphi^{(\bar{D}^0)}(x) = \int d^3k \left[a^{\dagger}_{\bar{D}^0}(\mathbf{k}) f^*_{\mathbf{k}}(x) + a_{\bar{D}^0}(\mathbf{k}) f_{\mathbf{k}}(x) \right]$$
(F.7)

$$\varphi^{(D^{-})}(x) = \int d^{3}k \left[a^{\dagger}_{D^{-}}(\mathbf{k}) f^{*}_{\mathbf{k}}(x) + a_{D^{+}}(\mathbf{k}) f_{\mathbf{k}}(x) \right]$$
(F.8)

$$\varphi^{(D^+)}(x) = \int d^3k \left[a^{\dagger}_{D^+}(\mathbf{k}) f^*_{\mathbf{k}}(x) + a_{D^-}(\mathbf{k}) f_{\mathbf{k}}(x) \right]$$
(F.9)

• Operadores de Campo do méson sigma

$$\phi^{(\sigma)}(x) = \int d^3q \left[c^{\dagger}_{\sigma}(\boldsymbol{q}) f^*_{\boldsymbol{q}}(x) + c_{\sigma}(\boldsymbol{q}) f_{\boldsymbol{q}}(x) \right]$$
(F.10)

• Operadores de Campo dos mésons vetoriais omega e rho

$$\varphi^{(\omega)\mu}(x) = \int d^3p \sum_{\lambda=1}^3 \left[b^{\dagger}_{\omega}(\boldsymbol{p},\lambda) A^{\mu*}_{\boldsymbol{p},\lambda}(x) + b_{\omega}(\boldsymbol{p},\lambda) A^{\mu}_{\boldsymbol{p},\lambda}(x) \right] \quad (F.11)$$

$$\varphi^{(\rho^0)\mu}(x) = \int d^3p \sum_{\lambda=1}^3 \left[b^{\dagger}_{\rho^0}(\boldsymbol{p},\lambda) A^{\mu*}_{\boldsymbol{p},\lambda}(x) + b_{\rho^0}(\boldsymbol{p},\lambda) A^{\mu}_{\boldsymbol{p},\lambda}(x) \right]$$
(F.12)

$$\varphi^{(\rho^{-})\mu}(x) = \int d^3p \sum_{\lambda=1}^{3} \left[a^{\dagger}_{\rho^{-}}(\boldsymbol{p},\lambda) A^{\mu*}_{\boldsymbol{p},\lambda}(x) + a_{\rho^{+}}(\boldsymbol{p},\lambda) A^{\mu}_{\boldsymbol{p},\lambda}(x) \right] (F.13)$$

$$\varphi^{(\rho^+)\mu}(x) = \int d^3p \sum_{\lambda=1}^3 \left[a^{\dagger}_{\rho^+}(\boldsymbol{p},\lambda) A^{\mu*}_{\boldsymbol{p},\lambda}(x) + a_{\rho^-}(\boldsymbol{p},\lambda) A^{\mu}_{\boldsymbol{p},\lambda}(x) \right] (F.14)$$

Apêndice G Elementos de Matriz do Operador $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})$

Para realizar a integração sobre as variáveis angulares na equação (E.121) será necessário computar a ação do operador de spin ($\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}$) sobre o harmônico hiperesférico. Assim teremos que calcular a seguinte operação

$$\sum_{s} \langle s' | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) | s \rangle \mathcal{Y}_{L}^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}, s) = \sum_{s} \sum_{m} \sum_{m_s} \langle s' | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) | s \rangle C_{m \ m_s \ M}^{L \ 1/2 \ J} Y_{m}^{L}(\hat{\boldsymbol{p}}) \chi_{m_s}^{(1/2)}(s)$$
(G.1)

$$= \sum_{s} \sum_{m} \sum_{m_s} \langle s' | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) | s \rangle C_{m \, m_s \, M}^{L \, 1/2 \, J} Y_m^L(\hat{\boldsymbol{p}}) \delta_{m_s s} \qquad (G.2)$$

$$=\sum_{s}\sum_{m}\langle s'|(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})|s\rangle C_{m\ s\ M}^{L\ 1/2\ J}Y_{m}^{L}(\hat{\boldsymbol{p}})$$
(G.3)

Agora se lembrarmos que produto escalar entre dois tensores esféricos, em nosso caso de rank $\kappa = 1$, pode ser decomposto como

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} = \sum_{\kappa} (-1)^{\kappa} \sigma_{-\kappa} \hat{\boldsymbol{p}}_{\kappa}$$
(G.4)

podemos reescrever a equação (G.3) da seguinte forma

$$\sum_{s} \langle s' | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) | s \rangle \mathcal{Y}_{L}^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}, s) = \sum_{s} \sum_{m} \langle s' | \sum_{\kappa} (-1)^{\kappa} \sigma_{-\kappa} \hat{\boldsymbol{p}}_{\kappa} | s \rangle C_{m \ s \ M}^{L \ 1/2 \ J} Y_{m}^{L}(\hat{\boldsymbol{p}})$$
(G.5)
$$= \sum_{s} \sum_{m} \sum_{\kappa} (-1)^{\kappa} \langle s' | \sigma_{-\kappa} | s \rangle C_{m \ s \ M}^{L \ 1/2 \ J} \hat{\boldsymbol{p}}_{\kappa} Y_{m}^{L}(\hat{\boldsymbol{p}})$$
(G.6)

Iremos agora usar a seguinte relação

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{\kappa}Y_{m}^{L}(\hat{\boldsymbol{p}}) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{\kappa}^{1}(\hat{\boldsymbol{p}}) Y_{m}^{L}(\hat{\boldsymbol{p}}) = \sum_{L'} \left[\frac{(2l+1)}{(2L'+1)} \right]^{1/2} C_{0\ 0\ 0}^{L\ 1\ L'} C_{m\ \kappa\ m'}^{L\ 1\ L'} Y_{m'}^{L'}(\hat{\mathbf{p}}) \quad (G.7)$$

para escrever (G.6) como

$$\sum_{s} \langle s' | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) | s \rangle \mathcal{Y}_{L}^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}, s) = \sum_{s} \sum_{m} \sum_{\kappa} \sum_{L'} (-1)^{\kappa} \left[\frac{(2L+1)}{(2L'+1)} \right]^{1/2}$$
(G.8)

$$\times \langle s' | \sigma_{-\kappa} | s \rangle C_{m s M}^{L 1/2 J} C_{m \kappa m'}^{L 1 L'} Y_{m'}^{L'}(\hat{\boldsymbol{p}})$$
(G.9)

Precisamos neste ponto calcular o elemento de matriz do operador de spin e para este fim usaremos o teorema de Wigner-Eckart isto é

$$\langle s' | \sigma_{-\kappa} | s \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} C_{-\kappa}^{1} \frac{1/2}{s} \frac{1/2}{s'} \langle 1/2 | | \boldsymbol{\sigma} | | 1/2 \rangle = \sqrt{3} C_{-\kappa}^{1} \frac{1/2}{s} \frac{1/2}{s'}$$
(G.10)

Com base neste resultado podemos reescrever a equação (G.9) da seguinte forma

$$\sum_{s} \langle s' | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) | s \rangle \mathcal{Y}_{L}^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}, s) = -3 \sum_{s} \sum_{m} \sum_{\kappa} \sum_{L'} \sum_{L'} \left[\frac{(2L+1)}{(2L'+1)} \right]^{1/2} C_{0\ 0\ 0}^{L\ 1\ L'} C_{m\ s}^{L\ 1/2\ J}$$
$$\times C_{\kappa\ -\kappa\ 0}^{1\ 1\ 0} C_{m'\ s'\ M'}^{L'\ 1/2\ J'} C_{m\ \kappa\ m'}^{L\ 1\ 1/2\ 1\ 1/2} \mathcal{Y}_{L'}^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}, s)$$
(G.11)

onde nós usamos a seguinte relação

$$(-1)^{\kappa} = -\sqrt{3} C^{1 \ 1 \ 0}_{\kappa \ -\kappa \ 0} \tag{G.12}$$

E finalmente podemos reescrever a equação (G.11) em termos de símbolos 9-j, isto é

$$\sum_{s} \langle s' | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) | s \rangle \mathcal{Y}_{L}^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}, s) = a_{L',L} \mathcal{Y}_{L'}^{JM}(\hat{\boldsymbol{p}}, s)$$
(G.13)

onde para simplificar a notação nós usamos a seguinte definição

$$a_{L',L} \equiv -3 \sum_{L'} \left[\frac{(2L+1)}{(2L'+1)} \right]^{1/2} C_{0\ 0\ 0}^{L\ 0\ L'} \left[\begin{array}{ccc} L & 1/2 & J \\ 1 & 1 & 0 \\ L' & 1/2 & J \end{array} \right]$$
(G.14)

Na Eq.(G.13) o coeficiente de Clebsch-Gordon possuem uma forma fechada dada por

$$C_{0\ 0\ 0}^{L\ 0\ L'} = -\sqrt{\frac{L}{(2L+1)}}\delta_{L',L-1} + \sqrt{\frac{L+1}{(2L+1)}}\delta_{L',L+1}$$
(G.15)

Agora, desde que o spin de uma das partículas é zero os únicos possíveis valores para o momento angular total são $J = L \pm 1/2$. Esse fato junto com a Eq.(G.15) permite determinarmos todos os possíveis valores que equação entre parênteses, ao lado direito, em (G.13) assume. Comecemos por computar os valores não-nulos dos coeficientes 9-j. Para isso iremos usar a seguinte relação

$$\begin{bmatrix} b & a & e \\ f & f & 0 \\ d & c & e \end{bmatrix} = (-1)^{b+c+e+f} \sqrt{\frac{(2d+1)(2c+1)}{(2f+1)}} \left\{ \begin{array}{c} a & b & e \\ d & c & f \end{array} \right\}.$$
 (G.16)

Dessa forma, a partir da Eq.(G.15), teremos os seguintes valores para o símbolo 9-j

•
$$J = L - 1/2, L = J + 1/2, L' = L - 1$$

$$\begin{bmatrix} L & 1/2 & L - 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ L - 1 & 1/2 & L - 1/2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(2L - 1)}{L}},$$
(G.17)

•
$$J = L + 1/2, L = J - 1/2, L' = L + 1$$

$$\begin{bmatrix} L & 1/2 & L+1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ L+1 & 1/2 & L+1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(2L+3)}{(L+1)}}$$
(G.18)

Todas as outras possibilidades resultam em um valor nulo para o símbolo 9-*j*, isto decorre devido a alguma violação das propriedades de simetria guardadas por estes símbolos que estão intimamente relacionadas as regras de composição de momento angular. Se considerarmos, agora, o operador $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})$ no espaço de spin 2 × 2, isto é, $L_{\pm} = J \mp 1/2$ -espaço nós teremos que

$$a_{L'L} = 3\sqrt{\frac{L}{(2L-1)}} \begin{bmatrix} L & 1/2 & J \\ 1 & 1 & 0 \\ L-1 & 1/2 & J \end{bmatrix} - 3\sqrt{\frac{L}{(2L+3)}} \begin{bmatrix} L & 1/2 & J \\ 1 & 1 & 0 \\ L+1 & 1/2 & J \end{bmatrix}$$
(G.19)

e a partir das propriedades de simetria do símbolo 9-*j* nós obtemos facilmente que $a_{J+1/2,J+1/2} = -1$, $a_{J-1/2,J-1/2} = -1$, $a_{J+1/2,J-1/2} = 0$, $a_{J-1/2,J+1/2} = 0$. Desse modo a Eq.(G.19) pode ser finalmente escrita como

$$a_{L'L} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{G.20}$$

Referências Bibliográficas

- [1] T. Muta, Foundations of quantum chromodynamics (World Sci. Lect. Notes Phys, 1998).
- [2] W. Greiner e Berndt Müller, *Gauge Theory of Weak Interactions* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000).
- [3] D.J. Gross e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 1343 (1973); H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30, 1346 (1973).
- [4] D. J. Gross, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 135, 193 (2004).
- [5] I. Montvay e G. Münster, *Quantum fields on a lattice*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [6] K.G. Wilson, Phys. Rev. D 10, 2445 (1974).
- [7] M. Creutz, Phys. Rev. Lett. 43, 553 (1979) [Erratum-ibid. 43, 890 (1979)].
- [8] Dürr et al., "Ab Initio Determination of Light Hadron Masses", Science, 322, 1224 (2008).
- [9] Dürr et al., Science, 322, 1224 (2008).
- [10] G. Erkol, M. Oka e T. T. Takahashi, Phys. Rev. D 79, 074509 (2009).
- [11] C. Alexandrou, M. Brinet, J. Carbonell, M. Constantinou, P. A. Harraud, P. Guichon, K. Jansen, T. Korzec e M. Papinutto, Phys, Rev. D 83, 045010 (2011).
- [12] C. Alexandrou, M. Brinet, J. Carbonell, M. Constantinou, P. A. Harraud, P. Guichon, K. Jansen, T. Korzec e M. Papinutto, Phys. Rev. D 83, 094502 (2011).
- [13] M. J. Savage, arXiv:1110.5943v1 [nucl-th].

- [14] S. Gupta, PoS LATTICE2010, 007 (2010). [arXiv:1101.0109 [hep-lat]].
- [15] C. D. Roberts, Prog. Part. Nucl. Phys. 61, 50 (2008).
- [16] M. Shifman, A. Vainshtein e V. Zakharov, Nucl. Phys. B 147, 385 (1979).
- [17] M. E. Bracco, M. Chiapparini, F. S. Navarra, M. Nielsen, [arXiv:1104.2864 [hep-ph]].
- [18] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231 (1998); J. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. 38, 1113 (1999); S. S. Gubser, I. R. Klebanov e A. M. Polyakov, Phys. Lett. B 428, 105 (1998); E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 253 (1998).
- [19] I. R. Klebanov e J. M. Maldacena, Phys. Today 62, 28 (2009).
- [20] S. A. Hartnoll, Class. Quantum Grav. 26, 224002 (2009).
- [21] Um livro histórico sobre o modelo de quarks pré-QCD é: J. J. J Kokkedee, The quark model (W.A. Benjamin, 1969).
- [22] M. Gell-Mann, Phys. Lett. B 8, 214 (1964).
- [23] G. Zweig, CERN Report No. 8419 TH 412, 1964 (unpublished); reprinted in Developments in the Quark Theory of Hadrons, edited by D. B. Lichtenberg e S. P. Rosen (Hadronic Press, Nonantum, MA, 1980).
- [24] A. D. Rújula, H. Georgi e S. L. Glashow, Phys. Rev. D 12, 147 (1975).
- [25] S. Godfrey e N. Isgur, Phys. Rev. D 32,189 (1985).
- [26] S. Capstick e N. Isgur, Phys. Rev. D 34, 2809 (1986).
- [27] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, J. Kogut, K. D. Lane, e T. -M. Yan, Phys. Rev. Lett. 34, 369 (1975).
- [28] W. Roberts e M. Pervin, Int. J. Mod. Phys. A 23 2817 (2008).
- [29] A. Valcarce, H. Garcilazo, F. Fernández e P González, Rep. Prog. Phys. 68, 965 (2005).
- [30] T. Barnes e E. S. Swanson, Phys. Rev. D 46, 131(1992).
- [31] E.S. Swanson, Annals of physics, 220,73,(1992).
- [32] T. Barnes e E. S. Swanson, Phys. Rev. C 49, 1166 (1994).

- [33] B. Silvestre-Brac, J. Leandrib e J. Labarsouquec, N. Phys. A 589, 585 (1995).
- [34] B. Silvestre-Brac, J. Leandrib e J. Labarsouquec, N. Phys. A 613, 342 (1995).
- [35] A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène e J.-C. Raynal, Phys. Rev. D 8 (1973).
- [36] N. Isgur e J. Paton, Phys. Rev. D 31, 2910 (1985).
- [37] R. Kokoski e N. Isgur, Phys. Rev. D 34, 907 (1987).
- [38] E.S. Ackleh, T. Barnes e E.S. Swanson, Phys. Rev. D 54, 6811 (1996).
- [39] Y. Nambu, nambu, Phys. Rev. Lett. 4, 380 (1960); Phys. Rev. 117, 648 (1960).
- [40] M. Creutz, Acta Physica Slovaca 61, 1 (2011).
- [41] N. Isgur, em The New Aspects of Subnuclear Physics, editado por A. Zichichi, Proceedings of The XVI International School of Subnuclear Physics, Erice, Itália (Plenum, 1980).
- [42] F.J. Llanes-Estrada, S.R. Cotanch, A.P. Szcepaniak e E.S. Swanson, Phys. Rev. C 70, 035202 (2004).
- [43] N. Ligterink e E. S. Swanson, Phys. Rev. C 69, 025204 (2004).
- [44] A. P. Szczepaniak, E. S. Swanson, C-R Ji e S. R. Cotanch, Phys. Rev. Lett. 76, 2011 (1996).
- [45] P. Guo, A. P. Szczepaniak, G. Galata, A. Vassallo e E. Santopinto, Phys. Rev. D 77, 056005 (2008).
- [46] A.P. Szczpaniak e E.S. Swanson, Phys. Rev. D 65, 025012 (2002).
- [47] J. Kogut e L. Susskind, Phys. Rev. D 11, 395 (1975).
- [48] D. Zwanziger, Nucl. Phys. B 485, 185 (1997).
- [49] A. Voigt, E. M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker e A. Sternbeck, Phys. Rev. D 78, 014501 (2008).
- [50] C. E. Fontoura e G. Krein, Few-Body Systems, 50, 219 (2011).
- [51] C. E. Fontoura, G. Krein e V. Vizcarra, Eur. Phys. J. Special Topics 3, 03027 (2010).
- [52] C. E. Fontoura, AIP Conf. Proc. 1296, 318 (2010).

- [53] C.E. Fontoura e G. Krein, Scattering of \overline{D} mesons on nucleons in a colorconfining, chiral quark model. (Work in progress).
- [54] C.E. Fontoura, G. Krein e J. Haidenbauer, SU(4) Symmetry Breaking Effects on the Interaction of Heavy-Light Hadrons. (Work in progress).
- [55] L. Tolos, J. Schaffner-Bielich e A. Mishra, Phys. Rev. C 70, 025203 (2004).
- [56] J. Haidenbauer, G. Krein, Ulf-G. Meißner, L. Tolos, Eur. Phys. J. A 47,18 (2011).
- [57] J. Haidenbauer, G. Krein, U.-G. Meißner e A. Sibirtsev, Eur. Phys. J. A 33, 107 (2007).
- [58] R. Büttgen, K. Holinde, A. Müller-Groeling, J. Speth, e P. Wyborny, Nucl. Phys. A 506, 586 (1990).
- [59] V.E. Vizcarra, Excitações gluônicas e quebra dinâmica da simetria quiral nas interações hádron-hádron, Tese de Doutorado, IFT, 2008.
- [60] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Jpn 17, 48(1935).
- [61] M. Rho e D.H. Wilkinson, *Mesons in Nuclei*, Vol. I-III, (North-Holland Publ. Co. 1979).
- [62] A.W. Thomas e R.H. Landau, Phys. Reports. 58, 121 (1980).
- [63] R. Machleidt, K. Holinde e Ch. Elster, Phys. Reports. 149, 1 (1987).
- [64] J. Gasser e H. Leutwyler, Physics Reports. 87, 77(1982).
- [65] S. Pokorski, *Gauge Field Theories* (Cambridge Monographs on Mathematical Phisics, 2000).
- [66] T. P. Cheng e L. F. Li, Gauge Theory of Elementary Particles Physics (Oxford University Press, N. Y., 1988).
- [67] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122, 345 (1961); 124, 246 (1961).
- [68] E. Merzbacker, Quantum Mechanics (Wiley, 1998).
- [69] G.E. Arfken e H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physics* (Academic Press, 2001).
- [70] J.-M. Richard, Physics Reports. 212, 1, 1993.

- [71] L.D. Fadeev, Mathematical Aspects of the Three-body problem in Quantum Scattering Theory (John Wiley and Sons, 1977).
- [72] Y. Suzuki e K. Varga, Stochastic Variational Approach to Quantum-Mechanical Few-Body Problems (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998).
- [73] L.A. Copley, N. Isgur e G. Karl, Phys. Rev. D 20 768(1979).
- [74] L. Micu, Nucl. Phys. B 10, 521 (1969).
- [75] S. Okubo, Phys. Lett. 5, 1975 (1963).
- [76] J. Iizuka, K. Okada e O. Shito, Prog. Theor. Phys. 35, 1061 (1965).
- [77] F. E. Close e E. S. Swanson, Phys. Rev. D 72, 094004 (2005).
- [78] E.S. Ackleh, T. Barnes e E.S. Swanson, Phys. Rev. D 54, 6811 (1996).
- [79] C. Downum, T. Barnes, J.R. Stone e E. S. Swanson, Phys. Lett. B 638 (2006).
- [80] M. Hoffmann, J.W. Durso, K. Holinde, B.C. Pearce e J. Speth, Nucl. Phys. A 593, 341 (1995).
- [81] A. P. Szczepaniak e E. S. Swanson, Phys. Rev.D 65, 025012 (2002).
- [82] T.D.Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, Contemporary Concepts in Physics, Volume 1 (1981).
- [83] P. Guo, A. P. Szczepaniak, G. Galata. A. Vassallo e E. Santopinto, Phys.Rev. D77, 056005 (2008)
- [84] V.N. Gribov, Nucl. Phys.B 139, 1 (1978).
- [85] A. Cucchieri e D. Zwanziger, Phys. Rev. D 65,014001 (2001).
- [86] D. Hadjimichef, J. Haidenbauer e G. Krein, Phys, Rev. C 66, 055214 (2002).
- [87] D. Hadjimichef, J. Haidenbauer e G. Krein, Phys.Rev. C 63035204 (2001).
- [88] D. Hadjimichef, Formalismo de Fock-Tani para a Física Hadrônica, Tese de Doutorado, IFT, 1995.
- [89] S. Szpigel, Interação méson-méson na representação Fock-Tani, Tese de Doutorado, USP, 1995.

- [90] D. Hadjimichef,G. Krein,S. Szpigel e J. S. da Veiga, Phys. Lett B 367, 317 (1996).
- [91] J. A. Wheeler, Phys. Rev. 52, (1937), 1083.
- [92] D. Hadjimichef,G. Krein, S. Szpigel e J. S. da Veiga, Ann. Phys. (NY) 268, 105 (1998).
- [93] R. Alkofer e P.A. Amundsen, Nucl. Phys. B 306, 305 (1988).
- [94] R. Alkofer, M. Kloker, A. Krassnigg, e R.F. Wagenbrunn, Phys. Rev. Lett. 96, 022001 (2006).
- [95] A.G. Williams, G. Krein e C.D. Roberts, Ann. Phys. (NY) 210, 464 (1991).
- [96] S.K. Adhikari. Variational Principles and the Numerical Solution of Scattering Problems (Wiley, Nova Iorque, 1998).
- [97] L. Tomio e S.K. Adhikari, Phys. Rev. C 22, 28 (1980).
- [98] K. Yazaki, Prog. Part. Nucl. Phys., 24, 353, (1990).
- [99] Zuo-Hong Li, Tao Huang, Jin-Zuo Sun, e Zhen-Hong Dai, Phys.Rev. D 65 076005 (2002).
- [100] M.E. Bracco, M. Chiapparini, A. Lozéa, F.S. Navarra, M. Nielsen, Phys. Lett. B 521, 1 (2001).
- [101] W. Erni et al. (Panda Collaboration). Physics Perfomance report for Panda: Strong Interactio Studies with Antiprotons.hep-ex/0903.3905.
- [102] W. Greiner e J. Reinhardt. Field quantization (Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1996).
- [103] Z. w. Lin e C.M. Ko, Phys. Rev. C 62, 034903 (2000).
- [104] Z. w. Lin, T.G. Di e C.M. Ko, Nucl. Phys. A 689, 965 (2001).
- [105] Z. w. Lin e C.M. Ko, Phys. Lett. B 533, 259 (2002).