



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de São José do Rio Preto

Yagor Romano Carvalho

ESTUDO DE CICLOS LIMITES EM UMA CLASSE  
DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DESCONTÍNUAS

São José do Rio Preto

2016

**Yagor Romano Carvalho**

Estudo de ciclos limites em uma classe de equações diferenciais descontínuas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Luci Any Francisco Roberto

São José do Rio Preto

2016

Carvalho, Yagor Romano.

Estudo de ciclos limites em uma classe de equações diferenciais descontínuas / Yagor Romano Carvalho. -- São José do Rio Preto, 2016  
100 f. : il.

Orientador: Luci Any Francisco Roberto  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Ciclo limite.  
4. Média (Matemática) I. Roberto, Luci Any Francisco. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

**Yagor Romano Carvalho**

Estudo de ciclos limites em uma classe de equações diferenciais descontínuas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof<sup>ta</sup>. Dr<sup>a</sup>. Luci Any Francisco Roberto  
Professor Assistente Doutor  
UNESP - São José do Rio Preto  
Orientadora

---

Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin  
Professor Assistente Doutor  
UNESP - Ilha Solteira

---

Prof. Dr. Weber Flávio Pereira  
Professor Assistente Doutor  
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 4 de março de 2016.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente me apoiaram para que eu chegasse até aqui.

Agradeço a todos os professores que me acompanharam durante a minha graduação e o meu mestrado. Em especial à Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Gorete Carreira Andrade, por sempre estar disposta a ajudar minha turma, eu e não medir esforços para tal.

Agradeço aos meus dois orientadores de Iniciação Científica, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria do Socorro N. Rangel e Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi. Com toda certeza foram de fundamental importância para o meu amadurecimento como futuro pesquisador, compartilhando suas experiências e seus conhecimentos.

Aqui fica também meu singelo e talvez não suficiente muito obrigado à minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Luci Any Francisco Roberto, por todo auxílio e paciência frente às minhas dificuldades .

Ao Departamento de Matemática e todos os funcionários do IBILCE.

Aos meus familiares como um todo, em particular, ao meu pai Edmar, a minha mãe Adriana, a minha irmã Yasmim, a minha avó Irene e por último de não mensurável importância minha avó Doraci. Por toda ajuda, paciência e apoio que me deram desde a minha entrada na vida acadêmica. À minha namorada Aline, aquela que está sempre comigo, não importando os momentos, me dando força e me fazendo rir.

Aos meus amigos desde a escola e os que ingressaram na faculdade em 2010. Em muito especial aos que vieram sempre junto comigo nessa jornada, Ronan e Jessica, e que se hoje não desisti chegando até aqui devo imensuravelmente aos dois.

No momento de esquecer o universo matemático sempre contei com meus treinos de futsal e handebol em nosso querido Ibilce's sports arena. Cada pessoa que já fez ou ainda faz parte desses times ou melhor famílias, sabem o quanto são importantes, o quanto me ajudaram a atingir alguns objetivos, e sabem como me trazem felicidade nossas conquistas. Já disse uma vez: “Amo a matemática e o esporte, espero um dia unificar ainda mais os dois na minha vida.”

Ingressar na faculdade sem conhecer os grupos que são os motores deste lugar é algo improvável. Fazer parte da Comissão de Recepção de Calouros e da Comissão da SEMAT, com toda certeza

me fez crescer como pessoa. Tentar deixar legado para o curso que você escolheu foi o que tentei participando do Centro Acadêmico da Matemática Evariste Galois (C.A.M.E.G). Amar o esporte e não fazer parte da Associação Atlética Acadêmica Wilson Maurício Tadini (A.A.A.W.M.T) seria algo, no mínimo, incoerente. Assim, agradeço a todos que fizeram parte comigo de todos esses grupos citados, me ajudaram muito a aproveitar as coisas boas da universidade e o principal me ensinaram a lidar com pessoas.

Não por último e não sem importância à CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim, fica o meu muito obrigado a minha banca examinadora por aceitarem o convite e permitirem a conclusão deste trabalho.

*“ A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos, como também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.” (Descartes)*

# Resumo

Neste trabalho temos como principal objetivo determinar quota inferior para o número máximo de ciclos limites de um sistema diferencial polinomial de Liénard descontínuo de grau  $n$  com  $m$  zonas, para  $m = 2, 4$ . A principal ferramenta é uma combinação da Teoria da Média de primeira ordem com o processo de regularização de sistemas descontínuos. Analisamos detalhadamente um caso particular de um sistema polinomial de Liénard de grau 3 com 4 zonas.

**Palavras-chave:** ciclos limites, método da média, sistemas dinâmicos, regularização.

# Abstract

In this work our main aim is to determine the lower upper bound for the maximum number of limit cycles of a  $m$ -piecewise discontinuous Liénard polynomial differential system of degree  $n$ , for  $m = 2, 4$ . The main tool is a combination of the first order Averaging Method with the regularization process of discontinuous systems. We analyzed in details a particular case of a 4-piecewise discontinuous Liénard polynomial differential system of degree 3.

**Palavras-chave:** limit cycles, averaging method, dynamical systems, regularization.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>11</b>
<b>2 Teoria da Média</b>	<b>18</b>
2.1 Teoria da Média de primeira ordem . . . . .	18
2.2 O Teorema da Média clássico . . . . .	23
<b>3 Teoria dos sistemas dinâmicos descontínuos</b>	<b>36</b>
3.1 Sistemas descontínuos . . . . .	36
3.2 Sistemas descontínuos com variedade de descontinuidade não-regular . . . . .	48
3.3 Campos de vetores próximos à fronteira . . . . .	55
<b>4 Regularização</b>	<b>59</b>
4.1 Considerações no processo de regularização . . . . .	61
<b>5 Ciclos limites para equações diferenciais polinomiais descontínuas de Liénard com <math>m</math> zonas</b>	<b>79</b>
5.1 Cálculos de $L(0,n)$ , $L(2,n)$ e $L(4,n)$ . . . . .	81
5.2 Aplicação . . . . .	92
<b>Referências Bibliográficas.</b>	<b>99</b>

# Introdução

Nos últimos anos o estudo de sistemas dinâmicos não suaves tem estabelecido uma importante fronteira entre Matemática, Engenharia e Física. As principais fontes de motivação da pesquisa desses sistemas têm sido certos fenômenos em sistemas de controle, o impacto em sistemas mecânicos e oscilações não lineares, ou seja, eles possuem uma forte relação com outras áreas de pesquisa.

Para sistemas contínuos Hilbert em 1900, propôs na segunda parte do seu décimo sexto problema, encontrar uma quota superior para o número de ciclos limites (órbitas periódicas isoladas) de todos os sistemas diferenciais polinomiais de um dado grau  $n$ , e também estudar suas distribuições ou configurações no plano, veja [6]. Este tem sido um dos principais problemas em teoria qualitativa de equações diferenciais no plano do século XX. Os trabalhos de Écalle em [5] e Ilyashenko em [7] provam que qualquer sistema polinomial tem um número finito de ciclos limites. Em [11], Llibre e Pedregal encontram uma quota superior para o número de ciclos limites de um subconjunto aberto e denso dentro do conjunto de campos de vetores polinomiais de grau  $n$ . Esta quota é uma função cúbica na variável  $n$ .

Saber da existência ou não de soluções periódicas é muito importante para entender a dinâmica dos sistemas diferenciais. Uma das ferramentas úteis para tal objetivo é a Teoria *Averaging* (Teoria da Média), que é uma clássica ferramenta que proporciona meios para estudar o comportamento de sistemas dinâmicos suaves não lineares. Nos referimos ao livro de Sanders e Vershulst [19] e ao livro de Verhulst [23] para uma introdução geral deste tópico.

O problema de determinar o número máximo de ciclos limites de um dado sistema diferencial também surge na classe dos sistemas dinâmicos descontínuos. Uma das ferramentas utilizada é a combinação do processo de regularização, onde o campo de vetores  $Z(t, x)$  descontínuo é aproximado por uma família a um parâmetro de campo de vetores contínuos  $Z_\varepsilon(t, x)$  tal que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon(t, x) = Z(t, x)$ , com o método da Média.

Uma boa classe representativa de sistemas dinâmicos descontínuos para estudar o número máximo de ciclos limites é o modelo matemático

$$\ddot{x} + x + f(x, \dot{x}) = \text{sgn}(g(x, \dot{x})) \cdot U(x, \dot{x}),$$

que surge em Teoria de Controle, sistemas com relay, economia, etc.

Neste trabalho, nos dedicamos aos estudos de ciclos limites de um sistema polinomial de Liénard descontínuo de grau  $n$  com  $m$  zonas dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{sgn}(g_m(x, y))F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases},$$

onde  $F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  e o conjunto de zeros da função  $\operatorname{sgn}(g_m(x, y))$  com  $m = 2, 4, 6, \dots$ , é a união de  $\frac{m}{2}$  diferentes retas passando pela origem dividindo o plano em setores angulares de tamanho  $\frac{2\pi}{m}$  e  $\operatorname{sgn}(z)$  denota a função sinal.

No Capítulo 1 foi desenvolvido conceitos preliminares de variedades, alguns resultados da teoria qualitativa de campos de vetores contínuos e o Teorema de Descartes para polinômios com coeficientes reais. As variedades aparecem como sendo os conjuntos de descontinuidades dos sistemas descontínuos, a teoria qualitativa dos campos de vetores contínuos nos ajudam a entender o comportamento local dos mesmos e o Teorema de Descartes é de fundamental importância para a conclusão dos principais resultados aqui presentes e descritos mais acima.

O Capítulo 2 nos mostra a Teoria da Média de primeira ordem juntamente com o Teorema da Média clássico de primeira ordem. Os conceitos abordados na Teoria da Média trazem os Símbolos de Landau, conseqüentemente o conceito de aproximação assintótica em tempo-escala que são alicerces para a demonstração dos resultados aqui encontrados. O Teorema da Média transforma o problema de encontrar soluções periódicas de uma equação diferencial em encontrar zeros simples de uma equação.

Durante o Capítulo 3 mostramos resultados e definições sobre os sistemas dinâmicos descontínuos em  $\mathbb{R}^{n+1}$  tendo como seu conjunto de descontinuidade uma variedade  $M$  de codimensão um, ou seja,  $M$  possui dimensão  $n$ . Caracterizamos quais e como são as regiões de costura, deslize e escape presentes na variedade  $M$ , mostramos o conceito de campo de Filippov e vemos os diferentes tipos de pontos de equilíbrio que podem surgir nos campos descontínuos somado com os já presentes nos campos contínuos. Fornecemos também as formas normais para  $M$ -singularidades de condimensão zero.

No Capítulo 4 falamos sobre o processo de regularização de sistemas descontínuos. Em [21] Sotomayor e Teixeira introduziram a regularização para sistemas descontínuos bidimensionais tendo uma reta como região de descontinuidade e provaram genericamente que sua regularização obedece o mesmo comportamento qualitativo das órbitas, através das linhas de descontinuidade, que são dadas pelas regras de Filippov.

O Capítulo 5 traz um pouco da teoria dos sistemas polinomiais de Liénard descontínuos de grau  $n$  com  $m$  zonas, seguindo [12]. Considerando o lado direito destes sistemas diferenciais de forma conveniente, encontramos os seguintes limitantes inferiores para quota superior dos ciclos limites, quando  $m = 2, 4$ :

- se o sistema não possui descontinuidade então existem pelo menos  $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$  ciclos limites;
- se o sistema possui 2 zonas então existem pelo menos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  ciclos limites;
- se o sistema possui 4 zonas então existem pelo menos  $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$  ciclos limites;

onde  $[z]$  denota a função parte inteira de  $z$ .

Por fim, consideramos um caso particular de equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{x} + x = \operatorname{sgn}(x \cdot \dot{x})(\varepsilon x - \varepsilon x^3),$$

cujo  $n = 3$  e  $m = 4$  e verificamos que este caso possui pelo menos um ciclo limite, como já era esperado.

# Capítulo 1

## Preliminares

Este capítulo servirá como um pré-requisito para o restante do trabalho. Serão introduzidos conceitos básicos e resultados conhecidos sobre a teoria de variedades, campos de vetores contínuos e um resultado sobre polinômios com coeficientes reais.

**Definição 1.0.1.** *Uma variedade topológica de dimensão  $n$  é um espaço topológico  $M$  com as seguintes propriedades:*

- (i)  *$M$  é Hausdorff, ou seja, dados dois pontos distintos  $p, q \in M$  então existem abertos  $U, V$  tais que  $p \in U$ ,  $q \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ ;*
- (ii)  *$M$  tem base enumerável de abertos, ou seja, existe uma coleção enumerável de abertos de  $M$  tal que todo aberto em  $M$  é uma união de abertos dessa coleção;*
- (iii)  *$M$  é localmente Euclidiano, ou seja, para todo  $p \in M$ , existem abertos  $U \subset M$  contendo  $p$ ,  $\hat{U} \subset \mathbb{R}^n$  e um homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \hat{U}$ .*

**Definição 1.0.2.** *Um conjunto  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma hipersuperfície de classe  $C^k$  quando é localmente o gráfico de uma função real de  $n$  variáveis de classe  $C^k$ , isto é, para cada  $p \in M$ , existe um aberto  $V_p \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $M \cap V_p = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} ; x_i = \varphi((x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}))\}$ .*

**Observação 1.0.1.** Claramente toda hipersuperfície é uma variedade, ou seja, hipersuperfícies são casos particulares de variedades.

**Exemplo 1.0.1.** Temos  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; x \cdot x = 1\}$  uma hipersuperfície.

*Demonstração.*

Consideremos  $U = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x^* = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$  e os seguintes conjuntos:

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; x_i > 0\};$$

$$U_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; x_i < 0\}.$$

Observe que se  $x \cdot x = 1$ , então  $x_i = \pm(1 - x^* \cdot x^*)^{\frac{1}{2}}$ . Logo,

$$x \in V_i \cap S^n \Leftrightarrow x^* \in U \text{ e } x_i = (1 - x^* \cdot x^*)^{\frac{1}{2}};$$

$$x \in U_i \cap S^n \Leftrightarrow x^* \in U \text{ e } x_i = -(1 - x^* \cdot x^*)^{\frac{1}{2}}.$$

Vamos definir agora  $\varphi : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R} ; \varphi(u) = (1 - u \cdot u)^{\frac{1}{2}}$ . Se  $x \in V_i \cap S^n$  então

$$\begin{aligned} x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) &= (x_1, \dots, (1 - x^* \cdot x^*)^{\frac{1}{2}}, \dots, x_{n+1}) = \\ &= (x_1, \dots, \varphi(x^*), \dots, x_{n+1}), \text{ ou seja, } x \in \text{graf}(\varphi). \end{aligned}$$

Se  $x \in U_i \cap S^n$  então

$$\begin{aligned} x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) &= (x_1, \dots, -(1 - x^* \cdot x^*)^{\frac{1}{2}}, \dots, x_{n+1}) = \\ &= (x_1, \dots, -\varphi(x^*), \dots, x_{n+1}), \text{ ou seja, } x \in \text{graf}(\varphi). \end{aligned}$$

Desta forma como cada  $x \in S^n$  pertence a algum  $V_i$  ou  $U_i$  e  $V_i \cap S^n$ ,  $U_i \cap S^n$  são localmente gráficos de uma função então  $S^n$  é uma hipersuperfície.

□

**Definição 1.0.3.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície  $\mathcal{C}^k$  e  $p \in M$ . Então o espaço tangente de  $M$  em  $p$  é  $T_p M = \{v = \lambda'(0) : \lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow M \text{ é um caminho diferenciável com } \lambda(0) = p\}$ .*

**Teorema 1.0.1.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície  $\mathcal{C}^k$  e  $p \in M$ . Então o espaço tangente de  $M$  em  $p$ , isto é,  $T_p M$  é um subespaço vetorial  $n$ -dimensional do espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

*Demonstração.*

Como  $M$  é uma hipersuperfície  $\mathcal{C}^k$  e  $p \in M$  segue que existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$  com  $p \in V$  tal que  $M \cap V$  é o gráfico de uma função  $\mathcal{C}^k$ ,  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Temos  $M \cap V = \{(x, \varphi(x)) ; x \in U\}$  e com isso vamos escrever  $p = (p_0, \varphi(p_0))$ .

Para cada caminho diferenciável  $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow M \cap V$  com  $\lambda(0) = p$  temos:

$$\lambda(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), \varphi(x(t))) \Rightarrow \lambda'(t) = \left( x'_1(t), \dots, x'_n(t), \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(x(t))}{\partial x_i} x'_i(t) \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lambda'(0) &= \left( x'_1(0), \dots, x'_n(0), \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(p_0)}{\partial x_i} x'_i(0) \right) = x'_1(0) \left( 1, \dots, 0, \frac{\partial \varphi(p_0)}{\partial x_1} \right) + \dots + \\ &+ x'_n(0) \left( 0, \dots, 1, \frac{\partial \varphi(p_0)}{\partial x_n} \right) = x'_1(0)v_1 + \dots + x'_n(0)v_n.\end{aligned}$$

Portanto  $T_p M \subset [v_1, \dots, v_n]$ . Reciprocamente, seja  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ .

Tomamos o caminho  $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow M \cap V$ ;  $\lambda(t) = (p_0 + tv_0, \varphi(p_0 + tv_0))$  onde  $v_0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Mostremos que  $v = \lambda'(0)$ , ou seja, que  $v \in T_p M$ . Temos

$$\lambda'(t) = \left( \alpha_1, \dots, \alpha_n, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(p_0 + tv)}{\partial x_i} \alpha_i \right).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\lambda'(0) &= \left( \alpha_1, \dots, \alpha_n, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(p_0)}{\partial x_i} \alpha_i \right) = \alpha_1 \left( 1, \dots, 0, \frac{\partial \varphi(p_0)}{\partial x_1} \right) + \dots + \\ &+ \alpha_n \left( 0, \dots, 1, \frac{\partial \varphi(p_0)}{\partial x_n} \right) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = v.\end{aligned}$$

Portanto  $v \in T_p M$  então  $[v_1, \dots, v_n] \subset T_p M$ . Assim  $T_p M = [v_1, \dots, v_n]$ .

Mostremos agora que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é LI. Suponhamos que  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$  então:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \vdots \\ a_n = 0 \\ a_1 \frac{\partial \varphi(p_0)}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial \varphi(p_0)}{\partial x_n} = 0 \end{cases}.$$

Desta forma  $a_i = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$  e com isso  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é LI. Como  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é LI e  $T_p M = [v_1, \dots, v_n]$  segue que a dimensão de  $T_p M$  é  $n$  e assim  $T_p M$  é um subespaço vetorial  $n$ -dimensional do espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

□

**Definição 1.0.4.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  então:*

- (i) *O conjunto de nível  $c \in \mathbb{R}$  de  $f$  é  $f^{-1}(c) = \{x \in U ; f(x) = c\}$ ;*
- (ii) *O gradiente de  $f$  é o vetor  $\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ ;*
- (iii)  *$x_0$  é um ponto de equilíbrio, ponto crítico ou uma singularidade da  $f$  se  $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$ .*

**Proposição 1.0.1.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $p \in U$  tal que  $w = \nabla f(p) \neq 0$ . Se  $p \in f^{-1}(c)$  então  $w \perp f^{-1}(c)$ , isto é, se  $\lambda(t) \in f^{-1}(c)$ ,  $|t| < \epsilon$ , e  $\lambda(0) = p$  então  $\lambda'(0) \perp w$ .*

*Demonstração.*

Por hipótese  $\lambda(t) \in f^{-1}(c)$ ,  $|t| < \epsilon$ , assim  $f(\lambda(t)) = c$ . Derivando dos dois lados da última igualdade temos que  $\nabla f(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t) = 0$ , para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Para  $t = 0$  temos  $\nabla f(p) \cdot \lambda'(0) = 0$ , logo  $w \cdot \lambda'(0) = 0$ . Desta forma  $\lambda'(0) \perp w$ . □

**Definição 1.0.5.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^k$ . Dizemos que  $c \in \mathbb{R}$  é um valor regular da  $f$  se não há pontos críticos no nível  $c$  da  $f$ , ou seja, para todo  $z \in f^{-1}(c)$ ,  $\nabla f(z) \neq 0$ . Neste caso, dizemos que  $c$  é um nível regular da  $f$ . Se para algum  $z \in f^{-1}(c)$  temos  $\nabla f(z) = 0$ , dizemos que  $c$  é um nível crítico da  $f$ .*

**Teorema 1.0.2.** *(Teorema da Função Implícita). Um ponto do  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  será denotado por  $(x, y)$ , onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}$ . Seja  $f : A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tal que  $p = (a, b) \in A \times B$  com  $f(a, b) = c \in \mathbb{R}$ . Se  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$  então existem abertos  $Z \subset A \times B$  com  $(a, b) \in Z$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  com  $a \in V$  e uma função  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\varphi(a) = b$  tal que  $f(x, \varphi(x)) = c$  para todo  $x \in V$ .*

*Demonstração.* Para uma demonstração consulte [9]. □

**Teorema 1.0.3.** *Se  $c$  é um valor regular da função  $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^k$ , então  $M = f^{-1}(c)$  é uma hipersuperfície  $\mathcal{C}^k$  cujo espaço tangente  $T_p M$  de  $M$  em  $p$  é, em cada  $p \in M$ , o complemento ortogonal de  $\nabla f(p)$ .*

*Demonstração.*

Por hipótese  $c$  é valor regular da  $f$ , logo para cada  $p \in f^{-1}(c)$  temos  $\nabla f(p) \neq 0$ . Assim pelo Teorema da Função Implícita segue que existe uma vizinhança  $V_p$  de  $p$  tal que  $V_p \cap M$  é o gráfico de uma função  $\varphi$  de  $n$  variáveis e como  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^k$  segue que  $\varphi$  é de classe  $\mathcal{C}^k$ . Portanto  $M = f^{-1}(c)$  é uma hipersuperfície  $\mathcal{C}^k$ .

Pela Proposição 1.0.1 temos que para  $p \in M = f^{-1}(c)$ ,  $\nabla f(p) \perp f^{-1}(c)$ . Logo  $T_p M \perp \nabla f(p)$  e com isso  $T_p M \subset (\nabla f(p))^\perp$ . Como  $\dim T_p M = n = \dim (\nabla f(p))^\perp$  então  $T_p M = (\nabla f(p))^\perp$ . □

**Definição 1.0.6.** Um campo de vetores  $X$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  definido em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Para este campo associamos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$x' = X(x), \quad (1.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ . As soluções  $\varphi(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I$  intervalo, da equação (1.1), são denominadas curvas integrais, órbitas ou trajetórias do campo  $X$ .

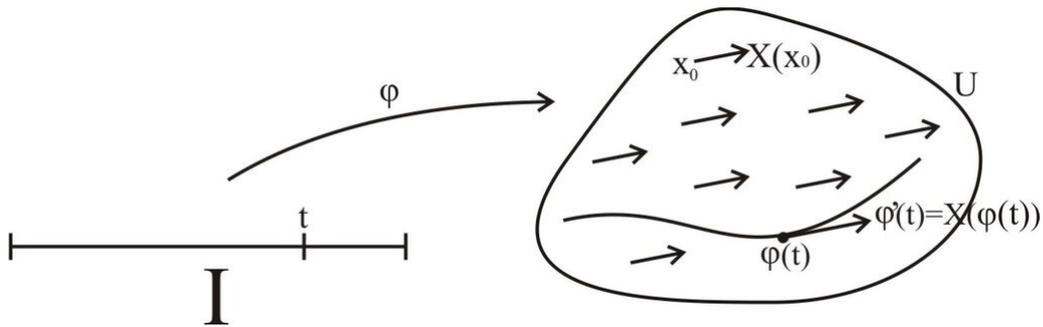


Figura 1.1: Campo de vetores e uma trajetória.

**Definição 1.0.7.** Dizemos que a aplicação  $X$  definida na Definição 1.0.6 é um campo de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  se  $X$  é de classe  $C^r$ .

**Definição 1.0.8.** Dado um campo de vetores  $X$  definido em  $U$  e  $x \in U$  então

- (i)  $x$  é um ponto de equilíbrio se  $X(x) = 0$ ;
- (ii)  $x$  é ponto regular se  $X(x) \neq 0$ .

**Definição 1.0.9.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $x_0 \in U$ . Uma seção transversal local de um campo  $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$  é uma aplicação diferenciável  $N_{x_0} : A \rightarrow U$  de classe  $C^r$  tal que  $A$  é um aberto de  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $0 \in A$ ,  $N_{x_0}(0) = x_0$  e  $Im(DN_{x_0}y) \oplus [X(y)] = \mathbb{R}^n$ , no qual  $\oplus$  denota a soma direta.

**Observação 1.0.2.** A dimensão da imagem da transformação linear  $DN_{x_0}y$  é no máximo  $n-1$ , pois  $Dom(DN_{x_0}y) = \mathbb{R}^{n-1}$  e pelo Teorema do Núcleo e da Imagem segue que  $dim(Im(DN_{x_0}y)) \leq n-1$ . Já a dimensão de  $[X(y)]$  é

$$[X(y)] = \begin{cases} 1 & \text{se } X(y) \neq 0 \text{ } y \text{ é um ponto regular} \\ 0 & \text{se } X(y) = 0 \text{ } y \text{ é um ponto crítico ou de equilíbrio} \end{cases}$$

Deste modo, para que  $DN_{x_0}$  seja uma seção transversal local é obrigatório que todos os pontos na imagem de  $DN_{x_0}$  sejam pontos regulares.

**Definição 1.0.10.** *Uma transformação é dita afim se ela é composição de uma transformação linear com uma translação.*

**Proposição 1.0.2.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $x_0 \in U$ . Se  $x_0$  é um ponto regular do campo de vetores  $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  então existe uma seção transversal local de  $X$  em  $x_0$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .*

*Demonstração.*

Por hipótese  $x_0$  é um ponto regular de  $X$  então  $X(x_0) = v_0 \neq 0$ . Vamos considerar  $\Pi = [v_0]^\perp$ , que é o espaço ortogonal ao espaço gerado por  $v_0$ .

Como  $\mathbb{R}^n = [v_0]^\perp \oplus [v_0]$  e a dimensão de  $[v_0]$  é 1 segue que  $\dim(\Pi) = n-1$ . Temos  $\dim(\mathbb{R}^{n-1}) = \dim(\Pi)$ , assim existe um isomorfismo  $S : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \Pi$  de modo que a transformação afim  $T : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $T(y) = x_0 + S(y)$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$  e é um homeomorfismo sobre sua imagem  $x_0 + \Pi$ , afinal  $T$  é uma composição de uma transformação linear com uma translação.

Vamos afirmar que existe  $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$  aberto com  $0 \in A$  tal que  $N_{x_0} = T|_A$  é uma seção transversal local de  $X$  em  $x_0$ .

De fato, seja  $\eta : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\eta(y) = \langle v_0, X(T(y)) \rangle$ . Claramente  $\eta$  é uma função contínua, pois é composta de funções contínuas.

Temos  $\eta(0) = \langle v_0, X(T(0)) \rangle = \langle v_0, X(x_0 + S(0)) \rangle = \langle v_0, X(x_0 + 0) \rangle = \langle v_0, X(x_0) \rangle = \langle v_0, v_0 \rangle = \|v_0\|^2 \neq 0$ , observe que como  $S$  é uma transformação linear  $S(0) = 0$ .

Pelo teorema da conservação do sinal existe um aberto  $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , com  $0 \in A$  tal que  $\eta(y) \neq 0$ , para todo  $y \in A$ .

Por outro lado, para todo  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$  temos  $DTy = DSy = Sy$ , pois  $S$  é uma transformação linear. Desta forma,  $Im(DTy) = Im(Sy) = \Pi$ .

Logo para  $y \in A$  temos  $0 \neq \eta(y) = \langle v_0, X(T(y)) \rangle$ , isto é,  $X(T(y))$  não pertence a  $[v_0]^\perp = \Pi$  e com isso  $Im(DTy) \oplus [X(T(y))] = \Pi \oplus [X(T(y))] = \mathbb{R}^n$ .

Como temos também que  $N_{x_0} = T|_A$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , pois  $T$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$  segue que  $N_{x_0}$  é uma seção transversal local de  $X$  em  $x_0$ .

□

**Teorema 1.0.4.** (*Fluxo Tubular*). Consideremos  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$  conjuntos abertos. Seja  $x_0$  um ponto regular do campo de vetores  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $N_{x_0} : A \rightarrow U$  uma seção transversal local de  $X$  de classe  $\mathcal{C}^r$  com  $N_{x_0}(0) = x_0$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $U$  e um difeomorfismo  $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow V$  de classe  $\mathcal{C}^r$ , onde  $\varepsilon > 0$  e  $B$  é uma bola aberta em  $\mathbb{R}^{n-1}$  tal que  $F$  é uma  $\mathcal{C}^r$ -conjugação entre o campo constante  $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $Y \equiv (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  e o campo  $X|_V$ .

*Demonstração.* Para uma demonstração consulte [20].

□

Por fim, vale recordar o Teorema de Descartes sobre o número de zeros de um polinômio real.

**Teorema 1.0.5.** (*Descartes*) Consideremos o polinômio real  $p(x) = a_{i_1}x^{i_1} + a_{i_2}x^{i_2} + \dots + a_{i_r}x^{i_r}$  com  $r > 1$ ,  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r$  e os números reais  $a_{i_j}$  não simultaneamente nulos para  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Quando  $a_{i_j}a_{i_{j+1}} < 0$ , dizemos que  $a_{i_j}$  e  $a_{i_{j+1}}$  possuem variação de sinal. Se o número de variações de sinais é  $m$ , então  $p(x)$  possui no máximo  $m$  raízes reais positivas. Além disso, é sempre possível escolher os coeficientes de  $p(x)$  de tal forma que  $p(x)$  possua exatamente  $r - 1$  raízes reais positivas.

*Demonstração.* Para uma prova consulte [2], nas páginas 81,82 e 83.

□

# Capítulo 2

## Teoria da Média

A ideia da média como uma técnica computacional, sem provar a validade, originou-se no século *XVIII*. Ela foi formulada por Lagrange (1788) no estudo do problema de 3 corpos gravitacionais como uma perturbação do problema de 2 corpos.

Primeiramente vamos recordar os elementos básicos da Teoria da Média padrão de primeira ordem. A grosso modo o método nos fornece uma relação quantitativa entre as soluções periódicas de um sistema diferencial não autônomo e as soluções do sistema diferencial médio que é autônomo. Este método determina condições suficientes para a existência e estabilidade de soluções periódicas de equações diferenciais que contém um parâmetro pequeno  $\varepsilon$  e encontra uma cota inferior para o número de ciclos limites que bifurcam de um sistema quando perturbamos o mesmo.

### 2.1 Teoria da Média de primeira ordem

Trabalharemos com sistemas da forma

$$\dot{x} = F(t, x, \varepsilon), \tag{2.1}$$

onde

- $t \in I \subset \mathbb{R}$  representa a variável tempo, com  $I$  um intervalo;
- $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  representa a variável espacial e  $D$  é um conjunto aberto e limitado;

- $\varepsilon$  é um parâmetro suficientemente pequeno representando a grandeza das perturbações com  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  e  $\varepsilon_0$  é uma constante;
- $F : I \times D \times (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função lipschitziana na variável espacial  $x$ .

Para podermos aplicar o método da média é necessário que a função  $F$  esteja na forma padrão, isto é, que possamos escrevê-la na seguinte forma:

$$F(t, x, \varepsilon) = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad (2.2)$$

onde  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : I \times D \times (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Durante o processo de aproximação de soluções o intervalo de definição das soluções aproximadas pode ser relativamente pequeno, de tal forma que tais aproximações podem se tornar ineficazes. A fim de se obter estimativas para as soluções aproximadas que obteremos durante este capítulo e seus respectivos intervalos de definição, introduziremos conceitos que serão de fundamental importância neste objetivo, os símbolos de Landau e a noção de tempo-escala. Apresentaremos alguns resultados e definições utilizados na demonstração do principal teorema da Teoria da Média de primeira ordem.

**Definição 2.1.1.** *Considere  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno. Dizemos que uma função  $\delta : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função ordem se é contínua, positiva (negativa) e  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon)$  existe.*

**Definição 2.1.2.** *(Símbolos de Landau) Considere  $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02} > 0$  suficientemente pequenos. Se  $\delta_1 : (0, \varepsilon_{01}] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\delta_2 : (0, \varepsilon_{02}] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções ordem então:*

(i)  $\delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon))$  se existe uma constante  $k$  tal que  $|\delta_1(\varepsilon)| \leq k|\delta_2(\varepsilon)|$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

(ii)  $\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon))$  se  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} = 0$ ;

(iii)  $\delta_1(\varepsilon) = O_S(\delta_2(\varepsilon))$  se  $\delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon))$  e  $\delta_1(\varepsilon) \neq o(\delta_2(\varepsilon))$ ;

**Observação 2.1.1.** Observemos que se  $|\delta_1(\varepsilon)| \leq k|\delta_2(\varepsilon)|$  então  $\left| \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} \right| \leq k$ , isto é,  $\frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)}$  é limitada.

Mais ainda, temos:

$$\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon)) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} = 0 \Rightarrow \left| \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} \right| \leq k,$$

quando

$$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon)).$$

**Exemplo 2.1.1.** Considere  $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02} > 0$  suficientemente pequenos. Como  $\delta_1 : (0, \varepsilon_{01}] \rightarrow \mathbb{R} ; \delta_1(\varepsilon) = \varepsilon \operatorname{sen}(\frac{1}{\varepsilon})$  e  $\delta_2 : (0, \varepsilon_{02}] \rightarrow \mathbb{R} ; \delta_2(\varepsilon) = \varepsilon$  são funções ordem então  $\varepsilon \operatorname{sen}(\frac{1}{\varepsilon}) = O(\varepsilon)$ .

De fato, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  segue que  $|\varepsilon \operatorname{sen}(\frac{1}{\varepsilon})| = |\varepsilon| |\operatorname{sen}(\frac{1}{\varepsilon})| \leq |\varepsilon| \cdot 1 = |\varepsilon|$ .

Portanto quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos  $|\varepsilon \operatorname{sen}(\frac{1}{\varepsilon})| \leq |\varepsilon| \cdot 1$ , ou seja,  $\varepsilon \operatorname{sen}(\frac{1}{\varepsilon}) = O(\varepsilon)$ .

Porém  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \operatorname{sen}(\frac{1}{\varepsilon})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{\varepsilon})$  não existe, assim  $\varepsilon \operatorname{sen}(\frac{1}{\varepsilon}) = O_S(\varepsilon)$ .

**Exemplo 2.1.2.** Considere  $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02} > 0$  suficientemente pequenos. Como  $\delta_1 : (0, \varepsilon_{01}] \rightarrow \mathbb{R} ; \delta_1(\varepsilon) = \varepsilon^n$  e  $\delta_2 : (0, \varepsilon_{02}] \rightarrow \mathbb{R} ; \delta_2(\varepsilon) = \varepsilon^m$ ,  $n > m$  são funções ordem então  $\varepsilon^n = o(\varepsilon^m)$ .

De fato, como  $n > m$  temos  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^m} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{n-m} = 0$ . Assim  $\varepsilon^n = o(\varepsilon^m)$ .

Podemos usar os símbolos de Landau para comparar funções que não são necessariamente funções de ordem. Esses símbolos são usados para obter estimativas entre soluções aproximadas de sistemas de equações diferenciais, as quais geralmente não são funções ordem.

**Definição 2.1.3.** Consideremos  $I_\varepsilon \subset \mathbb{R}$  intervalo,  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno,  $\delta : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função ordem e  $\Phi_\varepsilon : I_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n ; \Phi_\varepsilon(t) = \Phi(\varepsilon, t)$ , no qual  $\|\Phi_\varepsilon\| = \sup\{\|\Phi_\varepsilon(t)\| ; t \in I_\varepsilon\}$ . Utilizamos os símbolos de Landau da seguinte forma:

(i)  $\Phi_\varepsilon = O(\delta(\varepsilon))$  em  $I_\varepsilon$  se  $\|\Phi_\varepsilon\| = O(\delta(\varepsilon))$ ;

(ii)  $\Phi_\varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$  em  $I_\varepsilon$  se  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\Phi_\varepsilon\|}{\delta(\varepsilon)} = 0$ ;

(iii)  $\Phi_\varepsilon = O_S(\delta(\varepsilon))$  em  $I_\varepsilon$  se  $\Phi_\varepsilon = O(\delta(\varepsilon))$  e  $\Phi_\varepsilon \neq o(\delta(\varepsilon))$ .

**Definição 2.1.4.** Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno e  $\delta(\varepsilon)$  uma função ordem. Considere a função vetorial  $f : I \times D \times (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  nas variáveis  $(t, x, \varepsilon) \in I \times D \times (0, \varepsilon_0]$ . Dizemos que:

(i)  $f(t, x, \varepsilon)$  é  $O(\delta(\varepsilon))$  se existe uma constante  $k$  tal que  $\|f\| \leq k\delta(\varepsilon)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , no qual ;

(ii)  $f(t, x, \varepsilon)$  é  $o(\delta(\varepsilon))$  se  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|f\|}{\delta(\varepsilon)} = 0$ ;

onde  $\|f\|$  denota a norma do sup, ou seja,  $\|f\| = \sup\{\|f(t, x, \varepsilon)\| ; (t, x, \varepsilon) \in I \times D \times (0, \varepsilon_0]\}$ .

**Definição 2.1.5.** Consideremos a função vetorial  $f(t, x, \varepsilon)$  com  $f(t, x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$ ,  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  e  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ . Dizemos que  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz em  $x$  com constante Lipschitziana  $L > 0$ , se em  $[t_0, t_0 + T] \times D \times (0, \varepsilon_0]$  temos  $\|f(t, x_1, \varepsilon) - f(t, x_2, \varepsilon)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$ , onde  $x_1, x_2 \in D$ .

Agora vamos enunciar o teorema de existência e unicidade para problemas com valor inicial.

**Teorema 2.1.1.** (*Teorema da Existência e Unicidade*) Considere o problema com valor inicial  $\frac{dx}{dt} = f(t, x, \varepsilon)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , onde  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$  e  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  tal que  $D = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - x_0\| \leq d\}$ . Suponhamos que:

(i)  $f(t, x, \varepsilon)$  é contínua para  $(t, x, \varepsilon)$  em  $G = [t_0, t_0 + T] \times D \times (0, \varepsilon_0]$ ;

(ii)  $f(t, x, \varepsilon)$  satisfaz a condição de Lipschitz com relação à variável  $x$ .

Então o problema de valor inicial tem uma única solução para  $t \in \left[ t_0, t_0 + \inf \left\{ T, \frac{d}{M} \right\} \right]$ , onde  $M = \sup_G \|f\|$  e  $d$  é uma constante positiva.

*Demonstração.* Para uma demonstração consulte [18]. □

Admitindo  $T$  tão grande quanto possível, isto significa que o tamanho do intervalo de existência de solução é da ordem  $\frac{L}{\delta(\varepsilon)}$  com  $L$  constante. Logo, esta conclusão na qual  $\varepsilon$  é um parâmetro suficientemente pequeno envolve uma estimativa assintótica do tamanho de um intervalo.

Notemos que na definição de  $\Phi_\varepsilon$  o tempo  $t$  varia no intervalo  $I_\varepsilon$ . Entretanto, este intervalo pode depender do parâmetro  $\varepsilon$  de uma forma na qual o intervalo de definição da função  $\Phi_\varepsilon$  seja diferente para cada valor do parâmetro da perturbação introduzido no sistema.

Trabalharemos com intervalos  $I_\varepsilon = \left[ 0, \frac{L}{\delta(\varepsilon)} \right]$ , no qual  $L$  é uma constante independente de  $\varepsilon$ . Desta forma, precisamos realizar um redimensionamento no tempo, de tal modo que o intervalo de definição da função fique independente de  $\varepsilon$ . Então para  $\delta(\varepsilon)$  uma função ordem positiva temos:

$$0 \leq t \leq \frac{L}{\delta(\varepsilon)} \Rightarrow 0 \leq t \cdot \delta(\varepsilon) \leq L.$$

A variável  $\tau = t \cdot \delta(\varepsilon)$  é denominada de variável tempo-escala ou tempo lento, e temos  $\tau \in I = [0, L]$ .

**Definição 2.1.6.** Consideremos  $I_\varepsilon \subset \mathbb{R}$  intervalo,  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno,  $\delta : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função ordem e  $\Phi_\varepsilon : I_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $\Phi_\varepsilon(t) = \Phi(\varepsilon, t)$ . Temos  $\Phi_\varepsilon(t) = O(\delta(\varepsilon))$  conforme  $\varepsilon \rightarrow 0$  na escala de tempo  $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$  se a estimativa satisfaz  $0 \leq t \cdot \delta(\varepsilon) \leq L$  com  $L$  uma constante independente de  $\varepsilon$ . A definição para o caso  $\Phi_\varepsilon(t) = o(\delta(\varepsilon))$  é análoga.

**Definição 2.1.7.** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo,  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno. Considere a função vetorial  $f : I \times D \times (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  nas variáveis  $(t, x, \varepsilon) \in I \times D \times (0, \varepsilon_0]$  e as funções ordem  $\delta_1(\varepsilon)$  e  $\delta_2(\varepsilon)$ . Temos  $f(t, x, \varepsilon) = O(\delta_1(\varepsilon))$  conforme  $\varepsilon \rightarrow 0$  na escala de tempo  $\frac{1}{\delta_2(\varepsilon)}$  se a estimativa é válida para  $x \in D, 0 \leq t \cdot \delta_2(\varepsilon) \leq L$  com  $L$  uma constante independente de  $\varepsilon$ . A definição para o caso  $f(t, x, \varepsilon) = o(\delta_1(\varepsilon))$  é análoga.

Agora estamos prontos para definir aproximação assintótica de uma função.

**Definição 2.1.8.** Consideremos  $I_\varepsilon \subset \mathbb{R}$  intervalo,  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno,  $\delta : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função ordem,  $\psi_\varepsilon : I_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $\psi_\varepsilon(t) = \psi(\varepsilon, t)$  e  $\Phi_\varepsilon : I_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $\Phi_\varepsilon(t) = \Phi(\varepsilon, t)$ . Desta forma, dizemos que:

(i)  $\psi_\varepsilon(t)$  é uma aproximação assintótica de  $\Phi_\varepsilon(t)$  no intervalo  $I_\varepsilon$  se  $\psi_\varepsilon(t) - \Phi_\varepsilon(t) = o(1)$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  uniformemente para  $t \in I_\varepsilon$ ;

(ii)  $\psi_\varepsilon(t)$  é uma aproximação assintótica de  $\Phi_\varepsilon(t)$  no tempo-escala  $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$  se  $\psi_\varepsilon(t) - \Phi_\varepsilon(t) = o(1)$  no tempo-escala  $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ .

**Observação 2.1.2.** Vale ressaltar que a afirmação  $\psi_\varepsilon(t) - \Phi_\varepsilon(t) = o(1)$ , significa que quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi_\varepsilon - \Phi_\varepsilon}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\psi_\varepsilon - \Phi_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \psi_\varepsilon \rightarrow \Phi_\varepsilon, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Logo quando o parâmetro  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos a função  $\psi_\varepsilon$  uma aproximação cada vez melhor da função  $\Phi_\varepsilon$ .

Geralmente podemos obter séries em algum intervalo  $I$  como aproximações assintóticas. Existem expansões da forma:

$$\widehat{\Phi}(t) = \sum_{n=1}^m \delta_n(\varepsilon) \Phi_{n_\varepsilon}(t),$$

onde  $\delta_n(\varepsilon)$  são funções ordem com  $\delta_{n+1}(\varepsilon) = o(\delta_n(\varepsilon))$ ,  $n = 1, \dots, m-1$  e para as funções  $\Phi_{n_\varepsilon}(t)$  temos  $\Phi_{n_\varepsilon}(t) = O_S(1)$  em  $I$ .

**Definição 2.1.9.** Dada uma função  $\Phi(t)$  no intervalo  $I$ , a série assintótica  $\Phi(t)$  é denominada aproximação assintótica de  $m$ -ésima ordem de  $\Phi(t)$  em  $I$  se  $\Phi(t) - \widehat{\Phi}(t) = o(\delta_m(\varepsilon))$  em  $I$ .

**Exemplo 2.1.3.** Seja  $\Phi_\varepsilon : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\Phi_\varepsilon(t) = \text{sen}(t + \varepsilon t)$ . Temos  $\widehat{\Phi}_\varepsilon : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\widehat{\Phi}_\varepsilon(t) = \text{sen}(t) + \varepsilon t \cos(t) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t^2 \text{sen}(t)$  uma aproximação assintótica de terceira ordem de  $\Phi_\varepsilon(t)$  em  $I = [0, 2\pi]$ .

De fato, temos  $\delta_n : (0, \varepsilon_{0n}] \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^{n-1}$ ,  $n = 1, 2, 3$  funções de ordem com  $\varepsilon_{0n} > 0$ ,  $n = 1, 2, 3$ , suficientemente pequeno.

Consideremos  $\Phi_{1\varepsilon} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\Phi_{1\varepsilon} = \text{sen}(t)$ ,  $\Phi_{2\varepsilon} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\Phi_{2\varepsilon} = t \cos(t)$ ,  $\Phi_{3\varepsilon} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\Phi_{3\varepsilon} = \frac{1}{2} t^2 \text{sen}(t)$  e por sua vez:

- (1)  $\|\Phi_{1\varepsilon}\| = \sup\{|\Phi_{1\varepsilon}| ; t \in [0, 2\pi]\} = 1 \leq 1 \cdot 1 = 1 \cdot |1|$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\Phi_{1\varepsilon}\|}{1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1 = 1 \neq 0$ ;
- (2)  $\|\Phi_{2\varepsilon}\| = \sup\{|\Phi_{2\varepsilon}| ; t \in [0, 2\pi]\} = \sup\{|t| \cdot |\cos(t)| ; t \in [0, 2\pi]\} = 2\pi \cdot 1 \leq 2\pi \cdot |1|$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\Phi_{2\varepsilon}\|}{1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi = 2\pi \neq 0$ ;
- (3)  $\|\Phi_{3\varepsilon}\| = \sup\{|\Phi_{3\varepsilon}| ; t \in [0, 2\pi]\} = \sup\{|\frac{1}{2}| \cdot |t^2| \cdot |\sen(t)| ; t \in [0, 2\pi]\} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi^2 \cdot 1 \leq 2\pi^2 \cdot |1|$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\Phi_{3\varepsilon}\|}{1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi^2 = 2\pi^2 \neq 0$ .

Desta forma por (1),(2) e (3) temos  $\Phi_{n\varepsilon}(t) = O_S(1)$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Mais ainda  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\Phi_\varepsilon - \widehat{\Phi}_\varepsilon\|}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|R_2\|}{\varepsilon^2} = 0$ , pois  $R_2$  é o resto do polinômio de Taylor de ordem 2 de  $\Phi$ .

Assim  $\widehat{\Phi}_\varepsilon(t) = \sen(t) + \varepsilon t \cos(t) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t^2 \sen(t) = \sum_{n=1}^3 \delta_n(\varepsilon) \Phi_{n\varepsilon}(t)$  é uma aproximação assintótica de terceira ordem de  $\Phi_\varepsilon(t)$  em  $I = [0, 2\pi]$ .

**Observação 2.1.3.** (i) Aproximações assintóticas não são únicas, a função  $\Phi_\varepsilon$  não é determinada de forma única como esta claro na definição. Por exemplo, outra aproximação assintótica de  $\Phi_\varepsilon(t)$  em  $I$ , definida no Exemplo 2.1.3 seria  $\psi_\varepsilon(t) = \sen(t) + \varepsilon \Phi_{2\varepsilon}(t) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t^2 \sen(t)$ , com  $\Phi_{2\varepsilon}(t) = \frac{\sen(\varepsilon t) \cos(t)}{\varepsilon}$ .

(ii) Dada uma função, podemos construir diferentes aproximações assintóticas com diferentes conjuntos de funções ordem. Por exemplo, a função  $f_\varepsilon = \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} t\right)^{-1}$ ,  $t \in I = [0, 1]$ , possui as seguintes expansões como aproximações assintóticas de  $f_\varepsilon$  em  $I$ :

$$g_{1\varepsilon} = \sum_{n=0}^m \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right)^n t^n;$$

$$g_{2\varepsilon} = 1 + \sum_{n=1}^m \varepsilon^n t(t-1)^{n-1}.$$

## 2.2 O Teorema da Média clássico

O teorema que virá a seguir fornece uma aproximação de primeira ordem para as soluções periódicas do problema de valor inicial dado na forma padrão,

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \quad (2.3)$$

Supondo que  $f$  é  $T$ -periódica na variável  $t$ , podemos considerar o sistema médio

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon f_0(y) = \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} . \quad (2.4)$$

Vale ressaltar que o sistema (2.4) é autônomo, isto é, não depende explicitamente da variável independente  $t$ , e desta forma temos uma simplificação na procura de soluções. Assim, vamos relacionar as soluções de (2.3) com as soluções de seu sistema médio (2.4). Porém, antes mostraremos o Lema de Gronwall, o qual usaremos na demonstração do resultado citado.

**Teorema 2.2.1.** *Sejam  $\phi : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\psi : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$  funções reais contínuas e positiva de tal forma que  $\phi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds + \delta_3$ , com constantes  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_3 \geq 0$ . Então para todo  $t \in [t_0, t_0 + T]$  temos:*

$$\phi(t) \leq \delta_3 e^{\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)ds}.$$

*Demonstração.* Ressaltamos que se  $\phi(t) = 0$  e  $\delta_3 = 0$  então pela estimativa da hipótese temos a validade do teorema claramente, mais ainda não podemos ter  $\psi(t) = 0$  e  $\delta_3 = 0$  simultaneamente, pois acarretaria da estimativa da hipótese em  $\phi(t)$  não positiva. Como  $\Psi(t)$  e  $\delta_3$  não são simultaneamente nulos da estimativa da hipótese temos:

$$\frac{\phi(t)}{\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds + \delta_3} \leq 1.$$

Multiplicando por  $\delta_1 \psi(t)$  e depois integrando de  $t_0$  a  $t$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{\delta_1 \psi(s)\phi(s)}{\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds + \delta_3} ds &\leq \int_{t_0}^t \delta_1 \psi(s) ds \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{\delta_1 \psi(s)\phi(s)}{\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds + \delta_3} ds \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds + \delta_3 \right) \right] ds \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \left( \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds + \delta_3 \right) - \ln(\delta_3) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \left( \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds + \delta_3 \right) \leq \ln(\delta_3) + \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds + \delta_3 \leq \delta_3 e^{\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)ds}. \end{aligned}$$

Aplicando a estimativa da hipótese novamente, mas agora do lado esquerdo, segue:

$$\phi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds + \delta_3 \leq \delta_3 e^{\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)ds} \Rightarrow \phi(t) \leq \delta_3 e^{\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s)ds}.$$

□

**Lema 2.2.1.** (Lema de Gronwall) Seja  $\phi : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$  um função real contínua e positiva de tal forma que  $\phi(t) \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t \phi(s)ds + \delta_3$ , com constantes  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 \geq 0$  e  $\delta_3 \geq 0$ . Então para todo  $t \in [t_0, t_0 + T]$  temos:

$$\phi(t) \leq \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

*Demonstração.*

Consideremos a função real  $\Psi : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Psi(t) = \phi(t) + \frac{\delta_2}{\delta_1}$ , que é contínua e positiva, pois é soma de funções contínuas e positivas. Então, por hipótese, segue que:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \phi(t) + \frac{\delta_2}{\delta_1} \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t \phi(s)ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} = \delta_1 \int_{t_0}^t \frac{\delta_2}{\delta_1} ds + \\ &+ \delta_1 \int_{t_0}^t \phi(s)ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} = \delta_1 \int_{t_0}^t \left( \phi(s) + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} = \\ &= \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s)ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \Rightarrow \Psi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s)ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1}. \end{aligned}$$

Se  $\delta_2 = \delta_3 = 0$  então teríamos pelo Teorema de Gronwall com  $\psi(t) = 1$  que  $\Psi(t) \leq 0$ . Por outro lado, vimos que  $0 \leq \Psi(t)$ , logo teríamos  $\Psi = 0$  e  $0 \leq 0$ . Assim este lema vale para  $\delta_2 = \delta_3 = 0$ .

Vamos excluir agora o caso em que  $\delta_2 = \delta_3 = 0$  que já foi provado. Como o lado direito da última desigualdade é positivo segue que:

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(t)}{\delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s)ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1}} &\leq 1 \Rightarrow \frac{\delta_1 \Psi(t)}{\delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s)ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1}} \leq \delta_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \ln \left( \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s)ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \leq \delta_1. \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados com relação a  $s$ , de  $t_0$  até  $t$  temos:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \ln \left( \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s)ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) ds &\leq \int_{t_0}^t \delta_1 ds \Rightarrow \\ \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \ln \left( \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s)ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) ds &\leq \delta_1(t - t_0). \end{aligned}$$

Pelo segundo Teorema Fundamental do Cálculo segue que:

$$\begin{aligned} \ln \left( \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s)ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) - \ln \left( \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) &\leq \delta_1(t - t_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left( \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s)ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) &\leq \ln \left( \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) + \delta_1(t - t_0). \end{aligned}$$

Agora aplicando a função exponencial:

$$\begin{aligned} e^{\ln \left( \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s) ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)} &\leq e^{\ln \left( \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) + \delta_1(t-t_0)} = e^{\ln \left( \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)} \cdot e^{\delta_1(t-t_0)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s) ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \leq \left( \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \cdot e^{\delta_1(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Psi(t) &\leq \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s) ds + \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \leq \left( \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \cdot e^{\delta_1(t-t_0)} \Rightarrow \phi(t) + \frac{\delta_2}{\delta_1} \leq \\ &\leq \left( \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \cdot e^{\delta_1(t-t_0)} \Rightarrow \phi(t) \leq \left( \delta_3 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \cdot e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1}. \end{aligned}$$

□

A solução  $y(t)$  de (2.4) está próxima da solução  $x(t)$  do sistema (2.3) da seguinte forma:

**Teorema 2.2.2.** (Teorema da Média clássico) Considere os problemas (2.3) e (2.4) com  $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  e  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , com  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno. Suponhamos que:

- (i)  $f, g$  e  $J_x f$  (matriz jacobiana da função  $f$  em relação a segunda variável) estão definidas, são contínuas e limitadas por uma constante  $M$  independente de  $\varepsilon$  em  $[t_0, \infty) \times D$ ;
- (ii)  $g$  é lipschitziana em  $x \in D$ ;
- (iii)  $f$  é  $T$ -periódica na variável  $t$  com média  $f_0$  e  $T$  constante independente de  $\varepsilon$ ;
- (iv)  $y(t)$  pertence (independente de  $\varepsilon$ ) a um subconjunto interior de  $D$  no tempo escala  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Então  $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  no tempo escala  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Antes de realizarmos a demonstração faremos algumas observações:

- (a) as condições (i) e (ii) na hipótese do teorema garantem a existência e a unicidade dos problemas de valor inicial (2.3) e (2.4), conseqüentemente faz sentido falar nas respectivas soluções dos mesmos,  $x(t)$  e  $y(t)$ ;
- (b) a condição (iii) na hipótese do teorema nos diz que não é necessário considerar o tempo  $t$  no intervalo  $[t_0, \infty)$ , se  $f$  é  $T$ -periódica, e assim vamos trabalhar com o tempo  $t$  no intervalo  $[t_0, t_0 + T]$ ;

(c) a condição (iv) na hipótese do teorema nos diz que temos existência de soluções no tempo-escala  $\frac{1}{\varepsilon}$  na variável tempo  $t$ , isto é, no tempo-escala  $\frac{1}{\varepsilon}$  na variável tempo-escala  $\tau$  ( $\tau = \varepsilon t$ ).

Finalizadas as observações faremos a demonstração do teorema.

*Demonstração.*

Vamos definir a função  $\mu_1 : [t_0, t_0 + T] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\mu_1(t, y) = \int_{t_0}^t (f(s, y) - f_0(y)) ds$ .

Afirmção (1):  $\|\mu_1(t, y)\| \leq 2MT$ , no qual  $M$  e  $T$  são constantes dadas nas hipóteses do teorema. De fato,

$$\begin{aligned} \|\mu_1(t, y)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, y) - f_0(y)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, y)\| ds + \\ &+ \int_{t_0}^t \|f_0(y)\| ds \leq \int_{t_0}^t M ds + \int_{t_0}^t \|f_0(y)\| ds. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|f_0(y)\| &= \left\| \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt \right\| = \left\| \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(u, y) du \right\| \leq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \|f(u, y)\| du \leq \\ &\leq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} M dt = \frac{M}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt = M. \end{aligned}$$

Desta forma segue que:

$$\begin{aligned} \|\mu_1(t, y)\| &\leq \int_{t_0}^t M ds + \int_{t_0}^t \|f_0(y)\| ds \leq \int_{t_0}^t M ds + \int_{t_0}^t M ds = \\ &= 2M \int_{t_0}^t ds \leq 2M \int_{t_0}^{t_0+T} ds = 2MT. \end{aligned}$$

Portanto provamos a afirmação (1). Agora vamos encontrar uma estimativa para a diferença entre as soluções de (2.3) e (2.4). Consideremos  $z(t) = y(t) + \varepsilon\mu_1(t, y(t))$  a transformação quase-identidade, com  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, logo:

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\| = \|x(t) - z(t)\| + \|\varepsilon\mu_1(t, y(t))\| = \\ &= \|x(t) - z(t)\| + \varepsilon\|\mu_1(t, y(t))\| \leq \|x(t) - z(t)\| + 2\varepsilon MT. \end{aligned}$$

Pelo segundo Teorema Fundamental do Cálculo temos:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \left( \frac{dx}{ds}(s) - \frac{dz}{ds}(s) \right) ds &= x(t) - x(t_0) - z(t) + z(t_0) = \\ &= x(t) - x(t_0) - z(t) + y(t_0) + \varepsilon\mu_1(t_0, y(t_0)) = \\ &= x(t) - x(t_0) - z(t) + y(t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^{t_0} (f(t_0, y(t_0)) - f_0(y(t_0))) ds = \\ &= x(t) - x(t_0) - z(t) + y(t_0) = x(t) - x(t_0) - z(t) + x(t_0) = x(t) - z(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{t_0}^t \left( \frac{dx}{ds} - \frac{dz}{ds} \right) ds = x(t) - z(t). \quad (2.5)$$

Por sua vez, como  $x(t)$  e  $y(t)$  são soluções dos sistemas (2.3) e (2.4) respectivamente então:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) - \frac{dz}{dt}(t) &= \frac{dx}{dt}(t) - \left( \frac{dy}{dt}(t) + \varepsilon \frac{d\mu_1}{dt}(t, y(t)) \right) = \\ &= \frac{dx}{dt}(t) - \frac{dy}{dt}(t) - \varepsilon \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial t}(t, y(t)) \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \mu_1}{\partial y}(t, y(t)) \cdot \frac{dy(t)}{dt} \right) = \\ &= \frac{dx}{dt}(t) - \frac{dy}{dt}(t) - \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial t}(t, y(t)) - \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial y}(t, y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t) = \\ &= \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \frac{dy}{dt}(t) - \varepsilon (f(t, y(t)) - f_0(y(t))) - \\ &\quad - \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_1}{\partial y}(t, y(t)) f_0(y(t)) = \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \varepsilon f_0(y(t)) - \varepsilon f(t, y(t)) + \\ &\quad + \varepsilon f_0(y(t)) - \varepsilon^2 f_0(y(t)) \frac{\partial \mu_1(t, y(t))}{\partial y}(t, y(t)) + \varepsilon f(t, z(t)) - \varepsilon f(t, z(t)) = \\ &= \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \varepsilon f(t, y(t)) - \varepsilon^2 f_0(y(t)) \frac{\partial \mu_1}{\partial y}(t, y(t)) + \varepsilon f(t, z(t)) - \\ &\quad - \varepsilon f(t, z(t)) = \varepsilon f(t, x(t)) - \varepsilon f(t, z(t)) + \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \varepsilon f(t, y(t)) - \\ &\quad - \varepsilon^2 f_0(y(t)) \frac{\partial \mu_1}{\partial y}(t, y(t)) + \varepsilon f(t, z(t)) = \varepsilon f(t, x(t)) - \varepsilon f(t, z(t)) + R \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = \varepsilon f(t, x(t)) - \varepsilon f(t, z(t)) + R. \end{aligned}$$

Afirmção (2): A função  $f(t, x)$  é de Lipschitz. De fato, como  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $D$  que é limitado, conseqüentemente  $\bar{D}$  também é limitado segue que  $f$  é Lipschitz com constante de Lipschitz  $L$  em  $\bar{D}$ , ou seja, também é Lipschitz com constante de Lipschitz  $L$  em  $D$ .

Afirmção (3): Se  $R = \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \varepsilon f(t, y(t)) - \varepsilon^2 f_0(y(t)) \frac{\partial \mu_1}{\partial y}(t, y(t)) + \varepsilon f(t, z(t))$  então existe  $0 < k \in \mathbb{R}$  tal que  $\|R\| \leq k\varepsilon^2$ , para  $t \in [t_0, \infty)$ .

De fato, observe que:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mu_1}{\partial y}(t, y(t)) \right\| &= \left\| \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial y}(s, y(s)) - \frac{\partial f_0}{\partial y}(y(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(s, y(s)) \right\| ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left\| \frac{\partial f_0}{\partial y}(y(s)) \right\| ds \leq \int_{t_0}^t M ds + \int_{t_0}^t \left\| \frac{\partial f_0}{\partial y}(y(s)) \right\| ds. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f_0}{\partial y}(y(s)) \right\| &= \left\| \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial y}(s, y(s)) ds \right\| = \left\| \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial f}{\partial y}(u, y(u)) du \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(u, y(u)) \right\| du \leq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} M du = \frac{M}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} du = M. \end{aligned}$$

Desta forma segue que:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mu_1}{\partial y}(t, y(t)) \right\| &\leq \int_{t_0}^t M ds + \int_{t_0}^t \left\| \frac{\partial f_0}{\partial y}(y(s)) \right\| ds \leq \int_{t_0}^t M ds + \int_{t_0}^t M ds = \\ &= 2M \int_{t_0}^t ds \leq 2M \int_{t_0}^{t_0+T} ds = 2MT. \end{aligned}$$

Portanto  $\left\| \frac{\partial \mu_1}{\partial y}(t, y(t)) \right\| \leq 2MT$ . Dada a expressão de  $R$  para  $t \in [t_0, \infty)$  temos:

$$\begin{aligned} \|R\| &\leq \|\varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon)\| + \left\| \varepsilon^2 f_0(y(t)) \frac{\partial \mu_1}{\partial y}(t, (y(t))) \right\| + \|\varepsilon f(t, z(t)) - \varepsilon f(t, y(t))\| \leq \\ &\leq \|\varepsilon^2 M\| + \|\varepsilon^2 M \cdot 2MT\| + \|\varepsilon L[z(t) - y(t)]\| = \varepsilon^2 M + 2\varepsilon^2 M^2 T + \varepsilon L \|\varepsilon \mu_1(t, y(t))\| \leq \\ &\leq \varepsilon^2 M + 2\varepsilon^2 M^2 T + \varepsilon^2 L \cdot 2MT = \varepsilon^2 (M + 2M^2 T + 2LMT). \end{aligned}$$

Assim  $\|R\| \leq k\varepsilon^2$ , com  $k = M + 2M^2 T + 2LMT > 0$  para  $t \in [t_0, \infty)$  e com isso provamos a Afirmação (3).

Finalmente de (2.5) temos:

$$\begin{aligned} \|x(t) - z(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \left( \frac{dx}{ds}(s) - \frac{dz}{ds}(s) \right) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \left\| \frac{dx}{ds}(s) - \frac{dz}{ds}(s) \right\| ds = \\ &= \int_{t_0}^t \|\varepsilon f(s, x(s)) - \varepsilon f(s, z(s)) + R\| ds \leq \int_{t_0}^t \|\varepsilon f(s, x(s)) - \varepsilon f(s, z(s))\| ds \\ &+ \int_{t_0}^t \|R\| ds \leq \varepsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + \int_{t_0}^t k\varepsilon^2 ds = \\ &= \varepsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + k\varepsilon^2(t - t_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|x(t) - z(t)\| \leq \varepsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + k\varepsilon^2(t - t_0). \end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Gronwall vem que:

$$\begin{aligned} \|x(t) - z(t)\| &\leq \left( \frac{k\varepsilon^2}{\varepsilon L} + 0 \right) e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \frac{k\varepsilon^2}{\varepsilon L} = \varepsilon \frac{k}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \varepsilon \frac{k}{L} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|x(t) - z(t)\| \leq \varepsilon \frac{k}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \varepsilon \frac{k}{L}. \end{aligned}$$

Portanto como:

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \|x(t) - z(t)\| + 2\varepsilon MT \Rightarrow \|x(t) - y(t)\| - 2\varepsilon MT \leq \|x(t) - z(t)\| \leq \\ &\leq \varepsilon \frac{k}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \varepsilon \frac{k}{L} \Rightarrow \|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \left( \frac{k}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \frac{k}{L} + 2MT \right). \end{aligned}$$

Como  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ , ou seja,  $0 \leq t - t_0 \leq T$  e considerando  $r = t - t_0$  vale:

$$0 \leq r \leq T \leq \frac{T}{\varepsilon} \Rightarrow 0 \leq \varepsilon \cdot r \leq T \Rightarrow 0 \leq \tau \leq T.$$

Portanto  $\varepsilon L(t - t_0) = L\varepsilon r = L\tau \leq LT$ , logo  $\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon C$ , com  $C = \frac{k}{L}e^{LT} - \frac{k}{L} + 2MT$ , no tempo-escala  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Consequentemente  $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$ , no tempo-escala  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

□

**Observação 2.2.1.** A transformação quase-identidade, a qual vimos na demonstração do Teorema 2.2.2, foi definida como  $z(t) = y(t) + \varepsilon\mu_1(t, y(t))$ , leva esse nome pois  $z(t) - y(t) = O(\varepsilon)$ . Afinal  $\|z(t) - y(t)\| = \varepsilon\|\mu_1(t, y(t))\| \leq \varepsilon(2MT)$ .

Considerando a equação (2.3) e assumindo o fato de  $f(t, x)$  e  $g(t, x, \varepsilon)$  serem  $T$ -periódicas na variável  $t$  então o próximo teorema nos mostra sob quais condições, os pontos de equilíbrio da função média (2.4) dão origem a soluções  $T$ -periódicas da equação (2.3).

**Teorema 2.2.3.** *Consideremos a equação (2.3) e suponhamos que:*

(i) *as funções  $f, g, J_x f, J_x^2 f$  e  $J_x g$  são definidas contínuas e limitadas por uma constante  $M$  independente de  $\varepsilon$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ;*

(ii)  *$f$  e  $g$  são  $T$ -periódicas na variável  $t$ , onde  $T$  independe de  $\varepsilon$ .*

*Se  $p$  é um ponto de equilíbrio da equação diferencial média (2.4) e  $\det(J_y f_0(p)) \neq 0$  então existe uma solução  $T$ -periódica  $\phi(t, \varepsilon)$  da equação (2.3) que está próxima de  $p$ , de tal forma que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t, \varepsilon) = p$ .*

*Demonstração.*

Primeiramente definimos a função  $\mu_1 : [t_0, t_0 + T] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\mu_1(t, y) = \int_{t_0}^t (f(s, y) - f_0(y)) ds$ .

Agora vamos considerar  $x(t) = z(t) + \varepsilon\mu_1(t, z(t))$  a transformação quase-identidade, com  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, que leva esse nome porque  $x(t) - z(t) = O(\varepsilon)$ . Tal transformação é usada para simplificar a equação (2.3), esse processo é chamado de normalização e pode ser visto na seção 13.2 e 13.3 de [23], ou seja, conseguimos encontrar a função  $z$  que vale a igualdade. Assim,

$$x(t) = z(t) + \varepsilon\mu_1(t, z(t)) \Rightarrow \frac{dx}{dt}(t) = \frac{dz}{dt}(t) + \varepsilon \frac{d\mu_1}{dt}(t, z(t)) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{dx}{dt}(t) = \frac{dz}{dt}(t) + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial t}(t, z(t)) + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \frac{dz}{dt}(t) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) = \frac{dz}{dt}(t) + \varepsilon f(t, z(t)) - \varepsilon f_0(z(t)) + \\
&+ \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \frac{dz}{dt}(t) \Rightarrow \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right) \frac{dz}{dt}(t) = \varepsilon f_0(z(t)) + \\
&+ \varepsilon f(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t))) + \varepsilon^2 g(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t)), \varepsilon) - \varepsilon f(t, z(t)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right) \frac{dz}{dt}(t) = \varepsilon f_0(z(t)) + \widehat{R},
\end{aligned}$$

com  $I$  a matriz identidade de ordem  $n \times n$ .

Observemos que  $A(\varepsilon) = \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right)$  é inversível, pois estamos perturbando a matriz identidade e temos a função determinante contínua com  $\det(I) \neq 0$ . Como  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $D$  que é limitado, conseqüentemente  $\overline{D}$  também é limitado segue que  $f$  é Lipschitz com constante de Lipschitz  $L$  em  $\overline{D}$ , ou seja, também é Lipschitz com constante de Lipschitz  $L$  em  $D$  e assim:

$$\begin{aligned}
\|\widehat{R}\| &= \|\varepsilon f(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t))) + \varepsilon^2 g(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t)), \varepsilon) - \varepsilon f(t, z(t))\| \leq \\
&\leq \varepsilon \|f(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t))) - f(t, z(t))\| + \varepsilon^2 \|g(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t)))\| \leq \\
&\leq \varepsilon L \|z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t)) - z(t)\| + \varepsilon^2 M \leq \varepsilon^2 L \|\mu_1(t, z(t))\| + \varepsilon^2 M \leq \\
&\leq \varepsilon^2 L 2MT + \varepsilon^2 M = \varepsilon^2 (2MTL + M) \Rightarrow \|R\| \leq \varepsilon^2 (2MTL + M) \Rightarrow \widehat{R} = O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Seja  $A^{-1}(\varepsilon) = \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right)^{-1}$  a inversa de  $A(\varepsilon)$ , então a expansão em série de Taylor de  $A^{-1}(\varepsilon)$  de ordem 2 em torno de  $\varepsilon = 0$  aplicada na matriz identidade  $I$  é dada por :

$$A^{-1}(\varepsilon) \cdot I = A^{-1}(0 + \varepsilon) \cdot I = A^{-1}(0) \cdot I + \frac{dA^{-1}}{d\varepsilon}(0) \cdot I \cdot \frac{(\varepsilon - 0)^1}{1!} + \frac{d^2 A^{-1}}{d\varepsilon^2}(0) \cdot I^2 \cdot \frac{(\varepsilon - 0)^2}{2!} + r_2(\varepsilon)$$

e tendo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0,$$

isto é,

$$r_2(\varepsilon) = o(\varepsilon^2),$$

conseqüentemente

$$r_2(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$$

Então:

$$\begin{aligned}
A^{-1}(\varepsilon) &= \left[ \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right)^{-1} \Big|_{\varepsilon=0} \right] + \\
&+ \left[ (-1) \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right)^{-1} \cdot \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \Big|_{\varepsilon=0} \right] \varepsilon + \\
&+ (-1) \left[ (-1) \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right)^{-1} \cdot \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) + \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right)^{-1} \cdot (-1) \cdot \\
&\quad \left. \cdot \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right)^{-1} \cdot \left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \Big|_{\varepsilon=0} \right] \frac{\varepsilon^2}{2} + \\
&+ O(\varepsilon^2) = I - \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t))\varepsilon + 2 \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^2) = \\
&= I - \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t))\varepsilon + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^2) \Rightarrow A^{-1}(\varepsilon) = I - \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t))\varepsilon + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

lembrando que como visto na demonstração do Teorema 2.2.2, temos  $\left\| \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right\| \leq 2MT$ .

Como  $\left( I + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \right) \frac{dz}{dt}(t) = \varepsilon f_0(z(t)) + \widehat{R}$  então:

$$\begin{aligned}
A(\varepsilon) \frac{dz}{dt}(t) &= \varepsilon f_0(z(t)) + \widehat{R} \Rightarrow A^{-1}(\varepsilon) A(\varepsilon) \frac{dz}{dt}(t) = A^{-1}(\varepsilon) (\varepsilon f_0(z(t)) + \widehat{R}) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{dz}{dt}(t) = \left( I - \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t))\varepsilon + O(\varepsilon^2) \right) (\varepsilon f_0(z(t)) + \widehat{R}) = \\
&= \varepsilon f_0(z(t)) + \widehat{R} - \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot f_0(z(t)) - \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \widehat{R} + \\
&+ O(\varepsilon^2) \cdot \varepsilon f_0(z(t)) + O(\varepsilon^2) \cdot \widehat{R} = \varepsilon f_0(z(t)) + \widehat{R} - \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot f_0(z(t)) + \\
&+ O(\varepsilon^3) = \varepsilon f_0(z(t)) + \varepsilon \{ f(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t))) - f(t, z(t)) \} + \\
&+ \varepsilon^2 g(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t)), \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot f_0(z(t)) + O(\varepsilon^3) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{dz}{dt}(t) = \varepsilon f_0(z(t)) + \varepsilon \{ f(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t))) - f(t, z(t)) \} + \\
&+ \varepsilon^2 g(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t)), \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot f_0(z(t)) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{dz}{dt}(t) = \varepsilon f_0(z(t)) + \varepsilon F(\varepsilon) + \varepsilon^2 G(\varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot f_0(z(t)) + O(\varepsilon^3), \quad (2.6)$$

com  $F(\varepsilon) = f(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t))) - f(t, z(t))$  e  $G(\varepsilon) = g(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t)), \varepsilon)$ .

Desta forma, a série de Taylor de ordem 2 em torno de  $\varepsilon = 0$  de  $F(\varepsilon)$  e a série de Taylor de ordem 1 em torno de  $\varepsilon = 0$  de  $G(\varepsilon)$  são dadas, respectivamente, por:

(a)

$$F(\varepsilon) = F(0) + \frac{dF}{d\varepsilon}(0) \cdot \frac{\varepsilon}{1!} + \frac{d^2F}{d\varepsilon^2}(0) \cdot \frac{\varepsilon^2}{2!} + r_{f2}(\varepsilon)$$

e tendo  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_{f2}(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0$ , isto é,  $r_{f2}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ , conseqüentemente  $r_{f2}(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ . Assim,

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &= f(t, z(t) + 0 \cdot \mu_1(t, z(t))) - f(t, z(t)) + \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t))) \cdot \mu_1(t, z(t)) \Big|_{\varepsilon=0} \right] \varepsilon + \\ &+ \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t))) \cdot \mu_1(t, z(t)) \cdot \mu_1(t, z(t)) \Big|_{\varepsilon=0} \right] \frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^2) = \\ &= 0 + \frac{\partial f}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \mu_1(t, z(t)) \varepsilon + \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, z(t)) \cdot \mu_1(t, z(t)) \cdot \mu_1(t, z(t)) \right] \frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^2) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \mu_1(t, z(t)) \varepsilon + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

lembrando que por hipótese  $J_x^2 f$  é limitada por uma constante  $M > 0$  e como visto na demonstração do Teorema 2.2.2 temos  $\|\mu_1(t, z(t))\| \leq 2MT$ . Portanto,

$$F(\varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \mu_1(t, z(t)) \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (2.7)$$

(b)  $G(\varepsilon) = G(0) + \frac{dG}{d\varepsilon}(0) \cdot \frac{\varepsilon}{1!} + r_{g1}(\varepsilon)$  e tendo  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_{g1}(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ , isto é,  $r_{g1}(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ , conseqüentemente  $r_{g1}(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ . Assim,

$$\begin{aligned} G(\varepsilon) &= g(t, z(t), 0) + \\ &+ \left[ \frac{\partial g}{\partial z}[t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t)), \varepsilon] \cdot \mu_1(t, z(t)) + \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}[t, z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t)), \varepsilon] \Big|_{\varepsilon=0} \right] \cdot \varepsilon + O(\varepsilon) = \\ &= g(t, z(t), 0) + \left[ \frac{\partial g}{\partial z}[t, z(t), 0] \cdot \mu_1(t, z(t)) + \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}[t, z(t), 0] \right] \varepsilon + O(\varepsilon) = \end{aligned}$$

$= g(t, z(t), 0) + O(\varepsilon) + O(\varepsilon)$ , lembrando que por hipótese  $J_x g$  é limitada por uma constante  $M > 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}$  é limitada, afinal é periódica e  $g$  é contínua e limitada, e como visto na demonstração do Teorema 2.2.2 temos  $\|\mu_1(t, z(t))\| \leq 2MT$ . Portanto,

$$G(\varepsilon) = g(t, z(t), 0) + O(\varepsilon). \quad (2.8)$$

Substituindo (2.7) e (2.8) em (2.6) obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt}(t) &= \varepsilon f_0(z(t)) + \varepsilon \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \mu_1(t, z(t)) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right] + \varepsilon^2 (g(t, z(t), 0) + O(\varepsilon)) - \\
&- \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot f_0(z(t)) + O(\varepsilon^3) = \varepsilon f_0(z(t)) + \varepsilon^2 \frac{\partial f}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \mu_1(t, z(t)) + \varepsilon O(\varepsilon^2) + \\
&+ \varepsilon^2 g(t, z(t), 0) + \varepsilon^2 O(\varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot f_0(z(t)) + O(\varepsilon^3) = \\
&= \varepsilon f_0(z(t)) + \varepsilon^2 \frac{\partial f}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \mu_1(t, z(t)) + \varepsilon^2 g(t, z(t), 0) - \varepsilon^2 \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot f_0(z(t)) + \\
&+ O(\varepsilon^3) = \varepsilon f_0(z(t)) + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \mu_1(t, z(t)) - \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) \cdot f_0(z(t)) + \right. \\
&+ \left. g(t, z(t), 0) + O(\varepsilon) \right] = \varepsilon f_0(z(t)) + \varepsilon^2 R^*, \text{ com } R^* = \frac{\partial f}{\partial z}(t, z(t)) \mu_1(t, z(t)) - \\
&- \frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t)) f_0(z(t)) + g(t, z(t), 0) + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dz}{dt}(t) = \varepsilon f_0(z(t)) + \varepsilon^2 R^*. \quad (2.9)$$

Notemos que  $R^*$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  na variável  $z$ . Ressaltamos também que  $R^*$  é  $T$ -periódica na variável  $t$ . De fato, por hipótese  $g$  e  $f$  são  $T$ -periódicas em  $t$  e isso nos leva à  $\frac{\partial f}{\partial z}$  e  $f_0$  também  $T$ -periódicas na variável  $t$ . Agora só falta mostrar que  $\mu_1(t, z)$  é  $T$ -periódica e com isso também teremos  $\frac{\partial \mu_1}{\partial z}(t, z(t))$   $T$ -periódica, assim:

$$\begin{aligned}
\mu_1(t+T, z) &= \int_{t_0}^{t+T} (f(s, z) - f_0(z)) ds = \int_{t_0}^t (f(s, z) - f_0(z)) ds + \int_t^{t+T} (f(s, z) - f_0(z)) ds = \\
&= \int_{t_0}^t (f(s, z) - f_0(z)) ds + \left( \int_0^T f(s, z) ds - \int_0^T f_0(z) ds \right) = \\
&= \int_{t_0}^t (f(s, z) - f_0(z)) ds + (T \cdot f_0(z) - T \cdot f_0(z)) = \mu_1(t, z).
\end{aligned}$$

Portanto uma solução  $T$ -periódica  $z(t)$  do sistema (2.9) nos dá uma solução  $T$ -periódica  $x(t)$  do sistema original (2.3), afinal  $x(t) = z(t) + \varepsilon \mu_1(t, z(t))$  e vimos que  $\mu_1(t, z)$  é  $T$ -periódica. Concluimos então que basta procurar soluções  $T$ -periódicas do sistema (2.9).

Integrando o sistema (2.9) na variável  $t$  de  $t_0$  a  $t$  temos:

$$z(t) = z(t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^t f_0(z(s)) ds + \varepsilon^2 \int_{t_0}^t R^* ds. \quad (2.10)$$

Para uma solução  $T$ -periódica  $z(t)$  têm-se  $z(t+T) = z(t)$ , para todo  $t \geq t_0$ , com isso,  $z(t_0) =$

$z(t_0 + T)$  e pela equação (2.10) segue que:

$$\begin{aligned}
z(t_0) = z(t_0 + T) &\Leftrightarrow z(t_0) = z(t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} f_0(z(s))ds + \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_0+T} R^* ds \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 0 = \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} f_0(z(s))ds + \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_0+T} R^* ds \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 0 = \varepsilon \left( \int_{t_0}^{t_0+T} f_0(z(s))ds + \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} R^* ds \right) \Leftrightarrow \\
0 &= \int_{t_0}^{t_0+T} f_0(z(s))ds + \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} R^* ds = h(z(t_0), \varepsilon).
\end{aligned}$$

Note que o caso  $\varepsilon = 0$  não nos interessa, pois assim não teríamos perturbação.

Agora definimos em  $D \times [0, \varepsilon_0]$  a função  $h$  dada por  $h(z, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t_0+T} f_0(z)ds + \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} R^* ds$ ,

ou seja,  $h(z, 0) = \int_{t_0}^{t_0+T} f_0(z)ds$ .

Por hipótese, temos  $p$  um ponto de equilíbrio do sistema (2.4), ou seja,  $f_0(p) = 0$  de tal forma que  $\det(J_y f_0(p)) \neq 0$ , logo temos  $h(p, 0) = 0$ . Então:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial h}{\partial z}(z, \varepsilon) \Big|_{z=p, \varepsilon=0} \right| &= \left| \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial f_0}{\partial z}(z)ds + \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial R^*}{\partial z} ds \Big|_{z=p, \varepsilon=0} \right| = \\
&= \left| \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial f_0}{\partial z}(z)ds \Big|_{z=p} \right| = \left| \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial f_0}{\partial z}(p)ds \right| = \left| \frac{\partial f_0}{\partial z}(p) \int_{t_0}^{t_0+T} ds \right| = \\
&= \left| \frac{\partial f_0}{\partial z}(p) \cdot T \right| = T^n \cdot \left| \frac{\partial f_0}{\partial z}(p) \right| \neq 0.
\end{aligned}$$

Portanto  $\left| \frac{\partial h}{\partial z}(p, 0) \right| \neq 0$  e assim pelo Teorema da Aplicação Implícita segue que existe uma vizinhança  $V_0$  de  $\varepsilon = 0$  tal que cada  $\varepsilon \in V_0$  corresponde um único  $z \in D$ , ou seja, existe uma aplicação  $\varsigma$  que a cada  $\varepsilon \in V_0$  associa um único  $z \in D$  e satisfaz  $\varsigma(0) = p$  e  $h(\varsigma(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ . Logo para cada  $\varepsilon \in V_0$

$$z(t) = \varsigma(\varepsilon) + \varepsilon \int_{t_0}^t f_0(z(s))ds + \varepsilon^2 \int_{t_0}^t R^* ds,$$

é uma solução  $T$ -periódica de (2.9).

Pela transformação quase-identidade temos uma solução  $T$ -periódica do sistema original, como já foi comentado anteriormente. Considerando a condição inicial  $z(t_0) = p$  então por (2.10), quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  segue que  $z(t) \rightarrow z(t_0) = p$ .

Desta forma, tendo  $z(t)$  uma solução  $T$ -periódica de (2.9), existe uma solução  $x(t)$  de (2.3)  $T$ -periódica, mais ainda pela relação quase-identidade verifica-se que quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos  $x(t) \rightarrow p$ .

□

# Capítulo 3

## Teoria dos sistemas dinâmicos descontínuos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados e definições acerca de sistemas descontínuos, não suaves ou de Filippov. A nossa principal preocupação é modelar matematicamente e assim termos um conhecimento topológico e geométrico desses sistemas.

### 3.1 Sistemas descontínuos

Vamos trabalhar com campos de vetores não suaves ou descontínuos em  $\mathbb{R}^{n+1}$  tendo como seu conjunto de descontinuidade uma subvariedade  $M$  de codimensão um, isto é, possui uma dimensão a menos que o espaço onde está contido, logo  $M$  possui dimensão  $n$ .

O conceito de estabilidade estrutural do espaço de campos de vetores não suaves baseia-se na seguinte definição:

**Definição 3.1.1.** *Dois campos de vetores  $Z$  e  $\widehat{Z}$  descontínuos são  $C^0$ -equivalentes se existir um homeomorfismo  $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , que leva órbitas de  $Z$  em órbitas de  $\widehat{Z}$  e leva o conjunto de descontinuidade,  $M$ , de  $Z$  no conjunto de descontinuidade,  $\widehat{M}$ , de  $\widehat{Z}$ , isto é,  $\varphi(M) = \widehat{M}$*

**Definição 3.1.2.** *Dois campos de vetores  $Z$  e  $\widehat{Z}$  sobre  $\mathbb{R}^n$  com  $Z(0) = \widehat{Z}(0)$  são germes equivalentes se eles coincidem em alguma vizinhança da origem.*

As classes de equivalências para esta que é uma relação de equivalência são chamadas de germes

de campos de vetores. Da mesma maneira como definido acima, podemos definir germes de funções. Para simplificar, vamos considerar a notação de germe e com isso não vamos distinguir um germe de uma função e qualquer um de seus representantes.

Por exemplo, a notação  $h : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}$  significa que  $h$  é um germe de uma função definida em uma vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^n$ .

Consideremos  $M = h^{-1}(0)$ , no qual  $h$  é um germe de função suave  $h : \mathbb{R}^{n+1}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$  tendo  $0 \in \mathbb{R}$  como seu valor regular, desta forma  $M = h^{-1}(0)$  trata-se de uma hipersuperfície e conseqüentemente uma variedade.

Consideramos no espaço dos campos de vetores a topologia  $\mathcal{C}^r$ , na qual dois campos de vetores  $Z_1$  e  $Z_2$  estarão próximos se os campos e suas derivadas até ordem  $r$  estiverem próximos em uma vizinhança da origem.

Definimos  $\chi(n+1)$  como o espaço de todos os germes de campos de vetores de classe  $\mathcal{C}^r$  em torno da origem no  $\mathbb{R}^{n+1}$  dotados com a topologia  $\mathcal{C}^r$ , sendo  $r > 1$  suficientemente grande conforme precisarmos.

Seja  $h : \mathbb{R}^{n+1}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$  um germe de função suave tendo  $0 \in \mathbb{R}$  como seu valor regular. Vamos definir  $\Omega(n+1)$  como o espaço de todos os germes de campos de vetores  $Z$  em  $\mathbb{R}^{n+1}, 0$  tal que:

$$q' = Z(q) = \begin{cases} X(q), & \text{para } h(q) > 0; \\ Y(q), & \text{para } h(q) < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

**Observação 3.1.1.** O campo de vetores descrito acima é denotado por  $Z = (X, Y)$  e com isso estamos considerando  $\Omega(n+1) = \chi(n+1) \times \chi(n+1)$  com a topologia produto. Podemos ver um exemplo de um retrato de fase de um campo descontínuo em  $\mathbb{R}^2$  na Figura 3.1.

**Definição 3.1.3.** Dizemos que  $Z \in \Omega(n+1)$  é estruturalmente estável se existe uma vizinhança  $U$  de  $Z$  em  $\Omega(n+1)$  tal que todo  $\hat{Z} \in U$  é  $\mathcal{C}^0$ -equivalente com relação a  $Z$ .

Para definir as órbitas soluções de  $Z$  sobre a variedade de descontinuidade  $M$ , vamos tomar um método prático. Em um conjunto aberto  $O$  bem caracterizado de  $M$ , que será descrito abaixo, a solução de  $Z$  através de um ponto  $p \in O$  obedece as regras de Filippov e em  $M \setminus O$  aceitamos que as soluções sejam multivaluadas.

Como estamos interessados em estudar a estabilidade estrutural em  $\Omega(n+1)$  é conveniente levarmos em consideração todas as folheações no  $\mathbb{R}^{n+1}$  gerado pelas órbitas de  $Z$  e também de  $X$

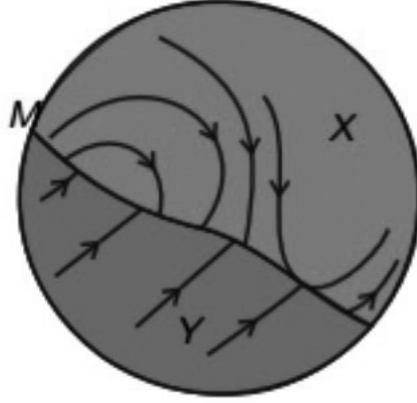


Figura 3.1: Exemplo de um retrato de fase de um campo descontínuo em  $\mathbb{R}^2$ .

e  $Y$  que passam através de  $p$  em  $M$ . As trajetórias de  $Z$  são as soluções do sistema diferencial autônomo  $q' = Z(q)$ .

**Exemplo 3.1.1.** Vamos ilustrar nossa terminologia apresentando um modelo simplificado que é encontrado na teoria do eletromagnetismo clássico.

$$x'' - x''' + \alpha \operatorname{sgn}(x) = 0, \text{ com } \alpha > 0 \Rightarrow \begin{cases} x'' - x''' + \alpha = 0, & x > 0 \\ x'' - x''' - \alpha = 0, & x < 0 \end{cases},$$

$$\text{onde } \operatorname{sgn}(x) \text{ é a função sinal de } x, \text{ isto é, } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Desta forma, temos que  $x''' = x'' + \alpha \operatorname{sgn}(x)$ .

Consideremos  $x' = y$  e  $y' = z$  e com isso segue que  $z' = y'' = x''' = x'' + \alpha \operatorname{sgn}(x) = y' + \alpha \operatorname{sgn}(x) = z + \alpha \operatorname{sgn}(x)$ .

Seja  $h(x, y, z) = x$ , observe que  $\nabla h(x, y, z) = (1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$  para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , assim  $h^{-1}(0)$  é uma hipersuperfície. Logo ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} X(x, y, z) = (x', y', z') = (y, z, z + \alpha), & h(x, y, z) = x > 0 \\ Y(x, y, z) = (x', y', z') = (y, z, z - \alpha), & h(x, y, z) = x < 0 \end{cases}.$$

**Definição 3.1.4.** Para cada  $X \in \chi(n+1)$  e  $h : \mathbb{R}^{n+1}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$  um germe de função suave tendo  $0 \in \mathbb{R}$  como seu valor regular, definimos as função suaves:

- (i)  $Xh : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $Xh = X \cdot \nabla h$ , no qual  $\cdot$  é o produto interno canônico em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , isto é  $Xh(p) = X(p) \cdot \nabla h(p)$ ;

(ii)  $X^2h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $X^2h = X \cdot \nabla Xh$ , no qual  $\cdot$  é o produto interno canônico em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , isto é,  $X^2h(p) = X(p) \cdot \nabla Xh(p)$ ;

(iii)  $X^n h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $X^n h = X \cdot \nabla X^{n-1}h$ , no qual  $\cdot$  é o produto interno canônico em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , isto é,  $X^n h(p) = X(p) \cdot \nabla X^{n-1}h(p)$  e  $n \geq 3$ .

**Observação 3.1.2.** Se  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $X(p)$  e  $\nabla h(p)$ , então

$$\cos\theta = \frac{X(p) \cdot \nabla h(p)}{\|X(p)\| \|\nabla h(p)\|} = \frac{Xh(p)}{\|X(p)\| \|\nabla h(p)\|},$$

segue que a função  $Xh$  nos mostra se o campo de vetores  $X$  :

- (i) aponta na mesma direção do vetor gradiente  $\nabla h$ , com relação ao plano tangente  $T_p M$  (quando  $Xh(p) > 0$ , isto é, o ângulo entre os vetores  $X(p)$  e  $\nabla h(p)$  é agudo),
- (ii) aponta na direção oposta do vetor gradiente, com relação ao plano tangente  $T_p M$  (quando  $Xh(p) < 0$ , isto é, o ângulo entre os vetores  $X(p)$  e  $\nabla h(p)$  é obtuso),
- (iii) é tangente à  $h^{-1}(0) = M$  (quando  $Xh(p) = 0$ , isto é, o ângulo entre os vetores  $X(p)$  e  $\nabla h(p)$  é reto ).

**Definição 3.1.5.** Para cada  $Z \in \Omega(n+1)$ , podemos distinguir as seguintes regiões no conjunto de descontinuidade  $M = h^{-1}(0)$ :

- (i)  $M_c$  é a região de costura que é dada pelos ponto  $p \in M$  tais que  $(Xh(p))(Yh(p)) > 0$ ;
- (ii)  $M_e$  é a região de escape que é dada pelos ponto  $p \in M$  tais que  $Xh(p) > 0$  e  $Yh(p) < 0$ ;
- (iii)  $M_d$  é a região de deslize que dada pelos ponto  $p \in M$  tais que  $Xh(p) < 0$  e  $Yh(p) > 0$ .

Mais ainda, denotamos  $O = M_c \cup M_e \cup M_d$ .

Consideremos  $Z = (X, Y) \in \Omega(n+1)$  um sistema descontínuo onde a região de descontinuidade  $M = h^{-1}(0)$ , com  $h : \mathbb{R}^{n+1}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$  um germe de função tendo  $0 \in \mathbb{R}$  um valor regular. Denotamos as regiões  $M^+ = \{q \in \mathbb{R}^{n+1} ; h(q) > 0\}$  e  $M^- = \{q \in \mathbb{R}^{n+1} ; h(q) < 0\}$ .

**Definição 3.1.6.** Dizemos que qualquer caminho  $\gamma(t)$  satisfazendo (3.1) inteiramente contido numa das regiões  $M^+$ ,  $M^-$  ou em  $M$  é um segmento de órbita. Uma órbita é qualquer caminho  $\gamma(t)$  satisfazendo (3.1), formada pela concatenação de segmentos de órbita, isto é, pela união de segmentos de órbita.

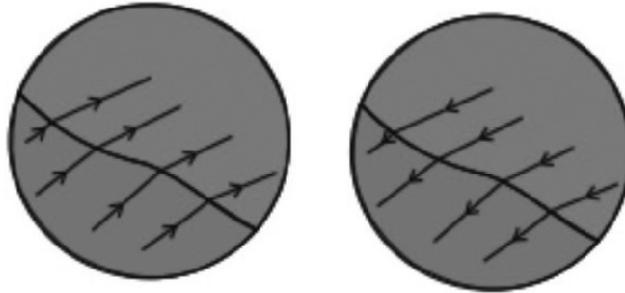


Figura 3.2: Exemplo de região de costura em  $\mathbb{R}^2$ .



Figura 3.3: Exemplo de região de escape em  $\mathbb{R}^2$ .



Figura 3.4: Exemplo de região de deslize em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 3.1.7.** *Definimos o fluxo de (3.1) junto a um ponto  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$  em um tempo  $t$  como sendo todos os pontos  $\gamma_p(t + \tau)$  com  $\gamma_p(\tau) = p$ , para algum  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma(t)$  satisfazendo (3.1).*

Desconsiderando o conjunto de descontinuidade, as órbitas de (3.1) são dadas pelas órbitas de  $X$  e  $Y$  em  $M^+$ ,  $M^-$ , respectivamente.

Agora vamos especificar como a dinâmica de um sistema descontínuo evolui “dentro” do seu conjunto de descontinuidade e isto depende de como a dinâmica dos campos  $X$  e  $Y$  se comportam

próximas à variedade ou hiperfície. Com isso, seja  $p \in M$ . Se  $p \in M_e$  então o fluxo do nosso sistema descontínuo cruza transversalmente a variedade e, neste caso, podemos, sem perda de generalidade, fixar a variedade  $M$  como pertencente a uma única região, por exemplo  $\overline{M^+}$ , e desta forma aplicamos o campo  $X$  em  $p$ . Caso  $p \in M_e$  ou  $p \in M_d$  o fluxo torna-se confinado a hiperfície após o contato com a mesma, ou seja, ele continua sua trajetória na hiperfície. Neste caso, existem dois métodos que podemos utilizar para descrever o comportamento do sistema “dentro” da hiperfície, o Método de Controle de Utkin e o Método Convexo de Filippov.

No Método de Controle de Utkin o sistema evolui segundo o campo de vetores deslizantes  $Z^d$ , que é a média aritmética dos dois campos  $X$  na região  $M^+$  e  $Y$  na região  $M^-$  somando um controle  $\beta(x) \in [-1, 1]$  na direção da diferença entre os campos de vetores, então:

$$Z^d = \frac{X + Y}{2} + \frac{Y - X}{2}\beta(x), \text{ onde } \beta(x) = -\frac{Xh + Yh}{Yh - Xh}. \quad (3.2)$$

Observemos que as soluções de (3.1) englobam todas as soluções da equação diferencial:

$$x' = Y + \lambda(X - Y), \lambda = \begin{cases} 1, & h(x) > 0 \\ 0, & h(x) < 0 \end{cases} \text{ e } \lambda \in (0, 1) \text{ se } h(x) = 0. \quad (3.3)$$

No Método Convexo de Filippov ou simplesmente Método de Filippov, toma-se uma combinação convexa simples dos dois campos de vetores, então:

$$Z^d = (1 - \alpha)X + \alpha Y, \text{ com } 0 < \alpha < 1 \text{ e } \alpha(x) = \frac{Xh}{\nabla h \cdot (X - Y)}. \quad (3.4)$$

Neste caso, (3.4) é chamada de campo de Filippov.

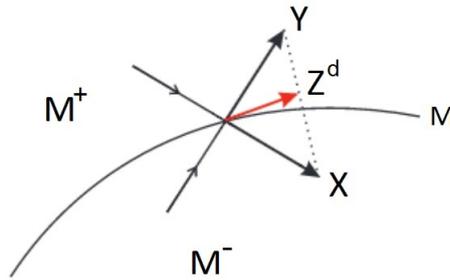


Figura 3.5: Campo de Filippov.

**Observação 3.1.3.** Os Métodos de Utkin e de Filippov descritos em (3.2) e (3.4) respectivamente, são algebricamente equivalentes quando consideramos  $\beta = 2\alpha - 1$ .

De fato,

$$2\alpha - 1 = \frac{2Xh}{\nabla h \cdot (X - Y)} - 1 = \frac{Xh + Yh}{-(Yh - Xh)} = -\frac{Xh + Yh}{Yh - Xh} = \beta;$$

$$Z^d = \frac{X + Y}{2} + \frac{Y - X}{2}\beta = \frac{X + Y}{2} + \frac{Y - X}{2}(2\alpha - 1) = X + \alpha(Y - X) = (1 - \alpha)X + \alpha Y.$$

**Observação 3.1.4.** Nos Métodos de Utkin e de Filippov descritos em (3.2) e (3.4) respectivamente, temos que o campo de vetores  $Z^d$  é ortogonal a  $\nabla h$  e com isso é tangente a hiperfície  $M$ .

De fato, para o Método de Filippov temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla h, Z^d \rangle &= \langle \nabla h, (1 - \alpha)X + \alpha Y \rangle = (1 - \alpha)\langle \nabla h, X \rangle + \alpha\langle \nabla h, Y \rangle = \\ &= \langle \nabla h, X \rangle - \alpha(\langle \nabla h, X \rangle - \langle \nabla h, Y \rangle) = \langle \nabla h, X \rangle - \alpha\langle \nabla h, X - Y \rangle = \\ &= \langle \nabla h, X \rangle - \frac{\langle \nabla h, X \rangle \langle \nabla h, X - Y \rangle}{\langle \nabla h, X - Y \rangle} = \\ &= \langle \nabla h, X \rangle - \langle \nabla h, X \rangle = 0, \text{ uma vez que } \alpha = \frac{\langle \nabla h, X \rangle}{\langle \nabla h, X - Y \rangle}. \end{aligned}$$

Como os dois métodos são algebricamente equivalentes o mesmo vale para o Método de Utkin.

No caso em que  $p \in M_d$ , seguindo a convenção de Filippov, a solução  $\gamma_p(t)$  de  $Z$  através de  $p$  segue para  $t \geq 0$  a órbita de um campo de vetores tangente a  $M = h^{-1}(0)$ . Este campo é chamado de campo de vetores deslizante associado a  $Z$  e ele será definido abaixo.

**Definição 3.1.8.** O campo de vetores deslizante associado a  $Z = (X, Y)$  é o campo de vetores suave  $Z^d$  tangente à  $M$  e definido em  $q \in M_d$  por  $Z^d(q) = m - q$ , no qual  $m$  é a interseção do segmento tangente à  $M$  em  $q$  e o segmento que liga  $q + X(q)$  e  $q + Y(q)$ . A expressão explícita de  $Z^d$  é dada por (3.4).

**Definição 3.1.9.** O campo de vetores de escape associado a  $Z = (X, Y)$  é definido por  $Z^e = -(-Z)^d$ , pois se  $q \in M_e$  para  $Z$  então  $q \in M_d$  para  $-Z$ .

**Definição 3.1.10.** Se  $p \in M_e \cup M_d$  e temos  $\langle \nabla h, X - Y \rangle = 0$  dizemos que  $p$  é um ponto de equilíbrio deslizante.

**Observação 3.1.5.** Usaremos a notação  $Z^M$  para os dois casos, ou seja, para o caso do campo de vetores deslizante e o caso do campo de vetores de escape. Chamamos de pontos de fronteira, os pontos onde ocorre mudanças de regiões na variedade  $M$ , por exemplo, mudança de região de deslize para região de costura e depois para região de deslize novamente.

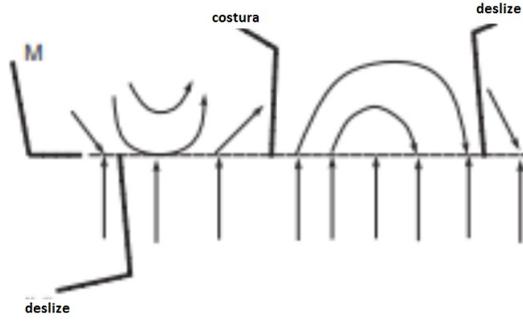


Figura 3.6: Mudança de regiões.

**Observação 3.1.6.** Consideremos  $p \in M_d \cup M_e$  de tal forma que  $X(p)$  e  $Y(p)$  sejam linearmente dependentes, logo  $Y(p) = aX(p)$ , para  $a \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 1$ . Pelo Método de Filippov temos:

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= \frac{Xh}{\nabla h \cdot (X - Y)} = \frac{Xh}{\nabla h \cdot X - \nabla h \cdot Y} = \frac{Xh}{\nabla h \cdot X - \nabla h \cdot aX} = \\ &= \frac{Xh}{\nabla h \cdot X(1 - a)} = \frac{Xh}{Xh(1 - a)} = \frac{1}{1 - a}. \end{aligned}$$

Então:

$$Z^M = (1 - \alpha)X + \alpha Y = \left(1 - \frac{1}{1 - a}\right)X + \left(\frac{1}{1 - a}\right)aX = \left(\frac{1 - a - 1 + a}{1 - a}\right)X = 0.$$

Quando  $a = 1$ ,  $p$  é um ponto de equilíbrio deslizando.

**Definição 3.1.11.** Seja  $p \in M_e \cup M_d$ . Quando os vetores  $X(p)$  e  $Y(p)$  são linearmente dependentes de tal forma que  $Y(p) \neq X(p)$ , teremos  $Z^M(p) = 0$  e dizemos, neste caso, que  $p$  é um ponto de equilíbrio simples de  $Z$ . As outras singularidades de  $Z$  estão concentradas fora do conjunto  $O$ .

**Exemplo 3.1.2.** Seja  $Z = (X, Y) \in \Omega(3)$  com  $h(x, y, z) = z$ ,  $X = (1, 0, x)$  e  $Y = (0, 1, y)$ .

Temos  $\nabla h(x, y, z) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$ ,  $Xh = x$  e  $Yh = y$ . Desta forma o sistema determina na superfície  $M = h^{-1}(0)$  em torno da origem quatro quadrantes delimitados por  $\tau_X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x = 0\}$  e  $\tau_Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; y = 0\}$ .

Os quadrantes são:

- (i)  $Q_c^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x > 0, y > 0, z = 0\}$  (região de costura, pois  $h(x, y, z) = 0$  e  $(Xh)(Yh) = xy > 0$ );

- (ii)  $Q_c^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x < 0, y < 0, z = 0\}$  (região de costura, pois  $h(x, y, z) = 0$  e  $(Xh)(Yh) = xy > 0$ );
- (iii)  $Q_d = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x < 0, y > 0, z = 0\}$  (região de deslize, pois  $h(x, y, z) = 0$  e  $Xh = x < 0$  e  $Yh = y > 0$ );
- (iv)  $Q_e = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x > 0, y < 0, z = 0\}$  (região de escape, pois  $h(x, y, z) = 0$  e  $Xh = x > 0$  e  $Yh = y < 0$ ).

Observemos que  $M_c = Q_c^+ \cup Q_c^-$ . Agora vamos definir o campo de vetores deslizante em  $Q_d$  usando o Método de Filippov.

$$\begin{aligned} Z^d(x, y, z) &= \left(1 - \frac{Xh}{\nabla h \cdot (X - Y)}\right) X + \left(\frac{Xh}{\nabla h \cdot (X - Y)}\right) Y = \\ &= \left(1 - \frac{x}{x - y}\right) (1, 0, x) + \left(\frac{x}{x - y}\right) (0, 1, y) = \\ &= \left(\frac{1}{x - y}\right) (-y, x, 0) = \left(\frac{1}{y - x}\right) (y, -x, 0). \end{aligned}$$

Agora vamos definir o campo de vetores deslizantes em  $Q_d$  usando o Método de Utkin.

$$\begin{aligned} Z^d(x, y, z) &= \frac{X + Y}{2} + \frac{Y - X}{2} \left(-\frac{Xh + Yh}{Yh - Xh}\right) = \\ &= \frac{1}{2}(1, 1, x + y) + \frac{1}{2}(-1, 1, y - x) \left(\frac{-x - y}{y - x}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2(y - x)}\right) (2y, -2x, 0) = \left(\frac{1}{y - x}\right) (y, -x, 0). \end{aligned}$$

Em nossa terminologia vale ressaltar que  $G(x, y, z) = (y, -x, 0)$  é um sistema equivalente ao sistema original em  $Q_d$ , mais ainda consideramos  $G$  uma extensão suave de  $Z^d$ , que é definida em toda vizinhança da origem.

**Observação 3.1.7.** Vale ressaltar que o fluxo através de um ponto  $p$  na região de deslize ou de escape não é único.

Definidas as órbitas de (3.1), vamos definir os pontos de equilíbrio de tal sistema. Naturalmente o sistema (3.1) herda os pontos de equilíbrio dos campos  $X$  e  $Y$ , porém existem outros pontos de equilíbrio e todos esses podem ser classificados de acordo com a região na qual se encontram.

**Definição 3.1.12.** Dado o sistema (3.1) com  $M = h^{-1}(0)$  uma hipersuperfície e  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ , dizemos que:

- (i)  $p$  é ponto de equilíbrio real se  $X(p) = 0$  com  $p \in M^+$  ou  $Y(p) = 0$  com  $p \in M^-$ ;
- (ii)  $p$  é ponto de equilíbrio virtual se  $X(p) = 0$  com  $p \in M^-$  ou  $Y(p) = 0$  com  $p \in M^+$ ;
- (iii)  $p$  é pseudo-equilíbrio real se  $p \in M_d$  com  $Z^d(p) = 0$  ou  $p \in M_e$  com  $Z^e(p) = 0$ ,  $Xh(p) \neq 0$ ,  $Yh(p) \neq 0$  e  $0 < \alpha(p) < 1$ , onde  $\alpha$  é o parâmetro que aparece na definição do campo deslizando de Filippov;
- (iv)  $p$  é pseudo-equilíbrio virtual se  $p \in M_d$  com  $Z^d(p) = 0$  ou  $p \in M_e$  com  $Z^e(p) = 0$ ,  $Xh(p) \neq 0$ ,  $Yh(p) \neq 0$  e  $\alpha(p) < 0$  ou  $\alpha(p) > 1$ , onde  $\alpha$  é o parâmetro que aparece na definição do campo deslizando de Filippov;
- (v)  $p$  é ponto de equilíbrio de fronteira se  $p \in M$  com  $X(p) = 0$  ou  $Y(p) = 0$ ;
- (vi)  $p$  é ponto de equilíbrio hiperbólico de  $X$  ( $Y$ ) se todos os autovalores da matriz Jacobiana de  $X$  em  $p$  (de  $Y$  em  $p$ ),  $JX(p)$  ( $JY(p)$ ) têm parte real não nula;
- (vii)  $p$  é ponto de equilíbrio não hiperbólico de  $X$  ( $Y$ ) quando algum autovalor da matriz Jacobiana de  $X$  em  $p$  (de  $Y$  em  $p$ ),  $JX(p)$  ( $JY(p)$ ) tiver parte real nula.

**Definição 3.1.13.** *Seja o sistema (3.1) com  $M = h^{-1}(0)$  uma hiperfície. Se  $p \in M$  e  $Xh(p) = 0$  ou  $Yh(p) = 0$  então dizemos que  $p$  é um ponto de tangência para o campo  $X$  ou  $Y$ , respectivamente. Tal ponto é dito ponto de tangência visível ou invisível de  $X$  se a órbita que começa em  $p$  permanece em  $M^+$  ou  $M^-$ , respectivamente. Tal ponto é dito ponto de tangência visível ou invisível de  $Y$  se a órbita que começa em  $p$  permanece em  $M^-$  ou  $M^+$  respectivamente Analiticamente:*

- (i)  $p$  é tangência visível de  $X$  se  $Xh(p) = 0$  e  $X^2h(p) > 0$ ;
- (ii)  $p$  é tangência invisível de  $X$  se  $Xh(p) = 0$  e  $X^2h(p) < 0$ ;
- (iii)  $p$  é tangência visível de  $Y$  se  $Yh(p) = 0$  e  $Y^2h(p) < 0$ ;
- (iv)  $p$  é tangência invisível de  $Y$  se  $Yh(p) = 0$  e  $Y^2h(p) > 0$ .

**Definição 3.1.14.** *Dadas as condições na Definição 3.1.13 existem classificações para o contato da órbita do campo  $X$  ou  $Y$  no ponto de tangência  $p \in M$ :*

- (i) Contato quadrático em  $X$  se  $Xh(p) = 0$  e  $X^2h(p) \neq 0$ ;

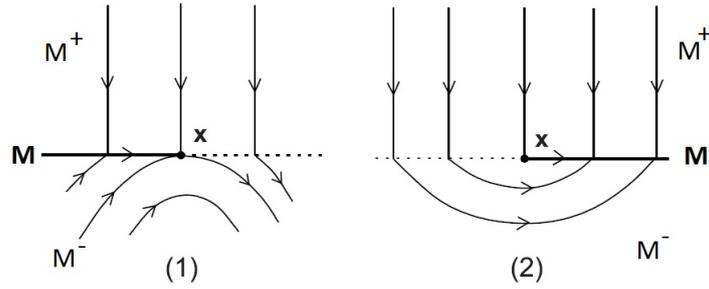


Figura 3.7: (1) Ponto de tangência visível de  $Y$ ; (2) ponto de tangência invisível de  $Y$ .

(ii) *Contato quadrático em  $Y$  se  $Yh(p) = 0$  e  $Y^2h(p) \neq 0$ .*

**Observação 3.1.8.** Os pontos de fronteira mencionados na Observação 3.1.5 são essencialmente pontos de tangência ou equilíbrio de fronteira, visto que são dados pelos pontos  $p \in M$  tais que  $Xh(p)Yh(p) = 0$ , afinal para acontecer mudança de regiões em  $M$  devemos ter mudança de sinal da função  $Xh$  ou  $Yh$  e isso acontece quando uma delas é zero.

**Observação 3.1.9.** Observemos que  $p \in M$  é um ponto de equilíbrio deslizante quando:

- (i) ou é ponto de tangência para ambos os campos  $X$  e  $Y$ ;
- (ii) ou é ponto de tangência para um dos campos e equilíbrio para o outro;
- (iii) ou é ponto de equilíbrio de ambos os campos;
- (iv) ou quando  $X(p) - Y(p)$  é ortogonal ao gradiente de  $h$ .

**Proposição 3.1.1.** *Um ponto  $p \in M$  é pseudo-equilíbrio real de (3.1) se, e somente se, os campos  $X$  e  $Y$  são transversais a  $M$ , isto é, não são tangentes a  $M$  e são não-colineares em  $p$  (os vetores tem mesma direção mas sentido contrário), isto é,  $Xh(p) \neq 0, Yh(p) \neq 0$  e existe  $1 > \alpha > 0$  real tal que  $(1 - \alpha)X(p) + \alpha Y(p) = 0$ .*

*Demonstração.*

Suponhamos  $p \in M_d$  um pseudo-equilíbrio real de (3.1), então  $Xh(p) \neq 0, Yh(p) \neq 0$  e  $(1 - \alpha)X(p) + \alpha Y(p) = Z^d(p) = 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Logo  $(1 - \alpha) > 0$ .

Desta forma  $(1 - \alpha)X(p) + \alpha Y(p) = 0$  donde segue  $X(p) = -\frac{\alpha}{(1 - \alpha)}Y(p)$ .

Assim, temos os vetores  $X(p)$  e  $Y(p)$  com mesma direção e com sentidos opostos, pois como vimos  $(1 - \alpha), \alpha > 0$  e com isso  $-\frac{\alpha}{(1 - \alpha)} < 0$ .

Logo os vetores  $X(p)$  e  $Y(p)$  são não-colineares em  $p$  e são transversais a  $M$ , pois  $Xh(p) \neq 0$  e  $Yh(p) \neq 0$ .

Suponhamos agora que os campos  $X$  e  $Y$  são não-colineares e transversais a  $M$  em  $p \in M$  então  $Xh(p) \neq 0, Yh(p) \neq 0$  e pela condição de não colinearidade dos campos  $X$  e  $Y$  em  $p$  obtemos:

$$\begin{aligned} X(p) = -\frac{\alpha}{1-\alpha}Y(p) &\Rightarrow \langle \nabla h(p), X(p) \rangle = \left\langle \nabla h(p), -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)Y(p) \right\rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle \nabla h(p), X(p) \rangle = -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \langle \nabla h(p), Y(p) \rangle \Rightarrow Xh(p) = -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)Yh(p). \end{aligned}$$

$$\text{Assim } Z^d(p) = (1-\alpha)X(p) + \alpha Y(p) = (1-\alpha)\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)Y(p) + \alpha Y(p) = 0.$$

Temos  $Xh(p)Yh(p) = \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(Yh(p))^2 < 0$ , afinal  $(1-\alpha), \alpha > 0$  e com isso  $-\frac{\alpha}{1-\alpha} < 0$  e também  $Yh(p) \neq 0$ .

Logo  $Xh(p)$  e  $Yh(p)$  possuem sinais oposto, então  $p \in M_d$  e como  $Z^d(p) = 0$  e  $0 < \alpha < 1$  temos  $p$  um pseudo-equilíbrio real. □

**Observação 3.1.10.** Observemos que dois vetores  $u$  e  $v$  são colineares se tiverem a mesma direção e sentido, ou analiticamente  $u$  e  $v$  são colineares se existe  $\lambda > 0$  real, tal que  $u = \lambda v$ .

Para os pontos  $x \in \mathbb{R}^n$  próximos da variedade  $M$  temos que se a órbita  $x(t)$  partindo de tal ponto não permanece na região em que está, então ela obrigatoriamente atinge  $M$  em um tempo  $t_1 \in \mathbb{R}^+$ . Dependendo da região que esta órbita atinge  $M$  temos as seguintes possibilidades:

- (1) se  $x(t_1) \in M_c$  então  $x(t)$  cruzará  $M$  em  $x(t_1)$ , veja a Figura (3.8) (a);
- (2) se  $x(t_1) \in M_d$  então usamos o campo deslizante para determinar o comportamento dessa órbita e com isso:
  - (2(i)) se  $x(t_1)$  é um pseudo-equilíbrio então  $x(t) = x(t_1)$  para  $t \geq t_1$ , veja a Figura (3.8) (b);
  - (2(ii)) se  $x(t_1)$  é um ponto regular de  $Z^d$ , isto é,  $Z^d(x(t_1)) \neq 0$  temos que  $x(t)$ , para  $t > t_1$ , permanece em  $M_d$  infinitamente quando tende para pseudo-equilíbrio, ou pode terminar na fronteira de  $M_d$ . De outra maneira, se  $x(t)$ ,  $t > t_1$ , tende para um equilíbrio de fronteira  $x(t_2)$ ,  $t_2 \in \mathbb{R}^+$  e  $t_2 > t_1$ , temos que  $x(t) = x(t_2)$  para  $t \geq t_2$ , veja a Figura (3.8) (c);
  - (2(iii)) se  $x(t)$  termina em um ponto de tangência segue que  $x(t)$  sai de  $M$  em  $x(t_2)$ , no qual  $t_1$  é o tempo em que a órbita  $x(t)$  atinge a fronteira da região de deslize, com  $x(t) \in M^+$  ou  $x(t) \in M^-$  para  $t > t_1$ , veja Figura (3.8) (d).

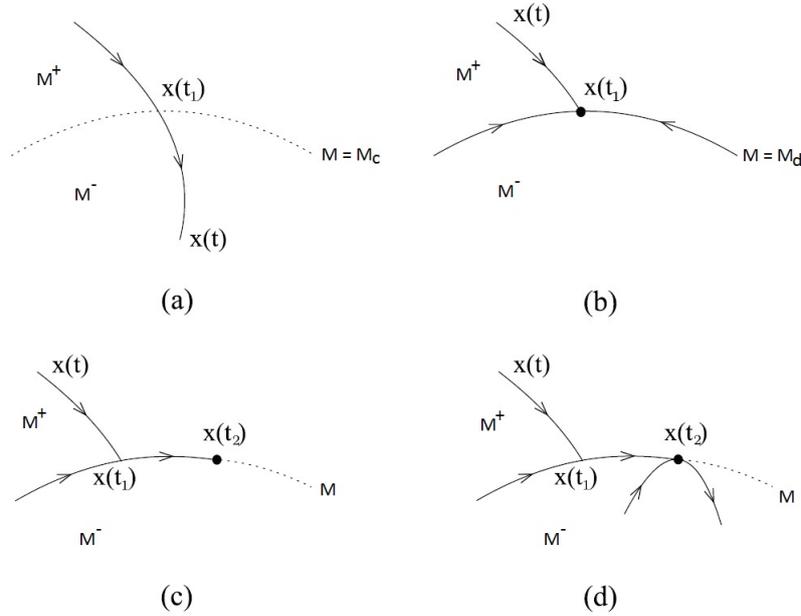


Figura 3.8: Órbitas próximas a variedade  $M$ . (a)  $x(t_1) \in M_c$ ; (b)  $x(t_1)$  é pseudo-equilíbrio; (c)  $x(t_2)$  é equilíbrio de fronteira e (d)  $x(t_2)$  é ponto de tangência.

Logo, analogamente como ocorre em sistemas dinâmicos suaves, o retrato de fase de (3.1) é formado pela união de todas as suas órbitas.

## 3.2 Sistemas descontínuos com variedade de descontinuidade não-regular

Faremos agora, uma observação para os casos, no  $\mathbb{R}^2$ , em que temos variedades não-regulares.

**Observação 3.2.1.** Até aqui assumimos 0 como sendo um valor regular da função suave  $h$  e assim temos  $M = h^{-1}(0)$  uma variedade regular. Nos exemplos considerados a partir de agora, no  $\mathbb{R}^2$ , teremos a origem tal que  $\nabla h(0,0) = 0$ . Nestes casos, assumimos:

( $H_1$ ): o conjunto de pontos não regulares em  $M = h^{-1}(0)$  é limitado. Em outras palavras, para

$$N = \{(x, y) \in M : \nabla h(x, y) = (0, 0)\},$$

podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que  $N \subset \overline{B_\delta(0,0)}$  e  $B_\delta(0,0) \subset \mathbb{R}^2$  é uma bola aberta com raio  $\delta$  e centro  $(0,0)$ .

Consideramos uma mudança de variável conveniente nos exemplos tal que o conjunto de descontinuidade nas novas variáveis é uma variedade regular. Para isto definimos a função

$$\Psi_\delta : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \Psi_\delta(\theta, r) = (r + \delta)(\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad (3.5)$$

onde  $\delta > 0$  é escolhido como em  $(H_1)$ . Esta função é um difeomorfismo sobre sua imagem, mais ainda  $\overline{B_\delta(0,0)} \cap \Psi_\delta(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+) = \emptyset$ .

Consideramos  $D \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto, onde nosso sistema esteja definido. Seja  $\hat{\rho} > 0$  um número real tal que  $\Psi_\delta(\mathbb{S}^1 \times (0, \hat{\rho})) \subset D$  e denotamos  $\hat{D} = \mathbb{S}^1 \times (0, \hat{\rho})$ .

Para simplificar, dada uma função  $H : \Psi_\delta(\hat{D}) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\delta > 0$  denotamos  $\delta^*H(\theta, r) = H \circ \Psi_\delta(\theta, r)$ .

**Exemplo 3.2.1.** Para ilustrar a Hipótese  $(H_1)$  e a mudança de variáveis dada na Observação 3.2.1, vamos considerar a função  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$ . O conjunto  $M = h^{-1}(0)$  é representado pela união das retas  $x = 1$ ,  $x = -1$ ,  $y = 1$  e  $y = -1$ .

Observe que  $M$  não é uma variedade regular, pois possui auto interseção nos pontos dados em  $N = \{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$ , isto é,  $\nabla h(1, 1) = \nabla h(-1, 1) = \nabla h(1, -1) = \nabla h(-1, -1) = 0$  e temos  $N$  limitado. Escolhendo  $\delta = \sqrt{2}$  temos  $N \subset \overline{B_\delta(0,0)}$  e prosseguindo com a mudança de variáveis dada na Observação 3.2.1 em (3.5) temos

$$\delta^*h(\theta, r) = h \circ \Psi_\delta(\theta, r) = h((r + \delta)\cos(\theta), (r + \delta)\sin(\theta)) = ((r + \delta)^2 \cos^2(\theta) - 1)((r + \delta)^2 \sin^2(\theta) - 1).$$

Assim, o conjunto  $\hat{M} = (\delta^*h)^{-1}(0)$  é uma variedade regular em  $\hat{D}$ . Este procedimento de encontrar uma mudança de variáveis conveniente para remover regiões indesejáveis pode ser reproduzido para outros sistemas, mesmo em dimensões maiores.

**Exemplo 3.2.2.** As constantes no seguinte modelo podem ser escolhidas de tal forma que se encaixem no conjunto dos sistemas tratados nesta seção. Consideramos a seguinte equação de segunda ordem:

$$x'' + ax' + bx = \varepsilon\alpha x, \quad (3.6)$$

com  $a, b$  constantes arbitrárias,  $\varepsilon$  um parâmetro real positivo e  $\alpha \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $|\alpha| \leq 1$ .

Seja  $Z_\alpha$  o campo de vetores representado por:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay + \varepsilon\alpha x \end{cases}, \quad (3.7)$$

donde  $Z_\alpha$  é a redução de ordem da equação (3.6).

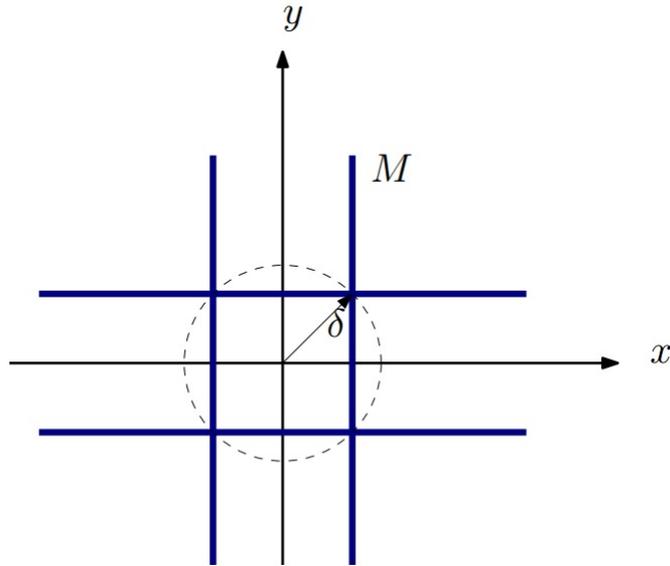


Figura 3.9: Variedade não regular  $M = h^{-1}(0) \subset D$ .

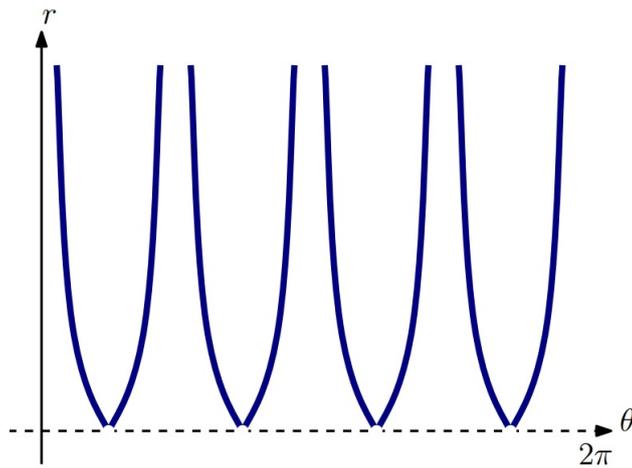


Figura 3.10: Variedade regular  $\widehat{M} = (\delta^*h)^{-1}(0) \subset \widehat{D}$ .

Note o fato de que quando temos  $\varepsilon = 0$  e  $a^2 - 4b < 0$  então o sistema  $Z_\alpha$  é um campo de vetores linear com autovalores complexos, e se  $a < 0$  a solução zero é assintoticamente estável .

De fato, se  $\varepsilon = 0$  e  $a^2 - 4b < 0$  então:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Claramente temos um campo de vetores linear, cujos autovalores são:

$$\det \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \det \left( \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a - \lambda \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(-a - \lambda) + b = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

ou seja, para  $a^2 - 4b < 0$ ,  $\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{(-a^2 + 4b)} i}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{(-a^2 + 4b)} i}{2}$ .

Se  $a \neq 0$  a origem é um foco girando no sentido anti-horário, afinal  $(-a^2 + 4b)^{\frac{1}{2}} > 0$ . Se  $a > 0$  então o foco, sendo atrator, é assintoticamente estável e se  $a < 0$  então o foco é repulsor.

Se  $a = 0$  a origem é um centro girando no sentido anti-horário, afinal  $(-a^2 + 4b)^{\frac{1}{2}} > 0$ .

Vamos encontrar  $\alpha$  tal que a origem seja solução de (3.6) assintoticamente estável. Consideramos  $v = v(x, y)$  uma função real suave nas variáveis  $x$  e  $y$ . Tal função pode ser, por exemplo, o potencial de um campo de vetores no plano  $(x, y)$ . Pela definição de estabilidade segundo Liapounov para  $(0, 0)$  ser assintoticamente estável, deve existir uma vizinhança  $W$  tal que o potencial  $v(x, y) > 0$  para  $(x, y) \in W \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $v(0, 0) = 0$  e a derivada de  $v$  é estritamente negativa ao longo das órbitas de  $Z_\alpha$  em  $W \setminus \{(0, 0)\}$ .

Escolhemos o valor de  $\alpha$  que nos fornece a maior taxa de decrescimento da função  $v$  ao longo das órbitas do sistema  $Z_\alpha$ , ou seja, queremos encontrar  $\alpha$  que minimiza a derivada de  $v$  ao longo das órbitas de  $Z_\alpha$ .

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(t) = (x(t), y(t))$ , onde  $(x(t), y(t))$  é a solução de  $Z_\alpha$  em  $t$ .

Desta forma queremos encontrar  $\alpha$  que minimiza a derivada de  $v \circ f$ . Logo, derivando  $v \circ f$  em relação à variável  $t$ :

$$(v \circ f)'(t) = v'(f(t))f'(t) = \begin{pmatrix} v_x(x(t), y(t)) & v_y(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_x(x(t), y(t)) & v_y(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ -bx(t) - ay(t) + \varepsilon\alpha x(t) \end{pmatrix} =$$

$$= v_x(x, y)y - v_y(x, y)(bx + ay) + v_y(x, y)\varepsilon\alpha x,$$

ou seja,

$$\dot{v}|_{(x(t), y(t))} = (v \circ f)'(t) = yv_x - (bx + ay)v_y + \varepsilon\alpha xv_y.$$

Uma vez que buscamos  $\alpha$  que minimiza  $\dot{v}|_{(x(t), y(t))}$ , observamos os fatos de apenas o último termo depender de  $\alpha$ , de  $\varepsilon$  ser uma constante positiva e de ter  $|\alpha| \leq 1$ . Desta forma, o menor valor de

$\dot{v}|_{(x(t),y(t))}$  será alcançado quando subtrairmos do termo  $yv_x - (bx + ay)v_y$  o maior valor possível.

Neste caso, basta tomar  $\alpha = \text{sgn}\{-x \cdot v_y\}$ .

Escolhendo  $v = v(x, y) = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2}$ , obtemos  $\alpha = \text{sgn}\{-x \cdot v_y\} = \text{sgn}\{-x(x + y)\}$ . Logo, o sistema (3.7) torna-se um sistema suave por partes  $Z = (X, Y)$  com:

$$X(x, y) = \begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay + \varepsilon x \end{cases}, \text{ se } -x(x + y) > 0, \text{ ou, } x(x + y) < 0, \quad (3.8)$$

e

$$Y(x, y) = \begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay - \varepsilon x \end{cases}, \text{ se } -x(x + y) < 0, \text{ ou, } x(x + y) > 0. \quad (3.9)$$

As retas  $x = 0$  e  $s = x + y = 0$  dividem o plano de fase em quatro zonas:

- (i)  $G_1$  com  $x > 0$  e  $s = x + y > 0$ ;
- (ii)  $G_2$  com  $x < 0$  e  $s = x + y > 0$ ;
- (iii)  $G_3$  com  $x < 0$  e  $s = x + y < 0$ ;
- (iv)  $G_4$  com  $x > 0$  e  $s = x + y < 0$ .

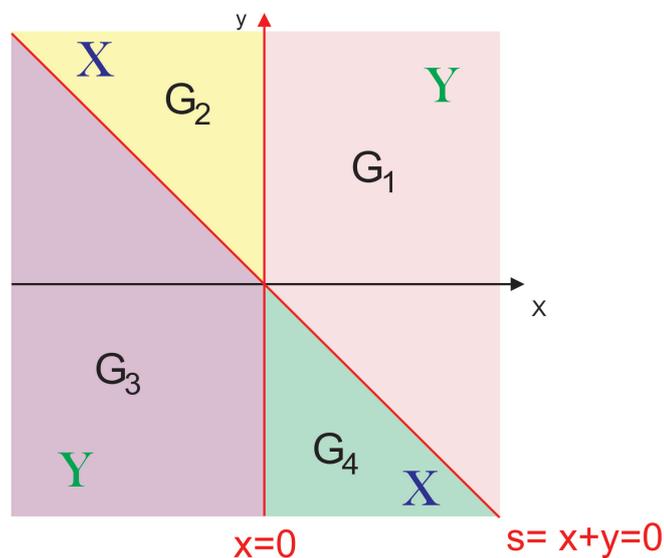


Figura 3.11: Regiões.

Observando a Figura 3.11, podemos ver onde estão situadas cada uma das quatro regiões e qual campo deve ser considerado em cada uma delas.

Mais ainda, as retas  $x = 0$  e  $s = x + y = 0$  são os conjuntos de descontinuidade do nosso sistema. Porém  $M = h^{-1}(0)$ , onde  $h(x, y) = x(x + y)$  não é uma variedade regular, afinal  $\nabla h(0, 0) = (0, 0)$ . Como  $M$  só possui um ponto não regular, segue que o conjunto dos pontos não regulares de  $M$  é limitado. Escolhendo  $\delta > 0$  suficientemente pequeno temos  $\{(0, 0)\} \subset \overline{B_\delta(0, 0)}$  e prosseguindo com a mudança de variáveis dada na Observação 3.2.1 em (3.5) temos

$$\delta^*h(\theta, r) = h \circ \Psi_\delta(\theta, r) = h((r + \delta)\cos(\theta), (r + \delta)\sen(\theta)) = (r + \delta)^2\cos(\theta)(\cos(\theta) + \sen(\theta)).$$

Portanto, o conjunto  $\widehat{M} = (\delta^*h)^{-1}(0)$  é uma variedade regular em  $\widehat{D}$ . Em coordenadas cartesianas a função  $\delta^*h(\theta, r)$  corresponde à função  $h(x, y) = x^2 + xy$ , com  $x^2 + y^2 > \delta^2$ . Agora vamos determinar quais os tipos das regiões existentes nas retas  $x = 0$  e  $y = -x$ , com  $x^2 + y^2 > \delta^2$  e  $\delta > 0$  suficientemente pequeno. Tendo  $\nabla h(x, y) = (2x + y, x)$  segue

$$\begin{aligned} Xh(x, y) &= X(x, y) \cdot \nabla h(x, y) = (y, -bx - ay + \varepsilon x) \cdot (2x + y, x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Xh(x, y) = 2xy + y^2 - bx^2 - axy + \varepsilon x^2; \\ Yh(x, y) &= Y(x, y) \cdot \nabla h(x, y) = (y, -bx - ay - \varepsilon x) \cdot (2x + y, x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Yh(x, y) = 2xy + y^2 - bx^2 - axy - \varepsilon x^2. \end{aligned}$$

(I) Para a reta  $x = 0$  com  $y^2 > \delta^2$ , isto é,  $|y| > \delta$ , temos

$Xh(x, y) = y^2 = Yh(x, y)$  então  $Xh(x, y)Yh(x, y) = y^4 > 0$ , pois  $|y| > \delta > 0$ . Com isso temos apenas região de costura na reta  $x = 0$ , com  $|y| > \delta$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$  teremos região de costura na reta  $x = 0$ , para  $y \neq 0$ .

(II) Sobre a reta  $y = -x$ , com  $x^2 > \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)^2$ , isto é,  $|x| > \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ , temos

$$\begin{aligned} Xh(x, y) &= -2x^2 + x^2 - bx^2 + ax^2 + \varepsilon x^2 = (-1 - b + a + \varepsilon)x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Xh(x, y) = -(1 + b - a - \varepsilon)x^2; \\ Yh(x, y) &= -2x^2 + x^2 - bx^2 + ax^2 - \varepsilon x^2 = (-1 - b + a - \varepsilon)x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Yh(x, y) = -(1 + b - a + \varepsilon)x^2. \end{aligned}$$

Como estamos considerando  $a^2 - 4b < 0$ , logo  $\left(\frac{a}{2}\right)^2 < b$  e assim podemos concluir que  $1 + b - a > 1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a = \left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 \geq 0$ . Portanto,  $1 + b - a > 0$  e teremos:

- região de costura:

$$\begin{aligned} Xh(x, y)Yh(x, y) &> 0 \Leftrightarrow (1 + b - a - \varepsilon)(1 + b - a + \varepsilon)x^4 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((1 + b - a)^2 - \varepsilon^2)x^4 > 0 \Leftrightarrow (1 + b - a)^2 - \varepsilon^2 > 0 \Leftrightarrow (1 + b - a)^2 > \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Como  $1 + b - a > 0$  teremos região de costura na reta  $y = -x$  com  $|x| > \frac{\delta}{\sqrt{2}}$  se, e somente se,  $1 + b - a > \varepsilon$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$  teremos região de costura na reta  $y = -x$  com  $x \neq 0$  se, e somente se,  $1 + b - a > \varepsilon$ .

- região de deslize:

$$\begin{aligned} Xh(x, y) < 0 \text{ e } Yh(x, y) > 0 &\Leftrightarrow -(1 + b - a - \varepsilon)x^2 < 0 \text{ e } -(1 + b - a + \varepsilon)x^2 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + b - a - \varepsilon > 0 \text{ e } 1 + b - a + \varepsilon < 0 \Leftrightarrow 1 + b - a > \varepsilon \text{ e } 1 + b - a < -\varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $1 + b - a > 0$ ,  $1 + b - a > \varepsilon$  e  $1 + b - a < -\varepsilon$  segue que não teremos região de deslize na reta  $y = -x$ , com  $|x| > \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$  não teremos região de deslize na reta  $y = -x$  com  $x \neq 0$ .

- região de escape:

$$\begin{aligned} Xh(x, y) > 0 \text{ e } Yh(x, y) < 0 &\Leftrightarrow -(1 + b - a - \varepsilon)x^2 > 0 \text{ e } -(1 + b - a + \varepsilon)x^2 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + b - a - \varepsilon < 0 \text{ e } 1 + b - a + \varepsilon > 0 \Leftrightarrow 1 + b - a < \varepsilon \text{ e } 1 + b - a > -\varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $1 + b - a > 0$ ,  $1 + b - a < \varepsilon$  e  $1 + b - a > -\varepsilon$  teremos região de escape na reta  $y = -x$ , com  $|x| > \frac{\delta}{\sqrt{2}}$  se, e somente se,  $0 < 1 + b - a < \varepsilon$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$  teremos região de escape na reta  $y = -x$  com  $x \neq 0$  se, e somente se,  $0 < 1 + b - a < \varepsilon$ .

É sempre possível escolher  $\varepsilon$  suficientemente pequeno de tal maneira que teremos sempre  $1 + b - a > \varepsilon$ , com  $0 < \varepsilon < \frac{4b - a^2}{4}$  nos fornecendo apenas região de costura sobre a reta  $s = x + y = 0$ , para  $x \neq 0$ .

Vamos agora investigar o sistema (3.7) em cada uma das regiões  $G_i, i = 1, 2, 3, 4$ .

Nas regiões  $G_1$  e  $G_3$  temos  $\alpha = -1$ , assim nestas regiões devemos considerar o sistema (3.9). Consequentemente, estamos considerando a equação  $x'' + ax' + (b + \varepsilon)x = 0$ , a qual possui  $\lambda^2 + a\lambda + (b + \varepsilon) = 0$  como equação característica. Resolvendo a equação temos  $\Delta_\lambda = a^2 - 4b - 4\varepsilon < 0 - 4\varepsilon < 0$ , nos dando raízes complexas e se,  $a \neq 0$  a origem é um ponto de equilíbrio do tipo foco. Se  $a > 0$  teremos a origem um foco atrator, logo neste caso a origem seria um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Se  $a < 0$  teremos a origem um foco repulsor, logo neste caso a origem não seria um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Nas regiões  $G_2$  e  $G_4$  temos  $\alpha = 1$ , assim nestas regiões devemos considerar o sistema (3.8). Consequentemente estamos considerando a equação  $x'' + ax' + (b - \varepsilon)x = 0$ , a qual possui  $\mu^2 + a\mu + (b - \varepsilon) = 0$  como equação característica. Resolvendo a equação temos  $\Delta_\mu = a^2 - 4b + 4\varepsilon <$

$a^2 - 4b + 4b - a^2 = 0$ , nos dando raízes complexas e, se  $a \neq 0$  a origem é um ponto de equilíbrio do tipo foco. Se  $a > 0$  teremos a origem um foco atrator, logo neste caso a origem seria um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Se  $a < 0$  teremos a origem um foco repulsor, logo neste caso a origem não seria um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Os pontos das retas  $x = 0$  e  $s = x + y = 0$  tirando a origem são todos de costura, considerando  $a > 0$  e a parte imaginária dos autovalores também positivas então o retrato de fase do sistema (3.7) pode ser visto na Figura 3.11.

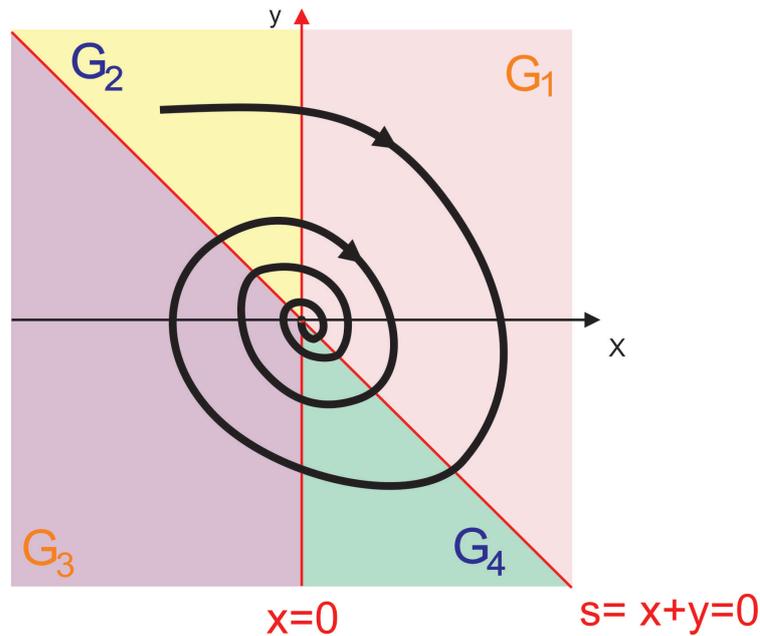


Figura 3.12: Retrato de fase do sistema (3.7) quando  $1 + b - a > \varepsilon$ .

Vale ressaltar que no caso em que tomamos  $\varepsilon$  suficientemente grande tal que  $0 < 1 + b - a < \varepsilon$  não teremos estabilidade assintótica da solução zero.

### 3.3 Campos de vetores próximos à fronteira

Nesta seção discutiremos o comportamento dos campos de vetores suaves em  $\mathbb{R}^{n+1}$  relacionados a uma variedade de codimensão um (digamos  $M = h^{-1}(0)$  na qual foi definida mais acima). A principal vantagem dessa configuração é que o contato genérico entre um campo de vetores suave e  $M$  muitas vezes pode ser facilmente reconhecida. Como uma aplicação, as singularidades típicas de um sistema descontínuo podem ser classificadas de uma forma bem simples.

**Definição 3.3.1.** Dizemos que  $X, Y \in \chi(n+1)$  são  $M$ -equivalentes se existe um homeomorfismo  $\psi : \mathbb{R}^{n+1}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, 0$  que preserva  $M$  e leva órbitas de  $X$  em órbitas de  $Y$ . Desta forma temos o conceito de estabilidade  $M$ -estrutural em  $\chi(n+1)$ .

**Definição 3.3.2.** Seja  $X \in \chi(n+1)$  e  $M = h^{-1}(0)$  uma variedade, onde  $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $0$  é um valor regular de  $h$ . Dizemos que um ponto  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$  é um ponto de equilíbrio do tipo dobra se  $Xh(p) = 0$  e  $X^2h(p) \neq 0$ .

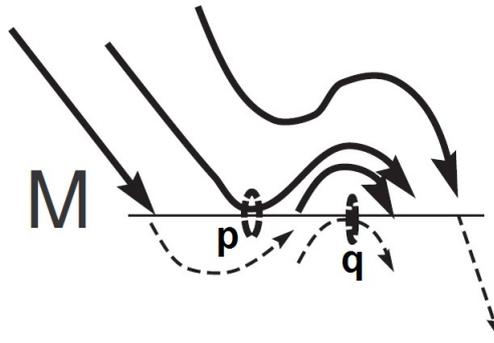


Figura 3.13: Exemplos de pontos de equilíbrio do tipo dobra visível em  $p$  e invisível em  $q$ .

**Definição 3.3.3.** Sejam  $X, Y \in \chi(n+1)$  e  $M = h^{-1}(0)$  uma variedade, onde  $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $0$  é um valor regular de  $h$ . Dizemos que um ponto  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$  é um ponto de equilíbrio do tipo dobra dobra se ele é do tipo dobra para ambos os campos simultaneamente.

**Definição 3.3.4.** Seja  $X \in \chi(n+1)$  e  $M = h^{-1}(0)$  uma variedade, onde  $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $0$  é um valor regular de  $h$ . Dizemos que um ponto  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$  é um ponto de equilíbrio do tipo cúspide se  $Xh(p) = X^2h(p) = 0$  e  $Xh^3(p) \neq 0$  e  $\{Dh(p), DXh(p), DX^2h(p)\}$  é linearmente independente. Neste caso, dizemos que temos contato cúbico em  $p$ .

Definimos  $\Gamma_0$  como sendo o conjunto de elementos  $X \in \chi(n+1)$  satisfazendo uma das seguintes condições:

- (0)  $Xh(0) \neq 0$ . Neste caso,  $X$  é transversal a  $M$  em  $0$  e  $0$  é um ponto regular de  $X$ , pois se  $X(0) = 0$ , então teríamos  $Xh(0) = 0$  e isso seria um absurdo;
- (1)  $Xh(0) = 0$  e  $X^2h(0) \neq 0$ . Neste caso,  $0$  é um ponto de tangência com contato quadrático em  $X$  e  $0$  é dito ponto dobra de  $X$ ;

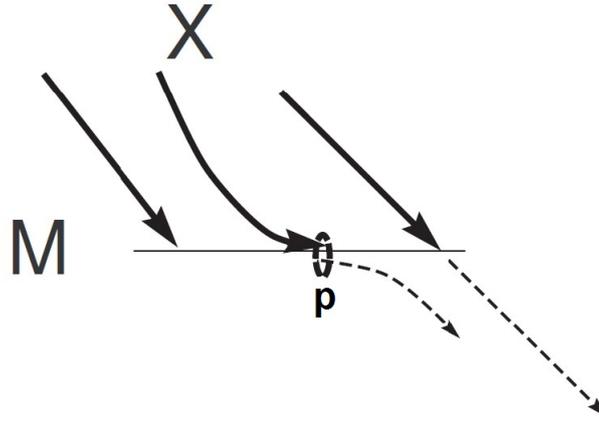


Figura 3.14: Exemplo de um ponto de equilíbrio do tipo cúspide.

(2)  $Xh(0) = X^2h(0) = 0$ ,  $X^3h(0) \neq 0$  e o conjunto  $\{Dh(0), DXh(0), DX^2h(0)\}$  é linearmente independente. Neste caso,  $0$  é um ponto de cúspide de  $X$ , com contato cúbico em  $0$  ;

⋮

(n)  $Xh(0) = X^2h(0) = \dots = X^n h(0) = 0$ ,  $X^{n+1}h(0) \neq 0$  e o conjunto  $\{Dh(0), DXh(0), \dots, DX^n h(0)\}$  é linearmente independente e  $0$  é um ponto regular da aplicação  $Xh|_M$ .

**Definição 3.3.5.** Dizemos que  $0$  é uma  $M$ -singularidade de  $X \in \chi(n+1)$  se  $h(0) = Xh(0) = 0$ . Uma  $M$ -singularidade é dita de codimensão zero se  $X \in \Gamma_0$ .

Definimos  $\tau_X \subset M$  como sendo o conjunto  $M$ -singular de  $X \in \chi(n+1)$ , que é o conjunto formado pelos pontos  $M$ -singulares de  $X \in \chi(n+1)$  e tal conjunto é representado pela equação  $h = Xh = 0$ , isto é,  $\tau_X = \{p \in M ; Xh(p) = 0\}$ . Se  $p \in M$  e  $Xh(p) \neq 0$  então  $p$  é dito um ponto  $M$ -regular de  $X \in \chi(n+1)$ .

**Proposição 3.3.1.** Seja  $X \in \chi(n+1)$ . Se  $X(0) = 0$  então  $X$  não pertence a  $\Gamma_0(n+1)$ .

*Demonstração.*

Por hipótese  $X(0) = 0$ . Suponhamos que  $X \in \Gamma_0(n+1)$ , logo existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $X^{n+1}h(0) \neq 0$ . Por outro lado  $X^{n+1}h(0) = \langle X(0), \nabla X^n h(0) \rangle = \langle 0, \nabla X^n h(0) \rangle = 0$ , e assim temos um absurdo. Desta forma,  $X$  não pertence a  $\Gamma_0(n+1)$ .

□

**Observação 3.3.1.** Vishik em [24] exibiu todas as formas normais, isto é, todas as possibilidades de  $M$ -singularidades de codimensão zero e elas são dadas, a menos de equivalência, pelos seguintes sistemas:

- (i) Campo de vetores constante  $X(x) = (1, \dots, 0)$  e  $h_k(x) = x_1^{k+1} + x_2x_1^{k-1} + x_3x_1^{k-2} + \dots + x_{k+1}$ , no qual  $k = 0, \dots, n$ .
- (ii) Campo de vetores com fronteira constante  $h(x) = x_1$  e  $X(x) = (x_2, x_3, \dots, x_k, 1, 0, \dots, 0)$ .

# Capítulo 4

## Regularização

Uma aproximação do campo de vetores descontínuo (3.1), por uma família a um parâmetro de campos de vetores contínuos é chamada uma **regularização** de (3.1).

O processo consiste em considerarmos para cada  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno, um campo de vetores suave  $Z_\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , tal que:

- (i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon = Z$ , para todo  $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$ ;
- (ii)  $Z_{\varepsilon_0}$  é igual a  $X$  em todos os pontos de  $M^+$  cuja distância até  $M$  é maior que  $\varepsilon_0$ ;
- (iii)  $Z_{\varepsilon_0}$  é igual a  $Y$  em todos os pontos de  $M^-$  cuja distância até  $M$  é maior que  $\varepsilon_0$ .

**Definição 4.0.6.** *Uma função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  é uma função de transição se  $\varphi(x) = -1$  para  $x \leq -1$ ,  $\varphi(x) = 1$  para  $x \geq 1$  e  $\varphi'(x) > 0$  para  $x \in (-1, 1)$ .*

A função de transição é usada para uma média dos campos  $X$  e  $Y$  e assim obter uma família de campos de vetores contínuos que aproximam o campo descontínuo.

**Definição 4.0.7.** *Consideremos uma função de transição  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . A  $\varphi$ -regularização de um sistema (3.1) com  $M = h^{-1}(0)$ , é a família a um parâmetro  $Z_\varepsilon$  de campos de vetores contínuos  $C^r$  dada por*

$$Z_\varepsilon(q) = \left( \frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(h(q))}{2} \right) X(q) + \left( \frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(h(q))}{2} \right) Y(q), \text{ com } \varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ para } \varepsilon > 0. \quad (4.1)$$

**Definição 4.0.8.** *Dada uma  $\varphi$ -regularização de um sistema (3.1) definimos a zona de regularização como sendo a zona em torno da região de descontinuidade  $M$ , dada por  $\varphi_\varepsilon^{-1}(-1, 1)$ .*

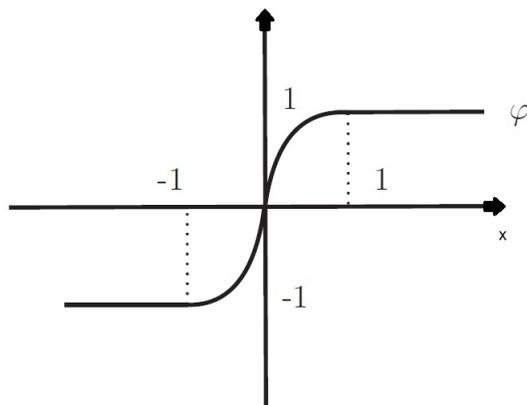


Figura 4.1: Exemplo de um gráfico de uma função de transição.

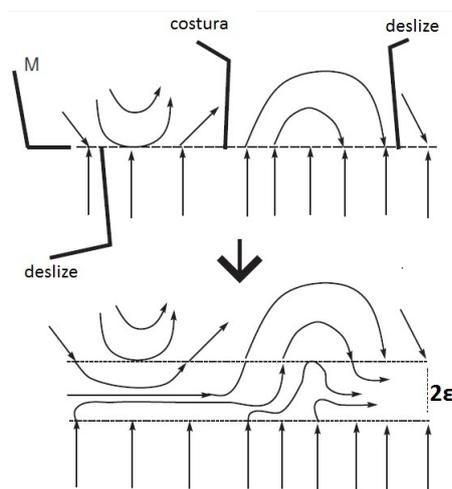


Figura 4.2: Um sistema descontínuo e sua regularização.

Como já foi dito, um ponto no retrato de fase que se move sobre uma órbita de  $Z$  cruza  $M$  quando atinge a região  $M_c$ , soluções de  $Z$  através de pontos de  $M_d$  permanecem em  $M$  em tempos posteriores e analogamente as soluções de  $Z$  por meio de pontos de  $M_e$  permanecem em  $M$  em tempos anteriores.

De agora em diante, nesta seção vamos estudar o processo de regularização de campos de vetores definidos em variedades de dimensão 2, sendo que tais discontinuidades ocorrem sobre uma subvariedade  $M$  de codimensão 1. Consideremos  $S$  a esfera  $S^2$  em  $\mathbb{R}^3$  e  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{C}^\infty$  tendo 0 como valor regular. Assumiremos  $M = h^{-1}(0)$  possuindo apenas uma componente conexa, de modo que  $S \setminus M$  tem duas componentes conexas as quais são dois discos denotados por

$S^+ = h^{-1}(0, +\infty)$  e  $S^- = h^{-1}(-\infty, 0)$ .

Vamos impor condições sobre  $Z = (X, Y)$ , as quais determinam o retrato de fase de sua regularização  $Z_\varepsilon$ , para qualquer função de transição e  $\varepsilon > 0$ .

Consideremos  $N$  como sendo uma subvariedade bidimensional de  $S$ , com fronteira  $\partial N = B$  e  $X'$  a restrição de um campo de vetores  $X$  em  $\chi^r$ , que é o espaço dos campos de vetores  $\mathcal{C}^r$  sobre  $S$  ( $r > 1$ ).

**Definição 4.0.9.** Denotaremos  $\Sigma^r(N)$  como a classe de todos os campos de vetores  $X \in \chi^r$  que satisfazem as seguintes condições:

- (i) todos os pontos de equilíbrio e órbitas periódicas de  $X'$  são hiperbólicos e estão contidos no interior de  $N$ ;
- (ii) qualquer tangência entre uma trajetória de  $X$  e  $B$  é quadrática;
- (iii)  $X'$  não tem conexões de sela ou de tangência.

## 4.1 Considerações no processo de regularização

Como é impossível ter um conhecimento global da dinâmica desses sistemas, nos concentraremos em explorar o seu comportamento local ao redor de pontos de equilíbrio típicos. A primeira tarefa é descrever uma teoria local para sistemas descontínuos no caso bidimensional.

Consideramos o campo descontínuo  $Z = (X, Y)$  no plano  $\mathbb{R}^2$ . Para  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $X(p) = (X_1(p), X_2(p))$ ,  $Y(p) = (Y_1(p), Y_2(p))$ . Localmente, podemos considerar  $h^{-1}(0) = M$ , onde  $h(p) = h(x, y) = y$  que é claramente uma variedade, pois  $\nabla h(x, y) = (0, 1) \neq (0, 0)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Sendo assim, o campo de Filippov em um ponto  $p \in M_d \cup M_e$  tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} Z^M(p) &= (1 - \alpha)X(p) + \alpha Y(p) \Leftrightarrow Z^M(p) = \left(1 - \frac{Xh(p)}{(X - Y)h(p)}\right) X(p) + \left(\frac{Xh(p)}{(X - Y)h(p)}\right) Y(p) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Z^M(p) = \left(1 - \frac{X_2(p)}{X_2(p) - Y_2(p)}\right) X(p) + \left(\frac{X_2(p)}{X_2(p) - Y_2(p)}\right) Y(p) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Z^M(p) = \left(\frac{X_2(p) - Y_2(p) - X_2(p)}{X_2(p) - Y_2(p)}\right) X(p) + \left(\frac{X_2(p)}{X_2(p) - Y_2(p)}\right) Y(p) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Z^M(p) = \left(\frac{-Y_2(p)}{X_2(p) - Y_2(p)}\right) (X_1(p), X_2(p)) + \left(\frac{X_2(p)}{X_2(p) - Y_2(p)}\right) (Y_1(p), Y_2(p)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Z^M(p) = \left(\frac{-X_1(p)Y_2(p) + X_2(p)Y_1(p)}{X_2(p) - Y_2(p)}, \frac{-X_2(p)Y_2(p) + X_2(p)Y_2(p)}{X_2(p) - Y_2(p)}\right). \end{aligned}$$

$$\therefore Z^M(p) = \left( \frac{X_1(p)Y_2(p) - X_2(p)Y_1(p)}{Y_2(p) - X_2(p)}, 0 \right), \quad Y_2(p) - X_2(p) \neq 0. \quad (4.2)$$

Ressaltamos que se  $Y_2(p) - X_2(p) = 0$ , pela Definição 3.1.10,  $p$  é um ponto de equilíbrio deslizante.

A partir da expressão do campo de Filippov em (4.2) faremos as definições de seus pontos de equilíbrio e os pontos onde falham essa definição.

**Definição 4.1.1.** *Um ponto  $p \in M$  é um ponto  $M$ -regular de  $Z = (X, Y)$  se alguma das condições é satisfeita:*

(i)  $Xh(p)Yh(p) > 0$ , ou seja,  $p$  é um ponto de costura;

(ii)  $Xh(p)Yh(p) < 0$  e  $\det[X, Y](p) = \det \begin{bmatrix} X_1(p) & X_2(p) \\ Y_1(p) & Y_2(p) \end{bmatrix} \neq 0$ , ou seja,  $p$  é um ponto de deslize ou de escape e não é um pseudo-equilíbrio.

**Definição 4.1.2.** *Um ponto  $p \in M$  que não é um ponto  $M$ -regular é dito um ponto  $M$ -singular de  $Z = (X, Y)$ .*

**Observação 4.1.1.** Pela equação (4.2) teremos  $p \in M_d \cup M_e$  pontos de equilíbrio do campo de Filippov quando:

$$\begin{aligned} Z^M(p) = (0, 0) &\Leftrightarrow \left( \frac{X_1(p)Y_2(p) - X_2(p)Y_1(p)}{Y_2(p) - X_2(p)}, 0 \right) = (0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow X_1(p)Y_2(p) - X_2(p)Y_1(p) = 0 \Leftrightarrow \det[X, Y](p) = 0. \end{aligned}$$

Como em  $M$  temos  $y = 0$ , então o campo  $Z^M$  é um campo unidimensional. Desta forma dado um ponto de equilíbrio  $q = (x_0, 0)$  de  $Z^M$ , isto é,  $\det[X, Y](q) = 0$  e  $Y_2(q) - X_2(q) \neq 0$ . O ponto  $q$  será um ponto de equilíbrio hiperbólico de  $Z^M$  se todos os autovalores de  $JZ^M(q) = JZ^M(x_0, 0)$  tiverem parte real não nula, ou seja, neste caso, levando em conta o fato de o campo ser unidimensional, devemos ter  $\frac{\partial}{\partial x} Z^M(q) = \frac{\partial}{\partial x} Z^M(x_0, 0) \neq 0$ . Assim

$$\begin{aligned} Z^M(p) &= \frac{\det[X, Y](p)}{Y_2(p) - X_2(p)}, \quad p \in M \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} Z^M(p) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} [\det[X, Y](p)] (Y_2(p) - X_2(p)) - \det[X, Y](p) \frac{\partial}{\partial x} [Y_2(p) - X_2(p)]}{[Y_2(p) - X_2(p)]^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} Z^M(q) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} [\det[X, Y](q)] (Y_2(q) - X_2(q)) - \det[X, Y](q) \frac{\partial}{\partial x} [Y_2(q) - X_2(q)]}{[Y_2(q) - X_2(q)]^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} Z^M(q) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} [\det[X, Y](q)] (Y_2(q) - X_2(q))}{[Y_2(q) - X_2(q)]^2} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} Z^M(q) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} [\det[X, Y](q)]}{Y_2(q) - X_2(q)}. \end{aligned}$$

Logo, teremos  $q$  um ponto de equilíbrio hiperbólico de  $Z^M$  quando

$$\frac{\partial}{\partial x} Z^M(q) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \frac{[\det[X, Y](q)]}{Y_2(q) - X_2(q)} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} [\det[X, Y](q)] \neq 0.$$

**Definição 4.1.3.** Dizemos que um ponto de equilíbrio  $p$  do campo de Filippov, isto é,  $\det[X, Y](p) = 0$  e  $Y_2(q) - X_2(q) \neq 0$  é hiperbólico se  $d(\det[X, Y]_{|_M})(p) = \frac{\partial}{\partial x} [\det[X, Y](p)] \neq 0$ .

**Definição 4.1.4.** Um ponto  $p \in M$  é dito um ponto  $M$ -singular elementar de  $Z = (X, Y)$  se uma das seguintes condições está satisfeita:

- (i)  $p$  é um ponto de dobra de  $Z = (X, Y)$ , isto é, ou  $p$  é um ponto de dobra de  $Y$  ( $Xh(p) \neq 0, Yh(p) = 0, Y^2h(p) \neq 0$ ) ou  $p$  é um ponto de dobra de  $X$  ( $Yh(p) \neq 0, Xh(p) = 0, X^2h(p) \neq 0$ );
- (ii)  $Xh(p)Yh(p) < 0$ ,  $\det[X, Y](p) = 0$  mas  $d(\det[X, Y]_{|_M})(p) \neq 0$ , isto é  $p$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico de  $Z^M$ .

**Definição 4.1.5.** Seja  $p$  um ponto de equilíbrio hiperbólico de  $Z^M$ , dizemos que

- (i)  $p$  é uma sela de Filippov, ou simplesmente uma sela de  $Z^M$ , se satisfaz uma das condições:
  - (i<sub>1</sub>)  $p \in M_d$  e é um ponto de equilíbrio repulsor de  $Z^M$ , ou seja,  $d(\det[X, Y]_{|_M})(p) > 0$ ;
  - (i<sub>2</sub>)  $p \in M_e$  e é um ponto de equilíbrio atrator de  $Z^M$ , ou seja,  $d(\det[X, Y]_{|_M})(p) < 0$ .
- (ii)  $p$  é um nó de Filippov, ou simplesmente um nó de  $Z^M$ , se satisfaz uma das condições:
  - (i<sub>1</sub>)  $p \in M_d$  e é um ponto de equilíbrio atrator de  $Z^M$ , ou seja,  $d(\det[X, Y]_{|_M})(p) < 0$ , neste caso o nó é dito atrator;
  - (i<sub>2</sub>)  $p \in M_e$  e é um ponto de equilíbrio repulsor de  $Z^M$ , ou seja,  $d(\det[X, Y]_{|_M})(p) > 0$ , neste caso o nó é dito repulsor.

**Lema 4.1.1.** Seja  $p \in M$  um ponto  $M$ -regular de  $Z = (X, Y)$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$  e  $\varepsilon_0$  tal que para todo  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $Z_\varepsilon$  não possui pontos de equilíbrio em  $V$ .

*Demonstração.*

Suponhamos  $p \in M$  um ponto  $M$ -regular de  $Z = (X, Y)$ , assim temos dois casos a considerar:

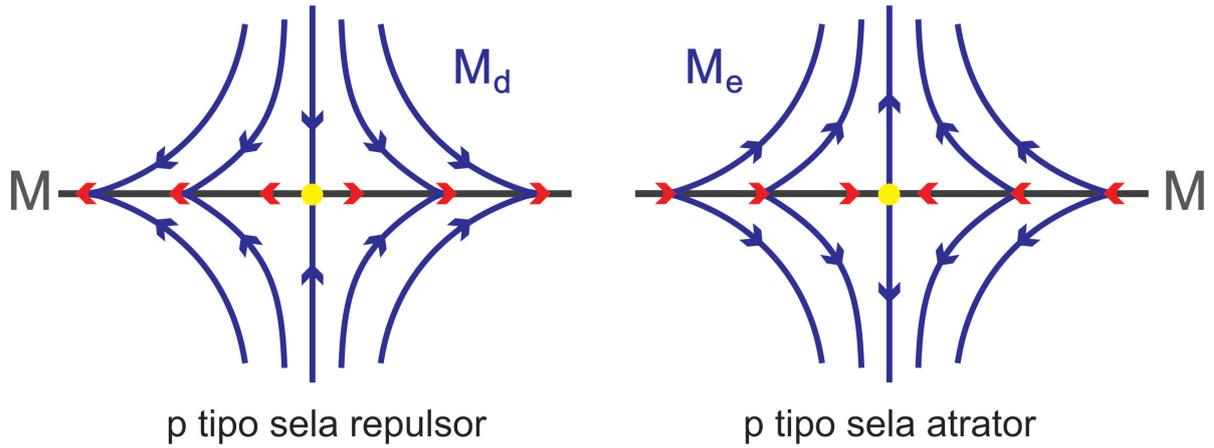


Figura 4.3: Pontos de equilíbrio do tipo sela.

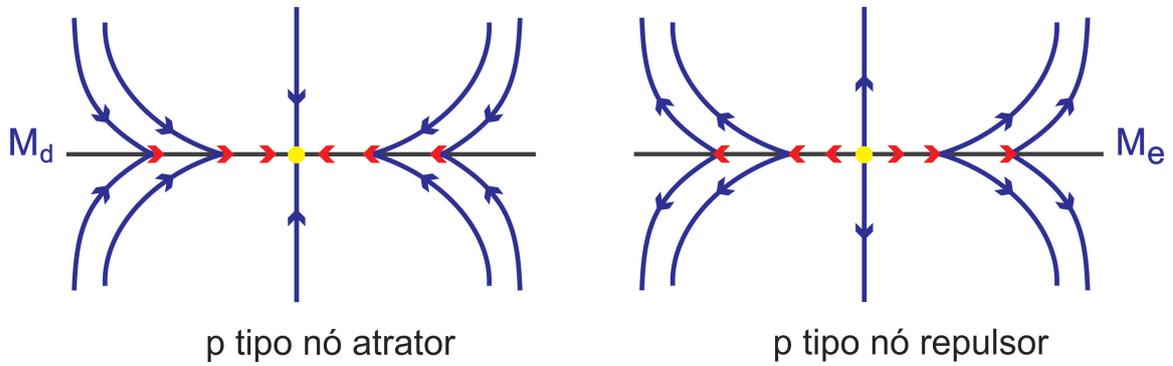


Figura 4.4: Pontos de equilíbrio do tipo nó.

(caso 1)  $p$  é ponto de costura, ou seja,  $Xh(p)Yh(p) > 0$ ;

Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $Xh(p) > 0$  e  $Yh(p) > 0$ . O caso em que  $Xh(p) < 0$  e  $Yh(p) < 0$  é análogo. Graças as formas normais, dada uma carta local  $(x, y)$  em torno de  $p$ , podemos assumir  $M = \{y = 0\}$ ,  $X = (0, 1)$ ,  $Y = (f, g)$  com  $g(p) = b > 0$  e  $h(x, y) = y$ . Nestas condições, se  $\varphi$  é uma função de transição a regularização de  $Z$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 Z_\varepsilon(x, y) &= (Z_\varepsilon^1(x, y), Z_\varepsilon^2(x, y)) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(h(x, y))}{2}\right) X(x, y) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(h(x, y))}{2}\right) Y(x, y) = \\
 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) (0, 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) (f(x, y), g(x, y)) = \\
 &= \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) f(x, y), \frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) g(x, y)\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left( (1 - \varphi_\varepsilon(y)) f(x, y), 1 + \varphi_\varepsilon(y) + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) g(x, y) \right).
 \end{aligned}$$

Mostremos que  $Z_\varepsilon^2(x, y) = 1 + \varphi_\varepsilon(y) + (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) > 0$  em uma vizinhança de  $p$ :

- se  $\varphi_\varepsilon(y) = \varphi(\frac{y}{\varepsilon}) = -1$ , então temos  $Z_\varepsilon^2(x, y) = 2g(x, y)$ . Pelo Teorema da conservação do sinal  $g(x, y) > 0$  em uma vizinhança  $V_1$  de  $p$ , afinal  $g(p) = b > 0$  e assim teremos  $Z_\varepsilon^2(x, y) = 2g(x, y) > 0$  em  $V_1$ ;
- se  $\varphi_\varepsilon(y) = \varphi(\frac{y}{\varepsilon}) \in (-1, 1)$ , então o que delega o sinal de  $Z_\varepsilon^2(x, y)$  é  $g(x, y)$ , pois sempre teremos  $1 + \varphi_\varepsilon(y) > 0$  e  $1 - \varphi_\varepsilon(y) > 0$  para  $\varphi_\varepsilon(y) \in (-1, 1)$ . Pelo Teorema da conservação do sinal temos  $g(x, y) > 0$  em uma vizinhança  $V_1$  de  $p$ , pois  $g(p) = b > 0$  e assim teremos  $Z_\varepsilon^2(x, y) > 0$  em  $V_1$ ;
- se  $\varphi_\varepsilon(y) = \varphi(\frac{y}{\varepsilon}) = 1$ , então temos  $Z_\varepsilon^2(x, y) = 2$  e assim  $Z_\varepsilon^2(x, y) > 0$  para todo  $(x, y)$ .

Portanto  $Z_\varepsilon(x, y) \neq (0, 0)$  em uma vizinhança  $V_1$  de  $p$ .

(caso 2)  $p$  é um ponto de deslize ou escape, mas não é um pseudo-equilíbrio de  $Z = (X, Y)$ , ou seja,  $Xh(p)Yh(p) < 0$  com  $\det[X, Y](p) \neq 0$ ;

Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $Xh(p) < 0$  e  $Yh(p) > 0$ . O caso em que  $Xh(p) > 0$  e  $Yh(p) < 0$  é análogo. Deste modo dada uma carta local  $(x, y)$  em torno de  $p$  podemos assumir  $M = \{y = 0\}$ ,  $X = (0, -1)$ ,  $Y = (f, g)$  com  $g(p) = b > 0$  e  $h(x, y) = y$ .

Nestas condições, se  $\varphi$  é uma função de transição a regularização de  $Z$  é dada por:

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) &= (Z_\varepsilon^1(x, y), Z_\varepsilon^2(x, y)) = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(h(x, y))}{2}\right) X(x, y) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(h(x, y))}{2}\right) Y(x, y) = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) (0, -1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) (f(x, y), g(x, y)) = \\ &= \left( \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) f(x, y), -\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) g(x, y) \right) = \\ &= \frac{1}{2} ( (1 - \varphi_\varepsilon(y)) f(x, y), -1 - \varphi_\varepsilon(y) + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) g(x, y) ). \end{aligned}$$

Suponhamos que  $Z_\varepsilon(x, y) = 0$ , então  $(1 - \varphi_\varepsilon(y)) f(x, y) = 0$  e  $-1 - \varphi_\varepsilon(y) + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) g(x, y) = 0$ . Temos  $\det[X, Y](p) \neq 0$ , logo pelo Teorema da conservação do sinal segue que  $\det[X, Y](x, y) \neq 0$  em uma vizinhança  $V_2$  de  $p$ . Por outro lado,  $f(x, y) = 0 \cdot g(x, y) - ((-1)f(x, y)) = \det[X, Y](x, y) \neq 0$  em  $V_2$ . Desta forma, se  $(1 - \varphi_\varepsilon(y)) f(x, y) = 0$  então  $\varphi_\varepsilon(y) = 1$  e, conseqüentemente, a equação  $-1 - \varphi_\varepsilon(y) + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) g(x, y) = 0$  implica  $-2 = 0$  na vizinhança  $V_2$  de  $p$ , o que é um absurdo. Portanto  $Z_\varepsilon \neq (0, 0)$  em uma vizinhança  $V_2$  de  $p$ .

Logo, tomando  $V = V_1 \cap V_2$  de raio  $\varepsilon_0$  teremos  $Z_\varepsilon(x, y) \neq (0, 0)$  na vizinhança  $V$  de  $p$ , isto é,  $Z_\varepsilon$  não possui pontos de equilíbrio em  $V$ .

□

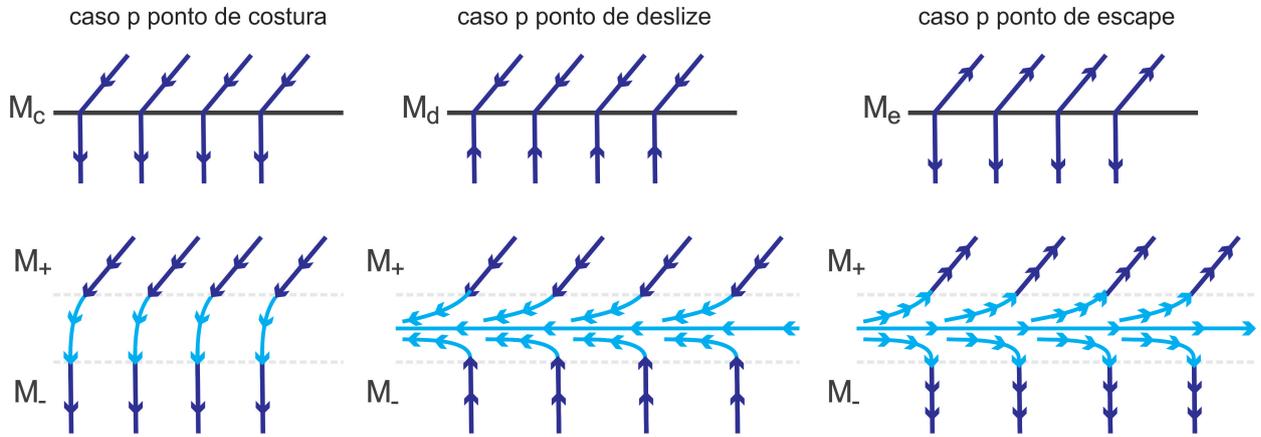


Figura 4.5: Pontos M-regulares regularizados.

**Lema 4.1.2.** *Seja  $p$  um ponto de dobra de  $Z = (X, Y)$ . Então existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , se  $p$  é um ponto de dobra de  $X$  (respectivamente de  $Y$ ) temos:*

- (i) *se  $Y$  (respectivamente de  $X$ ) é transversal a  $M$  em  $p$ , isto é,  $Yh(p) \neq 0$  (respectivamente de  $Xh(p) \neq 0$ ) então  $Z_\varepsilon$  não possui pontos de equilíbrio em uma vizinhança de  $p$ ;*
- (ii) *sobre a curva  $\{Z_\varepsilon h = 0\}$  o contato entre  $Z_\varepsilon$  e a curva  $\{h = \varepsilon\}$  é quadrático.*

*Demonstração.*

Por hipótese  $p$  é um ponto de dobra de  $X$ , assim  $Xh(p) = 0$  e  $X^2h(p) \neq 0$ .

- (i) Neste caso temos  $Yh(p) \neq 0$ . Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $Yh(p) > 0$ ,  $Xh(p) = 0$  e  $X^2h(p) > 0$ , os outros casos são análogos. Graças as formas normais dada uma carta local  $(x, y)$  em torno de  $p = (0, 0)$ , podemos assumir  $M = \{y = 0\}$ ,  $X = (1, x)$ ,  $Y = (f, g)$  com  $g(p) = b > 0$  e  $h(x, y) = y$ . Nestas condições, se  $\varphi$  é uma função de transição a

regularização de  $Z$  é dada por:

$$\begin{aligned}
Z_\varepsilon(x, y) &= (Z_\varepsilon^1(x, y), Z_\varepsilon^2(x, y)) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(h(x, y))}{2}\right) X(x, y) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(h(x, y))}{2}\right) Y(x, y) = \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) (1, x) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) (f(x, y), g(x, y)) = \\
&= \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) f(x, y), \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) g(x, y)\right) = \\
&= \frac{1}{2} (1 + \varphi_\varepsilon(y) + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) f(x, y), (1 + \varphi_\varepsilon(y)) x + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) g(x, y)).
\end{aligned}$$

Suponhamos que  $Z_\varepsilon(x, y) = (0, 0)$  para algum  $(x, y)$  em uma vizinhança de  $p$ . Então :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} (1 + \varphi_\varepsilon(y)) + (1 - \varphi_\varepsilon(y))f(x, y) = 0, \\ (1 + \varphi_\varepsilon(y))x + (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_\varepsilon(y) = \frac{-1 - f(x, y)}{1 - f(x, y)}, \\ \varphi_\varepsilon(y) = \frac{-x - g(x, y)}{x - g(x, y)}. \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{-1 - f(x, y)}{1 - f(x, y)} = \frac{-x - g(x, y)}{x - g(x, y)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -(x + g(x, y))(1 - f(x, y)) = -(1 + f(x, y))(x - g(x, y)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x + g(x, y))(1 - f(x, y)) = (1 + f(x, y))(x - g(x, y)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x - xf(x, y) + g(x, y) - g(x, y)f(x, y) = \\
&= x - g(x, y) + f(x, y)x - f(x, y)g(x, y) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -xf(x, y) + g(x, y) = -g(x, y) + f(x, y)x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2[g(x, y) - xf(x, y)] = 0 \Leftrightarrow \det[X, Y](x, y) = 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado  $\det[X, Y](p) = g(p) - 0f(p) = g(p) = b \neq 0$ . Logo, pelo Teorema da conservação do sinal, existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  tal que  $\det[X, Y](x, y) \neq 0$  em  $V$ , o que nos dá um absurdo.

Assim existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  tal que  $Z_\varepsilon(x, y) \neq (0, 0)$  para todo  $(x, y) \in V$ , isto é, o campo  $Z_\varepsilon$  não possui pontos de equilíbrio em uma vizinhança de  $p$ .

- (ii) Suponhamos sem perda de generalidade, que  $p \in M$ ,  $X^2h(p) > 0$  e  $Yh(p) > 0$ . Os outros casos são análogos. Graças as formas normais, podemos escolher coordenadas em uma vizinhança de  $(x, y) = (0, 0)$ ,  $|y| < \varepsilon$  e  $|x| < 2\varepsilon$  tal que  $h(x, y) = y$ ,  $X(x, y) = (1, x)$  e  $Y(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ . Como supomos  $0 < Yh(p) = Yh(0, 0) = g(0, 0)$ , então  $g(0, 0) > 0$ .

Nestas condições, se  $\varphi$  é uma função de transição a regularização de  $Z$  é dada por:

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) &= (Z_\varepsilon^1(x, y), Z_\varepsilon^2(x, y)) = \left( \frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(h(x, y))}{2} \right) X(x, y) + \left( \frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(h(x, y))}{2} \right) Y(x, y) = \\ &= \frac{1}{2} ((1 + \varphi_\varepsilon(y)) + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) f(x, y), (1 + \varphi_\varepsilon(y)) x + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) g(x, y)). \end{aligned}$$

Deste modo,  $Z_\varepsilon h = Z_\varepsilon \cdot \nabla h = \frac{1}{2} (1 + \varphi_\varepsilon(y)) x + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) g(x, y)$ . Vale ressaltar que:

$$h(x, y) = \varepsilon \Leftrightarrow y = \varepsilon. \quad (4.3)$$

Substituindo (4.3) na equação  $Z_\varepsilon h(x, y) = 0$  temos:

$$Z_\varepsilon h(x, \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow (1 + \varphi_\varepsilon(\varepsilon)) x + (1 - \varphi_\varepsilon(\varepsilon)) g(x, \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0. \quad (4.4)$$

Pelas equações (4.3) e (4.4) devemos analisar o contato entre  $Z_\varepsilon$  e a curva  $\{h = \varepsilon\}$  sobre a curva  $\{Z_\varepsilon h = 0\}$  no ponto  $(0, \varepsilon)$ , ressaltando o fato de  $\{Z_\varepsilon h(0, \varepsilon) = 0\}$ .

Observemos:

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon^2 h &= Z_\varepsilon \cdot \nabla Z_\varepsilon h = \frac{1}{2} ((1 + \varphi_\varepsilon(y)) + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) f(x, y), (1 + \varphi_\varepsilon(y)) x + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) g(x, y)) \cdot \\ &\cdot \frac{1}{2} ((1 + \varphi_\varepsilon(y)) + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) g_x(x, y), \varphi_{\varepsilon_y}(y) x - \varphi_{\varepsilon_y}(y) g(x, y) + (1 - \varphi_\varepsilon(y)) g_y(x, y)). \end{aligned}$$

Assim, usando que  $\varphi_{\varepsilon_y}(y) = \frac{d}{dy} \varphi_\varepsilon(y) = \frac{d}{dy} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \varphi'\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\varepsilon}$ , tem-se que para  $y = \varepsilon$ ,  $\varphi_{\varepsilon_y}(\varepsilon) = \frac{\varphi'(1)}{\varepsilon} = 0$ , então  $Z_\varepsilon^2(0, \varepsilon) = \frac{1}{2}(2, 0) \cdot \frac{1}{2}(2, 0) = \frac{4}{4} = 1 \neq 0$ . Então podemos concluir que sobre a curva  $\{Z_\varepsilon h = 0\}$  o contato entre  $Z_\varepsilon$  e a curva  $\{h = \varepsilon\}$  é quadrático.

Ressaltamos que  $\varepsilon_0$  é obtido a partir da interseção das vizinhanças consideradas. □

**Observação 4.1.2.** Assumimos todas as hipóteses do Lema 4.1.2. Se  $Xh(p) = 0$ ,  $X^2h(p) > 0$  e  $Yh(p) \neq 0$  vamos considerar sobre a curva  $\gamma_\varepsilon = \{h = \varepsilon\}$  os conjuntos abertos  $\gamma_\varepsilon^+ = \{Z_\varepsilon h > 0\}$  e  $\gamma_\varepsilon^- = \{Z_\varepsilon h < 0\}$ . Definimos uma aplicação de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $H_\varepsilon : \gamma_\varepsilon^- \rightarrow \gamma_\varepsilon^+$  tal que os pontos  $u$  e  $H_\varepsilon(u)$  estejam na mesma trajetória de  $Z_\varepsilon$ . Esta aplicação é  $\mathcal{C}^r$ , pois estamos supondo os campos de classe  $\mathcal{C}^r$ . Dizemos que  $H_\varepsilon$  é uma involução associada ao campo de vetores  $Z_\varepsilon$ .

**Lema 4.1.3.** Assumindo as hipóteses do Lema 4.1.2 e a notação da Observação 4.1.2, temos para qualquer  $u \in \gamma_\varepsilon^-$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(u) = 0$ .

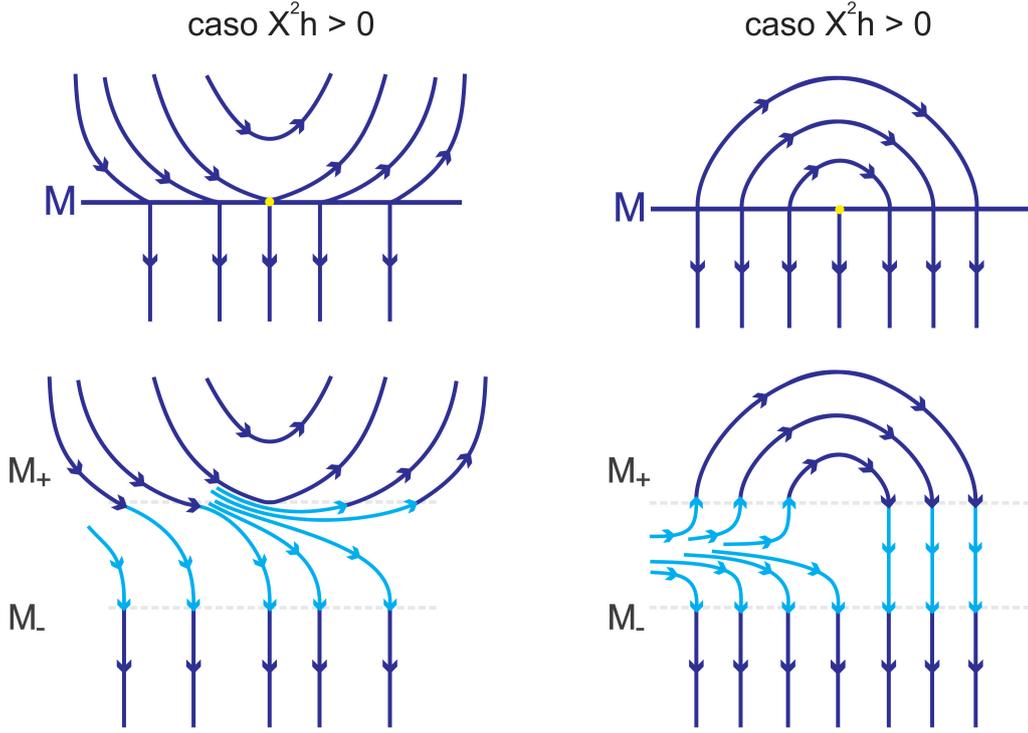


Figura 4.6: Pontos M-singulares elementares regularizados.

*Demonstração.*

Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $Yh(p) > 0$ , o outro caso é análogo. Considerando as coordenadas dadas no Lema 4.1.2, seja  $I_\varepsilon$  um intervalo aberto contendo  $p_\varepsilon = (0, \varepsilon)$  sobre  $\gamma_\varepsilon$ .

Seja  $H_0 : I_\varepsilon \rightarrow I_\varepsilon$  a involução associada ao campo  $X$  de classe  $C^r$  em relação à  $Xh = 0$ , isto é, em  $x = 0$ . Seja  $H_\varepsilon : I_\varepsilon \rightarrow I_\varepsilon$  a involução associada ao campo  $Z_\varepsilon$  em relação à  $Z_\varepsilon h = 0$ , isto é,  $Z_\varepsilon h = Z_\varepsilon^2 h = (1 + \varphi_\varepsilon(y))x + (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) = 0$ .

Se  $x < 0$  no nível  $y = \varepsilon$  teremos  $Z_\varepsilon h(x, \varepsilon) = \frac{1}{2} [(1 + \varphi_\varepsilon(\varepsilon))x + (1 - \varphi_\varepsilon(\varepsilon))g(x, y)] = x < 0$ .

Se  $x > 0$  no nível  $y = \varepsilon$  teremos  $Z_\varepsilon h(x, \varepsilon) = \frac{1}{2} [(1 + \varphi_\varepsilon(\varepsilon))x + (1 - \varphi_\varepsilon(\varepsilon))g(x, y)] = x > 0$ .

Se  $x = 0$  no nível  $y = \varepsilon$  teremos  $Z_\varepsilon h(0, \varepsilon) = 0$ . Donde segue que no nível  $y = \varepsilon$ :

$$Z_\varepsilon h = 0 \Leftrightarrow Xh = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Pela definição da involução  $H_\varepsilon$  e da involução  $H_0$  temos os pares  $u, H_\varepsilon(u)$  e  $u, H_0(u)$  pertencentes à mesma órbita de  $Z_\varepsilon$  e  $X$ , respectivamente. Como estamos considerando  $X(x, y) = (1, x)$  então:

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + k \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + k \\ y' = t + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + k \\ y = \frac{t^2}{2} + kt + c \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{(x - k)^2}{2} + k(x - k) + c;$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t_0) = t_0 + k \\ y(t_0) = \frac{t_0^2}{2} + kt_0 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - t_0 = k \\ y_0 = \frac{t_0^2}{2} + kt_0 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - t_0 = k \\ y_0 - \frac{t_0^2}{2} - (x_0 - t_0)t_0 = c \end{cases}.$$

Assim a curva integral de  $X$  passando por  $(x_0, y_0)$  é dada por:

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x-k)^2}{2} + k(x-k) + c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{(x-[x_0-t_0])^2}{2} + (x_0-t_0)(x-[x_0-t_0]) + y_0 - \frac{t_0^2}{2} - (x_0-t_0)t_0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{x^2}{2} - \frac{2x(x_0-t_0)}{2} + \frac{(x_0-t_0)^2}{2} + x(x_0-t_0) - (x_0-t_0)^2 + y_0 - \frac{t_0^2}{2} - (x_0-t_0)t_0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{x^2}{2} - \frac{(x_0-t_0)^2}{2} - (x_0-t_0)t_0 - \frac{t_0^2}{2} + y_0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + \frac{2x_0t_0}{2} - \frac{t_0^2}{2} - x_0t_0 + t_0^2 - \frac{t_0^2}{2} + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2} + \left(y_0 - \frac{x_0^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Se  $y_0 = \varepsilon$  então a curva integral é  $y = \frac{x^2}{2} + \left(\varepsilon - \frac{x_0^2}{2}\right)$  e a mesma irá interceptar o nível  $y = \varepsilon$ , quando  $x = \pm x_0$ . Como  $H_0 : \gamma_\varepsilon^- \rightarrow \gamma_\varepsilon^+$  e a curva integral  $y = \frac{x^2}{2} + \left(\varepsilon - \frac{x_0^2}{2}\right)$  intercepta o nível  $y = \varepsilon$  em  $\pm x_0$  segue que devemos ter  $H_0(x) = -x$ .

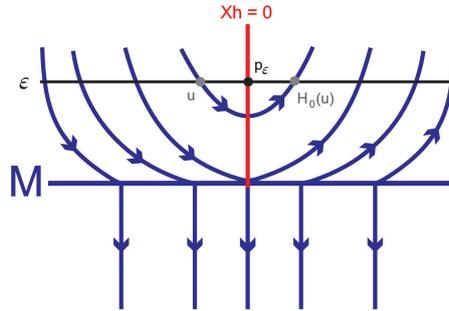


Figura 4.7: Involução  $H_0$  associado ao campo  $X$ .

Vale ressaltar que:

$$\begin{aligned} \bullet \det[X, Z_\varepsilon](x, y) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x \\ (1 + \varphi_\varepsilon(y)) + (1 - \varphi_\varepsilon(y))f(x, y) & (1 + \varphi_\varepsilon(y))x + (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} [(1 + \varphi_\varepsilon(y))x + (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) - (1 + \varphi_\varepsilon(y))x - (1 - \varphi_\varepsilon(y))xf(x, y)] = \\ &= \frac{1}{2} (1 - \varphi_\varepsilon(y)) [g(x, y) - xf(x, y)] = \frac{1}{2} (1 - \varphi_\varepsilon(y)) \begin{vmatrix} 1 & x \\ f(x, y) & g(x, y) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (1 - \varphi_\varepsilon(y)) \det[X, Y](x, y). \\ \therefore \det[X, Z_\varepsilon](x, y) &= \frac{1}{2} (1 - \varphi_\varepsilon(y)) \det[X, Y](x, y). \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \det[Z_\varepsilon, Y](x, y) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (1 + \varphi_\varepsilon(y)) + (1 - \varphi_\varepsilon(y))f(x, y) & (1 + \varphi_\varepsilon(y))x + (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) \\ f(x, y) & g(x, y) \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} [(1 + \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) + (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y)f(x, y) - (1 + \varphi_\varepsilon(y))xf(x, y) - (1 - \varphi_\varepsilon(y))f(x, y)g(x, y)] = \\
&= \frac{1}{2}(1 + \varphi_\varepsilon(y))[g(x, y) - xf(x, y)] = \frac{1}{2}(1 + \varphi_\varepsilon(y)) \begin{vmatrix} 1 & x \\ f(x, y) & g(x, y) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \varphi_\varepsilon(y))\det[X, Y](x, y). \\
\therefore \det[Z_\varepsilon, Y](x, y) &= \frac{1}{2}(1 + \varphi_\varepsilon(y))\det[X, Y](x, y). \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Estamos em um vizinhança de  $p = (0, 0)$  e  $\det[X, Y](p) = g(p) > 0$ , assim nesta vizinhança teremos  $\det[X, Y](x, y) > 0$ . Desta forma, a equação (4.5) implica que  $\det[X, Z_\varepsilon](x, y) \geq 0$  e a equação (4.6) implica que  $\det[Z_\varepsilon, Y](x, y) \geq 0$ . Para  $|y| < \varepsilon$  teremos  $\det[X, Z_\varepsilon](x, y) > 0$  e  $\det[Z_\varepsilon, Y](x, y) > 0$ , isto é,  $\{X(q), Z_\varepsilon(q)\}$  e  $\{Z_\varepsilon(q), Y(p)\}$  são bases do  $\mathbb{R}^2$  com a mesma orientação da base canônica e isto nos dá os vetores  $X(q)$ ,  $Y(q)$  e  $Z_\varepsilon(q)$  configurados como mostra a Figura 4.8.

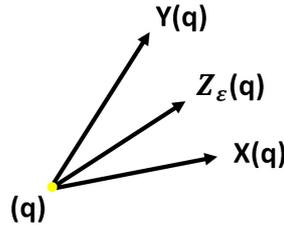


Figura 4.8: Configuração dos vetores.

Se  $H_\varepsilon(x) \geq H_0(x)$  para algum  $x < 0$  então as trajetórias de  $X$  e  $Z_\varepsilon$  se cruzariam em um ponto  $k$ , e a partir deste ponto as orientações seriam invertidas fazendo com que  $\det[X, Z_\varepsilon](x, y) < 0$ , o que nos dá um absurdo. Portanto,  $H_\varepsilon(x) < H_0(x) = -x$ .

A curva integral de  $X$  passando por  $p_1 = (0, \varepsilon_1)$ ,  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ , é dada por  $y = \frac{x^2}{2} + \varepsilon_1$  e intercepta o nível  $y = \varepsilon$  em  $x = \pm\sqrt{2(\varepsilon - \varepsilon_1)}$ . Devido ao contradomínio de  $H_\varepsilon$  teremos  $H_\varepsilon > 0$  para todo  $x < 0$ . Vimos que  $H_\varepsilon(x) < -x = H_0(x)$  para qualquer  $x < 0$ , em particular, vale para  $x = -\sqrt{2(\varepsilon - \varepsilon_1)} < 0$  e, com isso,  $H_\varepsilon(x) < -\left(-\sqrt{2(\varepsilon - \varepsilon_1)}\right) = \sqrt{2(\varepsilon - \varepsilon_1)}$ . Se  $x < -\sqrt{2(\varepsilon - \varepsilon_1)}$  então,

$$\begin{aligned}
0 < H_\varepsilon(x) < \sqrt{2(\varepsilon - \varepsilon_1)} < \sqrt{2\varepsilon} &\Leftrightarrow 0 < H_\varepsilon(x) < \sqrt{2\varepsilon} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 0 < \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(x) < \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{2\varepsilon} \Leftrightarrow 0 < \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(x) < 0.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema do Confronto, segue que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(u) = 0$  para todo  $u$  próximo de  $p$  em  $M$ .

□

**Lema 4.1.4.** *Sejam  $Z = (X, Y)$  e  $p$  um ponto de equilíbrio hiperbólico de  $Z^M$ . Então, existe  $\varepsilon_0$  tal que para todo  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $Z_\varepsilon$  tem, próximo de  $p$ , um ponto de equilíbrio que é uma sela hiperbólica ou um nó hiperbólico. Deste modo, os autoespaços associados à este ponto de equilíbrio são transversais às curvas  $\{h = \varepsilon\}$  e  $\{h = -\varepsilon\}$ .*

*Demonstração.*

Suponhamos sem perda de generalidade, que  $Xh(p) < 0$ ,  $Yh(p) > 0$ ,  $\det[X, Y](p) = 0$  e  $\frac{\partial}{\partial x} (\det[X, Y]_{|M})(p) \neq 0$ , o outro caso é análogo. Devido às formas normais, podemos escolher coordenadas de modo que  $p = (0, 0)$ ,  $h(x, y) = y$ ,  $Y(x, y) = (0, 1)$  e  $X(x, y) = (g(x, y), l(x, y))$ .

Como supomos  $0 > Xh(p) = Xh(0, 0) = l(0, 0)$  então  $l(0, 0) = a < 0$ . Deste modo,  $0 = \det[X, Y](p) = \det[X, Y](0, 0) = g(0, 0)$ , ou seja,  $g(0, 0) = 0$ . Mais ainda, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} (\det[X, Y]_{|M})(p) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} (g(x, y)_{|M})(p) \neq 0 \Leftrightarrow g_x(0, 0) \neq 0.$$

Denotemos por  $g_x(0, 0) = \alpha \neq 0$  e  $g_y(0, 0) = \beta$ . Nestas condições, se  $\varphi$  é uma função de transição, a regularização de  $Z = (X, Y)$  é dada por:

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) &= (Z_\varepsilon^1(x, y), Z_\varepsilon^2(x, y)) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(h(x, y))}{2}\right) X(x, y) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(h(x, y))}{2}\right) Y(x, y) = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) (g(x, y), l(x, y)) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(y)}{2}\right) (0, 1) = \\ &= \frac{1}{2} ((1 + \varphi_\varepsilon(y))g(x, y), (1 + \varphi_\varepsilon(y))l(x, y) + 1 - \varphi_\varepsilon(y)). \end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio de  $Z_\varepsilon$  são dados por:

$$\begin{cases} (1 + \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \varphi_\varepsilon(y) = -1 \text{ ou } g(x, y) = 0 \\ (1 + \varphi_\varepsilon(y))l(x, y) + 1 - \varphi_\varepsilon(y) = 0 \end{cases}.$$

- Se  $\varphi_\varepsilon(y) = -1$ , então teríamos  $2 = (1 - 1)l(x, y) + 1 + 1 = 0$ , o que é um absurdo.
- Se  $g(x, y) = 0$ , então teríamos:

$$(1 + \varphi_\varepsilon(y))l(x, y) + 1 - \varphi_\varepsilon(y) = 0 \Leftrightarrow \varphi_\varepsilon(y) = \frac{-l(x, y) - 1}{l(x, y) - 1} \Leftrightarrow \varphi_\varepsilon(y) = \frac{l(x, y) + 1}{1 - l(x, y)}. \quad (4.7)$$

Logo, os pontos de equilíbrio de  $Z_\varepsilon$  serão dados pelos pontos que satisfazem  $g(x, y) = 0$  e a equação (4.7). Como  $g_x(0, 0) = \alpha \neq 0$  segue do Teorema da Função Implícita que  $x$  pode ser escrito como uma função de  $y$  em uma vizinhança de  $(0, 0)$ , isto é, em uma vizinhança de  $(0, 0)$  existe  $x = x(y)$  tal que  $g(x(y), y) = 0$  e  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = \frac{-g_y(0, 0)}{g_x(0, 0)} = -\frac{\beta}{\alpha}$ . Assim, a expansão em série de Taylor em torno de  $y = 0$  da função  $x = x(y)$  é dada por:

$$x(y) = x(0) + x'(0)y + r_1(y) = 0 + \frac{-\beta}{\alpha}y + r_1(y) \Leftrightarrow x(y) = \frac{-\beta}{\alpha}y + r_1(y).$$

Portanto, o ponto de equilíbrio de  $Z_\varepsilon$  será o ponto de intersecção entre os gráficos de  $x(y)$  e  $\varphi_\varepsilon(y)$ . Para verificar sua existência e unicidade usaremos mais uma vez o Teorema da Função Implícita. Queremos resolver o problema de achar  $y$  tal que  $\varphi_\varepsilon(y) = x(y)$ . Seja  $F(y, \varepsilon) = \varphi_\varepsilon(y) - x(y)$ . Daí,

$$F(\varepsilon, \varepsilon) = \varphi_\varepsilon(\varepsilon) - x(\varepsilon) = 1 + \frac{\beta}{\alpha}\varepsilon - r_1(\varepsilon) > 0, \text{ para } \varepsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno fixo;}$$

$$F(-\varepsilon, \varepsilon) = \varphi_\varepsilon(-\varepsilon) - x(-\varepsilon) = -1 - \frac{\beta}{\alpha}\varepsilon - r_1(-\varepsilon) < 0, \text{ para } \varepsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno fixo.}$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário segue que existe  $r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  tal que  $F(r, \varepsilon) = 0$ . Suponhamos sem perda de generalidade que  $r = 0$ , caso contrário basta fazer uma translação no sistema. Assumimos  $\varphi'_\varepsilon(0) \neq -\frac{\beta}{\alpha} = x'(0)$ , que é possível para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, afinal  $\varphi_\varepsilon$  trata-se de uma função de transição. Logo,

$$F(0, \varepsilon) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(0, \varepsilon) = \varphi'_\varepsilon(0) + \frac{\beta}{\alpha} = \varphi'_\varepsilon(0) + \frac{\beta}{\alpha} \neq -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} = 0, \text{ ou seja, } \frac{\partial}{\partial y}F(0, \varepsilon) \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, temos que  $y$  pode ser escrito como função de  $\varepsilon$  em uma vizinhança de  $(0, \varepsilon)$ , isto é, em uma vizinhança de  $(0, \varepsilon)$  existe um único  $y = y(\varepsilon)$  tal que  $F(y(\varepsilon), \varepsilon) = 0$  e  $y(\varepsilon) = 0$ . Com isso, existe um único ponto de equilíbrio  $p_\varepsilon = (x(y(\varepsilon)), y(\varepsilon)) = (x(0), 0) = (0, 0)$ .

Resta agora mostrar que o ponto de equilíbrio  $p_\varepsilon$  é hiperbólico, e é uma sela se  $p$  é uma sela para  $Z^M$  ou um nó se  $p$  é um nó para  $Z^M$ .

A matriz Jacobiana de  $Z_\varepsilon$  em  $p_\varepsilon$  é dada por:

$$JZ_\varepsilon(p_\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[(1 + \varphi_\varepsilon)g_x] & \frac{1}{2}[\varphi'_\varepsilon g + (1 + \varphi_\varepsilon)g_y] \\ \frac{1}{2}[(1 - \varphi_\varepsilon)l_x] & \frac{1}{2}[\varphi'_\varepsilon l + (1 + \varphi_\varepsilon)l_y - \varphi'_\varepsilon] \end{pmatrix}.$$

Desta forma, o polinômio característico de  $JZ_\varepsilon(p_\varepsilon)$  é dado por  $\det(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon) - \lambda Id) = \lambda^2 - \text{tr}(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon))\lambda + \det(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon))$ . Donde os autovalores de  $JZ_\varepsilon(p_\varepsilon)$  serão dados por:

$$\lambda = \frac{\text{tr}(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon)) \pm \sqrt{\text{tr}^2(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon)) - 4\det(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon))}}{2}. \quad (4.8)$$

Seja  $\Delta = \text{tr}^2(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon)) - 4\det(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon))$ , vamos supor  $\Delta \geq 0$ , pois se  $\Delta < 0$  não seria possível termos um ponto de equilíbrio do tipo nó ou sela em  $Z_\varepsilon$ . Ressaltando que  $g(p_\varepsilon) = 0$  temos:

$$\begin{aligned} \det(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon)) &= \frac{1}{4} \{ [(1 + \varphi_\varepsilon)g_x][\varphi'_\varepsilon l + (1 + \varphi_\varepsilon)l_y - \varphi'_\varepsilon] - [\varphi'_\varepsilon g + (1 + \varphi_\varepsilon)g_y][(1 - \varphi_\varepsilon)l_x] \} = \\ &= \frac{1}{4} \{ (1 + \varphi_\varepsilon)g_x\varphi'_\varepsilon l + (1 + \varphi_\varepsilon)^2 g_x l_y - (1 + \varphi_\varepsilon)g_x\varphi'_\varepsilon - \varphi'_\varepsilon g(1 - \varphi_\varepsilon)l_x - (1 + \varphi_\varepsilon)g_y(1 - \varphi_\varepsilon)l_x \} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left\{ \varphi'_\varepsilon [(1 + \varphi_\varepsilon)g_x l - (1 + \varphi_\varepsilon)g_x - g(1 - \varphi_\varepsilon)l_x] + [(1 + \varphi_\varepsilon)^2 g_x l_y - (1 + \varphi_\varepsilon)g_y(1 - \varphi_\varepsilon)l_x] \right\} = \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \varphi'_\varepsilon [(1 + \varphi_\varepsilon)g_x l - (1 + \varphi_\varepsilon)g_x - 0] + [(1 + \varphi_\varepsilon)^2 g_x l_y - (1 + \varphi_\varepsilon)g_y(1 - \varphi_\varepsilon)l_x] \right\} = \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \varphi'_\varepsilon(1 + \varphi_\varepsilon) [g_x(-1 + l)] + [(1 + \varphi_\varepsilon)^2 g_x l_y - (1 + \varphi_\varepsilon)g_y(1 - \varphi_\varepsilon)l_x] \right\}. \\
\therefore \det(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon)) &= \frac{1}{4} \left\{ \varphi'_\varepsilon(1 + \varphi_\varepsilon) [g_x(-1 + l)] + [(1 + \varphi_\varepsilon)^2 g_x l_y - (1 + \varphi_\varepsilon)g_y(1 - \varphi_\varepsilon)l_x] \right\}. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Como  $L = (1 + \varphi_\varepsilon)^2 g_x l_y - (1 + \varphi_\varepsilon)g_y(1 - \varphi_\varepsilon)l_x$  é uma função limitada, pois é contínua e podemos considerar em um compacto,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi'_\varepsilon(p_\varepsilon) = +\infty$ ,  $(-1 + l(p_\varepsilon)) < 0$  e da equação (4.9) podemos concluir que, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}[\det(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon))] &= \operatorname{sgn} \left[ \frac{1}{4} \left\{ \varphi'_\varepsilon(1 + \varphi_\varepsilon) [g_x(-1 + l)] + [(1 + \varphi_\varepsilon)^2 g_x l_y - (1 + \varphi_\varepsilon)g_y(1 - \varphi_\varepsilon)l_x] \right\} \right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sgn}[\det(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon))] = \operatorname{sgn}[-g_x(p_\varepsilon)] \Leftrightarrow \operatorname{sgn}[\det(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon))] = -\operatorname{sgn}[d(\det[X, Y]_{|M})(p_\varepsilon)]. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Estamos supondo  $Xh < 0$  e  $Yh > 0$ , ou seja, temos o ponto de equilíbrio  $p = (0, 0)$  em uma região de deslize. Denotemos  $\det(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon)) = D$  e  $\operatorname{tr}(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon)) = B$ .

Como  $d(\det[X, Y]_{|M})(p_\varepsilon) = g_x(p_\varepsilon) = g_x(0, 0) \neq 0$  então pela equação (4.10) temos  $D \neq 0$ . Por outro lado, havíamos suposto  $\Delta \geq 0$  então

$$B^2 - 4D \geq 0 \Rightarrow B^2 \geq 4D \Rightarrow B^4 \geq 16D^2 \Rightarrow B^4 \geq 16D^2 > 0 \Rightarrow B^4 > 0 \Rightarrow B \neq 0.$$

Portanto temos  $B = \operatorname{tr}(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon)) \neq 0$ ,  $D \neq 0$  e com isso temos  $p_\varepsilon$  um ponto de equilíbrio hiperbólico.

- Se  $d(\det[X, Y]_{|M})(p_\varepsilon) > 0$ , ou seja,  $p$  é uma sela de Filippov então por (4.10) temos  $\det(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon)) < 0$ , logo

$$D < 0 \Leftrightarrow -4D > 0 \Leftrightarrow B^2 - 4D > B^2 \Leftrightarrow \sqrt{B^2 - 4D} > |B| \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} > |B|.$$

Assim, considerando  $\sqrt{\Delta} > B$  temos  $B - \sqrt{\Delta} < 0$  e considerando  $-\sqrt{\Delta} < B$  temos  $B + \sqrt{\Delta} > 0$ , isto é, os autovalores dados em (4.8) tem sinais oposto e isto mostra que  $p_\varepsilon$  é um ponto de equilíbrio do tipo sela de  $Z_\varepsilon$ .

- Se  $d(\det[X, Y]_{|M})(p_\varepsilon) < 0$ , ou seja,  $p$  é um nó atrator de Filippov então por (4.10) temos  $\det(JZ_\varepsilon(p_\varepsilon)) > 0$ , logo

$$\begin{aligned}
D > 0 \Leftrightarrow -4D < 0 \Leftrightarrow B^2 - 4D < B^2 \Leftrightarrow \sqrt{B^2 - 4D} < |B| \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < |B| \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < B \text{ ou } -\sqrt{\Delta} > B.
\end{aligned}$$

(i) Supondo  $\sqrt{\Delta} < B$  temos

$$\sqrt{\Delta} < B \Rightarrow 0 < B - \sqrt{\Delta};$$

$$\sqrt{\Delta} < B \Rightarrow -\sqrt{\Delta} < \sqrt{\Delta} < B \Rightarrow -\sqrt{\Delta} < B \Rightarrow 0 < B + \sqrt{\Delta}.$$

(ii) Supondo  $-\sqrt{\Delta} > B$  temos

$$-\sqrt{\Delta} > B \Rightarrow 0 > B + \sqrt{\Delta};$$

$$-\sqrt{\Delta} > B \Rightarrow \sqrt{\Delta} > -\sqrt{\Delta} > B \Rightarrow \sqrt{\Delta} > B \Rightarrow 0 > B - \sqrt{\Delta}.$$

Assim nos casos (i) e (ii) temos os autovalores dados em (4.8) com o mesmo sinal e isto mostra que nos dois caso  $p_\varepsilon$  é um ponto de equilíbrio do tipo nó.

Para mostrar que os autoespaços associados ao ponto de equilíbrio  $p_\varepsilon$  são transversais às curvas  $\{h = \varepsilon\}$  e  $\{h = -\varepsilon\}$  basta analisar o contato do campo regularizado  $Z_\varepsilon$ , com a curva  $\{h = y\}$  nos níveis  $y = \varepsilon$  e  $y = -\varepsilon$ , pois eles também devem respeitar o campo regularizado. Logo,

$$Z_\varepsilon(x, y) \cdot \nabla h(x, y) = (Z_\varepsilon^1(x, y), Z_\varepsilon^2(x, y)) \cdot (0, 1) = Z_\varepsilon^2(x, y) = \frac{1}{2} ((1 + \varphi_\varepsilon(y))l(x, y) + 1 - \varphi_\varepsilon(y)).$$

Portanto nos níveis  $y = \varepsilon$  e  $y = -\varepsilon$  temos

$Z_\varepsilon^2(x, \varepsilon) = \frac{1}{2} ((1 + 1)l(x, \varepsilon) + 1 - 1) = l(x, \varepsilon) \neq 0$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno na vizinhança da origem;

$$Z_\varepsilon^2(x, -\varepsilon) = \frac{1}{2} ((1 - 1)l(x, \varepsilon) + 1 + 1) = 1 \neq 0.,$$

Assim concluímos o fato desejado.

Ressaltando o fato de  $\varepsilon_0$  ser retirado da interseção de todas vizinhanças tomadas, ou seja, a vizinhança onde podemos assumir tudo o que foi suposto.

□

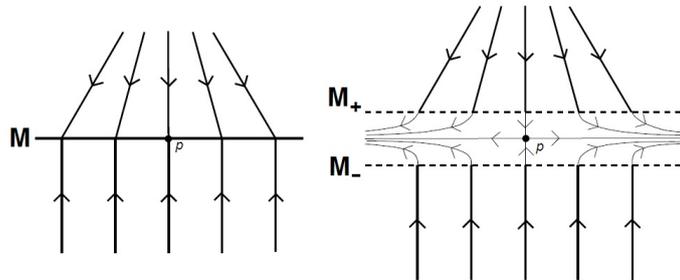


Figura 4.9: Ponto de equilíbrio hiperbólico de  $Z^M$  e sua regularização.

**Definição 4.1.6.** Uma  $M$ -conexão de sela de  $Z = (X, Y)$  é uma órbita  $\gamma$  de  $Z$  conectando:

- (i) um ponto de equilíbrio do tipo sela de  $X$  ou  $Y$  e um ponto de equilíbrio de  $Z^M$  do tipo sela;
- (ii) dois pontos de equilíbrio de  $Z^M$  do tipo sela;
- (iii) dois pontos de equilíbrio do tipo sela de  $X$  e  $Y$ , de modo que é permitido aos seus pontos interiores encontrar  $M$  somente em  $M_c$ .
- (iv) dois pontos de equilíbrio do tipo sela de  $X$  ou de  $Y$ ;

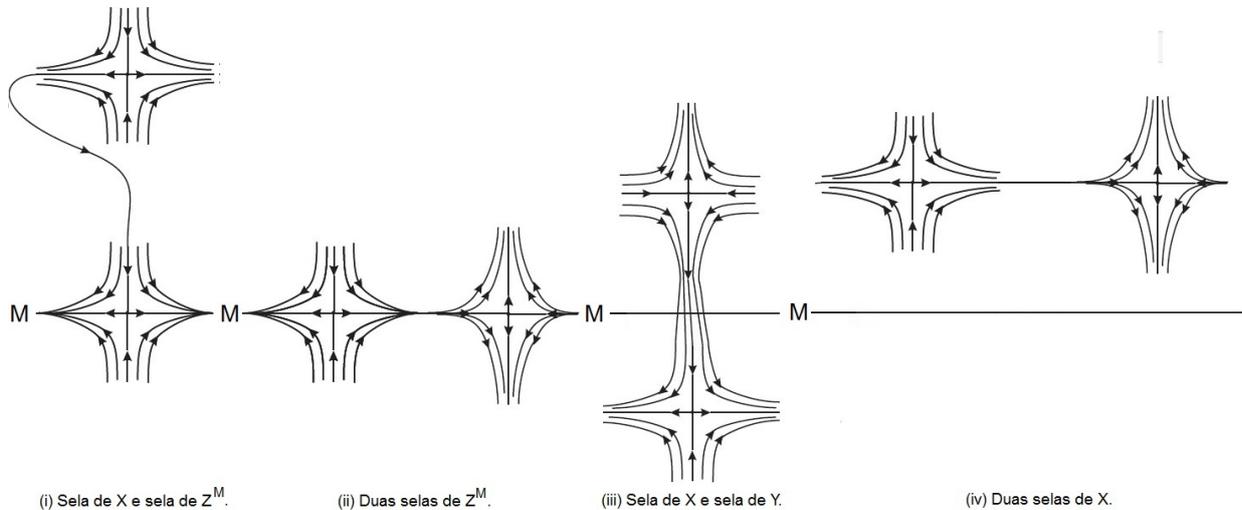


Figura 4.10:  $M$ -conexões de sela de  $Z = (X, Y)$ .

**Corolário 4.1.1.** Seja  $Z = (X, Y)$  de tal forma que  $X$  e  $Y$  estão em  $\Sigma^r(N)$ , todas as  $M$ -singularidades de  $Z$  são pontos de equilíbrio hiperbólico de  $Z^M$  ou ponto de dobra de  $Z$  e  $Z$  não possui  $M$ -conexão de sela. Então existe um  $\varepsilon_0$  tal que para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  temos:

- (i) todos os pontos de equilíbrio de  $Z_\varepsilon$  são hiperbólicos;
- (ii)  $Z_\varepsilon$  não possui conexões de sela.

*Demonstração.*

- (i) Se  $p$  é um ponto de equilíbrio que satisfaz todas as hipóteses do corolário, então por definição  $p$  é um ponto  $M$ -singular elementar de  $Z$ .

Se  $p$  é um ponto de dobra de  $Z$  então pelo Lema 4.1.2 existe uma vizinhança de  $p$  em que  $Z_\varepsilon$  não possui pontos de equilíbrio.

Se  $p$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico de  $Z^M$  então pelo Lema 4.1.4 existe uma vizinhança de  $p$  no qual  $Z_\varepsilon$  possui um ponto de equilíbrio hiperbólico.

(ii) Se  $Z_\varepsilon$  possui conexões de sela então:

- ou, antes da regularização, essas selas eram duas selas de  $X$  conectadas ou duas selas de  $Y$  conectadas;
- ou, antes da regularização, essas selas eram uma sela de  $X$  conectada a uma sela de  $Y$ ;
- ou, antes da regularização, essas selas eram uma sela de  $X$  ou de  $Y$  conectadas a uma sela de  $Z^M$ .

O que em todos os casos nos dá um absurdo, pois por hipótese  $Z$  não possuem  $M$ -conexões de sela. Assim  $Z_\varepsilon$  não possui conexões de sela.

□

**Observação 4.1.3.** Sob as hipóteses do Corolário 4.1.1, os limites das separatrizes sobre  $M$  de um ponto de equilíbrio de  $Z^M$  do tipo sela são ou um ponto de dobra de  $Z$  ou um ponto de equilíbrio do tipo atrator (ou repulsor) de  $Z^M$ . Isto significa, em particular, que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno,  $Z_\varepsilon$  não possui conexões de sela dentro de uma vizinhança de  $M$  em  $S$ .

**Definição 4.1.7.** Dizemos que uma curva fechada  $\gamma$ , formada por partes de órbitas regulares de  $X$  em  $M^+$  e órbitas regulares de  $Y$  em  $M^-$  é uma órbita  $M$ -periódica de  $Z = (X, Y)$  se  $\gamma$  intersecta  $M$  somente em  $M_c$  e cada parte é transversal à  $M$ .

**Observação 4.1.4.** Dada uma órbita  $M$ -periódica  $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_k$  com  $\gamma_{2i} \in M^+$ ,  $\gamma_{2i+1} \in M^-$  e  $\gamma_i \cap M = \{p_i\} \cup \{p_{i+1}\}$ , podemos definir uma coleção de germes em  $p_i$  de  $\mathcal{C}^r$ -transformações de Poincaré

$$\eta_i : (M, p_i) \rightarrow (M, p_{i+1}),$$

$i = 0, 1, \dots, k$  (associado a  $X$  ou a  $Y$ ) tal que a função primeiro retorno associada é dada por:

$$\eta = \eta_k \circ \eta_{k-1} \circ \dots \circ \eta_0, \text{ tal que } \eta(p_0) = p_0.$$

**Definição 4.1.8.** Uma órbita  $M$ -periódica  $\gamma$  de  $Z$  é dita elementar se a função primeiro retorno de Poincaré associada, em qualquer ponto  $p \in \gamma$ , satisfaz:  $\eta'(p) \neq 1$ .

**Lema 4.1.5.** *Seja  $\gamma$  uma órbita  $M$ -periódica elementar de  $Z = (X, Y)$ . Então existe uma vizinhança  $B$  de  $\gamma$  em  $S$  e um  $\varepsilon_0$  tais que para todo  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $Z_\varepsilon$  contém uma única órbita periódica hiperbólica em  $B$ .*

*Demonstração.*

Seja  $\gamma$  uma órbita  $M$ -periódica elementar de  $Z = (X, Y)$ , então a função primeiro retorno de Poincaré associada, em qualquer ponto  $p \in \gamma$ , satisfaz  $\eta'(p) \neq 1$ . Mais ainda, como  $\gamma$  é periódica, o seu gráfico intercepta o gráfico da função identidade, isto é, existe  $p_0$  tal que  $\eta(p_0) = p_0$ . Na regularização de  $Z$ , isto é,  $Z_\varepsilon$ , consideremos  $\eta_\varepsilon$  como sendo a função de Poincaré  $\eta$  depois da regularização.

Agora para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, teremos as funções de Poincaré  $\eta$  e  $\eta_\varepsilon$  bem próximas, donde segue que em qualquer ponto  $p \in \gamma_\varepsilon$  temos  $\eta'_\varepsilon(p) \neq 1$  e o gráfico  $\eta_\varepsilon$  também intercepta o gráfico da função identidade, ou seja, existe  $p_1$  tal que  $\eta_\varepsilon(p_1) = p_1$ , para  $p_1$  em uma vizinhança de  $p_0$ .

Desta forma, existe uma vizinhança  $B$  de  $\gamma$  contendo pelo menos uma órbita periódica em  $B$ , a qual também é hiperbólica. Logo, como  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno teremos a garantia da unicidade, afinal  $\eta_\varepsilon$  está suficientemente próxima de  $\eta$ , então em uma vizinhança  $B$  não tem como existir outra órbita periódica (em uma vizinhança de  $p_0$ , a função  $\eta_\varepsilon$  não pode ter dois pontos fixos, pois ela é suave e intercepta a função identidade de forma transversal).

□

**Observação 4.1.5.** O principal resultado abordado em [21] é a garantia da estabilidade estrutural de  $Z_\varepsilon$ , para qualquer função de transição e  $\varepsilon > 0$  pequeno. Tal objetivo foi alcançado caracterizando a classe  $\Sigma(S^2)$  dos campos de vetores estruturalmente estáveis sobre  $S^2$ , enunciados por Andronov-Pontryagin e Peixoto em [17].

## Capítulo 5

# Ciclos limites para equações diferenciais polinomiais descontínuas de Liénard com $m$ zonas

Os sistemas diferenciais polinomiais descontínuos de Liénard possuem muitas aplicações. As equações diferenciais descontínuas com zonas ou de forma mais geral equações não suaves derivadas de equações diferenciais ordinárias, não apresentam unicidade de solução. Sua teoria foi desenvolvida de forma bem acelerada nos últimos anos devido à: sua beleza matemática, sua forte relação com outros ramos da ciência, o desafio de se desenvolver definições e convenções razoáveis e consistentes. Tornou-se uma fronteira comum entre a Matemática, Física e Engenharia. Elas aparecem de forma natural em sistemas de controle, em sistemas de impacto, em sistemas mecânicos, oscilações não lineares, e em circuitos elétricos, justificando o fato de possuírem muitas aplicações, por exemplo, o trabalho desenvolvido por Makarenkov e Lamb em [13].

Écalle em [5] e Ilyashenko em [7] provaram que qualquer sistema diferencial polinomial possui um número finito de ciclos limites e esta prova, se não foi o melhor resultado nesta área, com toda certeza é uma das melhores.

Desta forma, temos um número finito de ciclos limites para cada sistema diferencial polinomial de grau  $n$ , o que nos gera uma pergunta: Existe uma quota uniforme para esse número em toda classe ou família de todos os sistemas diferenciais polinomiais? Llibre e Teixeira, em [12], consideraram este problema para uma classe especial de sistemas diferenciais polinomiais descontínuos

de Liénard.

**Definição 5.0.9.** *Um sistema diferencial polinomial de Liénard é da forma:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}, \quad (5.1)$$

onde  $F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  e “ $\cdot$ ” denota a derivada com relação a variável  $t$ .

O problema para se determinar o número máximo de ciclos limites para um determinado sistema diferencial, tornou-se um dos principais objetivos na teoria qualitativa de sistemas diferenciais. Vamos levar este problema para uma classes de sistemas dinâmicos descontínuos. Um bom representante dessa classe é o seguinte modelo matemático:

$$\ddot{x} + x + f(x, \dot{x}) = \text{sgn}(g(x, \dot{x}))U(x, \dot{x}). \quad (5.2)$$

O modelo (5.2) é encontrado, por exemplo, na teoria de controle, em sistemas de retransmissão, economia, sistemas de impacto, sistemas mecânicos em oscilações não lineares. Nestas áreas encontrar ciclos limites é de muita importância e este é só mais um motivo de que vale o estudo dos ciclos limites. Realizaremos o estudo dos ciclos limites de equações diferenciais polinomiais de Liénard descontínuas com  $m$  zonas.

Um sistema diferencial polinomial de Liénard descontínuo com  $m$  zonas, como em [12], é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \text{sgn}(g_m(x, y))F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}, \quad (5.3)$$

onde  $F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  e o conjunto de zeros da função  $\text{sgn}(g_m(x, y))$  com  $m = 2, 4, 6, \dots$ , é a união de  $\frac{m}{2}$  diferentes retas passando pela origem dividindo o plano em setores angulares de tamanho  $\frac{2\pi}{m}$ . Mais ainda  $\text{sgn}(z)$  denota a função sinal.

**Observação 5.0.6.** Notemos que o sistema diferencial (5.3) é um caso particular do sistema diferencial (5.2), o qual de certa forma generaliza a classe de sistemas diferenciais de Liénard para os sistemas diferenciais descontínuos.

De fato, seja  $-y = \dot{x}$  e com isso  $-\dot{y} = \ddot{x} = \text{sgn}(g(x, \dot{x}))U(x, \dot{x}) - x - f(x, \dot{x})$ . Logo temos:

$$\begin{cases} \dot{y} = \text{sgn}(g_m(x, -y))(-U(x, -y)) + x + f(x, -y) \\ \dot{x} = -y \end{cases}, \quad (5.4)$$

onde  $f(x, -y) = 0$  e  $-U(x, -y) = F(x)$ .

Como em [12] consideramos também o caso da equação (5.3) em que  $m = 0$  com  $g_0(x, y) = 1$ . Portanto, a equação diferencial para  $m = 0$  coincide com a equação diferencial polinomial de Liénard (5.1). Por esta razão, chamaremos o sistema diferencial polinomial descontínuo com  $m$  zonas (5.3), para  $m = 2, 4, 6, \dots$ , de equação ou sistema diferencial polinomial de Liénard descontínuo de grau  $n$  com  $m$  zonas, no qual  $n$  é o grau do polinômio  $F(x)$ .

Relembramos que um ciclo limite é uma solução periódica isolada de uma equação diferencial, ou seja, existe uma vizinhança dessa solução de tal forma que nela só exista uma solução periódica.

De agora em diante, quando dissermos que “a maior quota inferior para o número máximo de ciclos limites de um sistema diferencial é  $M$ ”, significa que este sistema pode ter  $M$  ciclos limites se o lado direito do sistema for escolhido de forma conveniente.

**Definição 5.0.10.** *Vamos definir  $L(m, n)$  como sendo a maior quota inferior para o número máximo de ciclos limites de uma equação diferencial polinomial de Liénard descontínua de grau  $n$  com  $m$  zonas.*

## 5.1 Cálculos de $L(0, n)$ , $L(2, n)$ e $L(4, n)$

Para os sistemas diferenciais polinomiais de Liénard de grau  $n$ , Ilyashenko e Panov em [8], provaram que quando  $n$  é ímpar existe um limite superior uniforme para o número de ciclos limites em uma subclasse desses sistemas de tal forma que  $F$  seja mônico e seus coeficientes satisfazem algumas estimativas.

Vamos encontrar uma quota inferior para o número máximo de ciclos limites de equações diferenciais polinomiais de Liénard descontínuas com  $m$  zonas (5.3) com  $m = 2, 4$ .

Primeiramente, vamos fornecer a prova de  $L(0, n)$ , que é um caso contínuo.

**Observação 5.1.1.** Consideramos a mudança de coordenadas polares  $(x, y)$  para  $(r, \theta)$ ,  $x = r\cos(\theta)$  e  $y = r\sin(\theta)$ .

A partir das relações  $r^2 = x^2 + y^2$  e  $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ , derivando ambos os lados das igualdades em relação a variável independente  $t$  obtemos o sistema  $\dot{r}$  e  $\dot{\theta}$ :

$$2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \Rightarrow \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}.$$

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)}\dot{\theta} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \cos^2(\theta) \left( \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} \right).$$

**Proposição 5.1.1.** *No conjunto dos sistemas diferenciais polinomiais de Liénard de grau  $n$  temos  $L(0, n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ , onde  $[z]$  denota a função parte inteira de  $z$ .*

*Demonstração.* Para provarmos que  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  é uma quota inferior para o número máximo de ciclos limites do sistema diferencial polinomial de Liénard (5.1) de grau  $n$ , vamos mostrar que existem sistemas diferenciais da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon a_0 + \varepsilon a_1 x + \dots + \varepsilon a_n x^n \\ \dot{y} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}, \quad (5.5)$$

com  $F(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$  e  $a_n \neq 0$  tendo  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  ciclos limites.

Considerando as coordenadas polares  $(r, \theta)$  tal que  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$  dadas na Observação 5.1.1 e pelas equações em (5.5) temos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{r} = \frac{r \cos(\theta) [r \sin(\theta) + \varepsilon F(r \cos(\theta))] + r \sin(\theta) [-r \cos(\theta)]}{r} \\ \dot{\theta} = \cos^2(\theta) \left( \frac{[-r \cos(\theta)] r \cos(\theta) - [r \sin(\theta) + \varepsilon F(r \cos(\theta))] r \sin(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta)} \right) \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + r \cos(\theta) \varepsilon F(r \cos(\theta)) - r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \\ \dot{\theta} = \cos^2(\theta) \left( \frac{-r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta) - \varepsilon F(r \cos(\theta)) r \sin(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta)} \right) \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \frac{r \cos(\theta) \varepsilon F(r \cos(\theta))}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{-r^2 [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] - \varepsilon F(r \cos(\theta)) r \sin(\theta)}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \cos(\theta) F(r \cos(\theta)) \\ \dot{\theta} = \frac{-r^2 - \varepsilon F(r \cos(\theta)) r \sin(\theta)}{r^2} \end{cases} \\ & \therefore \begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \cos(\theta) F(r \cos(\theta)) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \frac{1}{r} \sin(\theta) F(r \cos(\theta)) \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Tomando agora  $\theta$  como a nova variável independente, o sistema (5.6) é transformado.

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\varepsilon \cos(\theta) F(r \cos(\theta))}{-1 - \varepsilon \frac{1}{r} \operatorname{sen}(\theta) F(r \cos(\theta))} = B(\varepsilon).$$

Como o parâmetro  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno, consideramos a série de Taylor de  $B(\varepsilon)$  em torno de  $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} B(\varepsilon) &= B(0) + \frac{dB}{d\varepsilon}(0)\varepsilon + \frac{d^2B}{d\varepsilon^2}(0)\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{d^3B}{d\varepsilon^3}(0)\frac{\varepsilon^3}{6} + \dots \\ &= -\cos(\theta)F(r\cos(\theta))\varepsilon + \left[ \frac{d^2B}{d\varepsilon^2}(0)\frac{1}{2} + \frac{d^3B}{d\varepsilon^3}(0)\frac{\varepsilon}{6} + \dots \right] \varepsilon^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{dr}{d\theta} = B(\varepsilon) = \varepsilon f(\theta, r) + \varepsilon^2 g(\theta, r, \varepsilon), \quad (5.7)$$

onde  $f(\theta, r) = -\cos(\theta)F(r\cos(\theta))$  e  $g(\theta, r, \varepsilon) = \left[ \frac{d^2B}{d\varepsilon^2}(0)\frac{1}{2} + \frac{d^3B}{d\varepsilon^3}(0)\frac{\varepsilon}{6} + \dots \right]$

A equação diferencial (5.7) satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2.2.2 e do Teorema 2.2.3 então podemos aplicá-los. As funções  $f$  e  $g$  são periódicas de período  $2\pi$  na variável  $\theta$ , então a equação da média de (5.7) no intervalo  $[0, 2\pi]$  é:

$$\begin{aligned} f_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, r) d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) F(r \cos(\theta)) d\theta = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^n a_i r^i \int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) d\theta = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} r^{2j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+2}(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

pois  $\int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) d\theta = 0$  para  $i = 0, \dots, n$  par e  $\int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) d\theta \neq 0$  para  $i = 0, \dots, n$  ímpar.

Denotando  $b_{2j+1} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+2}(\theta) d\theta$ , para  $j = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  então:

$$f_0(r) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} b_{2j+1} r^{2j+1}.$$

Os monômios que aparecem no polinômio  $f_0(r)$  são  $r, r^3, \dots, r^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}$  cujos coeficientes são  $c_{2j+1} = a_{2j+1} b_{2j+1}$ , ou seja, temos  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$  monômios.

É possível escolher livremente o coeficiente  $a_{2j+1} = \frac{c_{2j+1}}{b_{2j+1}}$  do monômio  $r^{2j+1}$  tal que  $a_{2j+1} \neq 0$ . Então pelo Teorema de Descartes podemos escolher os coeficientes de  $f_0(r)$  de tal maneira que  $f_0(r)$  possua exatamente  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 - 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  raízes reais positivas, denotadas por  $r_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ . Notemos que as raízes são simples.

Segue dos Teoremas 2.2.2 e 2.2.3 que o sistema (5.5) possui  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  ciclos limites em uma vizinhança de  $r_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ .

□

Agora iremos fornecer a prova para  $L(2, n)$  e para  $L(4, n)$ .

**Proposição 5.1.2.** *No conjunto dos sistemas diferenciais polinomiais de Liénard descontínuos de grau  $n$  com 2 zonas temos  $L(2, n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ , onde  $[z]$  denota a função parte inteira de  $z$ .*

*Demonstração.* Para provarmos que  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  é uma quota inferior para o número máximo de ciclos limites do sistema diferencial polinomial de Liénard de grau  $n$  com 2 zonas, vamos mostrar que existem sistemas diferenciais da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{sgn}(x)[\varepsilon a_0 + \varepsilon a_1 x + \dots + \varepsilon a_n x^n] \\ \dot{y} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon \operatorname{sgn}(x)F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}, \quad (5.8)$$

com  $g_2(x, y) = x$ ,  $F(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$  e  $a_n \neq 0$  tendo  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  ciclos limites.

Considerando as coordenadas polares  $(r, \theta)$  tal que  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$  dadas na Observação 5.1.1 e por (5.8) temos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{r} = \frac{r \cos(\theta)[r \sin(\theta) + \varepsilon \operatorname{sgn}(r \cos(\theta))F(r \cos(\theta))] + r \sin(\theta)[-r \cos(\theta)]}{r} \\ \dot{\theta} = \cos^2(\theta) \left( \frac{[-r \cos(\theta)]r \cos(\theta) - [r \sin(\theta) + \varepsilon \operatorname{sgn}(r \cos(\theta))F(r \cos(\theta))]r \sin(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta)} \right) \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + r \cos(\theta) \varepsilon \operatorname{sgn}(r \cos(\theta))F(r \cos(\theta)) - r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \\ \dot{\theta} = \cos^2(\theta) \left( \frac{-r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta) - \varepsilon \operatorname{sgn}(r \cos(\theta))F(r \cos(\theta))r \sin(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta)} \right) \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \frac{r \cos(\theta) \varepsilon \operatorname{sgn}(r \cos(\theta))F(r \cos(\theta))}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{-r^2 [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] - \varepsilon \operatorname{sgn}(r \cos(\theta))F(r \cos(\theta))r \sin(\theta)}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \cos(\theta) \operatorname{sgn}(r \cos(\theta))F(r \cos(\theta)) \\ \dot{\theta} = \frac{-r^2 - \varepsilon \operatorname{sgn}(r \cos(\theta))F(r \cos(\theta))r \sin(\theta)}{r^2} \end{cases} \\ & \therefore \begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \operatorname{sgn}(r \cos(\theta)) \cos(\theta) F(r \cos(\theta)) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \operatorname{sgn}(r \cos(\theta)) \frac{1}{r} \sin(\theta) F(r \cos(\theta)) \end{cases} \quad (5.9) \end{aligned}$$

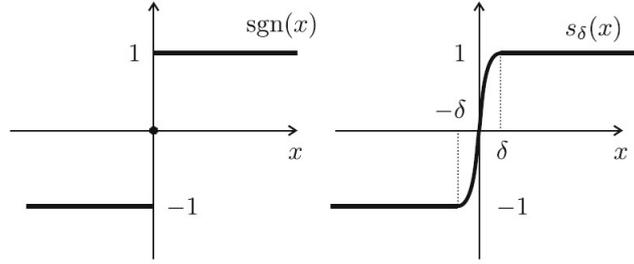


Figura 5.1: As funções  $sgn(x)$  e  $s_\delta(x)$ .

Em vez de trabalhar com o sistema diferencial descontínuo (5.8), iremos trabalhar com o seguinte sistema diferencial suave:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon s_\delta(x)F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}, \quad (5.10)$$

onde  $s_\delta(x)$  é uma função de transição definida como na Figura 5.1 tal que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} s_\delta(x) = sgn(x)$ .

Logo, em coordenadas polares, o sistema (5.10) fica como:

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon s_\delta(rcos(\theta))cos(\theta)F(rcos(\theta)) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon s_\delta(rcos(\theta))\frac{1}{r}sen(\theta)F(rcos(\theta)) \end{cases}. \quad (5.11)$$

Vale ressaltar o fato de as aplicações de Poincaré dos sistemas (5.9) e (5.11) serem suaves. No sistema (5.11) porque temos um sistema contínuo, graças à regularização, e desta forma pelos resultados gerais de equações diferenciais ordinárias suaves segue a suavidade da aplicação de Poincaré.

Agora, faremos a justificativa da suavidade da aplicação de Poincaré do sistema (5.9) e para isso usaremos o sistema (5.8) em coordenadas cartesianas. No sistema (5.8) temos a descontinuidade dada por  $h^{-1}(0)$ , onde  $h(x, y) = x$ , que é uma variedade, pois  $\nabla h(x, y) = (1, 0) \neq (0, 0)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Definimos

$$X(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \text{e} \quad Y(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}.$$

Logo, a região de deslize na reta  $x = 0$  é determinada por:

$$\begin{aligned} Xh(0, y) \cdot Yh(0, y) < 0 &\Leftrightarrow (y + \varepsilon F(0))(y - \varepsilon F(0)) < 0 \Leftrightarrow y^2 - \varepsilon^2 F^2(0) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 < \varepsilon^2 F^2(0) \Leftrightarrow |y| < |\varepsilon F(0)| \Leftrightarrow |y| < \varepsilon |a_0|. \end{aligned}$$

Se  $a_0 = 0$  então sempre teremos região de costura na reta  $x = 0$ , exceto na origem, e juntando com o fato de os campos  $X$  e  $Y$  serem linearmente dependentes, em cada  $p$  na região de costura, segue a suavidade da aplicação de Poincaré.

Se  $a_0 \neq 0$ , ou seja,  $a_0 < 0$  ou  $a_0 > 0$  teremos região de deslize ou escape em  $x = 0$  para  $|y| < \varepsilon|a_0|$ . Sem perda de generalidade, suponhamos  $a_0 > 0$ . Então para  $-\varepsilon a_0 < y < \varepsilon a_0$  temos região de deslize ou escape em  $x = 0$ . Observemos que

$$Xh(0, y) = y + \varepsilon a_0 > -\varepsilon a_0 + \varepsilon a_0 = 0 \Rightarrow Xh(0, y) > 0,$$

$$Yh(0, y) = y - \varepsilon a_0 < \varepsilon a_0 - \varepsilon a_0 = 0 \Rightarrow Yh(0, y) < 0,$$

ou seja, os pontos  $(0, y)$  com  $-\varepsilon a_0 < y < \varepsilon a_0$  formam uma região de escape em  $x = 0$ .

Para o campo descontínuo, a aplicação de Poincaré  $P$  é determinada pela composição de uma aplicação  $P_D$  dada pelo fluxo do campo  $X$  no semi-plano  $x > 0$  e uma aplicação  $P_E$  dada pelo fluxo do campo  $Y$  no semi-plano  $x < 0$ . Claramente, o sistema (5.8) é uma perturbação de um centro e como temos região de escape em  $x = 0$  para  $|y| < \varepsilon a_0$  e  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno, segue o fato da aplicação de Poincaré tomada inicialmente em um ponto na região de costura na reta  $x = 0$ , isto é  $|y| > \varepsilon a_0$ , retornar na reta  $x = 0$  na região de costura.

Partindo de um ponto  $(0, y)$  com  $y > \varepsilon a_0$  na região de costura,  $P_D(0, y) = (0, y_1)$  tendo  $y_1 < -\varepsilon a_0$  e  $P_E(0, y_1) = (0, y_2)$  tendo  $y_2 > \varepsilon a_0$ . A aplicação  $P$  é dada por:  $P = P_E \circ P_D$ . Sobre a região de costura os campos  $X$  e  $Y$  são linearmente dependentes. Segue deste fato e da suavidade de  $P_E$  e  $P_D$  que a aplicação primeiro retorno de Poincaré  $P$  é suave.

A regularização de sistemas descontínuos próximo de região de costura em [21], nos mostra que o limite da aplicação de Poincaré do sistema (5.10) tende para a aplicação de Poincaré do sistema (5.8), quando  $\delta \rightarrow 0$ .

Tomando agora  $\theta$  como a nova variável independente, o sistema (5.9) é transformado em

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\varepsilon \operatorname{sgn}(r \cos(\theta)) \cos(\theta) F(r \cos(\theta))}{-1 - \varepsilon \operatorname{sgn}(r \cos(\theta)) \frac{1}{r} \operatorname{sen}(\theta) F(r \cos(\theta))} = D(\varepsilon).$$

Como o parâmetro  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno consideramos a série de Taylor de  $D(\varepsilon)$  em torno de  $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} D(\varepsilon) &= D(0) + \frac{dD}{d\varepsilon}(0)\varepsilon + \left[ \frac{d^2 D}{d\varepsilon^2}(0) \frac{1}{2} + \frac{d^3 D}{d\varepsilon^3}(0) \frac{\varepsilon}{6} + \dots \right] \varepsilon^2 = \\ &= -\varepsilon \operatorname{sgn}(r \cos(\theta)) \cos(\theta) F(r \cos(\theta)) + \left[ \frac{d^2 D}{d\varepsilon^2}(0) \frac{1}{2} + \frac{d^3 D}{d\varepsilon^3}(0) \frac{\varepsilon}{6} + \dots \right] \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dr}{d\theta} = D(\varepsilon) = \varepsilon f(\theta, r) + \varepsilon^2 g(\theta, r, \varepsilon), \quad (5.12)$$

onde  $f(\theta, r) = -\operatorname{sgn}(r \cos(\theta)) \cos(\theta) F(r \cos(\theta))$  e  $g(\theta, r, \varepsilon) = \left[ \frac{d^2 D}{d\varepsilon^2}(0) \frac{1}{2} + \frac{d^3 D}{d\varepsilon^3}(0) \frac{\varepsilon}{6} + \dots \right]$ .

Analogamente, considerando  $\theta$  como variável independente de (5.11) temos

$$\frac{dr}{d\theta} = G(\varepsilon) = \varepsilon f^\delta(\theta, r) + \varepsilon^2 g^\delta(\theta, r, \varepsilon), \quad (5.13)$$

onde  $f^\delta(\theta, r) = -s_\delta(r \cos(\theta)) \cos(\theta) F(r \cos(\theta))$  e  $g^\delta(\theta, r, \varepsilon) = \left[ \frac{d^2 G}{d\varepsilon^2}(0) \frac{1}{2} + \frac{d^3 G}{d\varepsilon^3}(0) \frac{\varepsilon}{6} + \dots \right]$ .

Por outro lado, seguindo a demonstração do Teorema em [3] concluímos que na expansão em série de Taylor da aplicação de Poincaré  $P_\delta$ , do sistema regularizado em torno de  $\varepsilon = 0$ , o coeficiente de  $\varepsilon$  é exatamente a função média  $f_0^\delta$  associada ao método da média. Se seguirmos as mesmas ideias para o sistema descontínuo (5.12), já que a aplicação de Poincaré  $P$  para este caso também é suave temos que o coeficiente de  $\varepsilon$  na expansão em série de Taylor em torno de  $\varepsilon = 0$  é a função média de (5.12). Como  $\lim_{\delta \rightarrow 0} P_\delta = P$ , então o coeficiente de  $\varepsilon$  em  $P_\delta$  tende ao coeficiente de  $\varepsilon$  em  $P$ , ou seja,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} f_0^\delta = f_0$ . Desta forma, podemos analisar os zeros simples da função média do sistema descontínuo.

A equação (5.13) satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2.2.2 e do Teorema 2.2.3, as funções  $f$  e  $g$  são periódicas de período  $2\pi$  na variável  $\theta$ . Então a equação da média de (5.12) no intervalo  $[0, 2\pi]$  é dada por:

$$f_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, r) d\theta.$$

Como  $f(\theta, r)$  é  $2\pi$ -periódica temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, r) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(u, r) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\operatorname{sgn}(r \cos(u)) \cos(u) F(r \cos(u)) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\operatorname{sgn}(r \cos(u)) \cos(u) F(r \cos(u)) du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\operatorname{sgn}(r \cos(u)) \cos(u) F(r \cos(u)) du \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos(u) F(r \cos(u)) du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(u) F(r \cos(u)) du \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Fazendo  $u = \theta$  na primeira integral da equação (5.14), temos  $du = d\theta$  e fazendo  $u = \theta - \pi$  na segunda integral da equação (5.14), temos  $du = d\theta$ , desta forma transformamos a equação (5.14)

em:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos(\theta)F(r\cos(\theta)) + \cos(\theta - \pi)F(r\cos(\theta - \pi))d\theta \right) = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos(\theta)F(r\cos(\theta)) + [\cos(\theta)\cos\pi + \text{sen}(\theta)\text{sen}\pi] F(r[\cos(\theta)\cos\pi + \text{sen}(\theta)\text{sen}\pi])d\theta = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos(\theta)F(r\cos(\theta)) - \cos(\theta)F(r[-\cos(\theta)])d\theta = \\
& = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)F(r\cos(\theta)) + \cos(\theta)F(-r\cos(\theta))d\theta = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j}r^{2j} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2j+1}(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Observe o fato de que:

$$\begin{aligned}
& \cos(\theta) \geq 0, \text{ para } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow \cos^{2j+1}(\theta) \geq 0, \text{ para } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2j+1}(\theta)d\theta \geq 0.
\end{aligned}$$

Denotando  $b_{2j} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2j+1}(\theta)d\theta$ , para  $j = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , se  $b_{2j} < 0$  então:

$$f_0(r) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j}b_{2j}r^{2j}.$$

Os monômios que aparecem no polinômio  $f_0(r)$  são  $r^0, r^2, \dots, r^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  cujos coeficientes são  $c_{2j} = a_{2j}b_{2j}$ , ou seja, temos  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  monômios.

É possível escolher livremente o coeficiente  $a_{2j} = \frac{c_{2j}}{b_{2j}}$  do monômio  $r^{2j}$  tal que  $a_{2j} \neq 0$ . Então pelo Teorema de Descartes podemos escolher os coeficientes de  $f_0(r)$  de tal maneira que  $f_0(r)$  possua exatamente  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 - 1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  raízes reais positivas, denotadas por  $r_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Notemos que as raízes são simples.

Segue dos Teoremas 2.2.2 e 2.2.3 que o sistema (5.8) possui  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  ciclos limites em uma vizinhança de  $r_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

□

**Proposição 5.1.3.** *No conjunto dos sistemas diferenciais polinomiais de Liénard descontínuos de grau  $n$  com 4 zonas temos  $L(4, n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ .*

*Demonstração.* Para provarmos que  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  é uma quota inferior para o número máximo de ciclos limites do sistema diferencial polinomial de Liénard descontínuo de grau  $n$  com 4 zonas, mostraremos que existem sistemas diferenciais da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{sgn}(x^2 - y^2)[\varepsilon a_0 + \varepsilon a_1 x + \dots + \varepsilon a_n x^n] \\ \dot{y} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon \operatorname{sgn}(x^2 - y^2)F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}, \quad (5.15)$$

com  $F(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$  e  $a_n \neq 0$  tendo  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  ciclos limites.

Considerando agora as coordenadas polares  $(r, \theta)$  tal que  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \operatorname{sen}(\theta)$  dadas na Observação 5.1.1 e por (5.15) temos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{r} = \frac{r \cos(\theta)[r \operatorname{sen}(\theta) + \varepsilon \operatorname{sgn}(r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \operatorname{sen}^2(\theta))F(r \cos(\theta))] + r \operatorname{sen}(\theta)[-r \cos(\theta)]}{r} \\ \dot{\theta} = \cos^2(\theta) \left( \frac{[-r \cos(\theta)]r \cos(\theta) - [r \operatorname{sen}(\theta) + \varepsilon \operatorname{sgn}(r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \operatorname{sen}^2(\theta))F(r \cos(\theta))]r \operatorname{sen}(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta)} \right) \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \frac{r^2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + r \cos(\theta) \varepsilon \operatorname{sgn}(r^2 [\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)])F(r \cos(\theta)) - r^2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)}{r} \\ \dot{\theta} = \cos^2(\theta) \left( \frac{-r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) - \varepsilon \operatorname{sgn}(r^2 [\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)])F(r \cos(\theta))r \operatorname{sen}(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta)} \right) \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \frac{r \cos(\theta) \varepsilon \operatorname{sgn}(r^2 \cos(2\theta))F(r \cos(\theta))}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{-r^2 [\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)] - \varepsilon \operatorname{sgn}(r^2 \cos(2\theta))F(r \cos(\theta))r \operatorname{sen}(\theta)}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \cos(\theta) \operatorname{sgn}(r^2) \operatorname{sgn}(\cos(2\theta))F(r \cos(\theta)) \\ \dot{\theta} = \frac{-r^2 - \varepsilon \operatorname{sgn}(r^2) \operatorname{sgn}(\cos(2\theta))F(r \cos(\theta))r \operatorname{sen}(\theta)}{r^2} \end{cases} \\ & \quad \therefore \begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \operatorname{sgn}(\cos(2\theta)) \cos(\theta) F(r \cos(\theta)) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \operatorname{sgn}(\cos(\theta)) \frac{1}{r} \operatorname{sen}(\theta) F(r \cos(\theta)) \end{cases}. \quad (5.16) \end{aligned}$$

Usando argumentos semelhantes para a prova da Proposição 5.1.2, temos que o sistema diferencial descontínuo (5.16) é o limite em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  de sistemas diferenciais suaves.

Tomando agora  $\theta$  como a nova variável independente, o sistema (5.16) pode ser escrito como:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{dr}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\varepsilon \operatorname{sgn}(\cos(2\theta)) \cos(\theta) F(r \cos(\theta))}{-1 - \varepsilon \operatorname{sgn}(\cos(2\theta)) \frac{1}{r} \operatorname{sen}(\theta) F(r \cos(\theta))} = A(\varepsilon).$$

Como o parâmetro  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno consideramos a série de Taylor de  $A(\varepsilon)$  em torno de  $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= A(0) + \frac{dA}{d\varepsilon}(0)\varepsilon + \left[ \frac{d^2A}{d\varepsilon^2}(0)\frac{1}{2} + \frac{d^3A}{d\varepsilon^3}(0)\frac{\varepsilon}{6} + \dots \right] \varepsilon^2 = \\ &= -\varepsilon \operatorname{sgn}(\cos(2\theta))\cos(\theta)F(r\cos(\theta)) + \left[ \frac{d^2A}{d\varepsilon^2}(0)\frac{1}{2} + \frac{d^3A}{d\varepsilon^3}(0)\frac{\varepsilon}{6} + \dots \right] \varepsilon^2 = \\ &= \varepsilon f(\theta, r) + \varepsilon^2 g(\theta, r, \varepsilon). \end{aligned}$$

Dai,

$$\frac{dr}{d\theta} = A(\varepsilon) = \varepsilon f(\theta, r) + \varepsilon^2 g(\theta, r, \varepsilon), \quad (5.17)$$

onde  $f(\theta, r) = -\operatorname{sgn}(\cos(2\theta))\cos(\theta)F(r\cos(\theta))$  e  $g(\theta, r, \varepsilon) = \left[ \frac{d^2A}{d\varepsilon^2}(0)\frac{1}{2} + \frac{d^3A}{d\varepsilon^3}(0)\frac{\varepsilon}{6} + \dots \right]$ .

Uma vez que a equação diferencial (5.17) é o limite de sistemas que satisfazem todas as hipóteses do Teorema 2.2.2 e do Teorema 2.2.3 podemos analisar os zeros da função média de (5.17).

Observamos que  $f$  e  $g$  são periódicas de período  $2\pi$  na variável  $\theta$ , então a equação da média de (5.17) no intervalo  $[0, 2\pi]$  é:

$$f_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, r) d\theta.$$

Como  $f(\theta, r)$  é  $2\pi$ -periódica temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, r) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f(u, r) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} -\operatorname{sgn}(\cos(2u))\cos(u)F(r\cos(u)) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -\operatorname{sgn}(\cos(2u))\cos(u)F(r\cos(u)) du + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} -\operatorname{sgn}(\cos(2u))\cos(u)F(r\cos(u)) du + \right. \\ &+ \left. \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} -\operatorname{sgn}(\cos(2u))\cos(u)F(r\cos(u)) du + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} -\operatorname{sgn}(\cos(2u))\cos(u)F(r\cos(u)) du \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -\cos(u)F(r\cos(u)) du + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(u)F(r\cos(u)) du + \right. \\ &+ \left. \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} -\cos(u)F(r\cos(u)) du + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos(u)F(r\cos(u)) du \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$f_0(r) = \frac{1}{2\pi} (I_1 + I_2), \text{ onde}$$

$$I_1 = - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(u)F(r\cos(u)) du - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(u)F(r\cos(u)) du ;$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(u)F(r\cos(u)) du + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos(u)F(r\cos(u)) du.$$

Fazendo  $u = \theta$  na primeira integral em  $I_1$ , temos  $du = d\theta$  e fazendo  $u = \theta + \pi$  na segunda integral em  $I_1$  temos  $du = d\theta$ , desta forma transformamos  $I_1$  em:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -\cos(\theta)F(r\cos(\theta))d\theta - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\theta + \pi)F(r\cos(\theta + \pi))d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -\cos(\theta)F(r\cos(\theta))d\theta - \\
&- \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(\theta)\cos\pi - \text{sen}(\theta)\text{sen}\pi)F(r(\cos(\theta)\cos\pi - \text{sen}(\theta)\text{sen}\pi))d\theta = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -\cos(\theta)F(r\cos(\theta))d\theta + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\theta)F(-r\cos(\theta))d\theta = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\theta)(-F(r\cos(\theta)) + F(-r\cos(\theta)))d\theta = -2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1}r^{2j+1} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2j+2}(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Observe o fato de que:

$$\begin{aligned}
&\cos(\theta) > 0, \text{ para } \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \cos^{2j+1}(\theta) > 0, \text{ para } \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2j+2}(\theta)d\theta > 0.
\end{aligned}$$

Denotando  $b_{2j+1} = -2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2j+2}(\theta)d\theta$ , para  $j = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , no qual  $b_{2j+1} < 0$ , segue que

$$I_1 = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1}b_{2j+1}r^{2j+1}.$$

Da mesma forma temos  $I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(u)F(r\cos(u))du + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos(u)F(r\cos(u))du$ .

Fazendo  $u = \theta$  na primeira integral em  $I_2$ , temos  $du = d\theta$  e fazendo  $u = \theta + \pi$  na segunda integral em  $I_2$ , temos  $du = d\theta$ , desta forma transformamos  $I_2$  em:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(\theta)F(r\cos(\theta))d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(\theta + \pi)F(r\cos(\theta + \pi))d\theta = \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(\theta)F(r\cos(\theta))d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} -\cos(\theta)F(-r\cos(\theta))d\theta = \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(\theta)(F(r\cos(\theta)) - F(-r\cos(\theta)))d\theta = 2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1}r^{2j+1} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^{2j+2}(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Observe o fato de que:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &\geq 0, \text{ para } \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e } \cos(\theta) \leq 0, \text{ para } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \cos^{2j+2}(\theta) \geq 0, \text{ para } \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^{2j+2}(\theta) d\theta \geq 0.
\end{aligned}$$

Denotando  $c_{2j+1} = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^{2j+2}(\theta) d\theta$ , para  $j = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , se  $c_{2j+1} > 0$  então temos  $I_2 =$

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} c_{2j+1} r^{2j+1}.$$

Consequentemente  $f_0(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} (b_{2j+1} + c_{2j+1}) r^{2j+1}$ , pois  $f_0(r) = \frac{1}{2\pi} (I_1 + I_2)$ .

Vale ressaltar que  $b_{2j+1} + c_{2j+1} < 0$ , pois se  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ , então  $\cos(\theta) > \frac{\sqrt{2}}{2}$  e se  $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ , então  $\cos(\theta) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Os monômios que aparecem no polinômio  $f_0(r)$  são  $r, r^3, \dots, r^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}$  cujos coeficientes são  $d_{2j+1} = a_{2j+1} (b_{2j+1} + c_{2j+1})$ , ou seja, temos  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$  monômios.

É possível escolher livremente o coeficiente  $a_{2j+1} = \frac{d_{2j+1}}{(b_{2j+1} + c_{2j+1})}$  do monômio  $r^{2j+1}$  tal que  $a_{2j+1} \neq 0$ . Então pelo Teorema de Descartes podemos escolher os coeficientes de  $f_0(r)$  de tal maneira que  $f_0(r)$  possua exatamente  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 - 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  raízes reais positivas, denotadas por  $r_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ . Notemos que as raízes são simples.

Então pelos Teoremas 2.2.2 e 2.2.3 o sistema (5.5) possui  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  ciclos limites em uma vizinhança de  $r_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ .

□

## 5.2 Aplicação

**Exemplo 5.2.1.** Consideramos a seguinte equação de segunda ordem

$$\ddot{x} + x = \text{sgn}(x \cdot \dot{x}) U(x, \dot{x}), \quad (5.18)$$

no qual  $U(x, \dot{x}) = \varepsilon x - \varepsilon x^3$ . A equação diferencial (5.18) pode ser escrita como

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \text{sgn}(x \cdot y)(\varepsilon x - \varepsilon x^3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon \text{sgn}(x \cdot y) F(x) \end{cases}, \quad (5.19)$$

onde  $F(x) = x - x^3$ . Logo o sistema (5.19) torna-se um sistema descontínuo  $Z = (X, Y)$ , sendo:

$$X(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon F(x) \end{cases} \quad \text{se } x \cdot y > 0, \quad (5.20)$$

$$Y(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon F(x) \end{cases} \quad \text{se } x \cdot y < 0. \quad (5.21)$$

As retas  $x = 0$  e  $y = 0$  dividem o plano de fase em quatro zonas:

- (i)  $G_1$  com  $x > 0$  e  $y > 0$ ;
- (ii)  $G_2$  com  $x < 0$  e  $y > 0$ ;
- (iii)  $G_3$  com  $x < 0$  e  $y < 0$ ;
- (iv)  $G_4$  com  $x > 0$  e  $y < 0$ .

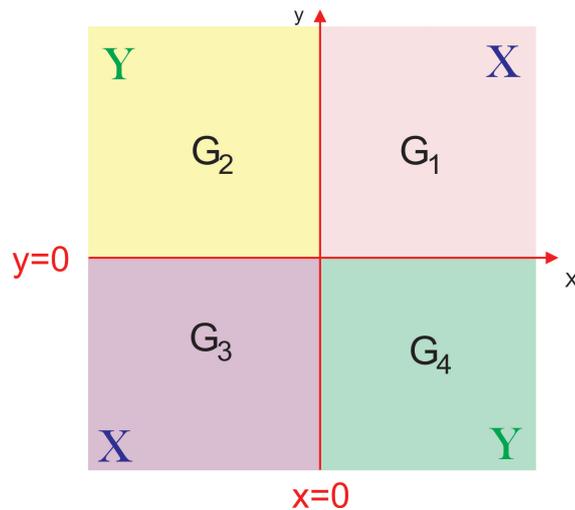


Figura 5.2: Regiões.

Observando a Figura 5.2 podemos ver onde estão situadas cada uma das quatro regiões e qual campo deve ser considerado em cada uma delas.

Mais ainda, as retas  $x = 0$  e  $y = 0$  são os conjuntos de descontinuidade do nosso sistema. Porém  $M = h^{-1}(0)$ , onde  $h(x, y) = xy$  não é uma variedade regular, afinal  $\nabla h(0, 0) = (0, 0)$ . Como  $M$  só possui um ponto não regular, segue que o conjunto dos pontos não regulares de  $M$  é limitado. Escolhendo  $\delta > 0$  suficientemente pequeno temos  $\{(0, 0)\} \subset \overline{B_\delta(0, 0)}$  e prosseguindo com a mudança de variáveis dada na Observação 3.2.1 em (3.5) temos

$$\delta^*h(\theta, r) = h \circ \Psi_\delta(\theta, r) = h((r + \delta)\cos(\theta), (r + \delta)\sin(\theta)) = (r + \delta)^2\cos(\theta)\sin(\theta).$$

Portanto, o conjunto  $\widehat{M} = (\delta^*h)^{-1}(0)$  é uma variedade regular em  $\widehat{D}$ . Em coordenadas cartesianas a função  $\delta^*h(\theta, r)$  corresponde à função  $h(x, y) = xy$ , com  $x^2 + y^2 > \delta^2$ . Agora vamos determinar quais os tipos das regiões existentes nas retas  $x = 0$  e  $y = 0$ , com  $x^2 + y^2 > \delta^2$  e  $\delta > 0$  suficientemente pequeno. Tendo  $\nabla h(x, y) = (y, x)$  segue

$$\begin{aligned} Xh(x, y) &= X(x, y) \cdot \nabla h(x, y) = (y, -x + \varepsilon F(x)) \cdot (y, x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Xh(x, y) = y^2 - x^2 + \varepsilon x F(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Yh(x, y) &= Y(x, y) \cdot \nabla h(x, y) = (y, -x - \varepsilon F(x)) \cdot (y, x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Yh(x, y) = y^2 - x^2 - \varepsilon x F(x); \end{aligned}$$

(I) Para a reta  $x = 0$  com  $y^2 > \delta^2$ , isto é,  $|y| > \delta$ :

Portanto  $Xh(x, y) = y^2 = Yh(x, y)$  então  $Xh(x, y)Yh(x, y) = y^4 > 0$ . Com isso, temos apenas região de costura na reta  $x = 0$ , com  $|y| > \delta$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$  teremos região de costura na reta  $x = 0$ , para  $y \neq 0$ .

(II) Reta  $y = 0$ , com  $x^2 > \delta^2$ , isto é,  $|x| > \delta$ :

Portanto,

$$Xh(x, y) = -x^2 + \varepsilon x F(x) = -x^2 + \varepsilon x^2 - \varepsilon x^4 \Leftrightarrow Xh(x, y) = (-1 + \varepsilon - \varepsilon x^2)x^2;$$

$$Yh(x, y) = -x^2 - \varepsilon x F(x) = -x^2 - \varepsilon x^2 + \varepsilon x^4 \Leftrightarrow Yh(x, y) = (-1 - \varepsilon + \varepsilon x^2)x^2.$$

Realizando o estudo de sinal das funções  $Xh$  e  $Yh$ , tendo  $x_1 = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}$  e  $x_2 = -\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}$ , temos:

- $Xh < 0$  para todo  $x$  tal que  $|x| > \delta$ , pois  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno;
- $Yh < 0$  para  $x \in (x_2, -\delta) \cup (\delta, x_1)$  e  $Yh > 0$  para  $x \in (-\infty, x_2) \cup (x_1, +\infty)$ .

Portanto podemos concluir quais tipos de regiões na reta  $y = 0$ , com  $|x| > \delta$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$  as regiões na reta  $y = 0$ , com  $x \neq 0$ , são :

- região de costura, se  $x \in (x_2, 0) \cup (0, x_1)$ ;
- região de deslize, se  $x \in (-\infty, x_2) \cup (x_1, +\infty)$ .

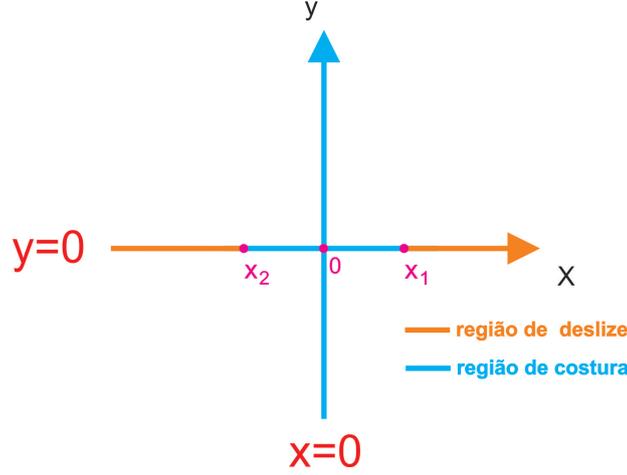


Figura 5.3: Regiões de descontinuidade.

Desta forma, temos um sistema com 4 zonas e pela Proposição 5.1.3 temos  $L(4, 3) = 1$  para o sistema (5.19). De fato, considerando as coordenadas polares  $(r, \theta)$  tal que  $x = r\cos(\theta)$  e  $y = r\sin(\theta)$  dadas na Observação 5.1.1 e por (5.19) temos:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \dot{r} &= \frac{r\cos(\theta)r\sin(\theta) + r\sin(\theta)[-r\cos(\theta) + \varepsilon\operatorname{sgn}(r\cos(\theta)r\sin(\theta))F(r\cos(\theta))]}{r} \\ \dot{\theta} &= \cos^2(\theta) \left( \frac{[-r\cos(\theta) + \varepsilon\operatorname{sgn}(r\cos(\theta)r\sin(\theta))F(r\cos(\theta))]r\cos(\theta) - r\sin(\theta)r\sin(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)} \right) \end{aligned} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{aligned} \dot{r} &= \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta) - r^2\sin(\theta)\cos(\theta) + \varepsilon\operatorname{sgn}(r^2\cos(\theta)\sin(\theta))r\sin(\theta)F(r\cos(\theta))}{r} \\ \dot{\theta} &= \frac{-r^2\cos^2(\theta) + \varepsilon\operatorname{sgn}(r^2\cos(\theta)\sin(\theta))r\cos(\theta)F(r\cos(\theta)) - r^2\sin^2(\theta)}{r^2} \end{aligned} \right. \\ & \therefore \left\{ \begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon\operatorname{sgn}(\cos(\theta)\sin(\theta))\sin(\theta)F(r\cos(\theta)) \\ \dot{\theta} &= -1 + \varepsilon\operatorname{sgn}(\cos(\theta)\sin(\theta))\frac{1}{r}\cos(\theta)F(r\cos(\theta)) \end{aligned} \right. \quad (5.22) \end{aligned}$$

Tomando agora  $\theta$  como a nova variável independente, o sistema (5.22) pode ser escrito como:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\varepsilon\operatorname{sgn}(\cos(\theta)\sin(\theta))\sin(\theta)F(r\cos(\theta))}{-1 + \varepsilon\operatorname{sgn}(\cos(\theta)\sin(\theta))\frac{1}{r}\cos(\theta)F(r\cos(\theta))} = R(\varepsilon).$$

Como o parâmetro  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno consideramos a série de Taylor de  $R(\varepsilon)$  em

torno de  $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} R(\varepsilon) &= R(0) + \frac{dR}{d\varepsilon}(0)\varepsilon + \left[ \frac{d^2R}{d\varepsilon^2}(0)\frac{1}{2} + \frac{d^3R}{d\varepsilon^3}(0)\frac{\varepsilon}{6} + \dots \right] \varepsilon^2 = \\ &= -\varepsilon \operatorname{sgn}(\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}(\theta)F(r\cos(\theta)) + \left[ \frac{d^2R}{d\varepsilon^2}(0)\frac{1}{2} + \frac{d^3R}{d\varepsilon^3}(0)\frac{\varepsilon}{6} + \dots \right] \varepsilon^2 = \varepsilon f(\theta, r) + \varepsilon^2 g(\theta, r, \varepsilon). \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{dr}{d\theta} = R(\varepsilon) = \varepsilon f(\theta, r) + \varepsilon^2 g(\theta, r, \varepsilon), \quad (5.23)$$

onde  $f(\theta, r) = -\operatorname{sgn}(\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}(\theta)F(r\cos(\theta))$  e  $g(\theta, r, \varepsilon) = \left[ \frac{d^2R}{d\varepsilon^2}(0)\frac{1}{2} + \frac{d^3R}{d\varepsilon^3}(0)\frac{\varepsilon}{6} + \dots \right]$ .

Uma vez que a equação diferencial (5.23) é o limite de sistemas que satisfazem todas as hipóteses do Teorema 2.2.2 e do Teorema 2.2.3 podemos aplicar ambos diretamente na equação (5.23).

Observamos que  $f$  e  $g$  são periódicas de período  $2\pi$  na variável  $\theta$ , então a equação da média de (5.23) no intervalo  $[0, 2\pi]$  é:

$$f_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, r) d\theta.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, r) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u, r) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\operatorname{sgn}(\cos(u)\operatorname{sen}(u))\operatorname{sen}(u)F(r\cos(u)) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\operatorname{sen}(u)F(r\cos(u)) du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(u)F(r\cos(u)) du + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -\operatorname{sen}(u)F(r\cos(u)) du + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \operatorname{sen}(u)F(r\cos(u)) du \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_0(r) = \frac{1}{2\pi} (I_1 + I_2), \text{ onde}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(u)F(r\cos(u)) du - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(u)F(r\cos(u)) du ; \\ I_2 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(u)F(r\cos(u)) du + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \operatorname{sen}(u)F(r\cos(u)) du. \end{aligned}$$

Fazendo  $u = \theta$  na primeira integral em  $I_1$ , temos  $du = d\theta$  e fazendo  $u = \theta + \pi$  na segunda

integral em  $I_1$ , temos  $du = d\theta$ , desta forma transformamos  $I_1$  em:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\text{sen}(\theta)F(r\cos(\theta))d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta + \pi)F(r\cos(\theta + \pi))d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\text{sen}(\theta)F(r\cos(\theta))d\theta - \\
 &- \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}(\theta)\cos\pi + \cos(\theta)\text{sen}\pi)F(r(\cos(\theta)\cos\pi - \text{sen}(\theta)\text{sen}\pi))d\theta = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\text{sen}(\theta)F(r\cos(\theta))d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)F(-r\cos(\theta))d\theta = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)(-F(r\cos(\theta)) + F(-r\cos(\theta)))d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)(-2r\cos(\theta) + 2r^3\cos^3(\theta)) = \\
 &= -2 \left( r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)\cos(\theta)d\theta - r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)\cos^3(\theta)d\theta \right) = \\
 &= -2 \left( r \left[ \frac{1}{2} \right] - r^3 \left[ \frac{1}{4} \right] \right) = -r + \frac{1}{2}r^3.
 \end{aligned}$$

Então,

$$I_1 = -r + \frac{1}{2}r^3.$$

Da mesma forma temos  $I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}(u)F(r\cos(u))du + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \text{sen}(u)F(r\cos(u))du$  e fazendo  $u = \theta$  na primeira integral em  $I_2$ , temos  $du = d\theta$  e fazendo  $u = \theta + \pi$  na segunda integral em  $I_2$ , temos  $du = d\theta$ , desta forma transformamos  $I_2$  em:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}(\theta)F(r\cos(\theta))d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}(\theta + \pi)F(r\cos(\theta + \pi))d\theta = \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}(\theta)F(r\cos(\theta))d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{sen}(\theta)F(-r\cos(\theta))d\theta = \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}(\theta)(F(r\cos(\theta)) - F(-r\cos(\theta)))d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}(\theta)(2r\cos(\theta) - 2r^3\cos^3(\theta))d\theta = \\
 &= 2 \left( r \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}(\theta)\cos(\theta)d\theta - r^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}(\theta)\cos^3(\theta)d\theta \right) = \\
 &= 2 \left( r \left[ -\frac{1}{2} \right] - r^3 \left[ -\frac{1}{4} \right] \right) = -r + \frac{1}{2}r^3.
 \end{aligned}$$

Então,

$$I_2 = -r + \frac{1}{2}r^3.$$

Conseqüentemente  $f_0(r) = -\frac{r}{\pi} + \frac{r^3}{2\pi}$ , pois  $f_0(r) = \frac{1}{2\pi} (I_1 + I_2)$ . Vamos agora calcular as raízes do polinômio  $f_0(r)$  e elas devem ser positivas, pois estamos em coordenadas polares e com isso

temos  $r > 0$ .

$$\begin{aligned} f_0(r) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{r}{\pi} + \frac{r^3}{2\pi} = 0 \Leftrightarrow -r + \frac{r^3}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r \left( -1 + \frac{r^2}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = -\sqrt{2} \text{ ou } r = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Portanto,  $f_0(r)$  possui apenas uma raiz positiva  $r = \sqrt{2}$ . Assim pelos Teoremas 2.2.2 e 2.2.3 o sistema (5.19) possui um ciclo limite em uma vizinhança de  $r = \sqrt{2}$ .

O resultado é análogo se consideramos o polinômio  $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ , sendo  $a_0, a_2 \in \mathbb{R}$  quaisquer e  $a_1, a_3 \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $\frac{a_1}{a_3} < 0$  e  $a_3 \neq 0$ . Tais condições podem ser descobertas procedendo de forma análogo, como neste exemplo.

**Observação 5.2.1.** Ressaltamos o fato de Novaes em [16] generalizar estes casos estudados considerando que as retas que formam as fronteiras de descontinuidade não possuem, necessariamente, ângulos regulares entre si. Para este caso, é mostrado que a quota inferior para o número máximo de ciclos limites em um problema com  $m$  zonas com  $F$  um polinômio de grau  $n$  em  $x$  é  $n$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Barbashin, E.A., *Introduction to the theory of stability*, Translated from the Russian by Transcripta Service, London. Edited by T. Lukes Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1970.
- [2] Berezin, I. S., Zhidkov, N. P.: *Computing Methods*, vol. II. Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [3] Buica, A.; Llibre, J., *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*. Bull. Sci. Math. 128. no. 1, 7-22, 2004.
- [4] di Bernardo, M.; Buddi, C.J.; Champneys, A.R; Kowalczyk, P. *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer. 2008.
- [5] Écalle, J., *Introduction Aux Fonctions Analysables et Preuve Constructive de la Conjecture de Dulac*. Hermann, Paris, 1992.
- [6] Hilbert, D., *Mathematische probleme*, Lecture, Second Internat. Congr. Math. (Paris, 1900), Nachr. Ges. Wiss. Gottingen Math. Phys. KL. (1900), 253-297; English Transl., Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902), 437-479.
- [7] Ilyashenko, Y., *Finiteness Theorems for Limit Cycles*. Translations of Math. Monographs, vol. 94. American Mathematical Society, 1991.
- [8] Ilyashenko, Y.; Panov, A., *Some upper estimates of the number of limit cycles of planar vector fields with applications to Liénard equations*. Moscow Math. J. 1, 583-599, 2001.
- [9] Lima, E.L., *Análise Real* Volume 02, IMPA, 2009.
- [10] Llibre, J.; Novaes, D.D.; Teixeira, M.A., *On the birth cycles for non-smooth dynamical systems*, *Bull. Sci. Math* , 139, número 3, 229 - 244, 2015.
- [11] Llibre, J.; Pedregal, P., *Hilbert's 16th problem. when differential systems meet variational principles*. Preprint. February, 2015.

- [12] Llibre, J.; Teixeira, M. A., *Limit cycles for  $m$ -piecewise discontinuous polynomial Liénard differential equations*. Z. Angew. Math. Phys. 66, 51-66, 2015.
- [13] Makarenkov, O., Lamb, J.S.W., *Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: a survey*. Phys. D 241,no. 22, 1826-1844, 2012.
- [14] Melo, W., *Topologia das Variedades*, IMPA, 2014.
- [15] Melo, W.; Palis, J., *Geometric theory of dynamical systems, an introduction*, Springer, New York, 1982.
- [16] Novaes, D. D., *On nonsmooth perturbations of nondegenerate planar centers*. Publ. Mat. 58, suppl., 395-420, 2014.
- [17] Peixoto, M.C.; Peixoto, M.M., *Structural stability in the plane with enlarged conditions*, An. Ac. Bras. Cienc., V. 31, 135-160, 1959.
- [18] Perko, L., *Differential equations and dynamics systems* Third edition, Springer, 2000.
- [19] Sanders, J.A.; Verhulst, F., *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences, vol 59, Berlin, Springer, 1985.
- [20] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias* Editora LTC, 1979.
- [21] Sotomayor, J.; Teixeira, M.A., *Regularization of Discontinuous Vector Fields*, International Conference on Differential Equations, Lisboa, 207-223, 1996.
- [22] Teixeira, M.A., *Perturbation theory for non-smooth systems*, Encyclopedia of Complexity and Systems Science 22, Springer, New York, 6697-6719, 2009.
- [23] Verhust, F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, Springer-Verlag, 1996.
- [24] Vishik, S.M., *Vector fields near the boundary of a manifold*, Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika, V.27, N.1, 13-19, 1996.