

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.010/00

**Experimento de Reynolds e o Modelo de Ruelle-Takens
sobre a Transição à Turbulência**

Cristiano Roberto dos Santos

Orientador

Gerson Francisco



Setembro de 2000

Agradecimentos

- Ao professor Gerson Francisco, pela paciência e orientação;
- À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, **FAPESP**, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho procuramos desenvolver e avaliar o experimento de Reynolds. Fazemos, para tal, uma análise teórica do experimento, sob o cenário de Ruelle-Takens, destacando suas diferenças com o de Landau. Por fim, fazemos uma simulação numérica usando o software FIDAP, afim de comparar com os resultados preditos pela teoria e concluimos que, para condições não-assintóticas, o modelo de Ruelle-Takens funciona bem.

Abstract

In this work, we develop the Reynolds' Experiment, under the Ruelle-Takens-Newhouse scenario, we show the difference between this scenario and the Landau scenario. We make a numerical simulation using the FIDAP software, comparing the results with the theoretical prediction. Our conclusion is that, for non asymptotics conditions, the Ruelle-Takens-Newhouse is in agreement with simulation.

Keywords: Reynolds; Ruelle-Takens-Newhouse; Turbulência.

PACS Number(s) : Física Geral

Índice

1	Introdução	7
1.1	Experimento de Reynolds	8
1.2	Descrição dos Capítulos	9
2	Sistemas Dinâmicos	10
2.1	Introdução	10
2.2	Aspectos Gerais da Teoria	11
2.3	Mapas de Poincaré	26
2.4	Expoentes de Liapunov	28
3	Transição à Turbulência	31
3.1	Introdução	31
3.2	O Modelo de Landau	31
3.2.1	Estabilidade do movimento estacionário do fluido	31
3.2.2	Aparecimento da Turbulência	33
3.3	O Modelo de Ruelle-Takens-Newhouse	40
3.4	Outras Abordagens	42
3.4.1	O Cenário de Feigenbaum	42
3.4.2	O Cenário de Pomeau-Manneville	43
4	Software Utilizado	45

4.1	Introdução	45
4.2	O Fidap 8.01	46
4.3	Formulação do Problema Contínuo pelo Software	47
4.3.1	Conservação de Massa	49
4.3.2	Conservação de Energia	50
4.3.3	Fluido Compressível	50
4.3.4	Fluido Incompressível	51
4.3.5	Condições iniciais e de contorno:	52
4.3.6	Modelando a Turbulência	53
5	Resultados	55
5.1	Introdução	55
5.2	Geometria e Obtenção dos Dados	56
5.3	Visualização da Dinâmica	58
5.3.1	Fase Laminar	58
5.3.2	Fase de Transição	58
5.4	Caracterização da Dinâmica	66
5.4.1	Funções de Autocorrelação	66
5.4.2	Representação do Espaço de Fase	68
5.4.3	Seções de Poincaré	70
5.4.4	Expoentes de Liapunov	73
5.5	Conclusões	75
	Referências	76

Capítulo 1

Introdução

A teoria de sistemas dinâmicos tem sido aplicada no entendimento e exploração da fluidodinâmica já há algum tempo. Remonta aos trabalhos de Landau[5] a história da tentativa de se conhecer pormenorizadamente a estrutura física da turbulência em fluidos. Landau, em seus primeiros trabalhos [5], tentou descrever a passagem de um fluxo laminar ao regime turbulento por meio de um crescimento nos graus de liberdade dos vetores velocidade, aproximando uma frequência dominante com quantas componentes fossem necessárias para descrever o sistema satisfatoriamente. O regime turbulento só seria atingido quando o número de componentes fosse infinito.

Essa visão clássica (clássica no sentido de incipiente) da transição à turbulência manteve-se até a década de setenta, quando os pesquisadores D. Ruelle, F. Takens e N. Newhouse proporam um novo modelo, que, sob certas condições, previa formalmente um comportamento caótico para o fluido após o terceiro modo de vibração dos vetores velocidade [7]. Assim, esse modelo se contrapôs à proposta de Landau, tendo se firmado com resultados mais apurados experimentais, tais como das referências [11, 12]. Mais tarde, com o advento da física computacional, simulações numéricas puderam ser realizadas e muitas delas([13, 14]) indicavam o caminho proposto pelo modelo de Ruelle, Takens e Newhouse.

1.1 Experimento de Reynolds

Podemos pensar no experimento de Reynolds como consistindo de um pequeno tubo inserido num grande cano transparente. O tubo interno tem um diâmetro pequeno e está aberto na imersão do tubo grande. Tal como visto na Figura (1.1) L_B é suficientemente longo para garantir um fluxo completamente desenvolvido. O fluido no tubo interno é o mesmo que no tubo externo e eles tem a mesma viscosidade ν e a mesma densidade ρ . Todavia, o tubo interno tem o fluido de uma cor diferente do fluido do tubo externo. Em todo experimento, velocidades do fluido em ambos os tubos são ajustadas para que seja o mais próximo possível umas das outras.

O experimento pode ser repetido para vários fluidos e para várias velocidades e todos estes podem ser reunidos usando o número de Reynolds como único parâmetro envolvido. Encontra-se que a descrição dada acima reajusta fluxos cujo número de Reynolds, calculado usando o diâmetro D do tubo como comprimento característico, está abaixo de um certo valor numérico crítico

$$Re_D = \frac{VD}{\nu} < 2000 \quad (1.1)$$

onde V é a velocidade média no tubo, i.e., a razão de fluxo por unidade de área da seção reta. Acima deste número de Reynolds o envelope do fluido colorido não é claramente definido. Vê-se então o líquido colorido se misturar com o fluido externo. O caráter laminar do fluxo é perdido, tornando-se o que chamamos de turbulento.

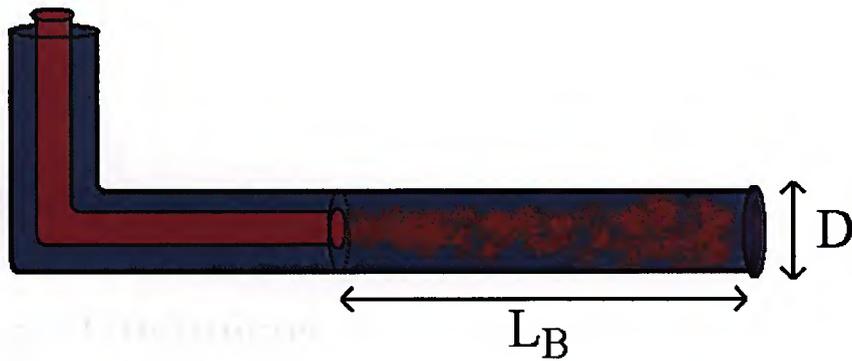


Fig. 1.1: Representação do Experimento de Reynolds com suas dimensões características.

A idéia dessa dissertação é procurar percorrer alguns modelos já propostos que tentam explicar, com maior ou menor precisão, exatamente a transição da fase laminar para a turbulenta, quando não há mais definição entre os líquidos.

1.2 Descrição dos Capítulos

Como tentativa de se entender melhor a natureza da transição ao regime turbulento, faremos uma introdução a Teoria dos Sistemas Dinâmicos, no capítulo 2, estágio necessário para o entendimento do cenário de Ruelle-Takens. No capítulo 3 estamos interessados em descrever as possíveis abordagens, teóricas, para o problema, descrevendo com certo detalhe os pormenores do modelo de Landau, passando ao de Ruelle-Takens e, mais tarde, a modelos mais exóticos.

O capítulo 4 é destinado à apresentação do software FIDAP 8.01, utilizado para gerar as simulações enquanto que o quinto e último capítulo é o que apresenta os resultados do uso desse software, tornando possível tirar conclusões acerca dos modelos estudados no capítulo 4.

Capítulo 2

Sistemas Dinâmicos

2.1 Introdução

Na análise do problema de turbulência podemos trilhar vários caminhos. Dois dos mais conhecidos passam pela Teoria de Sistemas Dinâmicos e pela Teoria de Processos Estocásticos. Esse capítulo trata da Teoria de Sistemas Dinâmicos.

Neste capítulo o que procuramos fazer é abordar tópicos gerais da Teoria de Sistemas Dinâmicos, pincelando seus aspectos mais importantes, enfatizando os temas necessários para o desenvolvimento de técnicas para a modelagem do problema de transição à turbulência de um fluido newtoniano. Nesse escopo, enunciaremos e discutiremos os conceitos e teoremas cruciais, tais como o *Teorema de Poincaré-Bendixson* e a idéia de *Atrator*, que é o ponto de partida para a análise dos dados das simulações expostas nos últimos capítulos. Falaremos *en passant*, de Teoria de Índices apenas para podermos enunciar alguns teoremas. Faremos uma discussão mais demorada das técnicas de se construir *Mapas de Poincaré*, para a qual dedicaremos uma seção inteira, assim como de *Expoente de Liapunov*, pontos indispensáveis para o estudo de turbulência.

2.2 Aspectos Gerais da Teoria

Em geral, podemos ter dois tipos de equações que geram um sistema dinâmico. O primeiro tipo é

$$\dot{x} = f(x, t; \mu) = \frac{dx}{dt} \quad (2.1)$$

onde $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$ (chamaremos t de tempo), $\mu \in V \subset \mathbb{R}^p$. U e V são conjuntos abertos em \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^p , respectivamente e μ é um vetor de parâmetro. A Eq. (2.1) é um campo vetorial ou uma equação diferencial ordinária. Denotaremos por $x(t, t_0, x_0)$ uma solução com condição inicial x_0 no instante t_0 . Essas soluções definem um fluxo

$$\phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

onde $\phi(x, t) = x(t, 0, x)$.

O segundo tipo de equação que podemos ter é o seguinte

$$x \mapsto g(x, \mu) \quad (2.3)$$

Essa equação é chamada de mapa ou equação de diferenças. Uma solução x para (2.2) é tal que

$$x : \mapsto \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

$$t \mapsto x(t)$$

$x(t)$ satisfazendo $\dot{x}(t) = f(x(t), t; \mu)$.

Nossa discussão será focada no primeiro caso (equações diferenciais). Porém,

todas as definições e teoremas tem um análogo discreto, i. e., para o caso do mapeamento, salvo nos casos devidamente apontados.

Geometricamente falando, x é uma curva em R^n e (2.1) dá o vetor tangente a cada ponto. Campos vetoriais que dependem explicitamente do tempo são chamados não-autônomos.

Consideremos um campo autônomo geral,

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.5)$$

onde $x \in R^n$.

Chama-se solução de equilíbrio (ou ponto fixo) de (2.5) ao ponto $\bar{x} \in R^n$ tal que,

$$f(\bar{x}) = 0 \quad (2.6)$$

Vamos chamar de $\bar{x}(t)$ qualquer solução de (2.5). Podemos dizer que $\bar{x}(t)$ é estável se soluções partindo próximas a $\bar{x}(t)$ num dado tempo, permanecem próximas para tempos posteriores. Chamamos $\bar{x}(t)$ de assintoticamente estável se estas soluções convergem para $x(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. Mais formalmente,

Definição 1 $\bar{x}(t)$ é estável (estabilidade de Liapunov) se, dado $\varepsilon > 0$, há um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para qualquer solução, $x(t)$ de (2.5) satisfazendo $|\bar{x}(t_0) - x(t_0)| < \delta$, então $|\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon$ para $t < t_0$, $t_0 \in R$.

Definição 2 $\bar{x}(t)$ é assintoticamente estável se é estável e se existe uma constante $b > 0$ tal que, se $|\bar{x}(t_0) - x(t_0)| < b$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - x(t)| = 0$.

Precisamos agora saber decidir quando uma solução é estável. Um dos métodos que será discutido aqui é o de linearização. Seja,

$$\dot{x} = y \quad (2.7)$$

Vamos escrever,

$$x = \bar{x}(t) + y \quad (2.8)$$

Colocando (2.8) em (2.5) e fazendo uma expansão em série de Taylor em torno de $\bar{x}(t)$ obtemos:

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{y} = f(\bar{x}(t)) + Df(\bar{x}(t))y + O(|y|^2)$$

$$f(\bar{x}(t)) + \dot{y} = f(\bar{x}(t)) + Df(\bar{x}(t))y + O(|y|^2)$$

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y + O(|y|^2) \quad (2.9)$$

Assim, para estudarmos a órbita, é razoável estudarmos o comportamento do sistema linear associado,

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y \quad (2.10)$$

Dessa maneira, precisamos saber se a solução para $y = 0$ é estável e se esta implica a estabilidade de $\bar{x}(t)$. Para o caso de uma solução de equilíbrio $\bar{x}(t) = \bar{x}$, tem-se que $Df(\bar{x}(t)) = Df(\bar{x})$ que é uma matriz com coeficientes constantes, e se $y = y_0$ para $t = 0$,

$$y(t) = e^{Df(\bar{x})t}y_0 \quad (2.11)$$

Portanto, $y(t)$ será assintoticamente estável se todos os autovalores de $Df(t)$ tiverem parte real negativa. A partir disso podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3 *Suponha que todos os autovalores de $Df(\bar{x})$ tenham parte real negativa. Então a solução de equilíbrio de $x = \bar{x}$ do campo vetorial linear é assintoticamente estável.*

Passemos à definição de ponto fixo hiperbólico.

Definição 4 *Seja $x = \bar{x}$ um ponto fixo de $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Então \bar{x} será chamado de ponto fixo hiperbólico se nenhum dos autovalores de $Df(\bar{x})$ tiver parte real zero.*

Quando o ponto fixo é não-hiperbólico, não há como extrair informações através do método de linearização. Usa-se então, o chamado Método de Liapunov. Passemos a descrever esse método.

A título de exemplificar a aplicação do próximo teorema, vamos supor que haja um campo vetorial num plano em um ponto fixo \bar{x} . Como dito anteriormente, para sabermos se este é estável, é suficiente encontrar uma vizinhança U de \bar{x} para a qual órbitas partindo em U permaneçam em U para todo o tempo positivo. Isso pode ser garantido mostrando-se que o campo vetorial é, no mínimo, tangente ao contorno U .

Teorema 5 *Considere o seguinte campo vetorial:*

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.12)$$

onde $x \in R^n$.

Seja \bar{x} um ponto fixo de (2.12) e $V : U \rightarrow R$ uma função C^1 definida em alguma vizinhança U de \bar{x} tal que:

i) $V(\bar{x}) = 0$ e $V(x) > 0$ se $x \neq \bar{x}$;

ii) $V'(x) \leq 0$ em $U - \{\bar{x}\}$.

Então \bar{x} é estável

Além disso, se

iii) $\dot{V}(x) < 0$ em $U - \{\bar{x}\}$, V é chamada de função de Liapunov.

Se U pode ser escolhido para todo R^n , então \bar{x} é globalmente assintoticamente estável se i) e iii) forem satisfeitas.

Passemos agora a discutir o conceito de variedade invariante.

Definição 6 *Seja $S \subset R^n$ um conjunto. Então S é invariante sob o campo vetorial $\dot{x} = f(x)$ se para qualquer $x_0 \in S$ tivermos $x(t, 0, x_0) \in S$ para todo $t \in R$.*

Se há a restrição para tempos apenas positivos então S é chamado de conjunto positivamente invariante.

Definição 7 *Um conjunto invariante $S \subset R^n$ é dito ser uma variedade invariante C^r ($r \geq 1$) se S tiver a estrutura de uma variedade diferenciável C^r .*

Para a nossa finalidade, uma variedade, no caso linear, será um subespaço vetorial invariante de R^n ou, para o caso não-linear, uma superfície imersa no R^n a qual pode ser representada localmente por um gráfico.

Passemos então ao estudo da estrutura de órbitas próximas a pontos fixos.

Seja $\bar{x} \in R^n$ um ponto fixo de

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.13)$$

onde $x \in R^n$.

Consideramos o sistema linear associado

$$\dot{y} = Ay \quad (2.14)$$

onde $y \in R$, sendo $A \equiv Df(\bar{x})$ uma matriz constante $n \times n$. Como já vimos, a solução da (2.14) em $y_0 \in R^n$ para $t = 0$ é

$$y(t) = y_0 \exp(At) \quad (2.15)$$

sendo

$$\exp(At) = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots \quad (2.16)$$

Vamos representar R^n como uma soma direta de três subespaços denotados E^s , E^u e E^c tais que

$$\begin{aligned} E^s &= \text{span}\{e_1, \dots, e_s\} \\ E^u &= \text{span}\{e_{s+1}, \dots, e_{s+\mu}\} \\ E^c &= \text{span}\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $\{e_1, \dots, e_s\}$ são os autovetores de A correspondendo aos autovalores com parte real negativa; $\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}$ são os autovetores de A correspondendo aos autovalores com parte real positiva; $\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\}$ são os autovetores de A correspondendo aos autovalores com parte real nula. As letras s , u e c são referência a subespaços estáveis, instáveis e centrais, respectivamente. Eles também são subespaços invariantes desde que soluções de (2.14) com condições iniciais inteiramente contidas em E^s , E^u ou E^c permaneçam nesse particular subespaço para todo tempo. Analisemos exemplos que ilustram essas idéias.

Exemplo 8 *Suponhamos que A possua três autovalores e que estes sejam reais e distintos, denotados por λ_1 , $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 > 0$. Portanto A tem três autovetores linearmente independentes e_1 , e_2 e e_3 correspondendo a λ_1 , λ_2 e λ_3 respectivamente. Se nós formarmos a matriz $T(3 \times 3)$ tomando como colunas os autovetores e_1 , e_2 e e_3 , teremos*

$$T = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Assim, $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = T^{-1}AT$ o que dará

$$y(t) = e^{At}y_0 = e^{T\Lambda T^{-1}t}y_0 \quad (2.19)$$

Temos

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{T\Lambda T^{-1}t}y_0 \\ &= T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} T^{-1}y_0 \\ &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 e^{\lambda_1 t} & e_2 & e^{\lambda_2 t} e_3 e^{\lambda_3 t} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} T^{-1}y_0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dessa maneira, temos que

$$\begin{aligned} E^s &= \text{span}\{e_1, e_2\} \\ E^u &= \text{span}\{e_3\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Se escolhermos qualquer ponto $y_0 \in R^3$, veremos que T^{-1} é a matriz transformação a qual muda as coordenadas de y_0 com relação à base padrão (ou seja, $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$) em coordenadas com relação à base e_1, e_2 e e_3 . Assim, para $e_0 \in E^s$, $T^{-1}y_0$ tem a forma

$$T^{-1}y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

e para $y_0 \in E^u$, $T^{-1}y_0$ tem a forma

$$T^{-1}y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{03} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Portanto, substituindo (2.22) (respectivamente (2.23)) em (2.20) é fácil ver que $y_0 \in E^s(E^u)$ implica em $e^{At}y_0 \in E^s(E^u)$. Portanto E^s e E^u são variedades invariantes.

Exemplo 9 Suponhamos que A tenha dois autovalores complexos $\rho \pm iw$, com $w \neq 0$ e $\rho < 0$ e um autovalor real $\lambda > 0$. Então A tem três autovalores generalizados e_1, e_2 e e_3 os quais podem ser usados como as colunas de uma matriz T :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \rho & w & 0 \\ -w & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = T^{-1}AT \quad (2.24)$$

Como no exemplo anterior

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{T\Lambda T^{-1}t}y_0 \\ &= T \begin{pmatrix} e^{\rho t} \cos \varpi t & e^{\rho t} \sin \varpi t & 0 \\ -e^{\rho t} \sin \varpi t & e^{\rho t} \cos \varpi t & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} T^{-1}y_0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Usando os mesmos argumentos dados no exemplo anterior fica claro que $E^s = \text{span}\{e_1, e_2\}$ é uma variedade invariante de soluções que decaem exponencialmente a zero quando $t \rightarrow +\infty$ enquanto que $E^u = \text{span}\{e_3\}$ é uma variedade invariante de soluções que decaem exponencialmente a zero quando $t \rightarrow -\infty$.

Exemplo 10 Suponhamos que A tenha dois autovalores reais repetidos, $\lambda < 0$ e um autovalor $\gamma > 0$ tal que existam os autovetores generalizados e_1, e_2 e e_3 os

quais podem ser usados para formar as colunas de uma matriz T tal que A seja transformado da seguinte maneira

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -w & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = T^{-1}AT \quad (2.26)$$

Da mesma maneira que os exemplos anteriores

$$y(t) = e^{T\Lambda T^{-1}t}y_0 \quad (2.27)$$

Assim, $E^s = \text{span}\{e_1, e_2\}$ é uma variedade invariante de soluções que decaem a $y=0$ quando $t \rightarrow +\infty$ e $E^u = \text{span}\{e_3\}$ é uma variedade invariante de soluções que decaem a $y=0$ quando $t \rightarrow -\infty$.

Vamos voltar ao estudo do sistema linear

$$\dot{y} = Ay \quad (2.28)$$

onde $y \in R^n$ e $A \equiv Df(\bar{x})$.

Fazendo uma transformação mais conveniente para

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in R^n \quad (2.29)$$

transformamos o ponto fixo $x = \bar{x}$ na origem via translação $y = x - \bar{x}$. Assim, (2.29) fica

$$\dot{y} = f(\bar{x} + y) \quad y \in R^n \quad (2.30)$$

A expansão em Taylor de $f(\bar{x} + y)$ em torno de $x = \bar{x}$ fornece

$$\dot{y} = Df(\bar{x})y + R(y) \quad y \in R^n \quad (2.31)$$

sendo $R(y) = O(|y|^2)$ e $f(\bar{x}) = 0$. Podemos encontrar uma transformação linear T que leva (2.28) em uma forma bloco-diagonal.

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

onde $T^{-1}y \equiv (u, v, w) \in R^s \otimes R^u \otimes R^c$, $s + u + c = n$, A_s é uma matriz $s \times s$ tendo autovalores com parte real negativa, A_x é uma matriz $n \times n$ com autovalores de parte real positiva e A_c é uma matriz $c \times c$ com autovalores com parte real zero.

Usando esta mesma transformação linear para as coordenadas do campo vetorial não-linear (2.31)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A_s u + R_s(u, v, w) \\ \dot{v} &= A_u v + R_u(u, v, w) \\ \dot{w} &= A_c w + R_c(u, v, w) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Agora estamos em condição de enunciar o seguinte teorema

Teorema 11 *Suponhamos (2.33) C^r com $r \geq 2$. Então o ponto fixo $(u, v, w) = 0$ de (2.33) possui uma variedade estável, $W_{loc}^s(0)$ local, C^r , de dimensão s ; uma variedade instável $W_{loc}^u(0)$, local, C^r , de dimensão u ; uma variedade central $W_{loc}^c(0)$, local, C^r , de dimensão c . Há uma interseção entre estas variedades em $(u, v, w) = 0$. Estas variedades são tangentes ao campo vetorial linear (2.32) na origem e, portanto, podem ser representadas localmente.*

Em particular, temos:

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(0) &= \{(u, v, w) \in R^s \otimes R^u \otimes R^c \\ &\quad / v = h_v^s(u), w = h_w^s(u), Dh_v^s(0) = 0, Dh_w^s(0); |u| \text{ suf. pequeno} \} \\ W_{loc}^u(0) &= \{(u, v, w) \in R^s \otimes R^u \otimes R^c \\ &\quad / u = h_u^u(v), w = h_w^u(v), Dh_u^u(0) = 0, Dh_w^u(0); |v| \text{ suf. pequeno} \} \\ W_{loc}^c(0) &= \{(u, v, w) \in R^s \otimes R^u \otimes R^c \\ &\quad / v = h_v^c(w), u = h_u^c(w), Dh_v^c(0) = 0, Dh_u^c(0); |w| \text{ suf. pequeno} \} \end{aligned}$$

onde $h_v^s(u)$, $h_w^s(u)$, $h_u^u(v)$, $h_w^u(v)$, $h_v^c(w)$, $h_u^c(w)$ são funções C^r . Além disso, $W_{loc}^s(0)$ e $W_{loc}^u(0)$ são localmente tangentes a E^s e E^u , respectivamente.

Devemos deixar claro que toda a discussão acima é válida também para mapeamentos. Passemos agora a estudar soluções periódicas, considerando o campo

vetorial

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.34)$$

Definição 12 *Uma solução de (2.34) através do ponto x_0 será periódica de período T , se existir $T > 0$ tal que $x(t, t_0) = x(t + T, x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Chamamos aqui por período de uma órbita o menor $T > 0$ possível tal que a definição acima se aplique. O próximo teorema diz respeito à não-existência de soluções periódicas num plano. Vamos denotar esses campos vetoriais da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Teorema 13 (Critério de Bendixson). *Se numa região simplesmente conexa $D \subset \mathbb{R}^2$ a expressão $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ não for identicamente zero e não mudar de sinal, então (2.35) não possui órbitas fechadas jazendo inteiramente em D .*

Podemos ter uma generalização para o critério de Bendixson, como enunciado no próximo teorema.

Teorema 14 *Seja $B(x, y) \in C^1$ numa região simplesmente conexa $D \subset \mathbb{R}^2$. Se $\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y}$ não for identicamente zero e não mudar de sinal em D , então (2.35) não possui nenhuma órbita fechada jazendo inteiramente em D .*

Para o caso bidimensional, existe uma teoria chamada de Teoria de Índices para campos diferenciáveis. Seja Γ qualquer órbita fechada num plano que não contenha nenhum ponto fixo do campo. Movendo-se, por exemplo, no sentido horário (positivo) por Γ , os vetores que representam o campo rotacionam-se, e essa rotação é de

$2\pi k$ para uma volta completa em Γ , sendo k um número inteiro. Esse k é chamado de índice de Γ . O índice de um *loop* fechado não contendo nenhum ponto fixo pode ser calculado pela integração do ângulo dos vetores em cada ponto de Γ , medido com respeito a algum sistema de coordenadas escolhido.

Para um campo vetorial num plano dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.36}$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ encontramos k :

$$k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\left(\tan^{-1} \frac{g(x, y)}{f(x, y)}\right) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2}\tag{2.37}$$

Teorema 15 *As seguintes propriedades são válidas:*

1. O índice de um sorvedor, uma fonte ou um centro é $+1$;
2. O índice de um ponto de sela hiperbólico é -1 ;
3. O índice de uma órbita fechada é $+1$;
4. O índice de uma curva fechada não contendo qualquer ponto fixo é 0 ;
5. O índice de uma curva fechada é igual à soma dos índices dos pontos fixos no seu interior.

Corolário 16 *Dentro de qualquer órbita fechada γ deve haver pelo menos um ponto fixo. Se existe um, então deve haver uma fonte, um sorvedor ou um centro. Se todos os pontos fixos em γ são hiperbólicos, então deve haver um número ímpar, $2n + 1$ dos quais $n + 1$ são fontes, sorvedores ou centros.*

Acabando essa primeira parte, vamos enunciar teoremas que estabelecem propriedades gerais de campos vetoriais, sobre existência, unicidade e diferenciabilidade, considerando o campo C^{r-1} não-autônomo

$$\dot{x} = f(x, t)\tag{2.38}$$

Teorema 17 *Seja $(x_0, t_0) \in U$. Então existe uma solução de (2.38) em x_0 e $t=t_0$, denotada por $x(t, t_0, x_0)$ com $x(t, t_0, x_0) = x_0$ para $|t - t_0|$ suficientemente pequeno. Esta solução é única, no sentido de que qualquer solução de (2.38) em x_0 e $t = t_0$ deve coincidir com $x(t, t_0, x_0)$ nos seus intervalos comuns de existência. Ainda mais, $x(t, t_0, x_0)$ é uma função C^r de t, t_0 e x_0 .*

Esse teorema somente garante a existência e unicidade para intervalos de tempo suficientemente pequenos. Passemos a um teorema mais abrangente.

Teorema 18 *Seja $C \subset U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ contendo (x_0, t_0) e U compacto. A solução $x(t, t_0, x_0)$ pode ser unicamente estendida para todo t*

O problema de campos vetoriais dependentes de parâmetros e da diferenciação das soluções com respeito a esses parâmetros já é bem estabelecido. O próximo resultado nos diz isso.

Teorema 19 *Considere o campo vetorial*

$$\dot{x} = f(x, t; \mu) \quad (2.39)$$

onde $f(x, t; \mu)$ é C^r ($r \geq 1$) em algum conjunto aberto $C \subset U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$.

Para $(t_0, x_0; \mu) \in U$ a solução $x(t, t_0, x_0; \mu)$ é uma função C^r de t, t_0, x_0 e μ .

As próximas três proposições dizem respeito a campos vetoriais autônomos.

Proposição 20 *Considere um campo vetorial do tipo*

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.40)$$

onde $f(x)$ é C^r , $r \geq 1$ em algum conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Se $x(t)$ é uma solução de (2.40), então também o é $x(t+\tau)$, para qualquer $\tau \in \mathbb{R}$.

Proposição 21 *Para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe somente uma solução de (2.40) passando através desse ponto.*

Proposição 22 *As seguintes propriedades são válidas:*

1. $x(t, x_0)$ é C^r ;

$$2. x(0, x_0) = x_0;$$

$$3. x(t+s, x_0) = x(t, x(s, x_0))$$

Deve-se salientar que sempre se pode transformar um campo vetorial não-autônomo em autônomo redefinindo o tempo como uma nova variável dependente. Vamos reescrever (2.38) como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x, t)}{1} \quad (2.41)$$

Usando a regra da cadeia, introduzimos uma variável de tal forma que $\frac{ds}{dt} = 1$.

Assim, ficamos com

$$x' \equiv \frac{dx}{ds} = f(x, t) \quad (2.42)$$

Escrevendo $y = (x, t)$ e $g(y) = (f(x, t), 1)$ obteremos, de (2.42) uma equação de campo vetorial autônomo

$$y' = \frac{dy}{ds} = g(y) \quad y \in R^n \times R^1 \quad (2.43)$$

Passemos agora a discutir brevemente o comportamento de um sistema dinâmico sob condições assintóticas. Vamos, primeiramente, expressar a idéia do que comumente é chamado de fluxo de fase (ou apenas fluxo). Fluxo (que denotaremos por $\phi(t, x)$) não é nada mais que a família de soluções de (2.40) de C^r , $r \geq 1$, ou seja, um difeomorfismo no espaço de fase.

Definição 23 Um ponto $x_0 \in R^n$ é chamado ω -limite de $x \in R^n$, se existe uma seqüência $\{t_i\}$, $t_i \rightarrow \infty$ tal que $\phi(t_i, x) \rightarrow x_0$. O conjunto de todos os pontos ω -limite de x é denotado por $\omega(x)$. Um ponto α -limite é similarmente definido tomando a seqüência $\{t_i\}$, $t_i \rightarrow -\infty$, sendo o conjunto de todos os pontos α -limite de x denotado por $\alpha(x)$.

Definição 24 O conjunto de todos os pontos ω -limite do fluxo é chamado de conjunto ω -limite. O conjunto α -limite é similarmente definido.

Definição 25 Um ponto x_0 é chamado de não-errante se, para qualquer vizinhança U de x_0 existe algum $t \neq 0$ tal que $\phi(t, U) \cap U \neq \emptyset$.

Pontos fixos e órbitas periódicas são não-errantes.

Definição 26 O conjunto de todos os pontos não errantes de um fluxo é chamado de conjunto não-errante do fluxo.

Segue-se agora as definições de conjunto atrator e bacia de atração, preparando caminho para o conceito de atrator.

Definição 27 Um conjunto invariante fechado $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado conjunto atrator se existe alguma vizinhança U de A tal que

$$\forall x \in U, \forall t \geq 0, \phi(t, x) \in U \text{ e } \phi(t, x) \rightarrow A \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Definição 28 O Domínio, ou Bacia de Atração de A é dado por $\cup_{t \leq 0} \phi(t, U)$, onde U foi definido anteriormente.

Definição 29 Um conjunto fechado, conexo M é chamado "trapping region" se $\phi(t, M) \subset M, \forall t \geq 0$, ou, equivalentemente, se o campo vetorial no contorno de M (denotado por ∂M) apontar para o interior de M . Então $\cap_{t > 0} \phi(t, M) = A$ é um conjunto atrator.

Agora estamos em condição de estabelecer, em definitivo, o conceito de atrator.

Definição 30 Um conjunto invariante fechado A é topologicamente transitivo se, para quaisquer pares de conjuntos abertos $U, V \subset A, \exists t \in \mathbb{R} \ni \phi(t, U) \cap V \neq \emptyset$.

Definição 31 Um atrator é um conjunto atrator topologicamente transitivo.

Outro conceito muito importante e que será usado nas bases do modelo de Ruelle-Takens-Newhouse é de *atrator estranho*. Grosseiramente, podemos dizer que um atrator A é estranho se for *caótico*. Isso significa que, se quisermos provar que um sistema dinâmico possui um atrator estranho devemos encontrar uma *trapping*

region M no espaço de fase, uma órbita homoclínica* a qual se associa um conjunto de Cantor.

Passemos agora ao estudo do teorema de Poincaré-Bendixson, que é muito útil na determinação do comportamento assintótico de um amplo leque de fluxos, tanto no plano, quanto no cilindro e na esfera. Consideremos campos vetoriais bidimensionais C^r , $r \geq 1$ do tipo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{2.44}$$

onde $(x, y) \in P$ e P é o espaço de fase, o que pode ser o plano, o cilindro ou a esfera. Denotaremos o fluxo gerado por esse campo vetorial por ϕ . Façamos, em princípio, uma proposição sobre propriedades de conjuntos ω -limites.

Proposição 32 *Seja ϕ o fluxo de um campo vetorial e seja M um conjunto compacto invariante para esse fluxo. Então, para $p \in M$, temos*

- i) $\omega(p) \neq \emptyset$;
- ii) $\omega(p)$ é fechado;
- iii) $\omega(p)$ é invariante sobre o fluxo, i.e., $\omega(p)$ é uma união fechada de órbitas;
- iii) $\omega(p)$ é convexo.

Vamos ao teorema que encerra a seção:

Teorema 33 (Poincaré-Bendixson). *Seja $M \subset \mathbb{R}^2$ uma região positivamente invariante para o campo vetorial contendo um número finito de pontos fixos. Seja $p \in M$ e considere $\omega(p)$. Sempre uma, e apenas uma, das possibilidades a abaixo é verdadeira:*

1. $\omega(p)$ é um ponto fixo;
2. $\omega(p)$ é uma órbita fechada;
3. $\omega(p)$ consiste de um número infinito de pontos fixos p_1, \dots, p_n, \dots e órbitas γ com $\alpha(\gamma) = p_i$ e $\omega(\gamma) = p_j$

*Órbita gerada da interseção da variedade estável com a instável de um ponto fixo hiperbólico para mapeamento.

Portanto, atratores no plano podem ser apenas pontos fixos, órbitas fechadas ou uma união de pontos fixos e órbitas fechadas.

2.3 Mapas de Poincaré

Passemos agora a desenvolver mais demoradamente a idéia de mapa (ou secção) de Poincaré, que é uma técnica amplamente usada para a análise de sistemas dinâmicos do tipo fluxo.

Uma das vantagens dessa técnica é a redução dimensional, ou seja, a construção da secção de Poincaré envolve a eliminação de, no mínimo, uma das variáveis do problema, resultando no estudo de um sistema dimensionalmente menor. Além do mais, com a redução da dimensionalidade o problema fica, em muitos casos, mais simples. Muitos conceitos relativos à teoria de sistemas dinâmicos podem ser melhor estabelecidos para o mapa de Poincaré associado.

Como a construção da secção de Poincaré requer algum conhecimento da estrutura geométrica específica do espaço de fase, não há nenhum método geral para tal construção. Porém pode-se estabelecer alguns “receituários” quando se estuda a estrutura orbital próxima a uma órbita periódica, homoclínica ou heteroclínica de um sistema, ou quando o espaço de fase é periódico.

Suponhamos que vamos construir um mapa de Poincaré nas vizinhanças de uma órbita periódica de uma equação diferencial como:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.45}$$

onde $f : U \rightarrow R^n$ e C^r em algum conjunto aberto $U \subset R^n$. Vamos supor que (2.45) tenha uma solução periódica de período T , chamada $\phi(t, x_0)$, onde $x_0 \in R^n$ é qualquer ponto através do qual essa solução periódica passa (i.e., $\phi(t + \tau, x_0) =$

$\phi(t, x_0)$). Seja Σ uma superfície transversal do campo vetorial em x_0 , de dimensão $n - 1$. Σ é chamada seção de Poincaré do campo vetorial (2.45). Como dito no teorema 11, $\phi(t, x)$ é C^r se $f(x)$ for C^{r-1} , podemos encontrar um conjunto aberto $V \subset \Sigma$ tal que as trajetórias partindo em V retornem a Σ num tempo próximo de T . O mapa que associa pontos em V com seus pontos de primeiro retorno a Σ é chamado de mapa de Poincaré e é denotado por P :

$$\begin{aligned} P : V &\rightarrow \Sigma \\ x &\rightarrow \phi(\tau(x), x) \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde $\tau(x)$ é o tempo de primeiro retorno do ponto x de Σ . Por construção, temos $\tau(x_0) = T$ e $P(x_0) = x_0$. Portanto, um ponto fixo de P corresponde a uma órbita periódica de (2.45).

Vamos agora supor que temos uma seção de Poincaré de uma equação diferencial ordinária periódica no tempo,

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.47)$$

onde $f : U \rightarrow R^n$ é C^r em algum conjunto aberto $U \subset R^n \times R^1$. Suponhamos também

que a dependência temporal (2.47) é periódica com período fixo $T = \frac{2\pi}{w} > 0$, i.e., $f(x, t) = f(x, t + T)$.

Reescrevendo a última equação na forma de uma equação autônoma em $n + 1$ dimensões, nós temos:

$$\begin{aligned} \theta : R^1 &\rightarrow S^1 \\ t &\rightarrow \theta(t) = wt \end{aligned} \quad (2.48)$$

Usando as duas últimas equações teremos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta) \\ \dot{\theta} &= w \quad (x, \theta) \in R^n \times S^1 \end{aligned} \quad (2.49)$$

O fluxo gerado por (2.48) é $\phi(t) = (x(t), \theta(t) = w(t) + \theta_0 \pmod{2\pi})$. Definimos uma seção transversal $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$ ao campo vetorial (2.49) por

$$\Sigma^{\bar{\theta}_0} = \left\{ (x, \theta) \in R^n \times S^1 \mid \theta = \bar{\theta}_0 \in (0, 2\pi) \right\} \quad (2.50)$$

A normal unitária para $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$ é dada por um vetor $(0,1)$ sendo claro que $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$ é transverso ao campo vetorial (2.49) para todo $x \in R^n$, desde que $(f(x, \theta), w) \cdot (0, 1) = w \neq 0$. Nesse caso $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$ é chamada de *seção transversal global*.

Assim, podemos definir o mapa de Poincaré da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P_{\bar{\theta}_0} : \Sigma^{\bar{\theta}_0} &\rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}_0} \\ \left(x \left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{w} \right), \bar{\theta}_0 \right) &\rightarrow \left(x \left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0 + 2\pi}{w} \right), \bar{\theta}_0 + 2\pi \right) \\ x \left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{w} \right) &\rightarrow x \left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0 + 2\pi}{w} \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

2.4 Expoentes de Liapunov

Consideremos o campo vetorial C^r :

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in R^n \quad (2.52)$$

Seja $x(t)$ uma trajetória desse campo satisfazendo $x(0) = x_0$. Queremos então descrever a estrutura da órbita de (2.52) próximo a $x(t)$. Primeiramente, consideremos a órbita dada pela linearização de (2.52) sobre $x(t)$:

$$\dot{\xi} = Df(x(t)) \xi \quad \xi \in R^n \quad (2.53)$$

Seja $X(t)$ a matriz solução fundamental de (2.53) e e um vetor em R^n . Então o coeficiente de expansão na direção de e ao longo da órbita passando por x_0 é definido por

$$\lambda_t(x_0, e) = \frac{\|X(t)e\|}{\|e\|} \quad (2.54)$$

onde $\|j\| = \sqrt{\langle j, j \rangle}$ com $\langle j, j \rangle$ denotando o produto escalar padrão em R^n . Deve-se notar que $\lambda_t(x_0, e)$ é uma quantidade que depende do tempo, de uma órbita particular de (2.52) e de uma direção particular ao longo dessa órbita. O expoente de Liapunov na direção e ao longo da órbita através de x_0 pode ser definido como

$$\chi(x, e) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \lambda_t(x_0, e) \quad (2.55)$$

Na verdade a definição inicial exige que o limite seja “ $\overline{\lim}$ ” e não apenas “ \lim ”, mas a (2.55) é válida para $X(t)$ regular quando $t \rightarrow \infty$.

Sendo a equação (2.55) uma quantidade assintótica, é necessário que $X(t)$ exista para todo $t > 0$, o que pode ser garantido se o espaço de fase for uma variedade compacta ou se x_0 jaz numa região positivamente invariante.

Temos também que o expoente de Liapunov na direção de e ao longo da órbita através de x_0 não muda se as condições iniciais da trajetória mudarem, algo que é mais ou menos intuitivo, já que é um limite quando t vai para infinito.

Podemos ver o expoente de Liapunov de uma dada órbita como uma longa média temporal das partes reais dos autovalores da matriz solução fundamental associada com a linearização do campo vetorial sobre a órbita. Portanto, ele nos dá uma informação concernente somente à expansão e contração locais do espaço de fase.

Pode-se fazer uma caracterização de atratores através da medida do expoente de Liapunov do sistema. Se obtemos, para um dado sistema, um χ positivo, isso implica em *sensibilidade às condições iniciais* impostas ao problema. Assim $\chi > 0$ mostra o sistema associado a um atrator estranho, pois é uma consequência direta das divergências locais da trajetória.

Na Fig.(2.1) vemos uma representação pictórica de diferentes tipos de atratores,

no espaço de fase tridimensional, com relação ao sinal dos expoentes de Liapunov[†].

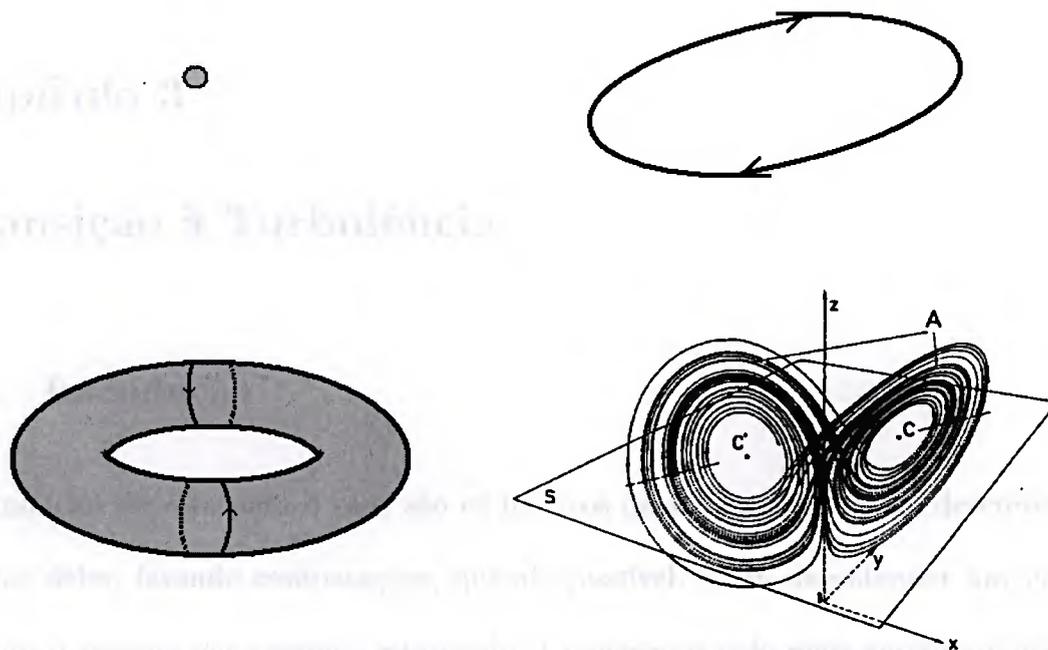


Fig. 2.1: Tipos de atratores segundo o sinal do Liapunov. Da esquerda para direita e de cima para baixo, na representação de um sistema tridimensional, temos: $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (-, -, -)$, ponto fixo; $(0, -, -)$, círculo limite; $(0, 0, -)$, toro; $(+, 0, -)$, atrator estranho.

[†]Inspirado na representação da pag. 287 da referência [15].

Capítulo 3

Transição à Turbulência

3.1 Introdução

Os modelos de rota para o caos são os motivos desse capítulo. Aqui, descrevemos alguns deles, fazendo comparações, quando possível, a fim de entender um pouco melhor o sistema que estamos estudando. Começamos pelo mais antigo até atingir abordagens menos ortodoxas e pouco contextualizadas.

3.2 O Modelo de Landau

Passemos a estudar o modelo mais “primitivo” de transição à turbulência. Nesse modelo, proposto por Landau e discutido em seu livro *Mécanique de Fluides* [5] de 1959, vemos o fluido passando por um infinito aumento nos graus de liberdade de velocidade do fluido. Começemos por estudar sua estabilidade.

3.2.1 Estabilidade do movimento estacionário do fluido

Landau propõe que se faça algumas aproximações ao resolver o movimento estacionário do fluido. Tais aproximações são válidas para certos limites. Dessa forma, diz-se que nem todas as soluções das equações de movimento, mesmo estas equações sendo exatas, podem ser realizadas pela natureza. Para que o fluxo seja estável, é

necessário que pequenas perturbações, se geradas, diminuam com o tempo.

Se começarmos a estudar o problema por perturbações infinitesimais, superpondo à solução estacionária $\vec{v}_0(x, y, z)$ (distribuição das velocidades), uma pequena perturbação estacionária $\vec{v}_1(x, y, z, t)$ colocada de tal maneira que o movimento resultante satisfaça as equações de movimento.

A equação que determina \vec{v}_1 é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Substituindo $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ e $p = p_0 + p_1$ em (3.1) sujeita a equação não perturbada:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 &= -\frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v}_0 \\ \nabla \cdot \vec{v}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

vamos obter (omitindo termos acima de primeira ordem):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 &= -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v}_1 \\ \nabla \cdot \vec{v}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

sendo a condição de contorno que \vec{v}_1 se anule em superfícies sólidas fixas.

Assim, \vec{v}_1 satisfaz um sistema de equações diferenciais lineares com os coeficientes sendo funções de suas coordenadas, mas não do tempo. A solução geral dessas equações pode ser representada pela soma das soluções particulares de \vec{v}_1 dependente do tempo como um fator $e^{-i\omega t}$. A frequência ω da perturbação não é arbitrária mas é determinada pela solução de (3.3), com condições de contorno apropriadas. Esse ω é, em geral, complexo. Porém, se a função tiver parte imaginária positiva, então $e^{-i\omega t}$ crescerá indefinidamente com o tempo. Em outras palavras, tais perturbações, uma vez geradas, crescerão, ou seja, o fluxo é instável com relação a

tais perturbações. Para que o fluxo seja estável é necessário que a parte imaginária de qualquer frequência ω seja negativa. As perturbações geradas decrescerão exponencialmente com o tempo. Todavia, um estudo matemático da estabilidade é extremamente complexo. Até o presente a questão da estabilidade do escoamento estacionário ao longo de campos de dimensão finita ainda não teve um tratamento teórico adequado. Não há dúvidas que, para números de Reynolds suficientemente pequenos, o escoamento estacionário é estável. Experimentos levam a crer que o escoamento segue estacionário até um certo valor de R , chamado R_{crit} , sendo que, para $R > R_{crit}$ o escoamento se torna instável com relação a perturbação. Não se pode deixar de dizer que o número de Reynolds não é universal. Cada tipo de movimento possui um R_{crit} .

3.2.2 Aparecimento da Turbulência

Vamos explicitar as propriedades do movimento quando o número de Reynolds é um pouco maior que o R_{crit} . Quando $R < R_{crit}$, as frequências complexas $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ de todas as perturbações possíveis da velocidade tem parte imaginária negativa ($\gamma_1 < 0$). Para $R = R_{crit}$ aparece uma frequência que a parte imaginária é nula. Para $R > R_{crit}$, existem $\gamma_1 > 0$ e para R um pouco maior, γ_1 é pequeno em comparação com ω_1 .

A função \vec{v}_1 correspondente a essa frequência se escreve:

$$\vec{v}_1 = A(t)\vec{f}(x, y, z) \quad (3.4)$$

onde \vec{f} é a função complexa das coordenadas e $A(t)$ é a amplitude complexa dada por

$$A(t) = const.e^{\gamma_1 t}e^{-i\omega_1 t} \quad (3.5)$$

Todavia, essa expressão é válida para um intervalo de tempo bem curto após a quebra do regime estacionário. O fator $e^{\gamma_1 t}$ cresce rapidamente com o tempo, conduzindo então a uma expressão do tipo (3.4) e (3.5) que se aplica apenas se \vec{v}_1 é suficientemente pequeno. Na realidade o módulo $|A|$ da amplitude do movimento não estacionário não cresce indefinidamente mas tem um limite finito. Pela vizinhança de R_{crit} esse limite também é pequeno.

Encontramos a derivada do quadrado da amplitude $|A|^2$. Para t muito pequeno (quando (3.5) ainda é válida), temos:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 e^{2\gamma_1 t} \cdot const = 2\gamma_1 |A|^2$$

Essa expressão é justamente o primeiro termo da expansão em série de potência de A e A^* . Como o módulo $|A|$ cresce (ainda permanecendo pequeno), os termos subseqüentes devem ser consideradas. O próximo termo é de terceira ordem em A . Todavia, não estamos interessados no valor exato de $\frac{d|A|^2}{dt}$, mas na sua média temporal, tomadas para tempos grandes se comparados ao período $\frac{2\pi}{\omega_1}$ do fator $e^{-i\omega_1 t}$. Desde que $\omega_1 \gg \gamma_1$, esse período é pequeno comparado com o tempo $1/\gamma_1$, requerido para que a amplitude $|A|$ varie apreciavelmente. Os termos de terceira ordem, por conter o fator periódico, anulam-se na média.

Os termos de quarta ordem são proporcionais a A^2 e $(A^*)^2$ e claramente não se anulam na média.

Assim, limitando-nos a termos de quarta ordem, ficamos com:

$$\overline{\frac{d|A|^2}{dt}} = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4 \quad (3.6)$$

onde α pode ser maior ou menor que zero.

Suponhamos que α seja uma contante positiva. Não estamos colocando barras sobre $|A|^2$ e $|A|^4$ pois a média é feita somente sob intervalos de tempo pequenos comparados com $1/\gamma_1$.

Pelo mesmo motivo, ao resolver a equação procedemos como se a barra fosse omitida sobre a derivada também.

Vamos resolver a (3.6):

$$\int \frac{d|A|^2}{2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4} = t \quad (3.7)$$

Reescrevendo:

$$\frac{1}{2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4} = \frac{\alpha/4\gamma_1^2}{1 - (\alpha/2\gamma_1)|A|^2} + \frac{1}{2\gamma_1|A|^2}$$

Assim, a integral fica:

$$\begin{aligned} \int \frac{d|A|^2}{2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4} &= \int \frac{\alpha/4\gamma_1^2 d|A|^2}{1 - (\alpha/2\gamma_1)|A|^2} + \int \frac{d|A|^2}{2\gamma_1|A|^2} \\ &= \frac{1}{2\gamma_1} \int \frac{\alpha/2\gamma_1 d|A|^2}{1 - (\alpha/2\gamma_1)|A|^2} + \int \frac{d|A|^2}{2\gamma_1|A|^2} \\ &= -\frac{1}{2\gamma_1} \ln\left(1 - \frac{\alpha|A|^2}{2\gamma_1}\right) + \frac{1}{2\gamma_1} \ln(|A|^2) \end{aligned}$$

Voltando a (3.7):

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{2\gamma_1}|A|^2\right) - \ln(|A|^2) &= -2\gamma_1 t \\ \ln\left(\frac{1 - \frac{\alpha}{2\gamma_1}|A|^2}{|A|^2}\right) &= -2\gamma_1 t \\ \frac{1}{|A|^2} - \frac{\alpha}{2\gamma_1} &= \text{const.} e^{-2\gamma_1 t} \\ \frac{1}{|A|^2} &= \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \text{const.} e^{-2\gamma_1 t} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, $|A|^2$ tende assintoticamente a um limite finito:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|A|_{max}^2} &= \frac{\alpha}{2\gamma_1} \\ |A|_{max}^2 &= \frac{2\gamma_1}{\alpha} \end{aligned} \quad (3.9)$$

A quantidade γ_1 é uma função do número de Reynolds. Na vizinhança de R_{crit} , pode-se fazer uma série de potência de $R - R_{crit}$. Mas $\gamma_1(R_{crit}) = 0$ em virtude da definição de R_{crit} . Não existindo o termo de ordem zero, teremos, para o termo de primeira ordem:

$$\gamma_1 = const.(R - R_{crit}) \quad (3.10)$$

Substituindo esse resultado na (3.9) teremos

$$|A|_{max} \propto \sqrt{R - R_{crit}} \quad (3.11)$$

Resumindo: a instabilidade absoluta do movimento para $R > R_{crit}$ conduz ao aparecimento de um movimento periódico não estacionário. Para R na vizinhança de R_{crit} , o movimento pode ser representado pela superposição do movimento estacionário $\vec{v}_0(x, y, z)$ e do movimento periódico $\vec{v}_1(x, y, z, t)$ de pequena amplitude, mas crescente com relação a R , proporcionalmente à quantidade $R - R_{crit}$. A distribuição das velocidades é da forma

$$\vec{v}_1 = \vec{f}(x, y, z)e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)} \quad (3.12)$$

\vec{f} sendo uma função complexa das coordenadas e β_1 uma certa fase inicial. Para valores maiores de $R - R_{crit}$ a separação da velocidade em duas partes é bastante sensível. Vamos agora estudar esse movimento periódico de frequência ω_1 . Se, ao longo do tempo, considerarmos como variável independente a fase $\phi = \omega_1 t + \beta$, pode-se considerar $\vec{v}(x, y, z, \phi)$ como uma função periódica de ϕ_1 de período 2π . Porém, esta não será uma função trigonométrica simples.

Fazendo a série de Fourier:

$$\vec{v} = \sum_p \vec{A}_p(x, y, z)e^{-ip_1\phi} \quad (3.13)$$

(a soma se estende para p inteiros negativos e positivos), contendo não somente os termos de frequência fundamental ω_1 , mas também os termos correspondentes às frequências que são múltiplos inteiros da fundamental.

É conveniente indicar mais uma vez a seguinte particularidade essencial do movimento não estacionário considerado. A equação (3.6) não determina o valor absoluto do fator temporal $A(t)$, nem sua fase. A fase $\phi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ do movimento periódico restante, de fato, é indefinida e depende das condições iniciais. Em função destas condições, a fase inicial β_1 , pode ter qualquer valor. Dessa maneira, o movimento periódico não pode ser determinado de uma maneira única pelas condições estacionárias externas. Uma grandeza - a fase inicial da velocidade - é arbitrária. Diz-se então que esse fluxo tem um grau de liberdade, enquanto que o fluxo estacionário, o qual é inteiramente determinado pelas condições externas, não possui nenhum grau de liberdade.

Vamos agora estudar a descrição de Landau para estágios de Reynolds mais alto, onde há instabilidade. O estudo dessa instabilidade é feita por um método análogo ao anterior, porém mais refinado. A regra para o movimento é a mesma, tendo-se um movimento periódico $\vec{v}_0(x, y, z, t)$ (de frequência ω_1) sendo substituído na equação de movimento $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_2$, sendo \vec{v}_2 uma pequena correção. Aqui de novo obtemos uma equação linear para \vec{v}_2 , mas seus coeficientes não são apenas funções das coordenadas, mas também do tempo, sendo periódica no tempo, com período $2\pi/\omega$. Assim,

$$\vec{v}_2 = \Pi(x, y, z, t)e^{-i\omega t} \quad (3.14)$$

sendo $\Pi(x, y, z, t)$ uma função periódica do tempo (de período $2\pi/\omega_1$). A instabilidade de novo ocorre quando a frequência $\omega = \omega_2 + i\gamma_2$ tal que a parte imaginária

γ_2 seja positiva e a correspondente parte real ω_2 determina então a nova frequência que aparece.

O resultado, portanto, é que um fluxo quasiperiódico aparece, caracterizado por dois diferentes períodos, tendo o fluxo dois graus de liberdade.

Quando o número de Reynolds cresce ainda mais, novos períodos aparecem em sucessão. O intervalo no número de Reynolds entre dois surgimentos sucessivos de período diminui rapidamente. Os novos fluxos têm escalas cada vez menor. Isso significa que a ordem de magnitude das distâncias sobre as quais a velocidade muda apreciavelmente é a menor à posterior que aparece no fluxo em questão.

Para $R > R_{crit}$, portanto, o fluxo torna-se complicado. Tal fluxo é dito turbulento. Em contraposição ao fluxo turbulento, o fluxo laminar, no qual o fluido se move em camadas com diferentes velocidades, é chamado regular.

Podemos escrever a forma geral de uma função $\vec{v}(x, y, z, t)$ cuja dependência temporal é dada por n diferentes frequências ω_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Ao invés de uma fase $\phi = \omega t + \beta$, temos agora n diferentes fases $\phi_j = \omega_j t + \beta_j$.

A função \vec{v} pode ser considerada como uma função dessas fases (e das coordenadas) e é periódica em cada uma, com período 2π .

Tal função pode ser escrita como uma série:

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} A_{p_1 \dots p_n}(x, y, z) \exp[-i \sum_{j=1}^n p_j \phi_j] \quad (3.15)$$

a soma sendo feita sobre todos os inteiros p_1, p_2, \dots, p_n . Essa é uma generalização da (3.14). Notemos que a escolha das frequências fundamentais não é única. Poderíamos tomar quaisquer combinações lineares independentes de ω_j com coeficientes inteiros.

Um fluxo descrito por uma fórmula como a (3.15) tem n graus de liberdade. Estas evoluem n fases iniciais arbitrárias β_j . À medida de R cresce, tanto o número

de frequências quanto o número de graus de liberdade crescem. No limite em que R tende a infinito, o número de graus de liberdade cresce indefinidamente.

Deve-se levar em conta que, uma vez que a velocidade é uma função periódica das fases, com período 2π , os estados cujas fases diferem somente por um múltiplo inteiro de 2π são indistinguíveis. Em outras palavras, podemos dizer que todos os valores essencialmente diferentes estão no intervalo $0 \leq \phi_j \leq 2\pi$. Consideremos quaisquer duas fases $\phi_j = \omega_1 t + \beta_1$ e $\phi_2 = \omega_2 t + \beta_2$. Suponhamos que, em algum instante, ϕ_1 tenha o valor α . Então, ϕ_1 terá valores proporcionais a α em todos os instantes $t = \frac{\alpha - \beta_1 + 2\pi r}{\omega_1}$, onde r é qualquer inteiro.

Nestes instantes, a fase ϕ_2 terá os valores

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{\omega_2}{\omega_1}(\alpha - \beta_1 + 2\pi r) + \beta_2 \\ \phi_2 &= \frac{\omega_2}{\omega_1}(\alpha - \beta_1) + \beta_2 + 2\pi r \frac{\omega_2}{\omega_1}\end{aligned}\tag{3.16}$$

As diferentes frequências são, em geral, incomensuráveis, tal que ω_2/ω_1 seja um número irracional. Podemos reduzir cada valor de ϕ_2 ao intervalo $[0, 2\pi]$ pela subtração do múltiplo inteiro apropriado de 2π . Em outras palavras, no decorrer de um tempo suficientemente longo ϕ_1 e ϕ_2 estarão simultânea e arbitrariamente próximos para qualquer dado par de valores. O mesmo é, obviamente, verdade para todas as fases. Assim, o movimento turbulento tem uma propriedade quasiperiódica: no decorrer de um tempo suficientemente longo o fluido passa por estados arbitrariamente próximos a um dado estado, determinado por qualquer possível escolha de valores das fases ϕ_j .

Dizemos no início que o número crítico de Reynolds é o valor de R no qual a instabilidade do fluxo primeiro ocorre. O R_{crit} pode, todavia, ser considerado sob

um ponto de vista diferente. Para $R < R_{crit}$ não há nenhuma solução não regular que não seja amortecida no tempo. Depois que o valor crítico é alcançado, uma solução não regular aparece que realmente ocorrerá em um fluido em movimento.

Uma das conclusões importantes que podem ser extraídas do ponto de vista de Landau sobre a transição à turbulência é a inapetência de se tratar equações tipo Navier-Stokes com métodos perturbativos. Esse tipo de equação, pelo fato de não ser fechada, ou seja, não possuir um conjunto finito de soluções, restringe a confiabilidade da abordagem de Landau. Ainda mais, não conhecemos nenhuma solução exata de um problema aproximado, o que não nos permite uma comparação por meio de aproximações sucessivas. A equação (3.1) torna-se completamente diferente caso seja omitido, por exemplo, o termo em ∇^2 . Além disso, nada nos garante que podemos desprezar termos acima de primeira ordem na passagem de (3.2) para (3.3).

3.3 O Modelo de Ruelle-Takens-Newhouse

A abordagem do problema feita por Ruelle, Takens e Newhouse difere conceitualmente da de Landau. Em princípio, no tratamento do regime estacionário nada parece mudar.

No trabalho de 1971 [7], Ruelle e Takens imaginam um sistema consistindo de um fluido e um corpo rígido (paredes de um tubo, por exemplo) não sujeito a forças externas, à exceção de uma ação regular medida por um parâmetro μ (no nosso caso, esse parâmetro é o número de Reynolds). Tal como Landau, para o caso de $\mu > 0$ obtem-se um estado regular, até que, para o crescimento de μ o movimento do fluido permanece regular, mas muda seu padrão de simetria ou o movimento torna-se muito complicado, irregular e caótico, ocorrendo uma turbulência não, necessariamente,

oriunda de um comportamento quasiperiódico.

Isso fica claro se escrevermos a equação de Navier-Stokes da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}x = X_\mu(x) \quad (3.17)$$

para $\mu = 0$, o sistema tem uma solução $x = 0$. Consideremos agora o Jacobiano desta solução

$$J_k^l = \frac{\partial X_0^j}{\partial x^k}(0) \quad (3.18)$$

que tem parte real negativa, ou seja, $x = 0$ é um ponto fixo atrativo. Assim, o determinante do Jacobiano é não nulo. Então, pelo teorema da função implícita, existe $\xi_\mu(t)$, chamada solução estacionária, dependendo continuamente de μ , tal que

$$X_\mu(\xi_\mu) = 0 \quad (3.19)$$

ou seja, para todo μ existirá uma solução de ponto fixo (solução estacionária). Mas, por continuidade, o Jacobiano de ξ_μ , denotado por $J_k^l[\xi_\mu]$, para um μ suficientemente pequeno deve ter parte real negativa.

Ao aumentarmos μ , a parte real dos autovalores pode se anular, fazendo com que os pontos fixos se unam e desapareçam ou sucessivos pares de autovalores complexos cruzem o eixo imaginário. Logo, pelo teorema de Hopf, o que era um ponto fixo (solução estacionária) passa a ser uma órbita periódica (solução periódica), sendo sua amplitude proporcional a μ . Todavia, à medida que aumentamos μ , podemos ter uma outra bifurcação de Hopf ou transformação de uma órbita periódica em uma quasiperiódica. Logo, pelo teorema de Peixoto, a vizinhança desta órbita está em um conjunto que é o complemento de um subconjunto denso e aberto do espaço de Banach dos campos C^r sobre o toro. Este conjunto, em diversas situações é um atrator, sendo este conjunto que define o chamado cenário de transição à Turbulência.

Para o caso do Cenário de Ruelle-Takens-Newhouse, temos o seguinte teorema:

Teorema 34 (*Newhouse-Ruelle-Takens*) *Seja v um campo vetorial constante sobre um toro $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Se $n \geq 3$, toda vizinhança C^2 de v contém um campo vetorial \acute{u} com um atrator estranho. Se $n \geq 4$, podemos tomar C^∞ ao invés de C^2 .*

Assim, o sistema pode, ao passar por três bifurcações de Hopf encontrar um atrator tipo Axioma A*.

Eckmann, em seu trabalho de 1981, faz uma comparação entre os dois cenários[8].

No caso do cenário de Landau, o fluxo no toro de n dimensões no espaço de fase, formado após n bifurcações de Hopf é o fluxo de velocidades constantes, ou seja, esse fluxo não pode ser satisfeito em um conjunto aberto de campos vetoriais, sendo, por isso, muito mais restrito do que o de Ruelle-Takens. Assim, a generalidade do modelo de Ruelle-Takens é maior do que o de Landau.

Neste mesmo trabalho, Eckmann apresenta algumas evidências experimentais da validade das idéias de Ruelle e Takens, tais como o aparecimento de uma, duas e três frequências dominantes no espectro de potência de velocidade em cilindros rotantes e espectro de potência de transporte de calor no fenômeno conhecido como Convecção de Rayleigh-Bénard. No nosso problema, mostraremos no próximo capítulo que o fluxo no tubo tende a passar de uma frequência dominante diretamente para o encontro do atrator.

3.4 Outras Abordagens

3.4.1 O Cenário de Feigenbaum

O cenário de Feigenbaum consiste de um processo de duplicação infinito de períodos da órbita em um intervalo finito de variação de μ .

*Maiores detalhes sobre a definição de Axioma A podem ser encontrados na referência [10]

Definindo-se o mapa de Poincaré P_μ , transversal a órbita periódica ν_μ , encontra-se que o sistema possui um atrator aperiódico e ergódico (quando $\mu = \mu_\infty$), ou seja, composto por órbitas estáveis de período 2^∞ . A teoria também assegura que $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = \mu_\infty$ existe. Essas bifurcações de P_μ são tipo *pitchfork*, ou seja, um ponto fixo estável perde sua estabilidade e gera uma órbita estável periódica quando o parâmetro muda.

Este cenário possui um número universal $\delta = 4.66920\dots$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \log |\mu_j - \mu_{infy}| = -\log \delta \quad (3.20)$$

que nada mais é que um índice crítico.

Esse cenário, apesar de parecer mais geral pelo fato de levar em conta todas os mapas de Poincaré, aplica-se a um intervalo muito pequeno do parâmetro μ .

3.4.2 O Cenário de Pomeau-Manneville

Enquanto o Cenário de Ruelle-Takens é associado à bifurcações de Hopf e o de Feigenbaum à bifurcações tipo *pitchfork*, o Cenário de Pomeau-Manneville é associado a bifurcações tipo “ponto de sela” †.

É comumente chamado, também, de *transição a turbulência através de intermitência* e consiste em assumir que uma família de um parâmetro de sistemas dinâmicos tenha mapas de Poincaré próximos a uma família de um parâmetro de mapas de intervalo, e que estes mapas tenham um ponto fixo estável e outro instável colidindo quando o parâmetro é variado. Então, quando o parâmetro μ vai além do valor crítico μ_c , vê-se comportamento intermitentemente turbulento de duração randômica, com fases laminares de duração de aproximadamente $\frac{1}{\sqrt{\mu - \mu_c}}$ entre elas.

†Ver capítulo 2 para definição de ponto sela.

Um dos sistemas dinâmicos mais conhecidos, o Atrator de Lorenz, encaixa-se na descrição desse cenário.

Capítulo 4

Software Utilizado

4.1 Transição

Este capítulo descreve a metodologia utilizada para a obtenção dos resultados apresentados no capítulo anterior. O software utilizado para a realização das simulações é o MATLAB, versão 7.0.4. O código fonte das simulações é disponibilizado em anexo. A metodologia utilizada para a obtenção dos resultados é baseada na metodologia utilizada no capítulo anterior. O código fonte das simulações é disponibilizado em anexo. A metodologia utilizada para a obtenção dos resultados é baseada na metodologia utilizada no capítulo anterior. O código fonte das simulações é disponibilizado em anexo.

Este capítulo descreve a metodologia utilizada para a obtenção dos resultados apresentados no capítulo anterior. O software utilizado para a realização das simulações é o MATLAB, versão 7.0.4. O código fonte das simulações é disponibilizado em anexo. A metodologia utilizada para a obtenção dos resultados é baseada na metodologia utilizada no capítulo anterior. O código fonte das simulações é disponibilizado em anexo.

Capítulo 4

Software Utilizado

4.1 Introdução

Neste capítulo discutiremos a construção do código utilizado nas simulações do fluxo. Salientamos que trataremos de simular um fluxo descrito por um conjunto de equações não-lineares a derivadas parciais. Para tal, usamos um pacote comercial específico para problemas dessa natureza. Esse pacote - chamado FIDAP, versão 8.01 - tem a vantagem de já possuir os modelos de simulação montados, cabendo ao usuário descrever a geometria e as condições as quais quer submeter seu problema. Como o FIDAP é baseado no Método dos Elementos Finitos, ele permite a análise de de vários tipos de geometrias. Embora nosso objetivo seja analisar uma geometria simples, poderemos eventualmente estender esse estudo sem muita dificuldade para outras configurações. O programa permite obter uma descrição com algum detalhe dos vórtices, possibilitando, com uma margem de erro aceitável, rastrear seções retas do campo de soluções em intervalos de tempo bem reduzidos, fornecendo dados suficientes para a reconstrução do atrator.

Assim, após uma descrição da estrutura lógica do software e de sua interface gráfica, passaremos a descrever a maneira como o FIDAP trata problemas específicos.

4.2 O Fidap 8.01

O pacote de análise fluidodinâmica FIDAP é um programa geral que usa o método de elementos finitos para simular qualquer classe de fluxos, sendo bidimensionais, axi-simétricos ou tridimensionais, laminares ou transientes. As análises são limitadas no tamanho somente por considerações práticas de tempo de computação e memória.

O pacote FIDAP consiste de dois programas. O primeiro é chamado FIDAP o qual consiste de seis submódulos para pré e pós-processamento. O segundo é chamado FISOLV, um componente do pacote o qual calcula a solução.

O uso do programa consiste de três passos:

i) *Pré-processamento: definição do problema a ser resolvido.* Aqui o programa contém cinco módulos que podem ser usados para a geração de dados:

FIPREP: para controle da simulação e propriedades do fluido.

FI-GEN e FIMESH: para a geração automática da malha. FI-GEN é um gerador de malha interativo, baseado na geometria enquanto que FIMESH é um gerador de malha mais orientado em conceitos de espaço lógico.

FI-BC: para aplicações de condições de contorno e iniciais.

FICONV: pode ser usado no lugar do FI-GEN ou FIMESH para a criação de dados da malha compatíveis com o FIDAP convertendo informações criadas por outros programas.

ii) *Processamento: realizando a simulação numérica*

O processamento é realizado no módulo FISOLV sem a intervenção do usuário. A execução do FISOLV é frequentemente iniciada na sessão FIDAP.

iii) *Pós-processamento: revendo e analisando a solução.*

FIPOST é o módulo de pós-processamento do FIDAP. Ele mostra os gráficos da malha, vetor velocidade, contorno de pressão, contorno do campo, vorticidade, evolução temporal de qualquer variável nodal, coordenada vs. variável nodal, transformada de Fourier entre outros gráficos. Estresse tangencial e normal, fluxo de massa e calor podem ser mostrados pelo FIPOST.

O FIDAP simula fluxos de vários fluidos compressíveis e incompressíveis. Em uma situação isotérmica, as equações que são utilizadas são a de Navier-Stokes e equação da continuidade. Em uma situação não-isotérmica, o FIDAP resolve essas equações juntamente com a equação de energia para a distribuição de temperaturas. No nosso caso, faremos simulações para fluidos incompressíveis e sistemas isotérmicos.

Com esse pacote, simularemos fluxos tridimensionais, em regimes laminar e turbulento para diferentes números de Reynolds

4.3 Formulação do Problema Contínuo pelo Software

A equação de estado mais geral possível para o problema é:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) = \sigma_{ij,j} + \rho f_i \quad (4.1)$$

onde u_i : velocidade;

ρ : densidade;

σ_{ij} : tensor de stress;

f_i : força por unidade de massa.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (4.2)$$

p : pressão;

τ_{ij} : deviatoric stress tensor.

O tensor de deformação ε é dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.3)$$

Para fluidos incompressíveis temos:

$$\tau_{ij} = 2(\mu\varepsilon_{ij}) \quad (4.4)$$

onde μ : viscosidade.

Outra maneira de definir o tensor de deformação é:

$$d_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) = 2\varepsilon_{ij} \quad (4.5)$$

Para fluidos visco-elásticos:

$$\tau_{ij} = \mu d_{ij} + \tau_{ij}^E \quad (4.6)$$

onde τ_{ij}^E é a contribuição elástica. τ_{ij}^E no FIDAP é generalizado por um modelo de segunda ordem:

$$\tau_{ij}^E = a_1 d_{ik} d_{kj} - a_2 (u_k d_{ijk} + u_{k,i} u_{k,j} - u_{i,k} u_{k,j}) \quad (4.7)$$

onde a_1 e a_2 são constantes.

4.3.1 Conservação de Massa

A equação para a conservação de massa é da forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u_i)_j = 0 \quad (4.8)$$

sendo então

$$\rho \left(\frac{\partial c_n}{\partial T} + u_i c_{ni} \right) = -j_{ii}^{(n)} + q_{c_n} + R_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

c_n : concentração das substâncias da (fração de massa) da n-ésima espécie;

$j_i^{(n)}$: fluxo difusivo de massa;

R_n : razão de reação química;

q_{c_n} : termo geral de fonte.

T : temperatura

$$j_i^{(n)} = -\rho \left(\alpha_{ij}^{(n)} c_{ni} \right) + \alpha_T^{(n)} \frac{T_i}{T} \quad (4.10)$$

$\alpha_{ij}^{(n)}$: difusividade de massa;

$\alpha_T^{(n)}$: coeficiente de termodifusão

Na maioria das aplicações a difusividade de massa é um escalar e os coeficientes de termodifusão são negligenciados.

$$j_i^{(n)} = -\rho \alpha_n c_{ni} \quad (4.11)$$

Assim teremos:

$$\rho \left(\frac{\partial c_n}{\partial T} + u_i c_{ni} \right) = (\rho \alpha_n c_{ni})_i + q_{c_n} + R_n \quad n = 1, 2, \dots$$

4.3.2 Conservação de Energia

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i T_{,i} \right) = -q_{ii} + H \quad (4.12)$$

T : temperatura

c_p : calor específico a pressão constante;

q_{ii} : fluxo energia térmica;

H : termo geral de geração de calor.

O FIDAP assume que o fluxo de calor é determinado pela Lei de Fourier:

$$q_i = -k_{ij} T_{,j} \quad (4.13)$$

k_{ij} : tensor de condutividade térmica.

Aproximação:

$$q_i = -k T_{,i} \quad (4.14)$$

Assim a eq.(4.12) fica:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i T_{,i} \right) = (k T_{,i})_{,i} + H \quad (4.15)$$

onde H inclui fonte de calor, reações químicas, potenciais elétricos, condutividade elétrica e radiação.

4.3.3 Fluido Compressível

Equação de estado:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{Mp}{R^*T} \quad (4.16)$$

M : peso molecular

R^* : constante universal dos gases

Equações de vínculo:

$$\sum_{n=1}^N c_n = 1 \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{M} = \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{M_N} \quad (4.18)$$

No FIDAP temos

$$c_N = - \sum_{n=1}^N c_n + 1 \quad (4.19)$$

$$\rho = \frac{M_N p}{R^* T \left[1 + \sum \left(\frac{M_N}{M_N - 1} \right) c_n \right]} \quad (4.20)$$

Neste *software* o limite para N é 16. Nas situações em que a densidade varia com T :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0)] \quad (4.21)$$

β_T : coeficiente de expansão volumétrica.

4.3.4 Fluido Incompressível

Equação de estado

$$\rho = \rho_0 \quad (4.22)$$

No *software*, a força de empuxo fica (aproximação de Boussinesq):

$$\begin{aligned}
 (\rho - \rho_0) g_i &= \frac{-\rho_0 \left[\beta_T (T - T_0) + \sum_n \left(\frac{M_N}{M_N - 1} \right) c_n \right] g_i}{1 + \sum_n \left(\frac{M_N}{M_N - 1} \right) c_n} \\
 &\simeq -\rho_0 \left[\beta_T (T - T_0) + \sum_n \beta_T c_n \right] g_i
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

Usando esta aproximação temos

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i u_{ij} \right) = -p_i + [\mu (u_{ij} + u_{ji})]_j - \rho_0 \left[\beta_T (T - T_0) + \sum_n \beta_{c_n} c_n \right] g_i + \rho_0 f_i
 \tag{4.24}$$

assim como

$$u_{i,j} = 0
 \tag{4.25}$$

o que dá

$$\rho \left(\frac{\partial c_n}{\partial T} + u_i c_{ni} \right) = \rho_0 (\alpha_n c_{ni})_i + q_{c_n} + R_n \quad n = 1, 2, \dots
 \tag{4.26}$$

enquanto que a conservação para a energia térmica toma a forma:

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i T_i \right) = (k T_{,i})_{,i} + H
 \tag{4.27}$$

4.3.5 Condições iniciais e de contorno:

As condições de contorno são:

$$u_i = \bar{u}_i(s, t)
 \tag{4.28}$$

$$\sigma_i = \sigma_{ij} n_j(s, t) = \bar{\sigma}_i(s, t)
 \tag{4.29}$$

onde s é um parâmetro medindo posição ao longo do contorno.

Para a fração de massa:

$$c = \bar{c}(s, t) \quad (4.30)$$

Fluxo de massa:

$$q_m = -(\rho\alpha_{ij}c_j) n_i(s) = \bar{q}_m(s, t) \quad (4.31)$$

ou não-linear

$$q_m = h_m c^k \quad (4.32)$$

Para a temperatura,

$$T = \bar{T}(s, t) \quad (4.33)$$

enquanto que, para o fluxo de calor

$$q = -(kT_j) n_j(s) = q_a(s, t) \quad (4.34)$$

$$q = -(kT_j) n_j(s) = q_c(s, t) + q_r(s, t) \quad (4.35)$$

onde

$$q_c = h_c(T - T_c) \quad \textit{convectiva} \quad (4.36)$$

$$q_r = h_r(T - T_r) \quad \textit{radiativa} \quad (4.37)$$

$$h_r = eS(T^2 + T_r^2)(T + T_r) \quad (4.38)$$

4.3.6 Modelando a Turbulência

A aproximação usada pelo FIDAP é a conhecida por *Aproximação de Osbourne-Reynolds*, na qual as equações são medidas sobre uma escala de tempo o qual é comparável com a do movimento turbulento. A partir disso separa-se variáveis numa parte média e numa flutuação, onde o valor médio é definido por:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \eta dt \quad (4.39)$$

Assim, se decomposmos todas as variáveis dessa forma

$$\eta = \bar{\eta} + \hat{\eta} \quad (4.40)$$

teremos que (sendo $\hat{\eta}$ a flutuação), as equações governantes do fluxo médio para u_i , ρ , T e c ficam:

$$\begin{aligned} u_{j,j} &= 0 \\ \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i u_{i,j} \right) &= -p_i + \rho_0 f_i - \rho_0 g_i \beta_T (T - T_0) - \rho_0 g_i \beta_c c + [\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \rho_0 \overline{u_i u_j}] \\ \rho_0 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + u_i T_j \right) &= (\lambda T_j - \rho_0 c_p \overline{u_j T})_j + H \\ \rho_0 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + u_j c_j \right) &= \rho_0 (\alpha c_j - \overline{u_j c})_j + q_i + R \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde λ é a condutividade térmica. Note que nas variáveis simples não escrevemos uma barra sobre os caracteres (pois todos são médias). Notemos também que o essas quatro equações não constituem um conjunto fechado. Assim, as correlações de transporte de momento x_i na direção x_j ($= \rho_0 (\overline{u_i u_j})$), o transporte de calor na direção x_i ($= \rho_0 c_p \overline{u_i T}$) e o fluxo turbulento ($= \rho_0 \overline{u_i c}$) de massa ainda são necessários. Assim, usando equações de quantidade média também para as correlações, em conjunto com as equações (4.41), tem-se um conjunto fechado para os valores médios da velocidade, temperatura e concentração de espécie.

No problema a ser tratado neste trabalho, faremos a simulação do fluxo sem essa aproximação. Nosso objetivo é analisar as flutuações da velocidade, tanto quanto permitam a memória e desempenho dos computadores utilizados. Essas flutuações estão ausentes na aproximação de Osborne-Reynolds, pois consideram-se as médias do campo, eliminando-se, com isso, as flutuações locais.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Introdução

Como uma consequência da caracterização de fluxos dinâmicos, tais como séries de velocidade e espectro de potência, encontramos que, ao simular o fluxo no experimento de Reynolds, este bifurca-se de um estado laminar para um regime aperiódico, passando por estados intermediários de periodicidade com uma e duas frequências fundamentais quasiperiódicas. Quando um sistema passa por essa bifurcação de Hopf, partindo de uma solução de estado estacionário ao variar um parâmetro de controle (no caso o Número de Reynolds), então pode-se verificar que o sistema possui um atrator estranho com sensibilidade às condições iniciais depois da segunda bifurcação [7, 8]. O espectro de potência exibe então uma e possivelmente duas frequências fundamentais.

Quando a segunda frequência está prestes a aparecer, algumas bandas mais largas aparecem simultaneamente, indicando a existência de um atrator estranho. Essa sucessão pode ser interpretada como uma evolução do sistema regido por um atrator estranho, que culmina com uma solução contínua no espectro de frequência que emerge depois de um fluxo quasiperiódico, sugerindo que a transição à turbulência segue-se do cenário de Ruelle-Takens-Newhouse [8]. Nesse capítulo detalharemos

as técnicas numéricas que dão forte evidência da existência do cenário de Ruelle-Takens-Newhouse no caminho para o caos.

Usamos algumas técnicas, tais como reconstrução do espaço de fase, mapas de Poincaré, funções de autocorrelação, dimensão fractal e expoentes de Liapunov para caracterizar os regimes laminar, transicional e turbulento do fluxo. Além disso, examinamos as diferenças quantitativa e qualitativa no sistema dinâmico para identificar os intervalos do número de Reynolds do comportamento caótico do fluxo.

5.2 Geometria e Obtenção dos Dados

A primeira das figuras 5.1 mostra uma visão longitudinal de uma das malhas tridimensionais criadas, enquanto que a segunda foca na seção transversal. Tal como mostrado nas figuras, a coordenada z está sempre na direção longitudinal.

Evoluimos o tempo em intervalos regulares, variando o número de intervalos, neste estágio, de duzentos a cinco mil. Na maioria dos casos não foram necessários cinco mil pontos, sendo suficiente séries com dois mil pontos. Os valores da viscosidade ν (constantemente para cada simulação) estão entre 10^{-3} e 10^{-6} . Como condição inicial, colocamos o valor de uma unidade para a componente u_z , e uma perturbação da ordem de 10^{-4} nas componentes u_x e u_y , podendo essa perturbação ser senoidal (no tempo) ou aleatória.

Sendo o número de Reynolds dado por:

$$Re = \frac{u_z D}{\nu} \quad (5.1)$$

vemos que Re em nossas simulações variou de 10^2 a 10^5 . Na eq. (5.1) consideramos apenas a componente z da velocidade, sendo D o diâmetro relativo do tubo.

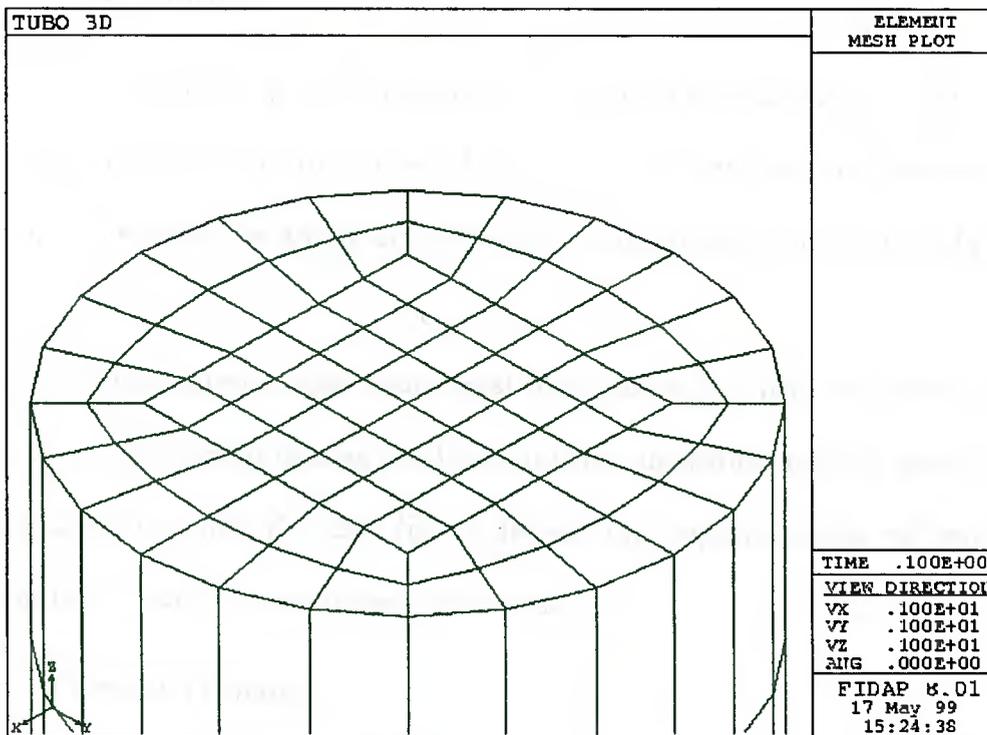
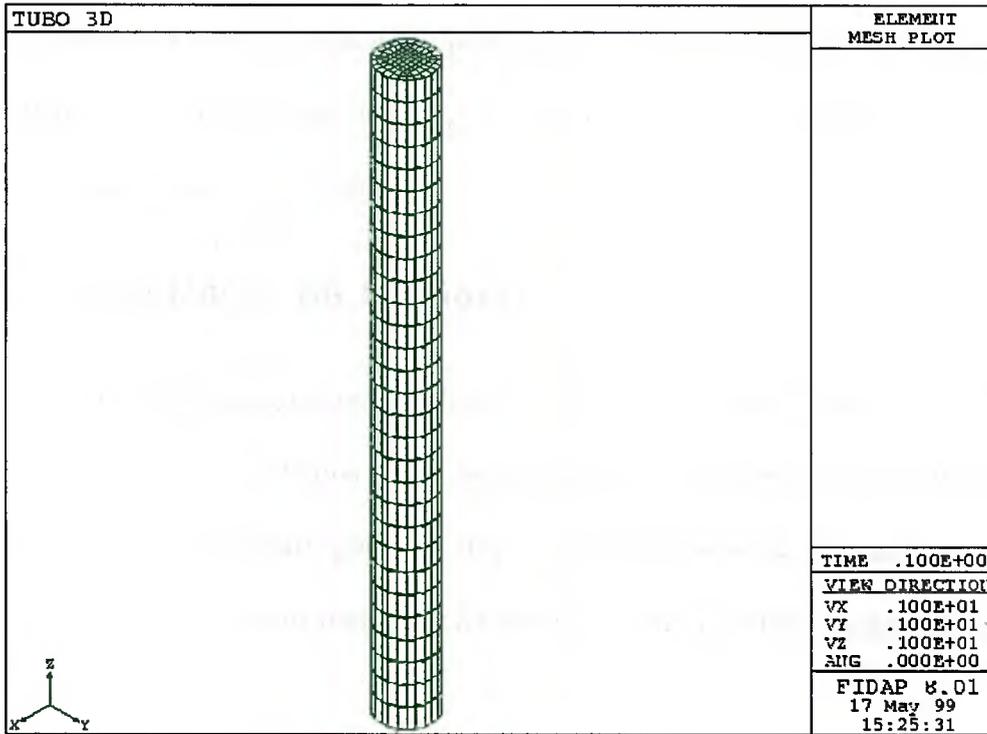


Fig. 5.1: Exemplo de malha utilizada para simulações, com 30 secções transversais e dimensão relativa $L = \frac{80}{6}D$.

Para realizarmos as análises deveríamos escolher uma das componentes, mas como supomos isotropia, optamos pela componente x do movimento sem muitas complicações. Todas séries, então, foram colhidas no ponto central do tubo, em várias seções, quando necessário.

5.3 Visualização da Dinâmica

Nesta seção exibimos alguns resultados que permitem visualizar claramente a dinâmica encontrada. Todos os cálculos desta seção foram obtidos pelo uso do software Fidup 8.01 *. Como esse software permite amplas possibilidades de visualização do fluxo, podemos ter uma idéia do melhor cenário através de algumas imagens tridimensionais.

5.3.1 Fase Laminar

A figura 5.2 mostra o perfil e contorno de velocidades para $Re = 100$. O perfil de formato parabólico é típico dessa fase, como pode ser visto na referência [4]. O contorno de velocidades também acentua essa característica, descrita pela equação (3.2).

Deve-se notar que a seção transversal utilizada se encontra na parte central do tubo, pois, como foram usadas condições iniciais aleatórias, o fluxo passa por uma instabilidade no início do tubo (parte de baixo da figura) e sofre deformações no final do tubo devido às condições de contorno.

5.3.2 Fase de Transição

A figura 5.3 mostra a trajetória de partículas para o caso da fase turbulenta.

*Ver capítulo 4.

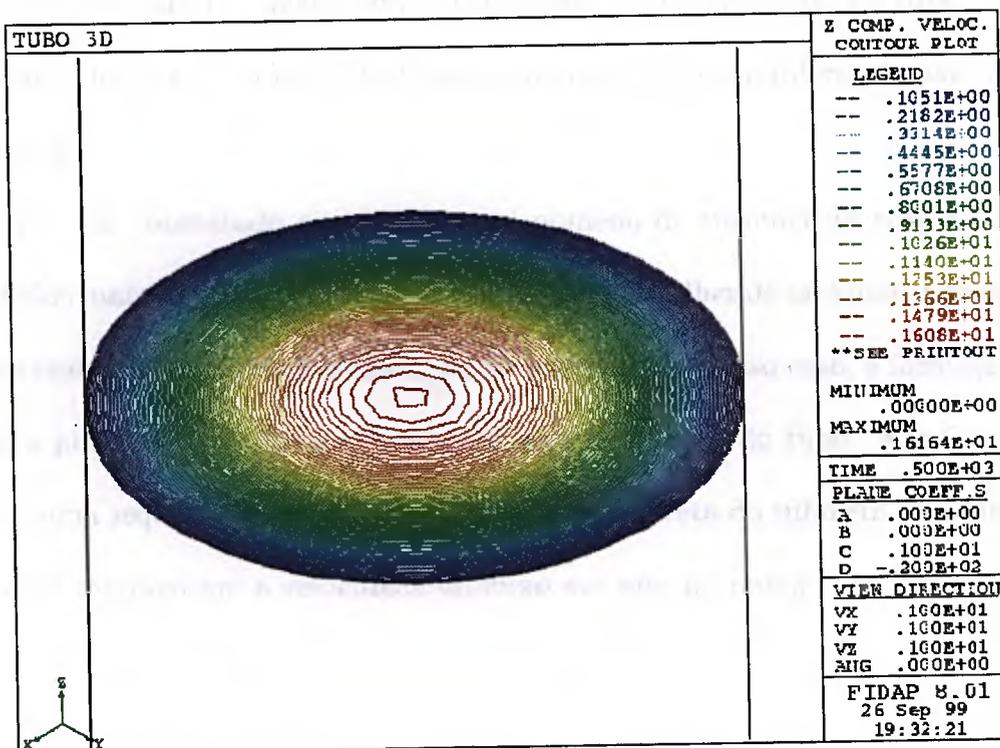
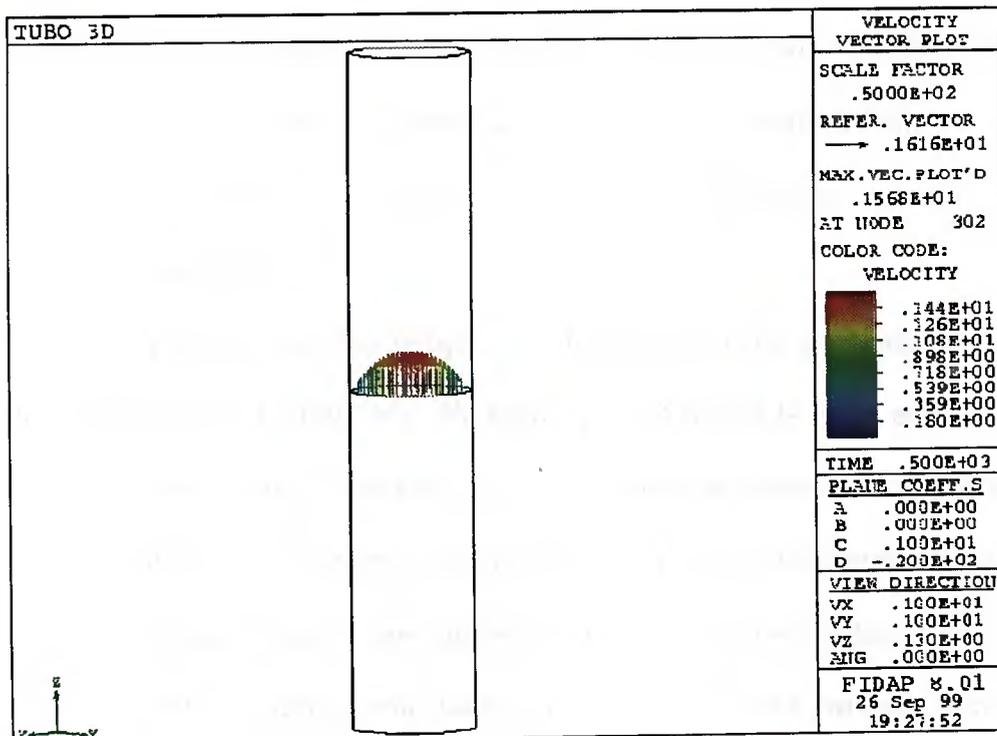


Fig. 5.2: Perfil e contorno de velocidade para fase laminar. A gradação de cores dá a magnitude da velocidade para $Re = 100$.

No lado esquerdo de cada figura está o intervalo de tempo para a evolução de cada partícula. Por exemplo, para a figura (5.3 a) - no alto - o tempo inicial é $t_0 = 90$, quando “soltamos” a partícula, enquanto que o tempo final é $t_f = 99$, na extremidade superior do tubo. Assim, existem $\Delta_t = 9$ unidades de tempo[†] presentes no tubo para esse gráfico.

Conforme prosseguimos no tempo, sem necessariamente aumentarmos Δ_t , conseguimos visualizar a turbulência. Na figura (5.3 b) temos $t_0 = 97$, sendo $\Delta_t = 103$. Mesmo assim, vemos que a instabilidade das trajetórias cresceu consideravelmente.

Vale ressaltar que, enquanto nas figuras (5.2) cores diferentes representavam diferentes velocidades, aqui cores diferentes representam partículas diferentes - 800 partículas - “soltas” numa linha diametral do tubo. Pode parecer, por essas representações, que há apenas uma “turbulência bidimensional” no tubo. Por esse motivo as figuras (5.3 c) e (5.3 d) mostram pontos de vista diferentes para a mesma simulação.

Uma vez constatado que existe um fenômeno de turbulência para números de Reynolds mais altos, devemos tentar avaliar mais detalhes de tal fluxo. Um fenômeno importante para a teoria é a formação de vórtices. No nosso caso, a formação de um vórtice pode ser melhor visualizada em uma seção reta do tubo. Nas figuras (5.4) temos uma sequência temporal de “fotos” da seção reta do tubo em uma simulação. As setas representam a velocidade do fluxo nos nós da malha[‡].

[†]Aqui, unidades de tempo não representam, necessariamente, unidades de interação. Para o presente caso, uma unidade de tempo equivale a dez interações, ou seja, dez pontos na série temporal.

[‡]Nota-se que a simulação continua sendo tridimensional. Apenas estamos nos restringindo a visualizar uma seção reta no meio do tubo.

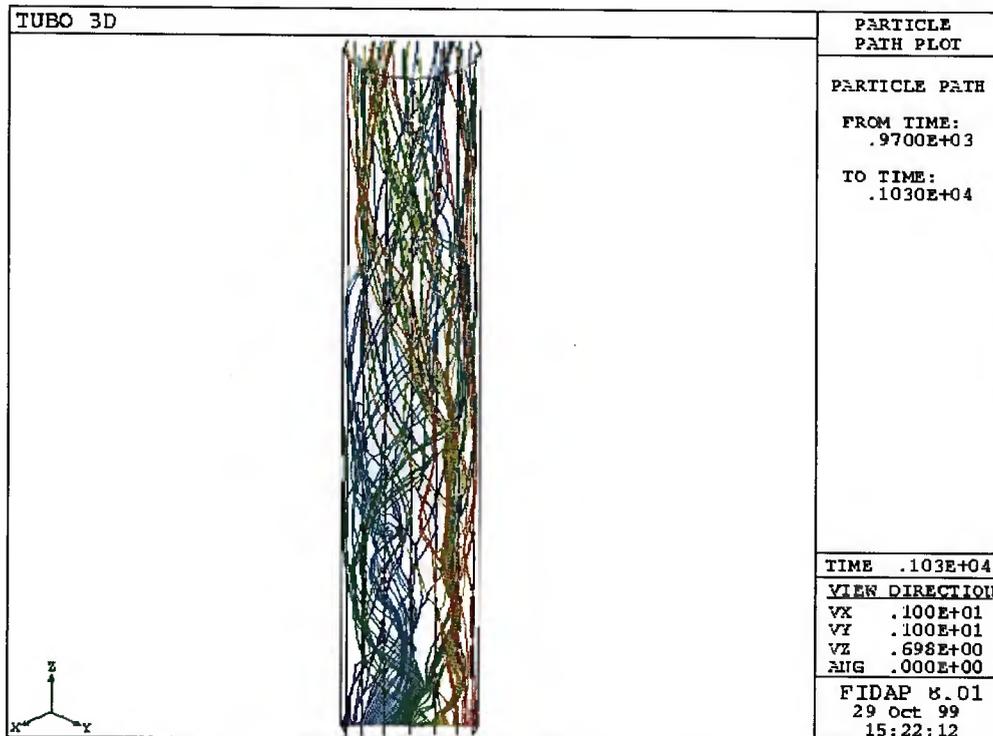
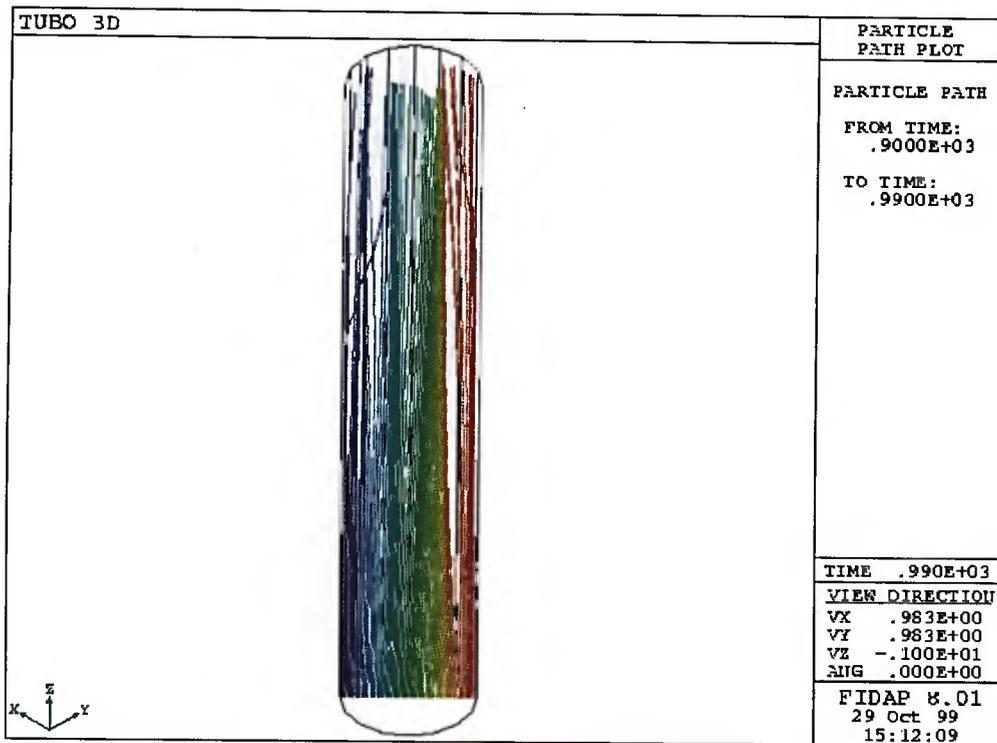


Fig. 5.3 (a) e (b): Visão tridimensional da fase turbulenta ($Re = 800$) do fluxo.

As cores aqui representam partículas diferentes.

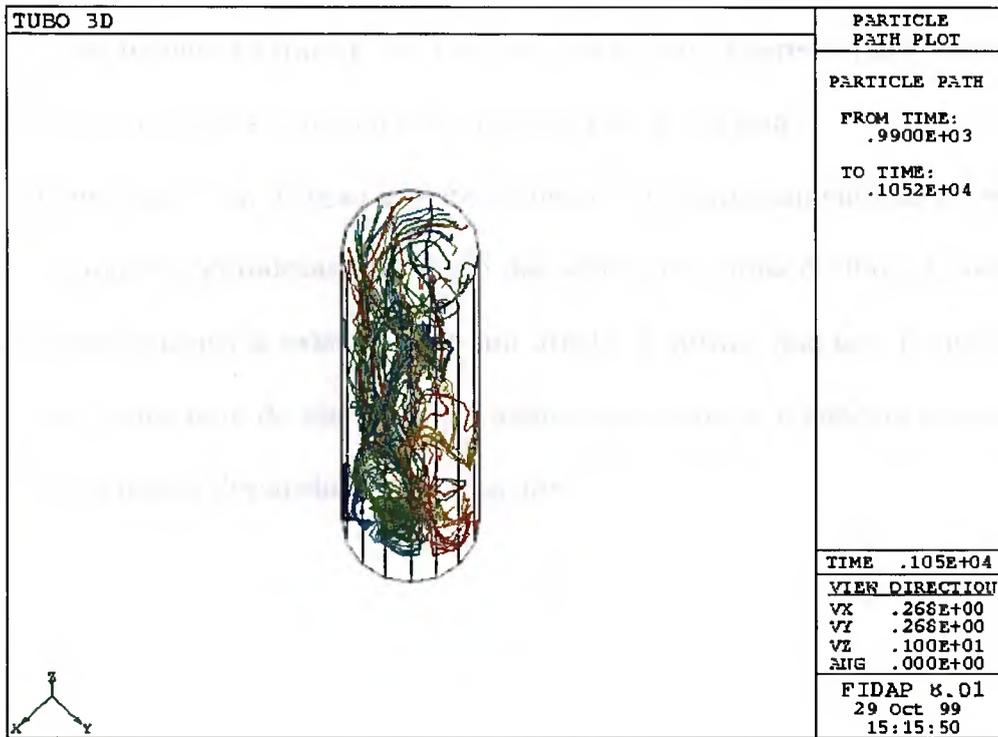
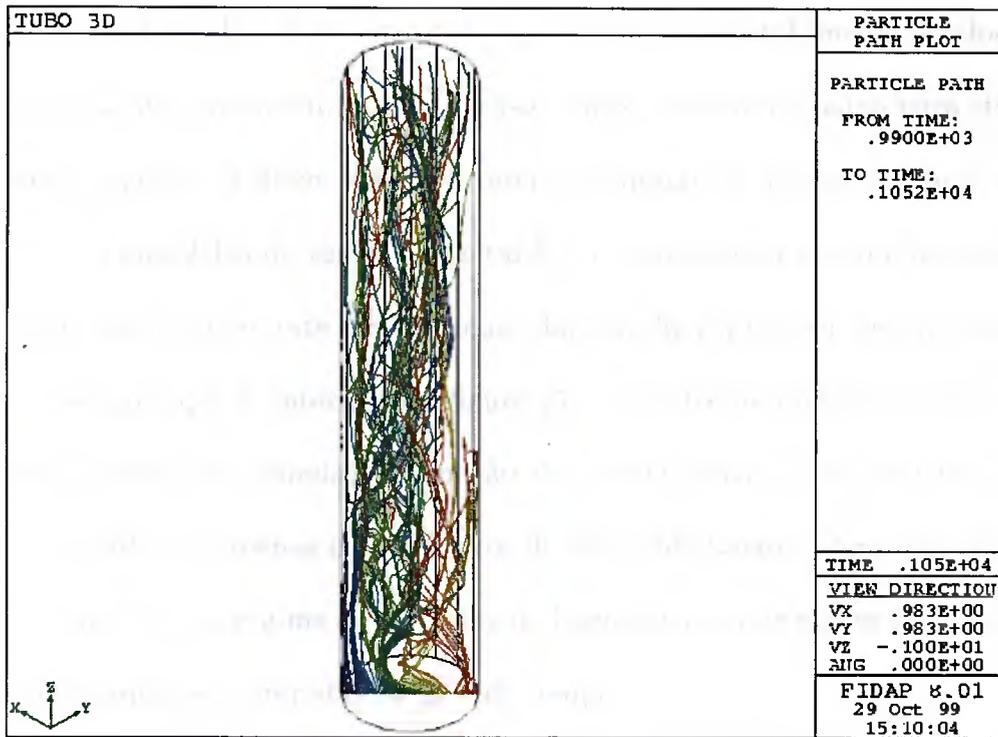


Fig. 5.3 (c) e (d): Visão tridimensional da fase turbulenta ($Re = 800$) do fluxo.

Pontos de vista diferentes para a mesma simulação.

Quanto maior e mais próxima do vermelho for a seta, maior a velocidade do fluxo no ponto da malha. Por outro lado, quanto menor e azul, menor a velocidade no ponto no sentido do fluxo (no nosso caso, o fluxo escorre de baixo para cima).

Assim, enquanto o fluxo parece manter-se laminar na primeira “foto”, já na segunda (130 intervalos de tempo mais tarde), a evolução do sistema demonstra a formação de um vórtice, este ficando mais claro na figura (5.4 c), seis instantes de tempo mais tarde que a anterior. Na figura (5.4 d) se torna ainda mais nítido.

Como pressupõe-se simular a equação de Navier-Stokes, deve-se lembrar que estamos trabalhando apenas com números de Reynolds baixos. Para números mais elevados, entramos no regime de turbulência desenvolvida, que não se deseja estudar aqui, pelas limitações computacionais e de tempo.

Assim, as discussões aqui presentes são válidas apenas para a transição à turbulência, não podendo garantir que tais vórtices possam aparecer para números de Reynolds muito maiores, caracterizando dissipação de energia.

O próximo passo em direção ao entendimento do comportamento do sistema é o cálculo de algumas grandezas. De posse das séries temporais do fluxo visualizado, só poderemos garantir a existência de um atrator e provar que esse é um sistema caótico após uma série de medidas. Só assim saberemos se o sistema se enquadra em um dos cenários discutidos anteriormente.

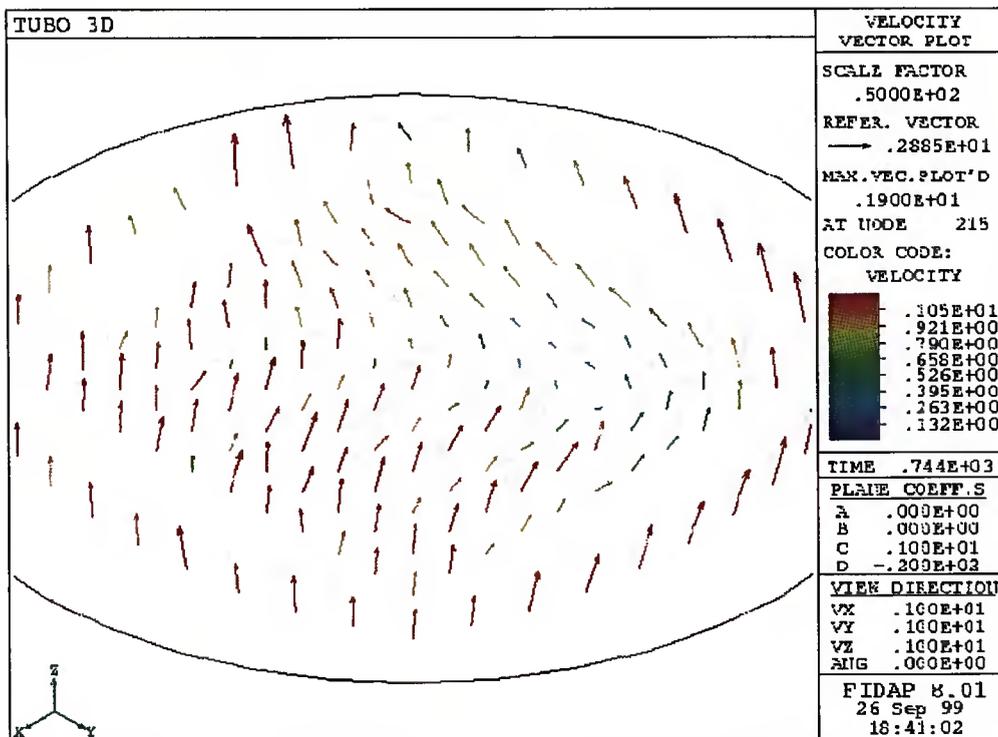
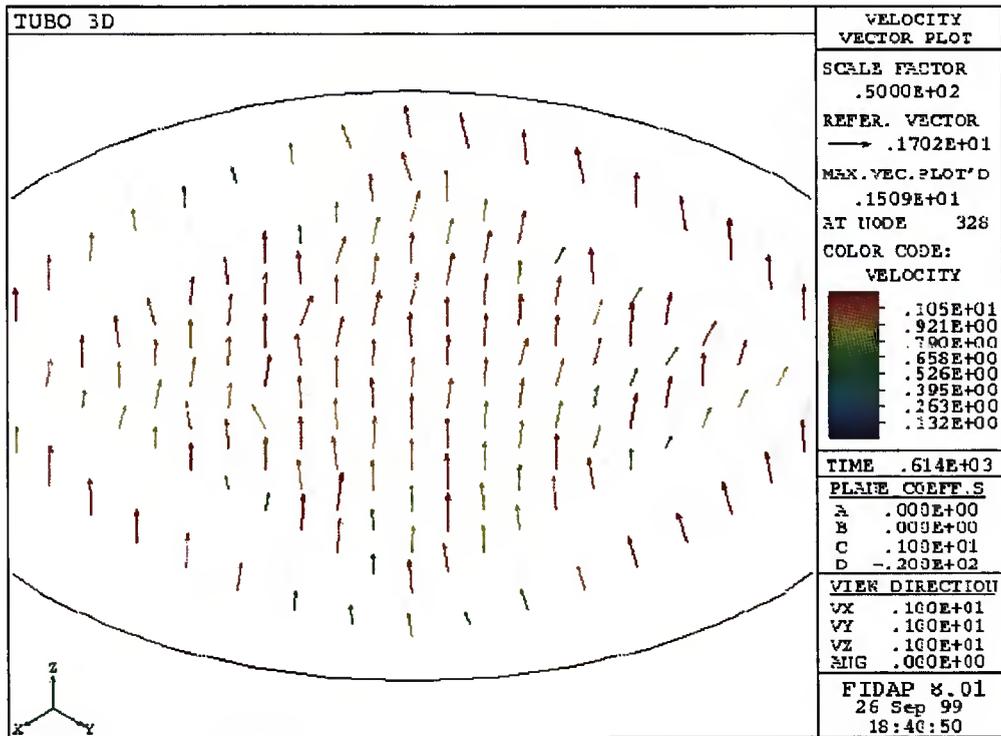


Fig. 5.4 (a) e (b): Formação de vórtice na fase de transição (corte transversal).

Para (a) $t_a = 61.4$ e para (b) $t_b = 74.4$.

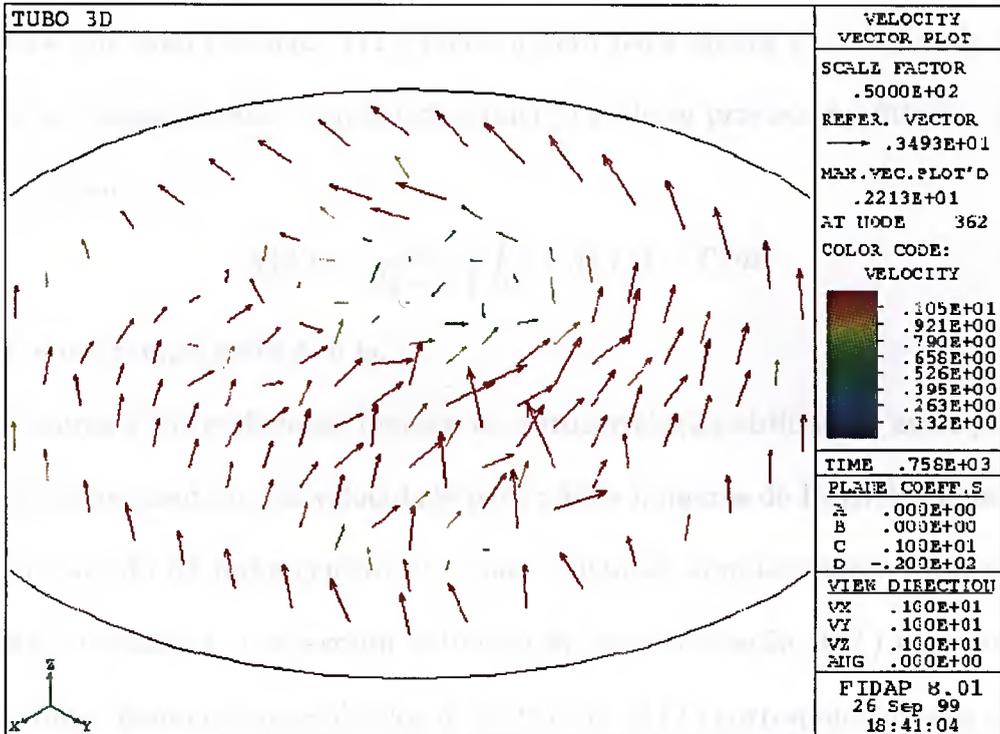
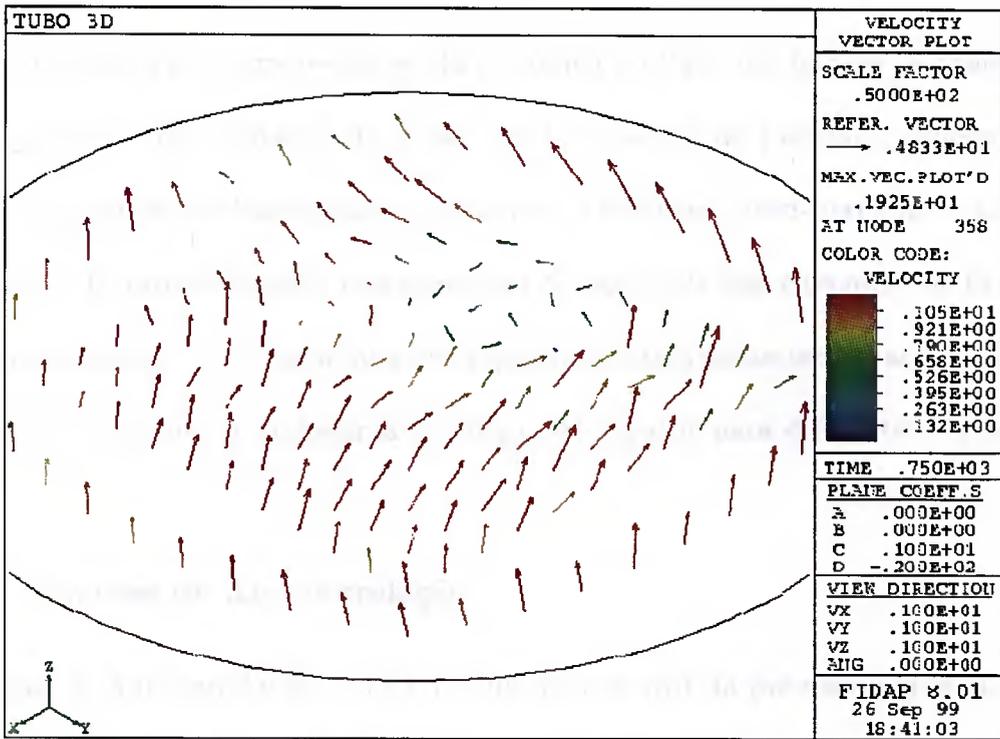


Fig. 5.4 (c) e (d): Formação de vórtice na fase de transição (corte transversal).

Para (c) $t_c = 75.0$ e $t_d = 75.8$.

5.4 Caracterização da Dinâmica

Apresentamos aqui a caracterização da dinâmica do fluxo em termos de funções de autocorrelação, representação do espaço de fase, seções de Poincaré, expoentes de Liapunov e dimensão fractal para os regimes periódicos, quasi-periódico e caótico. As funções de autocorrelação, representação de espaço de fase e técnicas de Poincaré são ferramentas que permitem uma descrição qualitativa da natureza caótica do fluxo e, ao mesmo tempo, reconhecer a topologia do atrator para diferentes regimes do fluxo.

5.4.1 Funções de Autocorrelação

A função de Autocorrelação, $A(T)$, é uma medida útil da previsibilidade do movimento do fluido. Para um sinal periódico, $A(T)$ é uma função periódica, enquanto que, para um sinal caótico, $A(T)$ tende a zero para algum $T > T_c$, onde T_c é a medida do tempo durante o qual o movimento pode se previsto no futuro. $A(T)$ é definido como

$$A(T) = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} x(t) x(t+T) dt, \quad (5.2)$$

onde T é um tempo entre t_1 e t_2 .

As figuras (5.5) exibem as funções de autocorrelação obtidas da evolução temporal da componente u_x da velocidade para vários números de Reynolds num ponto típico localizado na linha central do canal. Algumas simulações para longos tempos foram realizadas para evoluir a função de autocorrelação $A(T)$ quando T vai para infinito, tendo como resultados os gráficos de $A(T)$ correspondentes às últimas $T = 500$ unidades de tempo.

O fenômeno de *frequency-locking*, nos dá uma informação crucial para a escolha

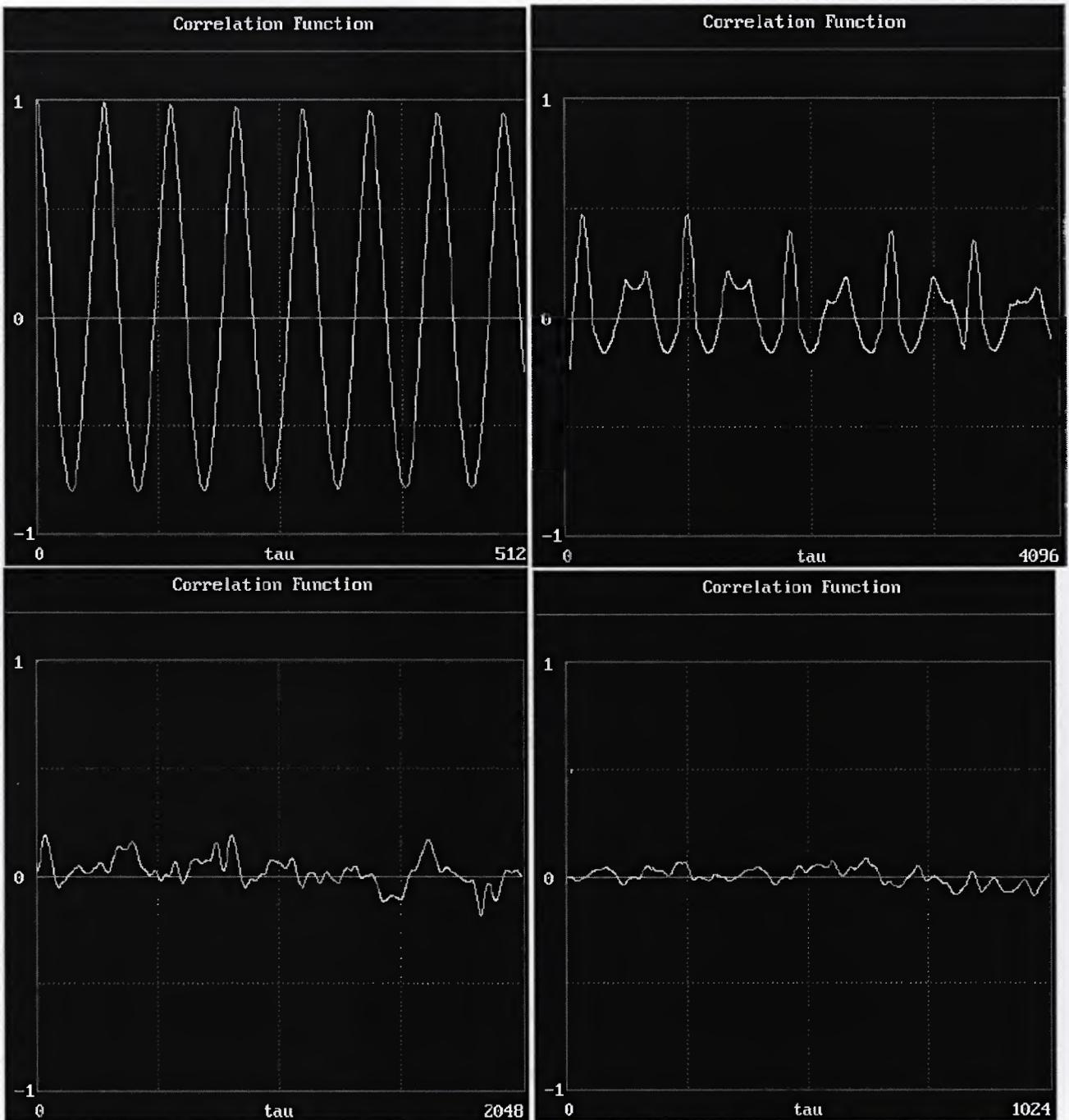


Fig. 5.5: Funções de Autocorrelação para vários Re . Da esquerda para direita e de cima para baixo: (a) $Re = 100, \tau = 0$; (b) $Re = 300, \tau = 0$; (c) $Re = 500, \tau = 0.968534$; (d) $Re = 800, \tau = 0.983453$.

do cenário. Com a dependência da mudança da primeira frequência fundamental, ω_1 , encontra-se que o regime de *mode-locking* pode se estabelecer em outra

razão de frequência ou o movimento pode, repentinamente tornar-se caótico quando o parâmetro de controle cresce. No nosso problema encontramos que o regime de *frequency-locking* em $Re = 300$ alcança um platô assintótico e, então, evolue para um regime quasi-periódico. Quando o número de Reynolds cresce além da primeira bifurcação, um fluxo oscilatório de frequência fundamental ω_1 aparece. Para números de Reynolds maiores, outra instabilidade do fluxo leva a uma segunda bifurcação supercrítica de Hopf. Uma segunda frequência fundamental ω_2 tende a aparecer deixando o fluxo quasi-periódico, com duas frequências fundamentais ω_1 e ω_2 e suas combinações lineares.

Investigando a evolução da razão de frequência fundamental $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, veremos que essa razão é, em geral, irracional, o que implica que as duas frequências são incomensuráveis e o sinal é aperiódico. Esta razão decresce quando o número de Reynolds é elevado e atinge um platô que coincide com o aparecimento do regime de *frequency-locking*.

5.4.2 Representação do Espaço de Fase

A técnica de representação do espaço de fase é baseada na reconstrução por *time-delay* e ajuda na reconstituição do comportamento do espaço de fase completo de séries temporais escalares. Para uma série de tempo escalar $x(t_k)$ de um observável $x(t)$, onde $k \in K$, $K := \{k \in N_0; k < M_{dat}\}$ e M_{dat} é o número de pontos da série. Os vetores de estados reconstruídos no espaço de fase n -dimensional são dados por

$$F(t_s) = (z(t_s), z(t_s + \tau), z(t_s + 2\tau), \dots, z(t_s + (n-1)\tau)), \quad (5.3)$$

onde $s \in S$, $t_s = s\phi_a$, $S \in \{N_0; s < M_{dat} - (n-1)\frac{\tau}{\phi_a}\}$, ϕ_a é o tempo de prova do sinal contínuo, τ é o tempo de retardo que é múltiplo de ϕ_a , e n é a dimensão de

imersão. Se o atrator do sistema no espaço de fase original é m -dimensional, então o atrator reconstruído n -dimensional no espaço de fase terá as mesmas propriedades invariantes, tais como dimensão fractal e expoentes de Liapunov, para todo n acima de um valor mínimo que não é maior que $2m + 1$.

A escolha de um tempo de retardo apropriado, τ , e uma dimensão de imersão suficientemente grande, n , não é trivial para séries temporais. Dada uma série com um número infinito de pontos discretos, sem ruído e sem restrições na resolução, o tempo de retardo pode ser escolhido arbitrariamente. Todavia, na prática, aumentamos a dimensão de reconstrução até as propriedades invariantes não mais sofrerem grandes mudanças.

Os atratores reconstruídos num espaço de fase tridimensional são mostrados nas figuras (5.6) para diferentes números de Reynolds. Nestas figuras $z(t)$, $z(t + \tau)$ e $z(t + 2\tau)$ representam as componentes do estado vetorial obtido da velocidade u_x num ponto característico da linha central do canal. O tempo de retardo τ para todas as reconstruções é duas vezes o tempo de espera adimensional $\phi_a = .034067$. O número de pontos para as simulações está entre 2000 e 15000, variação esta devido a otimização do tempo de máquina. Assim, apenas para simplificar, nas simulações com número de Reynolds baixo ($Re = 200$), não foi necessário evoluir por um longo tempo o sistema para que se pudesse ter uma boa caracterização da dinâmica. Assim, podemos ver, nas figuras (5.6) a representação do espaço de fase para vários Reynolds.

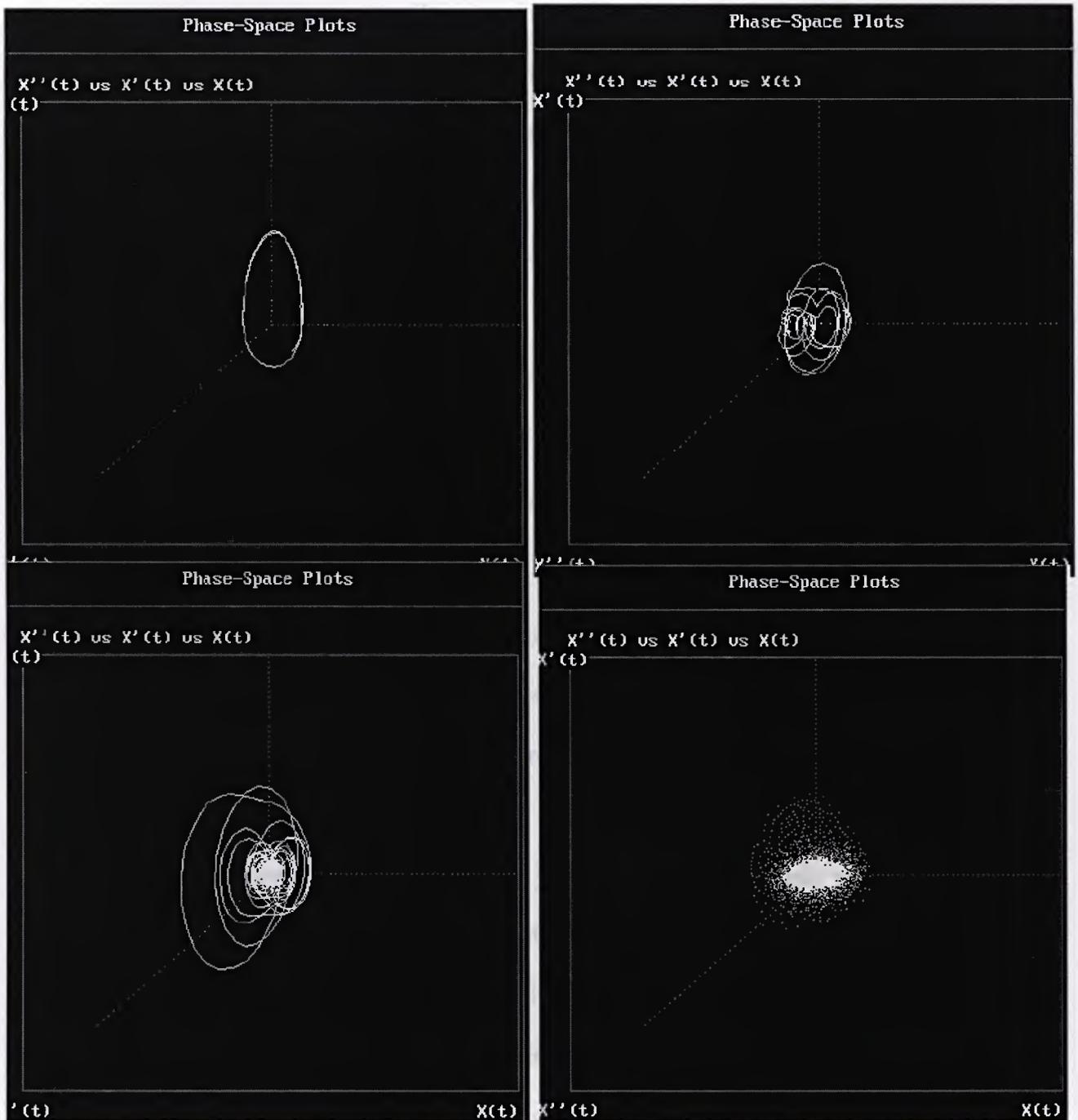


Fig. 5.6: Representação do espaço de fase para vários Re . Da esquerda pra direita e de cima para baixo: (a) $Re = 100$; (b) $Re = 300$; (c) $Re = 500$; (d) $Re = 800$.

5.4.3 Seções de Poincaré

A técnica da seção de Poincaré permite que se faça uma redução sistemática na representação da complexidade do sistema por converter uma evolução temporal

contínua em um mapeamento discreto e, conseqüentemente, reduzir a dimensionalidade do problema. Dessa forma, trajetórias com aparência complicada num espaço de fase tridimensional poderiam ser representadas em um toro T^2 . Embora o atrator obtido no novo espaço de fase não seja idêntico ao original, a nova representação por uma seção de Poincaré possui as mesmas propriedades topológicas que o fluxo original.

Para construir a seção de Poincaré, seguimos o método proposto na referência [15]. O primeiro passo é construir um estado vetorial

$$F(t_s) = \{u(t_s), u(t_s + \tau)\} \quad (5.4)$$

baseado na reconstrução por tempo de retardo, t_s onde τ é o tempo de espera. Assim, obtemos uma trajetória do tempo contínuo no espaço de fase, definida pelo vetor de estado e pelo tempo de espera tal que cada ponto da trajetória é dado por $\{u(t_s), u(t_s + \tau), t_s\}$. A seção de Poincaré é determinada pelos pontos de interseção sucessiva entre essa trajetória no espaço de fase e um plano perpendicular ao eixo temporal nos intervalos T_1 , onde $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ é o período associado com a primeira frequência fundamental ω_1 do fluxo no estado periódico ou quasiperiódico e este é o intervalo de tempo necessário para completar um ciclo no atrator.

A figura (5.7) mostra algumas seções de Poincaré. É interessante notar a aparente perda de regularidade quando passamos de $Re = 100$ para $Re = 300$, ao passo que essa regularidade parece voltar para $Re = 500$. Isso provavelmente se dá pelo fato do sistema não atingir totalmente uma segunda bifurcação de Hopf, como fica claro pela função de autocorrelação da figura (5.5 b), onde podemos ver que a segunda frequência (ω_2) não se conserva com o aumento de τ . Por outro lado, quando se aumenta o número de Reynolds, o sistema passa por esse estágio, ganhando certa

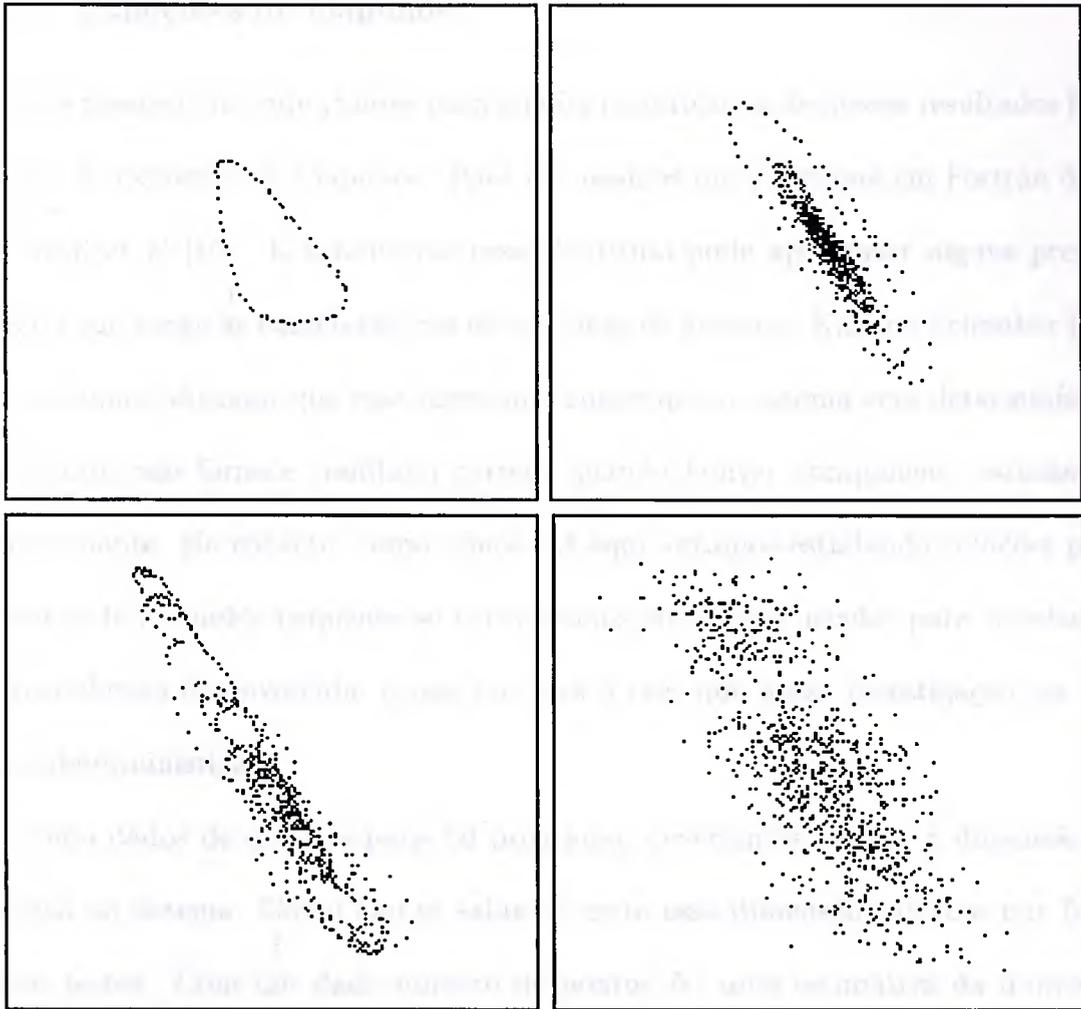


Fig. 5.7: Seções de Poincaré para alguns números de Reynolds. Da esquerda para direita e de baixo para cima temos: (a) $Re = 100$; (b) $Re = 300$; (c) $Re = 500$; (d) $Re = 800$.

regularidade, aparentando descrever uma órbita fechada, o que seria um indicativo de que existem duas frequências, no sistema nesse estágio, cuja razão é um número irracional. Aumentando ainda mais Re , tal como na figura (5.7 d), somos levados a crer que o sistema encontrou um Atrator tipo Axioma A.

5.4.4 Expoentes de Liapunov

Um dos passos mais importantes para análise quantitativa de nossos resultados foi o cálculo do expoente de Liapunov. Para tal, usamos um programa em Fortran dado por Wolf et al [16]. É sabido que esse algoritmo pode apresentar alguns problemas no que tange às características estocásticas do sistema. Kantz e Schreiber [17], por exemplo, afirmam que esse algoritmo supõe que o sistema seja determinístico e portanto não fornece resultado correto quando houver componente estocástica predominante. No entanto, como vimos até aqui, estamos estudando soluções para números de Reynolds pequenos se considerados aos valores usados para simulações de turbulência desenvolvida, o que nos leva a crer que nossa investigação jaz sob bases determinísticas.

Como dados de entrada para tal programa, deveríamos colocar a dimensão de imersão do sistema. Como não se sabia ao certo essa dimensão, tivemos que fazer vários testes. Com um dado número de pontos N , uma estimativa da dimensão máxima de imersão D_{max} [9] é:

$$D_{max} = \frac{\log N}{\log \frac{1}{\rho}} \quad (5.5)$$

onde ρ é um parâmetro adimensional. Assim, como na maioria dos nossos casos $N = 2000$ e $\rho = 10$ vemos que a dimensão máxima do nosso sistema está, para Reynolds baixo, até seis. De fato, a dimensão de imersão do sistema é o limite no qual a dimensão de correlação não cresce consideravelmente com aumento dos graus de liberdades. Fazendo exaustivamente esses testes, chegamos a uma dimensão de imersão de 2 e crescendo com o aumento de Re , passando para 3 quando $Re = 800$ e para 4 quando $Re = 2000$. Pudemos então calcular os expoentes de Liapunov.

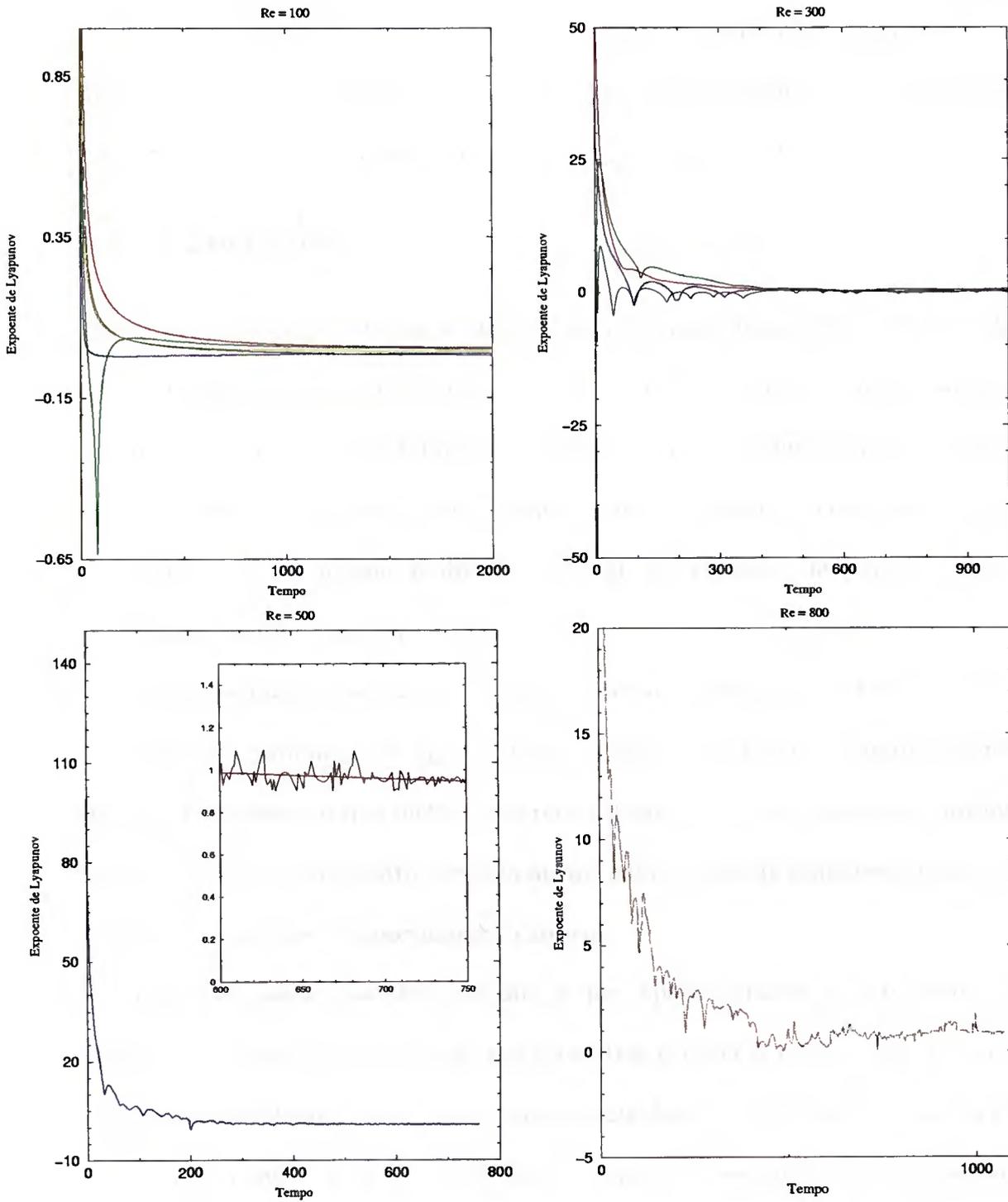


Fig. 5.8: Expoentes de Liapunov para vários Re : (a) $Re = 100$, $\lambda = 0$; (b) $Re = 300$, $\lambda = 0$; (c) $Re = 500$, $\lambda = 0.968534$; (d) $Re = 800$, $\lambda = 0.983453$.

Os gráficos da figura (5.8) mostram o expoente de Liapunov para quatro Re diferentes. Nestes gráficos, vê-se claramente que λ aumenta com o aumento de Re , indo de $\lambda = 0$ no regime laminar a $\lambda = 0.98$ no regime turbulento. Assim, podemos dizer que o sistema possui um atrator caótico para $Re = 800$.

5.5 Conclusões

Pudemos visualizar, através de simulações feitas com o software FIDAP 8.01, o fluxo num tubo passando de uma fase laminar para turbulenta, constatando a formação de vórtices. Com as séries temporais geradas por tais simulações pudemos reconstruir o espaço de fase do sistema, analisar sua correlação e construir os mapas de Poincaré. Uma última análise foi calcular os expoentes de Liapunov, que se mostraram positivos para $Re > 500$.

Toda essa análise nos leva a crer que o sistema encontra um atrator caótico com o aumento do parâmetro de ajuste. Assim, podemos dizer que o Cenário de Ruelle-Takens-Newhouse é o que melhor descreve a transição à turbulência em um fluido incompressível, pois encontrou-se pelo menos uma frequência fundamental antes que se desenvolvesse um comportamento caótico.

Algo interessante que deve ser dito é que, aparentemente, o sistema reza das mesmas propriedades que outros com geometria variada [13, 18], o que leva a crer que tais propriedades não dependem fortemente das condições de contorno na transição. Resta saber se os atratores para o quais tais sistemas são levados são os mesmos.

Referências

- [1] Guckenheimer, J. and Holmes, P.J. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin. (1983).
- [2] Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag: New-York, Heidelberg, Berlin, London. (1990).
- [3] Frisch, U. *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press. (1995);
- [4] Acheson, D. J. *Elementary fluid dynamics*. Oxford University Press. (1990)
- [5] Landau, L. et Lifchitz, E. *Mécanique des Fluides*. Éditions Mir. (1971)
- [6] FIDAP User's Manual. Revision 8.01. Fluid Dynamics International, Inc. (1998)
- [7] Ruelle, D. and Taken, F. On the Nature of Turbulence. *Comm. Math. Phys.*, **20**, 167-192, **23**, 343-344 (1971)
- [8] Eckman, J. P., Roads to turbulence in dissipative dynamical systems, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 643 (1981)
- [9] Eckman, J. P. and Ruelle, D. *Physica D* **56**, 185 (1992)

- [10] Smale, S., Bull. Am. Math. Soc. **73**, 747 (1967)
- [11] Gorman, M., Reith, L. A. and Swinney, H. L. *Modulations patterns, multiple frequencies and other phenomena en circular Couette flow*. Ann. NY Acad. Sci. **357**, 10 (1980)
- [12] Brandstater, A. and Swinney, H.L. *Strange attractors in weakly turbulent Couette-Taylor flow*. Phys. Rev. A **35**(5), 2207 (1987)
- [13] Vastano, J.A. and Moser, R.D. *Short-time Lyapunov exponent analysis and the transition to chaos in Taylor-Couette flow*. J. Fluid Mech. **223**, 83 (1991)
- [14] Pfister, G., Buzug, T. and Enge, N. *Characterization of experimental time series from Taylor-Couette flow*. Physica D **58**, 441 (1992)
- [15] Bergé, P., Pomeau, Y. and Vidal, C. *Order within Chaos*. Wiley, New York (1986)
- [16] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. and Vastano, J. A. *Determining Lyapunov exponents from a time series*. Physica D **16**, 285 (1985)
- [17] Kantz, H. and Schreiber, T. *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, (1997)
- [18] Guzman, A. M. and Amon, C. H. *Dynamical flow characterization of transitional and chaotic regimes in converging-diverging channels*. J. Fluid Mech. **321**, 25 (1996)

