



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE ENGENHARIA

CAMPUS DE BAURU

Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

FABIANO GOMES MADEIRA

**ANÁLISE DINÂMICA DE MECANISMO ARTICULADO DE SUSPENSÃO COM NÃO-
LINEARIDADE NA RIGIDEZ DEVIDO À GEOMETRIA E À EXCITAÇÃO POR
DESBALANCEAMENTO ROTATIVO NA CONDIÇÃO NÃO IDEAL**

Bauru

2014

FABIANO GOMES MADEIRA

**ANÁLISE DINÂMICA DE MECANISMO ARTICULADO DE SUSPENSÃO COM NÃO-
LINEARIDADE NA RIGIDEZ DEVIDO À GEOMETRIA E À EXCITAÇÃO POR
DESBALANCEAMENTO ROTATIVO NA CONDIÇÃO NÃO IDEAL**

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Estadual Paulista como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Bento Rodrigues de Pontes Junior

Bauru
2014

Madeira, Fabiano Gomes.

Análise dinâmica de mecanismo articulado de suspensão com não-linearidade na rigidez devido à geometria e à excitação por desbalanceamento rotativo na condição não ideal / Fabiano Gomes
Madeira, 2014

127 f. : il.

Orientador: Bento Rodrigues de Pontes Junior

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2014

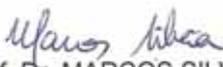
1. Não-linearidade geométrica. 2. Rigidez não-linear. 3. Sistema não-linear. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE FABIANO GOMES MADEIRA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.

Aos 16 dias do mês de maio do ano de 2014, às 08:30 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da Faculdade de Engenharia de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru, Prof. Dr. MARCIO ANTONIO BAZANI do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de FABIANO GOMES MADEIRA, intitulado "ANÁLISE DINÂMICA DE MECANISMO ARTICULADO DE SUSPENSÃO COM NÃO LINEARIDADE NA RIGIDEZ DEVIDO À GEOMETRIA E À EXCITAÇÃO POR DESBALANCEAMENTO ROTATIVO NA CONDIÇÃO NÃO IDEAL". Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: Aprovado. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR


Prof. Dr. MARCIO ANTONIO BAZANI


Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA

DEDICATÓRIA

A toda minha família, em especial aos meus pais que nunca mediram esforços para que eu avançasse nos estudos.

A minha esposa Helen pelo apoio, incentivo e paciência ao longo da realização desse trabalho.

Ao meu filho Vinícius para que no futuro esse trabalho lhe sirva de exemplo de que com esforço e dedicação é possível conseguir o que se deseja, por mais difícil que pareça.

Aos meus amigos que sempre me apoiaram durante esse desafio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tornar esse trabalho uma realidade em minha vida, pois sem Ele nada disso seria possível.

A toda a minha família, em especial, a minha esposa Helen pela compreensão da importância dessa etapa de estudos em minha vida.

Ao meu orientador Professor Dr. Bento Rodrigues de Pontes Junior pela inquestionável orientação ao longo desse trabalho. O conhecimento adquirido em nossas discussões tem um grande valor e será guardado com muito carinho e orgulho. De coração, muito obrigado mesmo!

Ao Professor Dr. Marcos Silveira pela ajuda, incentivo e conhecimento transmitidos em todos os momentos que trabalhamos juntos.

Ao Professor Titular Dr. José Manoel Balthazar pelo incentivo, confiança e oportunidade de aprendizado ao longo do curso.

Ao Professor Dr. Paulo José Paupitz Gonçalves pelos ensinamentos transmitidos em nossas conversas e discussões.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

“Lembre-se que as pessoas podem tirar tudo de você, menos o seu conhecimento”.

Albert Einstein

RESUMO

MADEIRA, F. G., ANÁLISE DINÂMICA DE MECANISMO ARTICULADO DE SUSPENSÃO COM NÃO-LINEARIDADE NA RIGIDEZ DEVIDO À GEOMETRIA E À EXCITAÇÃO POR DESBALANCEAMENTO ROTATIVO NA CONDIÇÃO NÃO IDEAL, Bauru: Faculdade de Engenharia, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 2014, 127 p., Dissertação (Mestrado).

Essa dissertação trata da dinâmica de um sistema com não-linearidade na rigidez devido à geometria do mecanismo articulado de duas barras, identificado como NLGS ao longo do texto. Na Introdução do trabalho são mostrados exemplos de sistema com rigidez não-linear devido à geometria, destacando a aplicação desse tipo de sistema como isolador de vibração e também discute-se sobre a exposição humana à vibração como motivação e justificativa para o trabalho, ressaltando-se as frequências de ressonância das diversas partes do corpo humano. Na sequência faz-se a revisão bibliográfica sobre o assunto de vibrações para auxiliar na compreensão do trabalho. Após esses capítulos introdutórios é feita a apresentação e a modelagem matemática dos sistemas dinâmicos estudados: sistema NLGS não ideal, sistema NLGS ideal, sistema com rigidez não-linear e sistema não ideal. As equações de movimento são deduzidas pelo método de Lagrange. Após a dedução das equações de movimento faz-se a integração numérica utilizando o método de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem e obtém-se a resposta dos sistemas (deslocamento, velocidade e aceleração). Como resultado da integração numérica são construídas algumas curvas, tais como: histórico de deslocamento, histórico de frequência, plano de fase, FFT, resposta em frequência e diagrama de bifurcação para ajudar na compreensão do comportamento dinâmico dos sistemas. Com base nos resultados obtidos percebe-se que os sistemas NLGS não ideal, NLGS ideal e com rigidez não-linear apresentam um comportamento complexo devido à rigidez não-linear. Nesses três sistemas tem-se indicação de regime de movimento caótico inclusive. No sistema não ideal observa-se o efeito Sommerfeld, o qual deixa evidente a captura da rotação do motor pela frequência natural do sistema e o salto na curva de amplitude de deslocamento em função da frequência do motor. Fazendo um comparativo entre o sistema NLGS não ideal e o sistema não ideal conclui-se que o NLGS eliminou o efeito Sommerfeld e reduziu a amplitude de deslocamento máxima em 27%, os quais são considerados os ganhos de Engenharia do sistema NLGS não ideal nesse trabalho.

Palavras-chave: Não-linearidade geométrica, rigidez não-linear, sistema não-linear, sistema não ideal, desbalanceamento rotativo, efeito Sommerfeld.

ABSTRACT

MADEIRA, F. G., DYNAMIC ANALYSIS OF PIVOT MECHANISM OF SUSPENSION WITH NONLINEAR STIFFNESS DUE TO GEOMETRY AND EXCITATION BY ROTATING UNBALANCE IN THE NON-IDEAL CONDITION, Bauru: Engineering College, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 2014, 127 p., Dissertation (Master's degree).

This dissertation concerns with the dynamics of a system with nonlinearity in the stiffness due to geometry of a pivot mechanism of two bars, called NLGS in the text. In the Introduction are shown examples of system with nonlinear stiffness due to geometry, emphasizing the application of this kind of system as vibration isolator and is also discussed about the human exposure to vibration as motivation and justification to the research, emphasizing the different resonance frequencies of the human body. In the sequence is carried out the literature review about vibrations to help on understanding the research. After these introductory chapters is done the presentation and mathematical modeling of the studied dynamic systems: non-ideal NLGS system, ideal NLGS system, nonlinear stiffness system and non-ideal system. The equations of motion are deduced by Lagrange's method. After the deduction of the equations of motion is carried out the numerical integration using the fourth and fifth order Runge-Kutta's method and it is gotten the response of the systems (displacement, velocity and acceleration). As result of the numerical integration some curves are plotted, such as: displacement history, frequency history, phase portrait, FFT, frequency response and bifurcation diagram to help on understanding the dynamic behavior of the systems. Based on the results is noticed that the following systems have a complex behavior due to nonlinear stiffness: non-ideal NLGS, ideal NLGS and nonlinear stiffness system. In these three systems there are indications of chaotic motion. In the non-ideal system the Sommerfeld effect is observed, evidencing the capture of the frequency of motor by the natural frequency of the system and the jump in the curve of frequency response. Comparing the non-ideal NLGS system and the non-ideal system concludes that the Sommerfeld effect is eliminated and the maximum amplitude of displacement is reduced by 27% in the non-ideal NLGS system, which are considered the improvements for Engineering of the non-ideal NLGS system in this research.

Keywords: Geometric nonlinearity, nonlinear stiffness, nonlinear system, non-ideal system, rotating unbalance, Sommerfeld effect.

LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1.1 – Exemplo de sistema com não-linearidade geométrica na rigidez</i>	17
<i>Figura 1.2 – Exemplo de isolador linear</i>	18
<i>Figura 1.3 – Variação da transmissibilidade em função da razão de frequências para um isolador linear</i>	19
<i>Figura 1.4 – Exemplo de isolador não-linear</i>	20
<i>Figura 1.5 – Exemplo de isolador com frequência quase zero (QZS)</i>	20
<i>Figura 1.6 – Exemplo de aplicação de mecanismo “snap-through” na forma de treliça como absorvedor de vibração livre</i>	21
<i>Figura 1.7 – Fotografias de micro switch</i>	21
<i>Figura 2.1 – Resposta em frequência para sistema não ideal para visualização do efeito Sommerfeld</i>	27
<i>Figura 2.2 – Curva linear de torque líquido em função da velocidade angular adotada no trabalho para o motor elétrico de corrente contínua</i>	29
<i>Figura 2.3 – Sistema não ideal com rigidez não-linear – Exemplo 1</i>	30
<i>Figura 2.4 – Sistema não ideal com rigidez não-linear – Exemplo 2</i>	31
<i>Figura 2.5 – Sistema não ideal com rigidez não-linear – Exemplo 3</i>	32
<i>Figura 2.6 – Sistema não-linear – motor com tensão elétrica contínua</i>	33
<i>Figura 2.7 – Sistema não-linear – motor com tensão elétrica alternada</i>	33
<i>Figura 2.8 – Sistema não-linear descontínuo (folga no acoplamento da rigidez)</i>	34
<i>Figura 2.9 – Sistema com não-linearidade geométrica na rigidez</i>	35
<i>Figura 2.10 – Sistema com desbalanceamento rotativo – uma representação muito clássica</i>	36
<i>Figura 2.11 – Resposta em frequência – sistema com desbalanceamento rotativo</i>	38
<i>Figura 3.1 – Sistema NLGS não ideal</i>	41
<i>Figura 3.2 – Posição da massa desbalanceada – sistema NLGS não ideal</i>	42
<i>Figura 3.3 – Detalhe do mecanismo para o cálculo do comprimento da mola em função do deslocamento do bloco de massa M</i>	44
<i>Figura 3.4 – Plano de referência para o cálculo da energia potencial gravitacional da massa desbalanceada – sistema NLGS não ideal</i>	45
<i>Figura 3.5 – Sistema NLGS ideal</i>	51
<i>Figura 3.6 – Sistema com rigidez não-linear</i>	53
<i>Figura 3.7 – Sistema não ideal</i>	55
<i>Figura 5.1 – Curva da energia potencial elástica em função do deslocamento e os pontos de equilíbrio do sistema NLGS não ideal</i>	62
<i>Figura 5.2 – Estados de equilíbrio para um corpo rígido</i>	63
<i>Figura 5.3 – Curva da força em função do deslocamento do sistema NLGS não ideal</i>	64
<i>Figura 5.4 – Resposta em frequência – sistema NLGS não ideal</i>	65
<i>Figura 5.5 – Curvas de torque em função da frequência do motor elétrico – sistema NLGS não ideal</i>	66
<i>Figura 5.6 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 0,5$ Hz</i>	67
<i>Figura 5.7 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 0,9$ Hz</i>	68
<i>Figura 5.8 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 1,0$ Hz</i>	69

Figura 5.9 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 1,1$ Hz.....	70
Figura 5.10 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 1,2$ Hz.....	71
Figura 5.11 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 1,5$ Hz.....	72
Figura 5.12 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 2,0$ Hz.....	73
Figura 5.13 – Resposta em frequência – sistema NLGS ideal.....	75
Figura 5.14 – Diagrama de bifurcação do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle a frequência de excitação f	76
Figura 5.15 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 0,5$ Hz.....	77
Figura 5.16 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 0,9$ Hz.....	78
Figura 5.17 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 1,0$ Hz.....	79
Figura 5.18 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 1,1$ Hz.....	80
Figura 5.19 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 1,2$ Hz.....	81
Figura 5.20 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 1,5$ Hz.....	82
Figura 5.21 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 2,0$ Hz.....	83
Figura 5.22 – Diagrama de bifurcação do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle o comprimento das barras L	85
Figura 5.23 – Resposta – sistema NLGS ideal – $L = 1,25m$ e $f = 1,0$ Hz.....	86
Figura 5.24 – Resposta – sistema NLGS ideal – $L = 1,50m$ e $f = 1,0$ Hz.....	87
Figura 5.25 – Resposta – sistema NLGS ideal – $L = 1,80m$ e $f = 1,0$ Hz.....	88
Figura 5.26 – Diagrama de bifurcação do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle a deformação inicial da mola d_0	90
Figura 5.27 – Resposta – sistema NLGS ideal – $d_0 = 0,010m$ e $f = 1,0$ Hz.....	92
Figura 5.28 – Resposta – sistema NLGS ideal – $d_0 = 0,015m$ e $f = 1,0$ Hz.....	93
Figura 5.29 – Resposta – sistema NLGS ideal – $d_0 = 0,035m$ e $f = 1,0$ Hz.....	93
Figura 5.30 – Resposta – sistema NLGS ideal – $d_0 = 0,045m$ e $f = 1,0$ Hz.....	94
Figura 5.31 – Resposta – sistema NLGS ideal – $d_0 = 0,070m$ e $f = 1,0$ Hz.....	95
Figura 5.32 – Histórico do deslocamento – sistema NLGS ideal – vibração livre.....	98
Figura 5.33 – Curva da energia potencial elástica em função do deslocamento do sistema com rigidez não-linear....	100
Figura 5.34 – Curva de força em função do deslocamento do sistema com rigidez não-linear.....	100
Figura 5.35 – Comparativo da energia potencial elástica em função do deslocamento – sistema NLGS x não-linear.....	101
Figura 5.36 – Comparativo da força em função do deslocamento – sistema NLGS x não-linear.....	101
Figura 5.37 – Resposta em frequência – sistema com rigidez não-linear.....	102
Figura 5.38 – Resposta – sistema não-linear – $f_0 = 0,5$ Hz.....	104
Figura 5.39 – Resposta – sistema não-linear – $f_0 = 0,9$ Hz.....	105
Figura 5.40 – Resposta – sistema não-linear – $f_0 = 1,0$ Hz.....	106
Figura 5.41 – Resposta – sistema não linear – $f_0 = 1,1$ Hz.....	107
Figura 5.42 – Resposta – sistema não-linear – $f_0 = 1,2$ Hz.....	108
Figura 5.43 – Resposta – sistema não-linear – $f_0 = 1,5$ Hz.....	109
Figura 5.44 – Resposta – sistema não-linear – $f_0 = 2,0$ Hz.....	110

<i>Figura 5.45 – Comparativo da energia potencial elástica em função do deslocamento – sistema não ideal x não-linear</i>	112
<i>Figura 5.46 – Resposta em frequência – sistema não ideal.....</i>	113
<i>Figura 5.47 – Curvas de torque em função da frequência do motor elétrico – sistema não ideal.....</i>	114
<i>Figura 5.48 – Resposta – sistema não ideal – $f_0 = 1,00$ Hz.....</i>	115
<i>Figura 5.49 – Resposta – sistema não ideal – $f_0 = 1,38$ Hz.....</i>	116
<i>Figura 5.50 – Resposta – sistema não ideal – $f_0 = 2,00$ Hz.....</i>	117
<i>Figura 5.51 – Resposta – sistema não ideal – $f_0 = 2,20$ Hz.....</i>	117

LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 1.1 – Frequências de ressonância de partes do corpo humano – vibrações no sentido vertical</i>	<i>23</i>
<i>Tabela 3.1 – Resumo das equações de movimento dos sistemas estudados.....</i>	<i>57</i>
<i>Tabela 4.1 – Integradores do software Matlab® para resolver equações diferenciais de primeira ordem</i>	<i>60</i>
<i>Tabela 5.1 – Parâmetros que foram mantidos constantes na integração numérica.....</i>	<i>62</i>
<i>Tabela 5.2 – Parâmetro que foi variado na integração numérica – sistema NLGS não ideal.....</i>	<i>66</i>
<i>Tabela 5.3 – Regime de movimento – sistema NLGS não ideal – resumo</i>	<i>74</i>
<i>Tabela 5.4 – Valores da frequência de excitação f utilizados para fazer a análise do comportamento do sistema NLGS ideal</i>	<i>77</i>
<i>Tabela 5.5 – Regime de movimento do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle a frequência de excitação f – resumo.....</i>	<i>83</i>
<i>Tabela 5.6 – Valores do comprimento das barras L utilizados para fazer a análise do comportamento do sistema NLGS ideal para $f = 1,0$ Hz.....</i>	<i>86</i>
<i>Tabela 5.7 – Regime de movimento do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle o comprimento das barras L para $f = 1,0$ Hz – resumo</i>	<i>89</i>
<i>Tabela 5.8 – Valores da deformação inicial da mola d_0 utilizados para fazer a análise do comportamento do sistema NLGS ideal para $f = 1,0$ Hz.....</i>	<i>91</i>
<i>Tabela 5.9 – Regime de movimento do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle a deformação inicial da mola d_0 para $f = 1,0$ Hz – resumo.....</i>	<i>96</i>
<i>Tabela 5.10 – Frequência natural angular amortecida – sistema NLGS ideal – vibração livre</i>	<i>99</i>
<i>Tabela 5.11 – Parâmetro que foi variado na integração numérica – sistema com rigidez não-linear.....</i>	<i>103</i>
<i>Tabela 5.12 – Regime de movimento – sistema com rigidez não-linear – resumo</i>	<i>111</i>
<i>Tabela 5.13 – Parâmetro que foi variado na integração numérica – sistema não ideal</i>	<i>114</i>
<i>Tabela 5.14 – Dados para comparação dos resultados dos sistemas estudados</i>	<i>119</i>
<i>Tabela 5.15 – Resumo da importância e da contribuição de cada sistema estudado para o trabalho.....</i>	<i>122</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras latinas

Símbolo	Descrição	Unidade
a	Constante de torque do motor elétrico	N.m
b	Coefficiente angular da reta de torque em função da velocidade angular do motor elétrico	---
c	Coefficiente de amortecimento	N.s/m
d	Comprimento da mola com o sistema em equilíbrio instável	m
d_0	Deformação inicial da mola	m
e	Excentricidade	m
f	Frequência de excitação	Hz
f_n	Frequência natural	Hz
f_0	Constante de frequência do motor elétrico	Hz
F	Força	N
$F(t)$	Força de excitação harmônica	N
F_0	Amplitude da força de excitação harmônica	N
F_T	Magnitude da força transmitida	N
F_V	Força exercida pelo amortecedor	N
g	Aceleração da gravidade	m/s ²
J	Momento de inércia de massa do eixo do motor elétrico	kg.m ²
k	Rigidez linear da mola	N/m
k_L	Parcela linear da rigidez	N/m
k_{NL}	Parcela não-linear da rigidez	N/m
K_G	Rigidez equivalente do sistema NLGS	N/m
L	Comprimento das barras	m
L_i	Comprimento da mola relaxada (sem carga)	m
L_f	Comprimento da mola com o sistema em equilíbrio estável	m
m	Massa desbalanceada	kg
M	Massa total do sistema ou massa do bloco	kg
q_k	Coordenada generalizada	---
\dot{q}_k	Velocidade generalizada	---
Q_k	Força generalizada (força não-conservativa)	N
Q_x	Força não-conservativa para o grau de liberdade de translação (x)	N

Q_θ	Força não-conservativa para o grau de liberdade de rotação (θ)	N
r	Deslocamento na direção da força F	m
r_f	Razão de frequências	---
r_{FV}	Deslocamento na direção da força do amortecedor	m
t	Tempo	s
$T(\dot{\theta})$	Torque líquido do motor elétrico em função da velocidade angular	N.m
T	Energia cinética	Joule
T_d	Período amortecido	s
T_r	Transmissibilidade ou fator de transmissão do isolador	---
V	Energia potencial	Joule
V_e	Energia potencial elástica	Joule
V_g	Energia potencial gravitacional da massa desbalanceada	Joule
W	Trabalho realizado pela força F na direção r	Joule
x	Deslocamento	m
$x(t)$	Solução geral da equação diferencial	m
$x_h(t)$	Solução homogênea da equação diferencial	m
$x_p(t)$	Solução particular da equação diferencial	m
x_0	Condição inicial do deslocamento	m
x_m	Posição da massa desbalanceada em relação à posição de equilíbrio instável do sistema (origem do movimento de translação)	m
\dot{x}_m	Velocidade da massa desbalanceada em relação à posição de equilíbrio instável do sistema (origem do movimento de translação)	m/s
\dot{x}	Velocidade	m/s
\ddot{x}	Aceleração	m/s ²
X	Amplitude de deslocamento do sistema	m
y_m	Posição da massa desbalanceada em relação à horizontal (origem do movimento de rotação)	m
\dot{y}_m	Velocidade da massa desbalanceada em relação à horizontal (origem do movimento de rotação)	m/s
z	Variável utilizada para reduzir o tamanho da equação de movimento a fim de facilitar a visualização	---

Letras gregas

Símbolo	Descrição	Unidade
δ_{mola}	Deformação da mola	m
δW	Trabalho virtual realizado pela força F na direção r	---
δW_{q_k}	Trabalho virtual realizado pela força não-conservativa na direção da coordenada generalizada q_k	---
δ_{q_k}	Deslocamento virtual na direção da coordenada generalizada q_k	---
δr	Deslocamento virtual na direção r	---
δr_{F_V}	Deslocamento virtual na direção da força do amortecedor	---
ϕ	Ângulo de fase	rad
θ	Deslocamento angular do eixo do motor/massa desbalanceada	rad
$\dot{\theta}$	Velocidade angular do eixo do motor elétrico	rad/s
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular do eixo do motor elétrico	rad/s ²
ζ	Fator de amortecimento do sistema (amortecimento adimensional)	---
ω	Velocidade angular da massa desbalanceada	rad/s
ω_d	Frequência natural angular amortecida	rad/s
ω_n	Frequência natural angular	rad/s
Ω_0	Constante de velocidade angular do motor elétrico	rad/s

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 JUSTIFICATIVA	22
1.2 OBJETIVOS	25
1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	25
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	26
2.1 FONTE DE EXCITAÇÃO IDEAL E NÃO IDEAL	26
2.2 SISTEMA NÃO IDEAL	29
2.3 SISTEMA NÃO IDEAL COM RIGIDEZ NÃO-LINEAR	30
2.4 SISTEMA NÃO-LINEAR DESCONTÍNUO (FOLGA NO ACOPLAMENTO DA RIGIDEZ)	34
2.5 SISTEMA COM NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA NA RIGIDEZ	34
2.6 DESBALANCEAMENTO ROTATIVO	36
3 MODELAGEM DOS SISTEMAS ESTUDADOS	39
3.1 SISTEMA NLGS NÃO IDEAL	40
3.2 SISTEMA NLGS IDEAL	51
3.3 SISTEMA COM RIGIDEZ NÃO-LINEAR	52
3.4 SISTEMA NÃO IDEAL	55
4 METODOLOGIA	58
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES	61
5.1 SISTEMA NLGS NÃO IDEAL	62
5.2 SISTEMA NLGS IDEAL	75
5.2.1 Diagrama de bifurcação utilizando como parâmetro de controle a frequência de excitação f	76
5.2.2 Diagrama de bifurcação utilizando como parâmetro de controle o comprimento das barras L	84
5.2.3 Diagrama de bifurcação utilizando como parâmetro de controle a deformação inicial da mola d_0	89
5.2.4 Equivalência dos diagramas de bifurcação	96
5.2.5 Análise da influência dos parâmetros de controle no comportamento do sistema	97
5.2.6 Sistema NLGS ideal com vibração livre (caso particular)	97
5.3 SISTEMA COM RIGIDEZ NÃO-LINEAR	100
5.4 SISTEMA NÃO IDEAL	112
5.5 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DOS SISTEMAS ESTUDADOS	119
5.5.1 Sistema NLGS não ideal e sistema NLGS ideal	119
5.5.2 Sistema NLGS não ideal e sistema com rigidez não-linear	120
5.5.3 Sistema NLGS não ideal e sistema não ideal	121
6 CONCLUSÕES	123
7 TRABALHOS FUTUROS	125

1 INTRODUÇÃO

A introdução do trabalho está focada em sistemas com não-linearidade geométrica na rigidez. A seguir são apresentados alguns exemplos desse tipo de sistema para facilitar o entendimento do restante do trabalho e também para ilustrar algumas aplicações do mesmo no campo de vibrações mecânicas.

Em Kovacic e Brennan (2011) tem-se um exemplo de sistema com não-linearidade geométrica na rigidez (Figura 1.1). O sistema consiste em duas molas lineares (rigidez k) ligadas a uma massa. O comprimento das molas é d quando o sistema está na posição de equilíbrio instável e L_i é o comprimento da mola sem carga (relaxada). Quando a massa se move na direção x indicada na Figura 1.1 as molas se inclinam para acompanhar o movimento da massa e essa mudança no comprimento das molas causa a não-linearidade, visto que a variação no comprimento das molas é uma função não-linear do deslocamento x , devido à geometria do sistema. Isso pode ser visualizado matematicamente através da Equação (1.1) da força aplicada F em função do deslocamento x , obtida em Kovacic e Brennan (2011), na qual nota-se a presença do termo não-linear na deformação da mola usada para o cálculo da força F .

$$F = 2kx \left(1 - \frac{L_i}{\sqrt{x^2 + d^2}} \right) \quad (1.1)$$

Deformação da mola

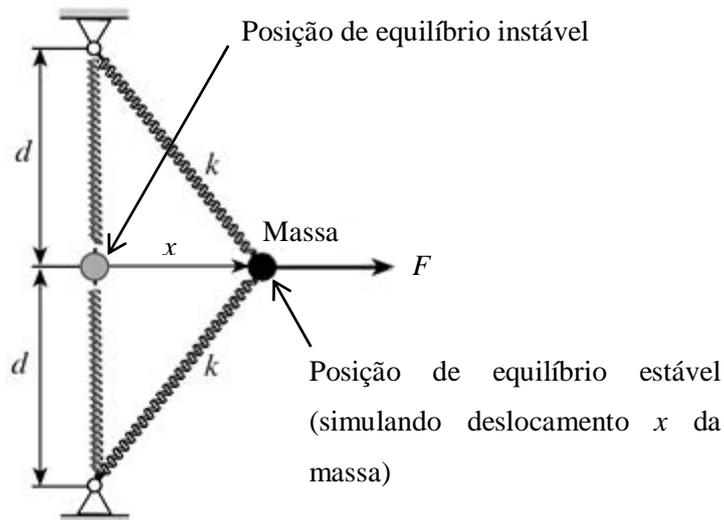


Figura 1.1 – Exemplo de sistema com não-linearidade geométrica na rigidez

Fonte: Kovacic e Brennan (2011)

Assim, embora a rigidez das molas seja linear, a geometria do sistema faz com que a rigidez equivalente do sistema se torne não-linear, por isso, diz-se que a Figura 1.1 é um exemplo de sistema com não-linearidade geométrica na rigidez.

Segundo Millar e Barghian (2000) “snap-through” é o fenômeno ou efeito que ocorre quando um sistema que está no estado de equilíbrio instável “salta” para um novo estado de equilíbrio estável sob a ação de excitação ou condição inicial. A Figura 1.1 é um exemplo de sistema na qual ocorre o fenômeno “snap-through”.

Os sistemas com mecanismo “snap-through” têm sido muito estudados nos últimos anos. Em termos de aplicação, vê-se nas literaturas que os mesmos são usados como absorvedores/isoladores de vibração.

De acordo com Carrella *et al.* (2012) idealmente um isolador deve apresentar duas características: 1) alta rigidez estática, para resistir a cargas estáticas com baixo deslocamento estático (baixa deflexão estática), devido a problema de espaço físico, por exemplo; 2) baixa rigidez dinâmica, para proporcionar baixa frequência natural com o objetivo de aumentar a região (desempenho) de isolamento.

Em Rao (2008) encontra-se um exemplo de isolador linear (Figura 1.2). O sistema consiste de uma máquina ligada a uma base rígida através de um isolador de vibração, modelado como uma rigidez linear e um amortecimento viscoso linear. A operação da máquina dá origem a uma força que varia harmonicamente $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

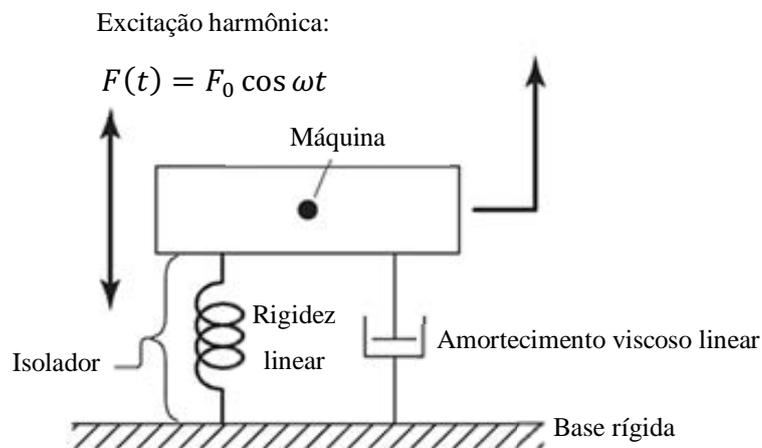


Figura 1.2 – Exemplo de isolador linear

Fonte: Rao (2008)

Segundo Rao (2008) a transmissibilidade ou fator de transmissão do isolador T_r é a razão entre a magnitude da força transmitida F_T e a magnitude da força de excitação F_0 . Para obter isolamento deve-se satisfazer a seguinte condição: $F_T < F_0$, ou seja, $T_r < 1$. A Figura 1.3 mostra graficamente a variação de T_r com a razão de frequências $r_f = \frac{\omega}{\omega_n}$, para alguns valores de ζ , sendo que: ω é a frequência angular da excitação harmônica, ω_n é a frequência natural do sistema e ζ é o fator de amortecimento do sistema (ou amortecimento adimensional).

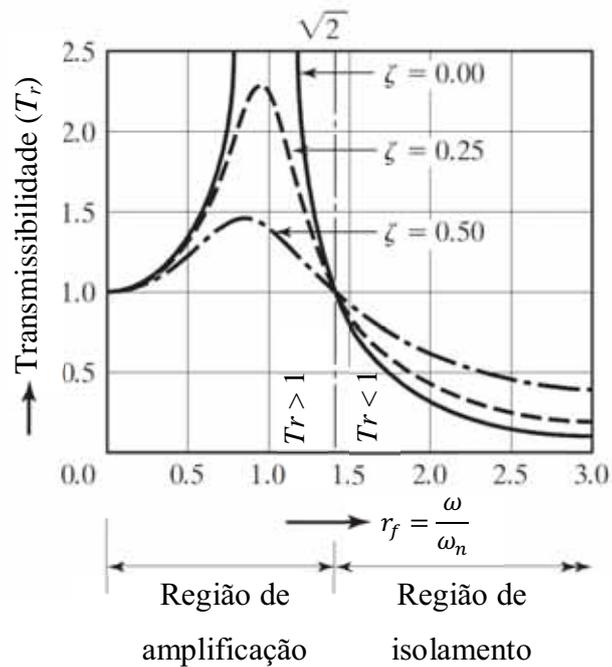


Figura 1.3 – Variação da transmissibilidade em função da razão de frequências para um isolador linear

Fonte: Rao (2008)

Analisando a Figura 1.3 conclui-se que: a) a frequência angular da excitação ω tem que ser no mínimo $\sqrt{2}$ vezes maior do que a frequência natural do sistema ω_n para se conseguir isolamento; b) a magnitude da força transmitida à base pode ser reduzida com a redução da frequência natural do sistema ω_n .

De acordo com Carrella *et al.* (2012) as duas características mencionadas anteriormente: alta rigidez estática e baixa rigidez dinâmica são mutuamente excludentes em isoladores lineares, mas podem ser conseguidas em isoladores não lineares corretamente projetados (mecanismos conhecidos em Inglês como HSLDS – High-Static-Low-Dynamic-Stiffness).

A Figura 1.4, retirada de Kovacic e Brennan (2011), mostra um exemplo de isolador não-linear, que consiste em um par de molas ligado a uma massa, conectado em paralelo com uma mola vertical. O sistema da Figura 1.4 é parecido com o da Figura 1.1, porém, na Figura 1.1 o par de molas está na vertical e na Figura 1.4 está na horizontal.

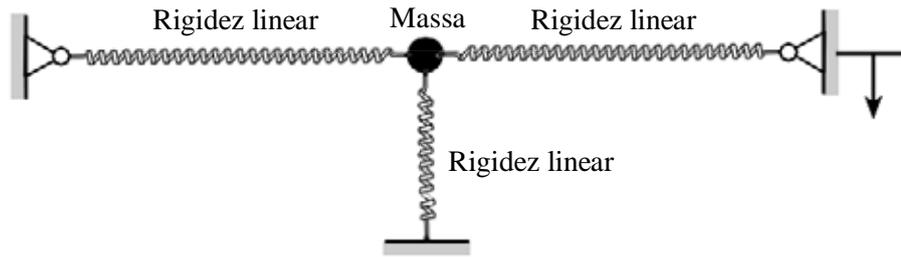


Figura 1.4 – Exemplo de isolador não-linear

Fonte: Kovacic e Brennan (2011)

Segundo Carrella *et al.* (2009) nas aplicações em que se deseja frequência natural baixa, o uso de absorvedor linear acarreta em deflexão estática elevada, o que é indesejado. Essa desvantagem pode ser superada montando-se um mecanismo com molas inclinadas a fim de se obter alta rigidez estática, baixo deslocamento estático, baixa rigidez dinâmica e, conseqüentemente, baixa frequência natural. Escolhendo adequadamente a rigidez das molas e a geometria do mecanismo é possível obter rigidez dinâmica zero. São os chamados isoladores com frequência quase zero (em Inglês Quasi-zero stiffness isolator - QZS). A Figura 1.5 é um exemplo de isolador QZS.

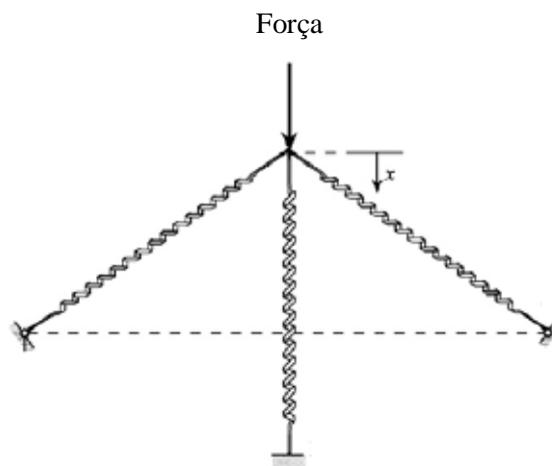


Figura 1.5 – Exemplo de isolador com frequência quase zero (QZS)

Fonte: Carrella *et al.* (2009)

Em Carrella *et al.* (2007a) e Carrella *et al.* (2007b) estuda-se um sistema semelhante ao da Figura 1.5, mostrando que existem várias publicações que tratam desse tipo de mecanismo buscando otimizar os parâmetros para conseguir a rigidez dinâmica zero.

Em Avramov e Mikhlin (2004) tem-se um exemplo de aplicação de mecanismo “snap-through” na forma de treliça como um absorvedor de vibração livre (Figura 1.6). O sistema consiste de um bloco de massa M que oscila horizontalmente, ligado a uma mola com rigidez linear. A outra extremidade do bloco de massa M está ligada a um mecanismo na forma de treliça (duas molas

inclinadas, com rigidez linear, ligadas a um bloco de massa m que oscila verticalmente). O objetivo é transferir as amplitudes de deslocamento para o absorvedor na forma de treliça, reduzindo assim as amplitudes de deslocamento do sistema.

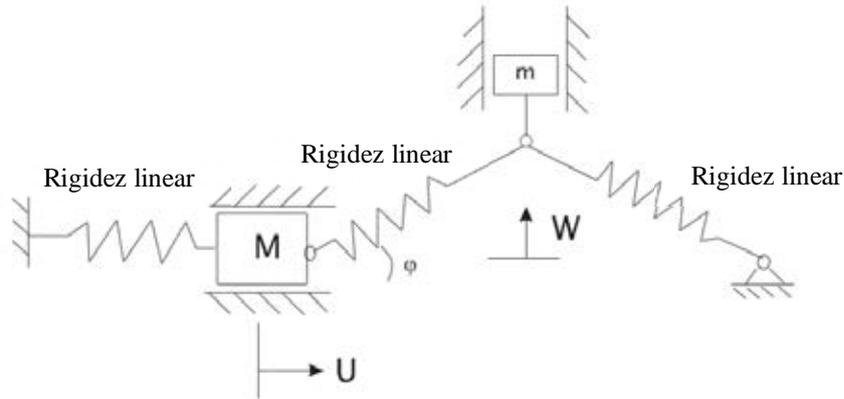


Figura 1.6 – Exemplo de aplicação de mecanismo “snap-through” na forma de treliça como absorvedor de vibração livre

Fonte: Avramov e Mikhlin (2004)

Em Avramov e Mikhlin (2006) tem-se um exemplo de aplicação de mecanismo “snap-through” na forma de treliça como um absorvedor de vibração forçada. O sistema é semelhante ao da Figura 1.6, porém, trabalha sob vibração forçada, devido à excitação harmônica.

A Figura 1.7 é um exemplo real de estrutura do tipo “snap-through” utilizada em sistemas microeletromecânicos (MEMS), que são microestruturas na forma de treliça ou placa que sofrem “snap-through” sob a ação de força eletrostática. O micro switch é uma placa de silício com aproximadamente $25\mu\text{m}$ de comprimento.

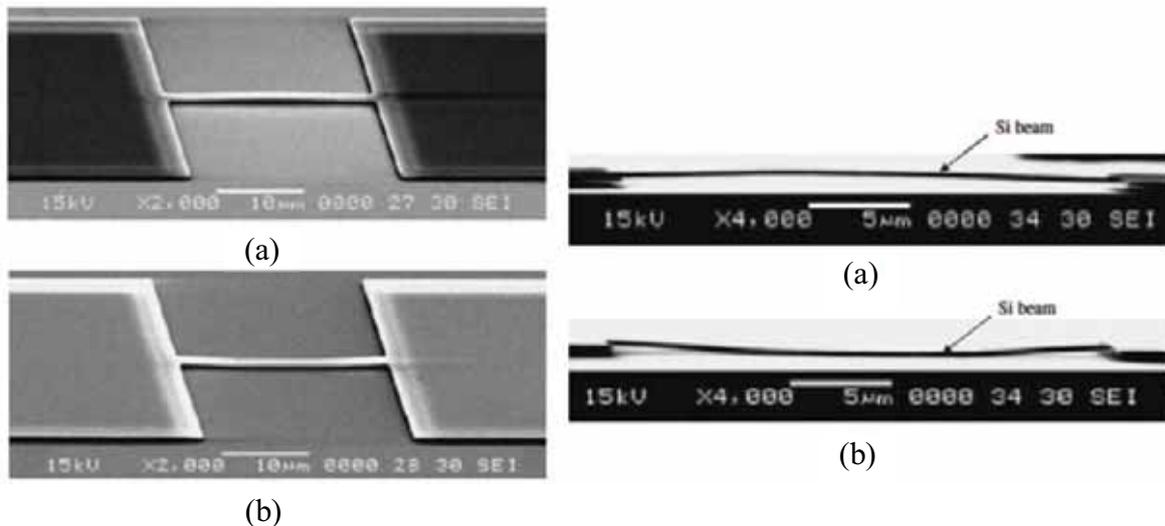


Figura 1.7 – Fotografias de micro switch: (a) antes do “snap-through”; (b) após o “snap-through”

Fonte: Hrinda (2010)

Mais alguns exemplos de mecanismo “snap-through” serão apresentados no capítulo 2.

1.1 JUSTIFICATIVA

Segundo Rao (2008) em muitos sistemas mecânicos reais o ser humano faz parte do próprio sistema, ficando, portanto, sujeito às vibrações provenientes do mesmo.

Em Griffin (1990) apresentam-se alguns prejuízos causados pela transmissão das vibrações ao corpo humano:

- dor;
- desconforto;
- perda de eficiência e concentração no trabalho;
- tontura;
- náusea;
- turvamento da visão;
- perturbação da fala;
- fadiga;
- perturbações neurológicas ou musculares;
- lesões ósteo-articulares;
- patologias na região lombar;
- lesões da coluna vertebral.

Para Griffin (1990) o risco da exposição humana à vibração depende de:

- amplitude;
- frequência;
- direção;
- tempo de exposição;
- comportamento da vibração ao longo do tempo (contínua, intermitente ou transitória).

Em Rao (2008) comenta-se que quando a frequência natural de vibração de uma máquina ou estrutura coincide com a frequência de excitação externa ocorre o fenômeno da ressonância, o qual resulta em grandes amplitudes de vibração.

Iida (2005) afirma que o organismo humano é uma estrutura complexa, formada por diversos ossos, articulações, músculos e órgãos e, portanto, não reage de maneira uniforme ao efeito das vibrações. Dessa forma, cada parte do organismo pode amortecer ou amplificar as vibrações, sendo que as amplificações ocorrem quando as partes do corpo passam a vibrar na mesma frequência da excitação externa. Nessa condição comumente diz-se que o corpo entrou em

ressonância. A frequência que provoca esse fenômeno é chamada de frequência de ressonância. O corpo humano possui diferentes frequências de ressonância (Tabela 1.1), e cada uma de suas partes, quando submetida a uma excitação externa que coincide com a sua própria frequência de ressonância, tem sua vibração amplificada.

Tabela 1.1 – Frequências de ressonância de partes do corpo humano – vibrações no sentido vertical

Fonte: Iida (2005)

Parte do corpo	Frequência de ressonância (Hz)	Sintomas
Corpo inteiro	4 a 5, 10 a 14	Desconforto geral
Cérebro	Abaixo de 0,5 1 a 2	Enjoo Sono
Cabeça Olhos Queixos Laringe	5 a 20 20 a 70 100 a 200 5 a 20	Dificuldade visual Dificuldade de fala Mudança de voz
Ombros	2 a 10	
Antebraço	16 a 30	
Mãos	4 a 5	
Tronco Coração Caixa torácica Estômago Abdômen Rins	3 a 7 4 a 6 60 3 a 6 4 a 8 10 a 18	Dores no peito Dores estomacais Urina solta
Sistema cardiovascular	2 a 20	

Segundo Rao (2008) no ambiente industrial existem inúmeras fontes de vibração: máquinas rotativas, máquinas alternativas, processos com impacto, transportadores, veículos, máquinas ferramenta, dentre outras. Citando algumas consequências das vibrações no ambiente industrial tem-se: ruído excessivo, desgaste prematuro, trincas, afrouxamento de parafusos, vazamentos, mau funcionamento de máquinas e equipamentos, prejuízo no acabamento superficial de peças durante a usinagem e falhas estruturais. Nesse contexto de ambiente industrial, destaca-se o

desbalanceamento, que é uma das causas mais comuns de vibração em equipamentos rotativos, especialmente em: rotores de motores elétricos, rotores de ventiladores, rotores de sopradores, turbinas, bombas centrífugas e uniões elásticas (acoplamentos mecânicos).

O desbalanceamento rotativo está presente em inúmeras aplicações de Engenharia. Por exemplo, Rao (2008) afirma que grande parte dos motores de acionamento tem problema relacionado com vibração mecânica, devido ao desbalanceamento inerente que existe nos motores.

Rao (2008) também exemplifica que:

- O desbalanceamento de motores a diesel pode gerar ondas (vibrações) com magnitude suficiente para causar incômodo em áreas urbanas ou até mesmo danos às propriedades;
- As rodas de uma locomotiva em alta velocidade podem ter afastamento considerável (da ordem de centímetro) dos trilhos da ferrovia em razão do desbalanceamento;
- A vibração causada pelo desbalanceamento afeta estruturas (suporte ou base de fixação) e componentes mecânicos das máquinas. Essa vibração pode causar falhas mecânicas como, por exemplo, desgaste acelerado, ruído excessivo ou falha por fadiga (variação cíclica da tensão), que são efeitos indesejáveis.

Segundo Rao (2008), conhecendo-se o desbalanceamento rotativo é possível minimizá-lo no projeto, bem como dimensionar as estruturas e os componentes mecânicos para assegurar que o seu efeito não cause danos aos mesmos.

A presente dissertação trata de um sistema dinâmico que possui rigidez não-linear devido à geometria do mecanismo articulado de duas barras. A fonte não ideal de energia é representada por um motor elétrico de corrente contínua com rotor desbalanceado e a fonte ideal de energia é representada por uma massa desbalanceada que gira com velocidade angular constante.

Como o sistema não ideal se aproxima mais do sistema físico real, o mesmo tem sido muito estudado nos últimos anos. A presença de um elemento não-linear traz uma complexidade significativa para a resposta do sistema, como por exemplo, a possibilidade de aparecimento de caos.

Quando o regime de movimento é caótico, o sistema oscila numa faixa larga de frequências. Pensando no ambiente industrial, significa que a máquina ou equipamento sob regime caótico vibra numa faixa larga de frequências. Isso é um grande problema quando se pensa no corpo humano, pois, como foi discutido anteriormente, cada uma das partes do mesmo apresenta uma frequência de ressonância diferente.

É nesse contexto de fonte não ideal de energia em conjunto com uma rigidez não-linear, a qual pode provocar o aparecimento de caos, que a presente dissertação está fundamentada. O desbalanceamento rotativo leva o sistema estudado nesse trabalho para o contexto do ambiente

industrial e este por sua vez nos faz pensar na interação entre o corpo humano e a vibração, principalmente em termos de saúde e conforto do trabalhador.

1.2 OBJETIVOS

Apresentam-se a seguir os principais objetivos desse trabalho:

- Compreender o comportamento de um sistema com não-linearidade na rigidez devido à geometria do mecanismo articulado de barras, na condição ideal e não ideal;
- Investigar algumas configurações variantes do sistema principal para entender a influência da fonte de energia (ideal e não ideal) e da rigidez (linear e não-linear) no comportamento do sistema;
- Comparar o comportamento dos sistemas dinâmicos estudados para conhecer as particularidades de cada um;
- Confirmar se há indicação de regime de movimento caótico para os sistemas estudados;
- Entender os ganhos de Engenharia do sistema com não-linearidade na rigidez em relação aos demais sistemas estudados.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O restante da dissertação está estruturado de acordo com a descrição a seguir: o capítulo 2 traz a revisão bibliográfica necessária para a elaboração e a compreensão do trabalho, com o objetivo de apresentar ao leitor a teoria básica empregada ao longo do texto e também mostrar o estado da arte do assunto que está sendo estudado. No capítulo 3 faz-se a modelagem matemática dos sistemas dinâmicos estudados, obtendo-se as equações de movimento. O capítulo 4 apresenta a metodologia empregada para a obtenção dos resultados. Dentro do capítulo 5 analisam-se os resultados obtidos através da integração numérica. Vários resultados são mostrados para auxiliar o entendimento da dinâmica dos sistemas. O capítulo 6 mostra as principais conclusões obtidas com o estudo realizado e o capítulo 7 apresenta algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica mostra o estado da arte do assunto que está sendo estudado e está dividida em algumas subseções para facilitar a compreensão do texto.

2.1 FONTE DE EXCITAÇÃO IDEAL E NÃO IDEAL

Pesquisando-se os trabalhos publicados na área de vibrações é possível perceber que em muitos casos a influência do movimento do sistema na sua excitação é desprezada. Tal simplificação distancia o sistema dinâmico estudado do sistema físico real, pois alguns comportamentos importantes são desprezados.

Segundo Nayfeh e Mook (1995) “Quando a excitação não é influenciada pela resposta do sistema a mesma é chamada de excitação ideal ou fonte ideal de energia. Por outro lado, quando a excitação é influenciada pela resposta do sistema a mesma é chamada de excitação não ideal ou fonte não ideal de energia. Dependendo da excitação, refere-se ao sistema como ideal ou não ideal”.

Uma particularidade do sistema não ideal é conhecida como efeito Sommerfeld. Para auxiliar na explicação desse efeito utiliza-se a Figura 2.1, a qual representa a curva da amplitude de deslocamento em função da velocidade angular do motor elétrico de corrente contínua de um sistema massa-mola-amortecedor excitado por um motor elétrico de corrente contínua com o rotor desbalanceado, caracterizando um sistema não ideal (vide 3.4 do presente trabalho para visualizar um sistema equivalente ao que foi descrito nesse parágrafo).

Na Figura 2.1 o valor da amplitude de deslocamento está em módulo e representa o máximo deslocamento do sistema em regime permanente. Para cada valor de frequência escolhido determina-se a amplitude de deslocamento do sistema e plota-se um ponto na curva. Os vários pontos de amplitude de deslocamento do sistema em função dos valores escolhidos de frequência geram a curva de resposta em frequência mostrada na Figura 2.1.

Vale destacar que na Figura 2.1 não existem valores numéricos nos eixos, apenas a origem está indicada numericamente, pois o objetivo dessa figura é apenas auxiliar, didaticamente, na explicação do efeito Sommerfeld. Os números no interior da Figura 2.1 são apenas uma sequência numérica que será utilizada no parágrafo a seguir para ajudar na explicação.

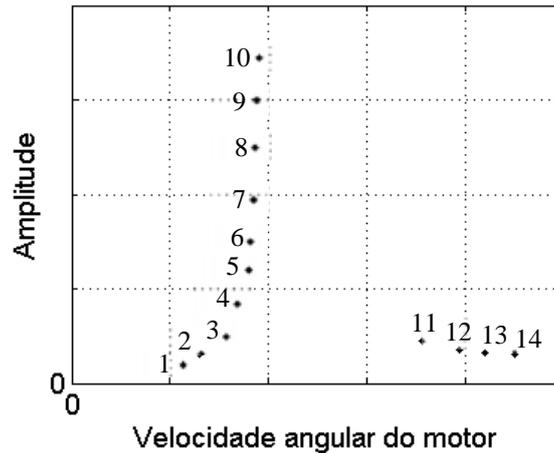


Figura 2.1 – Resposta em frequência para sistema não ideal para visualização do efeito Sommerfeld

Fonte: Próprio autor

Analisando a Figura 2.1 percebe-se que a amplitude de deslocamento segue os pontos 1 a 14 durante o acréscimo da velocidade angular do motor elétrico, sendo que a amplitude salta do ponto 10 para o ponto 11, ou seja, ocorre uma descontinuidade na curva entre os pontos 10 e 11.

Na região dos pontos 7 a 10 da Figura 2.1 percebe-se que ocorre um aumento significativo na amplitude de deslocamento do sistema enquanto a velocidade angular do motor elétrico praticamente não se altera.

A explicação para o comportamento mencionado acima, segundo Nayfeh e Mook (1995) e Cveticanin (2010), é que em um sistema dinâmico excitado por um motor elétrico, à medida que se aumenta a energia fornecida ao motor a sua rotação cresce de forma contínua, porém isso não ocorre infinitamente. Quando a rotação do motor se aproxima da frequência natural do sistema, uma quantidade maior de energia tem que ser fornecida para aumentar a rotação do mesmo, pois parte dessa energia é absorvida pelo próprio sistema, percebe-se isso devido ao aumento da amplitude de deslocamento do sistema. Assim, na região da frequência natural (região de ressonância), grandes acréscimos na energia fornecida ao motor provocam pequenas mudanças na rotação do mesmo e elevados aumentos na amplitude de deslocamento do sistema. Nessa situação comumente se diz que a rotação do motor é “capturada” pela frequência natural do sistema. Após o sistema atingir um determinado nível de energia, a rotação do motor consegue ultrapassar a barreira da ressonância e, então, volta a aumentar, enquanto a amplitude de deslocamento do sistema cai drasticamente. Segundo Nayfeh e Mook (1995) tal fenômeno é conhecido como efeito Sommerfeld e ocorre tanto no acréscimo quanto no decréscimo gradativo da rotação do motor. Esse fenômeno não ocorre em sistemas ideais.

Comportamento equivalente ao da Figura 2.1 pode ser observado no capítulo 5 do presente trabalho quando se apresentam os resultados numéricos do sistema não ideal, no qual ocorre o efeito Sommerfeld para os parâmetros adotados nesse trabalho.

De acordo com Nayfeh e Mook (1995) pelo fato de considerar a interação entre o sistema e a fonte de excitação, matematicamente, o sistema não ideal possui um ou mais grau de liberdade (dependendo da quantidade de fontes de excitação não ideal existentes) a mais do que o sistema ideal correspondente, sendo que esse grau de liberdade a mais descreve o comportamento dinâmico da própria fonte de excitação. Isso é outra característica importante que diferencia o sistema ideal do não ideal.

Como já foi mencionado anteriormente, um exemplo de fonte de energia não ideal é o motor elétrico de corrente contínua. Em alguns sistemas estudados no presente trabalho esse tipo de motor é utilizado como fonte de excitação, portanto, é necessário conhecer algumas características do mesmo para que se possa entender o seu comportamento e a sua influência no sistema dinâmico.

O torque líquido do motor elétrico de corrente contínua resulta da diferença entre o torque gerado pelo motor e o torque das forças resistivas internas do mesmo.

No presente trabalho é adotado o comportamento linear para a curva de torque líquido em função da velocidade angular $\dot{\theta}$ do motor elétrico, de maneira equivalente à feita em Zukovic e Cveticanin (2007). Matematicamente tem-se:

$$T(\dot{\theta}) = a - b\dot{\theta} \quad (2.1)$$

Sendo que: $T(\dot{\theta})$ é o torque líquido em função da velocidade angular $\dot{\theta}$; a é a constante de torque do motor; b é o coeficiente angular da reta que representa a curva de torque líquido do motor e $\dot{\theta}$ é a velocidade angular do eixo do motor.

A Equação (2.1) é equivalente à utilizada em Zukovic e Cveticanin (2007). As letras que representam as variáveis e a forma de escrever a equação do torque se diferenciam entre o presente trabalho e a bibliografia citada, entretanto, ambas as equações representam matematicamente a equação de uma reta, caracterizando o comportamento linear do torque líquido em função da velocidade angular do motor elétrico.

A constante a representa o torque do motor quando a velocidade angular é nula (ponto em que a reta intercepta o eixo do torque na Figura 2.2).

A velocidade angular em que o torque do motor é nulo será chamada no texto de constante de velocidade angular do motor e é representada por Ω_0 (ponto em que a reta intercepta o eixo da velocidade angular na Figura 2.2).

A Figura 2.2 representa graficamente a Equação (2.1) e é comumente conhecida como curva característica do motor elétrico.

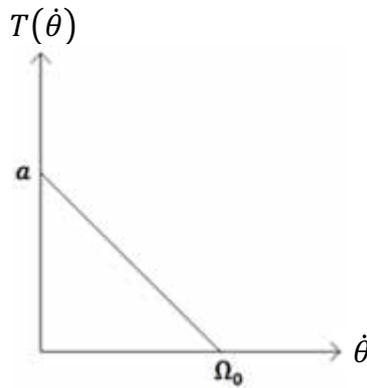


Figura 2.2 – Curva linear de torque líquido em função da velocidade angular adotada no trabalho para o motor elétrico de corrente contínua

Fonte: Próprio autor

Como já mencionado anteriormente, o coeficiente angular da reta da Figura 2.2 é identificado no texto como b . Matematicamente:

$$b = \frac{a}{\Omega_0} \quad (2.2)$$

A unidade de medida de Ω_0 é rad/s. Convertendo-se o valor de Ω_0 para a unidade de medida Hertz (Hz) obtém-se a chamada constante de frequência do motor f_0 . Matematicamente:

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} \quad (2.3)$$

2.2 SISTEMA NÃO IDEAL

Cveticanin (2010) faz uma revisão bibliográfica a respeito de sistema não ideal, destacando o efeito Sommerfeld, a captura pela ressonância e a limitação de potência da fonte de energia não ideal. Não são apresentados resultados numéricos. Apenas discute-se, teoricamente, o comportamento do sistema não ideal.

Em Balthazar *et al.* (2003) também é feita uma revisão bibliográfica sobre sistema não ideal. A discussão se concentra na captura pela ressonância, efeito Sommerfeld e aumento da potência da fonte de energia para ocorrer a passagem pela ressonância. Não são apresentados resultados numéricos. Apenas discute-se, teoricamente, o comportamento do sistema não ideal.

2.3 SISTEMA NÃO IDEAL COM RIGIDEZ NÃO-LINEAR

Os sistemas apresentados a seguir possuem rigidez do tipo não-linear formada por duas parcelas: uma linear positiva e outra não-linear cúbica também positiva.

Em Zukovic e Cveticanin (2007) estudou-se um sistema com fonte não ideal de energia, representada por um motor elétrico com rotor desbalanceado e potência limitada, acoplado a uma rigidez não-linear e a um amortecedor viscoso linear (Figura 2.3). Nesse sistema foi verificado o efeito Sommerfeld, o qual ocorre próximo da frequência natural do sistema. Quando a frequência da excitação se encontra próxima da frequência natural do sistema ocorre a captura pela ressonância. Nessa condição, a energia fornecida ou retirada não altera a rotação do motor, mas sim a amplitude de deslocamento do sistema. Tal efeito é caracterizado pelo salto na curva de amplitude de deslocamento do sistema. O salto ocorre durante o acréscimo e também durante o decréscimo da rotação do motor em valores próximos da frequência natural no sistema. Através das análises realizadas define-se o valor de alguns parâmetros para eliminar o efeito Sommerfeld. Verifica-se o regime de movimento caótico para determinados valores dos parâmetros. Estudou-se também um método de controle, que consiste na adição de uma força externa atuando no sistema, através da qual se consegue estabilizar o comportamento do sistema em determinadas situações. Fez-se também um comparativo entre a solução analítica e a numérica.

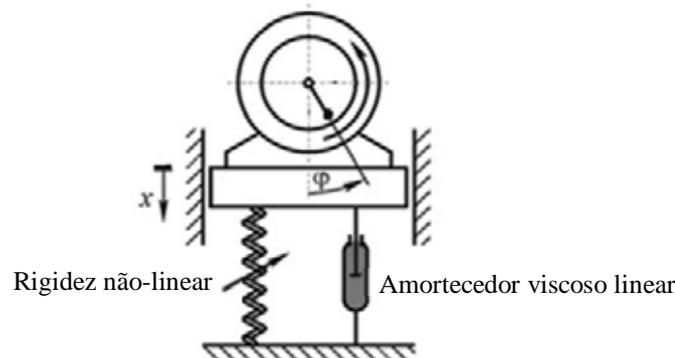


Figura 2.3 – Sistema não ideal com rigidez não-linear – Exemplo 1

Fonte: Zukovic e Cveticanin (2007)

Em Ahşverişi *et al.* (2012) estudou-se um sistema excitado por um motor elétrico com rotor desbalanceado (massas excêntricas) e potência limitada (fonte não ideal de energia). O sistema está acoplado a uma rigidez não-linear e a um amortecedor viscoso linear (Figura 2.4). Destacam-se duas características importantes do sistema não ideal: o efeito Sommerfeld e a necessidade de aumentar a potência da fonte de energia na região próxima da frequência natural do sistema. As equações de movimento foram obtidas através da equação de Lagrange. Uma solução analítica foi

proposta utilizando-se do Método das Múltiplas Escalas. Foi estudada também a estabilidade na vizinhança dos pontos de equilíbrio. Nas simulações numéricas foi verificado o comportamento do sistema através da variação de alguns parâmetros, tais como: coeficiente de amortecimento, termo cúbico da rigidez não-linear e magnitude da excitação. Fez-se também um comparativo entre a solução analítica e a numérica.

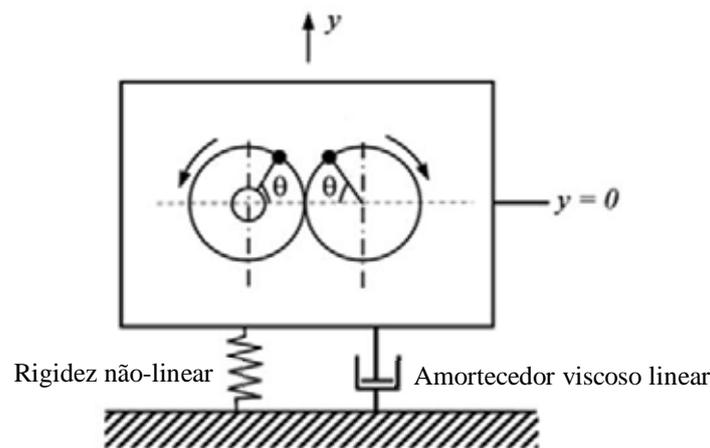


Figura 2.4 – Sistema não ideal com rigidez não-linear – Exemplo 2

Fonte: Aşverişçi et al. (2012)

Em Bolla *et al.* (2007) pesquisou-se o comportamento dinâmico de uma viga engastada com um motor desbalanceado fixo na sua extremidade livre. Tal sistema foi simplificado, sem perder a não-linearidade, como um motor desbalanceado apoiado numa base fixa, acoplado a uma rigidez não-linear e a um amortecedor viscoso linear (Figura 2.5). Também foram considerados os amortecimentos envolvidos no movimento de rotação do motor. Uma solução analítica foi proposta utilizando-se o Método das Múltiplas Escalas. Foi observada uma boa aproximação entre as respostas das soluções analítica e numérica. Foram observados o efeito Sommerfeld (a velocidade angular do motor é capturada pela ressonância, provocando um aumento significativo na amplitude de vibração do sistema e uma pequena alteração na rotação do motor) e o aumento na potência necessária para o sistema trabalhar em frequências próximas à sua frequência natural.

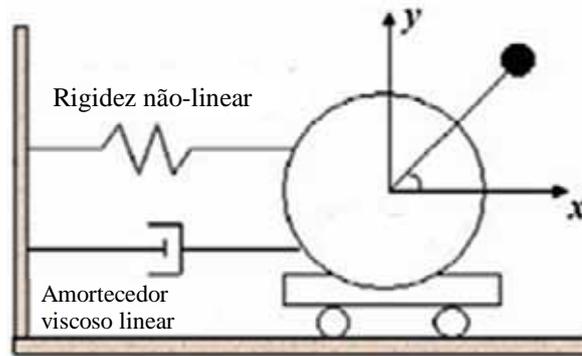


Figura 2.5 – Sistema não ideal com rigidez não-linear – Exemplo 3

Fonte: Bolla et al. (2007)

Os sistemas apresentados a seguir possuem rigidez do tipo não-linear formada por duas parcelas: uma linear negativa e outra não-linear cúbica positiva.

Em Souza *et al.* (2007) propôs-se um método de controle de vibração para eliminar o regime de movimento caótico de um sistema com fonte limitada de potência. Esse sistema é representado como um corpo apoiado numa base fixa, acoplado a uma rigidez não-linear e a um amortecedor viscoso linear. A fonte de excitação é representada por um motor não ideal com rotor desbalanceado (Figura 2.6). A ideia do método de controle é aplicar um sinal de pequena amplitude na fonte de excitação e não no oscilador, a fim de alterar a curva característica do motor. A estratégia desse método de controle é usar esse sinal para alterar a energia do oscilador a fim de estabilizar o movimento em órbitas periódicas, ou seja, alterando a energia do oscilador pode-se guiar a trajetória do sistema de um atrator caótico para uma órbita periódica. Analisando-se os resultados das simulações numéricas pode-se perceber que quando o controle não estava atuando coexistiam dois atratores no plano de fases: um periódico e outro caótico. Quando o controle atuava praticamente não se percebia mudança no atrator periódico, porém o atrator caótico era reposicionado para um dos dois novos atratores periódicos que apareciam no plano de fases. Comenta-se que esse tipo de método de controle, para determinados valores dos parâmetros, pode introduzir atratores periódicos, o que pode trazer sérias dificuldades para prever o estado final que o sistema irá assumir. Para evitar tais dificuldades em Souza *et al.* (2007) aconselha-se que a dinâmica do sistema deve ser bem explorada, a fim de determinar a região mais apropriada do plano de fase na qual se deve iniciar a aplicação eficiente do método de controle.

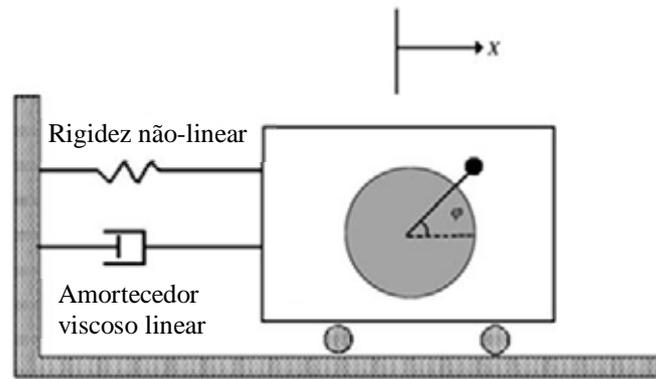


Figura 2.6 – Sistema não-linear – motor com tensão elétrica contínua

Fonte: Souza et al. (2007)

Em Nbandjo *et al.* (2012) pesquisou-se um sistema dinâmico (Figura 2.7) muito parecido com o de Souza *et al.* (2007). A principal diferença entre os dois sistemas está no motor (fonte de excitação). No caso de Nbandjo *et al.* (2012) a tensão do motor é do tipo alternada, enquanto que em Souza *et al.* (2007) a mesma é contínua. Em Nbandjo *et al.* (2012) é possível verificar que a tensão alternada do motor influencia consideravelmente o comportamento do sistema. Através de um gráfico do máximo expoente de Lyapunov percebeu-se a existência de três regiões distintas na resposta do sistema: a primeira com órbitas periódicas e quase periódicas; a segunda com órbitas caóticas e a terceira com órbitas com hipercaos, sendo o regime de movimento caótico predominante sobre os demais. Devido a essas particularidades encontradas para o caso da tensão alternada, em Nbandjo *et al.* (2012) aconselha-se que esse tipo de fonte de energia deve ser muito bem estudado e entendido antes da sua aplicação, dada a maior possibilidade de aparecimento de caos.

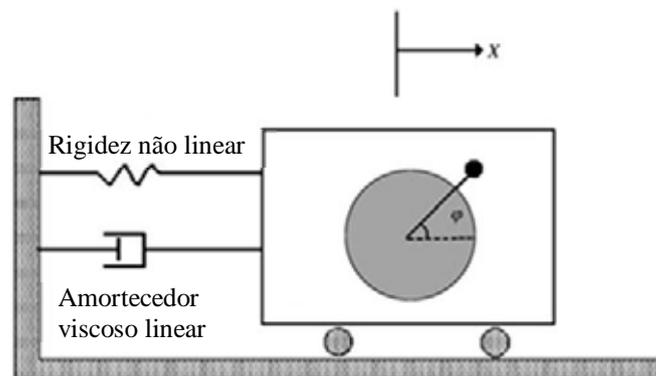


Figura 2.7 – Sistema não-linear – motor com tensão elétrica alternada

Fonte: Nbandjo (2012)

2.4 SISTEMA NÃO-LINEAR DESCONTÍNUO (FOLGA NO ACOPLAMENTO DA RIGIDEZ)

Em Zukovic e Cveticanin (2009) pesquisou-se um sistema com fonte não ideal de energia, representada por um motor elétrico com rotor desbalanceado e potência limitada, com folga no acoplamento entre o corpo e a rigidez linear (Figura 2.8). Devido à existência dessa folga o movimento do sistema fica dividido em intervalos com e sem a força elástica da mola. Tal particularidade influencia consideravelmente o comportamento do sistema. Assim, além do torque do motor, a folga também é uma variável de grande influência na resposta desse sistema. Para determinados valores dos parâmetros o sistema tem regime de movimento caótico. O efeito Sommerfeld é observado nesse sistema do tipo não ideal. Estudou-se um método para controle de vibração atuando diretamente no oscilador e não no motor, baseado na velocidade do oscilador. Tal método se mostrou eficaz para o sistema em questão, transformando um regime de movimento originalmente caótico em periódico.

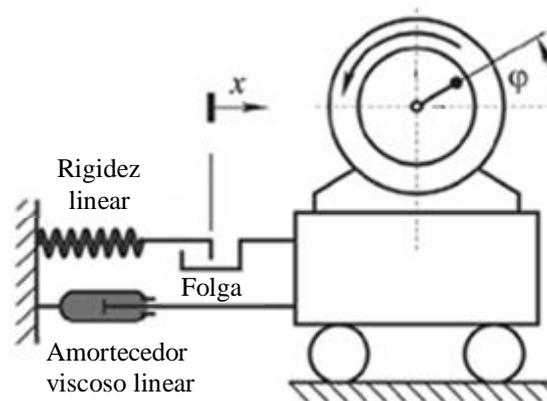


Figura 2.8 – Sistema não-linear descontínuo (folga no acoplamento da rigidez)

Fonte: Zukovic e Cveticanin (2009)

2.5 SISTEMA COM NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA NA RIGIDEZ

O sistema apresentado nesse tópico da revisão bibliográfica apresenta uma não-linearidade geométrica na rigidez, ou seja, mesmo a rigidez sendo linear, devido à geometria do sistema, tem-se a presença de termo não-linear na equação de movimento do sistema.

Em Godoy *et al.* (2011) estudou-se o sistema mostrado na Figura 2.9. Trata-se de um oscilador não ideal (em Inglês: Non-ideal oscillator – NIO) acoplado a um absorvedor “snap-through” na forma de treliça (em Inglês: Snap-through truss absorber – STTA), usado como controlador passivo. O sistema possui três graus de liberdade: translação horizontal do NIO, translação vertical do STTA e rotação do motor elétrico com rotor desbalanceado (fonte de excitação não ideal). Foi estudada a dinâmica do NIO com e sem acoplamento ao STTA. Através

dos resultados numéricos percebe-se que o STTA reduz a amplitude de deslocamento e atenua o efeito Sommerfeld durante a passagem pela ressonância.

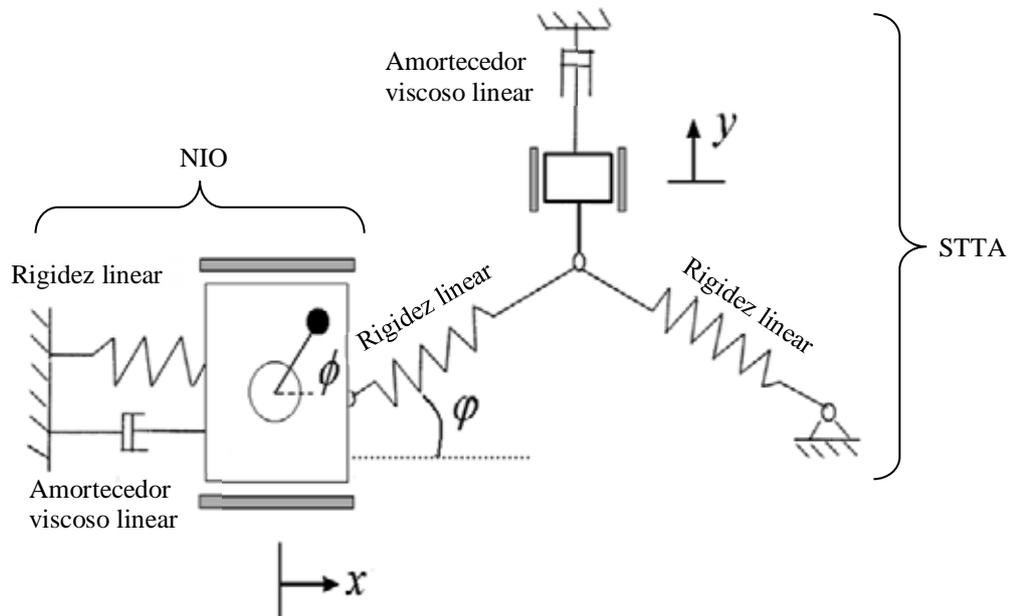


Figura 2.9 – Sistema com não-linearidade geométrica na rigidez

Fonte: Godoy *et al.* (2011)

Em Godoy *et al.* (2012a) trabalhou-se com o mesmo sistema apresentado na Figura 2.9. Foram encontrados os pontos de equilíbrio e fez-se uma análise de estabilidade do sistema. O STTA mostrou-se muito eficiente para reduzir a amplitude de deslocamento antes e durante a passagem pela ressonância. Após a passagem pela ressonância o NIO apresenta amplitude de deslocamento menor quando não está acoplado ao STTA.

Em Godoy *et al.* (2012b) pesquisou-se o mesmo sistema mostrado na Figura 2.9. Uma parte do trabalho focou no processo de transferência de energia do NIO para o STTA. Os resultados mostram que antes da ressonância ocorre uma grande transferência de energia do NIO para o STTA (fenômeno conhecido, em Inglês, como “energy pumping”), entretanto, na região da ressonância o NIO absorve praticamente toda a energia do sistema, resultando em elevada amplitude de deslocamento para o NIO e baixa amplitude de deslocamento para o STTA. Explorou-se também a inclusão de incerteza nos parâmetros do sistema e concluiu-se que na região de ressonância a amplitude de deslocamento do sistema com incerteza é 30% maior do que quando não há incerteza.

2.6 DESBALANCEAMENTO ROTATIVO

Uma representação muito clássica de desbalanceamento rotativo é mostrada na Figura 2.10, através de duas massas desbalanceadas $m/2$ que giram em sentidos opostos com velocidade angular constante ω . Essas massas estão ligadas a molas com rigidez linear $k/2$ e a um amortecedor viscoso linear (coeficiente de amortecimento c). Nesse sistema são usadas duas massas para equilibrar a componente horizontal da força proveniente do desbalanceamento, a fim de que o movimento oscilatório ocorra apenas na vertical. Na Figura 2.10, M é a massa total, e é a excentricidade da massa desbalanceada em relação ao centro de giro e t é o tempo.

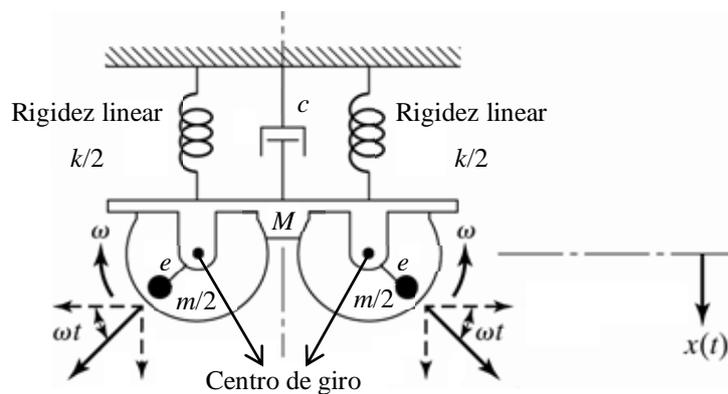


Figura 2.10 – Sistema com desbalanceamento rotativo – uma representação muito clássica

Fonte: Rao (2008)

O sistema da Figura 2.10 já vem sendo estudado há muito tempo e está presente em muitas literaturas. Como se trata de um sistema simples e muito conhecido será utilizada a equação de movimento já deduzida em Rao (2008), que é:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \sin \omega t \quad (2.4)$$

A solução geral da equação diferencial (2.4) é apresentada em Rao (2008) da seguinte forma:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2.5)$$

Na qual $x(t)$ é a solução geral da equação diferencial (2.4); $x_h(t)$ é a solução homogênea e $x_p(t)$ é a solução particular.

Segundo Rao (2008) a solução homogênea desaparece com o tempo porque representa a parte do movimento em vibração livre, o qual desaparece após determinado intervalo de tempo devido ao amortecimento do sistema. É o chamado movimento em regime transiente.

Dessa forma Rao (2008) afirma que a solução geral $x(t)$ reduz-se à solução particular $x_p(t)$, que representa o movimento em regime permanente. Rao (2008) apresenta a solução particular da equação diferencial (2.4) da seguinte forma:

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (2.6)$$

Na qual X é a amplitude de deslocamento e ϕ é o ângulo de fase.

Em Rao (2008) também se obtém:

$$X = \frac{me\omega^2}{[(k-M\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \quad (2.7)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{c\omega}{k-M\omega^2} \right) \quad (2.8)$$

Ao longo do texto será utilizado o termo frequência natural, que pode ser apresentada na unidade rad/s (é chamada de frequência natural angular e é representada pelo símbolo ω_n) ou Hz (é chamada de frequência natural e é representada pelo símbolo f_n).

A Figura 2.11 foi retirada de Rao (2008) e mostra a variação de MX/me (parâmetro adimensional de amplitude) em função de r_f para valores diferentes de ζ para o sistema da Figura 2.10. Sendo que r_f é a razão de frequências (ou frequência adimensional) e ζ é o fator de amortecimento do sistema (ou amortecimento adimensional). Matematicamente:

$$r_f = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (2.9)$$

$$\zeta = \frac{c}{2.(M+m).\omega_n} \quad (2.10)$$

A Figura 2.11 está intitulada no texto como resposta em frequência porque se entende que MX/me está relacionado com a amplitude de deslocamento do sistema, embora seja adimensional e que r_f está relacionado com a frequência de excitação, mesmo sendo adimensional. Assim, por ser uma curva que mostra a amplitude de deslocamento em função da frequência optou-se por intitular a Figura 2.11 como resposta em frequência.

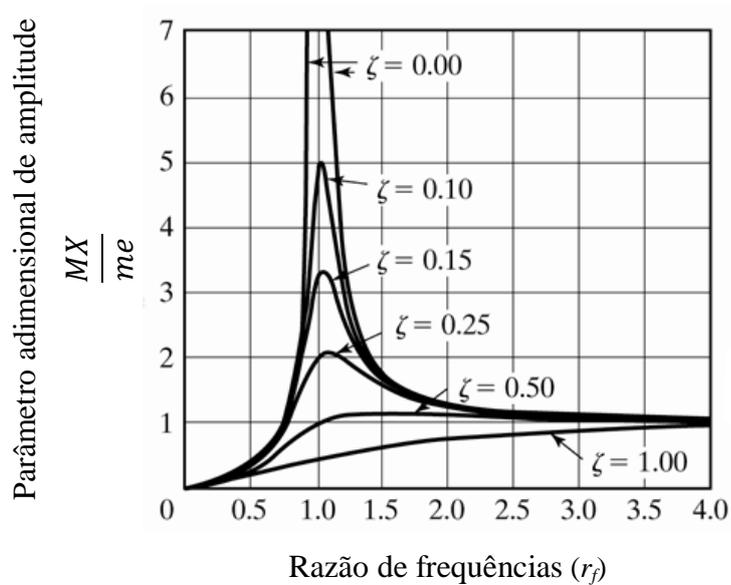


Figura 2.11 – Resposta em frequência – sistema com desbalanceamento rotativo

Fonte: Rao (2008)

Analisando a Figura 2.11, tiram-se as seguintes conclusões, baseados nos comentários existentes em Rao (2008):

- Para $r_f = 0$ todas as curvas tem amplitude zero;
- Na região da ressonância ($\omega = \omega_n$) a amplitude de deslocamento é significativamente afetada pelo fator de amortecimento do sistema, ou seja, à medida que se aumenta o valor de ζ reduz-se drasticamente a amplitude de deslocamento na região da ressonância e vice-versa. Fora da região da ressonância o aumento do valor de ζ não é tão significativo na redução da amplitude deslocamento do sistema;
- Para valores de r_f acima de 3,5 o parâmetro MX/me se aproxima da unidade e o valor do fator de amortecimento praticamente não exerce influência alguma para reduzir a amplitude de deslocamento do sistema;
- Para $\zeta = 1$ o parâmetro MX/me inicia em 0 para $r_f = 0$ e tende à unidade para $r_f \geq 4$, não apresentando uma amplitude de deslocamento maior na região da ressonância ($\omega = \omega_n$).

Com base nos comentários feitos acima fica evidente que num sistema com desbalanceamento rotativo é preciso estar atento ao fator de amortecimento do sistema para que não ocorram amplitudes de deslocamento na região da ressonância capazes de causar prejuízos ou danos ao próprio sistema.

No capítulo 3 é feita a modelagem matemática dos sistemas dinâmicos estudados.

3 MODELAGEM DOS SISTEMAS ESTUDADOS

Neste capítulo faz-se a modelagem matemática dos sistemas dinâmicos estudados, escrevendo-se a equação de movimento na forma de equação diferencial.

Segundo Meirovitch (2001) a mecânica Newtoniana escreve as equações de movimento em termos de coordenadas físicas e forças, as quais em geral são grandezas vetoriais. É necessário elaborar um diagrama de corpo livre para cada componente do sistema e utilizam-se as forças de reação e as forças de vínculo para escrever as equações de movimento. Essa metodologia faz com que seja necessário trabalhar uma quantidade de equações maior do que a quantidade de graus de liberdade do sistema. Dessa forma, na medida em que a quantidade de graus de liberdade aumenta, a mecânica Newtoniana se torna uma metodologia inviável para a dedução das equações de movimento.

Meirovitch (2001) afirma que a mecânica Lagrangiana não possui as desvantagens citadas acima sendo, portanto, uma metodologia interessante para deduzir equações de movimento de sistemas com vários graus de liberdade. Ela permite a dedução de todas as equações de movimento a partir de três grandezas escalares: energia cinética, energia potencial e trabalho virtual das forças não-conservativas. Não é necessário elaborar diagrama de corpo livre, pois considera o sistema como um todo ao invés dos seus componentes individuais. Como consequência disso, as forças de reação e as forças de vínculo não aparecem na dedução e a quantidade de equações de movimento coincide com a quantidade de graus de liberdade do sistema.

Com base nos comentários de Meirovitch (2001) apresentados nos parágrafos acima, para escrever as equações de movimento dos sistemas dinâmicos, no presente trabalho, utiliza-se a equação de Lagrange.

De acordo com Meirovitch (2001) a equação de Lagrange é escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k \quad (3.1)$$

Na qual: T é a energia cinética; V é a energia potencial; q_k é a coordenada generalizada ($k = 1, 2, 3, \dots, n$); \dot{q}_k é a velocidade generalizada ($k = 1, 2, 3, \dots, n$); Q_k são as forças generalizadas, também conhecidas como forças não-conservativas; $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ é a derivada parcial da energia cinética em relação à velocidade generalizada \dot{q}_k ; $\frac{\partial T}{\partial q_k}$ é a derivada parcial da energia cinética em relação à coordenada generalizada q_k ; $\frac{\partial V}{\partial q_k}$ é a derivada parcial da energia potencial em relação à coordenada generalizada

q_k e $\frac{d}{dt}$ é a derivada em relação ao tempo. As coordenadas generalizadas são as coordenadas independentes que correspondem aos graus de liberdade do sistema.

Segundo Meirovitch (2001) as forças generalizadas Q_k da equação de Lagrange (3.1) são obtidas calculando-se o trabalho virtual das forças não-conservativas.

Para Meirovitch (2001) se a força F atua na direção r o trabalho W realizado por F na direção r é:

$$W = Fr \quad (3.2)$$

De acordo com Meirovitch (2001) o trabalho virtual δW realizado por F na direção r é:

$$\delta W = F\delta r \quad (3.3)$$

Em Meirovitch (2001) obtém-se que o trabalho virtual da força não conservativa (para cada coordenada generalizada) é:

$$\delta W_{q_k} = Q_k \delta q_k \quad (3.4)$$

Maiores detalhes a respeito da equação de Lagrange podem ser encontrados em Meirovitch (2001).

3.1 SISTEMA NLGS NÃO IDEAL

O sistema NLGS não ideal consiste em um bloco de massa M apoiado numa base fixa que oscila horizontalmente (sem atrito) ligado a um amortecedor viscoso linear (coeficiente de amortecimento c) e a um mecanismo formado por duas barras de mesmo comprimento L que articulam no ponto de união entre as mesmas. Essas barras estão ligadas a uma mola vertical com rigidez linear k .

A fonte de excitação é um motor elétrico de corrente contínua com rotor desbalanceado (rotor com momento de inércia de massa J que gira com velocidade angular $\dot{\theta}$). O desbalanceamento do rotor é representado por uma massa m com excentricidade e em relação ao centro de giro (eixo do motor). A Figura 3.1 representa o sistema NLGS não ideal.

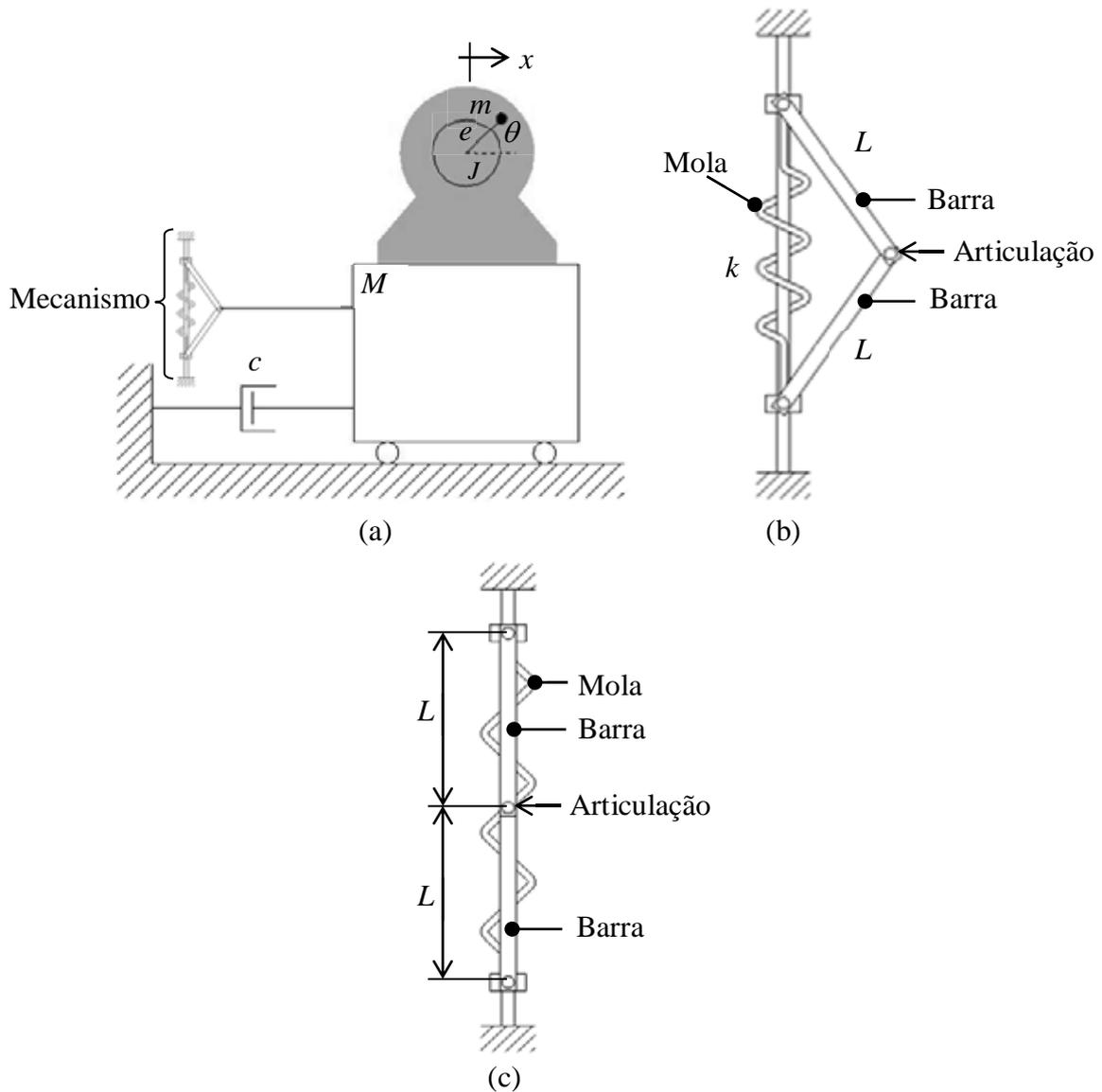


Figura 3.1 – Sistema NLGS não ideal

(a) Sistema em posição de equilíbrio estável; (b) Detalhe do mecanismo para o sistema em posição de equilíbrio estável; (c) Detalhe do mecanismo para o sistema em posição de equilíbrio instável

Fonte: Próprio autor

O bloco de massa M é excitado pelo motor elétrico com rotor desbalanceado e se movimenta na horizontal, apoiado sobre uma base fixa. À medida que o bloco se movimenta horizontalmente o mesmo transfere esse movimento para o mecanismo de barras ao qual está ligado. O mecanismo de barras por sua vez transfere o seu movimento para a mola.

A Figura 3.1 (a) mostra o sistema em posição de equilíbrio estável (o bloco está deslocado para a direita em relação à posição de equilíbrio instável).

A Figura 3.1 (b) ilustra o detalhe do mecanismo quando o sistema está em posição de equilíbrio estável da Figura 3.1 (a). Nessa situação as barras estão articuladas e comprimindo a mola.

A Figura 3.1 (c) representa o detalhe do mecanismo com o sistema em posição de equilíbrio instável (as barras podem se mover tanto para a direita quanto para a esquerda). Nessa condição as barras estão perfeitamente alinhadas com a vertical e a mola possui uma deformação inicial d_0 (nessa condição a mola está tracionada).

A origem do movimento do bloco de massa M (translação) é a posição de equilíbrio instável do sistema. O deslocamento do bloco em relação à origem é identificado por x no texto. Seguindo essa nomenclatura, \dot{x} é a velocidade e \ddot{x} é a aceleração do bloco. O deslocamento angular do eixo do motor é representado por θ no texto. Seguindo essa nomenclatura, $\dot{\theta}$ é a velocidade angular e $\ddot{\theta}$ é a aceleração angular do eixo do motor.

O sistema mostrado na Figura 3.1 apresenta uma não-linearidade na rigidez devido à geometria do mecanismo. No presente capítulo e nos seguintes esse sistema será identificado como sistema NLGS (em Inglês: Nonlinear Geometric Stiffness).

Até esse momento foi dada uma explicação sobre o funcionamento do sistema. A partir desse ponto será iniciada a dedução da equação de movimento do sistema.

O primeiro passo é escrever a equação da energia cinética e da energia potencial do sistema.

Para escrever a equação da energia cinética do sistema NLGS não ideal é necessário definir a equação da posição e velocidade da massa desbalanceada m , a qual é resultante da combinação do movimento de translação do bloco de massa M com o movimento de rotação do eixo do motor elétrico. Isso pode ser visualizado na Figura 3.2, a qual mostra que ao mesmo tempo em que o bloco de massa M sofre um deslocamento x em relação à origem (posição de equilíbrio instável), o eixo do motor, e conseqüentemente a massa desbalanceada, gira de um ângulo θ em relação à horizontal (origem do movimento de rotação do eixo do motor elétrico).

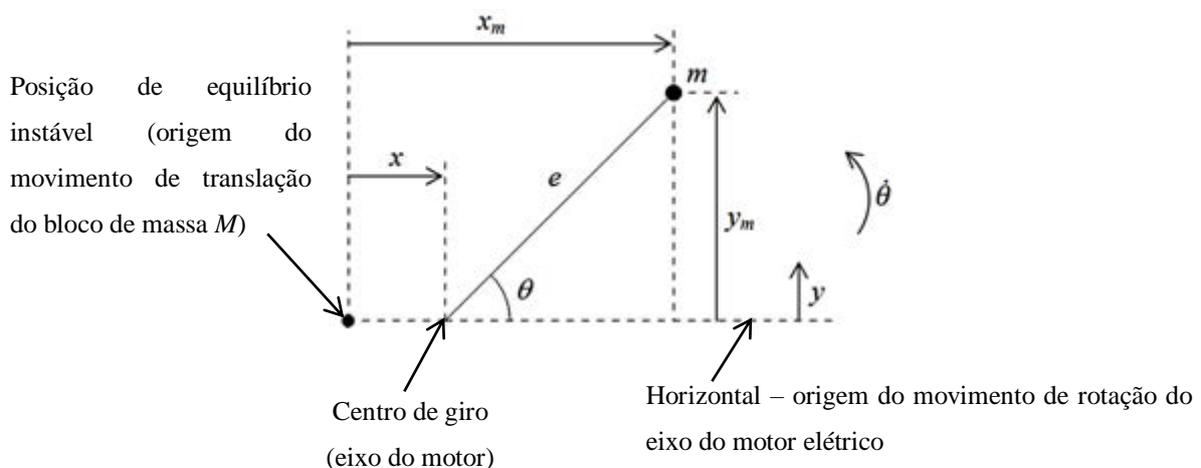


Figura 3.2 – Posição da massa desbalanceada – sistema NLGS não ideal

Fonte: Próprio autor

Representa-se por x_m a posição da massa desbalanceada em relação à posição de equilíbrio instável do sistema (origem do movimento de translação do bloco de massa M) e por y_m a posição da massa desbalanceada em relação à horizontal (origem do movimento de rotação do eixo do motor elétrico).

A partir Figura 3.2 podem ser escritas as seguintes equações de posição e velocidade da massa desbalanceada m em função do deslocamento x , da velocidade \dot{x} do bloco de massa M , do deslocamento angular θ e da velocidade angular $\dot{\theta}$ do eixo do motor:

$$x_m = x + e \cos \theta \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_m = \dot{x} - e\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.6)$$

$$y_m = e \sin \theta \quad (3.7)$$

$$\dot{y}_m = e\dot{\theta} \cos \theta \quad (3.8)$$

Conhecendo a equação de velocidade da massa desbalanceada pode-se escrever a equação da energia cinética T do sistema NLGS não ideal da seguinte forma:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{x}^2}_{\text{Bloco de massa } M} + \underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2)}_{\text{Massa desbalanceada } m} + \underbrace{\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2}_{\text{Eixo do motor elétrico}} \quad (3.9)$$

Substituindo (3.6) e (3.8) em (3.9), obtém-se:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} - e\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (e\dot{\theta} \cos \theta)^2] + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (3.10)$$

O passo seguinte é escrever a equação da energia potencial V do sistema NLGS não ideal. Para tanto, é preciso determinar a energia potencial elástica da mola do mecanismo de barras e a energia potencial gravitacional da massa desbalanceada.

A energia potencial elástica depende da deformação da mola em função do deslocamento x do bloco de massa M .

Para calcular a deformação da mola em função do deslocamento x do bloco de massa M é necessário determinar o comprimento da mola em função do deslocamento x do bloco.

Conforme mencionado anteriormente, na posição de equilíbrio instável do sistema a mola possui uma deformação inicial d_0 . Portanto, o comprimento da mola relaxada (sem carga) (L_i) é:

$$L_i = 2L - d_0 \quad (3.11)$$

A Figura 3.3 representa a configuração do mecanismo simulando um deslocamento x do bloco de massa M em relação à posição de equilíbrio instável do sistema. Como o bloco está ligado à articulação das barras, esse deslocamento x é transferido para a articulação, gerando uma alteração no comprimento da mola, devido à rotação das barras.

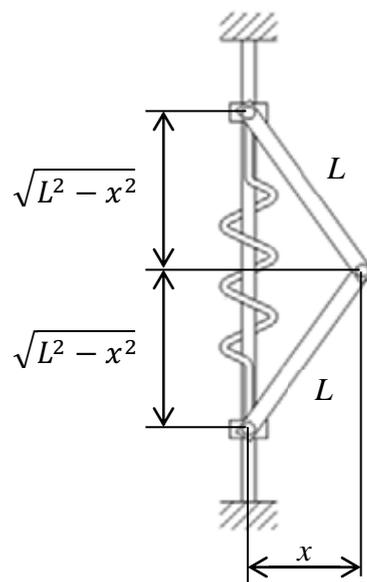


Figura 3.3 – Detalhe do mecanismo para o cálculo do comprimento da mola em função do deslocamento do bloco de massa M

Fonte: Próprio autor

Analisando a Figura 3.3 pode-se concluir que o comprimento da mola em função do deslocamento x do bloco de massa M (L_f) é:

$$L_f = 2\sqrt{L^2 - x^2} \quad (3.12)$$

Assim, a deformação da mola δ_{mola} em função do deslocamento x do bloco de massa M é:

$$\delta_{\text{mola}} = L_f - L_i = 2\sqrt{L^2 - x^2} - (2L - d_0) \quad (3.13)$$

A energia potencial elástica da mola V_e é escrita da seguinte forma:

$$V_e = \frac{1}{2} k \delta_{\text{mola}}^2 \quad (3.14)$$

Substituindo (3.13) em (3.14), resulta em:

$$V_e = \frac{1}{2}k[2\sqrt{L^2 - x^2} - (2L - d_0)]^2 \quad (3.15)$$

O próximo passo é escrever a equação da energia potencial gravitacional da massa desbalanceada m . Para isso utilizamos a Figura 3.4, a qual define o plano de referência adotado para escrever a equação da energia potencial gravitacional da massa desbalanceada m .

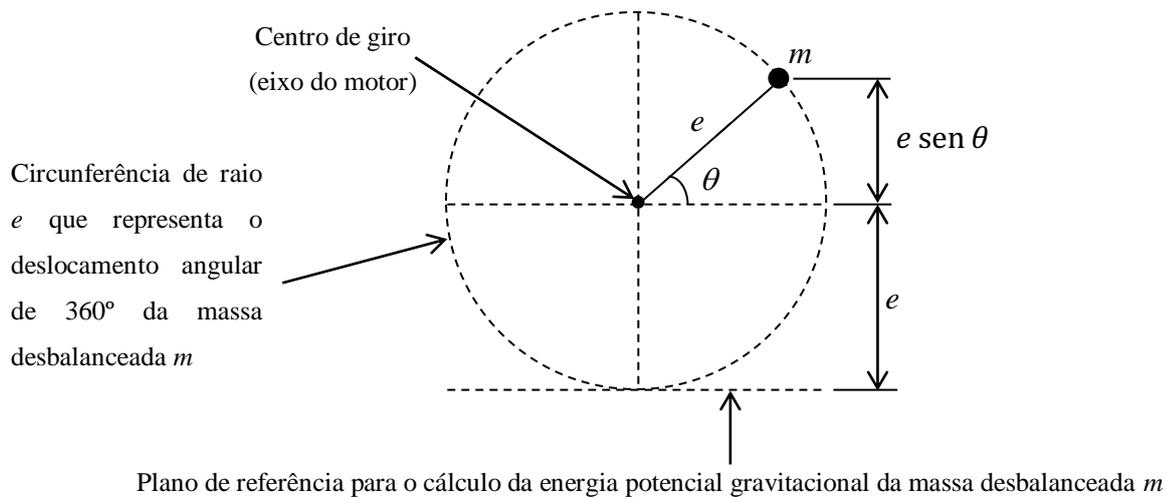


Figura 3.4 – Plano de referência para o cálculo da energia potencial gravitacional da massa desbalanceada – sistema NLGS não ideal

Fonte: Próprio autor

A partir da Figura 3.4 a equação da energia potencial gravitacional da massa desbalanceada V_g é escrita da seguinte forma:

$$V_g = mge + mge \sen \theta = mge(1 + \sen \theta) \quad (3.16)$$

Na qual:

g é a aceleração da gravidade = $9,81\text{m/s}^2$.

A energia potencial V do sistema NLGS resulta da soma da energia potencial elástica da mola V_e e da energia potencial gravitacional da massa desbalanceada V_g e é definida pela seguinte equação:

$$V = \frac{1}{2}k[2\sqrt{L^2 - x^2} - (2L - d_0)]^2 + mge(1 + \sen \theta) \quad (3.17)$$

A partir das equações da energia cinética T e da energia potencial V do sistema NLGS não ideal pode-se aplicar a equação de Lagrange para escrever as equações de movimento do sistema.

Como esse sistema apresenta dois graus de liberdade são necessárias duas equações de movimento para descrever o comportamento dinâmico do sistema.

Para o grau de liberdade de translação (x) a equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_x \quad (3.18)$$

As derivadas parciais (termos da equação de Lagrange) das equações da energia cinética T (3.10) e potencial V (3.17) em relação à coordenada generalizada x (grau de liberdade de translação) são escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} - m\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (M + m)\ddot{x} - m(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2k(2L-d_0)}{\sqrt{L^2-x^2}} x - 4kx \quad (3.22)$$

A força não-conservativa, para o grau de liberdade de translação, é a força exercida pelo amortecedor F_v , a qual é escrita da seguinte forma:

$$F_v = -c\dot{x} \quad (3.23)$$

O deslocamento r_{F_v} na direção da força do amortecedor é:

$$r_{F_v} = x \quad (3.24)$$

O deslocamento virtual δr_{F_v} na direção da força do amortecedor é:

$$\delta r_{F_v} = \delta x \quad (3.25)$$

O trabalho virtual δW_x realizado pela força do amortecedor é dado por:

$$\delta W_x = F_v \delta r_{F_v} = -c\dot{x} \delta x \quad (3.26)$$

Comparando as equações (3.26) e (3.4) conclui-se que:

$$Q_x = -c\dot{x} \quad (3.27)$$

Substituindo as Equações (3.19) à (3.22) e (3.27) em (3.18) é possível escrever a equação de movimento do sistema NLGS não ideal para o grau de liberdade de translação da seguinte forma:

$$\ddot{x} = -\frac{c}{(M+m)}\dot{x} - \frac{2k}{(M+m)}\frac{(2L-d_0)}{\sqrt{L^2-x^2}}x + \frac{4k}{(M+m)}x + \frac{me}{(M+m)}\left(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta\right) \quad (3.28)$$

Para o grau de liberdade de rotação (θ) a equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta \quad (3.29)$$

As derivadas parciais (termos da equação de Lagrange) das equações da energia cinética T (3.10) e potencial V (3.17) em relação à coordenada generalizada θ (grau de liberdade de rotação) são escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -mex\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}(me^2 + J) \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = me[-\ddot{x} \sin \theta - \dot{x}\dot{\theta} \cos \theta] + \ddot{\theta}(me^2 + J) \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -mex\dot{\theta} \cos \theta \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mge \cos \theta \quad (3.33)$$

A força não-conservativa, para o grau de liberdade de rotação, é o torque líquido do motor elétrico de corrente contínua, definido pela Equação (2.1):

$$Q_\theta = a - b\dot{\theta} \quad (3.34)$$

Substituindo as Equações (3.30) à (3.33) e (3.34) em (3.29) é possível escrever a equação de movimento do sistema NLGS não ideal para o grau de liberdade de rotação da seguinte forma:

$$\ddot{\theta} = \frac{a}{(me^2+J)} - \frac{b}{(me^2+J)} \dot{\theta} + \frac{me}{(me^2+J)} (\ddot{x} \sin \theta - g \cos \theta) \quad (3.35)$$

Para simplificar as expressões faz-se:

$$I_{sist} = me^2 + J \quad (3.36)$$

Substituindo (3.36) em (3.35) resulta em:

$$\ddot{\theta} = \frac{a}{I_{sist}} - \frac{b}{I_{sist}} \dot{\theta} + \frac{me}{I_{sist}} (\ddot{x} \sin \theta - g \cos \theta) \quad (3.37)$$

Substituindo (3.37) em (3.28) obtém-se a equação da aceleração \ddot{x} sem a presença da varável $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{x} = \frac{-\frac{c}{(M+m)} \dot{x} - \frac{2k}{(M+m)} \frac{(2L-d_0)}{\sqrt{L^2-x^2}} x + \frac{4k}{(M+m)} x + z}{1 - \left[\frac{m^2 e^2}{I_{sist}(M+m)} \right] \sin^2 \theta} \quad (3.38)$$

Na qual:

$$z = \frac{me}{(M+m)} \left\{ \dot{\theta}^2 \cos \theta + \sin \theta \left[\frac{a}{I_{sist}} - \frac{b}{I_{sist}} \dot{\theta} - \frac{me}{I_{sist}} (g \cos \theta) \right] \right\} \quad (3.39)$$

No capítulo 4 será apresentada a metodologia utilizada para obter os resultados do trabalho, porém, faz-se necessário uma antecipação para facilitar o entendimento da parte final da modelagem matemática.

Depois de deduzida a equação de movimento será feita a integração numérica para obter a resposta do sistema (deslocamento, velocidade e aceleração). Para realizar a integração numérica é necessário reduzir a ordem das equações diferenciais.

As equações diferenciais obtidas acima pelo método de Lagrange são de segunda ordem. É necessário transformar essas equações em equações diferenciais de primeira ordem para possibilitar a integração numérica.

Para transformar as equações de segunda ordem em equações de primeira ordem escrevem-se as equações de movimento na forma de espaço de estados, conforme mostrado a seguir:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$y_1 = x$$

$$y_2 = \dot{x}$$

$$y_3 = \theta$$

$$y_4 = \dot{\theta}$$

(3.40)

$$\dot{y}_1 = \dot{x} = y_2$$

$$\dot{y}_3 = \dot{\theta} = y_4$$

$$\dot{y}_2 = \ddot{x}$$

$$\dot{y}_4 = \ddot{\theta}$$

Substituindo (3.40) em (3.38) e (3.37) obtém-se:

$$\dot{y}_2 = \frac{-\frac{c}{(M+m)}y_2 - \frac{2k}{(M+m)}\frac{(2L-d_0)}{\sqrt{L^2-y_1^2}}y_1 + \frac{4k}{(M+m)}y_1 + z}{1 - \left[\frac{m^2 e^2}{I_{sist}(M+m)} \right] \text{sen}^2 y_3} \quad (3.41)$$

$$\dot{y}_4 = \frac{a}{I_{sist}} - \frac{b}{I_{sist}}y_4 + \frac{me}{I_{sist}}(\dot{y}_2 \text{sen } y_3 - g \cos y_3) \quad (3.42)$$

Assim, na forma de espaço de estados tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} y_2 \\ \frac{-\frac{c}{(M+m)}y_2 - \frac{2k}{(M+m)}\frac{(2L-d_0)}{\sqrt{L^2-y_1^2}}y_1 + \frac{4k}{(M+m)}y_1 + z}{1 - \left[\frac{m^2 e^2}{I_{sist}(M+m)} \right] \text{sen}^2 y_3} \\ y_4 \\ \frac{a}{I_{sist}} - \frac{b}{I_{sist}}y_4 + \frac{me}{I_{sist}}(\dot{y}_2 \text{sen } y_3 - g \cos y_3) \end{array} \right\} \quad (3.43)$$

Com esse sistema de equações é possível realizar a integração numérica e obter a resposta do sistema (deslocamento, velocidade e aceleração).

Analisando a equação da aceleração \ddot{x} (3.28) percebe-se a presença das variáveis θ , $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$, que estão relacionadas com o grau de liberdade de rotação do eixo do motor elétrico. Além disso, analisando a equação da aceleração angular $\ddot{\theta}$ (3.37) nota-se a presença da variável \ddot{x} . Isso significa que existe um acoplamento entre as equações de movimento do sistema e da fonte de excitação, ou seja, a resposta do grau de liberdade de translação do sistema influencia na resposta do grau de liberdade da fonte de excitação e vice-versa. Abaixo repetimos as equações (3.28) e (3.37) apenas para deixar claro o que foi explicado nesse parágrafo:

$$\ddot{x} = -\frac{c}{(M+m)}\dot{x} - \frac{2k}{(M+m)}\frac{(2L-d_0)}{\sqrt{L^2-x^2}}x + \frac{4k}{(M+m)}x + \frac{me}{(M+m)}(\dot{\theta}^2 \cos\theta + \ddot{\theta} \sin\theta)$$

Acoplamento entre as equações dos dois graus de liberdade do sistema
NLGS não ideal

$$\ddot{\theta} = \frac{a}{I_{sist}} - \frac{b}{I_{sist}}\dot{\theta} + \frac{me}{I_{sist}}(\ddot{x} \sin\theta - g \cos\theta)$$

Acoplamento entre as equações dos dois graus de liberdade do sistema
NLGS não ideal

A Equação (3.22) contém os termos da equação de movimento que representam matematicamente a rigidez equivalente do sistema K_G :

$$K_G = \frac{2k(2L-d_0)}{\sqrt{L^2-x^2}} - 4k \quad (3.44)$$

Nota-se que a rigidez equivalente do sistema é uma função não-linear do deslocamento devido à geometria do mecanismo de duas barras, embora a mola tenha rigidez linear. Por isso, diz-se que o sistema tem rigidez com não-linearidade geométrica (identificada no texto por K_G). O sistema NLGS não possui uma rigidez equivalente fixa, pois a mesma depende do deslocamento x , ou seja, a rigidez equivalente do sistema NLGS aumenta ou diminui em função do deslocamento x .

O sistema NLGS possui uma limitação física: o seu deslocamento não pode exceder ao comprimento das barras.

3.2 SISTEMA NLGS IDEAL

O sistema NLGS ideal (Figura 3.5) é semelhante ao sistema NLGS não ideal, porém, a excitação no sistema ideal é gerada por uma massa desbalanceada m que gira com velocidade angular constante ω e tem excentricidade e em relação ao centro de giro. A Figura 3.5 mostra o sistema NLGS ideal em posição de equilíbrio estável.

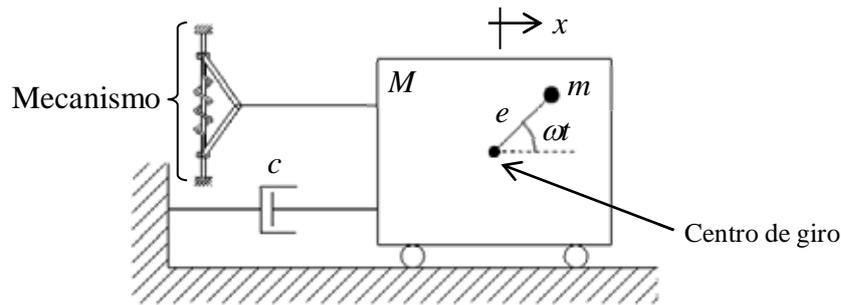


Figura 3.5 – Sistema NLGS ideal

Fonte: Próprio autor

A variável t presente na Figura 3.5 representa o tempo.

A sequência para deduzir a equação de movimento é a mesma empregada para o sistema NLGS não ideal. Por isso, a dedução para o sistema NLGS ideal será feita numa quantidade menor de passos para evitar que o texto fique muito repetitivo.

As equações da energia cinética T e da energia potencial V do sistema NLGS ideal são escritas da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} - e\omega \sin \omega t)^2 + (e\omega \cos \omega t)^2] \quad (3.45)$$

$$V = \frac{1}{2}k \left[2\sqrt{L^2 - x^2} - (2L - d_0) \right]^2 + mge(1 + \sin \omega t) \quad (3.46)$$

Como o sistema apresenta apenas um grau de liberdade é necessária somente uma equação de movimento para descrever o comportamento dinâmico do sistema.

A equação de Lagrange para esse sistema é escrita da mesma forma que a Equação (3.18), a qual já foi deduzida para o sistema NLGS não ideal.

As derivadas parciais (termos da equação de Lagrange) das equações da energia cinética T (3.45) e da energia potencial V (3.46) em relação à coordenada generalizada x são escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} - m e \omega \operatorname{sen} \omega t \quad (3.47)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (M + m)\ddot{x} - m e \omega^2 \cos \omega t \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2k(2L-d_0)}{\sqrt{L^2-x^2}} x - 4kx \quad (3.50)$$

$$Q_x = -c\dot{x} \quad (3.51)$$

Substituindo (3.47) à (3.51) em (3.18) é possível escrever a equação de movimento do sistema da seguinte forma:

$$\ddot{x} = -\frac{c}{(M+m)} \dot{x} - \frac{2k}{(M+m)} \frac{(2L-d_0)}{\sqrt{L^2-x^2}} x + \frac{4k}{(M+m)} x + \frac{me\omega^2}{(M+m)} \cos \omega t \quad (3.52)$$

Na forma de espaço de estados tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \left\{ -\frac{c}{(M+m)} y_2 - \frac{2k}{(M+m)} \frac{(2L-d_0)}{\sqrt{L^2-x^2}} y_1 + \frac{4k}{(M+m)} y_1 + \frac{me\omega^2}{(M+m)} \cos \omega t \right\} \quad (3.53)$$

3.3 SISTEMA COM RIGIDEZ NÃO-LINEAR

O sistema com rigidez não-linear consiste em um bloco de massa M apoiado numa base fixa que oscila horizontalmente (sem atrito) ligado a um amortecedor viscoso linear (coeficiente de amortecimento c) e a uma rigidez não-linear resultante da associação de uma parcela linear k_L negativa e de uma parcela não-linear k_{NL} cúbica positiva. A fonte de excitação é um motor elétrico de corrente contínua com rotor desbalanceado (rotor com momento de inércia de massa J que gira com velocidade angular $\dot{\theta}$). O desbalanceamento do rotor é representado por uma massa m com excentricidade e em relação ao centro de giro (eixo do motor). O sistema não-linear é mostrado na Figura 3.6.

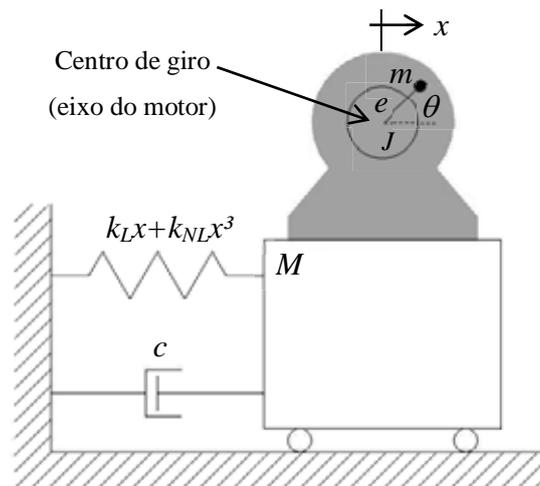


Figura 3.6 – Sistema com rigidez não-linear

Fonte: Próprio autor

A sequência para deduzir a equação de movimento é a mesma empregada para os sistemas anteriores. Por isso, a dedução será feita numa quantidade menor de passos para evitar que o texto fique muito repetitivo.

As equações da energia cinética T e da energia potencial V do sistema com rigidez não-linear são escritas da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m [(\dot{x} - e \dot{\theta} \sin \theta)^2 + (e \dot{\theta} \cos \theta)^2] + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (3.54)$$

$$V_e = \int_0^x (k_L x + k_{NL} x^3) dx = \frac{1}{2} k_L x^2 + \frac{1}{4} k_{NL} x^4 \quad (3.55)$$

$$V = \frac{1}{2} k_L x^2 + \frac{1}{4} k_{NL} x^4 + m g e (1 + \sin \theta) \quad (3.56)$$

Como esse sistema apresenta dois graus de liberdade são necessárias duas equações de movimento para descrever o comportamento dinâmico do sistema.

Para o grau de liberdade de translação (x) a equação de Lagrange é escrita da mesma forma que a Equação (3.18), a qual já foi deduzida para o sistema NLGS não ideal.

As derivadas parciais (termos da equação de Lagrange) das equações da energia cinética T (3.54) e potencial V (3.56) em relação à coordenada generalizada x (grau de liberdade de translação) são escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} - m e \dot{\theta} \sin \theta \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (M + m)\ddot{x} - m e (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k_L x + k_{NL} x^3 \quad (3.60)$$

$$Q_x = -c \dot{x} \quad (3.61)$$

Substituindo (3.57) à (3.61) em (3.18) é possível escrever a equação de movimento do sistema para o grau de liberdade de translação da seguinte forma:

$$\ddot{x} = \frac{-\frac{c}{(M+m)}\dot{x} - \frac{k_L}{(M+m)}x - \frac{k_{NL}}{(M+m)}x^3 + z}{1 - \left[\frac{m^2 e^2}{I_{sist}(M+m)} \right] \sin^2 \theta} \quad (3.62)$$

Para o grau de liberdade de rotação (θ) a equação de movimento do sistema não-linear é representada por (3.37), a qual já foi deduzida para o sistema NLGS não ideal.

Na forma de espaço de estados tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} y_2 \\ \frac{-\frac{c}{(M+m)}y_2 - \frac{k_L}{(M+m)}y_1 - \frac{k_{NL}}{(M+m)}y_1^3 + z}{1 - \left[\frac{m^2 e^2}{I_{sist}(M+m)} \right] \sin^2 y_3} \\ y_4 \\ \frac{a}{I_{sist}} - \frac{b}{I_{sist}}y_4 + \frac{me}{I_{sist}}(\dot{y}_2 \sin y_3 - g \cos y_3) \end{array} \right\} \quad (3.63)$$

3.4 SISTEMA NÃO IDEAL

Simplificando o sistema não-linear, substitui-se a rigidez não-linear por uma rigidez linear, porém, mantém-se a fonte não ideal de energia, resultando no sistema identificado como não ideal.

O sistema não ideal é ilustrado na Figura 3.7 por um bloco de massa M apoiado numa base fixa que oscila horizontalmente (sem atrito) ligado a um amortecedor viscoso linear (coeficiente de amortecimento c) e a uma rigidez linear k . A fonte de excitação é um motor elétrico de corrente contínua com rotor desbalanceado (rotor com momento de inércia de massa J que gira com velocidade angular $\dot{\theta}$). O desbalanceamento do rotor é representado por uma massa m com excentricidade e em relação ao centro de giro (eixo do motor).

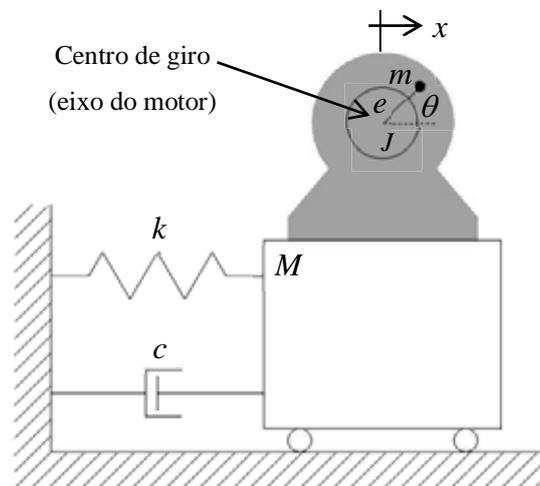


Figura 3.7 – Sistema não ideal

Fonte: Próprio autor

As equações da energia cinética T e da energia potencial V do sistema não ideal são escritas da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} - e\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (e\dot{\theta} \cos \theta)^2] + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (3.64)$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + mge(1 + \sin \theta) \quad (3.65)$$

Como esse sistema apresenta dois graus de liberdade são necessárias duas equações de movimento para descrever o comportamento dinâmico do sistema.

Para o grau de liberdade de translação (x) a equação de Lagrange é escrita da mesma forma que a Equação (3.18), a qual já foi deduzida para o sistema NLGS não ideal.

As derivadas parciais (termos da equação de Lagrange) das equações da energia cinética T (3.64) e potencial V (3.65) em relação à coordenada generalizada x (grau de liberdade de translação) são escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} - m e \dot{\theta} \sin \theta \quad (3.66)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (M + m)\ddot{x} - m e (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kx \quad (3.69)$$

$$Q_x = -c\dot{x} \quad (3.70)$$

Substituindo (3.66) à (3.70) em (3.18) é possível escrever a equação de movimento do sistema para o grau de liberdade de translação da seguinte forma:

$$\ddot{x} = \frac{-\frac{c}{(M+m)}\dot{x} - \frac{k}{(M+m)}x + z}{1 - \left[\frac{m^2 e^2}{I_{sist}(M+m)} \right] \sin^2 \theta} \quad (3.71)$$

Para o grau de liberdade de rotação (θ) a equação de movimento do sistema não ideal é representada por (3.37), a qual já foi deduzida para o sistema NLGS não ideal.

Na forma de espaço de estados tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{-\frac{c}{(M+m)}y_2 - \frac{k}{(M+m)}y_1 + Z}{1 - \left[\frac{m^2 e^2}{I_{sist}(M+m)} \right] \text{sen}^2 y_3} \\ y_4 \\ \frac{a}{I_{sist}} - \frac{b}{I_{sist}} y_4 + \frac{me}{I_{sist}} (\dot{y}_2 \text{sen } y_3 - g \cos y_3) \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

A Tabela 3.1 resume as equações de movimento que foram deduzidas no capítulo 3 para cada um dos sistemas estudados.

Tabela 3.1 – Resumo das equações de movimento dos sistemas estudados

Sistema	Equação de movimento	Número da equação no texto
NLGS não ideal	$\ddot{x} = \frac{-\frac{c}{(M+m)}\dot{x} - \frac{2k}{(M+m)}\frac{(2L-d_0)}{\sqrt{L^2-x^2}}x + \frac{4k}{(M+m)}x + z}{1 - \left[\frac{m^2 e^2}{I_{sist}(M+m)} \right] \text{sen}^2 \theta}$	(3.38)
	$\ddot{\theta} = \frac{a}{I_{sist}} - \frac{b}{I_{sist}}\dot{\theta} + \frac{me}{I_{sist}}(\ddot{x} \text{sen } \theta - g \cos \theta)$	(3.37)
NLGS ideal	$\ddot{x} = -\frac{c}{(M+m)}\dot{x} - \frac{2k}{(M+m)}\frac{(2L-d_0)}{\sqrt{L^2-x^2}}x + \frac{4k}{(M+m)}x + \frac{me\omega^2}{(M+m)}\cos \omega t$	(3.52)
Rigidez não-linear	$\ddot{x} = \frac{-\frac{c}{(M+m)}\dot{x} - \frac{k_L}{(M+m)}x - \frac{k_{NL}}{(M+m)}x^3 + z}{1 - \left[\frac{m^2 e^2}{I_{sist}(M+m)} \right] \text{sen}^2 \theta}$	(3.62)
	$\ddot{\theta} = \frac{a}{I_{sist}} - \frac{b}{I_{sist}}\dot{\theta} + \frac{me}{I_{sist}}(\ddot{x} \text{sen } \theta - g \cos \theta)$	(3.37)
Não ideal	$\ddot{x} = \frac{-\frac{c}{(M+m)}\dot{x} - \frac{k}{(M+m)}x + z}{1 - \left[\frac{m^2 e^2}{I_{sist}(M+m)} \right] \text{sen}^2 \theta}$	(3.71)
	$\ddot{\theta} = \frac{a}{I_{sist}} - \frac{b}{I_{sist}}\dot{\theta} + \frac{me}{I_{sist}}(\ddot{x} \text{sen } \theta - g \cos \theta)$	(3.37)

O capítulo 4 apresenta a metodologia empregada para obter os resultados do trabalho.

4 METODOLOGIA

Depois de deduzida a equação de movimento é necessário resolvê-la para obter-se a resposta dinâmica do sistema (deslocamento, velocidade e aceleração). No presente trabalho as equações de movimento (equações diferenciais) são resolvidas numericamente. Com os resultados da integração numérica é possível gerar curvas que auxiliam a entender o comportamento do sistema. Essas curvas (resultados) são explicadas em detalhes em Thompson e Stewart (2002) e também em Kovacic e Brennan (2011). A seguir é feita uma explicação para deixar claro como as curvas foram construídas nesse trabalho e também o entendimento do próprio autor sobre cada uma delas.

➤ Resposta em frequência

É a curva da amplitude de deslocamento em regime permanente em função da frequência. O valor da amplitude de deslocamento é usado em módulo e representa o máximo deslocamento do sistema em regime permanente. Para cada valor de frequência escolhido calcula-se numericamente a amplitude de deslocamento do sistema e plota-se um ponto na curva. Os vários pontos de amplitude de deslocamento do sistema em função dos valores escolhidos de frequência geram a curva de resposta em frequência.

➤ Histórico do deslocamento

É a curva do deslocamento em função do tempo de integração. Utilizam-se dois históricos distintos para analisar o comportamento dinâmico dos sistemas:

- a) Regime transiente + permanente é o histórico do deslocamento desde o tempo de integração inicial (zero) até o tempo final de integração;
- b) Zoom no regime permanente é o histórico do deslocamento de apenas um pequeno período de tempo do regime permanente para permitir a visualização mais detalhada do comportamento do sistema.

➤ Histórico da frequência do motor

É a curva da frequência do eixo do motor em função do tempo de integração em regime permanente (estacionário). Nesse trabalho utiliza-se apenas um pequeno período de tempo do regime permanente para permitir a visualização mais detalhada do comportamento da frequência do motor elétrico.

➤ Plano de fase

É a curva do deslocamento em função da velocidade (derivada do deslocamento). Nesse trabalho o plano de fase é construído apenas para o regime permanente.

➤ Seção de Poincaré

São pontos plotados sobre o plano de fase, os quais foram obtidos por uma amostragem realizada em intervalos de tempo múltiplos inteiros do período da excitação (chamados de pontos estroboscópicos) nos vetores de deslocamento e velocidade obtidos numericamente, ou seja, em intervalos múltiplos inteiros do período da excitação faz-se a leitura do deslocamento e da velocidade e plota-se o ponto com essas duas coordenadas no plano de fase. Se o regime de movimento é periódico com período um, os pontos da seção de Poincaré coincidem sempre no mesmo ponto e então visualiza-se apenas um ponto sobre o plano de fase. Se o regime de movimento é caótico os pontos da seção de Poincaré não coincidem, pois existem várias frequências diferentes no movimento do sistema e então observam-se vários pontos sobre o plano de fase.

➤ FFT (Fast Fourier Transform)

É a curva do espectro de frequências construída utilizando-se a função FFT do software Matlab®.

➤ Diagrama de bifurcação

Segundo Kovacic e Brennan (2011) uma mudança qualitativa na topologia do retrato de fase que ocorre durante a variação quase estática de um parâmetro de controle pode ser ilustrada na forma de um diagrama de bifurcação, o qual mostra os possíveis pontos fixos ou órbitas periódicas de um sistema em função do parâmetro de controle próximo do ponto de bifurcação. Nesse trabalho não será feita a classificação das bifurcações. Além disso, os diagramas de bifurcação apresentados no capítulo 5 não são completos, pois foram construídos utilizando apenas uma condição inicial.

A seguir é dada a justificativa para a escolha dos parâmetros de integração.

Os integradores utilizados pelo software Matlab® para resolver equações diferenciais de primeira ordem são mostrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Integradores do software Matlab® para resolver equações diferenciais de primeira ordem

Fonte: Ajuda do software Matlab®

Integrador	Grau de precisão	Quando utilizar
ode45	Médio	Na maioria dos problemas. Deve ser o primeiro integrador a ser testado.
ode23	Baixo	Em problemas com tolerância grosseira para erros.
ode113	Alto	Em problemas com tolerância rigorosa para erros ou para resolver problemas que necessitam de recurso computacional intenso.

Com base na Tabela 4.1 optou-se por utilizar o integrador ode45 do software Matlab® para realizar a integração numérica, o qual emprega o método de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem com passo variável (Dormand-Prince), por entender-se que uma precisão média já é suficiente para obter os resultados desse trabalho.

O tempo total de integração é de 500 segundos. Através das simulações numéricas realizadas percebe-se que o sistema já se encontra em regime permanente após 500 segundos de simulação, não sendo necessário, portanto, um tempo maior de integração.

O vetor utilizado para fazer o armazenamento dos dados possui 200.000 pontos. Como o tempo total de integração é de 500 segundos, resulta que o incremento de tempo (passo de integração) utilizado é de 0,0025 segundos. O objetivo foi obter um passo de integração pequeno para garantir uma boa precisão na resposta obtida numericamente. Embora o passo de integração seja pequeno, o tempo computacional gasto para realizar a integração numérica é baixo. Dessa forma, com esse passo de integração foi possível juntar a boa precisão na resposta com o baixo tempo computacional gasto.

O capítulo 5 traz os resultados obtidos com a integração numérica da equação de movimento dos sistemas estudados.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Tabela 5.1 mostra o valor dos parâmetros que foram mantidos constantes na integração numérica, em função de cada sistema dinâmico estudado. O símbolo “-” utilizado na Tabela 5.1 indica que o parâmetro não existe para o respectivo sistema.

O primeiro sistema estudado durante o desenvolvimento do trabalho foi o sistema com rigidez não-linear. Foi necessário realizar várias simulações numéricas para encontrar os parâmetros M , m , $m.e$, c , J e a adequados para que o sistema com rigidez não-linear apresentasse o comportamento ilustrado na Figura 5.37, na qual é possível perceber que a máxima amplitude de deslocamento ocorre quando a frequência da excitação coincide com a frequência natural do sistema, fenômeno conhecido como ressonância. Em outras simulações numéricas realizadas, antes de encontrar os parâmetros presentes na Tabela 5.1, o sistema com rigidez não-linear não apresentou claramente o fenômeno da ressonância dentro da faixa de frequência analisada no trabalho. Depois que os parâmetros adequados foram encontrados (Tabela 5.1), os demais sistemas foram estudados e simulados numericamente também. Os parâmetros L e d_0 do sistema NLGS também foram escolhidos após a realização de várias simulações numéricas, de forma que houvesse indicação de regime de movimento caótico dentro da faixa de frequência analisada. O comportamento dos sistemas estudados será analisado em detalhes ao longo do capítulo 5, porém, fez-se necessária essa breve antecipação para justificar a escolha dos parâmetros da Tabela 5.1.

Além do que foi explicado no parágrafo anterior, os parâmetros da Tabela 5.1 foram escolhidos de maneira que a resposta de cada sistema apresentasse amplitude de deslocamento e frequência natural da mesma ordem de grandeza, para que fosse possível a comparação entre o comportamento dinâmico dos mesmos.

A escolha dos parâmetros de rigidez (k , k_L e k_{NL}) é justificada ao longo do capítulo 5, na medida em que os resultados das integrações numéricas são apresentados para cada um dos modelos estudados.

Em todas as integrações numéricas realizadas nesse trabalho as condições iniciais de deslocamento e velocidade são nulas.

Tabela 5.1 – Parâmetros que foram mantidos constantes na integração numérica

Parâmetro [unidade]	Valor do parâmetro			
	Sistema NLGS não ideal	Sistema NLGS ideal	Sistema com rigidez não-linear	Sistema não ideal
M [kg]	5	5	5	5
m [kg]	1	1	1	1
$m.e$ [kg.m]	1	1	1	1
k [N/m]	533	533	-	533
k_L [N/m]	-	-	-40	-
k_{NL} [N/m]	-	-	400	-
c [N.s/m]	5	5	5	5
J [kg.m ²]	0,1	-	0,1	0,1
a [N.m]	80	-	80	80
g [m/s ²]	9,81	9,81	9,81	9,81
L [m]	1,4	1,4	-	-
d_0 [m]	0,05	0,05	-	-

5.1 SISTEMA NLGS NÃO IDEAL

A curva da energia potencial elástica em função do deslocamento (Equação 3.15), de acordo com os parâmetros da Tabela 5.1, é mostrada na Figura 5.1.

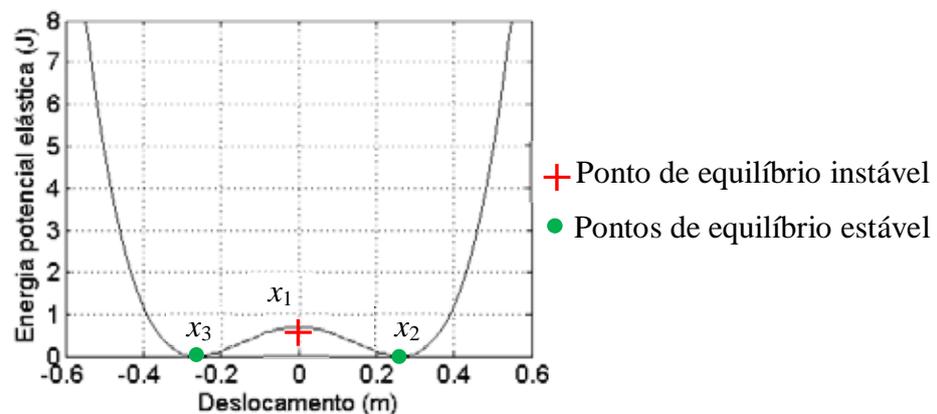


Figura 5.1 – Curva da energia potencial elástica em função do deslocamento e os pontos de equilíbrio do sistema NLGS não ideal

Para classificar a estabilidade dos pontos de equilíbrio Timoshenko e Gere (1961) utilizam a Figura 5.2, que representa uma esfera apoiada sobre uma superfície côncava em

(a); convexa em (b) e plana em (c). Ao impor um deslocamento na esfera na condição (a) a mesma passa a oscilar, porém, permanece na vizinhança do seu ponto de equilíbrio, caracterizando o equilíbrio estável. Já na condição (b) ao impor um deslocamento na esfera a tendência é que a mesma se afaste da sua posição de equilíbrio, caracterizando o equilíbrio instável. Na condição (c) o equilíbrio é chamado de neutro ou indiferente.

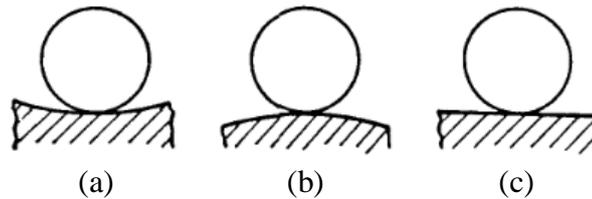


Figura 5.2 – Estados de equilíbrio para um corpo rígido
(a) equilíbrio estável; (b) equilíbrio instável; (c) equilíbrio neutro

Fonte: Timoshenko e Gere (1961)

Com base nos comentários de Timoshenko e Gere (1961) citados no parágrafo anterior e analisando a Figura 5.1, conclui-se que quando o deslocamento é nulo o sistema está no seu ponto de equilíbrio instável (ponto x_1 na cor vermelha). Os pontos de equilíbrio estável são representados por x_2 e x_3 na Figura 5.1 (pontos na cor verde). Devido a esse comportamento diz-se que o sistema apresenta energia potencial elástica com dois poços de potencial.

Os pontos de equilíbrio do sistema são calculados igualando-se a derivada da energia potencial elástica, calculada pela Equação (3.22), a zero.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \pm \sqrt{L^2 - \left[\frac{(2L-d_0)}{2} \right]^2} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Substituindo os valores de L e d_0 da Tabela 5.1 na Equação (5.1), obtém-se:

$$x = \pm 0,263.$$

Assim, os pontos de equilíbrio do sistema são:

$x_1 = 0 \rightarrow$ ponto de equilíbrio instável;

$x_2 = +0,263 \rightarrow$ ponto de equilíbrio estável;

$x_3 = -0,263 \rightarrow$ ponto de equilíbrio estável;

No ponto de equilíbrio instável a energia potencial elástica é positiva devido à deformação inicial da mola d_0 (nessa condição a mola está tracionada), ou seja, devido à deformação inicial da mola a energia potencial elástica não é nula quando o deslocamento é nulo (posição de equilíbrio instável).

A Equação (3.22) é a derivada da energia potencial em função do deslocamento, ou seja, a força. Substituindo na Equação (3.22) os parâmetros da Tabela 5.1 resulta na seguinte curva da força em função do deslocamento (Figura 5.3):

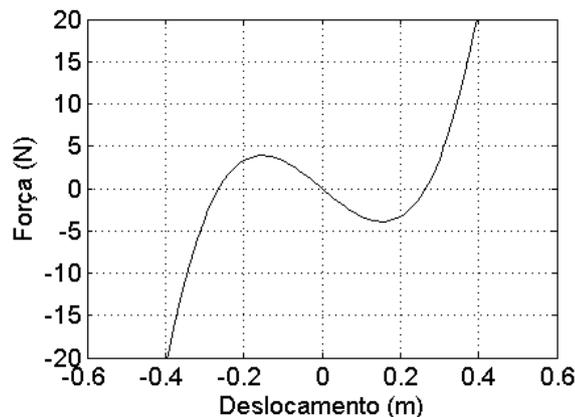


Figura 5.3 – Curva da força em função do deslocamento do sistema NLGS não ideal

Para compreender o comportamento dinâmico do sistema inicialmente analisa-se a curva de resposta em frequência (Figura 5.4). Foram utilizados dois parâmetros distintos para obter a curva de amplitude de deslocamento desse sistema:

- a) Constante de frequência do motor f_0 , definida pela Equação (2.3);
- b) Valor médio da velocidade angular do motor em regime permanente convertido para a unidade Hz (média da frequência do motor).

Na Figura 5.4 o valor da amplitude de deslocamento está em módulo e representa o máximo deslocamento do sistema em regime permanente. A constante de frequência f_0 do motor foi incrementada de 0,1 Hz varrendo a faixa de 0,1 Hz a 5 Hz. Para cada valor de f_0 foi calculada numericamente a respectiva amplitude de deslocamento e registrada na curva da Figura 5.4 (a). Para cada valor de f_0 também foi calculada a média da frequência do motor, a qual representa a frequência em torno da qual o motor estabiliza a sua rotação em regime permanente. Cada valor da média da frequência do motor foi registrado na curva da Figura 5.4 (b). Em outras palavras, significa que o único parâmetro variado durante a integração numérica foi a constante de frequência f_0 do motor. Os demais parâmetros foram mantidos

constantes de acordo com a Tabela 5.1. Isso significa que em cada simulação realizada o motor elétrico apresentava uma curva característica diferente (para cada simulação realizada a constante de torque a foi mantida constante, porém, a frequência em que o motor atingia o regime estacionário foi alterada).

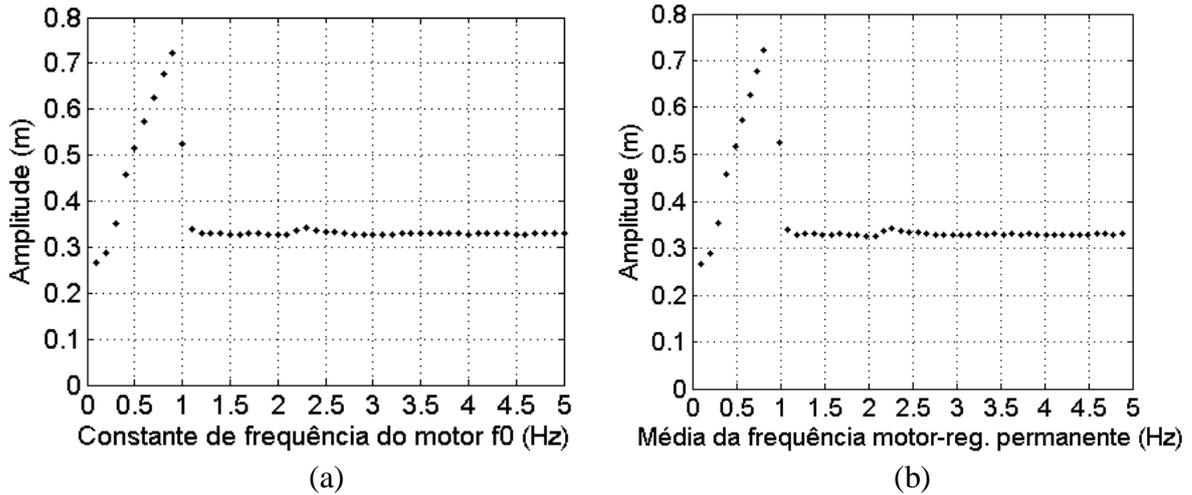


Figura 5.4 – Resposta em frequência – sistema NLGS não ideal

(a) Amplitude de deslocamento em função da constante de frequência do motor f_0 ; (b) Amplitude de deslocamento em função da média da frequência do motor

Analisando a Figura 5.4 percebe-se que o valor máximo da amplitude de deslocamento do sistema NLGS não ideal ocorre para a constante de frequência do motor f_0 igual a 0,9 Hz, que é a frequência natural do sistema. Quando a frequência do motor coincide com a frequência natural do sistema ocorre a ressonância e a amplitude de deslocamento atinge o seu valor máximo. Para valores da constante de frequência do motor abaixo de 0,5 Hz e acima de 1,0 Hz a amplitude de deslocamento se reduz drasticamente, pois, o sistema está operando fora da sua frequência natural.

Comparando-se as Figuras 5.4 (a) e 5.4 (b) percebe-se que o valor da média da frequência do motor está muito próximo do valor da constante de frequência do motor f_0 . Isso significa que o motor não é capturado pela frequência natural do sistema, ou seja, o motor consegue estabilizar sua rotação num valor muito próximo da sua constante de frequência f_0 . Além disso, não se visualiza o salto (descontinuidade) na curva de amplitude de deslocamento mostrada na Figura 5.4 (b). Portanto, conclui-se que para o sistema NLGS não ideal, com base nos parâmetros da Tabela 5.1, não ocorre o efeito Sommerfeld.

Como já mencionado anteriormente, na integração numérica variou-se a constante de frequência f_0 do motor. Os valores de f_0 para os quais se analisa com mais detalhe a resposta

do sistema são mostrados na Tabela 5.2. Esses valores de f_0 foram escolhidos para analisar o comportamento do sistema antes da ressonância (0,5 Hz), durante a ressonância (0,9 Hz) e após a ressonância (1,0 Hz; 1,1 Hz; 1,2 Hz; 1,5 Hz e 2,0 Hz).

Tabela 5.2 – Parâmetro que foi variado na integração numérica – sistema NLGS não ideal

	1	2	3	4	5	6	7
f_0 [Hz]	0,5	0,9	1,0	1,1	1,2	1,5	2,0

A Figura 5.5 mostra cada uma das curvas do torque em função da frequência do motor elétrico para os valores de f_0 da Tabela 5.2. Lembrando que a constante de torque a do motor foi mantida constante (Tabela 5.1).

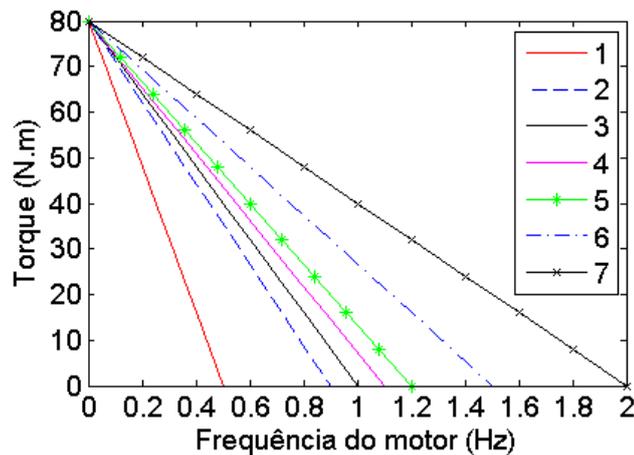


Figura 5.5 – Curvas de torque em função da frequência do motor elétrico – sistema NLGS não ideal

As Figuras 5.6 a 5.12 apresentam os resultados da simulação para os valores da constante de frequência do motor f_0 mostrados na Tabela 5.2, nas quais: (a) é o histórico do deslocamento (regime permanente + transiente); (b) é o histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) é o histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) é o plano de fase; (e) é a curva da FFT (espectro de frequências).

A linha horizontal presente no histórico da frequência do motor das Figuras 5.6 (c) a 5.12 (c) representa o valor da constante de frequência do motor f_0 . Com essa informação pode-se comparar a frequência do motor em regime permanente (estacionário) com o valor da sua constante f_0 .

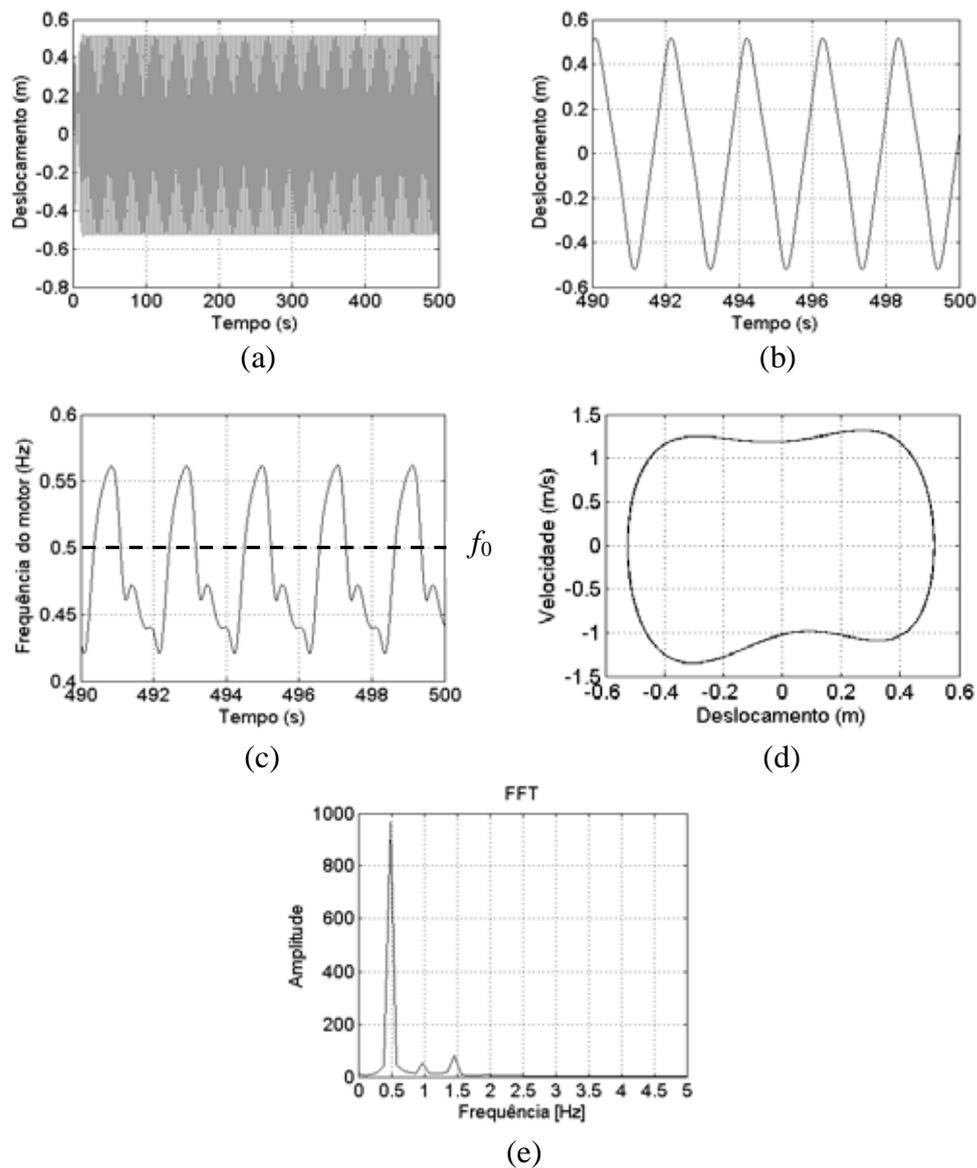


Figura 5.6 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 0,5$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Analisando a Figura 5.6 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno dos seus dois pontos de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. Observando a Figura 5.6 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura. A Figura 5.6 (d) confirma as informações da Figura 5.6 (b), mostrando que o sistema oscila em torno dos seus dois pontos de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um. O espectro de frequências na Figura 5.6 (e) confirma a presença de apenas a frequência de 0,5 Hz (constante de frequência do motor) no movimento do sistema.

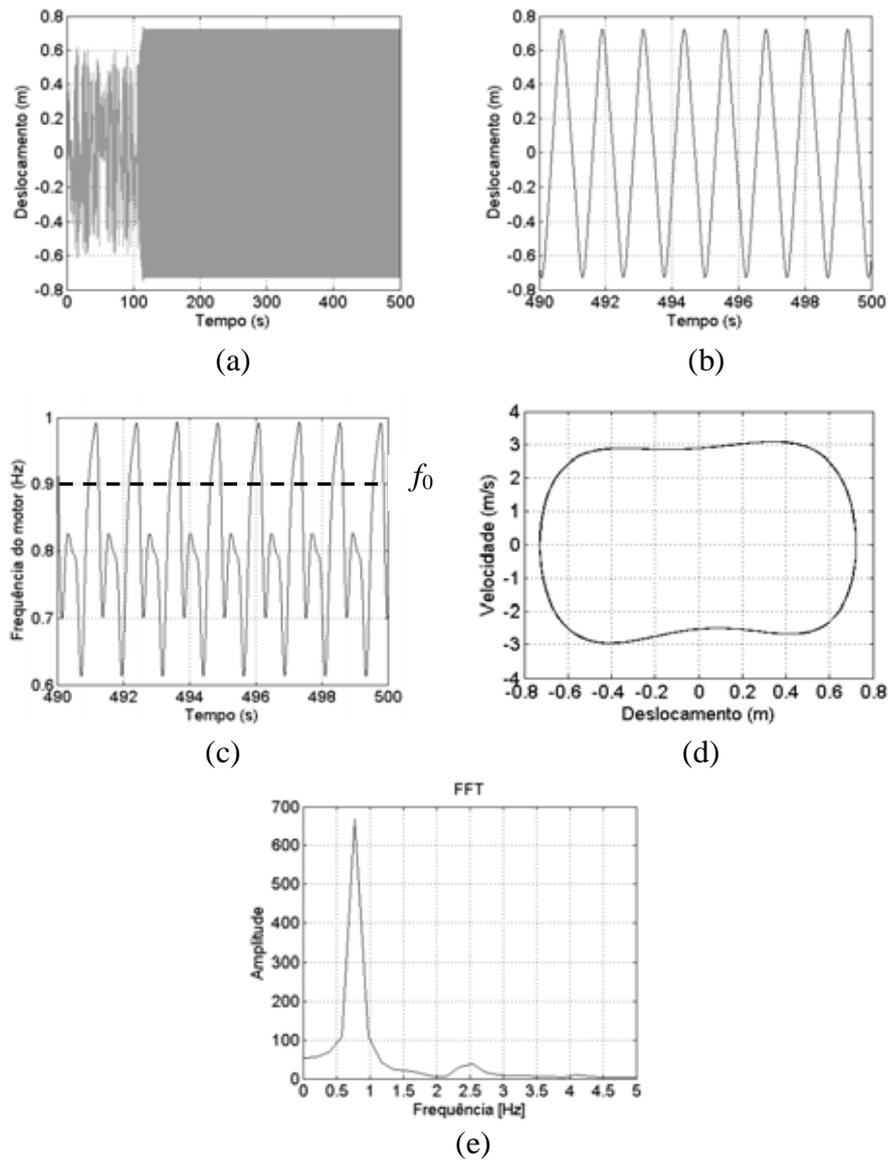


Figura 5.7 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 0,9$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Analisando a Figura 5.7 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno dos seus dois pontos de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. Observando a Figura 5.7 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura. A Figura 5.7 (d) confirma as informações da Figura 5.7 (b), mostrando que o sistema oscila em torno dos seus dois pontos de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um. O espectro de frequências na Figura 5.7 (e) confirma a presença de apenas a frequência de 0,9 Hz (constante de frequência do motor) no movimento do sistema.

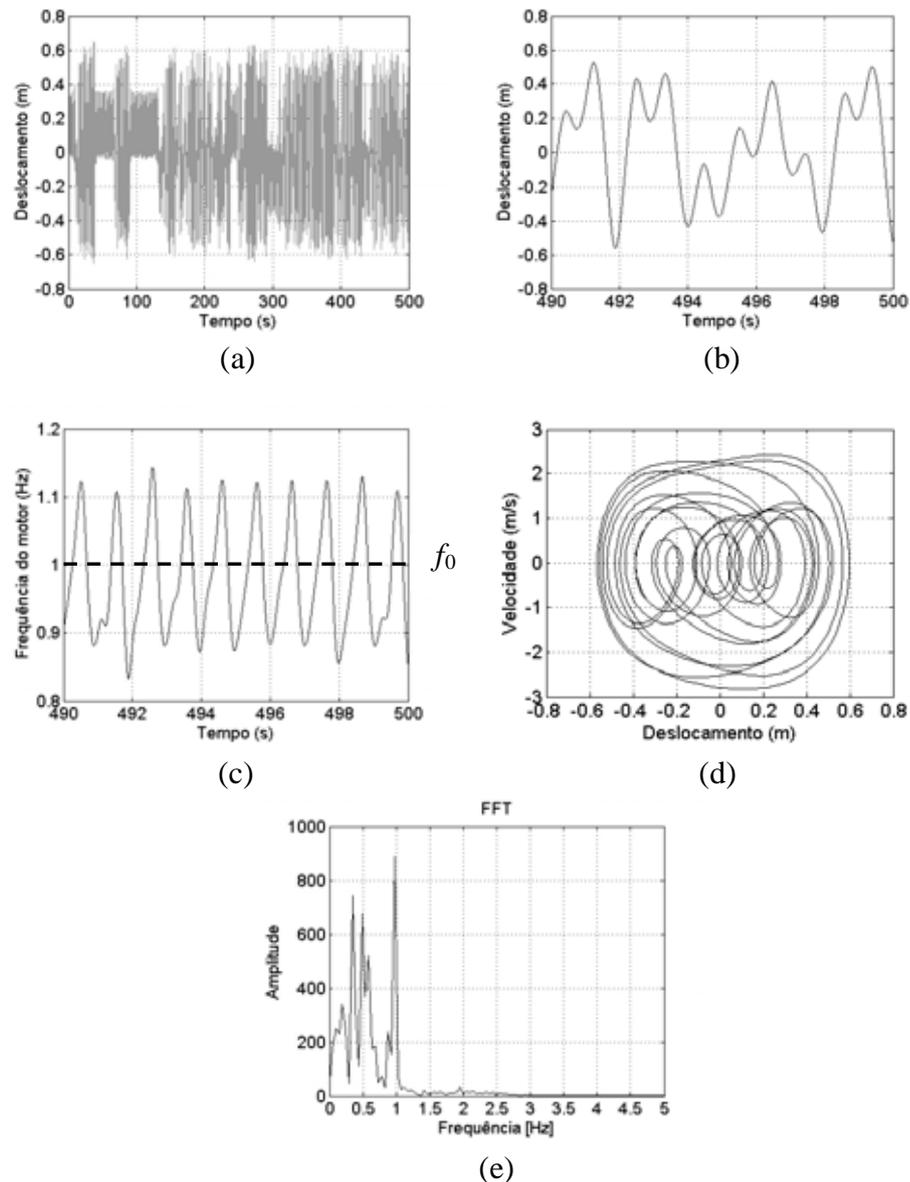


Figura 5.8 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 1,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Analisando a Figura 5.8 (b) percebe-se que o sistema apresenta um comportamento irregular. Observando a Figura 5.8 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura. A Figura 5.8 (d) confirma as informações da Figura 5.8 (b), mostrando que o sistema oscila com diversos períodos (movimento irregular). O espectro de frequências na Figura 5.8 (e) confirma que existem diversas frequências perturbando o movimento do sistema, inclusive a frequência de 1,0 Hz (constante de frequência do motor).

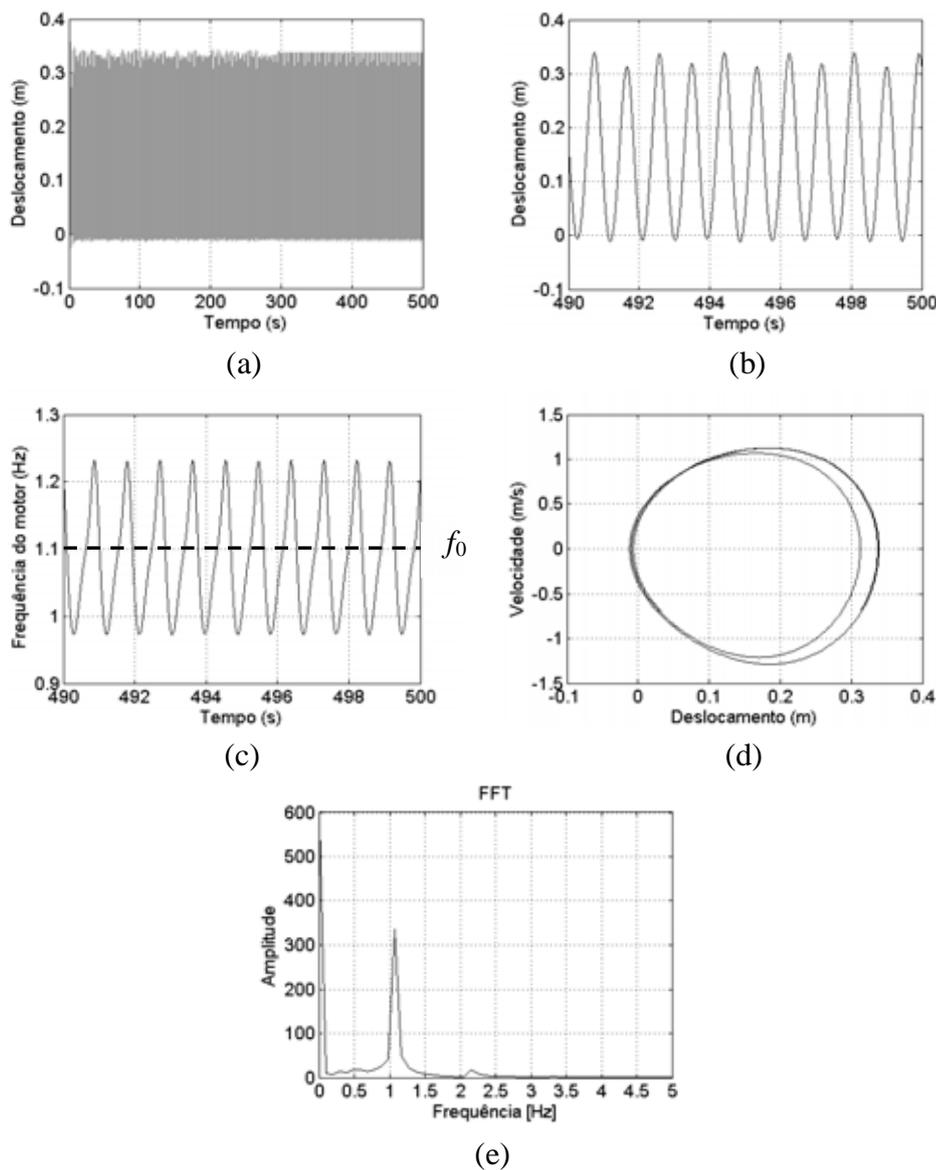


Figura 5.9 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 1,1$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Analisando a Figura 5.9 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período dois. Observando a Figura 5.9 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura. A Figura 5.9 (d) confirma as informações da Figura 5.9 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período dois. O espectro de frequências na Figura 5.9 (e) confirma a presença de duas frequências no movimento do sistema, inclusive a frequência de 1,1 Hz (constante de frequência do motor).

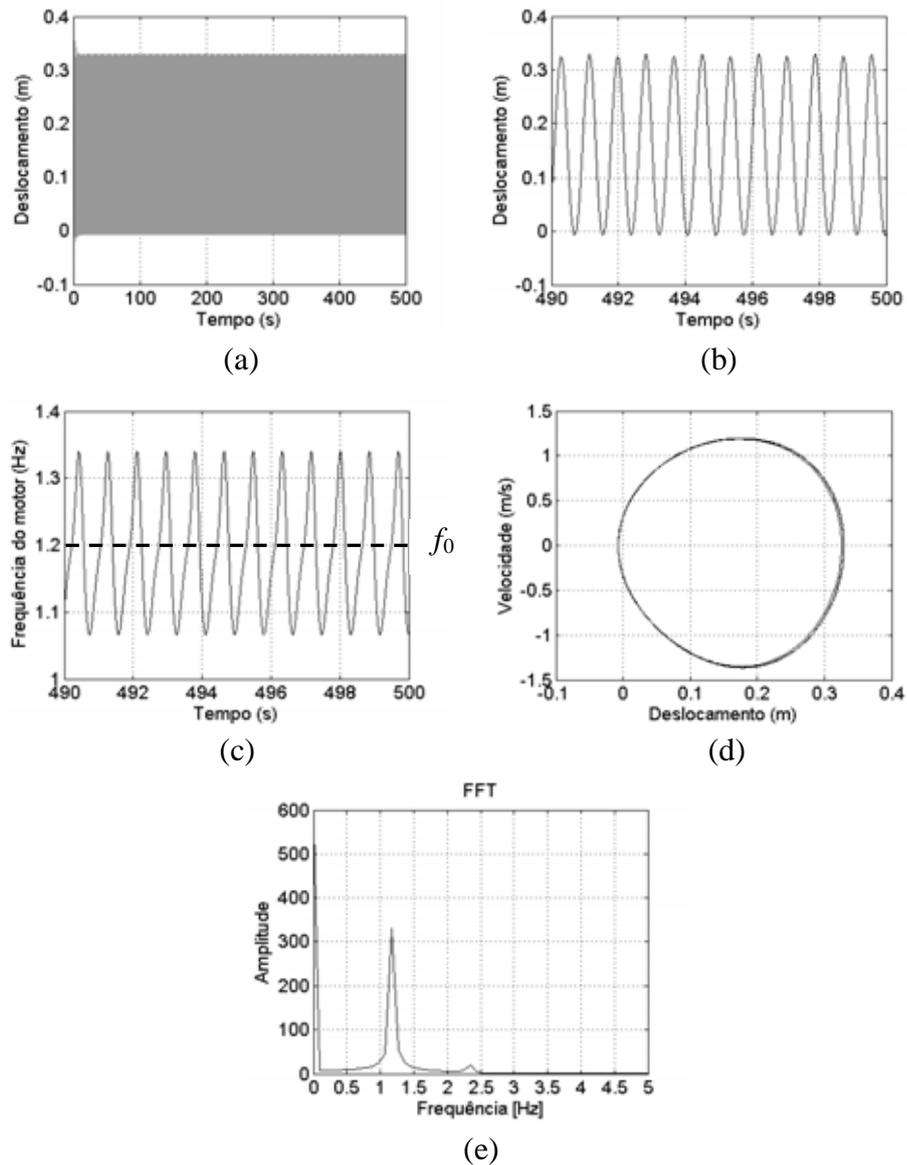


Figura 5.10 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 1,2$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Analisando a Figura 5.10 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. Observando a Figura 5.10 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura. A Figura 5.10 (d) confirma as informações da Figura 5.10 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um. O espectro de frequências na Figura 5.10 (e) confirma a presença de apenas a frequência de 1,2 Hz (constante de frequência do motor) no movimento do sistema.

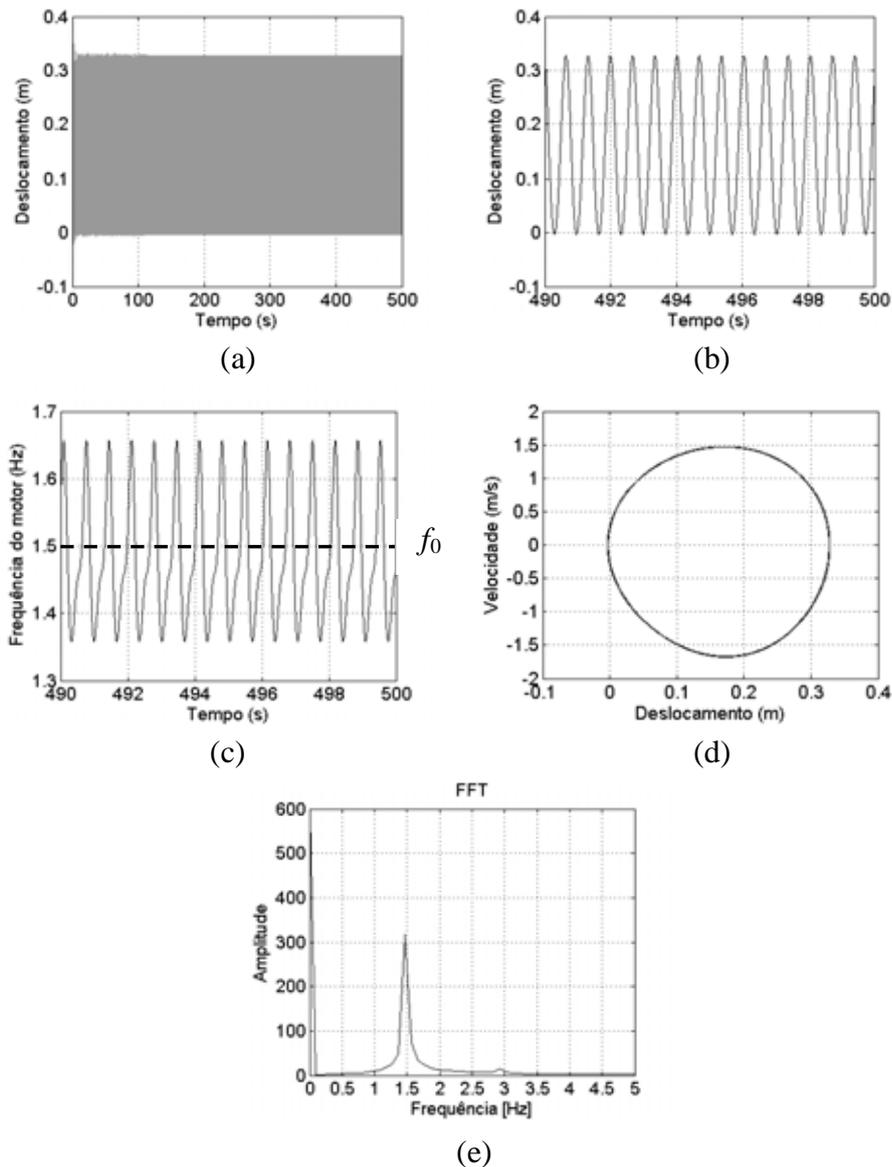


Figura 5.11 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 1,5$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Analisando a Figura 5.11 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. Observando a Figura 5.11 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura. A Figura 5.11 (d) confirma as informações da Figura 5.11 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um. O espectro de frequências na Figura 5.11 (e) confirma a presença de apenas a frequência de 1,5 Hz (constante de frequência do motor) no movimento do sistema.

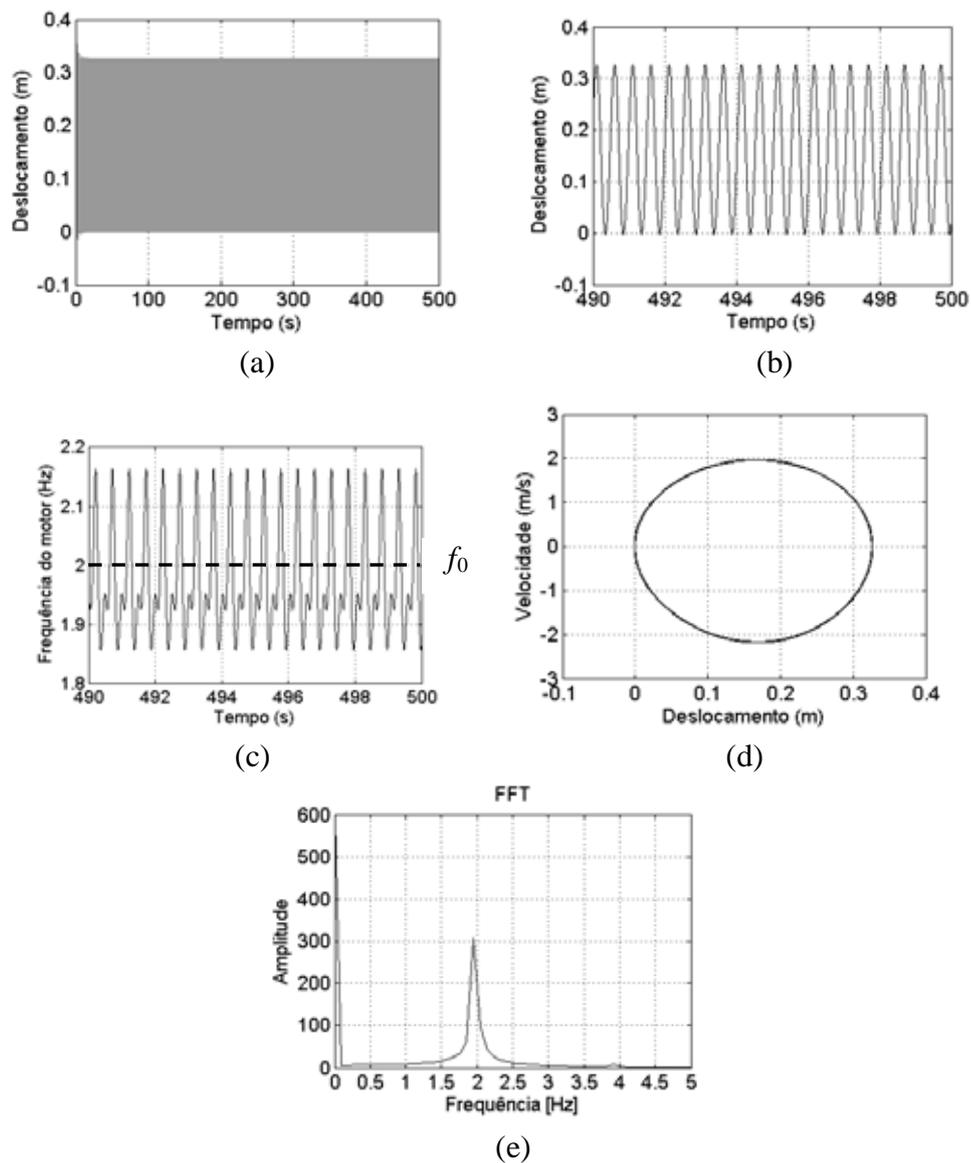


Figura 5.12 – Resposta – sistema NLGS não ideal – $f_0 = 2,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Analisando a Figura 5.12 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. Observando a Figura 5.12 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura. A Figura 5.12 (d) confirma as informações da Figura 5.12 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um. O espectro de frequências na Figura 5.12 (e) confirma a presença de apenas a frequência de 2,0 Hz (constante de frequência do motor) no movimento do sistema.

Analisando as Figuras 5.6 a 5.12 percebe-se que o comportamento do sistema NLGS não ideal é complexo. Pequenas variações na constante de frequência do motor f_0 provocam grandes mudanças na resposta do sistema. As características que aumentam a complexidade na resposta do sistema são a não-linearidade na rigidez e a fonte de excitação não ideal.

O regime de movimento desse sistema pode ser periódico ou ter indicação de movimento caótico dependendo do valor da constante de frequência do motor. Na Figura 5.8 tem-se o indicativo de regime de movimento caótico e nas Figuras 5.6 a 5.7 e 5.9 a 5.12 o regime de movimento é periódico. O indicativo da existência de caos é comprovado pela curva da FFT. Na Figura 5.8 (e) vê-se o espectro da FFT bastante perturbado, indicando a existência de várias frequências no movimento do sistema e nas Figuras 5.6 (e) a 5.7 (e) e 5.9 (e) a 5.12 (e) têm-se algumas frequências predominantes, comportamento característico de um regime periódico.

Observando as Figuras 5.6 (d) e 5.7 (d) percebe-se que o sistema oscila em torno dos seus dois pontos de equilíbrio estável. Por isso, o plano de fase assume a forma parecida com a do número oito deitado. Já as Figuras 5.9 (d) a 5.12 (d) revelam que o sistema oscila em torno de apenas um dos seus pontos de equilíbrio estável.

Conforme já comentado anteriormente, o sistema NLGS possui uma limitação física: o seu deslocamento não pode exceder ao comprimento das barras. Observando os resultados numéricos, percebe-se que o deslocamento do sistema é inferior ao comprimento das barras ($L=1,4\text{m}$), o que garante o correto funcionamento do mecanismo.

A Tabela 5.3 resume o tipo de regime de movimento do sistema (periódico ou indicativo de movimento caótico) para os valores da constante de frequência do motor f_0 da Tabela 5.2.

Tabela 5.3 – Regime de movimento – sistema NLGS não ideal – resumo

Regime de movimento	periódico	periódico	indicativo de caos	periódico	periódico	periódico	periódico
f_0 [Hz]	0,5	0,9	1,0	1,1	1,2	1,5	2,0

Observando as Figuras 5.6 (c) a 5.12 (c) verifica-se que a frequência do motor não é capturada pela frequência natural do sistema (a frequência do motor ultrapassa o valor da constante f_0). Percebe-se também a flutuação que existe na frequência do motor, o que pode ser atribuído à interação que existe entre o motor e o próprio sistema.

5.2 SISTEMA NLGS IDEAL

Para analisar o comportamento dinâmico do sistema inicialmente mostra-se a curva de resposta em frequência. Para esse sistema varia-se, na integração numérica, a frequência da excitação f , ou seja, a velocidade angular da massa desbalanceada ω convertida para a unidade Hz.

$$f = \frac{\omega}{2.\pi} \quad (5.2)$$

A Figura 5.13 mostra a curva de amplitude de deslocamento do sistema em função da frequência de excitação f . O valor da amplitude de deslocamento está em módulo e representa o máximo deslocamento do sistema em regime permanente. A frequência de excitação f foi incrementada de 0,1 Hz varrendo a faixa de 0,1 Hz a 5 Hz. Para cada valor de f foi calculada numericamente a respectiva amplitude de vibração e registrada na curva da Figura 5.13. Em outras palavras, significa que o único parâmetro variado durante a integração numérica foi a frequência de excitação f . Os demais parâmetros foram mantidos constantes de acordo com a Tabela 5.1.

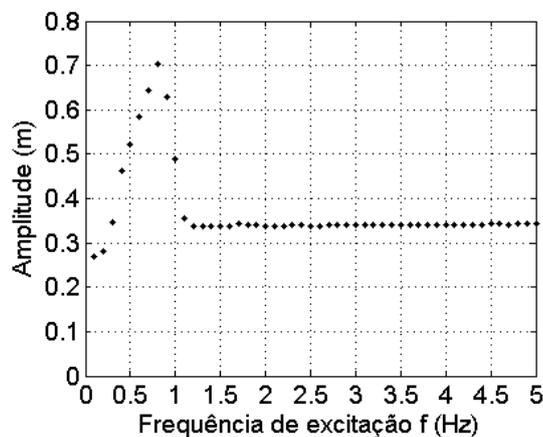


Figura 5.13 – Resposta em frequência – sistema NLGS ideal
Amplitude de deslocamento em função da frequência de excitação f

Analisando a Figura 5.13 percebe-se que o valor máximo da amplitude de deslocamento do sistema NLGS ideal ocorre para a frequência de excitação f igual a 0,8 Hz, que é a frequência natural do sistema. Quando a frequência de excitação coincide com a frequência natural do sistema ocorre a ressonância e a amplitude de deslocamento atinge o seu valor máximo. Para valores da constante de frequência do motor abaixo de 0,5 Hz e acima de

1,0 Hz a amplitude de deslocamento se reduz drasticamente, pois, o sistema está operando fora da sua frequência natural.

Na sequência mostra-se o diagrama de bifurcação para três parâmetros de controle distintos: frequência de excitação f ; comprimento das barras L e deformação inicial da mola d_0 .

5.2.1 Diagrama de bifurcação utilizando como parâmetro de controle a frequência de excitação f

A Figura 5.14 representa o diagrama de bifurcação do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle a frequência de excitação f . Nesse diagrama o parâmetro de controle é incrementado lentamente e, para cada valor do parâmetro de controle, é feita uma amostragem do deslocamento na respectiva frequência da excitação. Essa amostragem do deslocamento é plotada no diagrama para o respectivo valor de f , ou seja, plota-se no mesmo gráfico a seção de Poincaré para cada incremento do parâmetro de controle. A frequência de excitação f foi incrementada de 0,1 Hz varrendo a faixa de 0,1 Hz a 5 Hz.

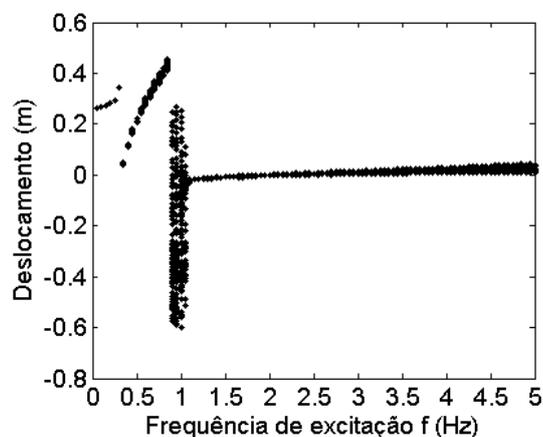


Figura 5.14 – Diagrama de bifurcação do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle a frequência de excitação f

Analisando a Figura 5.14 identifica-se que a resposta do sistema assume regime de movimento regular (periódico) para os valores da frequência de excitação f de 0,1 a 0,85 Hz e 1,1 a 5,0, pois o diagrama de bifurcação apresenta poucos pontos, significando que existem poucos períodos no movimento do sistema. Para valores de f entre 0,9 e 1,0 Hz tem-se o indicativo de movimento caótico, pois o diagrama de bifurcação apresenta vários pontos, indicando que existem vários períodos no movimento do sistema.

Para comprovar a veracidade e a consistência das informações da Figura 5.14 faz-se uma análise mais detalhada da resposta do sistema para os valores da frequência de excitação f mostrados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Valores da frequência de excitação f utilizados para fazer a análise do comportamento do sistema NLGS ideal

	1	2	3	4	5	6	7
f [Hz]	0,5	0,9	1,0	1,1	1,2	1,5	2,0

As Figuras 5.15 a 5.21 apresentam a resposta do sistema para os valores da frequência de excitação f mostrados na Tabela 5.4, nas quais: (a) é o histórico do deslocamento (regime permanente + transiente); (b) é o histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) é a seção de Poincaré sobre o plano de fase e (d) é a curva da FFT (espectro de frequências).

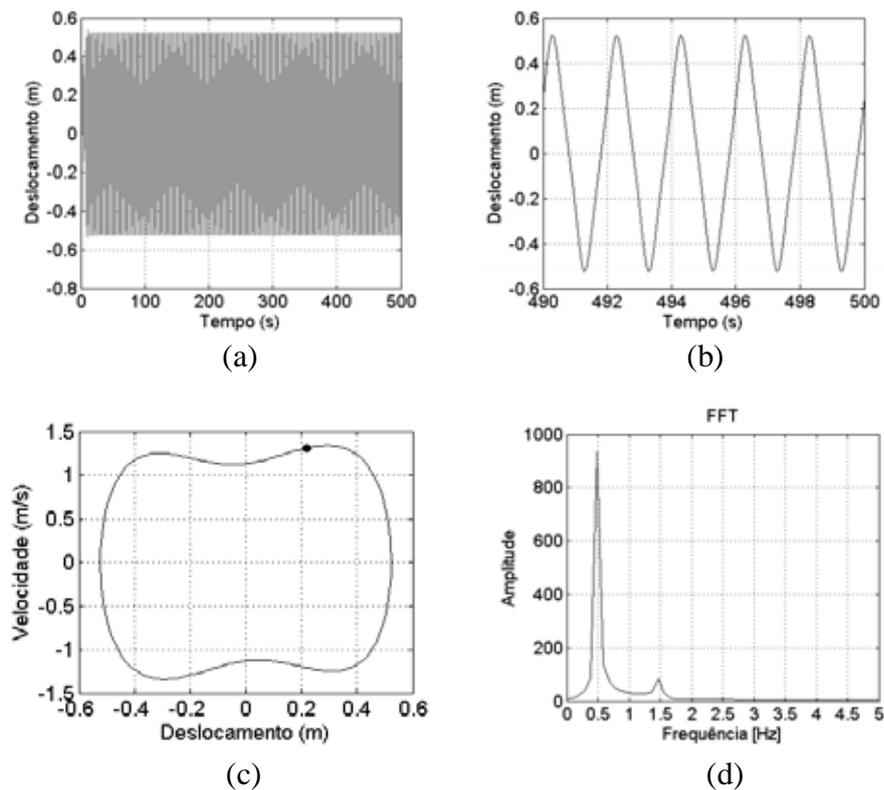


Figura 5.15 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 0,5$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.15 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno dos seus dois pontos de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. A Figura 5.15 (c) confirma as informações da Figura 5.15 (b), mostrando que o sistema oscila em torno dos seus dois pontos de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um, pois a seção de Poincaré apresenta apenas um ponto sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.15 (d) confirma a presença de apenas a frequência de 0,5 Hz (frequência de excitação) no movimento do sistema.

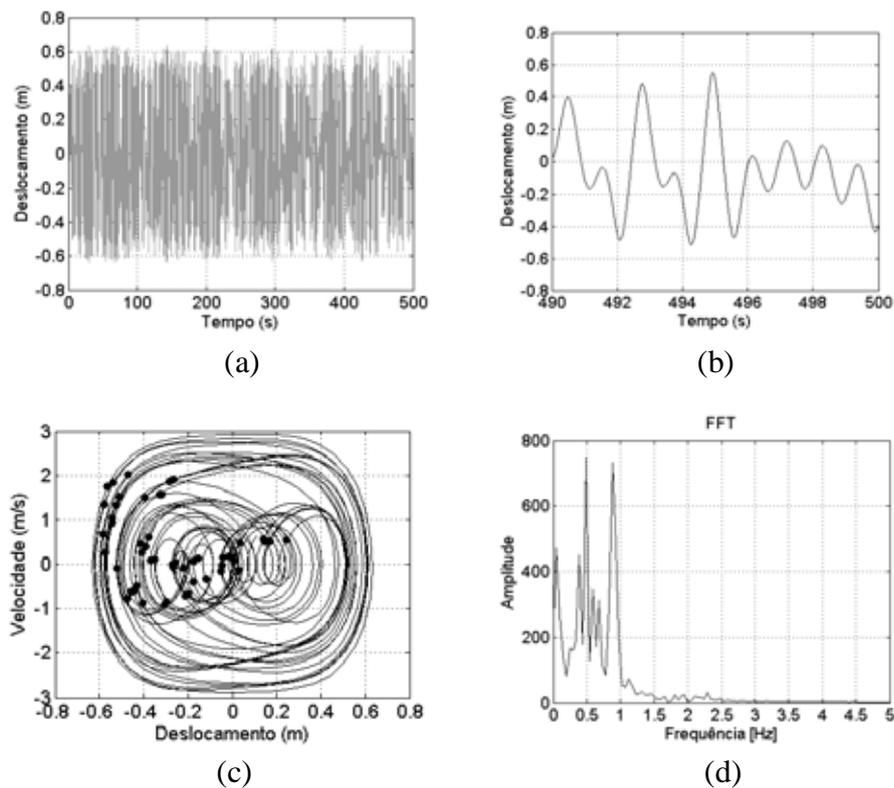


Figura 5.16 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 0,9$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.16 (b) percebe-se que o sistema apresenta um comportamento irregular. A Figura 5.16 (c) confirma as informações da Figura 5.16 (b), mostrando que o sistema oscila com diversos períodos (movimento irregular), pois a seção de Poincaré apresenta vários pontos sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.16 (d) confirma que existem diversas frequências perturbando o movimento do sistema, inclusive a frequência de 0,9 Hz (frequência de excitação).

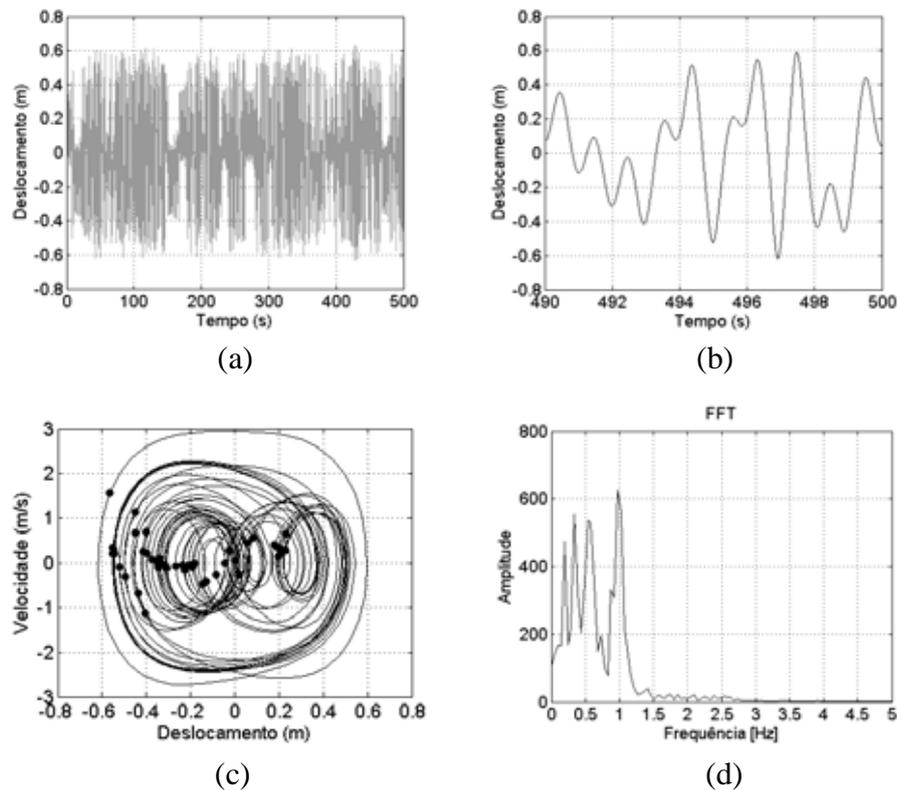
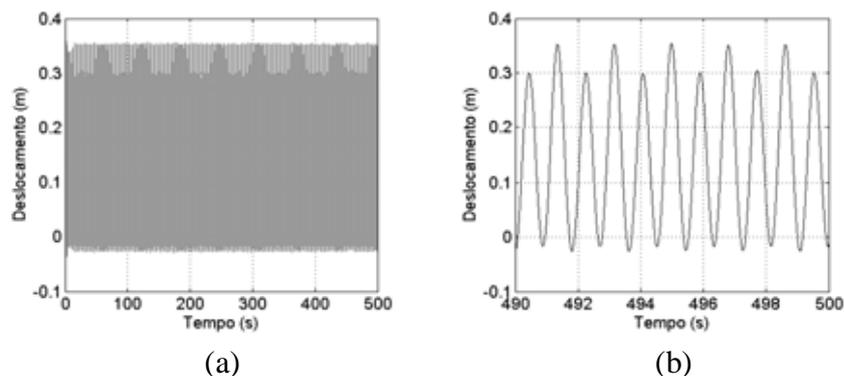


Figura 5.17 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 1,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.17 (b) percebe-se que o sistema apresenta um comportamento irregular. A Figura 5.17 (c) confirma as informações da Figura 5.17 (b), mostrando que o sistema oscila com diversos períodos (movimento irregular), pois a seção de Poincaré apresenta vários pontos sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.17 (d) confirma que existem diversas frequências perturbando o movimento do sistema, inclusive a frequência de 1,0 Hz (frequência de excitação).



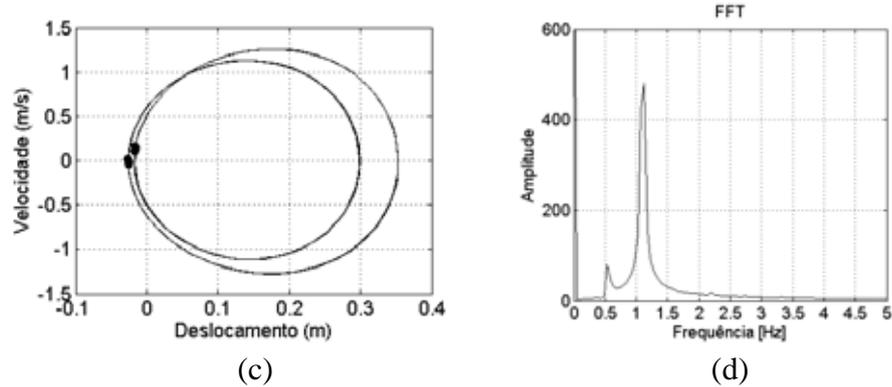
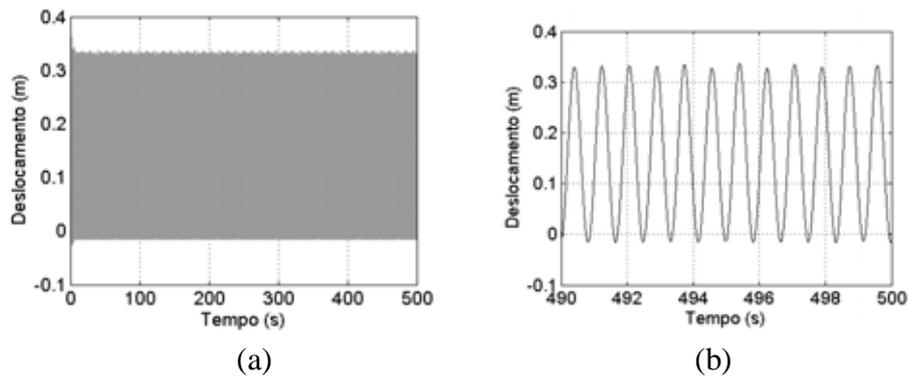


Figura 5.18 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 1,1$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.18 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período dois. A Figura 5.18 (c) confirma as informações da Figura 5.18 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período dois, pois a seção de Poincaré apresenta dois pontos sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.18 (d) confirma a presença de duas frequências no movimento do sistema, inclusive a frequência de 1,1 Hz (frequência de excitação).



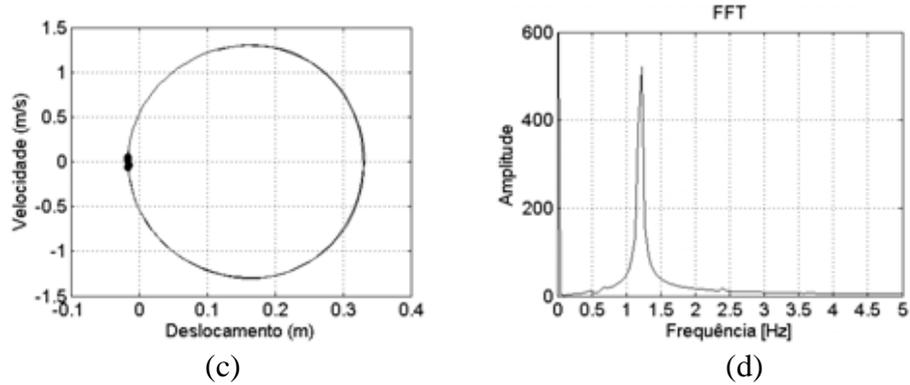
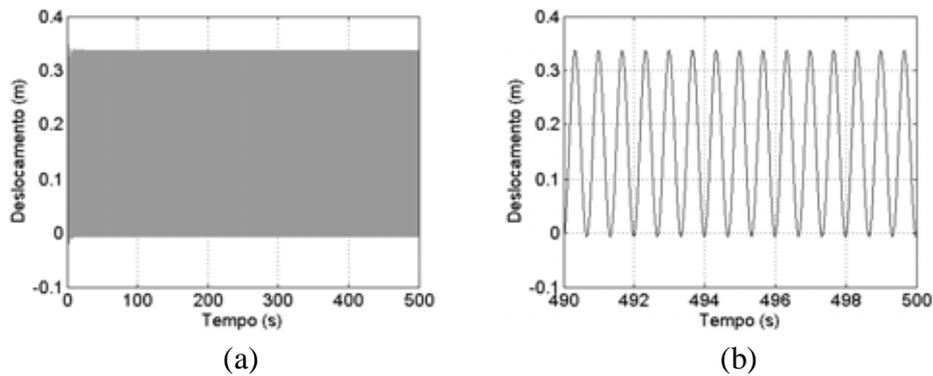


Figura 5.19 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 1,2 \text{ Hz}$

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.19 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. A Figura 5.19 (c) confirma as informações da Figura 5.19 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um, pois a seção de Poincaré apresenta apenas um ponto sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.19 (d) confirma a presença de apenas a frequência de 1,2 Hz (frequência de excitação) no movimento do sistema.



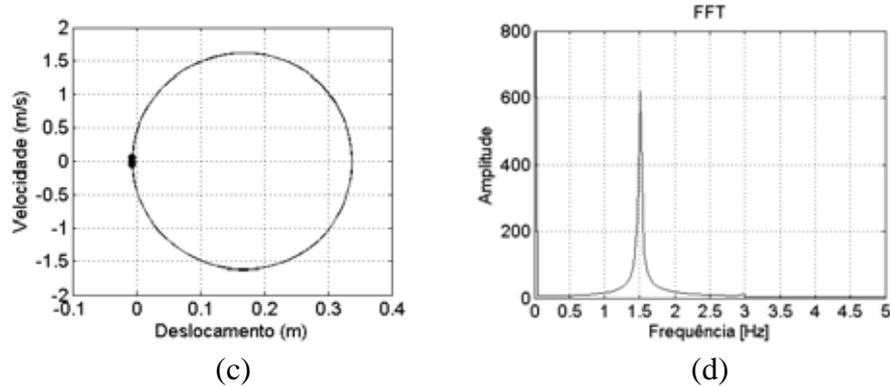
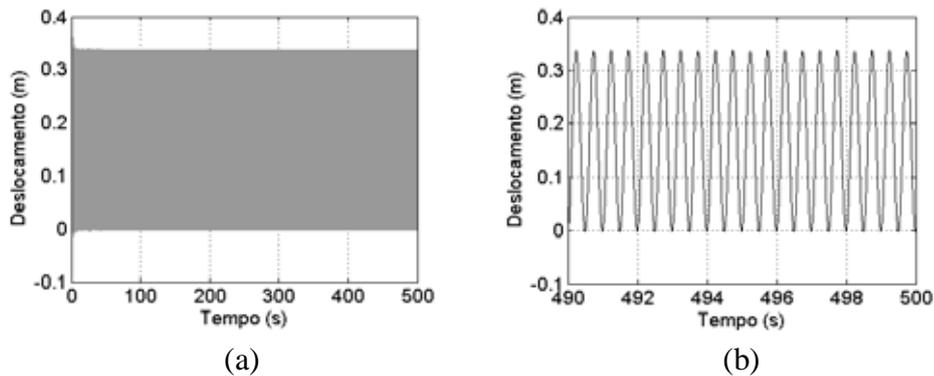


Figura 5.20 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 1,5 \text{ Hz}$

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.20 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. A Figura 5.20 (c) confirma as informações da Figura 5.20 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um, pois a seção de Poincaré apresenta apenas um ponto sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.20 (d) confirma a presença de apenas a frequência de 1,5 Hz (frequência de excitação) no movimento do sistema.



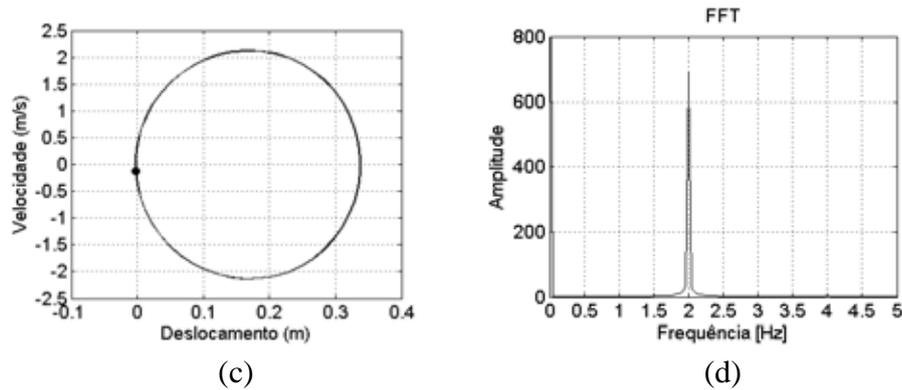


Figura 5.21 – Resposta – sistema NLGS ideal – $f = 2,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.21 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. A Figura 5.21 (c) confirma as informações da Figura 5.21 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um, pois a seção de Poincaré apresenta apenas um ponto sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.21 (d) confirma a presença de apenas a frequência de 2,0 Hz (frequência de excitação) no movimento do sistema.

A Tabela 5.5 resume o tipo de regime de movimento do sistema (periódico ou indicativo de movimento caótico) para os valores da frequência de excitação f da Tabela 5.4 para o sistema NLGS ideal.

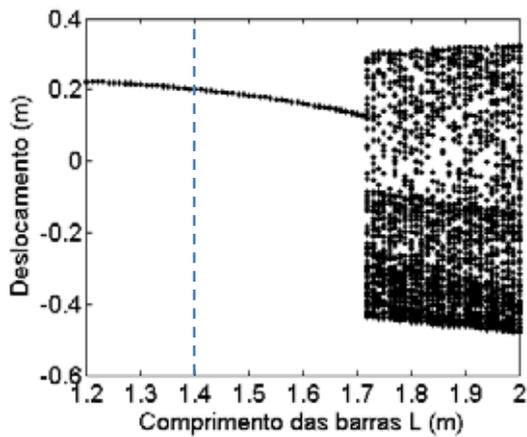
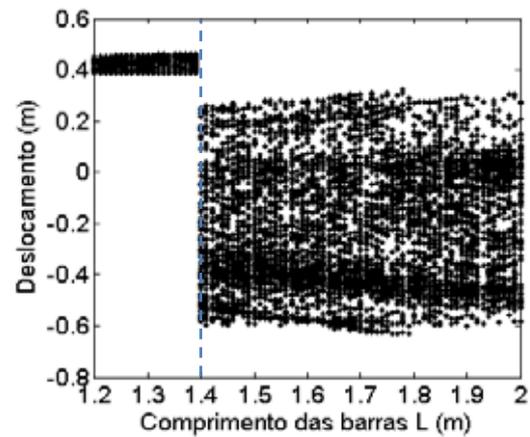
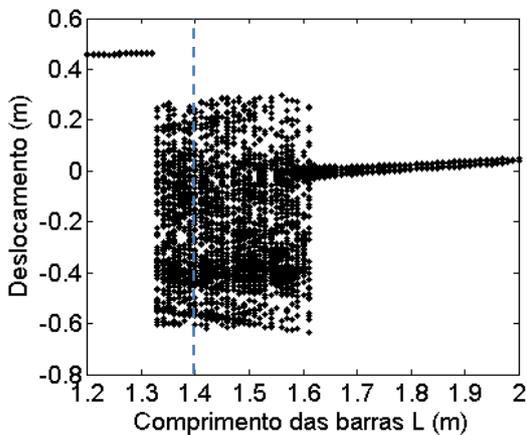
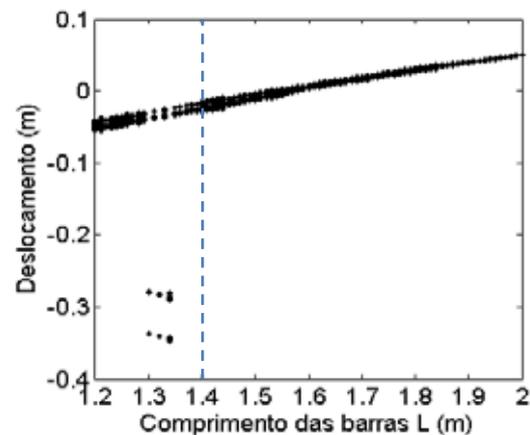
Tabela 5.5 – Regime de movimento do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle a frequência de excitação f – resumo

Regime de movimento	periódico	indicativo de caos	indicativo de caos	periódico	periódico	periódico	periódico
f [Hz]	0,5	0,9	1,0	1,1	1,2	1,5	2,0

A análise dos dados da Tabela 5.5, que foi gerada a partir da análise das Figuras 5.15 a 5.21, leva à mesma conclusão a respeito do movimento do sistema do que a Figura 5.14. Isso comprova a veracidade e a consistência do diagrama de bifurcação mostrado na Figura 5.14.

5.2.2 Diagrama de bifurcação utilizando como parâmetro de controle o comprimento das barras L

A Figura 5.22 é o diagrama de bifurcação do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle o comprimento das barras L . Nesse diagrama o parâmetro de controle é incrementado lentamente e, para cada valor do parâmetro de controle, é feita uma amostragem do deslocamento na respectiva frequência da excitação. Essa amostragem do deslocamento é plotada no diagrama para o respectivo valor de L , ou seja, plota-se no mesmo gráfico a seção de Poincaré para cada incremento do parâmetro de controle. O comprimento das barras L foi incrementado de 0,01 m varrendo a faixa de 1,2 m a 2,0 m, para os seguintes valores da frequência de excitação f : (a) 0,5 Hz; (b) 0,9 Hz; (c) 1,0 Hz; (d) 1,1 Hz; (e) 1,2 Hz; (f) 1,5 Hz e (g) 2,0 Hz.

(a) $f = 0,5$ Hz(b) $f = 0,9$ Hz(c) $f = 1,0$ Hz(d) $f = 1,1$ Hz

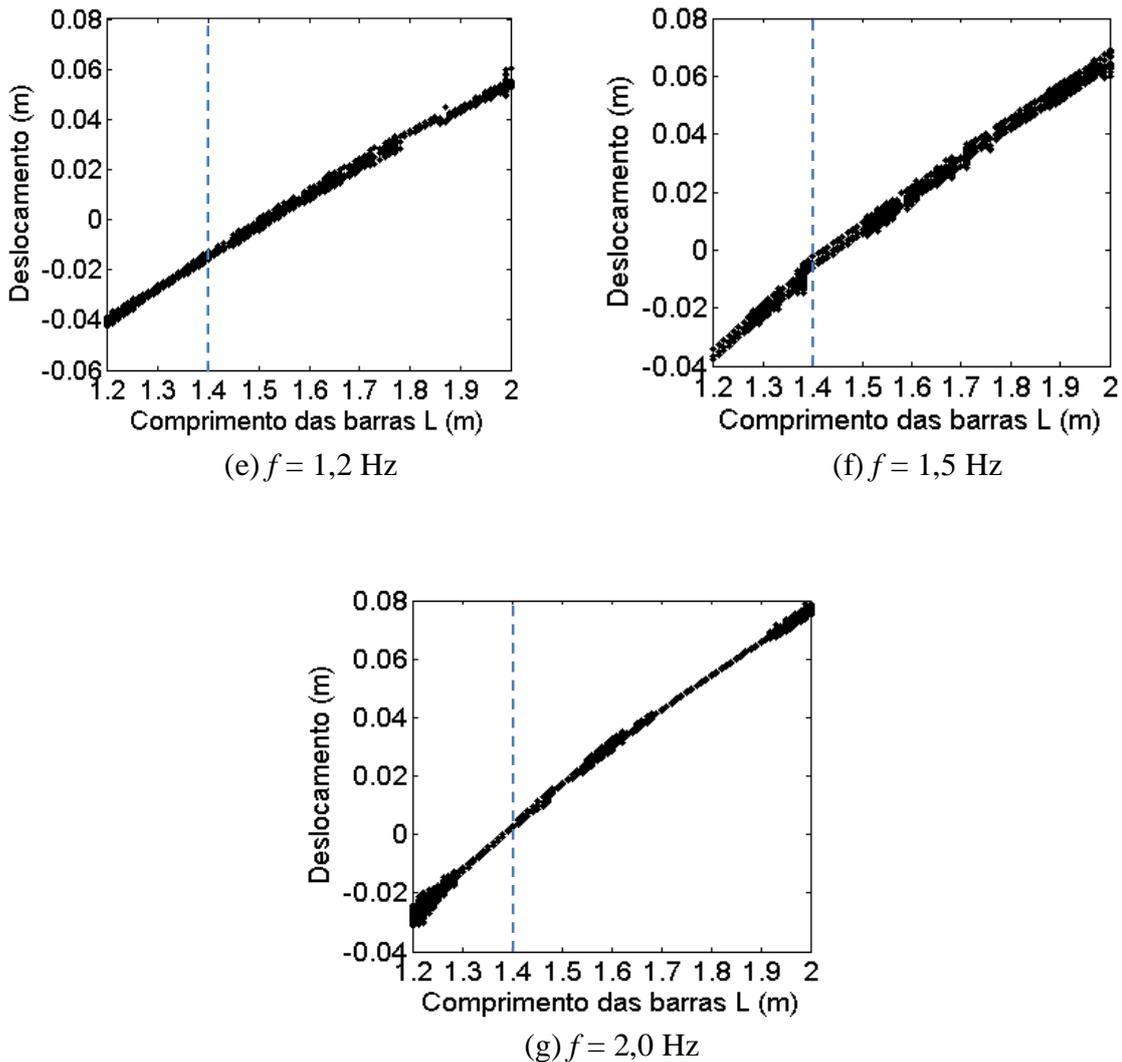


Figura 5.22 – Diagrama de bifurcação do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle o comprimento das barras L

(a) 0,5 Hz; (b) 0,9 Hz; (c) 1,0 Hz; (d) 1,1 Hz; (e) 1,2 Hz; (f) 1,5 Hz e (g) 2,0 Hz

A linha vertical presente na Figura 5.22 representa o valor de $L = 1,4$ m da Tabela 5.1. Para $L = 1,4$ m identifica-se, através da Figura 5.22, que o regime de movimento do sistema é periódico para os seguintes valores da frequência de excitação f : 0,5 Hz; 1,1 Hz; 1,2 Hz; 1,5 Hz e 2,0 Hz, pois o diagrama de bifurcação apresenta poucos pontos, significando que existem poucos períodos no movimento do sistema. Para $f = 0,9$ Hz e 1,0 Hz tem-se o indicativo de regime de movimento caótico porque o diagrama de bifurcação apresenta vários pontos, indicando que existem vários períodos no movimento do sistema.

Para comprovar a veracidade e a consistência das informações da Figura 5.22 faz-se uma análise mais detalhada da resposta do sistema para os valores do comprimento das barras

L mostrados na Tabela 5.6 para a frequência de excitação f de 1,0 Hz. Essa análise não será feita para outros valores de f para evitar que o texto fique muito extenso e repetitivo.

Tabela 5.6 – Valores do comprimento das barras L utilizados para fazer a análise do comportamento do sistema NLGS ideal para $f = 1,0$ Hz

	1	2	3
L [m]	1,25	1,50	1,80

As Figuras 5.23 a 5.25 apresentam a resposta do sistema para os valores do comprimento das barras L mostrados na Tabela 5.6, nas quais: (a) é o histórico do deslocamento (regime permanente + transiente); (b) é o histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) é a seção de Poincaré sobre o plano de fase e (d) é a curva da FFT (espectro de frequências).

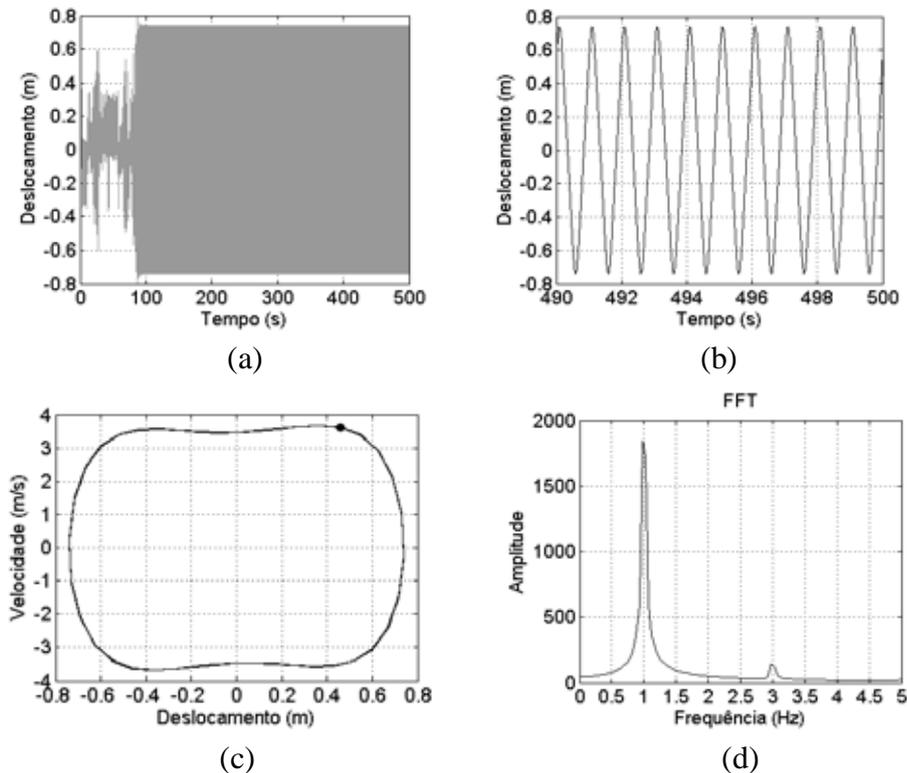


Figura 5.23 – Resposta – sistema NLGS ideal – $L = 1,25\text{m}$ e $f = 1,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.23 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno dos seus dois pontos de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. A

Figura 5.23 (c) confirma as informações da Figura 5.23 (b), mostrando que o sistema oscila em torno dos seus dois pontos de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um, pois a seção de Poincaré apresenta apenas um ponto sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.23 (d) confirma a presença de apenas a frequência de 1,0 Hz (frequência de excitação) no movimento do sistema.

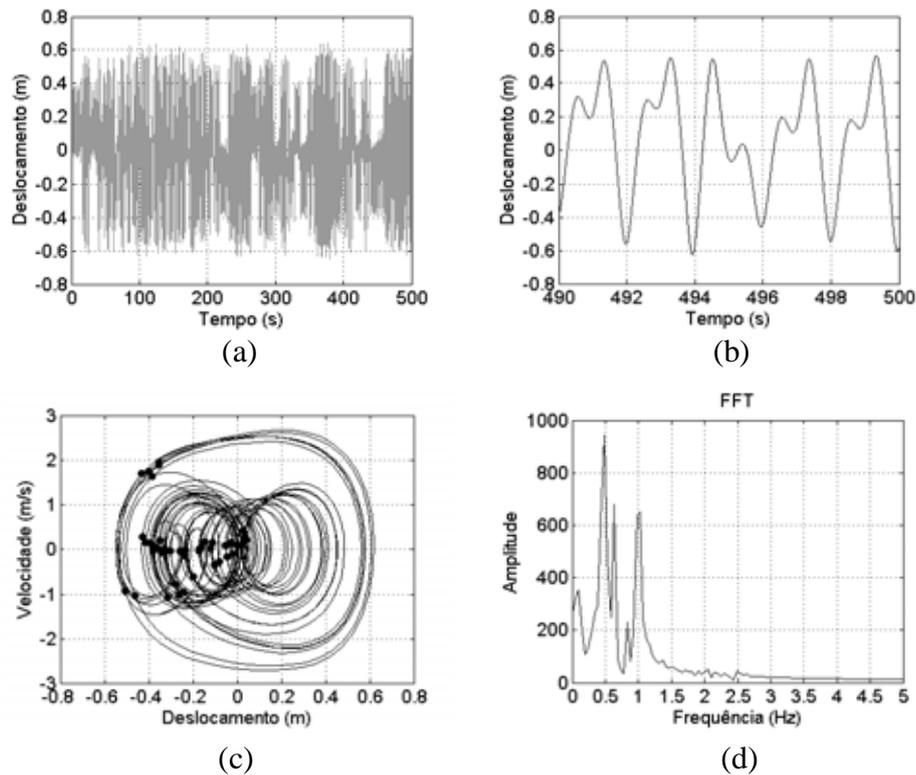


Figura 5.24 – Resposta – sistema NLGS ideal – $L = 1,50m$ e $f = 1,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.24 (b) percebe-se que o sistema apresenta um comportamento irregular. A Figura 5.24 (c) confirma as informações da Figura 5.24 (b), mostrando que o sistema oscila com diversos períodos (movimento irregular), pois a seção de Poincaré apresenta vários pontos sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.24 (d) confirma que existem diversas frequências perturbando o movimento do sistema, inclusive a frequência de 1,0 Hz (frequência de excitação).

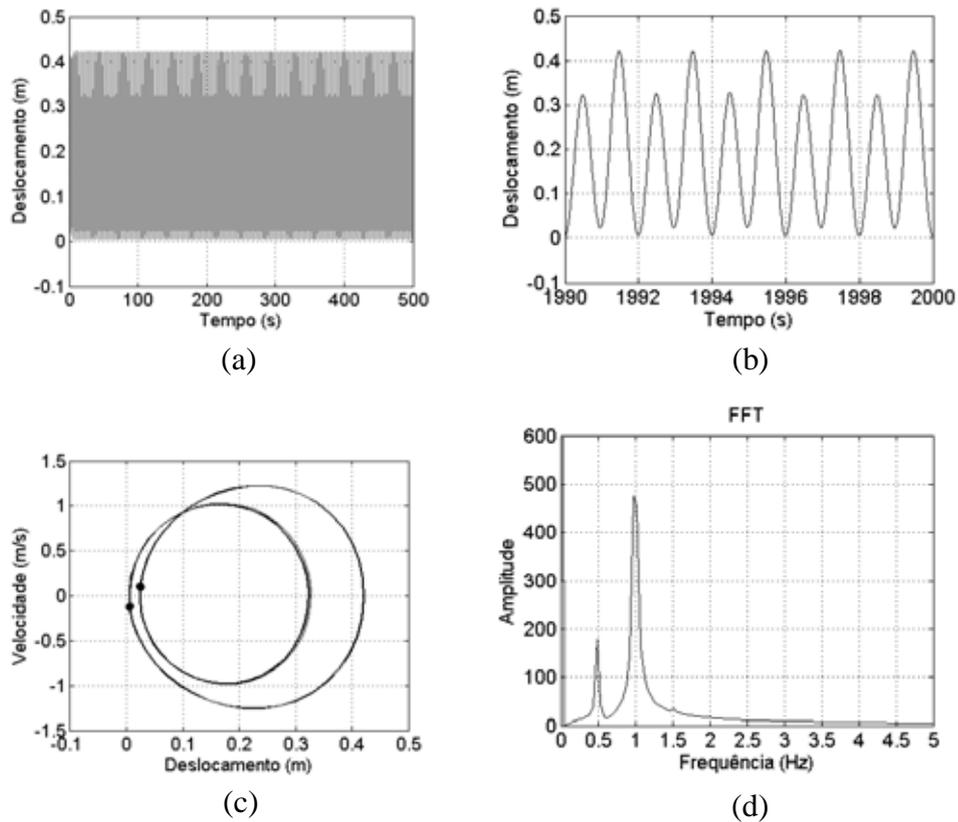


Figura 5.25 – Resposta – sistema NLGS ideal – $L = 1,80\text{m}$ e $f = 1,0\text{ Hz}$

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.25 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período dois. A Figura 5.25 (c) confirma as informações da Figura 5.25 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período dois, pois a seção de Poincaré apresenta dois pontos sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.25 (d) confirma a presença de duas frequências no movimento do sistema, inclusive a frequência de 1,0 Hz (frequência de excitação).

A Tabela 5.7 resume o tipo de regime de movimento do sistema (periódico ou indicativo de movimento caótico) para os valores do comprimento das barras L mostrados na Tabela 5.6 para o sistema NLGS ideal, na frequência de excitação $f = 1,0\text{ Hz}$.

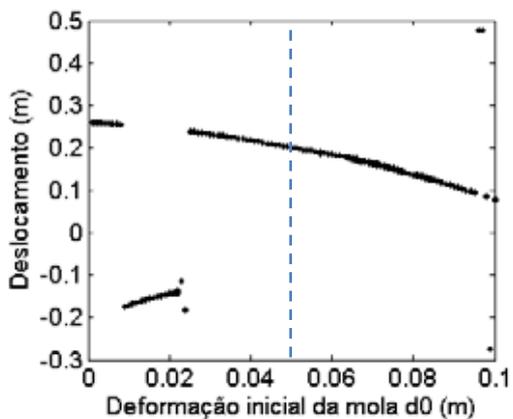
Tabela 5.7 – Regime de movimento do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle o comprimento das barras L para $f = 1,0$ Hz – resumo

Regime de movimento	periódico	indicativo de caos	periódico
L [m]	1,25	1,5	1,8

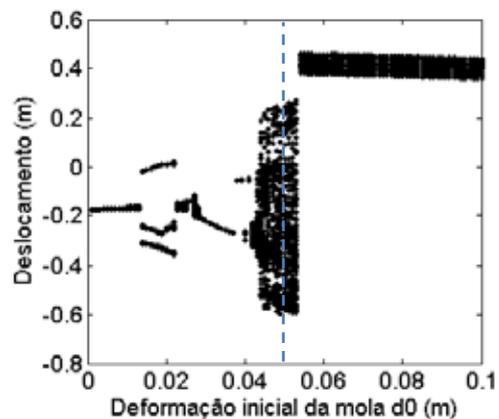
A análise dos dados da Tabela 5.7, que foi gerada a partir da análise das Figuras 5.23 a 5.25, leva à mesma conclusão quanto ao regime de movimento do sistema do que a análise feita através do diagrama de bifurcação (Figura 5.22). Isso comprova a veracidade e a consistência do diagrama de bifurcação mostrado na Figura 5.22.

5.2.3 Diagrama de bifurcação utilizando como parâmetro de controle a deformação inicial da mola d_0

A Figura 5.26 é o diagrama de bifurcação do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle a deformação inicial da mola d_0 . Nesse diagrama o parâmetro de controle é incrementado lentamente e, para cada valor do parâmetro de controle, é feita uma amostragem do deslocamento na respectiva frequência da excitação. Essa amostragem do deslocamento é plotada no diagrama para o respectivo valor de d_0 , ou seja, plota-se no mesmo gráfico a seção de Poincaré para cada incremento do parâmetro de controle. A deformação inicial da mola d_0 foi incrementada 0,001 m varrendo a faixa de 0 a 0,1 m, para os seguintes valores da frequência de excitação f : (a) 0,5 Hz; (b) 0,9 Hz; (c) 1,0 Hz; (d) 1,1 Hz; (e) 1,2 Hz; (f) 1,5 Hz e (g) 2,0 Hz.



(a) $f = 0,5$ Hz



(b) $f = 0,9$ Hz

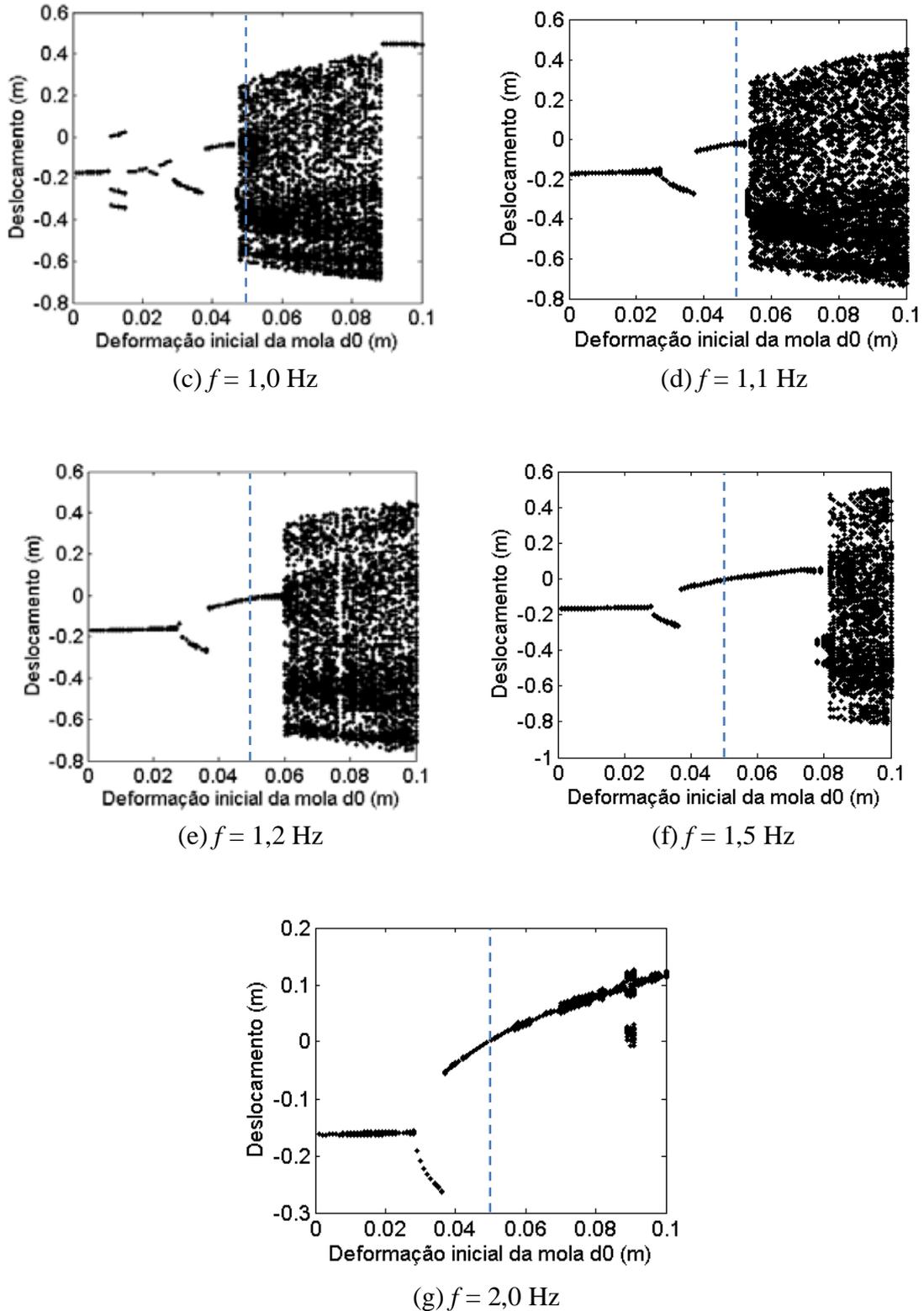


Figura 5.26 – Diagrama de bifurcação do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle a deformação inicial da mola d_0

(a) 0,5 Hz; (b) 0,9 Hz; (c) 1,0 Hz; (d) 1,1 Hz; (e) 1,2 Hz; (f) 1,5 Hz e (g) 2,0 Hz

A linha vertical presente nas curvas da Figura 5.26 representa o valor de $d_0 = 0,05\text{m}$ da Tabela 5.1. Para $d_0 = 0,05\text{m}$ identifica-se, através da Figura 5.26, que o regime de movimento

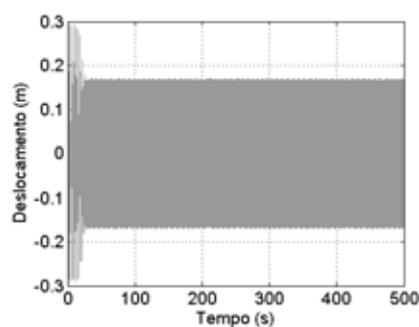
do sistema é periódico para os seguintes valores da frequência de excitação f : 0,5 Hz; 1,1 Hz; 1,2 Hz; 1,5 Hz e 2,0 Hz, pois o diagrama de bifurcação apresenta poucos pontos, significando que existem poucos períodos no movimento do sistema. Para $f = 0,9$ Hz e 1,0 Hz tem-se o indicativo de regime de movimento caótico porque o diagrama de bifurcação apresenta vários pontos, indicando que existem vários períodos no movimento do sistema.

Para comprovar a veracidade e a consistência das informações da Figura 5.26 faz-se uma análise mais detalhada da resposta do sistema para os valores da deformação inicial da mola d_0 mostrados na Tabela 5.8 para a frequência de excitação f de 1,0 Hz. Essa análise não será feita para outros valores de f para evitar que o texto fique muito extenso e repetitivo.

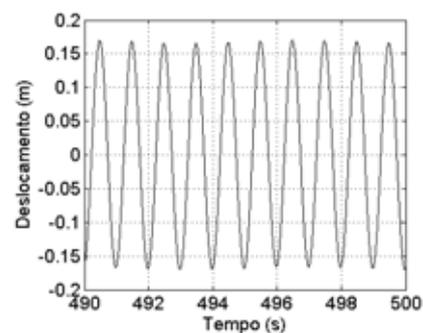
Tabela 5.8 – Valores da deformação inicial da mola d_0 utilizados para fazer a análise do comportamento do sistema NLGS ideal para $f = 1,0$ Hz

	1	2	3	4	5
d_0 [m]	0,010	0,015	0,035	0,045	0,070

As Figuras 5.27 a 5.31 apresentam a resposta do sistema para os valores da deformação inicial da mola d_0 mostrados na Tabela 5.8, nas quais: (a) é o histórico do deslocamento (regime permanente + transiente); (b) é o histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) é a seção de Poincaré sobre o plano de fase e (d) é a curva da FFT (espectro de frequências).



(a)



(b)

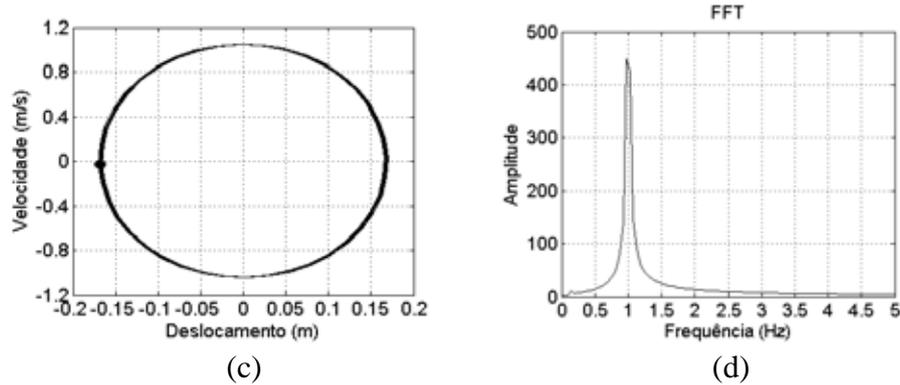
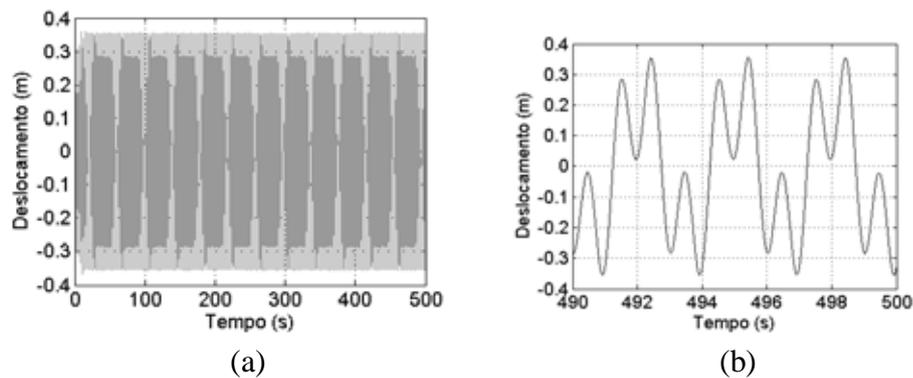


Figura 5.27 – Resposta – sistema NLGS ideal – $d_0 = 0,010m$ e $f = 1,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.27 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. A Figura 5.27 (c) confirma as informações da Figura 5.27 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um, pois a seção de Poincaré apresenta apenas um ponto sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.27 (d) confirma a presença de apenas a frequência de 1,0 Hz (frequência de excitação) no movimento do sistema.



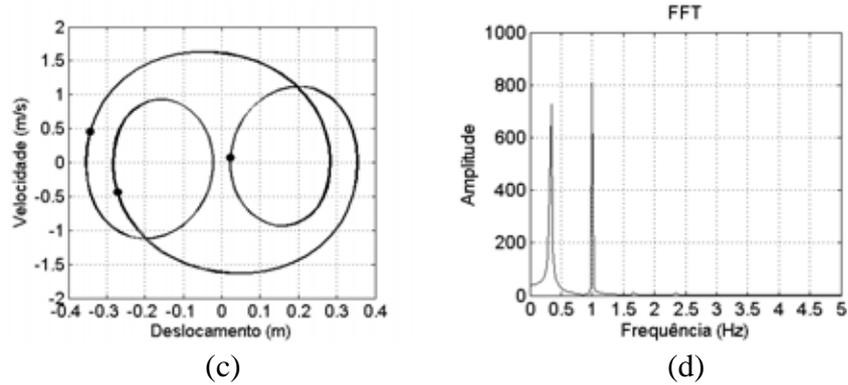


Figura 5.28 – Resposta – sistema NLGS ideal – $d_0= 0,015m$ e $f = 1,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.28 (b) percebe-se que o movimento apresenta período três. A Figura 5.28 (c) confirma a informação da Figura 5.28 (b), mostrando que o movimento apresenta período três, pois a seção de Poincaré apresenta três pontos sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.28 (d) confirma a presença de três frequências no movimento do sistema, inclusive a frequência de 1,0 Hz (frequência de excitação).

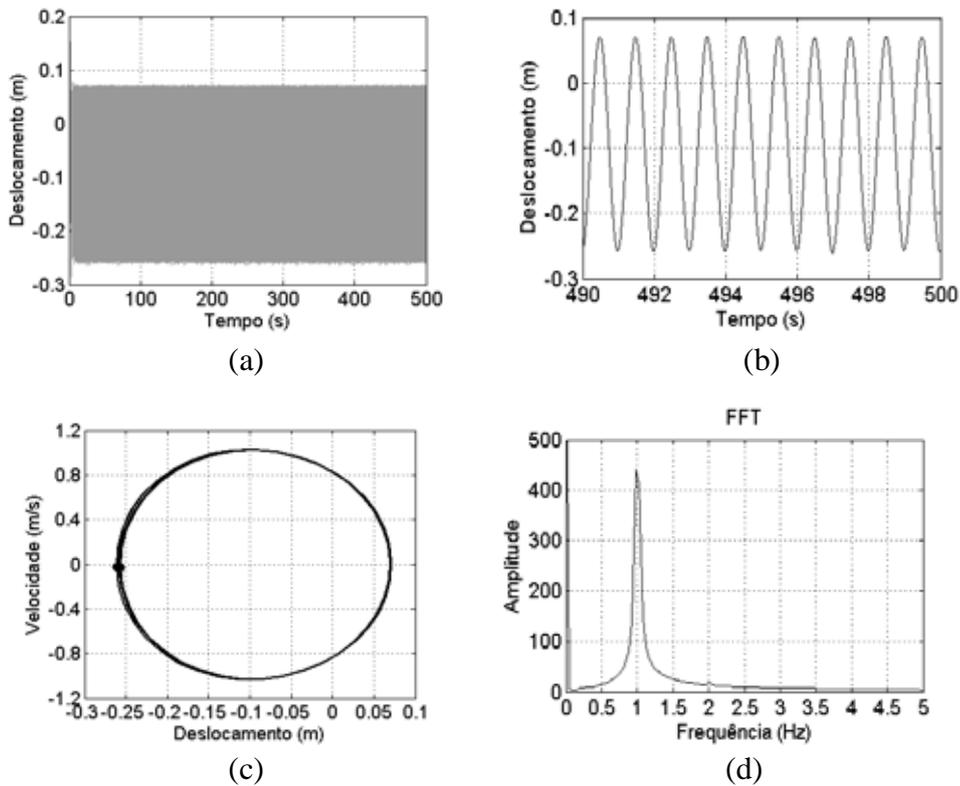


Figura 5.29 – Resposta – sistema NLGS ideal – $d_0= 0,035m$ e $f = 1,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.29 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. A Figura 5.29 (c) confirma as informações da Figura 5.29 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um, pois a seção de Poincaré apresenta apenas um ponto sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.29 (d) confirma a presença de apenas a frequência de 1,0 Hz (frequência de excitação) no movimento do sistema.

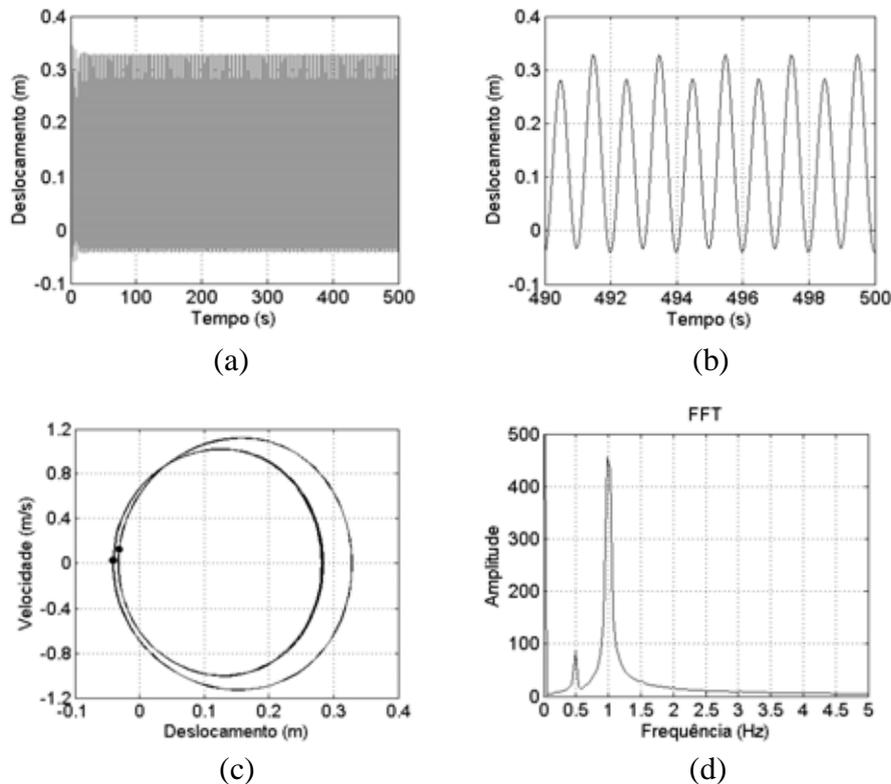


Figura 5.30 – Resposta – sistema NLGS ideal – $d_0 = 0,045m$ e $f = 1,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.30 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período dois. A Figura 5.30 (c) confirma as informações da Figura 5.30 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período dois, pois a seção de Poincaré apresenta dois pontos sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.30 (d) confirma a presença de duas frequências no movimento do sistema, inclusive a frequência de 1,0 Hz (frequência de excitação).

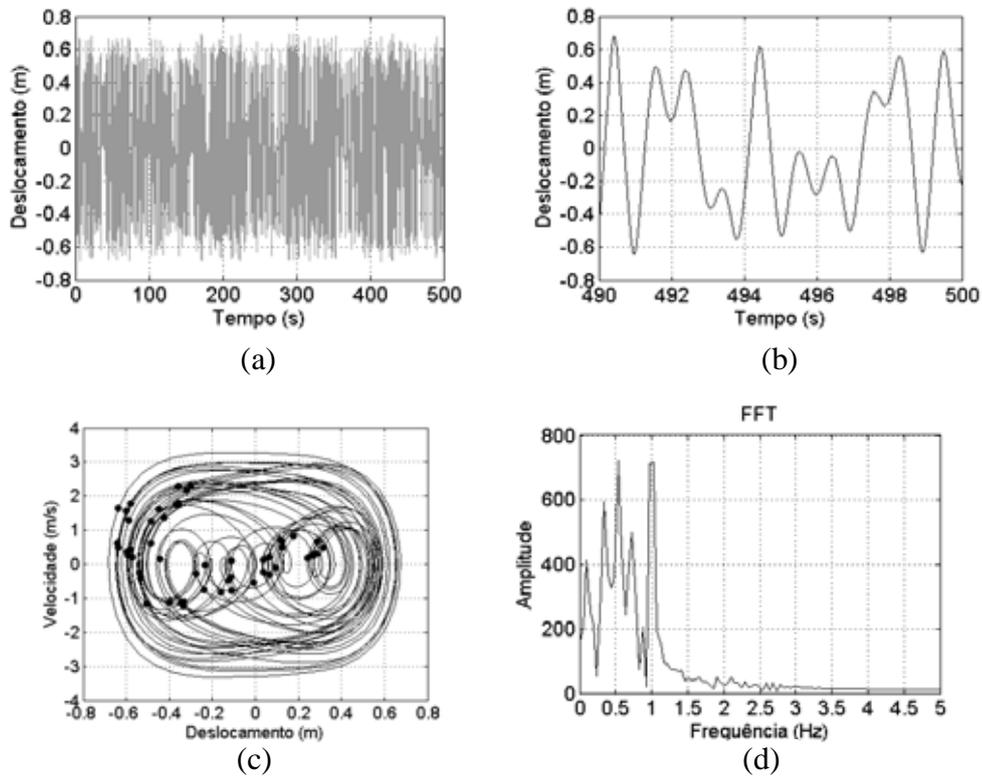


Figura 5.31 – Resposta – sistema NLGS ideal – $d_0 = 0,070m$ e $f = 1,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) seção de Poincaré sobre o plano de fase; (d) FFT (espectro de frequências)

Analisando a Figura 5.31 (b) percebe-se que o sistema apresenta um comportamento irregular. A Figura 5.31 (c) confirma as informações da Figura 5.31 (b), mostrando que o sistema oscila com diversos períodos (movimento irregular), pois a seção de Poincaré apresenta vários pontos sobre o plano de fase. O espectro de frequências na Figura 5.31 (d) confirma que existem diversas frequências perturbando o movimento do sistema, inclusive a frequência de 1,0 Hz (frequência de excitação).

A Tabela 5.9 resume o tipo de regime de movimento do sistema (periódico ou indicativo de movimento caótico) para os valores da deformação inicial da mola d_0 mostrados na Tabela 5.8 para o sistema NLGS ideal, na frequência de excitação $f = 1,0$ Hz.

Tabela 5.9 – Regime de movimento do sistema NLGS ideal utilizando como parâmetro de controle a deformação inicial da mola d_0 para $f = 1,0$ Hz – resumo

Regime de movimento	periódico	periódico	periódico	periódico	indicativo de caos
d_0 [m]	0,010	0,015	0,035	0,045	0,070

A análise dos dados da Tabela 5.9, que foi gerada a partir da análise das Figuras 5.27 a 5.31, leva à mesma conclusão quanto ao regime de movimento do sistema do que a análise feita através do diagrama de bifurcação (Figura 5.26). Isso comprova a veracidade e a consistência do diagrama de bifurcação mostrado na Figura 5.26.

Conforme já comentado anteriormente, o sistema NLGS possui uma limitação física: o seu deslocamento não pode exceder ao comprimento das barras. Observando os resultados numéricos, percebe-se que o deslocamento do sistema é inferior ao comprimento das barras ($L=1,4$ m), o que garante o correto funcionamento do mecanismo.

5.2.4 Equivalência dos diagramas de bifurcação

Analisando as Figuras 5.14, 5.22 e 5.26 conclui-se que a resposta do sistema é equivalente, em termos do regime de movimento, embora o parâmetro de controle seja diferente em cada um dos diagramas de bifurcação. Isso significa que, utilizando o mesmo valor dos parâmetros, é possível identificar se o regime de movimento do sistema é periódico ou se há indicação de movimento caótico analisando qualquer um dos diagramas de bifurcação apresentados anteriormente, basta utilizar os mesmos parâmetros em todos os diagramas para fazer a análise. Por exemplo, utilizando os parâmetros $L=1,4$ m; $d_0 = 0,05$ m e $f = 1,0$ Hz concluímos através da Figura 5.14 que há indicação de movimento caótico do sistema. De acordo com a Figura 5.22 para $L=1,4$ m; $d_0 = 0,05$ m e $f = 1,0$ Hz também se conclui que existe indicação de caos. O mesmo se conclui quando se analisa a Figura 5.26 para $L=1,4$ m; $d_0 = 0,05$ m e $f = 1,0$ Hz.

Por isso, pode-se dizer que a conclusão sobre o regime de movimento do sistema é equivalente para os três diagramas de bifurcação apresentados no texto. Isso confirma a veracidade e a consistência dos dados obtidos através da integração numérica.

5.2.5 Análise da influência dos parâmetros de controle no comportamento do sistema

Na sequência faz-se um resumo da influência, no comportamento do sistema, dos parâmetros de controle utilizados para construir os diagramas de bifurcação apresentados anteriormente.

Analisando a Figura 5.14, diagrama de bifurcação utilizando como parâmetro de controle a frequência de excitação f , percebe-se que na faixa de frequência analisada (0 a 5 Hz) o regime de movimento predominante é o periódico. Existe indicação de movimento caótico apenas entre as frequências de 0,90 a 1,05 Hz. Para a frequência de 0,5 Hz o regime de movimento é periódico (período um) e o plano de fase mostra que o sistema oscila entre os seus dois pontos de equilíbrio estável. Para as frequências de 1,1 Hz; 1,2 Hz; 1,5 Hz e 2,0 Hz o regime de movimento é periódico (período um) e o plano de fase mostra que o sistema oscila em torno de apenas um dos seus pontos de equilíbrio estável.

Observando a Figura 5.22, diagrama de bifurcação utilizando como parâmetro de controle o comprimento das barras L , é possível notar que, para as frequências de 0,5 Hz; 0,9 Hz e 1,0 Hz o regime de movimento pode ser periódico ou ter indicação de movimento caótico, dependendo do valor do parâmetro L , sendo que para a frequência de 0,9 Hz há indicação de regime de movimento caótico na maior parte da faixa analisada do parâmetro L (para $1,4 < L < 2,0$ há indicação de caos). Para as frequências de 1,1 Hz; 1,2 Hz; 1,5 Hz e 2,0 Hz o regime de movimento do sistema é periódico, independente do valor do parâmetro L , para a faixa de valores de L analisada nesse trabalho.

Analisando a Figura 5.26, diagrama de bifurcação utilizando como parâmetro de controle a deformação inicial da mola d_0 , percebe-se que para as frequências de 0,5 Hz e 2,0 Hz o regime de movimento é periódico independente do valor de d_0 , para a faixa de d_0 analisada. Entretanto, para as frequências de 0,9 Hz; 1,0 Hz; 1,1 Hz; 1,2 Hz e 1,5 Hz o regime de movimento alterna entre periódico e indicação de movimento caótico dependendo do valor de d_0 . Assim, na faixa de 0,9 Hz a 1,5 Hz, pode-se afirmar que o parâmetro d_0 tem uma influência significativa no comportamento do sistema.

5.2.6 Sistema NLGS ideal com vibração livre (caso particular)

A fim de explorar um pouco mais o sistema NLGS apresentam-se na sequência alguns resultados obtidos para o caso particular de vibração livre.

A Figura 5.32 apresenta o histórico do deslocamento do sistema NLGS ideal com vibração livre para alguns valores de condição inicial do deslocamento (x_0).

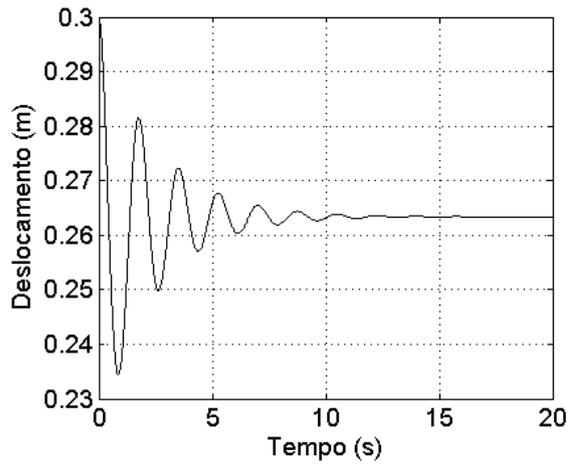
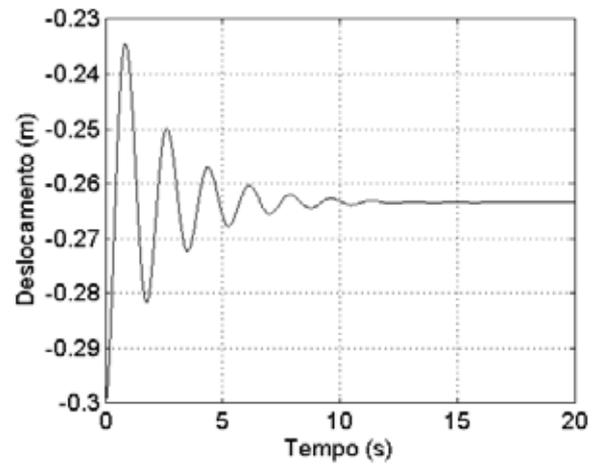
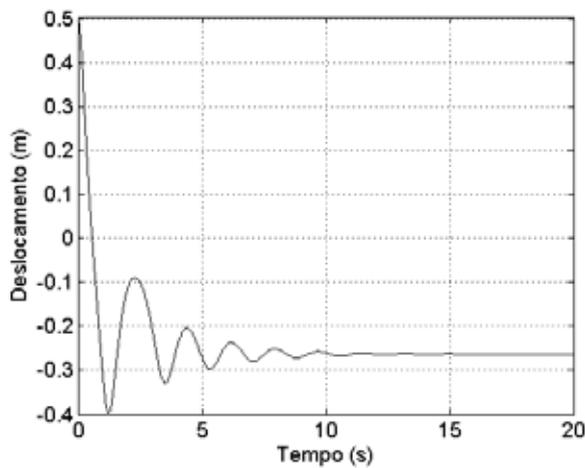
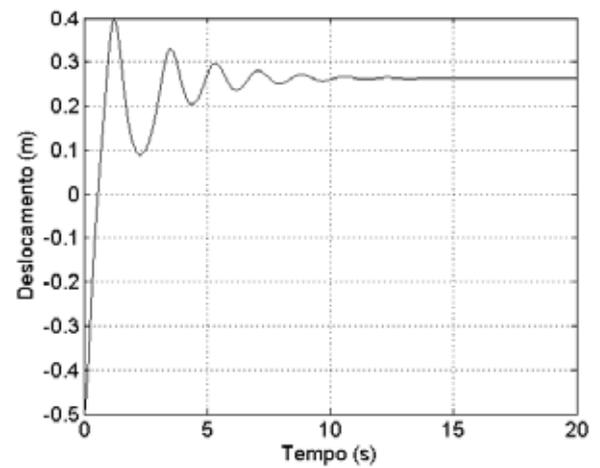
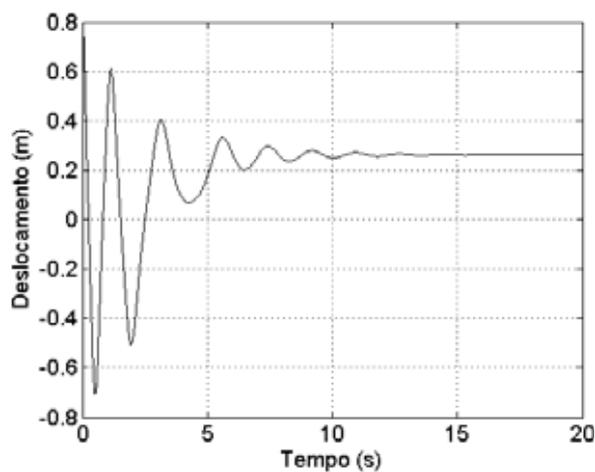
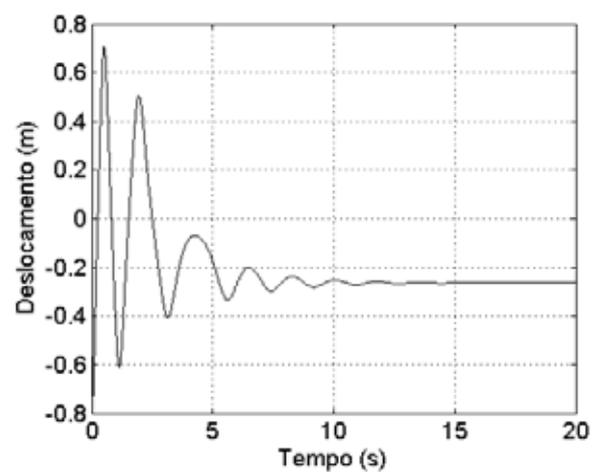
(a) $x_0 = 0,3$ m(b) $x_0 = -0,3$ m(c) $x_0 = 0,5$ m(d) $x_0 = -0,5$ m(e) $x_0 = 0,8$ m(f) $x_0 = -0,8$ m

Figura 5.32 – Histórico do deslocamento – sistema NLGS ideal – vibração livre

Observando a Figura 5.32 percebe-se que o sistema altera o ponto de equilíbrio em torno do qual o mesmo oscila em função da condição inicial do deslocamento. Para $x_0 = 0,3\text{m}$ o sistema oscila em torno do ponto de equilíbrio $+0,263\text{m}$. Para $x_0 = 0,5\text{m}$ o sistema passa a oscilar em torno do ponto de equilíbrio $-0,263\text{m}$. Para $x_0 = 0,8\text{m}$ o sistema volta a oscilar em torno do ponto de equilíbrio $+0,263\text{m}$. Conforme mencionado no capítulo 1 esse comportamento é chamado de “snap-through” e significa que o sistema passa rapidamente (“salta”) de um ponto de equilíbrio estável para outro. Conforme mostrado na Figura 5.1 esse sistema possui um ponto de equilíbrio instável (origem) e dois pontos de equilíbrio estável (um de cada lado da origem). Assim, o sistema fica alternando entre os seus pontos de equilíbrio estável, conseqüentemente, mudando de lado em relação à origem, em função da condição inicial do deslocamento.

Quando a magnitude da condição inicial do deslocamento é mantida e altera-se apenas o seu sinal, o sistema também altera o ponto de equilíbrio em torno do qual o mesmo oscila. Pela Figura 5.32 para $x_0 = 0,3\text{m}$ o sistema oscila em torno do ponto de equilíbrio $+0,263\text{m}$. Para $x_0 = -0,3\text{m}$ o sistema passa a oscilar em torno do ponto de equilíbrio $-0,263\text{m}$.

Através do histórico do deslocamento determina-se o período amortecido T_d . Conhecido o período amortecido calcula-se a frequência natural angular amortecida ω_d do sistema através da seguinte equação:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \quad (5.3)$$

Calculando a frequência natural angular amortecida para as condições iniciais da Figura 5.32 constrói-se a Tabela 5.10:

Tabela 5.10 – Frequência natural angular amortecida – sistema NLGS ideal – vibração livre

	x_0 (m)					
	-0,8	-0,5	-0,3	0,3	0,5	0,8
T_d (s)	1,4	2,3	1,8	1,8	2,3	1,4
ω_d (rad/s)	4,4	2,7	3,6	3,6	2,7	4,4

Analisando a Tabela 5.10 conclui-se que a frequência natural angular amortecida do sistema se altera em função da condição inicial do deslocamento, ou seja, o mesmo sistema oscila em frequência diferente à medida que se altera a condição inicial do deslocamento. Isso ocorre porque a rigidez equivalente do sistema NLGS muda em função do deslocamento, conforme mostra a Equação (3.44). Assim, variando-se o deslocamento, alterar-se a rigidez do sistema NLGS a qual por sua vez afeta a frequência natural do sistema.

5.3 SISTEMA COM RIGIDEZ NÃO-LINEAR

Conforme comentado anteriormente, a rigidez do sistema com rigidez não-linear é resultante da associação de uma parcela linear negativa e de uma parcela não-linear positiva.

A curva da energia potencial elástica do sistema com rigidez não-linear, calculada pela Equação (3.55), de acordo com os parâmetros da Tabela 5.1, é apresentada na Figura 5.33:

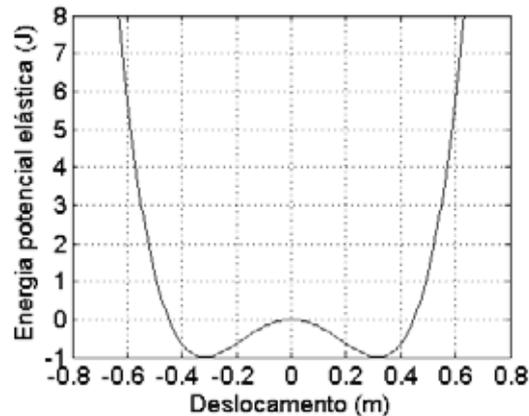


Figura 5.33 – Curva da energia potencial elástica em função do deslocamento do sistema com rigidez não-linear

Analisando a Figura 5.33 nota-se que o sistema com rigidez não-linear apresenta energia potencial elástica com dois poços de potencial.

Substituindo na Equação (3.60) os parâmetros da Tabela 5.1 obtém-se seguinte curva da força em função do deslocamento para o sistema com rigidez não-linear (Figura 5.34):

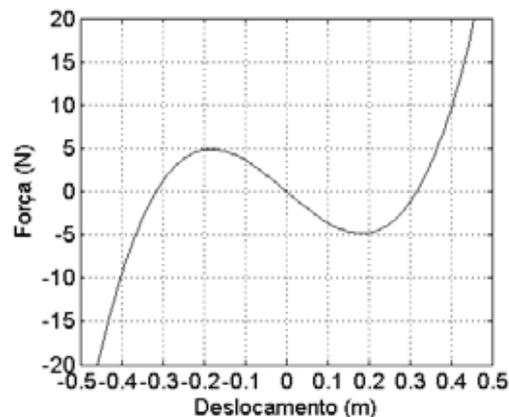


Figura 5.34 – Curva de força em função do deslocamento do sistema com rigidez não-linear

Sobrepondo as Figuras 5.1 e 5.33 tem-se o comparativo da energia potencial elástica do sistema NLGS com o sistema com rigidez não-linear (Figura 5.35).

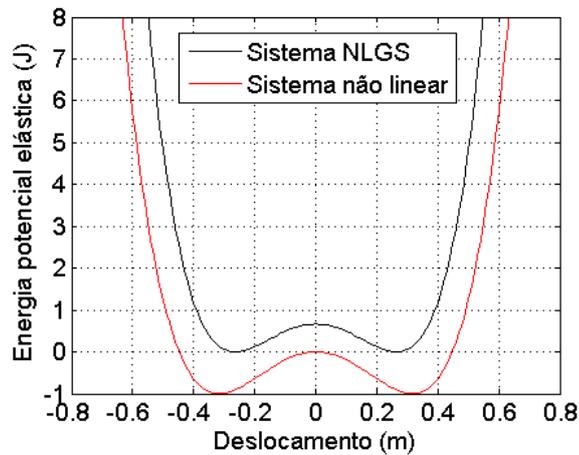


Figura 5.35 – Comparativo da energia potencial elástica em função do deslocamento – sistema NLGS x não-linear

A Figura 5.35 mostra que as duas curvas são bem próximas, ou seja, o comportamento dos dois sistemas em termos de energia potencial elástica é semelhante.

Sobrepondo as Figuras 5.3 e 5.34 tem-se o comparativo da força em função do deslocamento para os sistemas NLGS e com rigidez não-linear (Figura 5.36).

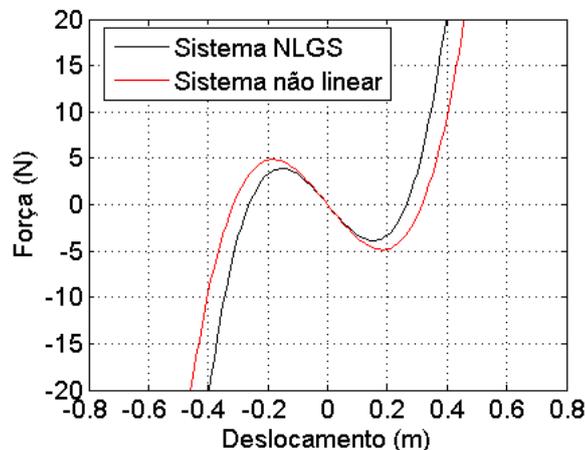


Figura 5.36 – Comparativo da força em função do deslocamento – sistema NLGS x não-linear

A Figura 5.36 mostra que as duas curvas são bem próximas, ou seja, o comportamento dos dois sistemas em termos de força é semelhante.

Para compreender o comportamento dinâmico do sistema com rigidez não-linear inicialmente analisa-se a curva de resposta em frequência (Figura 5.37). Foram utilizados dois parâmetros distintos para obter a curva de amplitude de deslocamento desse sistema:

- a) Constante de frequência do motor f_0 , definida pela Equação (2.3);
- b) Valor médio da velocidade angular do motor em regime permanente convertido para a unidade Hz (média da frequência do motor).

Na Figura 5.37 o valor da amplitude de deslocamento está em módulo e representa o máximo deslocamento do sistema em regime permanente. A constante de frequência f_0 do motor foi incrementada de 0,1 Hz varrendo a faixa de 0,1 Hz a 5 Hz. Para cada valor de f_0 foi calculada numericamente a respectiva amplitude de deslocamento e registrada na curva da Figura 5.37 (a). Para cada valor de f_0 também foi calculada a média da frequência do motor, a qual representa a frequência em torno da qual o motor estabiliza a sua rotação em regime permanente. Cada valor da média da frequência do motor foi registrado na curva da Figura 5.37 (b). Em outras palavras, significa que o único parâmetro variado durante a integração numérica foi a constante de frequência f_0 do motor. Os demais parâmetros foram mantidos constantes de acordo com a Tabela 5.1. Isso significa que em cada simulação realizada o motor elétrico apresentava uma curva característica diferente (para cada simulação realizada a constante de torque a foi mantida constante, porém, a frequência em que o motor atingia o regime estacionário foi alterada).

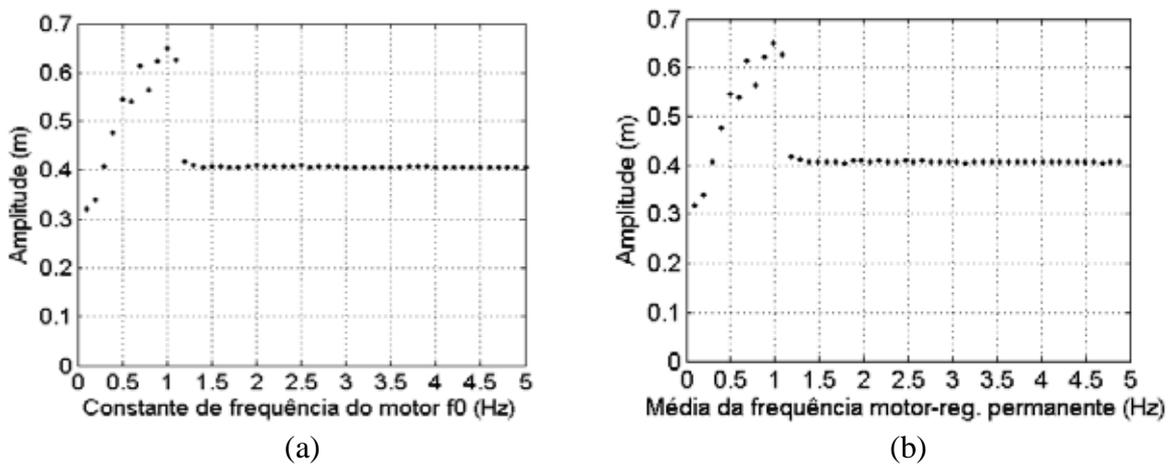


Figura 5.37 – Resposta em frequência – sistema com rigidez não-linear

(a) Amplitude de deslocamento em função da constante de frequência do motor f_0 ; (b) Amplitude de deslocamento em função da média da frequência do motor

Analisando a Figura 5.37 percebe-se que o valor máximo da amplitude de deslocamento do sistema com rigidez não-linear ocorre para a constante de frequência do motor f_0 igual a 1,0 Hz, que é a frequência natural do sistema. Quando a frequência do motor

coincide com a frequência natural do sistema ocorre a ressonância e a amplitude de deslocamento atinge o seu valor máximo. Para valores da constante de frequência do motor abaixo de 0,4 Hz e acima de 1,2 Hz a amplitude de deslocamento se reduz drasticamente, pois, o sistema está operando fora da sua frequência natural.

Comparando-se as Figuras 5.37 (a) e 5.37 (b) percebe-se que o valor da média da frequência do motor está muito próximo do valor da constante de frequência do motor f_0 . Isso significa que o motor não é capturado pela frequência natural do sistema, ou seja, o motor consegue estabilizar sua rotação num valor muito próximo da sua constante de frequência f_0 . Portanto, conclui-se que para o sistema com rigidez não-linear, com base os parâmetros da Tabela 5.1, não ocorre o efeito Sommerfeld.

Como já mencionado anteriormente, na integração numérica variou-se a constante de velocidade angular do motor Ω_0 (consequentemente a constante de frequência f_0). Os valores de f_0 para os quais se analisa com mais detalhe a resposta do sistema são mostrados na Tabela 5.11. Vale destacar que os valores da Tabela 5.11 (para o sistema com rigidez não-linear) são os mesmos da Tabela 5.2 (para o sistema NLGS não ideal), portanto, as curvas de torque em função da frequência do motor para o sistema com rigidez não-linear são as mesmas apresentadas na Figura 5.5. Os valores de f_0 da Tabela 5.11 foram escolhidos para analisar o comportamento do sistema antes da ressonância (0,5 Hz e 0,9 Hz), durante a ressonância (1,0 Hz) e após a ressonância (1,1 Hz; 1,2 Hz; 1,5 Hz e 2,0 Hz).

Tabela 5.11 – Parâmetro que foi variado na integração numérica – sistema com rigidez não-linear

	1	2	3	4	5	6	7
f_0 [Hz]	0,5	0,9	1,0	1,1	1,2	1,5	2,0

As Figuras 5.38 a 5.44 apresentam a resposta do sistema para os valores da constante de frequência do motor f_0 mostrados na Tabela 5.11, nas quais: (a) é o histórico do deslocamento (regime permanente + transiente); (b) é o histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) é o histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) é o plano de fase; (e) é a curva da FFT (espectro de frequências).

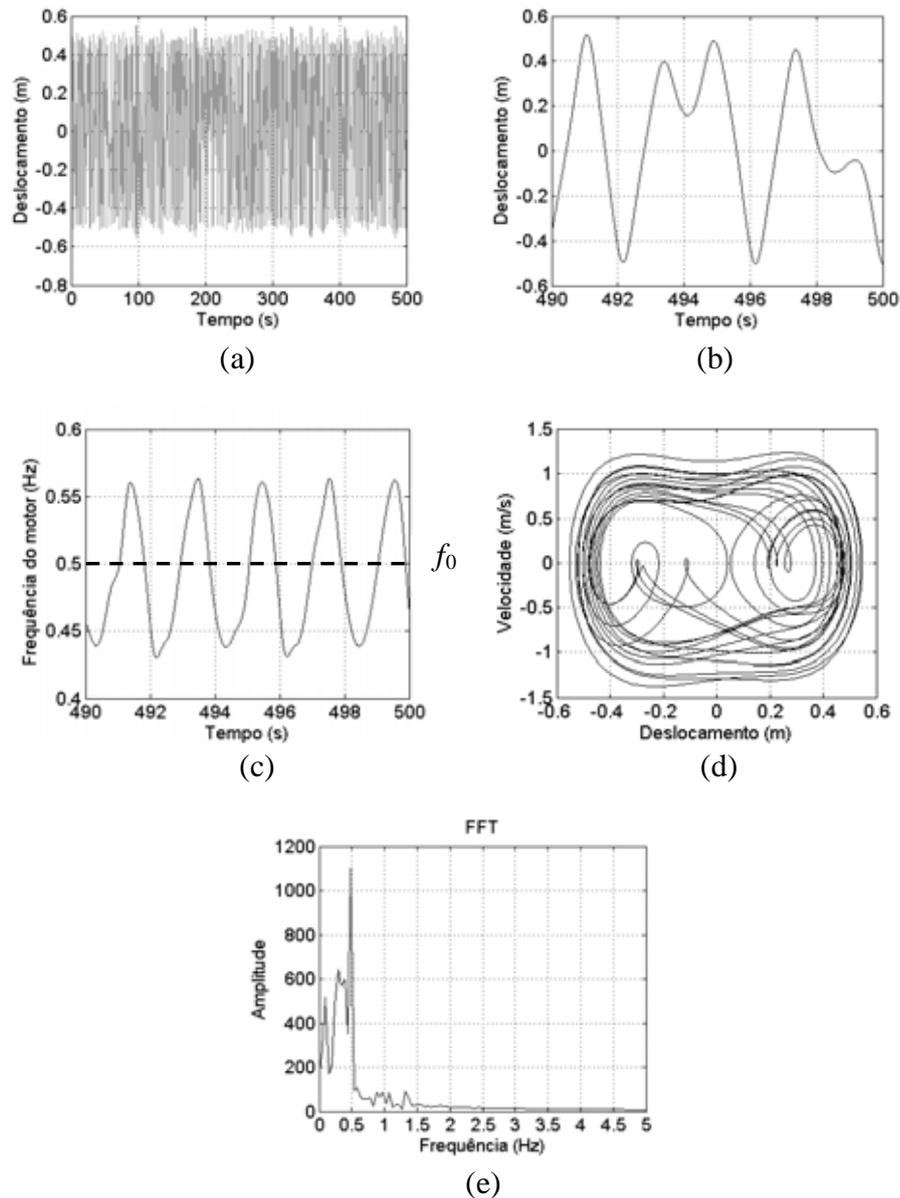


Figura 5.38 – Resposta – sistema não-linear – $f_0 = 0,5$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Analisando a Figura 5.38 (b) percebe-se que o sistema apresenta um comportamento irregular. A Figura 5.38 (d) também mostra que o sistema oscila com diversos períodos (movimento irregular), pois o plano de fase apresenta várias trajetórias. O espectro de frequências na Figura 5.38 (e) confirma que existem diversas frequências perturbando o movimento do sistema, inclusive a frequência de 0,5 Hz (constante de frequência do motor). Observando a Figura 5.38 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura.

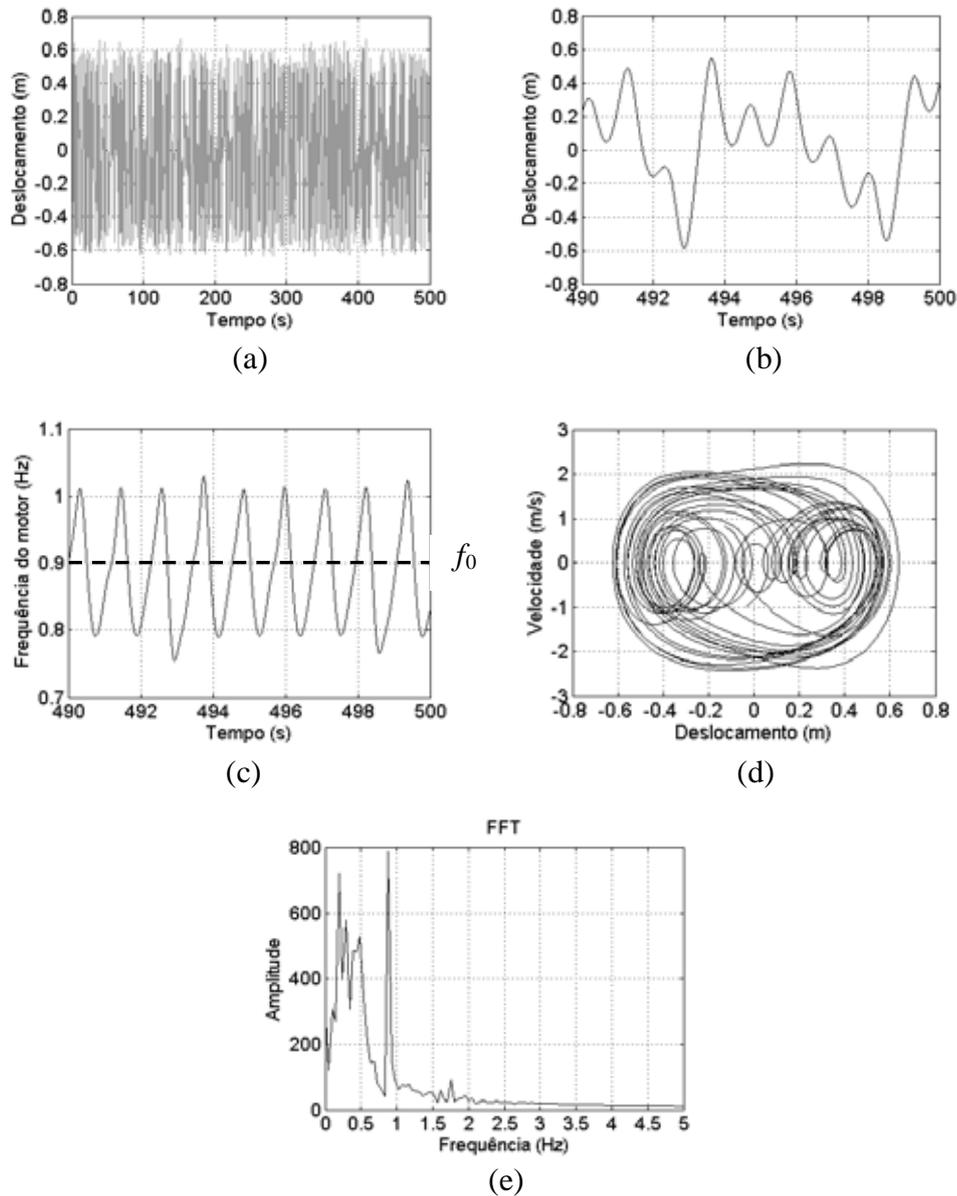


Figura 5.39 – Resposta – sistema não-linear – $f_0 = 0,9$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Observando a Figura 5.39 (b) nota-se que o sistema apresenta um comportamento irregular. A Figura 5.39 (d) também mostra que o sistema oscila com diversos períodos (movimento irregular), pois o plano de fase apresenta várias trajetórias. O espectro de frequências na Figura 5.39 (e) confirma que existem diversas frequências perturbando o movimento do sistema, inclusive a frequência de 0,9 Hz (constante de frequência do motor). Analisando a Figura 5.39 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura.

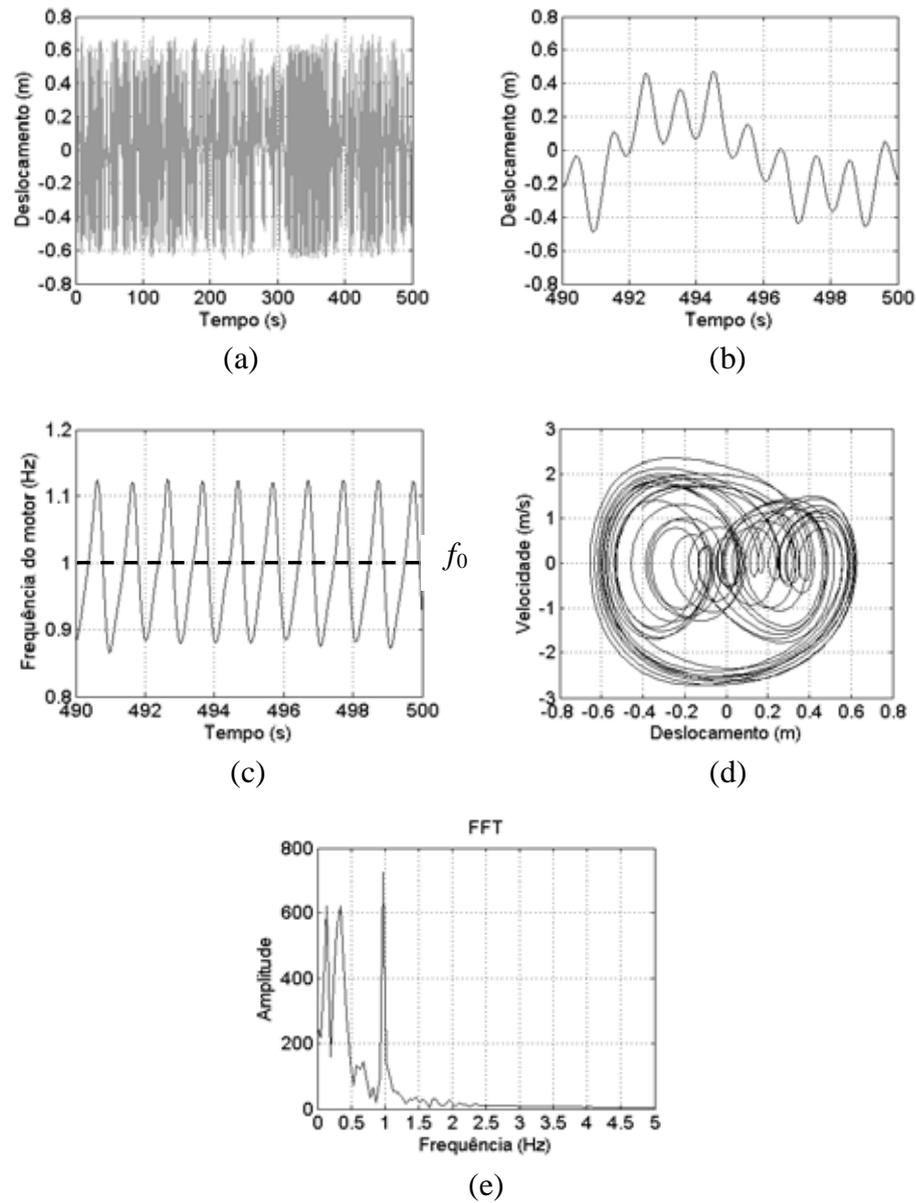


Figura 5.40 – Resposta – sistema não-linear – $f_0 = 1,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Analisando a Figura 5.40 (b) conclui-se que o sistema apresenta um comportamento irregular. A Figura 5.40 (d) também mostra que o sistema oscila com diversos períodos (movimento irregular), pois o plano de fase apresenta várias trajetórias. O espectro de frequências na Figura 5.40 (e) confirma que existem diversas frequências perturbando o movimento do sistema, inclusive a frequência de 1,0 Hz (constante de frequência do motor). Observando a Figura 5.40 (c) percebe-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura.

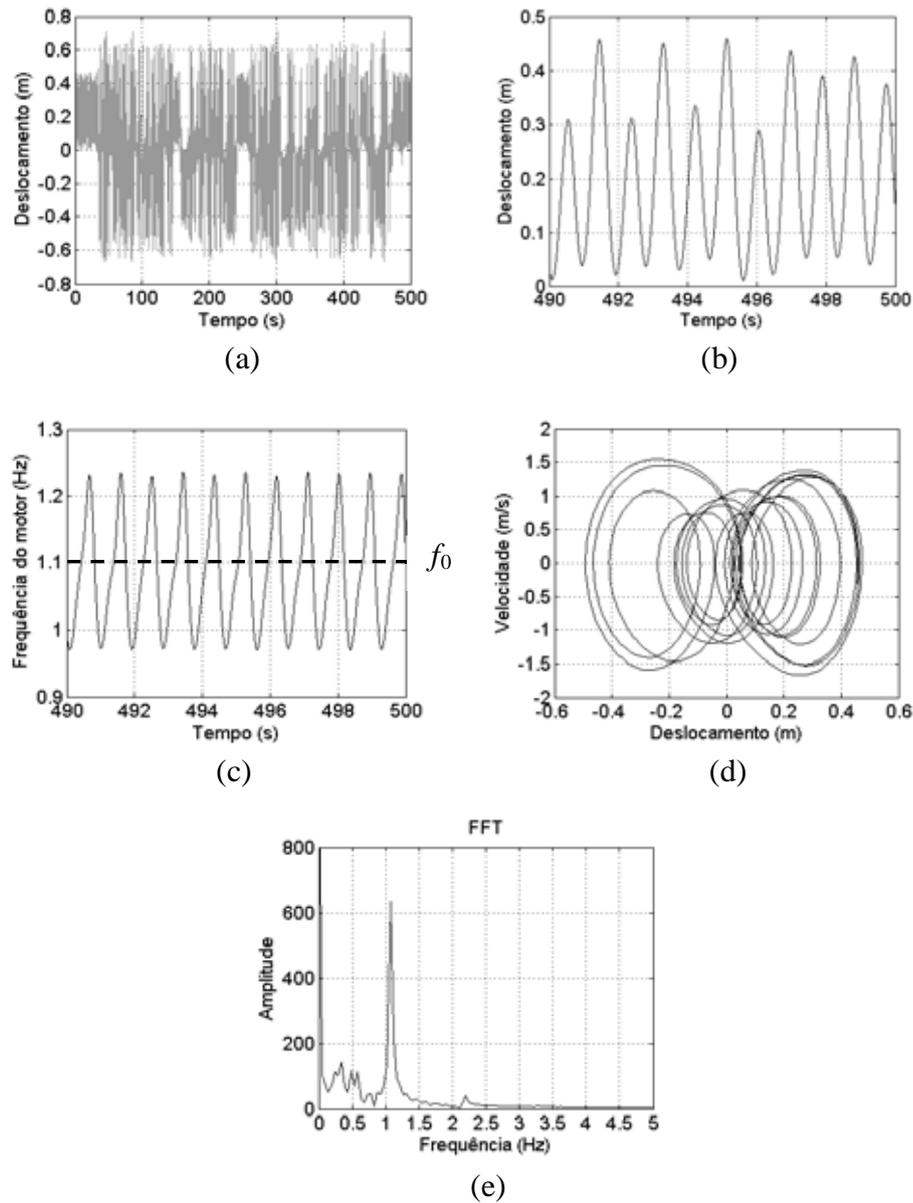


Figura 5.41 – Resposta – sistema não linear – $f_0 = 1,1$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Observando a Figura 5.41 (b) nota-se que o sistema apresenta um comportamento irregular. A Figura 5.41 (d) também mostra que o sistema oscila com diversos períodos (movimento irregular), pois o plano de fase apresenta várias trajetórias. O espectro de frequências na Figura 5.41 (e) confirma que existem diversas frequências perturbando o movimento do sistema, inclusive a frequência de 1,1 Hz (constante de frequência do motor). Analisando a Figura 5.41 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura.

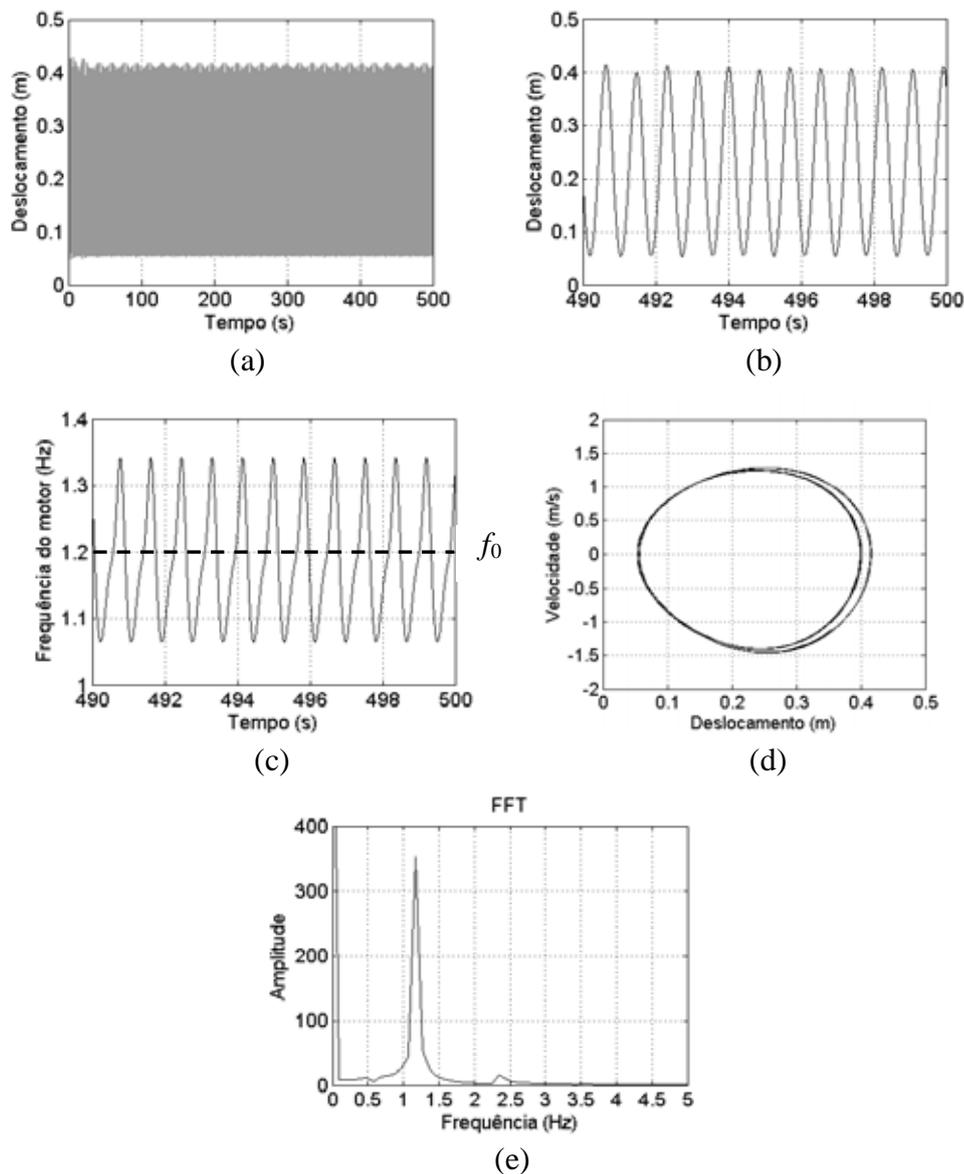


Figura 5.42 – Resposta – sistema não-linear – $f_0 = 1,2$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Analisando a Figura 5.42 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período dois. Observando a Figura 5.42 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura. A Figura 5.42 (d) confirma as informações da Figura 5.42 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período dois. O espectro de frequências na Figura 5.42 (e) confirma a presença de duas frequências no movimento do sistema, inclusive a frequência de 1,2 Hz (constante de frequência do motor).

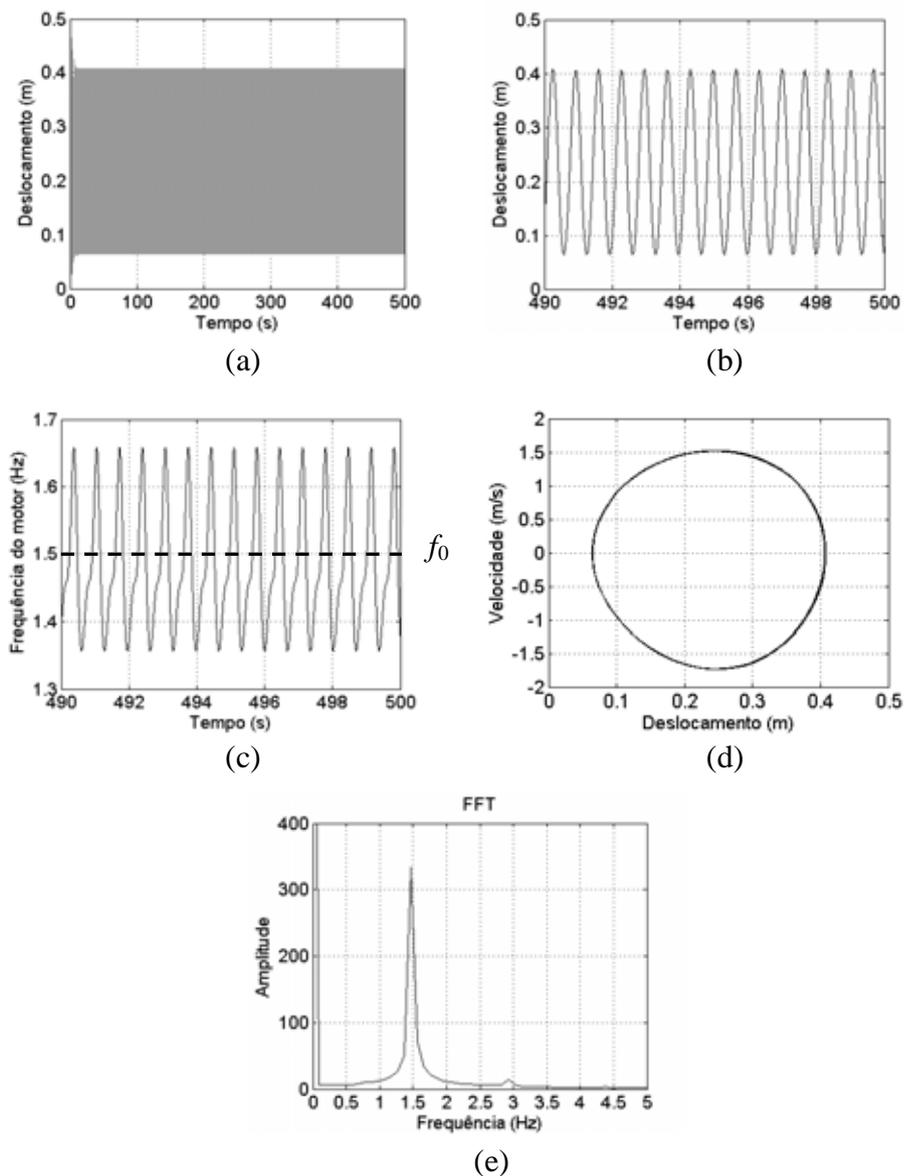


Figura 5.43 – Resposta – sistema não-linear – $f_0 = 1,5$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Observando a Figura 5.43 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. Observando a Figura 5.43 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura. A Figura 5.43 (d) confirma as informações da Figura 5.43 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um. O espectro de frequências na Figura 5.43 (e) confirma a presença de apenas a frequência de 1,5 Hz (constante de frequência do motor) no movimento do sistema.

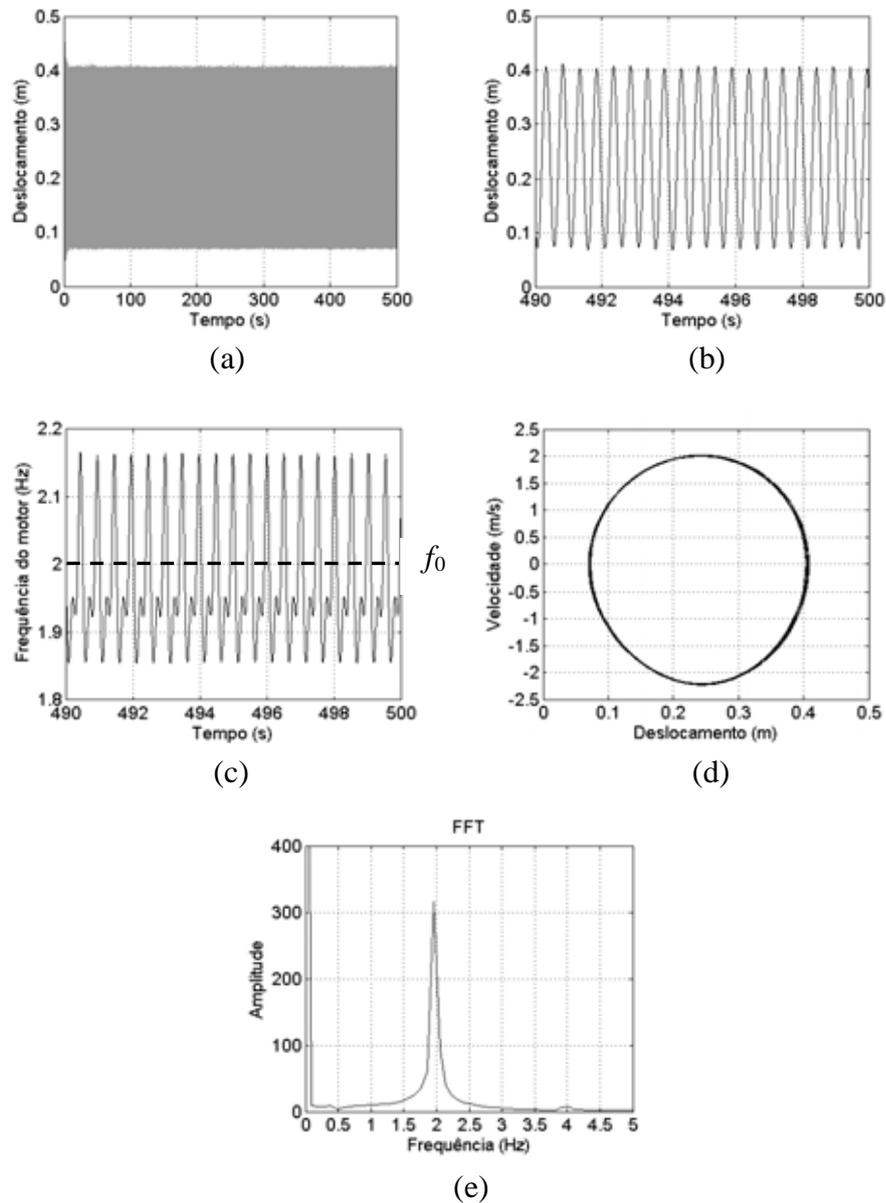


Figura 5.44 – Resposta – sistema não-linear – $f_0 = 2,0$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase; (e) FFT

Observando a Figura 5.44 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. Observando a Figura 5.44 (c) conclui-se que a frequência do motor consegue ultrapassar o valor da sua constante f_0 , ou seja, não ocorre a captura. A Figura 5.44 (d) confirma as informações da Figura 5.44 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um. O espectro de frequências na Figura 5.44 (e) confirma a presença de apenas a frequência de 2,0 Hz (constante de frequência do motor) no movimento do sistema.

Analisando as Figura 5.38 a 5.44 percebe-se que o comportamento do sistema não-linear também é complexo. Pequenas variações na constante de frequência do motor f_0 provocam grandes mudanças na resposta do sistema. As características que aumentam a complexidade no comportamento do sistema são a combinação de sinais das parcelas linear (sinal negativo) e não-linear (sinal positivo) da rigidez e a fonte de excitação não ideal.

O regime de movimento do sistema não-linear pode ser periódico ou ter indicações de movimento caótico dependendo do valor da constante de frequência do motor f_0 . Nas Figuras 5.38 a 5.41 têm-se indicações de regime de movimento caótico e nas Figuras 5.42 a 5.44 o regime de movimento é periódico. A Tabela 5.12 resume o tipo de regime de movimento do sistema (periódico ou indicação de movimento caótico) em função da constante de frequência do motor f_0 da Tabela 5.11.

A indicação de caos é comprovada pela curva da FFT. Nas Figuras 5.38 (e) a 5.41 (e) vê-se o espectro da FFT bastante perturbado, indicando a existência de várias frequências no movimento do sistema e nas Figuras 5.42 (e) a 5.44 (e) têm-se algumas frequências predominantes, comportamento característico de um regime periódico.

Tabela 5.12 – Regime de movimento – sistema com rigidez não-linear – resumo

Regime de movimento	indicativo de caos	indicativo de caos	indicativo de caos	indicativo de caos	periódico	periódico	periódico
f_0 [Hz]	0,5	0,9	1,0	1,1	1,2	1,5	2,0

Observando as Figuras 5.38 (c) a 5.44 (c) verifica-se que a frequência do motor não é capturada pela frequência de ressonância (a frequência do motor ultrapassa o valor da constante f_0). Percebe-se também a flutuação que existe na frequência do motor, o que pode ser atribuído à interação que existe entre o motor e o próprio sistema.

5.4 SISTEMA NÃO IDEAL

A rigidez k do sistema não ideal foi definida de forma que a energia potencial elástica tenha a mesma ordem de grandeza do sistema com rigidez não-linear, pelo menos na faixa de amplitude de deslocamento em que os sistemas são analisados no presente trabalho.

A Figura 5.45 mostra a sobreposição da curva da energia potencial elástica para o sistema não ideal e com rigidez não-linear, de acordo com os parâmetros da Tabela 5.1. Embora as duas curvas sejam bem diferentes em termos de equação matemática, com os parâmetros adotados na Tabela 5.1 conseguiu-se um ajuste razoável entre elas para tornar o sistema não ideal e o sistema com rigidez não-linear o mais equivalente possível em termos de energia potencial elástica.

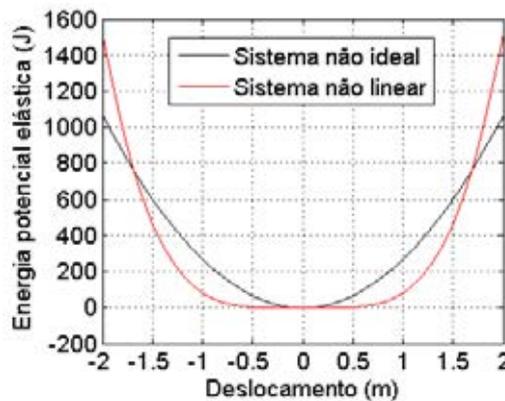


Figura 5.45 – Comparativo da energia potencial elástica em função do deslocamento – sistema não ideal x não-linear

Para compreender o comportamento dinâmico do sistema inicialmente analisa-se a curva de resposta em frequência (Figura 5.46). Foram utilizados dois parâmetros distintos para obter a curva de amplitude de deslocamento desse sistema:

- c) Constante de frequência do motor f_0 , definida pela Equação (2.3);
- d) Valor médio da velocidade angular do motor em regime permanente convertido para a unidade Hz (média da frequência do motor).

Na Figura 5.46 o valor da amplitude de deslocamento está em módulo e representa o máximo deslocamento do sistema em regime permanente. A constante de frequência f_0 do motor foi incrementada de 0,1 Hz varrendo a faixa de 0,1 Hz a 5 Hz. Para cada valor de f_0 foi calculada numericamente a respectiva amplitude de deslocamento e registrada na curva da Figura 5.46 (a). Para cada valor de f_0 também foi calculada a média da frequência do motor, a qual representa a frequência em torno da qual o motor estabiliza a sua rotação em regime

permanente. Cada valor da média da frequência do motor foi registrado na curva da Figura 5.46 (b). Em outras palavras, significa que o único parâmetro variado durante a integração numérica foi a constante de frequência f_0 do motor. Os demais parâmetros foram mantidos constantes de acordo com a Tabela 5.1. Isso significa que em cada simulação realizada o motor elétrico apresentava uma curva característica diferente (para cada simulação realizada a constante de torque a foi mantida constante, porém, a frequência em que o motor atingia o regime estacionário foi alterada).

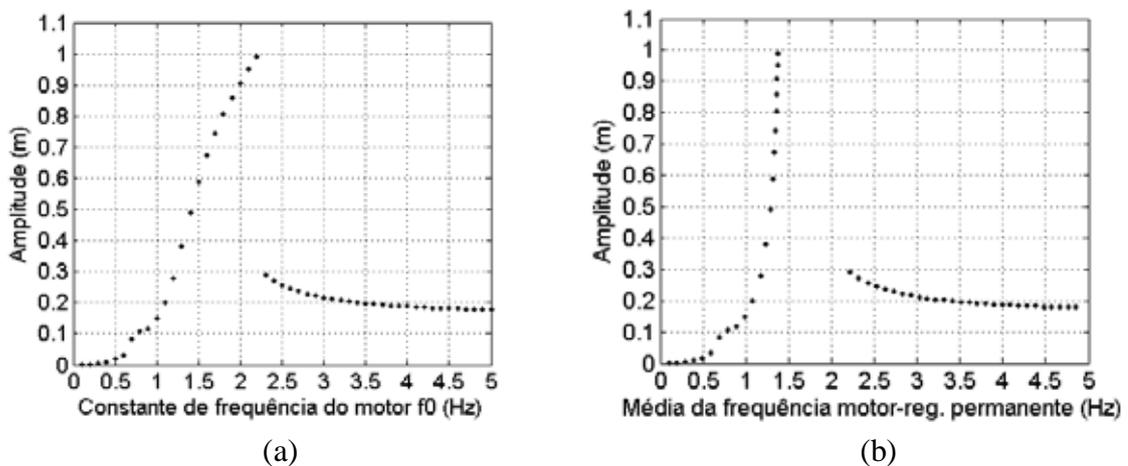


Figura 5.46 – Resposta em frequência – sistema não ideal

(a) Amplitude de deslocamento em função da constante de frequência do motor f_0 ; (b) Amplitude de deslocamento em função da média da frequência do motor

Analisando a Figura 5.46 (a) percebe-se que o valor máximo da amplitude de deslocamento do sistema não ideal ocorre para a constante de frequência do motor f_0 igual a 2,2 Hz. Comparando-se as Figuras 5.46 (a) e (b) é possível perceber o efeito da captura pela ressonância nos casos em que a frequência do motor estabiliza num valor inferior ao da constante de frequência f_0 . Isso ocorre porque a frequência do motor fica capturada na frequência natural do sistema. De acordo com a Figura 5.46 (b) a frequência natural do sistema é de 1,38 Hz (os pontos da curva formam praticamente uma reta vertical em torno desse valor de frequência). Além disso, percebe-se na Figura 5.46 (b) o salto (descontinuidade) na curva de amplitude de deslocamento. Portanto, para o sistema não ideal, de acordo com os parâmetros da Tabela 5.1, ocorre o efeito Sommerfeld. Esse comportamento destaca a forte interação que existe entre o sistema e a fonte de excitação não ideal (motor elétrico).

Na região entre as constantes de frequência do motor f_0 de 1,38 Hz e 2,20 Hz percebe-se que a rotação do motor praticamente não se altera enquanto a amplitude de deslocamento aumenta acentuadamente, ou seja, a energia fornecida ao motor ao invés de aumentar a sua rotação é direcionada para o sistema, resultando num aumento significativo da amplitude de deslocamento. Para valores da constante de frequência do motor abaixo de 1,0 Hz e acima de 2,2 Hz a amplitude de deslocamento se reduz drasticamente, pois, o sistema está operando fora da sua frequência natural.

Como já mencionado anteriormente, na integração numérica variou-se a constante de velocidade angular do motor Ω_0 (consequentemente a constante de frequência f_0). Os valores de f_0 para os quais se analisa com mais detalhe a resposta do sistema são mostrados na Tabela 5.13. Esses valores de f_0 foram escolhidos para analisar o comportamento do sistema antes da ressonância (1,00 Hz), durante a ressonância (1,38 Hz) e após a ressonância (2,00 Hz e 2,20 Hz).

Tabela 5.13 – Parâmetro que foi variado na integração numérica – sistema não ideal

	1	2	3	4
f_0 [Hz]	1,00	1,38	2,00	2,20

A Figura 5.47 mostra cada uma das curvas do torque em função da frequência do motor elétrico para os valores de f_0 da Tabela 5.13. Lembrando que a constante de torque a do motor foi mantida constante (Tabela 5.1).

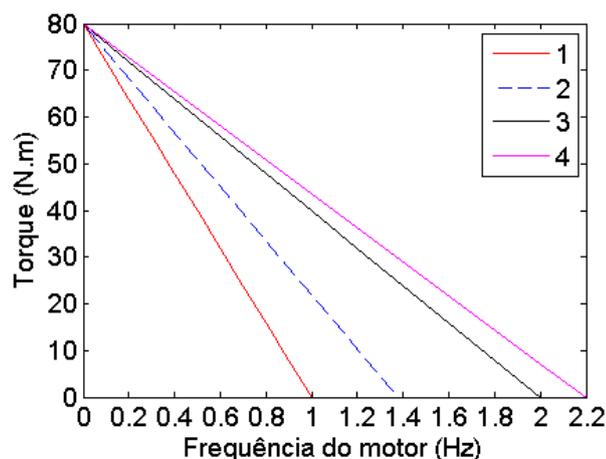


Figura 5.47 – Curvas de torque em função da frequência do motor elétrico – sistema não ideal

As Figuras 5.48 a 5.51 apresentam os resultados da simulação para os valores da constante de frequência do motor f_0 mostrados na Tabela 5.13, nas quais: (a) é o histórico do

deslocamento (regime permanente + transiente); (b) é o histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) é o histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente) e (d) é o plano de fase.

A linha horizontal presente no histórico da frequência do motor das Figuras 5.48 (c) a 5.51 (c) representa o valor da constante de frequência do motor f_0 . Com essa informação pode-se comparar a frequência do motor em regime permanente (estacionário) com o valor da sua constante f_0 .

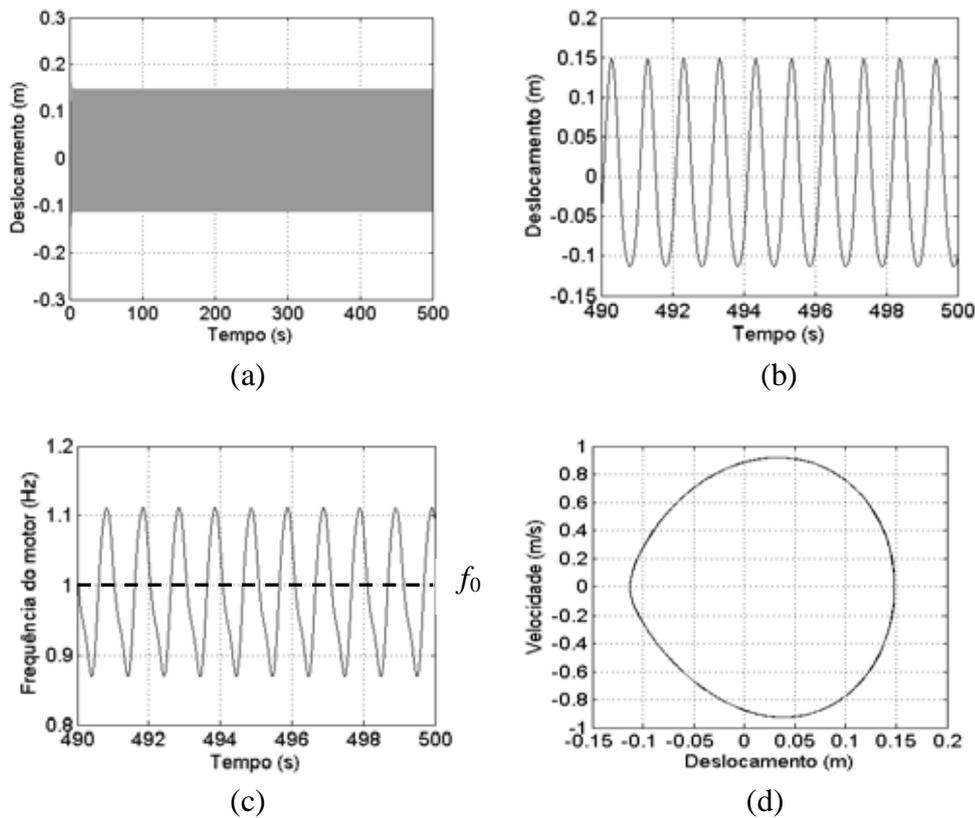


Figura 5.48 – Resposta – sistema não ideal – $f_0 = 1,00$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase

Analisando a Figura 5.48 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. Através da Figura 5.48 (c) nota-se que não ocorre a captura pela ressonância, pois a frequência do motor em regime permanente oscila em torno da sua constante de frequência f_0 . A Figura 5.48 (d) confirma as informações da Figura 5.48 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um.

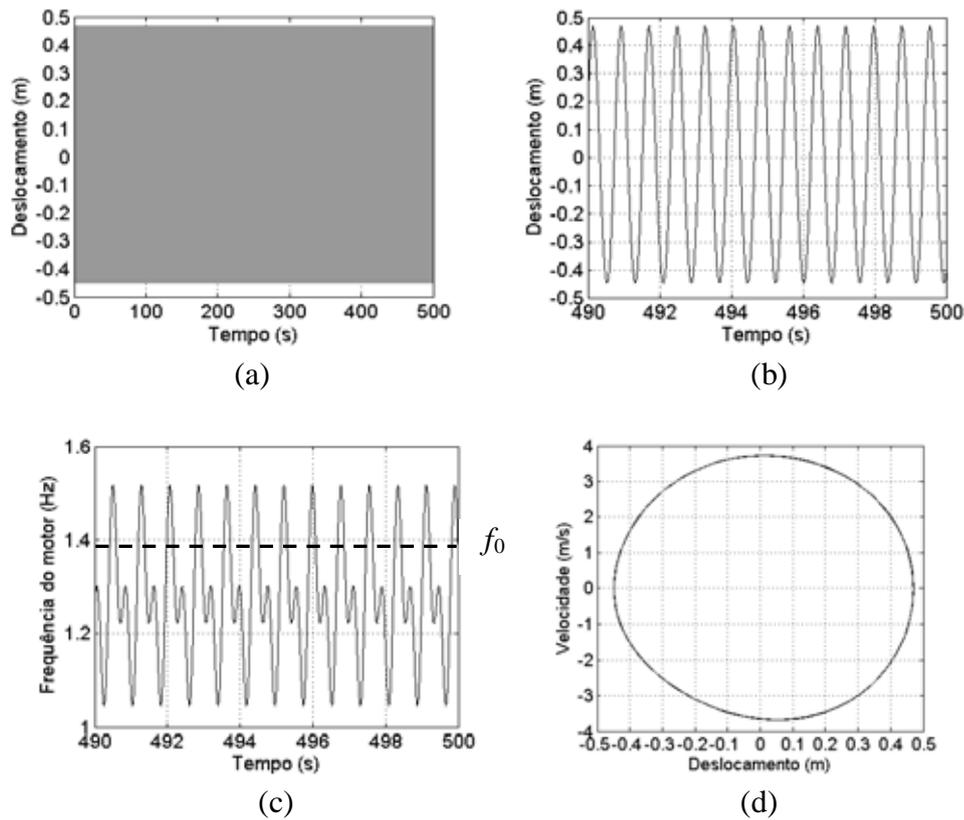
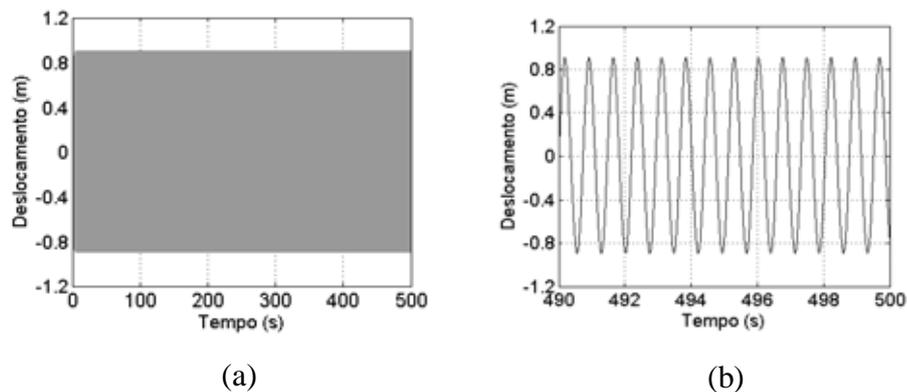


Figura 5.49 – Resposta – sistema não ideal – $f_0 = 1,38 \text{ Hz}$

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase

Analisando a Figura 5.49 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. Através da Figura 5.49 (c) nota-se que não ocorre a captura pela ressonância, pois a frequência do motor em regime permanente oscila em torno da sua constante de frequência f_0 . A Figura 5.49 (d) confirma as informações da Figura 5.49 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um.



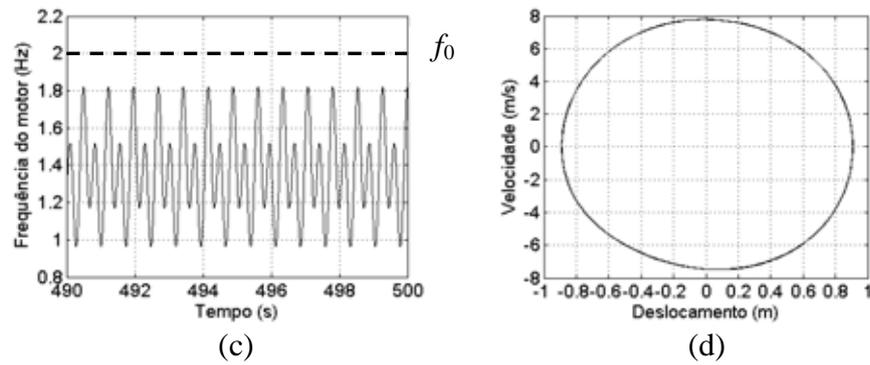


Figura 5.50 – Resposta – sistema não ideal – $f_0 = 2,00$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase

Analisando a Figura 5.50 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. Através da Figura 5.50 (c) nota-se que ocorre a captura pela ressonância, pois a frequência do motor em regime permanente não atinge o valor da sua constante de frequência f_0 , sendo capturada pela frequência natural do sistema. A Figura 5.50 (d) confirma as informações da Figura 5.50 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um.

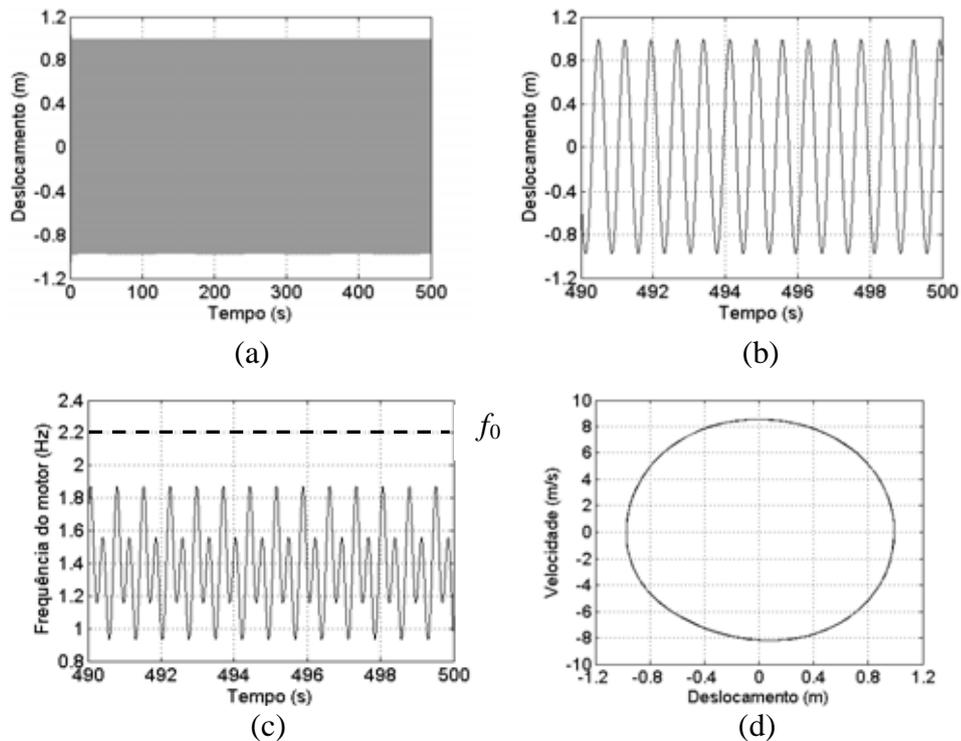


Figura 5.51 – Resposta – sistema não ideal – $f_0 = 2,20$ Hz

(a) histórico do deslocamento (regime transiente + permanente); (b) histórico do deslocamento (zoom do regime permanente); (c) histórico da frequência do motor (zoom do regime permanente); (d) plano de fase

Analisando a Figura 5.51 (b) percebe-se que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável. Além disso, nota-se que o movimento apresenta período um. Através da Figura 5.51 (c) nota-se que ocorre a captura pela ressonância, pois a frequência do motor em regime permanente não atinge o valor da sua constante de frequência f_0 , sendo capturada pela frequência natural do sistema. A Figura 5.51 (d) confirma as informações da Figura 5.51 (b), mostrando que o sistema oscila em torno de apenas um ponto de equilíbrio estável e que o movimento apresenta período um.

Analisando o histórico do deslocamento percebe-se que o movimento desse sistema apresenta período um para as análises feitas com base nas frequências da Tabela 5.13. Observando os históricos de frequência do motor percebe-se a forte interação que existe entre o sistema e a fonte não ideal de energia. Isso pode ser percebido pela flutuação no valor da frequência ao longo do tempo. A captura pela ressonância pode ser observada nas Figuras 5.50 (c) e 5.51 (c), nas quais se percebe que a frequência do motor não consegue ultrapassar o valor da constante f_0 , sendo capturada pela frequência natural do sistema. Essas conclusões ajudam a comprovar a veracidade e a consistência dos dados mostrados nas curvas de resposta em frequência da Figura 5.46.

5.5 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DOS SISTEMAS ESTUDADOS

Na sequência é feita uma discussão dos resultados obtidos numericamente para os sistemas estudados.

A Tabela 5.14 traz alguns dados que foram apresentados ao longo do capítulo 5 a fim de fazer um resumo de informações para ajudar na discussão do comportamento dinâmico dos sistemas estudados que será realizada na sequência.

Tabela 5.14 – Dados para comparação dos resultados dos sistemas estudados

Sistema	Frequência natural (Hz)	Máxima amplitude de deslocamento (m)	Apresenta o efeito Sommerfeld?
NLGS não ideal	0,90	0,72	Não
NLGS ideal	0,80	0,70	Não
Rigidez não-linear	1,00	0,65	Não
Não ideal	1,38	0,99	Sim

5.5.1 Sistema NLGS não ideal e sistema NLGS ideal

Fazendo um comparativo entre as Figuras 5.4 (resposta em frequência do sistema NLGS não ideal) e 5.13 (resposta em frequência do sistema NLGS ideal) conclui-se que ambos os sistemas tem amplitude de deslocamento máxima próxima de 0,7 m. A frequência natural do sistema NLGS não ideal é de 0,9 Hz e a do NLGS ideal é de 0,8 Hz.

Analisando o plano de fase e o histórico de deslocamento dos dois sistemas para as frequências das Tabelas 5.2 (NLGS não ideal) e 5.4 (NLGS ideal) percebe-se que os valores de deslocamento e velocidade são muito próximos entre os dois sistemas. Para a frequência de 0,9 Hz o sistema NLGS não ideal tem regime de movimento periódico e o sistema NLGS ideal tem indicação de movimento caótico. Para as demais frequências analisadas nesse trabalho a conclusão a respeito do regime de movimento é a mesma para os dois sistemas NLGS, de acordo com os parâmetros da Tabela 5.1.

Em função dos comentários dos parágrafos anteriores pode-se afirmar que para o sistema NLGS, de acordo com os parâmetros da Tabela 5.1, não houve diferença significativa no comportamento do sistema devido à alteração da fonte de excitação de não ideal para ideal. A diferença mais significativa entre os dois sistemas foi verificada para a frequência de 0,9 Hz, dentre as que foram analisadas nesse trabalho.

Com relação às bifurcações não é possível fazer a comparação entre os dois sistemas, pois os diagramas de bifurcação foram construídos apenas para o sistema NLGS ideal.

5.5.2 Sistema NLGS não ideal e sistema com rigidez não-linear

Comparando o sistema NLGS não ideal com o sistema com rigidez não-linear percebe-se que os dois sistemas têm resposta na mesma ordem de grandeza em termos de deslocamento e velocidade, informação que pode ser confirmada pelo plano de fase e curva de amplitude de deslocamento em função da constante de frequência f_0 do motor, os quais apresentam valores na mesma ordem de grandeza. Uma diferença observada na resposta dos dois sistemas é que a indicação de movimento caótico está numa faixa mais larga de frequência para o sistema com rigidez não-linear em relação ao sistema NLGS não ideal, para as constantes de frequência do motor f_0 utilizadas nesse trabalho e os parâmetros da Tabela 5.1. O sistema com rigidez não-linear apresenta indicação de regime de movimento caótico para os seguintes valores da constante de frequência do motor f_0 : 0,5 Hz; 0,9 Hz; 1,0 Hz e 1,1 Hz. Já no sistema NLGS não ideal tem-se indicação de caos apenas para $f_0=1,0$ Hz, conforme os parâmetros da Tabela 5.1.

Com base na discussão feita no parágrafo anterior conclui-se que, para a indicação de regime de movimento caótico, é mais significativa a associação de sinal das parcelas linear e não-linear da rigidez do sistema com rigidez não-linear do que a não-linearidade geométrica da rigidez do sistema NLGS não ideal.

Observando a Figura 5.4 conclui-se que o sistema NLGS não ideal tem amplitude de deslocamento máxima de 0,72 m e frequência natural de 0,9 Hz. Através da Figura 5.37 identifica-se que o sistema com rigidez não-linear possui amplitude de deslocamento máxima de 0,65 m e frequência natural de 1,0 Hz. Portanto, o sistema NLGS não ideal possui uma amplitude de deslocamento máxima 11% maior e uma frequência natural 10% menor do que o sistema com rigidez não-linear.

O efeito Sommerfeld não ocorre em nenhum desses dois sistemas.

Com as informações mostradas acima pode-se afirmar que o sistema NLGS não ideal tem um comportamento similar ao sistema com rigidez não-linear, ou seja, o mecanismo articulado de barras ligado à mola vertical do sistema NLGS representa fisicamente bem a associação de rigidez linear negativa e rigidez não-linear positiva do sistema com rigidez não-linear, de forma que os dois sistemas apresentam comportamento semelhante, para os parâmetros da Tabela 5.1 e constantes de frequência f_0 utilizados nesse trabalho.

5.5.3 Sistema NLGS não ideal e sistema não ideal

Comparando na Tabela 5.1 a coluna de parâmetros do sistema NLGS não ideal com a coluna do sistema não ideal percebe-se que ambos possuem os mesmos valores de parâmetros. A diferença é que no NLGS a mola está ligada ao mecanismo articulado de barras, enquanto no sistema não ideal a mola está ligada diretamente ao bloco de massa M , ou seja, os parâmetros da Tabela 5.1 que diferenciam os dois sistemas são o comprimento das barras L e a deformação inicial da mola d_0 , os quais não existem no sistema não ideal. Além disso, tanto o sistema NLGS não ideal quanto o sistema não ideal são excitados por um motor elétrico com rotor desbalanceado. Para realizar a integração numérica foi utilizado o mesmo valor para a constante de torque a do motor para os dois sistemas (Tabela 5.1). A faixa e o incremento de frequência utilizados para construir a curva de amplitude de deslocamento também foram os mesmos para os dois sistemas, ou seja, os dois sistemas possuem a mesma excitação.

Observando a Figura 5.4 conclui-se que o sistema NLGS não ideal tem amplitude de deslocamento máxima de 0,72 m e frequência natural de 0,9 Hz. Através da Figura 5.46 identifica-se que o sistema não ideal possui amplitude de deslocamento máxima de 0,99 m e frequência natural de 1,38 Hz. Além disso, no sistema NLGS não ideal não ocorre o efeito Sommerfeld, enquanto no sistema não ideal o mesmo já acontece.

Conforme mencionado anteriormente os dois sistemas foram simulados utilizando o mesmo valor dos parâmetros, inclusive com relação à excitação (motor elétrico). Assim, seguindo as conclusões do parágrafo anterior pode-se afirmar que o sistema NLGS não ideal eliminou o efeito Sommerfeld presente no sistema não ideal. Além disso, a amplitude de deslocamento máxima foi reduzida de 0,99 m para 0,72 m (redução de 27%) e a frequência natural diminuiu de 1,38 Hz para 0,9 Hz (redução de 35%). Portanto, pensando em ganhos de Engenharia pode-se afirmar que o sistema NLGS não ideal eliminou o efeito Sommerfeld, reduziu a amplitude de deslocamento máxima em 27% e reduziu a frequência natural em 35%, de acordo com os parâmetros da Tabela 5.1.

Para o sistema NLGS não ideal tem-se indicação de regime de movimento caótico, de acordo com os parâmetros da Tabela 5.1, para a constante de frequência f_0 do motor igual a 1,0 Hz. Para os demais valores de f_0 analisados no trabalho o regime de movimento é periódico. Para o sistema não ideal o regime de movimento é sempre periódico, pois o sistema é linear.

Assim, pode-se concluir que o sistema NLGS apresentou ganho de Engenharia por ter eliminado o efeito Sommerfeld e por ter reduzido a amplitude de deslocamento máxima. A

diminuição da frequência natural do sistema também é considerada um ganho de Engenharia caso o sistema seja utilizado como um absorvedor de vibração. A indicação de regime de movimento caótico não pode ser usada como justificativa para ganho ou perda do sistema NLGS, pois depende da aplicação do sistema para concluir se é uma vantagem ou uma desvantagem. Esse ponto não será discutido nesse trabalho.

Após todas as discussões realizadas a respeito de cada um dos sistemas estudados apresenta-se a Tabela 5.15 com o objetivo de mostrar a importância e a contribuição de cada sistema para o trabalho.

Tabela 5.15 – Resumo da importância e da contribuição de cada sistema estudado para o trabalho

Sistema	Importância/Contribuição para o trabalho
NLGS não ideal	<ul style="list-style-type: none"> • Sistema principal do trabalho; • É um exemplo físico (aplicação prática) do sistema com rigidez não-linear. Apresenta máxima amplitude de deslocamento e frequência natural da mesma ordem de grandeza que o sistema com rigidez não-linear, evidenciando que o mecanismo articulado de barras ligado à mola vertical do sistema NLGS representa fisicamente bem a associação de rigidez linear negativa e rigidez não-linear positiva do sistema com rigidez não-linear; • Demonstra os ganhos de Engenharia ao substituir a rigidez linear do sistema não ideal por um sistema de duas barras articuladas com rigidez equivalente não-linear (redução de 27% na máxima amplitude de deslocamento, eliminação do efeito Sommerfeld e redução de 35% na frequência natural do sistema); • Tem um comportamento interessante para ser usado como absorvedor de vibração (redução de 35% na frequência natural em relação ao sistema não ideal).
NLGS ideal	<ul style="list-style-type: none"> • Permite comparar o comportamento dinâmico do sistema NLGS com fonte de energia ideal e não ideal.
Rigidez não-linear	<ul style="list-style-type: none"> • Sistema bastante estudado nas literaturas que tratam de vibrações; • Foi utilizado como base teórica para o estudo da rigidez não-linear do sistema NLGS; • Ajudou na definição/escolha dos parâmetros da Tabela 5.1.
Não ideal	<ul style="list-style-type: none"> • Sistema com menor complexidade do trabalho; • Serviu de base para evidenciar os ganhos de Engenharia do sistema NLGS; • Apresenta o efeito Sommerfeld.

Na sequência, o capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho.

6 CONCLUSÕES

Com relação à exposição humana à vibrações, considerada uma das justificativas desse trabalho, observa-se através do capítulo 1 que cada parte do corpo humano apresenta uma frequência de ressonância diferente, deixando claro que a frequência da vibração é um aspecto muito importante para o conforto e a saúde do ser humano.

O sistema NLGS apresenta um comportamento complexo devido à não-linearidade na rigidez. O regime de movimento do sistema é periódico ou tem-se indicação de regime de movimento caótico dependendo da frequência de excitação f para o sistema ideal e da constante de frequência f_0 do motor para o sistema não ideal. Essa afirmação pode ser comprovada através dos diagramas de bifurcação e planos de fase obtidos numericamente.

Comparando-se os sistemas NLGS não ideal e NLGS ideal percebe-se que a amplitude de deslocamento máxima e a frequência natural dos dois sistemas são muito próximas. Além disso, analisando o plano de fase e o histórico de deslocamento percebe-se que os valores de deslocamento e velocidade são muito próximos entre os dois sistemas.

O sistema com rigidez não-linear também tem comportamento complexo devido à não-linearidade na rigidez resultante da associação de sinal das parcelas linear negativa e não-linear positiva.

No sistema não ideal observa-se o efeito Sommerfeld, ficando evidente a captura pela ressonância nos casos em que a frequência do motor estabiliza num valor inferior ao da sua constante de frequência e o salto (descontinuidade) na curva de amplitude de deslocamento em função da frequência do motor. Nessa situação de captura comumente diz-se que a rotação do motor foi capturada pela frequência natural do sistema.

Fazendo um comparativo entre o sistema NLGS não ideal e o sistema não ideal conclui-se que o NLGS eliminou o efeito Sommerfeld, reduziu a amplitude de deslocamento máxima em 27% e reduziu a frequência natural em 35%, os quais são considerados os ganhos de Engenharia do sistema NLGS não ideal. A redução na frequência natural é interessante quando se pensa em utilizar o sistema NLGS como absorvedor de vibração, pois, conforme explicado no capítulo 1, a diminuição na frequência natural do sistema aumenta a região de isolamento.

Comparando o sistema NLGS não ideal com o sistema com rigidez não-linear conclui-se que a indicação de regime de movimento caótico ocorre em uma faixa maior de frequência no sistema com rigidez não-linear, para as mesmas constantes de frequência do motor e parâmetros da Tabela 5.1. Além disso, pode-se afirmar que o sistema NLGS não ideal tem um

comportamento similar ao sistema com rigidez não-linear, ou seja, o mecanismo articulado de barras ligado à mola vertical do sistema NLGS representa fisicamente bem a associação de rigidez linear negativa e rigidez não-linear positiva do sistema com rigidez não-linear, de forma que os dois sistemas apresentam comportamento semelhante, para os parâmetros da Tabela 5.1 e constantes de frequência f_0 utilizados nesse trabalho.

Após todas as análises e discussões realizadas ao longo do trabalho, quando se pensa na utilização dos sistemas estudados como absorvedores de vibração conclui-se que o sistema mais adequado para essa aplicação é o sistema NLGS não ideal, visto que o mesmo proporciona redução nas amplitudes de deslocamento, redução na frequência natural do sistema e não apresenta o efeito Sommerfeld.

7 TRABALHOS FUTUROS

No contexto da interação entre as vibrações e o corpo humano ressalta-se o aparecimento do caos como um fator importante a ser estudado. Pensando no ambiente industrial, uma máquina operando sob o regime caótico implica que a mesma oscila em uma faixa larga de frequências. Como cada parte do corpo humano tem uma frequência de ressonância diferente, um trabalhador exposto a esse tipo de vibração sob regime caótico pode sofrer dano em várias partes do seu corpo. Dessa forma, como complemento do presente trabalho, surge a motivação e a justificativa de se empregar um método de controle no sistema NLGS a fim de transformar um movimento originalmente caótico em periódico com o objetivo de evitar as frequências de ressonância do corpo humano.

Outro desdobramento interessante do sistema NLGS seria a inclusão de um absorvedor de vibração ligado ao bloco de massa M com o objetivo de reduzir a amplitude de deslocamento do sistema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHŞVERİŞÇİ, G.F.; BAYIROĞLU, H.; ÜNAL, Nonlinear response of vibrational conveyers with non-ideal vibration exciter: primary resonance, **Nonlinear Dyn**, 69, p. 1611-1619, 2012.
- AVRAMOV, K.V., MIKHLIN, YU. V., Snap-Through Truss as a Vibration Absorber, **Journal of Vibration and Control**, 10, p. 291-308, 2004.
- AVRAMOV, K.V., MIKHLIN, YU. V., Snap-through truss as an absorber of forced oscillations, **Journal of Sound and Vibration**, 290, p. 705-722, 2006.
- BALTHAZAR, J.M., MOOK, D.T., WEBER, H.I., BRASIL, R.M.L.R.F., FENILI, A., Belato, D., FELIX, J.L.P. An Overview on Non-Ideal Vibrations. **Meccanica**, 38, p. 613-621, 2003.
- BOLLA, M.R. *et al.* On an approximate analytical solution to a nonlinear vibrating problem, excited by a nonideal motor, **Nonlinear Dyn**, 50, p. 841-847, 2007.
- CARRELLA, A., BRENNAN, M.J., KOVACIC, I., WATERS, T.P. On the force transmissibility of a vibration isolator with quasi-zero-stiffness, **Journal of Sound and Vibration**, 322, p. 707-717, 2009.
- CARRELLA, A., BRENNAN, M.J., WATERS, T.P. Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic, **Journal of Sound and Vibration**, 301, p. 678-689, 2007.
- CARRELLA, A., BRENNAN, M.J., WATERS, T.P. Optimization of a Quasi-Zero-Stiffness Isolator, **Journal of Mechanical Science and Technology**, 21, p. 946-949, 2007.
- CARRELLA, A., BRENNAN, M.J., WATERS, T.P., LOPES JR., V. Force and displacement transmissibility of a nonlinear isolator with high-static-low-dynamic-stiffness, **International Journal of Mechanical Sciences**, 55, p. 22-29, 2012.
- CVETICANIN, L. Dynamics of the non-ideal mechanical systems: A review. **Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics**, v.4, n°2, p. 75-86, 2010.
- GODOY, W.R.A.; BALTHAZAR, J.M.; PONTES JR, B.R.; FELIX, J.L.P. On a nonlinear dynamics of a non-ideal oscillator, with a snap-through truss absorber (STTA). **DINCON**, 2011.
- GODOY, W.R.A.; BALTHAZAR, J.M.; PONTES JR, B.R.; FELIX, J.L.P. Using of a snap-through truss absorber in the attenuation of the Sommerfeld effect. **MATEC Web of Conferences**, 1, 2012.
- GODOY, W.R.A.; BALTHAZAR, J.M.; PONTES JR, B.R.; FELIX, J.L.P., TUSSET, A.M. A note on non-linear phenomena in a non-ideal oscillator, with a snap-through truss absorber, including parameter uncertainties. **Institution of Mechanical Engineers**, 227, p. 76-86, 2012.

- GRIFFIN, M. J. **Handbook of Human Vibration**. United States of America: Academic Press, 1990.
- HRINDA, G.A. Snap-Through Instability Patterns in Truss Structures. **AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference**, 51, 2010.
- IIDA, I. **Ergonomia: Projeto e Produção**. 2ª ed. revista e ampliada. Edgard Blücher, 2005, p. 512-517.
- KOVACIC, I., BRENNAN, M.J. **The Duffing Equation – Nonlinear oscillators and their Behaviour**. England. John Wiley & Sons Ltd., 2011, p.26-34 e 355-363.
- MILLAR, M.A., BARGHIAN, M. Snap-through behavior of cables in flexible structures, **Computers and Structures**, 77, p. 361-369, 2000.
- MEIROVITCH, L. **Fundamentals of Vibrations**. New York. McGraw-Hill, 2001, p. 262-277.
- NAYFEH, A.H.; MOOK, D.T. **Nonlinear Oscillations**. United States of America. Wiley Classics Library, 1995, p. 224-234.
- NBENDJO, B.R.N.; CALDAS, I.L.; VIANA, R.L. Dynamical changes from harmonic vibrations of a limited power supply driving a Duffing oscillator, **Nonlinear Dyn**, 70, p. 401-407, 2012.
- RAO, S.S. **Vibrações Mecânicas**. 4ª ed. Pearson Prentice Hall, 2008, p. 1-6.
- SOUZA, S.L.T. *et al.* A simple feedback control for a chaotic oscillator with limited power supply, **Journal of Sound and Vibration**, 299, p. 664-671, 2007.
- THOMPSON, J.M.T.; STEWART, H.B. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. 2ª Ed. England. John Wiley & Sons Ltd, 2002. p. 1-179.
- TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. **Theory of elastic stability**. 2ª Ed. McGraw-Hill, 1961. p. 82-88.
- ZUKOVIC, M.; CVETICANIN, L. Chaotic Responses in a Stable Duffing System of Non-ideal Type, **Journal of Vibration and Control**, 13(6), p. 751–767, 2007.
- ZUKOVIC, M.; CVETICANIN, L. Chaos in Non-ideal Mechanical System with Clearance, **Journal of Vibration and Control**, 15(8), p. 1229–1246, 2009.