144

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.004/95

Da lei de Coulomb generalizada ao eletromagnetismo com derivadas de ordem mais alta via relatividade especial

Jorge Henrique Oliveira Sales

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
193
BIBLIOTECA

Orientador

Antônio José Accioly

Outubro 1995

Da lei de Coulomb generalizada ao eletromagnetismo com derivadas de ordem mais alta via relatividade especial

Ao professor e grande amigo A. J. Accioly.

Aos meus pais, Henrique e Maria josé Sales, à minha esposa Cristina F. Heringer.

AGRADECIMENTOS

- A amiga H. Mukai. pela ajuda constante;

- Ao Pedro Romano por contribuir com a edição deste trabalho, ao Luis B.Crispino pelas discursões calorosas, aos amigos Sérgio Lietti e Marco Aurélio pela Paciência;

- À CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

Obtém-se uma teoria de eletromagnetismo com derivadas de ordem mais alta generalizando-se as leis da eletrostática, leis estas que seguem da lei de Coulomb generalizada e do princípio de superposição, de modo que elas sejam consistentes com a relatividade especial.

Palavras-chaves: eletromagnetismo com derivadas de ordem mais alta, lei de Coulomb generalizada, princípio de superposição, relatividade especial.

Área(s) de Conhecimento: 1.05.03.01 - 3

ABSTRACT

Higher-order electromagnetism is obtained by generalizing the laws of electrostatics, which follow from Coulomb's generalized law and the principle of superposition, so that they are consistent with special relativity.

Key words: higher-order electromagnetism, Coulomb's generalized law, principle of superposition, special relativity.

ÍNDICE

Introdução

I A Eletrodinâmica de Podolsky Via Princípios Primeiros 2

I.1 A Teoria de Podolsky 3

I.2 A Lei de Coulomb Generalizada 4

O Propagador 6

A Amplitude Invariante de Feynman 7

O Potencial Eletrostático 8

A Lei de Força 9

I.3 A Eletrodinâmica Generalizada de Podolsky Via Princípios Primeiros 9

A Eletrostática de Podolsky 9

Podolsky Via Relatividade Especial 11

I.4 Algumas Observações 15

II A Reversão da Helicidade do Elétron na Eletrodinâmica de Podolsky 17

II.1 Polarização no Espalhamento de Elétrons no Contexto da Eletrodinâmica de Podolsky 18

Reversão do Spin do Elétron 20

Elétrons que Emergem com Helicidade Positiva 22

Elétron que Emergem com Helicidade Negativa 24

A Polarização P_R 25

II.2 Análise dos Resultados 25

Epílogo 27

Referências 29

INTRODUÇÃO

O interesse por teorias com derivadas de ordem superior tem ocupado a atenção dos físicos desde a adoção das equações diferenciais como mecanismo de descrição dos sistemas físicos. É digno de nota que Lagrangeanas com derivadas de ordem mais alta já eram abordadas no livro de Courant-Hilbert[1].

Apesar do interesse por estas teorias jamais ter arrefecido, ele era até pouco tempo considerado como puramente acadêmico. Isto porque os sistemas mais importantes em teoria de campos são descritos ou por Lagrangeanas que apresentam unicamente derivadas primeiras ou por Lagrangeanas passíveis de assim serem transformadas pela adição de um termo de derivada total à ação correspondente.

Com o advento da supersimetria e da teoria de cordas, as teorias de ordem superior perderam seu cunho acadêmico e o interesse pelas mesmas recrudesceu. Isto é fácil de compreender, já que tanto na supersimetria (em sua formulação em termos de supercampos[2]) como em exemplos importantes em teoria de cordas[3] , ocorrem derivadas superiores em abundância.

Derivadas de ordem mais alta podem também ser utilizadas como um método de regularização em teoria de campos[4]. Tanto

quanto sabemos, umas das primeiras tentativas bem sucedidas no que concerne à utilização de termos contendo derivadas superiores como mecanismo regularizador é devida a Podolsky[5-8], que genaralizou o eletromagnetismo de Maxwell com o intuito de se livrar dos infinitos que nele ocorrem.

Neste trabalho vamos enfocar à eletrodinâmica de Podolsky. Na Parte I[9] obtemos as equações de Podolsky, generalizando às leis da eletrostática que seguem da lei de Coulomb generalizada e do princípio de superposição, de modo tal que elas sejam consistentes com a relatividade especial.

A Parte II é devotada ao estudo da reversão da helicidade do elétron na eletrodinâmica de Podolsky.

Finalizamos o trabalho apresentando, no Epílogo, as conclusões.

PARTE I

A Eletrodinâmica de Podolsky Via Princípios Primeiros.

I.1 A Teoria de Podolsky

A eletrodinâmica generalizada proposta por Podolsky* se baseia na Lagrangeana

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial_\nu F^{\mu\nu} \partial^\lambda F_{\mu\lambda} \quad , \quad (1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ e a é uma constante com dimensão de comprimento. Esta Lagrangeana gera uma teoria de campo linear, com simetria de gauge do tipo U(1), que se reduz à teoria de Maxwell quando $a = 0$. Trata-se evidentemente de uma teoria de ordem mais alta já que as equações de movimento derivadas de (1) contém derivadas quárticas do potencial vetor. Tal como a teoria de Maxwell, a teoria de Podolsky apresenta também energia positivo definida no caso eletrostático que, no entanto, é finita para uma carga pontual. Este último resultado mostra claramente que a força entre duas cargas pontuais não é mais coulombiana, ponto que merece ser analizado mais de perto. Determinemos então a lei que descreve a interação entre duas cargas pontuais no contexto desta eletrodinâmica com derivadas de ordem superior.

---

* Neste trabalho utilizamos o sistema natural de unidades, $c=\hbar=1$. A assinatura da métrica é (+, -, -, -), os índices gregos variam de 0 a 3 e os índices latinos vão de 1 a 3.

I.2 A Lei de Coulomb Generalizada

Como é bem conhecido, a troca de um fóton entre partículas espalhadas elasticamente conduz de modo natural ao conceito de força ou, equivalentemente, ao de potencial eletrostático. Para determinarmos a lei de força associada à teoria de Podolsky analisaremos, em ordem mais baixa, o processo $s + s \rightarrow s + s$, onde s representa um bóson de spin zero e carga Q. O correspondente diagrama de Feynman é mostrado na Fig. 1.

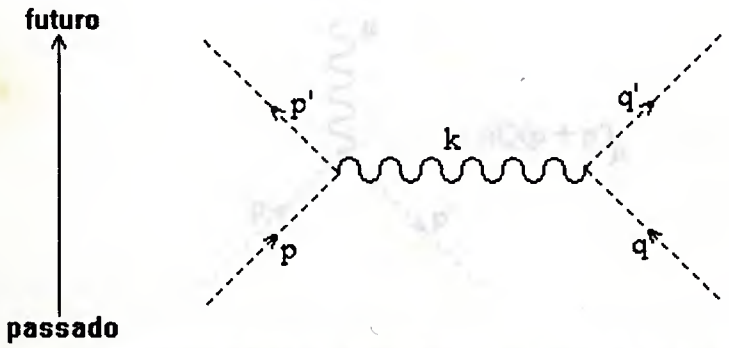


Fig 1. Contribuição, em ordem mais baixa, para o processo $s + s \rightarrow s + s$, onde s representa um bóson carregado de spin zero.

No gauge de Lorentz, a eletrodinâmica escalar de Podolsky é descrita pela Lagrangeana abaixo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\lambda F_{\mu\lambda} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi, \quad (2)$$

onde

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + iQA_\mu .$$

Em ordem mais baixa, a Lagrangeana de interação assume a forma

$$\mathcal{L}_I = iQA^\mu (\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) \quad . \qquad (3)$$

A regra de Feynman correspondente se encontra na Fig. 2. Em sequência vamos determinar o propagador, no gauge de Lorentz, associado à eletrodinâmica generalizada de Podolsky.

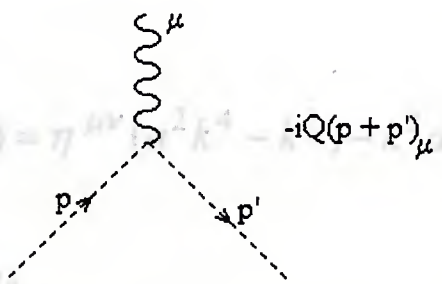


Fig. 2 Vértice elementar para a eletrodinâmica escalar de Podolsky. Q é a carga do bóson de spin zero.

O PROPAGADOR

A parte quadrática da Lagrangeana livre de Podolsky pode ser escrita no gauge de Lorentz como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu(x) \mathcal{P}^{\mu\nu}(x) A_\nu(x) \quad , \tag{4}$$

onde

$$\overset{\mu\nu}{\mathcal{P}}(x) = \eta^{\mu\nu} \Box + a^2 [\eta^{\mu\nu} \Box \Box - \partial^\mu \partial^\nu \Box]. \tag{5}$$

De (5) segue-se que

$$\overset{\mu\nu}{\mathcal{P}}(k) = \eta^{\mu\nu}(a^2 k^4 - k^2) - k^2 a^2 k^\mu k^\nu. \tag{6}$$

Invertendo (6), obtemos

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{a^2 k^4 - k^2} \left[\eta_{\mu\nu} - a^2 k_\mu k_\nu \right]. \tag{7}$$

O propagador é dado, pois, por

$$D^F_{\mu\nu}(k) = \frac{M^2}{k^2 (k^2 - M^2 + i\varepsilon)} \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right] \cdot i, \tag{8}$$

com $M^2 = \frac{1}{a^2}$.

Este propagador apresenta um bom comportamento ultravioleta ($\approx k^{-4}$) graças à presença de um fantasma não-taquiônico.

A AMPLITUDE INVARIANTE DE FEYNMAN

A amplitude invariante de Feynman para o processo mostrado na Fig. 1, pode ser escrita como

$$\mathcal{M} = i \cdot V^{\mu}(1) \cdot V_{\mu}(2) \cdot \frac{M^2}{k^2 (k^2 - M^2)} \quad , \qquad (9)$$

onde

$$V^{\mu}(1) \equiv -iQ(p + p')^{\mu}$$

$$V^{\mu}(2) \equiv -iQ(q + q')^{\mu}.$$

Lembrando que

$$k = p - p' = q' - q, \qquad (10)$$

(9) torna-se

$$\mathcal{M} = \frac{-i \cdot M^2 Q^2}{k^2 (k^2 - M^2)} \cdot (2p - k) \cdot (2q + k) \quad . \qquad (11)$$

No limite não-relativístico (11) assume a forma

$$\mathcal{M}(n.r.) = \frac{-4 \cdot i \cdot M^2 Q^2 m^2}{\vec{k}^2 (\vec{k}^2 + M^2)} \quad . \qquad (12)$$

De posse da expressão para o limite não-relativístico da amplitude invariante de Feynman, podemos calcular

O POTENCIAL ELETROSTÁTICO

A energia potencial eletrostática, no sistema Gaussiano, é obtida da expressão

$$U(r) = \frac{1}{4m^2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \int d^3k \cdot F(n.r.) \cdot exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad , \quad (13)$$

onde

$$F(n.r.) = i\, \mathcal{M}\,(n.r.) \quad .$$

Levando (12) em (13) chega-se à seguinte expressão para energia potencial

$$U(r) = \frac{Q^2}{4\pi} \cdot \frac{1 - e^{-rM}}{r} \quad . \qquad (14)$$

O potencial eletrostático assume então a forma

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1 - e^{-rM}}{r} \quad . \qquad (15)$$

Este potencial é finito em todo o espaço e anula-se no infinito.

A LEI DE FORÇA

De (15) segue-se imediatamente que a lei da força correspondente à interação entre duas cargas pontuais Q e Q' é dada por

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Q \cdot Q'}{4\pi} \cdot \left(\frac{1 - e^{-rM}}{r^2} - \frac{M e^{-rM}}{r} \right) \cdot \frac{\vec{r}}{r} . \qquad (16)$$

I.3 A Eletrodinâmica Generalizada de Podolsky Via Princípios Primeiros

A ELETROSTÁTICA DE PODOLSKY

Da lei de Coulomb generalizada, Eq.(16), obtemos o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ num ponto $\vec{r}$ devido a uma carga pontual Q situada em $\vec{r} = 0$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi} \cdot \left[\frac{1 - e^{-rM}}{r^2} - \frac{M e^{-rM}}{r} \right] \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad . \qquad (17)$$

É interessante observar-se que o fluxo deste campo através de uma superfície esférica de raio R centrada na carga Q é dado por

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 \ , & RM \ll 1 \\ Q \ , & RM \gg 1 \end{cases}$$

Da *lei de Coulomb generalizada e do princípio de superposição* obtemos o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ devido a densidade eletrostática de carga $\rho(\vec{r})$ (vide Fig.3):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \ \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi} \left[\frac{1-e^{-RM}}{R^2} - \frac{Me^{-RM}}{R} \right] \frac{\vec{R}}{R} \quad , \qquad (18)$$

onde $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$.

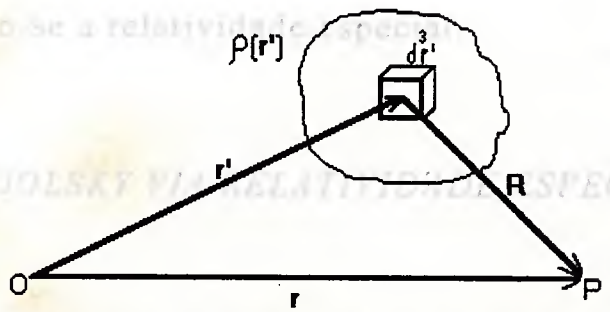


Fig. 3. Geometria para determinação do campo eletrostático em P, originado pela densidade de carga eletrostática $\rho(\vec{r}')$.

Utilizando (18) e um pouco de álgebra elementar, podemos escrever:

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' \ \ \rho(\vec{r}') \ \ \frac{M^2}{4\pi} \ \ \frac{e^{-RM}}{R} \qquad . \qquad (19)$$

De (19) segue-se que

$$\left(1-a^2\nabla^2\right)\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \qquad , \qquad (20)$$

que é a generalização da lei de Gauss da eletrostática de Maxwell. Na obtenção de (20) utilizamos o resultado

$$\nabla^2_{\vec{r}} \frac{e^{-RM}}{R} = \frac{M^2}{R}\ e^{-RM} - 4\pi\ \ \delta^3(\vec{R}) \quad .$$

Tomando o rotacional de (18), obtemos

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad , \qquad (21)$$

o que mostra, que tal como na teoria de Maxwell, o campo eletrostático é também conservativo. As Eqs.(20) e (21) constituem as leis fundamentais da eletrostática de Podolsky e serão generalizadas em seguida utilizando-se a relatividade especial.

PODOLSKY VIA RELATIVIDADE ESPECIAL

Como se supõe que a carga elétrica seja um escalar que se conserva globalmente[10], segue-se que a densidade de carga transforma-se como a componente zero de um quadri-vetor. Este quadri-vetor é a densidade de corrente

$$j^{\mu} = (j^0, \vec{j}) \ ,$$

onde $j^0 = \rho$.

A conservação global da carga elétrica implica em sua conservação local[11], nos conduzindo à equação de continuidade para a carga elétrica

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad , \qquad (22)$$

que é válida em todos os referenciais de Lorentz.

Podemos agora generalizar a Eq.(20), exigindo que a mesma seja invariante de forma quando submetida à uma transformação de Lorentz.

A Eq.(20) pode ser reescrita em termos de j^0 como

$$(1-a^2\nabla^2)\partial_i E^i = j^0 \quad , \qquad (23)$$

onde i=1,2,3. O lado direito de (23) é a componente zero de um quadri-vetor, o que implica que o lado direito também deve se transformar como a componente zero de um quadri-vetor. Se $F^{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem, então $\partial_\nu F^{0\nu}$ transforma-se como a componente zero de um quadri-vetor. Não é difícil demonstrar que as componentes E^i do campo elétrico podem ser expressas como as seguintes componentes de um tensor de segunda ordem:

$$F^{01} = E^1, \; F^{02} = E^2, \; F^{03} = E^3 \; . \qquad (24)$$

Segue-se que

$$\left(1+a^2\eta^{ij}\partial_i\partial_j\right)\partial_\nu F^{0\nu} = j^0 \quad , \qquad (25)$$

onde F^{00} será especificado mais tarde e $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico contravariante da relatividade especial que em nossa convenção apresenta as seguinte componentes

$$\eta^{00} = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33} = 1 \ .$$

Agora ambos os lados de (25) transformam-se como a componente zero de um quadri-vetor.

A fim de que as leis da física sejam invariantes de forma em relação às transformações de Lorentz, (25) deve ser generalizada para

$$[\ 1 + a^2 \Box\ ]\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \qquad , \qquad (26)$$

onde

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\mu\partial^\mu \ .$$

De (26), obtemos:

$$[\ 1 + a^2 \Box\ ]\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad . \qquad (27)$$

Se $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico, então (27) é identicamente nula. Evidentemente (27) não implica que $F^{\mu\nu}$ seja antissimétrico. Esta no entanto é a solução mais simples para a Eq.(26), e será aqui adotada. Vamos escolher então as três componentes restante de $F^{\mu\nu}$ como

$$F^{12} = B^3,\ F^{13} = -B^2,\ F^{23} = B^1. \qquad (28)$$

$\vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$ é interpretado fisicamente como o campo de indução magnética.

A Eq.(26), versão relativística de (20), é uma das equações do par de equações propostas por Podolsky. A equação faltante é obtida pela generalização de (21). Usando o símbolo de Levi-Civita ε^{ijk} que é igual a +1(-1) se i,j,k é uma permutação par (ímpar) de 1,2,3, e se anula se dois índices quaisquer são iguais, podemos reescrever (21) como

$$\varepsilon^{ijk}\partial_j F_{k0} = 0 \quad , \qquad (29)$$

onde

$$F_{k0} = -F^{k0} = F^{0k} = E^k \quad .$$

Em termos do tensor completamente antissimétrico de ordem quatro $\in^{\mu\nu\rho\lambda}$, com $\in^{0123} = +1$, a Eq.(29) torna-se ($\in^{0ijk} = \varepsilon^{ijk}$)

$$\in^{ijk0}\partial_j F_{k0} = 0 \quad . \qquad (30)$$

Podemos agora explorar o princípio de relatividade de Einstein, exigindo invariância de (30) sob transformação de Lorentz. Segue-se então que

$$\in^{\mu\nu\rho\lambda}\ \partial_\nu F_{\rho\lambda} = 0 \quad , \qquad (31)$$

onde o tensor covariante $F_{\alpha\beta}$ é definido como

$$F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}F^{\mu\nu},$$

sendo $\eta_{\mu\nu}$ o tensor métrico covariante da relatividade especial.

Em termos de

$$^{*}F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \in^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \ ,$$

onde $^{*}F^{\mu\nu}$ é o dual de $F^{\mu\nu}$, a Eq.(31) torna-se

$$\partial_{\nu}\, ^{*}F^{\mu\nu} = 0 \qquad . \qquad (32)$$

As Eqs.(26) e (32) constituem o par de equações de campo propostas por Podolsky.

I.4 Algumas Observações

Vimos que as equações de campo propostas por Podolsky, ou seja

$$[1 + a^2 \,\Box]\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = j^{\mu} \quad ,$$

$$\partial_{\nu}\, ^{*}F^{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

onde

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad (33)$$

podem ser obtidas *formalmente* a partir da *lei de Coulomb generalizada*, Eq.(16), e do *princípio de superposição*, utilizando-se a *relatividade restrita*. Evidentemente levamos em conta que *a carga elétrica é um escalar que se conserva.*

Nesta dedução formal das equações de campo de Podolsky, admitimos que $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico, apelando para o critério de simplicidade, hábito bastante comum em física. Pode-se mostrar no anto que $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico, sem apelar para o critério de simplicidade, utilizando-se a equação de movimento de um partícula de massa m e carga Q no campo eletromagnético descrito pela teoria de Podolsky, ou seja,

$$\frac{dP^{\mu}}{d\tau} = QF^{\mu\nu}u_{\nu} \quad , \qquad (34)$$

nde $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ é a quadri-velocidade; uma definição operacional dos B^{i} pode ser também obtida a partir de (34). Para finalizar estas observações gostaríamos de chamar a atenção para o fato de que muitos físicos neste século têm se dedicado à questão da obtenção das *equações de Maxwell* a partir de principios primeiros. As referências mais recentes são os trabalhos de Kobe[12] e Neuenschwand e Turner[13].

PARTE II

A Reversão da Helicidade do Elétron na Eletrodinâmica de Podolsky.

II.1 Polarização no Espalhamento de Elétrons no Contexto da Eletrodinâmica de Podolsky.

O comportamento de uma partícula com spin semi-inteiro num campo eletromagnético descrito pela eletrodinâmica de Maxwell é bem conhecido. Seria interessante então analisar as eventuais modificações que o termo quadrático $\frac{a^2}{2}\left(\partial_\lambda F^{\mu\lambda}\right)^2$ introduzido por Podolsky na Lagrangeana usual de Maxwell poderá produzir no citado comportamento. Para tanto vamos calcular, a nível de árvore, a polarização de um feixe de elétrons espalhado por píons positivamente carregados no contexto da teoria de Podolsky. O diagrama de Feynman para o processo em questão está mostrado na Fig. 4. A Lagrangeana correspondente é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}(\partial_\lambda F^{\mu\lambda})^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \qquad (35)$$

$$+\overline{\Psi}(i\partial - \mu)\Psi + e\overline{\Psi}A\Psi$$

$$+\partial_\alpha\phi^*\partial^\alpha\phi - m^2\phi^*\phi$$

$$+ie(A^\mu\phi\partial_\mu\phi^* - A^\mu\phi^*\partial_\mu\phi) + e^2A_\mu\phi^*A^\mu\phi \,,$$

onde μ e m são respectivamente as massas do elétron e do píon positivamente carregado ; a carga do elétron é $-e$. As regras de Feynman encontram-se na Fig. 5.

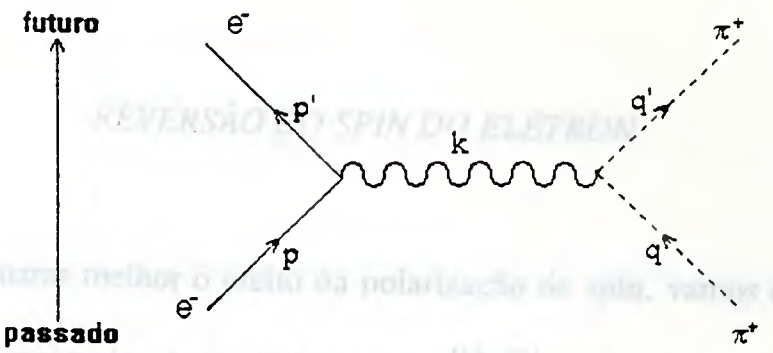
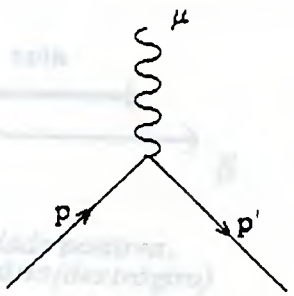
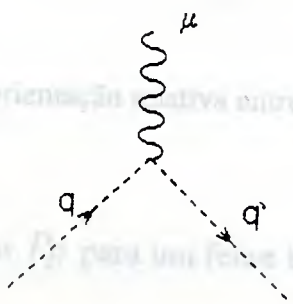


Fig. 4 Contribuição em ordem mais baixa para o processo

$e^- + \pi^+ \rightarrow e^- + \pi^+$ (e^- e π^+ são definidos como *partículas*).



$$V_1{}^{\mu}(p,p') = ie\gamma^{\mu}$$



$$V_2{}^{\mu}(q,q') = -ie(q+q')^{\mu}$$

Fig.5 Regras de Feynman para a interação elétron -píon positivamente carregado.

REVERSÃO DO SPIN DO ELÉTRON

Para ilustrar melhor o efeito da polarização de spin, vamos considerar que o elétron incidente tenha *helicidade positiva*[14–21] (vide Fig. 6), e computar a polarização do elétron espalhado em função do ângulo de espalhamento.

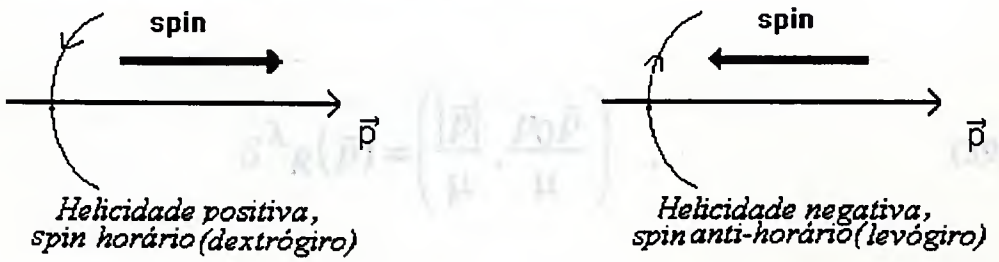


Fig. 6 Ilustração da orientação relativa entre spin e momento para partículas horárias e anti-horárias.

A polarização P_R para um feixe incidente de elétrons totalmente dextrógiro é dada por

$$P_R = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L} \quad , \tag{36}$$

onde $N_R(N_L)$ denota o número de elétrons que emergem com helicidade positiva (negativa).

No caso em pauta,

$$N_R = \left| \bar{u}(\vec{p}', S_R(\vec{p}'))V_1{}^{\alpha} u(\vec{p}, S_R(\vec{p}))D_{\alpha\beta}(k)V_2{}^{\beta}(q,q') \right|^2 \quad , \tag{37}$$

$$N_L = \left| \bar{u}(\vec{p}', S_L(\vec{p}'))V_1{}^{\alpha} u(\vec{p}, S_R(\vec{p}))D_{\alpha\beta}(k)V_2{}^{\beta}(q,q') \right|^2 \quad ; \tag{38}$$

onde os vetores de polarização são dados por

$$S^{\lambda}{}_R(\vec{p}) = \left(\frac{|\vec{p}|}{\mu}, \frac{p_0 \hat{p}}{\mu} \right) \quad , \tag{39}$$

$$S^{\lambda}{}_L(\vec{p}) = \left(\frac{-|\vec{p}|}{\mu}, \frac{-p_0 \hat{p}}{\mu} \right) \quad ; \tag{40}$$

sendo $\hat{p} \equiv \dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$.

Em sequência vamos calcular N_R e N_L .

ELÉTRONS QUE EMERGEM COM HELICIDADE POSITIVA

De (37) obtemos:

$$N_R = \left[\frac{e^2M^2}{k^2\left(k^2-M^2\right)}\right]^2 \left[\bar{u}\left(\vec{p}',S_R\left(\vec{p}'\right)\right)\gamma^\alpha u\left(\vec{p},S_R\left(\vec{p}\right)\right)\right]$$

$$\cdot\left[\bar{u}\left(\vec{p},S_R\left(\vec{p}\right)\right)\gamma^\beta u\left(\vec{p}',S_R\left(\vec{p}'\right)\right)\right](q+q')_\alpha(q+q')_\beta$$

$$= \left[\frac{e^2M^2}{k^2\left(k^2-M^2\right)}\right]^2 Tr\left[\frac{1+\gamma^5\gamma^\lambda S_{R\lambda}\left(\vec{p}'\right)}{2}\frac{\not{p}'+\mu}{2\mu}\gamma^\alpha\frac{1+\gamma^5\gamma^\sigma S_{R\sigma}\left(\vec{p}\right)}{2}\frac{\not{p}+\mu}{2\mu}\gamma^\beta\right]$$

$$\cdot(q+q')_\alpha(q+q')_\beta \qquad (41)$$

$$= \left[\frac{e^2 M^2}{k^2\left(k^2 - M^2\right)}\right]^2 \frac{1}{4\mu^2}\left\{\left[2(p'\cdot Q)(p\cdot Q) - \left(p'\cdot p - \mu^2\right)Q^2\right]\right.$$

$$\cdot\left[1 - S_R(\vec{p})\cdot S_R(\vec{p}')\right] + 2S_R(\vec{p}')\cdot Q \;\; S_R.(\vec{p})\cdot Q\left[\mu^2 - p'\cdot p\right]$$

$$+\left[p'\cdot S_R(\vec{p})\right]\left[2S_R(\vec{p}')\cdot Q \;\; p\cdot Q - p\cdot S_R.(\vec{p}')Q^2\right]$$

$$\left. + 2p\cdot S_R(\vec{p}')(p'\cdot Q)S_R(\vec{p})\cdot Q\right\}$$

onde $Q \equiv q + q'$.

Em termos das variáveis de Mandelstam (vide Fig.7), o resultado anterior torna-se:

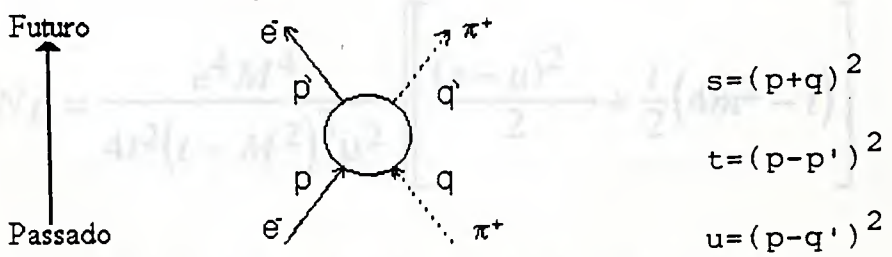


Fig.7 Variáveis de Mandelstam para o processo $e^-\pi^+ \rightarrow e^-\pi^+$ (e^- e π^+ são definidos como partículas).

$$N_R = \frac{e^4 M^4}{4t^2\left(t-M^2\right)^2 \mu^2}\left\{\left[\frac{(s-u)^2}{2}+\frac{t}{2}\left(4m^2-t\right)\right]\cdot\left[1-S_R(\vec{p})\cdot S_R(\vec{p}')\right]\right.$$

$$+tS_R.(\vec{p}')\cdot Q \quad S_R(\vec{p})\cdot Q+(s-u)p\cdot S_R(\vec{p}') \quad Q\cdot S_R(\vec{p})$$

$$\left.+p'\cdot S_R(\vec{p})\left[S_R(p')\cdot Q(s-u)-p\cdot S_R(\vec{p}')\left(4m^2-t\right)\right]\right\}. \qquad (41)$$

Para $M^2 \to \infty \ \left(a^2 \to 0\right)$, reproduz o resultado Maxwelliano. Para outros valores de M^2, N_R de Podolsky difere de N_R de Maxwell.

ELÉTRONS QUE EMERGEM COM HELICIDADE NEGATIVA

$$N_L = \frac{e^4 M^4}{4t^2\left(t-M^2\right)^2 \mu^2}\left\{\left[\frac{(s-u)^2}{2}+\frac{t}{2}\left(4m^2-t\right)\right]\right.$$

$$\cdot\left[1-S_L.(\vec{p}')S_R(\vec{p})\right]+tS_L(\vec{p}')\cdot Q \quad S_R(\vec{p})\cdot Q$$

$$+(s-u)p\cdot S_L(\vec{p}')Q\cdot S_R(\vec{p})+p'\cdot S_R(\vec{p})$$

$$\left.\cdot\left[S_L(\vec{p}')\cdot Q(s-u)-p\cdot S_L(\vec{p}')\left(4m^2-t\right)\right]\right\} \qquad (42)$$

Aqui aplicam-se os mesmos comentários que para N_R .

A POLARIZAÇÃO P_R

De (36), (41) e (42) segue-se que

$$P_R = 1 - \frac{2N_L}{N_R + N_L} \quad , \tag{43}$$

onde

$$N_R + N_L = \frac{e^4 M^4}{4t^2\left(t - m^2\right)^2 \mu^2}\left[(s-u)^2 + t\left(4m^2 - t\right)\right]. \tag{44}$$

II.2 Análise dos Resultados

Vamos agora passar para o sistema de repouso do píon $\left[q^\mu = (m,\vec{0})\right]$(vide Fig.8).

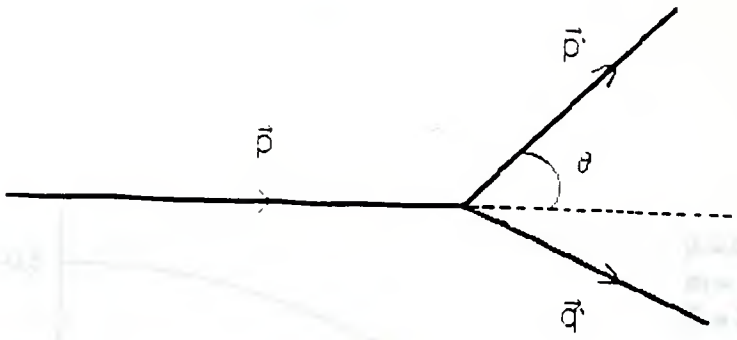


Fig. 8 Definição do ângulo de espalhamento para o e^- referente ao processo de espalhamento $e^-\pi^+$.

Neste referencial,

$$s_{lab} = m^2 + \mu^2 + 2mE\,,$$

$$t_{lab} = -2m.(E^2 - \mu^2).\left[\frac{m + E\,\mathrm{sen}^2\,\theta - \sqrt{m^2 - \mu^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\cos\theta}{(E+m)^2 - (E^2 - \mu^2)\cos^2\theta}\right],$$

$$u_{lab} = 2\left(m^2 + \mu^2\right) - s_{lab} - t_{lab} \quad ;$$

sendo E a energia inicial do elétron. Como a expressão final para P_R é bastante extensa, não a transcreveremos aqui. No entanto a análise gráfica do comportamento de P_R em função do ângulo de espalhamento θ, mantido E fixo, nos permite concluir que P_R diminui à medida que θ aumenta (vide Fig. 9). Portanto, no contexto da Teoria de Podolsky e a nível semi-clássico, os elétrons têm sua helicidade revertida devido à interação eletromagnética de ordem mais alta.

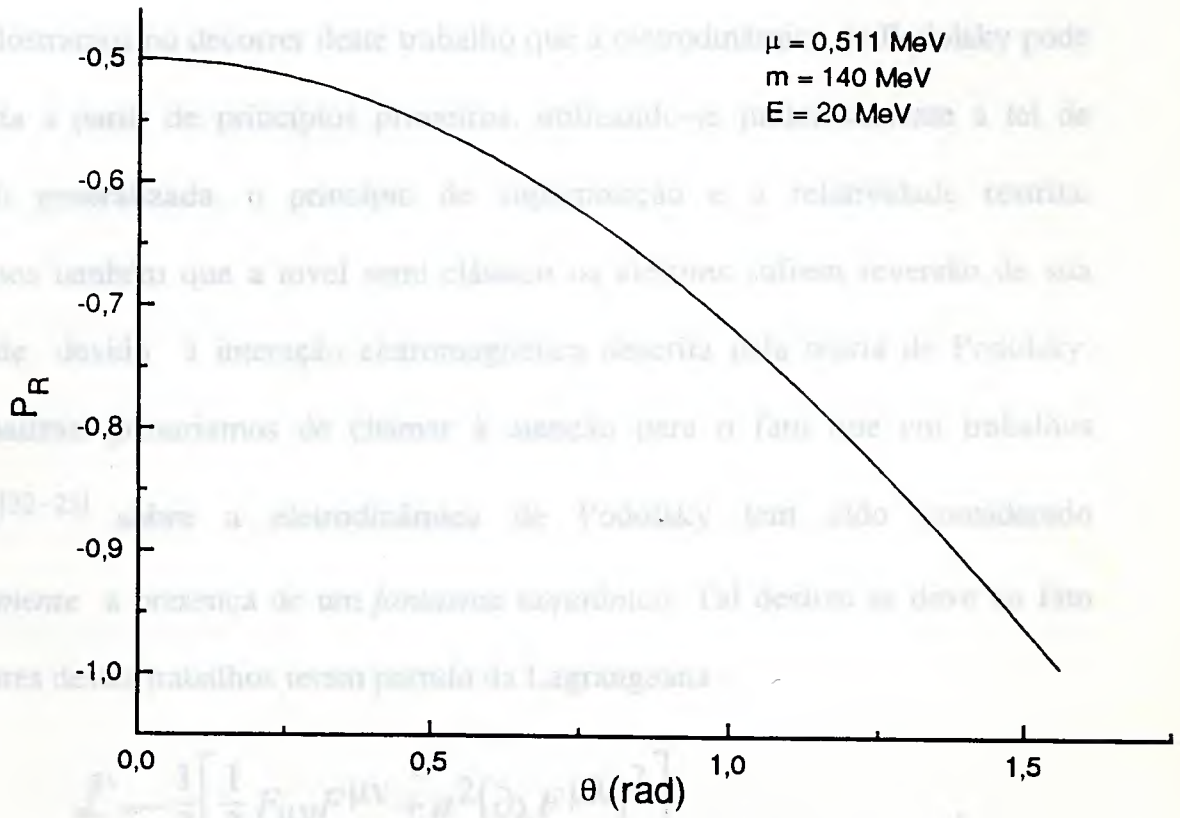


Fig. 9 P_R como função do ângulo de espalhamento θ para E=20 MeV.

EPÍLOGO

Mostramos no decorrer deste trabalho que a eletrodinâmica de Podolsky pode ser obtida a partir de princípios primeiros, utilizando-se judiciosamente a lei de Coulomb generalizada, o princípio de superposição e a relatividade restrita. Mostramos também que a nível semi-clássico os elétrons sofrem reversão de sua helicidade devido à interação eletromagnética descrita pela teoria de Podolsky. Para finalizar, gostariamos de chamar à atenção para o fato que em trabalhos recentes[22-25] sobre a eletrodinâmica de Podolsky tem sido considerado *erroneamente* a presença de um *fantasma taquiônico*. Tal deslize se deve ao fato dos autores destes trabalhos terem partido da Lagrangeana

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + a^2\left(\partial_\lambda F^{\mu\lambda}\right)^2\right] ,$$

em vez da Lagrangeana proposta por Podolsky, ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + a^2\left(\partial_\lambda F^{\mu\lambda}\right)^2\right].$$

O tensor momento-energia simétrico associado à Lagrangeana de Podolsky é dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{a^2}{2}\eta_{\mu\nu}\left[\left(\partial_\lambda F^{\alpha\lambda}\right)^2 + F_{\alpha\lambda}\Box F^{\lambda\alpha} \right]$$

$$-a^2\left[\partial_\sigma F_\mu{}^\sigma \partial_\lambda F_\nu{}^\lambda + F^\alpha{}_\mu \Box F_{\alpha\nu} + F^\alpha{}_\nu \Box F_{\alpha\mu}\right]$$

$$+\frac{1}{4}\left(F_{\alpha\beta}\right)^2\eta_{\mu\nu} - F_\mu{}^\alpha F_\nu{}^\alpha .$$

Um cálculo direto mostra que no caso eletrostático, $\dot{\vec{E}} = 0$ e $\vec{B} = 0$, $T_{00} > 0$; portanto implicando que a energia é positivo definida. Se admitirmos que $\vec{E}\cdot\nabla\cdot\vec{E} \to 0$ mais rapidamente que $\frac{1}{r^2}$ no infinito, obtemos a seguinte expressão para a energia total

$$E = \int d^3x \;\; T^{00} = \frac{1}{2}\int d^3x \;\left[\vec{E}^2 + a^2\left(\nabla\cdot\vec{E}\;\right)^2\right] \quad ,$$

que no caso de uma carga pontual fornece o resultado $\frac{Q^2}{2a}$. Evidentemente tais resultados não são mais verdadeiros se trabalharmos com a Lagrangeana $\mathcal{L}'$.

REFERÊNCIAS

[1] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol.II, Interscience Publishers, N. York and London 1962.

[2] J. Barcelos - Neto, N.R.F. Braga, Phys. Rev. **D 39,** 494 (1989).

[3] A.M Polyakov, Nucl. Phys. **B 268**, 406 (1986).

[4] A.A Slavnov, Theor. Math. Phys. **13,** 1064 (1972); **33,** 997 (1978).

[5] B. Podolsky, Phys. Rev. **62,** 68 (1942).

[6] B. Podolsky, C. Kikuchi, Phys. Rev. **65,** 228 (1944).

[7] B. Podolsky, C. Kikuchi, Phys. Rev. **67**, 184 (1945).

[8] B. Podolsky, P. Schwed, Rev. Mod. Phys. **20**; 40 (1948)

[9] A.J. Accioly, H. Mukai, J.H.O. Sales, *From Coulomb's generalized law to higher-derivative eletromagnetism via special relativity* (a ser publicado na Phys. Rev. D.).

[10] D.F. Bartlett, B.F.L. Ward, Phys. Rev **D16**, 3453 (1977); D.F. Bartlett, J. Shepard, C. Zafiratos, B. F. L. Ward, Phys. Rev **D20**, 578 (1979).

[11] R. Feynman, *The Character of Physical Law,* British Broadcasting Corporation 35 Marylebone High Street, London 1965.

[12] D.H. Kobe, Am. J. Phys. **54**, 631 (1986).

[13] D.E. Neuenschwand, B. N. Turner, Am. J. Phys. **60**, 35 (1992).

[14] M. Jacob, G. C. Wick, Ann. Phys. (N.Y.) 7, 404 (1959).

[15] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics,* McGraw-Hill Book Company, Inc. (1964).

[16] M.D. Scadron, *Advanced Quantum Theory and its Applications Through Feynman Diagrams*, Springer-Verlag New York Inc. (1979).

[17] F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory,* John Wiley & Sons, Inc. (1993).

[18] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory,* John Wiley and Sons Ltd. (1986).

[19] D. C. Cheng, G. K. O'Neill, *Elementary Particle Physics* (*An Introduction*), Addison-Wesley Publishing Company (Advanced Book Program), Reading, Massachusetts (1979).

[20] W. Greiner, A. Schäfer, *Quantum Chromodynamics,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1994).

[21] M. O. C. Gomes, *Teoria Quântica de Campos,* Instituto de Física da USP, Departamento de Física-Matemática C.P. 20516 - São Paulo, S.P., Brazil (1990).

[22] C. A. P.Galvão, B.M.Pimentel, Can. J. Phys. **66**, 460 (1988).

[23] J. Barcelos-Neto, C. P. Natividade, Z. Phys. C - Particles and Fields **49**, 511 (1991).

[24] J. Barcelos-Neto, C. A. P. Galvão, C. P. Natividade, Z. Phys. C - Particles and Fields **52**, 529 (1991).

[25] L. V. Belvedere, C. P. Natividade, C. A. P. Galvão, Z. Phys. C - Particles and Fields **56**, 609 (1992).