UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Camila Aversa Martins

Existência de solução de equações integrais não lineares em escalas temporais sobre espaços de Banach

São José do Rio Preto

Junho - 2013

Camila Aversa Martins

Existência de solução de equações integrais não lineares em escalas temporais sobre espaços de Banach

Dissertação a ser apresentada ao Departamento de Matemática Aplicada do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas *IBILCE* da Universidade Estadual Paulista, Campus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Luciano Barbanti
Coorientador: Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

São José do Rio Preto
Junho - 2013

Martins, Camila Aversa.
Existência de solução de equações integrais não lineares em escalas temporais sobre espaços de Banach/ Camila Aversa Martins. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2013.
75 f.

Orientador: Dr. Luciano Barbanti
Coorientador: Dr. Geraldo Nunes Silva
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1.Escalas temporais. 2.Existência e unicidade de solução. 3.Equação integral de Volterra–Stieltjes. I.Barbanti, Luciano. II.Silva, Geraldo Nunes. III.Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.
CDU - 512(021)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE

Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Existência de solução de equações integrais não lineares em escalas temporais sobre espaços de Banach

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Aplicada do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas *IBILCE* da Universidade Estadual Paulista, Campus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luciano Barbanti
UNESP - Ilha Solteira

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
UNESP - São José do Rio Preto

Profa. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz Federson
USP - São Carlos

São José do Rio Preto 27 de junho de 2013

Aos meus pais,

Ilma e Isaias,

e ao meu noivo,

Fernando,

dedico.

Agradecimentos

Uma conquista como esta é algo que foi construído não só ao longo dos dois últimos anos e por uma única pessoa. Por isso meus sinceros agradecimentos:

Primeiramente à Deus, que sempre me guiou em minha vida, iluminando e protegendo, e me deu a graça de concluir não só mais esta etapa em minha vida, mas um sonho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Luciano Barbanti, pela disponibilidade na orientação. Agradeço também por ter acreditado sempre na minha capacidade desde o primeiro momento e que tanto me instruiu para meu crescimento intelectual e profissional.

Agradeço à todos os professores que passaram em minha vida, em especial aos professores da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira pela formação acadêmica, dos quais sempre irei recordar com grande carinho e zelo. Agradeço em especial ao Prof. Dr. Ernandes Rocha de Oliveira pelo apoio e instruções no uso do programa Latex.

Gostaria de registrar meu sinceros agradecimentos e admiração pelos professores e funcionários do Departamento de Matemática e Matemática Aplicada do IBILCE, em especial ao Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva, co–orientador deste trabalho.

Meus agradecimentos eterno com todo carinho aos meus pais, Ilma e Isaias, pelo imenso amor dedicado à mim desde sempre e aos meus irmãos, Lucas e Felipe, por todo apoio e confiança e por compreenderem minha ausência.

Agradeço especialmente ao meu amado noivo, Fernando, que mesmo estando longe, esteve presente todos os dias me dando amor, carinho e muita força, tornando os momentos difíceis mais amenos.

Agradeço aos amigos do mestrado, Amanda e Matheus, que tanto me ajudaram no decorrer do curso e que tornaram minha permanência em São José do Rio Preto mais agradável.

Agradeço aos meus amigos de pós–graduação Juliana, Aneliza, Jhony, Érica, Everton, Edcarlos e Robson pela amizade e às minhas amigas, Joseane e Josiane, que me acompanham desde o começo de nossa graduação, agradeço o carinho.

Agradeço à Dona Dalva, que foi minha mãe em São José do Rio Preto, e Fernanda por todo o apoio e incentivo desde que as conheci. Agradeço também às colegas de república Mara, Laísa e Dalila pelos momentos de descontração que passamos juntas.

Agradeço às colegas Karina, Gabriela, Sofia e Margo por me acolherem prontamente em Ilha Solteira.

Agradeço, enfim, à CAPES e à CNPq pelo apoio financeiro e a todos que contribuiram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

Que Deus os abençoe.

A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.

(Albert Einstein)

Resumo

Neste trabalho estabelecemos condições para a existência e unicidade de solução para equações integrais do tipo Volterra–Stieltjes não linear

$$x(t) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s, x(s)) = u(t), \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$$

em escalas temporais $\mathbb{T}$, usando a integral de Cauchy–Stieltjes à direita sobre funções regradas a valores em espaços de Banach.

Palavras-chave: escalas temporais, existência e unicidade de solução, equação integral de Volterra–Stieltjes, integral de Cauchy–Stieltjes, funções regradas.

Abstract

In this work we establish conditions for the existence and uniqueness of solution a Volterra–Stieltjes integral nonlinear equations

$$x(t) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s,x(s)) = u(t), \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$$

in time scales $\mathbb{T}$, using the right Cauchy–Stieltjes integral on regulated functions with values in Banach spaces.

Keywords; time scales, existence and uniqueness of solution, Volterra–Stieltjes integral nonlinear equations, Cauchy–Stieltjes integral, regulated functions.

Sumário

Introdução

A teoria do Cálculo em escala temporais, que recentemente tem recebido a atenção dos pesquisadores do mundo todo, foi iniciada por Hilger em 1988 [1] com o propósito de unificar a Análise dos sistemas discretos e contínuos.

Uma escala temporal $\mathbb{T}$ é um subconjunto, fechado não vazio, dos números reais.

Dado que existe uma infinidade de escalas temporais a serem consideradas além dos reais (caso contínuo) e dos inteiros (caso discreto), necessita–se uma teoria capaz de considerar todos os casos. Assim, as duas principais características do cálculo em escalas temporais são a unificação e extensão.

Sabemos que dois dos mais importantes tipos de equações dinâmicas são: as equações diferenciais e integrais e as correspondentes discretas, equações à diferença e soma. Ambas são largamente usadas para descrever os fenômenos.

É comum encontrarmos na literatura equações diferenciais e integrais ou equações à diferença e soma, mas não uma combinação destas. No entanto, recentemente tornou–se necessário uma teoria mais sólida neste âmbito, como por exemplo o estudo da dinâmica populacional (v. [2]) ou por exemplo modelagem de doenças infecciosas ver (v. [3]) e muitas outras.

Neste trabalho estamos interessados na existênia de soluções de equações da forma:

$$(A) \qquad x + Ax = u$$

onde x e u são elementos de um espaço de funções em contexto de espaços de Banach $F = F([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ e A operador linear (e posteriormente não linear) sobre F. Consideraremos também em geral que F possui funções descontínuas.

Entre os espaços de Banach $F([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ que contém funções descontínuas temos:

1) Os espaços $Lp([a,b]_{\mathbb{T}},X)$, $1 \leq p < \infty$ de classe de equivalência de funções $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow X$ que são mensuráveis no sentido de Lebesgue tal que

$$\|f\| = \big(\int_a^b |f(t)|^p dt\big)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

2) O espaço $BV_0([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ de funções $\alpha : [a,b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow X$, quando $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ são de variação limitada com $\alpha(a) = 0$. O espaço BV_0 com a norma $V[\alpha]$ (variação de α) é espaço de Banach.

3) O espaço $G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ de todas funções $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow X$ que permitem somente descontinuidade de primeira espécie (isto é, para todo $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}[t \in (a,b]_{\mathbb{T}}]$ existe $f(t+)[f(t-)]$. O espaço $G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ é de Banach quando tomado com a norma do supremo.

Um dos subespaços de $G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ que é de grande importância é o espaço das funções regradas contínuas à esquerda $G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X)$. Este espaço é interessante para o estudo de equações do tipo (A), pois neste caso o operador $A \in L(G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X))$ permite uma representação integral do tipo

$$(Af)(t) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_\sigma K(t,\sigma) f(\sigma) \qquad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$$

com um apropriado núcleo $K : [a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow L(X)$, onde $\int \mathbb{D}_s$ denota a integral de Cauchy–Stieltjes. Além disso, estamos interessados em geral no caso em que A é operador causal, isto é, quando para todo $f \in G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ e todo $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ a função $(Af)_{|_{[a,t]_{\mathbb{T}}}}$ depende somente de $f_{|_{[a,t]_{\mathbb{T}}}}$. Algumas restrições serão necessárias ao operador K, já que em geral $(Af)_{|_{[a,t]_{\mathbb{T}}}}$ não é regrada.

O presente trabalho é dividido nos Capítulos seguintes:

No Capítulo 1 é desenvolvida a teoria inicial do Cálculo em escalas temporais, que foi introduzida e desenvolvida por Hilger [4], [5] e recebeu atenção especial em [6], [7], [8], [9], [10] que tanto contribuiram para a literatura desta teoria.

São encontradas várias propriedades da derivada delta em [6], [7], [11], [12], assim como condições para a existência de soluções de equações diferenciais e detalhes sobre estas equações. Em toda estas obras é destaque a ideia original da criação do Cálculo em escalas temporais que permite também que os resultados não sejam duplicados e apresentados duas vezes, uma em cada contexto (discreto e contínuo).

No Capítulo 2 definimos a Integral de Riemann–Stieltjes ([13], [14]) e as Integrais de Cauchy–Stieltjes à direita e à esquerda ([15]).

No Capítulo 3, é definida a classe de funções regradas $G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ e suas principais propriedades, juntamente com a definição da função de semivariação limitada $\alpha : [a,b]_{\mathbb{T}} \to L(X,Y)$.

Feito isso, podemos garantir a existência da integral de Cauchy–Stieltjes que é a bilinearidade que liga as funções regradas e as de semivariação limitada numa tripla bilinear no sentido como é conhecido em Álgebra Linear. Além disso, daremos ênfase ao estudo do espaço das funções regradas contínuas à esquerda $G^{-}([a,b]_{\mathbb{T}},X)$.

No Capítulo 4 estabelecemos o teorema de representação do tipo de Riesz para operadores lineares definidos em $G^{-}([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ e o teorema de representação do tipo de Riesz para o espaço de funções $G^{\sigma}SV_0^u([c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}},L(X,Y))$ que associa o operador causal K ao operador linear F_K definido em $G^{-}([a,b]_{\mathbb{T}},X)$.

Assim, a equação (A) com A causal fica sendo a equação do tipo Volterra–Stieltjes de segunda espécie.

$$x(t) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_{\sigma} K(t,\sigma) x(\sigma) = u(t)$$

em $G^{-}([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ e em $G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$.

No capítulo 5 estabelecemos o principal resultado deste trabalho, que é a existência de solução para equações integrais do tipo Volterra–Cauchy–Stieltjes não linear. Além disso, particularizando o resultado damos condições para a existência de soluções das equações lineares.

CAPÍTULO

1

Cálculo em escalas temporais

Para a unificação das teorias de Análise discreta e contínua são necessárias a introdução de operadores que nos permitam a classificação geral de pontos em escalas de tempo.

Alguns exemplos são encontrados em [6],[12] onde fica clara a diferença destes operadores em relação a diferentes escalas de tempo.

Além disso, estes operadores são necessários para definirmos a diferenciação em escalas temporais, denominada diferenciação delta, o que será feito em seguida.

Definida a derivada delta de uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, várias propriedades são dadas em relação a derivada delta de f, denominada f^{Δ}, e alguns resultados fundamentais, como por exemplo, as regras do produto e quociente de funções diferenciáveis são apresentados.

Poderíamos também definir a derivada nabla f^{∇}, mas não o faremos por suas propriedades serem similares as de f^{Δ}.

Logo, neste capítulo apresentamos alguns dos principais pré–requisitos para o desenvolvimento da teoria e dos capítulos posteriores desta dissertação.

1.1 Definições preliminares

Definição 1.1.1 *Uma escala de tempo $\mathbb{T}$ é um subconjunto, não vazio fechado, dos números reais. Usualmente será denotada pelo símbolo $\mathbb{T}$.*

Dois dos exemplos mais comuns de escalas de tempo são $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ e $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$.

Temos também outras escalas de tempo menos usuais na literatura como $\mathbb{T}=\{k^2;k\in\mathbb{Z}\}$,

$$\mathbb{T}=h\mathbb{Z}=\{hk:k\in\mathbb{Z}\} \text{ com } h>0 \text{ ou } \mathbb{T}=\left\{\frac{1}{2^k};k\in\mathbb{N}\right\}$$

ou o Conjunto de Cantor $\mathbb{K}$.

Neste contexto temos a necessidade de considerar conceitos de operadores. Vejamos operadores que indicam o sucessor (ou o antecessor) de um elemento t na escala de tempo $\mathbb{T}$.

Definição 1.1.2 *O operador avanço $\sigma:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ é:*

$$\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T};\ s>t\}$$

O operador recuo $\rho:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ é:

$$\rho(t)=\sup\{s\in\mathbb{T};\ s<t\}$$

Observe que $inf\ \emptyset=sup\mathbb{T}$ e $sup\ \emptyset=inf\mathbb{T}$.

Será usado também no decorrar do trabalho a função $f^\sigma:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f^\sigma(t)=f(\sigma(t)) \text{ para todo } t\in\mathbb{T}, \text{ i. é, } f^\sigma=f\circ\sigma.$$

Relacionado ao operador σ temos:

Definição 1.1.3 *A função rarefação $\mu:\mathbb{T}\to[0,\infty)$ como $\mu(t)=\sigma(t)-t$, isto é, a distância do ponto t e seu sucessor.*

Assim, a função rarefação no caso $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ é constante, $\mu(t)=0$, para todo $t\in\mathbb{T}$, enquanto para o caso $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ temos $\mu(t)=1$ para todo $t\in\mathbb{T}$. Entretanto, pode–se ter escalas temporais com a função rarefação não constante como por exemplo no caso $\mathbb{T}=\left\{\frac{1}{2^k};k\in\mathbb{N}\right\}$ onde $\mu(t)=\frac{1}{2^{t+1}}$.

Voltamos às propriedades dos operadores avanço e recuo vamos classificar os pontos de uma escala temporal quanto à sua densidade da seguinte maneira:

Definição 1.1.4 *Se $\sigma(t) > t$ o ponto t é chamado isolado à direita. Para $\rho(t) < t$, t é chamado isolado à esquerda.*

Se $t < \sup \mathbb{T}$ e $\sigma(t) = t$, então o ponto t é chamado denso à direita, enquanto se $t > \inf \mathbb{T}$ e $\rho(t) = t$ dizemos que t é denso à esquerda.

Se $\mathbb{T}$ tem um valor isolado à esquerda máximo, vamos definir um conjunto assim $\mathbb{T}^k := \mathbb{T} - \{m\}$. Caso contrário, $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

Vejamos alguns exemplos que frequentemente aparecem nas aplicações:

Exemplo 1.1.1 *Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ então todo ponto $t \in \mathbb{T}$ é denso, pois,*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t.$$

Além disso, $\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Do mesmo modo temos $\rho(t) = t$.

Exemplo 1.1.2 *Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, então todo ponto $t \in \mathbb{T}$ é isolado, pois $\sigma(t) = t + 1$ e $\rho(t) = t - 1$. Assim $\mu(t) = \sigma(t) - t = (t + 1) - t = 1$.*

Exemplo 1.1.3 *Se $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, com $h > 0$, i. é:*

$$\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, ...\}$$

então todo ponto $t \in \mathbb{T}$ é isolado, pois

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = t + h$$

e

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = t - h$$

Neste caso, $\mu(t) = h$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

Exemplo 1.1.4 *[16] Sejam $a, b > 0$ números reais fixados. Definimos a escala de tempo $\wp_{a,b}$ por:*

$$\wp_{a,b} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b) + a];$$

isto é, $\wp_{a,b}$ é coleção de intervalos fechados, cada intervalo com comprimento a.

Os operadores avanço e recuo são neste caso:

$$\sigma(t) = \begin{cases} t, & se \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b) + a] \\ t + b, & se \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (k(a+b) + a) \end{cases}$$

$$\rho(t) = \begin{cases} t, & se \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a] \\ t-b, & se \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}(k(a+b)) \end{cases}$$

Além disso, temos:

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & se \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a] \\ t, & se \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}(k(a+b)+a) \end{cases}$$

Exemplo 1.1.5 *[16] Seja $q > 1$ um número fixado, a escala de tempo $q^{\mathbb{Z}}$ é definida como:*

$$q^{\mathbb{Z}} = \{q^z : z \in \mathbb{Z}\} = \{..., q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, q^3, ...\}$$

Assim, $\sigma(t) = qt$, $\rho(t) = \frac{t}{q}$ e $\mu(t) = (q-1)t$, para todo $t \in \mathbb{T}$.

Exemplo 1.1.6 *Seja a escala de tempo $\mathbb{N}_0^2$ dada por:*

$$\mathbb{N}_0^2 = \{n^2 : n \in \mathbb{N}_0\} = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$$

Assim, $\sigma(t) = t + 2\sqrt{t} + 1$, $\rho(t) = t - 2\sqrt{t} + 1$ e $\mu(t) = 1 + 2\sqrt{t}$, para todo $t \in \mathbb{T}$.

Definição 1.1.5 *Dados $a, b \in \mathbb{T}$ definimos o intervalo $[a,b]_{\mathbb{T}}$ como:*

$$[a,b]_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T};\ a \leq t \leq b\}, \quad a, b \in \mathbb{T}$$

De modo similar definimos intervalos abertos, intervalos aberto-fechado e etc.

Exemplo 1.1.7 *[16] Um exemplo atípico das escalas temporais é o Conjunto de Cantor $\mathbb{K}$, fechado e não vazio, que é construido recursivamente da seguinte maneira:*

$K_0 = [0,1]$, para obter K_1, retira–se do intervalo $[0,1]$ seu terço médio $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, obtendo $K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ e continuando a retirar o terço médio aberto de cada intervalo restantes $\left[0, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, definimos

$$K_2 = \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \bigcup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{9}\right] \bigcup \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\right] \bigcup \left[\tfrac{8}{9}, 1\right]$$

$$\mathbb{K} = \cap_{n=0}^{\infty} K_n$$

(isto é, depois de continuar este processo reiteradamente, o Conjunto de Cantor são todos os pontos em $[0,1]$ que não foram removidos na construção acima).

Na próxima seção definimos a derivada de uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

1.2 Diferenciação Delta

Considere a função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Definiremos a seguir a derivada delta f^{Δ} (de Hilger) de f em todos os pontos $t \in \mathbb{T}^k$.

Definição 1.2.1 *Suponha que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é função e seja $t \in \mathbb{T}^k$. Então $f^{\Delta}(t)$ é um número com a propriedade: dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe uma vizinhança V de t (isto é, $V = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ para algum $\delta > 0$) tal que*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

para todo $s \in V$. Dizemos que f é delta diferenciável em $\mathbb{T}^k$ se existe f^{Δ} para todo $t \in \mathbb{T}^k$. A função $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de derivada delta de f em $\mathbb{T}^k$.

É de verificação imediata que a derivada de uma função $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem definida.

De fato: Seja f diferenciável delta em t_1. Pela definição temos: dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe uma vizinhança V de t_1 tal que

$$|[f(\sigma(t_1)) - f(s)] - f^{\Delta}(t_1)[\sigma(t_1) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t_1) - s| \text{ para todo } s \in V.$$

Seja $t_1 = t_2$, como f e σ são funções bem definidas, segue que,

$$|[f(\sigma(t_2)) - f(s)] - f^{\Delta}(t_2)[\sigma(t_2) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t_2) - s| \text{ para todo } s \in V.$$

Assim, f é diferenciável delta em t_2 e $f^{\Delta}(t_1) = f^{\Delta}(t_2)$.

Exemplo 1.2.1 *i) Se $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e $f(t) = \alpha$ para todo $t \in \mathbb{T}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é constante, então $f^{\Delta}(t) = 0$*

De fato: *Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos que para todo $s \in \mathbb{T}$*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0.[\sigma(t) - s]| = |\sigma - \sigma| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

para todo $s \in \mathbb{T}$.

ii) Se $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e $f(t) = t$ para todo $t \in \mathbb{T}$, então $f^{\Delta}(t) = 1$

De fato: *dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos que*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1.[\sigma(t) - s]| = |\sigma - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

para todo $s \in \mathbb{T}$.

Teorema 1.2.1 *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função e $t \in \mathbb{T}^k$.*
Então podemos fazer as seguintes afirmações:

i) Se f é diferenciável em t, então f é contínua em t.
ii) Se f é contínua em t e t é isolado à direita, então f é diferenciável em t com

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

iii) Se t é denso à direita e f é diferenciável em t então o limite

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe. Neste caso,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

iv) Se f é diferenciável em t, então

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

Demonstração: [6]
$i)$ Suponha f diferenciável em t. Dado $\varepsilon \in (0,1)$, seja

$$\varepsilon^* = \varepsilon[1 + |f^{\Delta}(t)| + 2\mu(t)]^{-1}.$$

Então $\varepsilon^* \in (0,1)$. Pela definição existe uma vizinhança V de t tal que

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon^*|\sigma(t) - s| \text{ para todo } s \in V.$$

Portanto, temos que para todo $s \in V \bigcap (t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^*)$

$$|f(t) - f(s)| = |\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\} -$$

$$-\{f(\sigma(t))-f(t)-\mu(t)f^{\Delta}(t)\}+(t-s)f^{\Delta}(t)|\leq \varepsilon^{*}|\sigma(t)-s|+\varepsilon^{*}\mu(t)+|t-s||f^{\Delta}(t)|$$

$$\leq \varepsilon^{*}[\mu(t)+|t-s|+\mu(t)+|f^{\Delta}(t)|]$$

$$<\varepsilon^{*}[1+|f^{\Delta}(t)|+2\mu(t)]=\varepsilon$$

Daí, segue que f é contínua em t.

$ii)$ Suponha que f é contínua em t e t é isolado à direita. Pela continuidade em t:

$$\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}.$$

Assim, dado $\varepsilon>0$, existe uma vizinhança V de t tal que

$$|\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}-\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}|\leq \varepsilon,$$

para todo $s\in V$. Disto segue que,

$$|[f(\sigma(t))-f(s)]-\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}[\sigma(t)-s]|\leq \varepsilon|\sigma(t)-s|,$$

para todo $s\in V$. Logo, temos o resultado

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}.$$

$iii)$ Suponha que f é diferenciável em t e t é denso à direita. Seja $\varepsilon>0$. Como f é diferenciável em t, existe uma vizinhança V de t tal que

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]|\leq \varepsilon|\sigma(t)-s|,$$

para todo $s\in V$. Como $\sigma(t)=t$ temos que

$$|f(t)-f(s)-f^{\Delta}(t)(t-s)|\leq \varepsilon|t-s|,$$

para todo $s\in V$. Daí, segue que,

$$|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}-f^{\Delta}(t)|\leq \varepsilon,$$

para todo $s\in V$ e $t\neq s$. Portanto, temos o resultado desejado

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

iv) Se $\sigma(t) = t$, então $\mu(t) = 0$ e temos que

$$f(\sigma(t)) = f(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

Por outro lado, se $\sigma(t) > t$ vale *ii*)

$$\begin{aligned} f(\sigma(t)) &= f(t) + \mu(t) \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \\ &= f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t) \end{aligned}$$

.

Exemplo 1.2.2 *Considere os dois casos* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

i) *Se* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *então pelo Teorema acima temos que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $t \in \mathbb{R}$ *se, e somente se, existe*

$$f^{'}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

ou seja, se, e somente se, f *é diferenciável em* t. *Neste caso, temos*

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f^{'}(t)$$

ii) *Se* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *então pelo Teorema acima temos que* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $t \in \mathbb{Z}$ *com*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

onde Δ *é o operador diferença da literatura definido na última igualdade acima.*

Se f é delta diferenciável para todo $t \in \mathbb{T}^k$, então pelo resultado acima vê–se que

$$f^{\Delta}(t) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{s \to t, s \in \mathbb{T}} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}, & \text{se} \quad \mu(t) = 0 \\ \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}, & \text{se} \quad \mu(t) > 0 \end{cases}$$

A função f^{Δ}, em geral, muda para cada $\mathbb{T}$ escolhido. É o que mostramos à seguir referentemente a função $f(t) = t^2$, resumido na seguinte tabela.

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$f^{\Delta}(t)$
$\mathbb{R}$	0	t	$2t$
$\mathbb{Z}$	1	$t+1$	$2t+1$
$h\mathbb{Z}$	h	$t+h$	$2t+h$
$q^{\mathbb{N}}$	$(q-1)t$	qt	$(q+1)t$
$2^{\mathbb{N}}$	t	$2t$	$3t$

Tabela 1.2.1 *Derivadas de $f(t)=t^2$ em diferentes escalas temporais.*

Vejamos agora as regras de operação de funções diferenciáveis.

Teorema 1.2.2 *Sejam $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ diferenciáveis em $t\in\mathbb{T}^k$. Então:*

$i)$ A soma $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ são diferenciáveis em t com

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t).$$

$ii)$ Para qualquer constante α, $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ é diferenciável em t com

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t).$$

$iii)$ O produto $fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ é diferenciável em t com

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t).$$

$iv)$ Se $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em t com

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

$v)$ Se $f(t)f(\sigma(t))\neq 0$, então $\frac{1}{f}$ é diferenciável em t com

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

<u>**Demonstração:**</u> [6] Suponha que f e g sejam diferenciáveis em $t\in\mathbb{T}^k$.

$i)$ Seja $\varepsilon>0$. Então existem vizinhanças V_1 e V_2 de t com

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)|\leq\tfrac{\varepsilon}{2}|\sigma(t)-s| \text{ para todo } s\in V_1$$

$$|g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s| \text{ para todo } s \in V_2$$

Seja $V = V_1 \cap V_2$, então temos que para todo $s \in V$

$$|(f+g)(\sigma(t)) - (f+g)(s) - [f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)](\sigma(t) - s)| =$$

$$= |f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) + g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq$$

$$\leq |f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| + |g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s| + \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|$$
$$= \varepsilon|\sigma(t) - s|.$$

Portanto, $f+g$ é diferenciável em t e $(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$ para todo t.

ii) Como f é diferenciável em t, dado $\varepsilon > 0$ existe V de t tal que

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}|\sigma(t) - s|,$$

para todo $s \in V_1$ onde α é constante arbitrária.

Logo,

$$|\alpha f(\sigma(t)) - \alpha f(s) - \alpha f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \tfrac{\varepsilon}{\alpha}|\sigma(t) - s|, \text{ para todo } s \in V_1$$

Portanto, $\alpha f(t)$ é diferenciável em t e $(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$ para todo t.

iii) Seja $\varepsilon \in (0,1)$. Defina $\varepsilon^* = \varepsilon[1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + |g^{\Delta}(t)|]^{-1}$. Então $\varepsilon^* \in (0,1)$ e assim existem vizinhanças V_1, V_2 e V_3 de t tais que

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon^*|\sigma(t) - s|, \text{ para todo } s \in V_1$$

$$|g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon^*|\sigma(t) - s|, \text{ para todo } s \in V_2$$

e como f é diferenciável em t, segue que f é contínua em t, daí

$$|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon^* \text{para todo } s \in V_3.$$

Tomando $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$ e seja $s \in V$, então

$$|(fg)(\sigma(t)) - (fg)(s) - [f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)](\sigma(t) - s)| =$$

$$= |[f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)]g(\sigma(t)) +$$

$$+[g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)]f(t)+$$

$$+[g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)][f(s)-f(t)]+$$

$$+(\sigma(t)-s)g^{\Delta}(t)[f(s)-f(t)]|$$

$$\leq \varepsilon^*|\sigma(t)-s||g(\sigma(t))|+\varepsilon^*|\sigma(t)-s||f(t)|+$$

$$+\varepsilon^*|\sigma(t)-s|+\varepsilon^*|\sigma(t)-s||g^{\Delta}(t)|=$$

$$=\varepsilon^*|\sigma(t)-s|[|g(\sigma(t))|+|f(t)|+\varepsilon^*+|g^{\Delta}(t)|]$$

$$\leq \varepsilon^*|\sigma(t)-s|[1+|g(\sigma(t))|+|f(t)|+|g^{\Delta}(t)|]$$

$$=\varepsilon|\sigma(t)-s|.$$

Assim $(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)$ para todo t.

$iv)$ Sejam f,g diferenciáveis em t. Seja $\varepsilon>0$. Defina

$$\varepsilon^*=\frac{\varepsilon|g(t)g(\sigma(t))|}{[1+|g^{\Delta}(t)|][2+|f(t)|+|g(t)|]}.$$

Então $\varepsilon^*\in(0,1)$ e assim existem vizinhanças V_1, V_2,V_3 e V_4 de t tais que

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)|\leq\varepsilon^*|\sigma(t)-s|,\text{ para todo } s\in V_1$$

$$|g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)|\leq\varepsilon^*|\sigma(t)-s|,\text{ para todo } s\in V_2$$

e como f,g são diferenciáveis em t, segue que, f,g são contínuas em t, daí

$$|f(t)-f(s)|\leq\varepsilon^*,\text{ para todo } s\in V_3.$$

$$|g(t)-g(s)|\leq\varepsilon^*,\text{ para todo } s\in V_4.$$

Tomando $V=V_1\cap V_2\cap V_3\cap V_4$ e seja $s\in V$, então

$$\Big|\frac{f(\sigma(t))}{g(\sigma(t))}-\frac{f(s)}{g(s)}-\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}[\sigma(t)-s]\Big|=$$

$$=\Big|\frac{f(\sigma(t))g(t)g(s)-f(s)g(t)g(\sigma(t))+[f^{\Delta}(t)g(t)g(s)-f(t)g^{\Delta}(t)g(s)][\sigma(t)-s]}{g(s)g(t)g(\sigma(t))}\Big|=$$

$$=\Big|\frac{f(\sigma(t))g(t)g(s)-f(s)g(s)g(t)+f(s)g(s)g(t)-f(s)g(t)g(\sigma(t))}{g(s)g(t)g(\sigma(t))}+$$

$$+\frac{[f^{\Delta}(t)g(t)g(s)-g^{\Delta}(t)g(t)g(s)+g^{\Delta}(t)g(t)g(s)-g^{\Delta}(t)g(s)f(t)][\sigma(t)-s]}{g(s)g(t)g(\sigma(t))}\Big| \leq$$

Fazendo alguns cálculos obtemos

$$\Big|\frac{f(\sigma(t))}{g(\sigma(t))}-\frac{f(s)}{g(s)}-\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}[\sigma(t)-s]\Big| < \varepsilon.$$

e portanto, $\frac{f}{g}$ é diferenciável em t.
$v)$ Basta usar o item anterior $iv)$, daí

$$\Big(\frac{1}{f(t)}\Big)^{\Delta}=\frac{1^{\Delta}f(t)-f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

$$\Big(\frac{1}{f(t)}\Big)^{\Delta}=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

Vejamos as consequências destas regras de operações para funções Δ–diferenciáveis:

Exemplo 1.2.3 *Seja f diferenciável em t, pelo teorema acima temos:*

$$(f^2)^{\Delta}=(f.f)^{\Delta}=f^{\Delta}f+f^{\sigma}f^{\Delta}=(f+f^{\sigma})f^{\Delta}.$$

Exemplo 1.2.4 *Claramente temos $1^{\Delta}=0$ e $t^{\Delta}=1$ então usando os itens iii) e iv) do teorema acima temos:*

$$(t^2)^{\Delta}=(t.t)^{\Delta}=t^{\Delta}t+\sigma(t)t^{\Delta}=t+\sigma(t)$$
$$(\frac{1}{t})^{\Delta}=-\frac{1}{t\sigma(t)}.$$

É importante sabermos propriedades referente ao operador σ, o resultado a seguir vem ao encontro disso:

Proposição 1.2.1 *Se $t\in\mathbb{T}^k$, $t\neq min\,\mathbb{T}$ e $\rho(t)=t<\sigma(t)$, então o operador avanço σ não é delta diferenciável em t.*

Demonstração: Suponha que σ é delta diferenciável em t e que $\sigma^{\Delta}(t)=a$. Então para todo $s\in V_t$ vizinhança de t,

$$|[\sigma(\sigma(t))-\sigma(s)]-a[\sigma(t)-s]|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|.$$

Em particular, para $s = t$, temos

$$|[\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)] - a[\sigma(t) - t]| \leq \varepsilon|\sigma(t) - t|.$$

Ao tomar o limite quando $\varepsilon \to 0$. Então:

$$|[\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)] - a[\sigma(t) - t]| = 0 \Rightarrow a = \frac{\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)}{\sigma(t) - t}.$$

Por outro lado, visto que t é isolado à direita e denso à esquerda, o ponto $s \in V_t$ pode ser escolhido à esquerda de t. Logo, quando $s \to t$, obtém–se que $\sigma(s) = s \to t$ temos,

$$|[\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)] - a[\sigma(t) - t]| \leq \varepsilon|\sigma(t) - t|$$

$$[\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)] - a[\sigma(t) - t] = 0$$

$$a = \frac{\sigma(\sigma(t)) - t}{\sigma(t) - t}.$$

Comparando os valores obtidos para a, conclui–se que $\sigma(t) = t$, o que contradiz a hipótese.

Em escalas temporais temos mais particularidades em relação as propriedades usuais de derivada, como a Regra da cadeia:

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em t e f diferenciável em $g(t)$, no Cálculo usual temos

$$(f \circ g)^{'}(t) = f^{'}(g(t)).g^{'}(t)$$

. mas em geral isto não é válido nas escalas temporais, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.2.5 *Sejam $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definidas como $f(t) = t^2$ e $g(t) = 2t$.*

Logo, temos que para todo $t \in \mathbb{Z}$:

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = 8t + 4 \neq 8t + 2 = f^{\Delta}(g(t)).g^{\Delta}(t)$$

Portanto, em geral a regra da cadeia não vale para o Cálculo em escalas temporais. Vejamos a regra da cadeia para escalas temporais com as seguintes restrições.

Teorema 1.2.3 *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ delta diferenciável. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável. Então existe c em $[t, \sigma(t)]$ com*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = f^{'}(g(c)).g^{\Delta}(t).$$

Demonstração: [6]

À seguir vamos definir integral no âmbito das escalas temporais.

CAPÍTULO

2

Integral em escalas temporais

Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ temos a teoria clássica da integral de Riemann–Stieltjes dada em [17].

A integral de Riemann-Stieltjes em escalas temporais $\mathbb{T}$ é dado em [18] no contexto apenas de funções contínuas. Pode–se inferir a partir deste conceito uma das definições clássicas da integral de Riemann dado em Bohner [19] (quando fazemos o núcleo da integral $g(t) = t$).

A maioria dos modelos matemáticos do mundo real no entanto contempla, em geral, funções descontínuas. Mostraremos que neste caso a integral de Riemann–Stieltjes em [18] tem limitações severas de aplicação.

Introduzimos assim as integrais de Cauchy–Stieltjes ([15]) em escalas temporais.

Para o caso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ a definição da integral de Cauchy–Stieltjes é dado por exemplo em [20].

2.1 Integral de Riemann–Stieltjes

Desde quando foi sistematizado o Cálculo em escalas temporais por Hilger [1] em 1988, houve uma grande proliferação de resultados na literatura sobre integração em escalas temporais, como por exemplo sobre a integral delta de Riemann [8], [21], [22], a integral nabla de Riemann [21], integral diamond–alpha de Riemann [23], as integrais delta de Lebesgue e nabla de Lebesgue [8], [13] e mais geralmente as integrais delta de Henstock–Kurzweil e nabla de Henstock–Kurzweil [24], [25].

Além disso, há outros trabalhos sobre integrais impróprias [26] e as integrais múltiplas [27]. Mas somente em 2009 em [18] as integrais do tipo Riemann–Stieltjes foram definidas.

Reproduzimos aqui, resumidamente, esta teoria como em [18].

Definição 2.1.1 *Uma partição P de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ é uma coleção finita $P = \{t_0,\ t_1,\ ...,\ t_n\}$, isto é, um conjunto finito de elementos pertencentes a $[a,b]_{\mathbb{T}}$, tais que:*

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b; \quad t_j \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \quad j = 0,\ 1, ...,\ n$$

Escrevemos $n(P)$ o número de intervalos em P.

Se P e Q são partições de $[a,b]_{\mathbb{T}}$, dizemos que Q é mais fina que P, se todo subintervalo dado pelos pontos consecutivos de Q está contido em algum subintervalo dado pelos pontos consecutivos de P. Denotamos este fato por $Q \geq P$.

O conjunto de todas partições finitas do intervalo $[a,b]_{\mathbb{T}}$ será denotado por $\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$.

Definição 2.1.2 *Sejam $g : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ e $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ funções limitadas com g função monótona crescente.*

Seja $P \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$ com $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$

A soma superior no sentido de Darboux de f em P com relação a g é o número

$$S(P;f;g) = \sum_{j=1}^{n(P)} [g(t_j) - g(t_{j-1})]. \sup_{[t_{j-1},t_j]_{\mathbb{T}}} f(t)$$

A soma inferior no sentido de Darboux de f em P com relação a g é o número

$$s(P;f;g) = \sum_{j=1}^{n(P)} [g(t_j) - g(t_{j-1})]. \inf_{[t_{j-1},t_j]_{\mathbb{T}}} f(t)$$

A integral superior e a integral superior da função limitada f são, respectivamente:

$$\overline{\int}_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta g(s) = \inf_{P \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} S(P;f;g)$$

e

$$\underline{\int}_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta g(s) = \sup_{P \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} s(P;f;g)$$

Se $\overline{\int}_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta g(s) = \underline{\int}_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta g(s)$ *dizemos que* f *é Riemann–Stieltjes integrável com relação à* g *sobre* $[a,b]_{\mathbb{T}}$ *e o valor da integral é o valor em comum.*

Às vezes, neste caso dizemos que f é g-integrável quando f é integrável em relação à g sobre $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

No caso em que $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, com $g(t) = t$, se f é integrável em relação à g, dizemos que f é integrável segundo Riemann (ver [17]).

Observamos que considerando–se $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ limitada com $m \leq f(t) \leq M$ para todo $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ e g função monótona crescente vale:

$$m(g(b) - g(a)) \leq \underline{\int}_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta g(s) \leq \overline{\int}_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta g(s) \leq M(g(b) - g(a))$$

Nos modelos atuais de fenomênos temos a necessidade cada vez mais frequente do uso de funções descontínuas (v. [28]).

Observando a definição da Integral de Riemann–Stieltjes, verificamos que existem algumas dificuldades referentes à soma de Darboux ao extende-las para o contexto das funções descontínuas.

A primeira dificuldade à ser enfrentada é quando temos $\mathbb{T}$ com cardinalidade finita (só em casos muito especiais a integral está bem definida), isto é sentido no seguinte exemplo:

Exemplo 2.1.1 *Considere a escala de tempo* $\mathbb{T} = [-1,1]_{\mathbb{T}} = \{-1,\ 0,\ 1\}$ *com as funções* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *definidas como:*

$$g(1) = 1,\ g(0) = 0,\ g(-1) = -1 \text{ e } f(-1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 3,$$

então $\int_{[-1,1]_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta g(s)$ *não existe, pois,* $\underline{\int}_{[-1,1]_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta g(s) = 0$ *e* $\overline{\int}_{[-1,1]_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta g(s) = 4.$

Uma dificuldade mais contundente neste contexto pode ser dada no exemplo seguinte :

Exemplo 2.1.2 *Considere a escala de tempo* $\mathbb{T} = \left\{-\frac{1}{2^k};\ k \in \mathbb{N}^*\right\} \bigcup \{0\} \bigcup \left\{\frac{1}{2^k};\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Sejam $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *dadas por:*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t > 0 \\ 0, & se \quad t \leq 0 \end{cases} \quad e \ g(t) = \begin{cases} 1+t, & se \quad t \geq 0 \\ t, & se \quad t < 0 \end{cases}$$

Observe que as integrais:

$$\int_{[-1,0]_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta g(s) = 0 \ e \int_{[0,1]_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta g(s) = 1,$$

mas ao calcularmos $\displaystyle\int_{[-1,1]_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta g(s)$ *vemos que a integral de* f *com relação a* g *sobre* $[-1,1]_{\mathbb{T}}$ *não existe, já que neste caso a integral superior possui um valor distinto da integral inferior.*

Como iremos considerar funções que não são apenas contínuas temos a necessidade de uma integral mais abrangente que a integral de Riemann–Stieltjes apresentada em [18].

Logo, definiremos na seção seguinte as Integrais de Cauchy–Stieltjes à esquerda e à direita. A consideração deste tipo de integral quando introduzida no ambiente de funções descontínuas em escalas temporais e apropriada por vários motivos que ficam mais evidente na medida de sua utilização.

Em particular, dos dois exemplos acima ao considerarmos as integrais de Cauchy–Stieltjes temos garantida a existência das integrais em $[-1,1]_{\mathbb{T}}$.

2.2 Integral de Cauchy–Stieltjes

Seja X espaço de Banach.

Definição 2.2.1 *Sejam* $g : [a,b]_{\mathbb{T}} \to L(X,Y)$ *e* $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to X$ *funções limitadas.*

A função f *é integrável no sentido de Cauchy–Stieltjes à esquerda em escalas temporais com relação à* g *se o limite*

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s g(s) f(s) = \lim_{P \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sum_{i=1}^{n(P)} [g(t_i) - g(t_{i-1})] f(t_{i-1})$$

existe.

Analogamente, dizemos que f é integrável no sentido de Cauchy–Stieltjes à direita em escalas temporais com relação à g quando

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s g(s) f(s) = \lim_{P \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sum_{i=1}^{n(P)} [g(t_i) - g(t_{i-1})] f(t_i)$$

existe.

Isto é, f é integrável Cauchy–Stieltjes em escalas temporais à direita quando:
dado $\varepsilon > 0$ existe $P_\varepsilon \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$ tal que

$$\| \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s g(s) f(s) - \sum_{i=1}^{n(P)} [g(t_i) - g(t_{i-1})] f(t_i) \| \ < \ \varepsilon, \ \forall\, P \geq P_\varepsilon.$$

Para nossos objetivos (uso da classe de funções contínuas à esquerda) vamos considerar a integral de Cauchy–Stieltjes à direita.

Vale observar que pode–se ter que uma integral de Cauchy–Stieltjes exista quando a outra não.

Exemplo 2.2.1 *[20] Considere $\mathbb{T} = X = \mathbb{R}$ com as funções $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dadas por:*

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\frac{1}{t}), & se \quad -1 \leq t < 0 \\ 0, & se \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad e \ g(t) = \begin{cases} t-1, & se \quad -1 \leq t < 0 \\ t+1, & se \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Então a integral de f com relação g à direita existe enquanto integral de f com relação g à esquerda não existe.

2.3 Propriedades da integral de Cauchy–Stieltjes

Seja X espaço de Banach.

Teorema 2.3.1 *Sejam $f, g : [a,b]_{\mathbb{T}} \to X$ integráveis segundo Cauchy–Stieltjes à direita com relação a α, onde $\alpha : [a,b]_{\mathbb{T}} \to L(X,Y)$. Então:*

a) A soma $f+g$ é integrável segundo Cauchy–Stieltjes à direita com relação a α e

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \alpha(s)[f(s)+g(s)] = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \alpha(s) f(s) + \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \alpha(s) g(s).$$

b) *Se $c \in \mathbb{R}$ então* $\displaystyle\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)cf(s) = c\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s)$.

c) *Seja $X,Y = \mathbb{R}$. Se $f(t) < g(t)$ para todo $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ então*

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s) \leq \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)g(s).$$

Demonstração: *a)* Como f é integrável segundo Cauchy–Stieltjes à direita com relação a α temos:

dado $\varepsilon > 0$ existe $P_\varepsilon \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$ tal que

$$\|I_f - \sum_{i=1}^{n(P)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(t_i)\| \ < \ \frac{\varepsilon}{2}, \, \forall\, P \geq P_\varepsilon.$$

Do mesmo modo, como g é integrável segundo Cauchy–Stieltjes à direita com relação a α temos:

dado $\varepsilon > 0$ existe $Q_\varepsilon \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$ tal que

$$\|I_g - \sum_{i=1}^{n(Q)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]g(t_i)\| \ < \ \frac{\varepsilon}{2}, \, \forall\, Q \geq Q_\varepsilon.$$

Logo tomando uma partição tal que $R \geq P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon$, temos:

$$\|I_{f+g} - \sum_{i=1}^{n(R)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})][f(t_i) + g(t_i)]\|$$
$$\leq \ \|I_f - \sum_{i=1}^{n(R)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(t_i)\| + \|I_g - \sum_{i=1}^{n(R)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]g(t_i)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $R \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$ tal que

$$\|I_{f+g} - \sum_{i=1}^{n(R)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})][f(t_i) + g(t_i)]\| < \varepsilon, \ \ \forall\, P \geq R.$$

Daí,

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)(f(s) + g(s)) = \lim_{P \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sum_{i=1}^{n(R)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})][f(t_i) + g(t_i)] =$$

$$= \lim_{P \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sum_{i=1}^{n(R)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(t_i) + \lim_{P \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sum_{i=1}^{n(R)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]g(t_i) =$$

$$= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s) + \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)g(s).$$

$b)$ Mostremos que $\displaystyle\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)cf(s) = c\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s)$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Se a constante $c = 0$ segue de imediato a igualdade.

Considere $c \neq 0$. Como f é integrável segundo Cauchy–Stieltjes à direita com relação a α temos:

dado $\varepsilon > 0$ existe $P_\varepsilon \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$ tal que

$$\|I_f - \sum_{i=1}^{n(P)}[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(t_i)\| \ < \ \frac{\varepsilon}{|c|}, \ \forall\, P \geq P_\varepsilon.$$

Logo, $\forall \ P \in P_\varepsilon$ temos:

$$\|I_{cf} - \sum_{i=1}^{n(P)}[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]cf(t_i)\| \leq |c|\|I_f - \sum_{i=1}^{n(P)}[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(t_i)\| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Assim, $\|I_{cf} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n(P)}[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]cf(t_i)\| < \varepsilon$, para todo $P \geq P_\varepsilon$.

Daí,

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)cf(s) = \lim_{P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sum_{i=1}^{n(P)}[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]cf(t_i) =$$

$$= c\lim_{P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sum_{i=1}^{n(P)}[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(t_i) = c\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s).$$

$c)$ Mostremos que $\displaystyle\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s) < \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)g(s)$ dado que $f(t) < g(t)$ para todo $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$.

Basta ver que como $f(t) < g(t)$ para todo $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, segue que, $f(t_i) < g(t_i)$ para todo $[t_{i-1},t_i] \subset [a,b]_{\mathbb{T}}$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n(P)$.

Logo,

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s) = \lim_{P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sum_{i=1}^{n(P)}[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(t_i) \leq$$

$$\leq \lim_{P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sum_{i=1}^{n(P)}[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]g(t_i) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)g(s).$$

Portanto,

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s) \leq \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)g(s).$$

Vamos provar a seguir a propriedade fundamental das integrais de Cauchy–Stieljes (que no exemplo 2.1.2 vimos não ser válida para as integrais de Riemann–Stieltjes em escalas temporais [18]).

Teorema 2.3.2 *Seja $c \in [a,b]_{\mathbb{T}}$. Se $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to X$ integrável segundo Cauchy–Stieltjes à direita com relação a α, onde $\alpha : [a,b]_{\mathbb{T}} \to L(X,Y)$. Então:*

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t) = \int_{[a,c]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t) + \int_{[c,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t)$$

onde $c \in [a,b]_{\mathbb{T}}$.

Demonstração: Considere $\sigma(f,\alpha,P) = \sum_{i=1}^{n(P)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(t_i)$.

Basta mostrar que $\lim_{P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sigma(f,\alpha,P_{[a,b]_{\mathbb{T}}}) = \lim_{P\in\wp_{[a,c]_{\mathbb{T}}}} \sigma(f,\alpha,P_{[a,c]_{\mathbb{T}}}) + \lim_{P\in\wp_{[c,b]_{\mathbb{T}}}} \sigma(f,\alpha,P_{[c,b]_{\mathbb{T}}})$.

Por hipótese temos que f é integrável segundo Cauchy–Stieltjes à direita com relação a α, isto é,

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t) = \lim_{P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sigma(f,\alpha,P_{[a,b]_{\mathbb{T}}}).$$

Como $\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \subseteq \wp_{[a,c]_{\mathbb{T}}} \cup \wp_{[c,b]_{\mathbb{T}}}$, e $c \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$, segue que,

$$\lim_{P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sigma(f,\alpha,P_{[a,b]_{\mathbb{T}}}) = \lim_{P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} [\sigma(f,\alpha,P_{[a,c]_{\mathbb{T}}}) + \sigma(f,\alpha,P_{[c,b]_{\mathbb{T}}})] \leq$$

$$\leq \lim_{P\in\wp_{[a,c]_{\mathbb{T}}}} \sigma(f,\alpha,P_{[a,c]_{\mathbb{T}}}) + \lim_{P\in\wp_{[c,b]_{\mathbb{T}}}} \sigma(f,\alpha,P_{[c,b]_{\mathbb{T}}}).$$

Então,

(I) $$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t) \leq \int_{[a,c]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t) + \int_{[c,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t).$$

Por outro lado, $\wp_{[a,c]_{\mathbb{T}}} \subseteq \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$ e $\wp_{[c,b]_{\mathbb{T}}} \subseteq \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$, logo, $\wp_{[a,c]_{\mathbb{T}}} \cup \wp_{[c,b]_{\mathbb{T}}} \subseteq \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$.

$$\int_{[a,c]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t) + \int_{[c,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t) = \lim_{P\in\wp_{[a,c]_{\mathbb{T}}}} \sigma(f,\alpha,P_{[a,c]_{\mathbb{T}}}) + \lim_{P\in\wp_{[c,b]_{\mathbb{T}}}} \sigma(f,\alpha,P_{[c,b]_{\mathbb{T}}}) \leq$$

$$\lim_{P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sigma(f,\alpha,P_{[a,c]_{\mathbb{T}}}) + \lim_{P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sigma(f,\alpha,P_{[c,b]_{\mathbb{T}}}) = \lim_{P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} [\sigma(f,\alpha,P_{[a,c]_{\mathbb{T}}}) + \sigma(f,\alpha,P_{[c,b]_{\mathbb{T}}})] =$$

$$= \lim_{P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sigma(f,\alpha,P_{[a,b]_{\mathbb{T}}}) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t).$$

Assim,

(II) $$\int_{[a,c]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t) + \int_{[c,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t) \leq \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t).$$

Portanto, de (I) e (II) temos que

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t) = \int_{[a,c]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t) + \int_{[c,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(t).$$

Nos dois exemplos abaixo calculemos a integral de Cauchy–Stieltjes que foram dados nos exemplos 2.1.1, 2.1.2.

Exemplo 2.3.1 *Considere a escala de tempo* $\mathbb{T} = \left\{-\frac{1}{2^k};\ k\in\mathbb{N}^*\right\} \bigcup \{0\} \bigcup \left\{\frac{1}{2^k};\ k\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Sejam $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *dadas por:*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t>0 \\ 0, & se \quad t\leq 0 \end{cases} \quad e\ g(t) = \begin{cases} 1+t, & se \quad t\geq 0 \\ t, & se \quad t<0 \end{cases}$$

Então, integral de Cauchy–Stieltjes à direita é dado por $\displaystyle\int_{[-1,1]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s f(t)g(t) = \lim_{P\in\wp_{[-1,1]_{\mathbb{T}}}} g(1)-g(0) = 1$

Observamos que por outro lado, neste caso, a integral de Cauchy–Stieltjes à esquerda é dado por $\displaystyle\int_{[-1,1]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s f(t)g(t) = \lim_{P\in\wp_{[-1,1]_{\mathbb{T}}}} g(1)-g^{\sigma}(0) = 1$*, pois,* $\sigma(0)=0$.

Exemplo 2.3.2 *Considere a escala de tempo* $\mathbb{T} = [-1,1]_{\mathbb{T}} = \{-1,\ 0,\ 1\}$ *com as funções* $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *definidas como:*

$$g(1)=1,\ g(0)=0,\ g(-1)=-1\ e\ f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f(1)=3,$$

Então, integral de Cauchy–Stieltjes à direita é dado por

$$\int_{[-1,1]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s f(t)g(t) = [g(1)-g(0)]f(1) + [g(0)-g(-1)]f(0) = 3$$

Observemos que a integral de Cauchy–Stieltjes à esquerda é dado por

$$\int_{[-1,1]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s f(t) g(t) = [g(1)-g(0)]f(0) + [g(0)-g(-1)]f(-1) = 1.$$

Portanto, existem as integrais de Cauchy–Stieljes de ambos os lados.

Nesta direção, um importante resultado de existência da integral de Cauchy–Stieltjes à direita pode ser dado f e α satisfazem as hipóteses para que a integral de Riemann–Stieltjes exista ([18]) então a integral de Cauchy–Stieltjes à direita existe e possue o mesmo valor de Riemann–Stieltjes.

Teorema 2.3.3 *Sejam $f, \alpha : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

$a)$ *f é limitada;*
$b)$ *α é monótona crescente;*
$c)$ *f é integrável segundo Riemann–Stieltjes.*
Então f é integrável segundo Cauchy–Stieltjes à direita e possuem o mesmo valor.

Demonstração: Dada uma cadeia de partições

$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq \ \dots \ \subseteq P_n \subseteq \ \dots$$

e supondo que existam as integrais: superior $\overline{\int}$ e inferior $\underline{\int}$ então temos a convergência para toda cadeia de $\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$, em particular, para a subsequência $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$. Assim, $(R-S) \int$ implica $(C-S) \int$ e pelo tipo convergência (filtragem) as integrais possuem o mesmo valor.

Como mostraremos no decorrer deste trabalho a integral de Cauchy–Stieltjes é a bilinearidade que une de modo natural (segundo uma Tripla Bilinear) funções regradas e funções de semivariação limitada. Então no capítulo seguinte vamos tratar destas duas classes de funções.

CAPÍTULO

3

Funções regradas e funções de semivariação limitada

Como havíamos dito na introdução deste trabalho, desenvolveremos a teoria de integração no âmbito das funções regradas munido da norma do supremo. O espaço das funções regradas é a menor extensão espaço de Banach das funções escada. Aparecem em diversas aplicações, como em tecnologia em geral (vide por exemplo em teoria de Histerese, [28]).

Para tanto vamos desenvolver aqui aspectos das funções regradas em escalas temporais a valores em espaços de Banach em geral.

Estudaremos também as funções de semivariação limitada que serão usadas na integral.

3.1 Funções regradas

Seja X espaço de Banach.

Definição 3.1.1 *A função $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to X$ é regrada se f tem somente descontinuidades de primeira espécie, isto é, se para todo ponto $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ denso à esquerda (respectivamente, $t \in (a,b]_{\mathbb{T}}$ denso à direita) $f(t^-)$ existir(respectivamente, $f(t^+)$ existir).*

Neste caso, escrevemos $f \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$.

Observação 3.1.1 *É imediato que $C([a,b]_{\mathbb{T}}, X) \subset G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$, isto é, que toda função contínua é regrada.*

Definição 3.1.2 *Seja $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to X$. Dizemos que f é uma função escada sobre $[a,b]_{\mathbb{T}}$ se existir uma partição $\{t_0,\ t_1, \ldots,\ t_n\}$ de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ tal que f é uma função constante em (t_{r-1}, t_r) para todo r, $r = 1,\ 2, \ldots,\ n$.*

Denotamos por $E([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ o espaço das funções escada de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ em X.

Teorema 3.1.1 *Toda função regrada definida em um intervalo compacto é limitada.*

Demonstração: Suponha que a função $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to X$ não seja limitada, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ com $\|f(t_n)\| > n$.

Como $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]_{\mathbb{T}}$ é sequência limitada cujos os elementos são números reais, segue que, existe uma subsequência convergente $\{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$, isto é,

$$\lim_{k\to\infty} t_{nk} = t_0 \text{ para algum } t_0 \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Observe que $t_0 \in \mathbb{T}$, pois $\mathbb{T}$ é fechado ($\mathbb{T} = \bar{\mathbb{T}}$).

Deste modo não existe limite lateral de f no ponto t_0. Assim, f não é regrada.

Teorema 3.1.2 *$G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ é espaço de Banach com a norma do supremo.*

Demonstração: Seja $\{f_n\}$ sequência de Cauchy em $G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$, isto é,

dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall\, n,m > N_\varepsilon$$

$$\|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \quad \forall\, n,m > N_\varepsilon, \forall\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Logo, temos que para todo $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, $\{f_n(t)\}$ sequência de Cauchy em X.
Como X é espaço de Banach, segue que, $\{f_n(t)\}$ é convergente para todo $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$.
Logo, $f_n(t) \to f(t)$, então $f(t) \in X$ para todo $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$
Resta–nos mostrar que $f \in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$
Como $f_n(t) \to f(t)$ temos que:
dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon, \forall n > n_0$$

Então,

$$\|f_n - f\| = \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \|f_n(t) - f(t)\|$$

Assim,

$$f = (f - f_n) + f_n \in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$$

Portanto, $G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ é espaço de Banach.

Um subespaço importante de $G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ é o espaço das funções contínuas à esquerda $G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ o qual usaremos de modo frequente neste trabalho.

Definição 3.1.3 *$f \in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ é uma função regrada contínua à esquerda em $t \in (a,b]_{\mathbb{T}}$ se:*

a) t é ponto isolado à esquerda, e/ou

b) $f(t) = f(t-)$, t é denso à esquerda.

Denotamos por $G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X) = \{f \in G([a,b]_{\mathbb{T}},X);\ f(t) = f(\overline{\overline{t}})$ para $t \in (a,b]_{\mathbb{T}}\ \}$ onde

$$f(\overline{\overline{t}}) = \begin{cases} f(t^-), & \text{quando} \quad \rho(t) = t \\ f(t), & \text{quando} \quad \rho(t) < t \end{cases}$$

Considerando os operadores:

$$\varphi_t : f \in G([a,b]_{\mathbb{T}},X) \mapsto f(t) - f(\overline{\overline{t}}) \in X, \text{ são contínuos para cada } t \in (a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Além disso,

$$G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X) = \bigcap_{a\leq t\leq b} \varphi_t^{-1}(0);$$

assim, $G^{-}([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ é subespaço de Banach de $G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$.

O próximo Teorema dá uma caracterização diferente de funções regradas e será muito importante em algumas aplicações posteriores.

Teorema 3.1.3 *Dado $f:[a,b]_{\mathbb{T}}\to X$, as seguintes propriedades são equivalentes:*

$a)$ *f é limite uniforme de funções escada.*

$b)$ *$f\in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$.*

$c)$ *Para todo $\varepsilon>0$ existe $P\in\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$ tal que $\hat{\omega}_P(f)<\varepsilon$, onde*

$$\hat{\omega}_P(f)=sup\,\{\|f(t)-f(s)\|;\ s,t\in(t_{i-1},t_i)_{\mathbb{T}}, i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,n(P)\}.$$

<u>**Demonstração:**</u>

$a)\Rightarrow b)$ É imediato pelo Teorema 3.1.2.

$b)\Rightarrow c)$ Mostremos que existe partição P de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ tal que $\hat{\omega}_P(f)<\varepsilon$.

Para isto, consideremos primeiramente $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$ tal que $\sigma(t)>t$ e $\rho(t)<t$, isto é, pontos de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ que são isolados.

É claro que f é contínua nestes pontos. Além disso, $\exists\,P_1$ de pontos isolados tal que

$$\|f(t)-f(s)\|=0<\varepsilon,\ \ \forall\,t,s\in(t_i-\delta_{t_i},t_i+\delta_{t_i})_{\mathbb{T}},\ i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n(P_1).$$

Seja $\rho(t)=t$, $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$. Como $\exists\,f(t^-)$, segue que, $\exists\,\delta_t>0$ tal que $\omega_{(t-\delta_t,t)}(f)<\varepsilon$, daí, $\exists\,P_2$ tal que

$$\|f(t)-f(s)\|<\tfrac{\varepsilon}{2},\ \ \forall\,t,s\in(t_i-\delta_{t_i},t_i)_{\mathbb{T}},\ i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,n(P_2).$$

Seja $\sigma(t)=t$, $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$. Como $\exists\,f(t^+)$, segue que, $\exists\,\delta_t>0$ tal que $\omega_{(t,t+\delta_t)}(f)<\varepsilon$, daí, $\exists\,P_3$ tal que

$$\|f(t)-f(s)\|<\tfrac{\varepsilon}{2},\ \ \forall\,t,s\in(t_i,t_i+\delta_{t_i})_{\mathbb{T}},\ i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,n(P_3).$$

Tomando $P:t_0=a<t_1<t_2<\ldots<t_{n(P)}=b$ com $P\geq P_1\cup P_2\cup P_3$. resulta que P é partição finita com $\hat{\omega}_P(f)\leq\varepsilon$

$c) \Rightarrow a)$ Considerando a função escada

$$f_{P,\xi} = \sum_{i=1}^{n(P)} f(\xi_i)\chi_{(t_{i-1},t_i]_{\mathbb{T}}} + \sum_{j=0}^{n(P)} f(t_j)\chi_{\{t_j\}}$$

segue que, $\|f - f_{P,\xi}\| \leq \varepsilon$.

Corolário 3.1.1 *Dado $f \in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ temos que os conjuntos*

$$\{t \in [a,b); \|f(t^+) - f(t)\| \geq \varepsilon\ \} \text{ e } \{t \in (a,b]; \|f(t) - f(t^-)\| \geq \varepsilon\ \}$$

são finitos, e portanto, o conjunto de descontinuidade de f é enumerável.

Na seção 4.2 deste trabalho usaremos uma classe de funções associadas às $G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ que introduziremos agora.

Sejam X,W espaços de Banach.

Definição 3.1.4 *Dizemos que a função $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow L(W,X)$ é simplesmente regrada e escrevemos $f \in G^{\sigma}([a,b]_{\mathbb{T}},L(W,X))$, se para todo $w \in W$ a função*

$$f \cdot w : t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \to (f \cdot w)(t) = f(t)w \in X$$

é regrada.

Teorema 3.1.4 *$G^{\sigma}([a,b]_{\mathbb{T}},L(W,X))$ é espaço de Banach, quando munido com a norma do supremo.*

Demonstração: Seja $\{f_n\}$ sequência de Cauchy em $G^{\sigma}([a,b]_{\mathbb{T}},L(W,X))$.

Para cada $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, $\{f_n(t)\}$ é sequência de Cauchy em $L(W,X)$ que é completo, então existe $f(t) \in L(W,X)$ tal que

$$f_n(t) \to f(t) \text{ em } L(W,X), \text{ donde } f_n(t).w \to f(t).w \text{ para } w \in W.$$

Além disso, para cada $w \in W$ $\{f_n w\}$ é sequeñcia de Cauchy no espaço de Banach $G([a,b]_{\mathbb{T}},X))$ e concluimos que $f \in G^{\sigma}([a,b]_{\mathbb{T}},L(W,X))$.

Como $\{f_n\}$ sequência de Cauchy em $G^{\sigma}([a,b]_{\mathbb{T}},L(W,X))$, temos $\{f_n\}$ converge a f com a norma do supremo.

Passamos à seguir à um conceito que como veremos irá complementar os de funções regradas e integral de Cauchy–Stieltjes à direita.

3.2 Semivariação limitada

Junto com o conceito de funções regradas e através da associação de uma tripla bilinear dada pela integral de Cauchy–Stieljes, temos a necessidade da definição de um conceito dual ao de funções de $G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$.

Este conceito é o de semivariação limitada definido por Gowurin [29] em 1936.

Há aplicações envolvendo o conceito de semivariação limitada na literatura, é usada como por exemplo, ver em Diekmann [30] e Travis em EDP [31].

Definição 3.2.1 *Seja $\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$ o conjunto de todas partições de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ e $P \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$, isto é,*

$$P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b\};\ t_i \in [a,b]_{\mathbb{T}},\quad i = 0,\ 1, ...,\ n.$$

Considere o espaço de Banach Y e $\alpha : [a,b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow L(X,Y)$.

Uma função α é dita de semivariação limitada se

$$SV[\alpha] = \sup_{P \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} SV_P[\alpha] < \infty,$$

onde

$$SV_P[\alpha] = \sup_{x_i \in X,\ ||x_i|| \leq 1} \{\ ||\sum_{i=1}^{n(P)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]x_i||\}.$$

Denota–se $SV([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ conjunto das funções de semivariação limitada. Quando $\alpha(a) = 0$ denota–se $SV_0([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$.

Observe que $SV[\alpha]$ é uma semi–norma e $SV_0[\alpha]$ é uma norma.

Vejamos um conceito similar ao de semivariação limitada:

Dizemos que $\alpha \in BV([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y)$ quando:

$$BV[\alpha] = \sup_{P \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \{\ \sum_{i=1}^{n(P)} ||\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|| < \infty$$

Segue das definições de semivariação limitada e variação limitada o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1 *Seja $\alpha : [a,b]_{\mathbb{T}} \to L(X,Y)$ tal que α é de semivariação limitada, temos:*

a) *se* $[c,d]_{\mathbb{T}} \subset [a,b]_{\mathbb{T}}$*, então* $SV_{[c,d]_{\mathbb{T}}}[\alpha] \leq SV_{[a,b]_{\mathbb{T}}}[\alpha]$.

b) *se* $c \in [a,b]_{\mathbb{T}}$*, então* $SV_{[a,b]_{\mathbb{T}}}[\alpha] \leq SV_{[a,c]_{\mathbb{T}}}[\alpha] + SV_{[c,b]_{\mathbb{T}}}[\alpha]$

c) $BV([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y) \subseteq SV([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ *e vale a igualdade se* $dimY < \infty$.

<u>**Demonstração:**</u> *a)* Como α é de semivariação limitada sobre $[a,b]_{\mathbb{T}}$, segue que, α é de semivariação limitada sobre $[c,d]_{\mathbb{T}}$. Além disso,

$$SV_{P_{[c,d]_{\mathbb{T}}}}[\alpha] \leq SV_{P_{[a,b]_{\mathbb{T}}}}[\alpha]$$

e segue o resultado.

b) Bastar tomarmos uma cadeia de partições encaixadas de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ onde partição inicial contenha $c \in [a,b]_{\mathbb{T}}$.

c) É imediato pelas definições de semivariação limitada e variação limitada.

Em particular, se $Y = \mathbb{R}$

$$BV([a,b]_{\mathbb{T}}, X') = SV([a,b]_{\mathbb{T}}, X').$$

Observemos que uma primeira conexão forte no sentido do que na literatura é denominada Tripla Bilinear (BT) entre os conceitos de funções regradas, integral de Cauchy–Stieltjes e semivariação limitada é dado pelo seguinte Teorema.

Teorema 3.2.2 *Sejam* $\alpha : [a,b]_{\mathbb{T}} \to L(X,Y)$ *e* $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to X$.

a) *Se* $\alpha \in SV_0([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ *e* $f \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$*, então existe*

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s) f(s) = \lim_{P \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}} \sum_{i=1}^{n(P)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] f(t_i) \in Y.$$

b) $\| \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s) f(s) \| \leq SV[\alpha] \|f\|$.

<u>**Demonstração:**</u> *a)* Considere $\sigma_P(f,\alpha,P) = \sum_{i=1}^{n(P)} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] f(t_i)$.

Mostremos que a sequência $\{\sigma_{P_i}\}_{i=1}^{\infty}$ é de Cauchy (em Y).

De fato: Como $f \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ suponha que $\hat{\omega}_{P_0}(f) < \frac{\varepsilon}{SV[\alpha]}$ tal que $SV[\alpha] \neq 0$ com $P_0 \in$

$\wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$ e $P_n \geq P_m$ tais que $P_0 \leq ... \leq P_m \leq ... \leq P_n ...$.

$$\|\sigma_{P_n}(f,\alpha,P_n)-\sigma_{P_m}(f,\alpha,P_m)\| = \|\sum_{i=1}^{n(P_n)}[\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})]f(t_i)-\sum_{j=1}^{n(P_m)}[\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})]f(t_j)\| \leq$$

$$\leq \|\sum_{i=1}^{n(P_m)}[\alpha(\xi_i)-\alpha(t_i)][f(\xi_i)-f(t_{i+1})]\|$$

com $[t_i,\xi_i]_{\mathbb{T}} \subseteq [t_i,t_{i+1}]_{\mathbb{T}}, \quad i \in \{1,2,\ ...\ ,n(P_n)\}$.

Assim, $\|\sigma_{P_n}-\sigma_{P_m}\| \leq \|\sum_{i=1}^{n(P_n)}[\alpha(\xi_i)-\alpha(t_i)][f(\xi_i)-f(t_{i+1})]\| \leq SV[\alpha]\hat{\omega}_{P_0}(f) \leq \varepsilon$.

Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $P_0 \in \wp_{[a,b]_{\mathbb{T}}}$ tal que

$$\|\sigma_{P_n}-\sigma_{P_m}\| \leq \varepsilon \quad \forall\, P_n, P_m \geq P_0$$

com $P_0 \leq ... \leq P_m \leq ... \leq P_n ...$.

Como Y é espaço métrico completo com a norma do supremo, segue que, a sequência $\{\sigma_{P_i}\}_{i=1}^{\infty}$ é convergente e a convergência pertence a Y.

Portanto,

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s) = \lim_{P\in\wp[a,b]_{\mathbb{T}}} \sum_{i=1}^{n(P)}[\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})]f(t_i).$$

Observe que se $SV[\alpha]=0$, segue que, $\alpha = 0$.

Logo, $\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s) = 0$.

$b)$ Além disso,

$$\|\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s)\| \leq \|\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s) - \sum_{i=1}^{n(P)}[\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})]f(t_i)\| +$$

$$+\|\sum_{i=1}^{n(P)}[\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})]f(t_i)\| \leq \varepsilon + SV[\alpha]\|f\|$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que,

$$\|\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s)\| \leq SV[\alpha]\|f\|.$$

No próximo Capítulo estaremos usando os conceitos de integral de Cauchy–Stieltjes à direita, funções regradas e de semivariação limitada desenvolvidas até aqui, para representar operadores sobre $G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ e assim gerar as equações integrais do tipo Volterra–Stieltjes.

CAPÍTULO

4

Teorema de representação de Riesz

Agora que definimos os conceitos básicos de nossa teoria, prosseguiremos em direção ao objetivo deste trabalho que é estabelecer Teorema de existência de soluções para equações integrais do tipo Volterra–Stieltjes de $2^{\underline{a}}$ espécie em espaços de Banach, em escalas temporais.

Para isto vamos estabelecer um Teorema de representação de operadores lineares atráves dos conceitos básicos vistos até agora.

4.1 Teorema de representação do tipo Riesz

Dadas as noções da Integral de Cauchy–Stieltjes à direita e funções de semivariação limitada, podemos justificar sua integração entre outras razões com uma teoria de representação, que garante que todo operador linear contínuo pode ser representado por funções de semivariação limitada α definida em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ atráves de uma integral de Cauchy–Stieltjes.

Teorema 4.1.1 *Sejam X e Y espaços de Banach.*

A aplicação

$$\alpha \in SV_0([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y)) \longmapsto F_\alpha \in L[G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X), Y]$$

é isometria (isto é, $\|F_\alpha\| = SV_0[\alpha]$), onde definimos

$$F_\alpha(f) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s), \text{ para todo } f \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X).$$

Ainda mais, $\alpha(t)x = F_\alpha[\chi_{(a,t]_{\mathbb{T}}}x]$ $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, $x \in X$

Demonstração: Denotemos por Φ a aplicação $\alpha \longmapsto \Phi(\alpha) = F_\alpha$.

A aplicação Φ é isomorfismo:

1) Φ está bem definida, pois
se $\alpha_1 = \alpha_2 \in SV_0([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$, $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$, $\forall\, t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$.
Seja $F_{\alpha_1}(f)$ para algum $f \in G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$, então

$$F_{\alpha_1}(f) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha_1(s)f(s) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha_2(s)f(s) = F_{\alpha_2}(f)$$

assim, $F_{\alpha_1}(f) = F_{\alpha_2}(f)$ para todo $f \in G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$.
Portanto, $\Phi(\alpha_1) = \Phi(\alpha_2)$.

2) Φ é injetora.
Suponha que $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta) \Rightarrow F_\alpha = F_\beta \Rightarrow F_\alpha(f) = F_\beta(f), \quad \forall\, f \in G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$.
Como $\int_a^b \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s) = F_\alpha$ e considere $f = \chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}x \in G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$.
Logo,

$$F_\alpha(f) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}(s)x = \alpha(\tau)x.$$

Por outro lado, temos $\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\beta(s)f(s) = F_\beta(f)$, tomando novamente $f = \chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}x$ temos

$$F_\beta(f) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\beta(s)f(s) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\beta(s)\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}(s)x = \beta(\tau)x$$

Daí, $\alpha(\tau)x = \beta(\tau)x,\ \forall\tau \in (a,b]_{\mathbb{T}}, x \in X$,
assim $\alpha(\tau) = \beta(\tau),\ \forall\ \tau \in (a,b]_{\mathbb{T}}$ e $\alpha(a) = 0 = \beta(a)$, pois $\alpha, \beta \in SV_0$.
Assim, Φ é injetora.

3) Φ é sobrejetora.
Dado $F \in L[G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X),Y]$, por 1) se $\exists\ \alpha \in SV_0([a,b]_{\mathbb{T}},L(X,Y))$ tal que $F_\alpha = F$ então

$$\alpha(\tau)x = F[\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}x] \text{ para todo } \tau \in (a,b]_{\mathbb{T}} \text{ e } x \in X.$$

Mostremos que $F = F_\alpha$.
Basta provar que F_α e F tomam os mesmo valores com elementos da forma $\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}x$, pois estes formam um conjunto total em $G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X)$.
Como f é limite uniforme de funções escada (3.1.3), temos $f \in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$.
Logo,

$$F_\alpha[\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}x] = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}(s)x = \alpha(\tau)x = F[\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}x].$$

Assim, $F_\alpha[\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}x] = F[\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}x]$.

4) Mostremos que $SV[\alpha] = \|F_\alpha\|$.

$$SV_P[\alpha] = \sup_{\|x_i\|\leq 1} \|\sum_{i=1}^{n(P)}[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]x_i\| = \sup_{\|x_i\|\leq 1} \|F_\alpha[\sum_{i=1}^{n(P)}\chi_{(t_{i-1},t_i]_{\mathbb{T}}}x_i]\| \leq \|F_\alpha\|.$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.2.2 de existência da integral de Cauchy–Stieltjes temos $\|F_\alpha\| \leq SV[\alpha]$.
Portanto, Φ é isomorfismo e $\|F_\alpha\| = SV[\alpha]$.

No próximo corolário há uma caracterização de extrema importância na teoria de dualidade.

Corolário 4.1.1 *Para todo $\alpha \in SV([a,b]_{\mathbb{T}},L(X,Y))$ temos*

$$SV[\alpha] = \sup\ \{\ \|\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(s)f(s)\|;\ f \in G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X),\ \|f\| \leq 1\}.$$

Corolário 4.1.2 *Quando $Y = \mathbb{R}$ temos*

$$G^{-}([a,b]_{\mathbb{T}},X)' \approx SV_0([a,b]_{\mathbb{T}},X').$$

Exemplo 4.1.1 *Tome $Y = X$, $t_0 \in (a,b]_{\mathbb{T}}$ e $F(f) \equiv f(t_0)$ os correspondentes $\alpha \in SV([a,b]_{\mathbb{T}},L(X))$ da representação satisfaz:*

$$\alpha(t)x = F[\chi_{(a,t]_{\mathbb{T}}}x] = \chi_{(a,t]_{\mathbb{T}}}(t_0)x = \chi_{[t_0,b]_{\mathbb{T}}}(t)x$$

e assim, $\alpha = \chi_{[t_0,b]_{\mathbb{T}}}I_x$.

Em particular, seja $\mathbb{T} = \{0,1,2,3\}$ e $Y = X$ com $F(f) = f(1)$, logo

$$\alpha(t)x = F[\chi_{(0,t]_{\mathbb{T}}}x] = \chi_{(0,t]_{\mathbb{T}}}(1)x = \chi_{[1,3]_{\mathbb{T}}}(t)x \text{ assim, } \alpha = \chi_{[1,3]_{\mathbb{T}}}I_x.$$

Exemplo 4.1.2 *Tome $Y = X$, $t_0 \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ e $F(f) \equiv f(\sigma(t_0))$ os correspondentes elementos $\alpha \in SV([a,b]_{\mathbb{T}},L(X))$ temos*

$$\alpha(t)x = F[\chi_{(a,t]_{\mathbb{T}}}x] = \chi_{(a,t]_{\mathbb{T}}}(\sigma(t_0))x = \chi_{[\sigma(t_0),b]_{\mathbb{T}}}(t)x$$

assim, $\alpha = \chi_{[\sigma(t_0),b]_{\mathbb{T}}}I_x$.

Em particular, seja $\mathbb{T} = \{0,1,2,3\}$ e $Y = X$ com $F(f) = f(\sigma(1))$, logo

$$\alpha(t)x = F[\chi_{(0,t]_{\mathbb{T}}}x] = \chi_{(0,t]_{\mathbb{T}}}(\sigma(1))x = \chi_{[\sigma(1),3]_{\mathbb{T}}}(t)x \text{ assim, } \alpha = \chi_{[\sigma(1),3]_{\mathbb{T}}}I_x.$$

4.2 Teorema de representação integral para operadores lineares entre espaços de funções

Diante do resultado de representação de operadores lineares da seção anterior podemos considerar a representação no caso em que tomamos o espaço, no teorema, $Y = G([c,d]_{\mathbb{T}},Y)$ com abuso de notação.

À seguir introduziremos o espaço dos núcleos, que representam os operadores de $L(G^{-}([a,b]_{\mathbb{T}},X),G([c,d]_{\mathbb{T}},Y))$ através da integral de Cauchy–Stieltjes à direita em escalas temporais.

Dada uma função $K : [c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}} \to L$ escrevemos

$$K^t(s) = K_s(t) = K(t,s) \text{ quando } (t,s) \in [c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Dizemos que uma função $K : [c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}} \to L(X,Y)$ é uniformemente de semivariação na segunda variável se K satisfaz a propriedade:

(SV^u) $\quad K^t \in SV([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ para todo $t \in [c,d]_{\mathbb{T}}$ e

$$SV^u[K] = \sup_{t \in T} SV[K^t] < \infty$$

(SV_0^u) $\quad$ denota que além disso temos $K^t(a) = 0$, $\forall\, t \in [c,d]_{\mathbb{T}}$.

Dizemos que uma função $K : [c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}} \to L(X,Y)$ é simplesmente regrada como função na primeira variável se satisfaz a propriedade:

(G^σ) $\quad K_s \in G^\sigma([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$, para todo $s \in [a,b]_{\mathbb{T}}$

Denotamos por $G^\sigma SV_0^u([c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ o espaço das funções

$K : [c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}} \to L(X,Y)$ que satisfazem as propriedades (SV^u) e (G^σ).

É imediato:

Teorema 4.2.1 *$G^\sigma SV_0^u([c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ é espaço de Banach quando tomado com a norma $K \to SV^u[K]$.*

Teorema 4.2.2 *A aplicação*

$$K \in G^\sigma SV_0^u([c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y)) \to F_K \in L[G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X), G([c,d]_{\mathbb{T}}, Y)]$$

é isometria (isto é, $\|F_K\| = SV^u[K]$), onde para todo $f \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ definimos

$$F_K(f)(t) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s), \quad t \in [c,d]_{\mathbb{T}}.$$

Além disso, $K(t,s)x = F_K[\chi_{(a,s]_{\mathbb{T}}} x](t)$ para todo $(t,s) \in [c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}$ e $x \in X$.

Demonstração: Denotemos por Φ a aplicação $K \longmapsto \Phi(K) = F_K$. A aplicação Φ é isomorfismo:

De fato: 1) Φ está bem definida, pois, se para cada $t \in [c,d]_{\mathbb{T}}$
$K_1^t = K_2^t \in SV_0([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$, vale $K_1^t(s) = K_2^t(s)$, $\forall\, s \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ e

$$F_{K_1}(f) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K_1(t,s) f(s) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K_2(t,s) f(s) = F_{\alpha_2}(f).$$

Assim, $F_{K_1}(f) = F_{K_2}(f)$ para todo $f \in G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$, e portanto, $\Phi(K_1) = \Phi(K_2)$.

2) Φ é injetora: considere $K \neq 0$, então existe t_0 com $K(t_0) \neq 0$, assim existe $\tau \in (a,b]_{\mathbb{T}}$ e $x \in X$ tais que

$$K(t_0,\tau)x \neq 0.$$

Se tomarmos $f = \chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}} x$ então $F_K(f) \neq 0$.

Pois,

(α) $$F_K[\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}} x](t_0) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t_0,s) \chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}(s) x = K(t_0,\tau)x$$

Portanto, Φ é injetora.

3) Φ é sobrejetora

Para provar que Φ é sobrejetora devemos mostrar:

Para todo $F \in L[G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X), G([c,d]_{\mathbb{T}}, Y)]$, existe $K \in G^{\sigma}SV_0^u([c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ tal que $F = \Phi(K)$.

Por (α) existe K com $F[\chi_{(a,\tau]} x](t) = K(t,\tau)x$, para todo $\tau \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, $t \in [c,d]_{\mathbb{T}}$ e $x \in X$, tomando isto como definição de K resta–nos mostrar:

i) $K \in G^{\sigma}SV_0^u([c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$

ii) $F = F_K$.

De fato: $K \in G^{\sigma}SV_0^u([c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$

$K(t,\tau)$ claramente é linear, além disso,

$$\|K(t,\tau)x\| = \|F[\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}} x](t)\| \leq \|F[\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}} x]\| \leq \|F\| \|\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}} x\| \leq \|F\| \|x\|.$$

Portanto, $K(t,\tau) \in L(X,Y)$.

Agora $K(t,\tau) \in SV_0([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$, pois para cada $P \in \wp$ e $x_i \in X$ tal que $\|x_i\| \leq 1$, $i = 1,2,...,n(P)$. temos:

$$\|\sum_{i=1}^{n(P)} [K^t(s_i) - K^t(s_{i-1})] x_i\| = \|F[\sum_{i=1}^{n(P)} \chi_{(s_{i-1},s_i]_{\mathbb{T}}} x](t)\| \leq$$

$$\leq \|F[\sum_{i=1}^{n(P)} \chi_{(s_{i-1},s_i]_{\mathbb{T}}} x]\| \leq \|F\| \|\sum_{i=1}^{n(P)} \chi_{(s_{i-1},s_i]_{\mathbb{T}}} x_i\| \leq \|F\|$$

isto é,

(β) $\qquad SV[K^t] \leq \|F\|$ para todo $t \in [c,d]_{\mathbb{T}}$.

Finalmente, mostraremos que K é regrada.

Se $t_n \to t \in [c,d]_{\mathbb{T}}$ implica que $K(t_n)$ é convergente em $SV_0([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$.

Por (β) temos $SV[K^{t_n}] \leq \|F\|, \ \forall\, n$.

E a sequência $K(t_n,s)x$ é convergente para todo $s \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ e $x \in X$. pois, pela definição temos, para cada $t_n \in [c,d]_{\mathbb{T}}$

$$K(t_n,s)x = F[\chi_{(a,s]_{\mathbb{T}}}x](t_n) \text{ e } F[\chi_{(a,s]_{\mathbb{T}}}x] \in G([c,d]_{\mathbb{T}}, X).$$

Concluímos assim, $K \in G^{\sigma}SV_0^u([c,d]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$.

Vamos mostrar agora que $F = F_K$.

Ambos são operadores lineares contínuos F_K e F de $G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ sobre $G([c,d]_{\mathbb{T}}, Y)$ e tomam os mesmo valores com elementos da forma $\chi_{(a,\tau]_{\mathbb{T}}}x$, $\tau \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, $x \in X$, onde estes formam um conjunto total em $G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$.

Finalizando, por (β) temos $\|K\| \leq \|F\|$.

Por outro lado, $\|F\| \leq \|K\|$.

Pois, $\|F\| = \sup\{\ \|F(f)\|; f \in G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X), \|f\| \leq 1\}$ e $\|F(f)\| = \sup\limits_{t \in [c,d]_{\mathbb{T}}} \|F(f)(t)\|$ e

$$\|F(f)(t)\| = \|\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,\tau) f(\tau)\| \leq SV[K^t]\|f\|.$$

Portanto, $\|K\| = \|F\|$, isto é, Φ é isometria.

4.3 Caracterização integral de operadores causais

Os operadores causais (ou não–antecipativos) são o pilar da visão que temos do desenvolvimento de fenômenos, isto é, o que ocorre à partir de um certo instante no desenvolvimento de um fenômeno só depende do que ocorreu antes.

Nesta seção vamos mostrar que os operadores lineares causais entre espaços de funções regradas têm uma representação integral no mesmo sentido que estabelecido na seção anterior. À partir daí podemos considerar a equação

$$(I\ +\ k)x = u$$

com k linear e causal, nos espaços apropriados como uma equação do tipo Volterra–Stieltjes linear de 2ª espécie.

$$x(t)+\int_{[a,t]_{\mathbb{T}}}\mathbb{D}_s K(t,s)x(s)=u(t).$$

Os detalhes desta equação serão desenvolvidas no capítulo 5 à seguir.

Dizemos que um operador

$$k\in L[G([a,b]_{\mathbb{T}},X),G([a,b]_{\mathbb{T}},Y)]$$

é causal se para todo $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$ a função $(kf)_{|_{[a,t]_{\mathbb{T}}}}$ depende somente de $f_{|_{[a,t]_{\mathbb{T}}}}$ para todo $f\in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$, ou equivalentemente:

Definição 4.3.1 *Um operador k é causal se para todo $f\in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ e todo $c\in[a,b]_{\mathbb{T}}$:*

$$\forall\ \tau\in[a,c]_{\mathbb{T}},\ f(\tau)=0\ \Rightarrow\ kf(\tau)=0.$$

Dado $K\in G^{\sigma}SV^{u}([a,b]_{\mathbb{T}}\times[a,b]_{\mathbb{T}},L(X,Y))$ e $t_0\in[a,b]_{\mathbb{T}}$ definimos

$$(k_{t_0}f)(t)=\int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}}\mathbb{D}_s K(t,s)f(s)\quad t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$$

onde $f\in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$.

Obviamente, para todo t e todo f, $(k_a f)_{|_{[a,t]_{\mathbb{T}}}}$ depende somente de $f_{|_{[a,t]_{\mathbb{T}}}}$, mas em geral a função $k_a f$ não é regrada, mesmo f sendo de $G^{\sigma}([a,b]_{\mathbb{T}},X)$.

É uma questão bastante específica da teoria e se encontra no Apêndice desta dissertação a condição para que $k_{t_0}f\in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$. Esta condição provém de uma propriedade da diagonal do núcleo $K(t,s)$ (ver Teorema A.0.3).

Supondo que K é simplesmente regrada na diagonal e além disso, extendemos K para $[a,b]_{\mathbb{T}}\times[a,b]_{\mathbb{T}}$ definindo $K(t,s)=K(t,t)$ se $s\geq t$ escrevemos:

$$K\in G^{\sigma}_{\Delta}SV^{u}([a,b]_{\mathbb{T}}\times[a,b]_{\mathbb{T}},L(X,Y)).$$

O próximo teorema caracteriza os operadores de $L[G^{-}([a,b]_{\mathbb{T}},X),G([a,b]_{\mathbb{T}},Y)]$ causais.

Teorema 4.3.1 *Dado $K : \Gamma \to L(X,Y)$ onde*

$$\Gamma = \{(t,s) \in [a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}; t \leq s\}.$$

Se temos $K \in G^{\sigma}_{\Delta}SV^{u}([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ então o operador k_a definido por k é causal

(onde, para todo $f \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$), k_a definido como:

$$(k_a f)(t) = \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s), \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Reciprocamente, para todo operador causal $A \in L[G^{-}([a,b]_{\mathbb{T}}, X), G([a,b]_{\mathbb{T}}, Y)]$ existe $K \in G^{\sigma}_{\Delta}SV^{u}([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ para o qual $Af(t) = (k_a f)(t)$. Tomamos $K(t,s)x = k[\chi_{(a,s]_{\mathbb{T}}} x](t)$.

Demonstração:A.0.4

À partir deste ponto estamos aptos à introduzir a noção de equação integral em nosso contexto.

CAPÍTULO

5

Equações integrais não lineares

Uma equação integral de Volterra–Stieltjes é um tipo especial de equação que engloba vários tipos de equações correntes na literatura: equações diferenciais ordinárias, equações integro–diferenciais, equações de Volterra [33], equações com retardamento, equações do tipo neutro [34] e equações a derivadas parciais [35].

Tais equações costumam ser divididas em primeira e segunda espécies.

Uma equação de Volterra–Stieltjes de $1^{\underline{a}}$ espécie é expressa na forma

$$\int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s,x(s)) = u(t)$$

enquanto uma equação de Volterra–Stieltjes de $2^{\underline{a}}$ espécie é dado por

$$x(t) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s,x(s)) = u(t)$$

onde o núcleo $K(t,s)$ e $u(t)$ são dados e a incógnita é a função $x(s)$ com a função f dado por $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times X \to X$.

O núcleo K desempenha um papel essencial, determinando inclusive o espaço adequado onde se deve buscar a solução. Neste sentido, nosso objetivo é estabelecer os critérios que nos garantem solução para equações de Volterra–Stieltjes de 2ª espécie utilizando integrais de Cauchy–Stieltjes sobre funções regradas em escalas temporais a valores em espaços de Banach.

Após, faremos considerações sobre o caso $f(s,x(s)) = x(s)$, isto é, quando a equação integral é linear.

5.1 Equação integral de Volterra–Stieltjes não linear

O fato de usarmos a equação integral na forma

$$(K) \qquad x(t) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s,x(s)) = u(t)$$

é baseado em sua generalização das equações lineares (quando $f(s,x(s)) = x(s)$) e em inúmeros trabalhos considerando equações integrais do tipo Volterra–Stieltjes não lineares, como por exemplo em [36] e na modelagem de circuitos em caixas pretas em [37].

As equações do tipo (K) como já vimos anteriormente em 4.3 é representado pela equação

$$(I + k)x = u$$

onde k é um operador causal. Neste sentido como discutido anteriormente estes operadores causais são exatamente os operadores que tem um núcleo do tipo

$$K \in G^{\sigma}_{\Delta} SV^{u}([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y)).$$

5.2 Existência de solução de equação integral de Volterra–Stieltjes não linear

Vejamos nesta seção os critérios para existência e unicidade de solução de equações integrais do tipo Volterra–Stieltjes em escala temporal arbitrária $\mathbb{T}$.

$$(K) \qquad x(t) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s,x(s)) = u(t), \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$$

onde $K \in G^{\sigma}_{\Delta} SV^{u}([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ e $u \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$.

Para tal fim usaremos o Teorema do ponto fixo de Banach.

Seja $(\mathscr{M}, d)$ espaço métrico e $F : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$.
Uma aplicação $F : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ é contração se existir uma constante $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(Fx, Fy) \leq \alpha\, d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathscr{M}.$$

O Teorema do Ponto fixo de Banach estabelece:

Teorema 5.2.1 *Toda contração $F : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ em espaço métrico completo possui um, e apenas um, ponto fixo $\bar{x}$ de F e $F^i(x) \to \bar{x}$ para cada $x \in \mathscr{M}$.*

Demonstração: Em Kreyszig [38] [pág. 300].

Além disso, o Teorema do Ponto fixo de Banach fornece a seguinte estimativa sobre o erro entre a i–ésima iteração $F^i(x)$ e o ponto fixo $\bar{x}$:

$$d(F^i(x), \bar{x}) \leq \frac{\alpha^i}{1-\alpha} d(F(x), x).$$

Considere o espaço vetorial $\mathscr{F}([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ de todas funções definidas em $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

Definição 5.2.1 *O operador não linear $N : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ definido como*

$$Nx(t) = f(\cdot, x(\cdot))(t) = f(t, x(t))$$

onde $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times X \to X$. N é denominado operador de Nemytskij.

Uma condição necessária e suficiente para o operador de Nemytskij esteja definido em $G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ com valores em $G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ é que f seja contínua à esquerda na primeira variável e Lipschitziana na segunda variável como podemos ver em Abreu [39].

Neste trabalho vemos que para todo t denso à esquerda, temos:

$$\lim_{\tau \to t^-} \|Nx(\tau) - Nx(t)\| = \lim_{\tau \to t^-} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x(t)) + f(\tau, x(t)) - f(t, x(t))\| \leq$$

$$\leq \lim_{\tau \to t^-} \|x(\tau) - x(t)\| + \lim_{\tau \to t^-} \|f(\tau, x(t)) - f(t, x(t))\| = 0.$$

Observe que se $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times X \to X$ é Lipschitziana na segunda variável, então o operador de Nemytskij associado a f é Lipschitziana também:

Sejam $x, y \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ arbitrários tem–se

$$d(Nx,Ny) = \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \|Nx(t) - Ny(t)\| =$$

$$= \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \|f(t,x(t)) - f(t,y(t))\| \leq l \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \|x(t) - y(t)\| = l\, d(x,y).$$

Portanto, $d(Nx,Ny) \leq l\, d(x,y)$ para todo $x, y \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$.

Teorema 5.2.2 *Seja $K \in G^{\sigma}_{\Delta}SV^{u}([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$. Considere a equação integral (K) e $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times X \to X$ uma aplicação seja regrada na primeira variável e Lipschitziana na segunda tal que a constante de Lipschitz seja $L < \frac{1}{SV^{u}[K]}$.*

Então, a equação (K) possui uma única solução $x \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$.

Além disso, se a sequência de funções $\{x_i\}$ é definido escolhendo $x_i \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ como

$$x_i(t) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) N x_i(s) = u(t), \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$$

temos que a sequência $\{x_i\}$ converge uniformemente em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ para a única solução x de (K).

Demonstração: Como $K \in G^{\sigma}_{\Delta}SV^{u}([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$, segue que, o operador integral em (K) está bem definido.

Suponha $L < \frac{1}{SV^{u}[K]}$.

Considere o espaço métrico completo $(G([a,b]_{\mathbb{T}}, X), d)$ onde d é a métrica do supremo e seja para cada $u \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ o operador F sendo definido como

$$[Fx](t) = u(t) - \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K^{t}(s) f(s,x(s)), \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Dadas as hipóteses o operador F pode ser escrito na forma

$$[Fx](t) = u(t) - \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K^{t}(s) N x(s), \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

onde N é o operador de Nemytskij associado a f.

Primeiramente, observe que $F : G([a,b]_{\mathbb{T}}, X) \to G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$, pois

$K \in G^{\sigma}_{\Delta}SV^{u}([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ e $N : G^{-}([a,b]_{\mathbb{T}}, X) \to G^{-}([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$, estão bem definidos.

Claramente os pontos fixos de F serão soluções de (K).

Logo, queremos provar que existe um único x tal que $Fx = x$.

Para isto, mostremos que F é contração com constante de contração igual a $\beta = L.SV^u[K] < 1$ e assim o Teorema do Ponto Fixo de Banach será aplicado.

Para quaisquer $x, y \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ temos:

$$\|Fx - Fy\| = \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \|Fx(t) - Fy(t)\| =$$

$$= \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \|u(t) - \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K^t(s) Nx(s) - u(t) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K^t(s) Ny(s)\| =$$

$$= \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \| \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K^t(s) Nx(s) - \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K^t(s) Ny(s)\| =$$

$$= \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \| \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K^t(s)(Nx(s) - Ny(s))\| \leq SV^u[K^t].\|Nx - Ny\| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} SV^u[K^t].L\|x-y\| = SV^u[K].L\|x-y\| = \beta\|x-y\|.$$

Assim, $\|Fx - Fy\| \leq \beta\ \|x-y\|$ para todo $x, y \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ e $\beta < 1$.

Portanto, F é contração.

Usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, segue que, F possui um e apenas um ponto fixo.

Além disso, pelo Teorema do Ponto fixo de Banach, a sequência $\{x_i\}$ converge uniformemente para o ponto fixo.

Vejamos uma aplicação do Teorema 5.2.2:

Exemplo 5.2.1 *Afirmamos que a equação integral não linear escalar*

$$x(t) + \int_{[0,1]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s[t - \rho(s)]\,\mathrm{sen}(x(s)) = 2t, \quad t \in [0,1]_{\mathbb{T}}$$

tem uma única solução x para $\mathbb{T}$ arbitrário.

De fato: *Basta comparar as equações integrais deste exemplo e do Teorema 5.2.2.*

$K \in G^{\sigma}_{\Delta}SV^u([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(\mathbb{R}))$ e $u(t) = 2t$ é contínua.

Além disso, $SV[K] = \sup_{t\in[0,1]_{\mathbb{T}}} SV[K^t] < 1$.

Pois, $SV[K^t] = \sup_{\|x_i\|<1} \{\| \sum_{i=1}^{n(P)} [\rho(t_i) - \rho(t_{i-1})]x_i\|\} < 1.$

O operador de Nemytskij associado a x, com $Nx(t) = \text{sen } x(t)$*, é Lipschitz com constante L=1.*

Logo, todas as condições do Teorema 5.2.2 são satisfeitas e então concluimos que a equação integral acima possui uma única solução para uma escala temporal $\mathbb{T}$ *arbitrário.*

5.3 Equação integral de Volterra–Stieltjes linear

Usamos como na literatura o termo "equação não linear"englobando o termo de "equação linear".

Neste sentido, a equação (K) será linear quando considerarmos $f(t,x(t)) = x(t)$, ou seja, quando seu operador Nemytskij é a identidade

$$Nx(t) = x(t), \quad \forall\, t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Neste caso, a equação integral linear é expressa da forma

$$(KL) \qquad x(t) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s)x(s) = u(t).$$

Uma consideração imediata do Teorema 5.2.2 é:

Corolário 5.3.1 *Seja* $K \in G^{\sigma}_{\Delta}SV^u([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$.

Dada a equação (KL) *com* $SV^u[K] < 1$.

Então (KL) *possui uma única solução* $x \in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ *para cada* $u \in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$.

Demonstração: Seja $SV^u[K] = \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} SV^u[K^t]$ tal que $SV^u[K] < 1$. Então como N é contração com constante de contração $L = 1$ temos $L < \frac{1}{SV[\alpha]}$, e assim, segue do teorema 5.2.2.

À partir do Teorema de existência e unicidade seguindo esta linha, vamos num trabalho futuro expressar a solução de (K) em função do núcleo K. Neste sentido, temos no caso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e usando a integral de Dushnik na equação, que x pode ser expressa por uma série do tipo Volterra–Wiener como em [37] ou no caso (KL), com a mesma condição do corolário 5.3.1 acima, por uma série de potências de (K), como em Arbex [32].

Referências Bibliográficas

[1] HILGER, S. *Ein Maβkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, PhD thesis, Universit*ä*t W*ü*rzburg, 1988.

[2] BOHNER, M., FAN, M., ZHANG, J. *Periodicity of scalar dynamic equations and applications to population models*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 330, 2007, 1–9.

[3] WONG, P. J. Y., BOEY, K. L. *Nontrivial periodic solutions in the modelling of infectious disease*, Applicable Analysis: an international journal, 83, 2004, 1–16.

[4] HILGER, S. *Analysis on measure chains: a unified approach to continuous and discrete calculus*, Results. Math., 18, 1990, 18-56.

[5] HILGER,. S. *Differential and difference calculus- Unified!*, Nonlinear Anal. 30, n. 5., 1997, 2683-2694.

[6] BOHNER, M., PETERSON, A. *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*, Birkh*ä*user, Boston, 2001.

[7] AGARWAL, R., BOHNER, M., O'REGAN, PETERSON, A. *Dynamic equations on time scales: a survey*, Journal Comput. Appl. Math. 141, 2002, 1-26.

[8] BOHNER, M., PETERSON, A. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkh*ä*user, Boston, 2003.

[9] BOHNER, M., PETERSON, A. *A survey of exponential functions on time scales*, 2000.

[10] AGARWAL,R., BOHNER, M. *Basic calculus on time scales and some of its applications*, Results Math. 35 (1-2), 1999 3-22.

[11] TISDELL, C. C., ZAIDI, A. *Basic qualitative and quantitative results for solutions to nonlinear dynamic equations on time scales with an application to economic modelling*, Nonlinear Anal., 2008.

[12] BRITO DA CRUZ, A. M. C., ROGRIGUES, H. S., TORRES, D. F. M. *Escalas Temporais e Mathematica*, Bol. Soc. Port. Mat. 2010.

[13] GUSEINOV, G. Sh. *Integration on time scales*, Journal of mathematical analysis and applications 285, 2003, 107-127.

[14] KULIK, T., TISDELL, C. C. *Volterra integral equations on time scales: basic qualitative and quantitative results with applications to initial value problems on unbounded domains*, International Journal of Difference Equations, v.3, n. 1, 2008, 103-133.

[15] BARBANTI, L., DAMASCENO, B. C. FEDERSON, M., SILVA, G. N. *Representation theorem for linear integral operator on regulated functions in time scales*, Springer Proc. in Math. and Estat., v. 47, 2013.

[16] DACUNHA, J. J. *Lyapunov Stability and Floquet Theory for Nonautonomous Linear Dynamic Systems on Time Scales*, Texas, 2004.

[17] BARTLE, R. G. *The Elements of Real Analysis*, Segunda edição, Wiley, Nova York, 1976.

[18] MOZYRSKA, D., PAWLUSZEWICZ, E., TORRES, D. *The Riemann–Stieltjes integral on time scales*, Journal of mathematical analysis and applications, 2009.

[19] BOHNER, M., GUSEINOV, G. Riemann and Lebesgue integration em *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkh*ä*user, Boston, 2003, 117–163.

[20] PRICE, G. B. *Cauchy–Stieltjes and Riemann–Stieltjes integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. v. 49, n. 8, 1943, 625-630.

[21] GUSEINOV, G. Sh., KAYMAKÇALAN, B. *Basics of Riemann delta and nabla integration on time scales*, Journal of Difference Equations and Applications 8, n. 11, 2002, 1001-1017.

[22] GUSEINOV, G. Sh., KAYMAKÇALAN, B. *On the Riemann integration on time scales*, Conference on Difference Equations, 2004, 289-298.

[23] MALINOWKA, A. B., TORRES, D. F. M. *On the diamond–alpha Riemann integral and mean value theorems on time scales*, Dynamics Systems Appl. 2009.

[24] PETERSON, A., THOMPSON, B. *Henstock–Kurzweil delta and nabla integral*, Journal of mathematical analysis and applications n.1, 2006, 162–178.

[25] THOMPSON, B. *Henstock–Kurzweil integrals on time scales*, Panamer. Math. J., n.1, 2008, 1–19.

[26] GUSEINOV, G. Sh., BOHNER, M. *Improper integrals on time scales*, Dynam. Systems Appl. 12, n.1–2, 2003, 45–65.

[27] GUSEINOV, G. Sh., BOHNER, M. *Multiple integration on time scales*, Dynam. Systems Appl. 14, n.3–4, 2003, 579–606.

[28] KREJČÍ, P. LAURENÇOT, P. *Generalized variational inequalities*, J. convex anal. 9 (1), 2002, 159–183.

[29] GOWURIN, M. *Über die Stieltjes integration abstrakter funktionen*, Fund. Math., 27, 1936, 254–268.

[30] DIEKMANN, O., GYLLENBERG, M., THIEME, H. *Perturbing evolutionary systems by step responses and cumulative outputs*, Differential integral equations, 8(5), 1995, 1205–1244.

[31] TRAVIS, C. *Diferentiability of weak solutions to an abstract inhomogeneous diferential equation*, Amer. Math. Soc. 82, 1981, 425–430.

[32] ARBEX, S. E. *Equações integrais de Volterra–Stieltjes com núcleos descontínuos*, Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo,São Paulo, 1976.

[33] HÖNIG, C. S. *Volterra Stieltjes Integral Equations: functional analytic methods, linear constraints*, Amsterdam : North-Holland Pub. Co. New York : American Elsevier Pub. Co., 1975.

[34] FICHMANN, L. *Equações diferenciais neutras com condições iniciais descontínuas* Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo,São Paulo, 1991.

[35] TAPIA, G. A. *Equações de evolução como equações integrais do tipo Volterra-Stieltjes e aplicações*, Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo,São Paulo, 2002.

[36] AGARWAL, R. O'REGAN, D. *Periodic solutions to nonlinear integral equations on the infinite interval modelling infectious disease*, Nonlinear Analysis 40, 2000, 21–35.

[37] ABREU, N. G. V. *Expansão das soluções de sistemas não lineares no espaço das funções regradas a valores em espaços de Banach*, Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo,São Paulo, 1997.

[38] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications* John Wiley Sons, Nova York, 1978.

[39] ABREU, N. G. V. *El operador de Nemytskij en el espacio de las funciones regladas*, Divulgaciones Matemáticas, v. 12 n. 2, 2004, pp. 149–153.

APÊNDICE

A

Apêndice

Na seção 4.3 a condição para $k_{t_0}f \in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$ provém de uma propriedade da diagonal do núcleo $K(t,s)$.

Com o objetivo de estabelecer esta condição e o Teorema de representação do tipo Riesz para os operadores causais faremos uma abordagem resumidamente de alguns resultados preliminares.

Primeiramente, começando com um resultado similar ao do Teorema de Helly (ver [33]).

Teorema A.0.1 *Se a sequência $\alpha_n([a,b]_{\mathbb{T}},L(X,Y))$ é tal que $SV[\alpha_n] \leq M$ para todo $n > n_0$ e se existir*

$$\alpha : [a,b]_{\mathbb{T}} \to L(X,Y) \text{ tal que } \alpha_n(t)x \to \alpha(t)x,$$

para todo $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ e $x \in X$ então

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha_n(t)f(s) \to \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s\alpha(t)f(s),$$

$\forall\, f \in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$.

Demonstração: Pelo Teorema de Existência 3.2.2 temos:

$$\|F_\alpha\| \leq SV[\alpha] \text{ e } \|F_{\alpha_n}\| \leq SV[\alpha_n].$$

Então, $\|F_\alpha\|,\ \|F_{\alpha_n}\| \leq M, \forall\, n.$

$$\lim F_{\alpha_n}[\chi_{(a,\tau]}x] = \lim \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \alpha_n(t)\chi_{(a,\tau]}(s)x =$$

$$= \lim \alpha_n(\tau)x = \alpha(\tau)x = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \alpha(t)\chi_{(a,\tau]}(s)x =$$

$$= F_\alpha[\chi_{(a,\tau]}x]$$

.

Daí, $\lim F_{\alpha_n} f = F_\alpha f$ para todo $f \in G([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$.

Além disso, $\exists\, f_\varepsilon \in E(([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$ tal que

$$\|f - f_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$$

Assim,

$$\|F_\alpha(f) - F_{\alpha_n}(f)\| \leq \|F_\alpha(f - f_\varepsilon)\| +$$

$$+ \|F_\alpha(f_\varepsilon) - F_{\alpha_n}(f_\varepsilon)\| + \|F_{\alpha_n}(f - f_\varepsilon)\| \leq$$

$$\|F_\alpha\| \|\|f - f_\varepsilon\| + \|\|F_\alpha(f_\varepsilon) - F_{\alpha_n}(f_\varepsilon)\| +$$

$$\|F_{\alpha_n}\| \|f - f_\varepsilon\|$$

$$\leq M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon$$

para todo $n > n_0, n_\varepsilon$. Com $\|F_\alpha(f_\varepsilon) - F_{\alpha_n}(f_\varepsilon)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\forall n > n_\varepsilon$.

Lema A.0.1 *Dado $K \in G^\sigma SV^u([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$.*

Para cada $f \in G^\sigma([a,b]_{\mathbb{T}}, L(W,X))$, definimos

$$F_K f(t) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s).$$

Então $F_K f \in G^\sigma([a,b]_{\mathbb{T}}, L(W,Y))$.

Demonstração: Seja $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ e $\{t_n\} \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ tal que $t_n \to t^-$.

Como K^{t_n} satisfaz as hipóteses do Teorema A.0.1 e para cada $s \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ e $w \in W$ $K^{t_n}(s)w \to K^{t^-}(s)w$.

Daí, para cada $w \in W$, segue que:

$$F_K f(t_n)w = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t_n,s) f w(s) \longrightarrow F_K f(t^-)w = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t^-,s) f w(s).$$

Procedendo de maneira analoga obtemos para o limite a direita.
Portanto, $F_K f \in G^{\sigma}([a,b]_{\mathbb{T}}, L(W,Y))$.

Em particular, temos

$$k_{t_0} f(t_n)w \longrightarrow k_{t_0} f(t^-)w, \quad \forall \ t_0 \leq t < b$$

E analogamente,

$$k_{t_0} f(t_n)w \longrightarrow k_{t_0} f(t^+)w, \quad \forall \ a \leq t < t_0.$$

Definição A.0.1 *Seja $K \in G^{\sigma}_{\Delta}SV^u([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$, isto é,*

$$K_{\Delta} : t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \mapsto K(t,t) \in L(X,Y) \text{ é simplesmente regrada.}$$

Indicamos por $\overline{K}$ e $\underline{K}$ as funções de $[a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}$ em $L(X,Y)$ por:

$$\overline{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & se \quad t \geq s \\ K(t,t), & se \quad t < s \end{cases}$$

e

$$\underline{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & se \quad t \leq s \\ K(t,t), & se \quad t > s \end{cases}$$

Um resultado imediato:

Teorema A.0.2 *Se $K \in G^{\sigma}_{\Delta}SV^u([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ então*

$$\overline{K}, \ \underline{K} \in G^{\sigma}_{\Delta}SV^u([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y)).$$

Além disso, para os operadores do tipo $kf(t) = \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s)$ temos:

Proposição A.0.1 *Seja $K \in G^{\sigma}_{\Delta} SV^u([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ e $t_0 \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, então:*

i) $kf \in G^{\sigma}([a,b]_{\mathbb{T}}, L(W,X))$

ii) *Além disso,*

$$kf(t_-) = \begin{cases} \int_{[t_0,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \overline{K}(t_-,s) f(s), & se \quad t_0 < t \leq b \\ -\int_{[a,t_0]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \underline{K}(t_-,s) f(s), & se \quad a < t \leq t_0 \end{cases}$$

e

$$kf(t_+) = \begin{cases} \int_{[t_0,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \overline{K}(t_+,s) f(s), & se \quad t_0 \leq t < b \\ -\int_{[a,t_0]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \underline{K}(t_+,s) f(s), & se \quad a \leq t < t_0 \end{cases}$$

Demonstração: *i)* Primeiramente observe que: para cada $f \in G^{\sigma}([a,b]_{\mathbb{T}}, L(W,X))$ e $K^t \in SV([a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$, então $f \in G^{\sigma}([t_0,t]_{\mathbb{T}}, L(W,X))$ e $K^t \in SV([t_0,t]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ e usando o Teorema de Existência 3.2.2 considerando sobre $L(W,Y)$, segue que,

$$kf(t) = \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s)$$

existe. Daí, usando o Lema A.0.1 segue o resultado.

ii) Levando em consideração que:

$$kf(t) = \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s) = \int_{[t_0,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \overline{K}(t,s) f(s)$$

para $t_0 \leq t \leq b$, e

$$kf(t) = -\int_{[t,t_0]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s) = -\int_{[a,t_0]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \underline{K}(t,s) f(s)$$

para $a \leq t \leq t_0$, o resultado segue.

Teorema A.0.3 *$K \in G^{\sigma} SV^u([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$ então são equivalentes:*

a) *A função $K_{\Delta} : t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \mapsto K(t,t) \in L(X,Y)$ é simplesmente regrada.*

$$K_{\Delta} : [a,b]_{\mathbb{T}} \mapsto K(t,t)x \in L(X,Y) \text{ é regrada.}$$

b) *Para cada* $t_0 \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ *e* $f \in G^{\sigma}([a,b]_{\mathbb{T}}, L(W,X))$ *a função*

$$kf : t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \to kf(t) = \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s) \in L(W,Y)$$

é simplesmente regrada.

<u>Demonstração:</u> Suponha que K é simplesmente regrada na diagonal, isto é,

$$K_{\Delta} : [a,b]_{\mathbb{T}} \mapsto K(t,t)x \in L(X,Y) \text{ é regrada.}$$

Considere operadores do tipo $kf(t) = \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s)$. Queremos mostrar que

$$kfw(t) = kf(t)w = \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s) w$$

é regrada. Isto segue usando novamente o Lema A.0.1 e lembrando que:

$$kf(t) = \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s) = \int_{[t_0,b]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \overline{K}(t,s) f(s)$$

para $t_0 \leq t \leq b$ e

$$kf(t) = -\int_{[t,t_0]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K(t,s) f(s) = -\int_{[a,t_0]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s \underline{K}(t,s) f(s)$$

para $a \leq t \leq t_0$.

Reciprocamente, tomando $w_0 \in W$ e $w_0' \in W'$, com $< w_0, w_0' > \neq 0$, então para cada $x \in X$,

a função $f : t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \mapsto < \cdot, w_0' > x \in L(W,X)$ é tal que $f \in G^{\sigma}([a,b]_{\mathbb{T}}, L(W,X))$ e

$$kf(t)w_0 = \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \mathbb{D}_s K^t(s) < w_0, w_0' > x = < w_0, w_0' > [K^t(s)(t)x - K^t(s)(t_0)x]$$

que pela hipótese é regrada.

Como $K \in G^{\sigma}SV^u([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y))$, a função $t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \mapsto K(t,t_0)x$ é regrada, e assim, podemos concluir que $t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \mapsto K(t,t)x$ é regrada, com $x \in X$.

Supondo que K é simplesmente regrada na diagonal e além disso, extendemos K para $[a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}$ definindo $K(t,s) = K(t,t)$ se $s \geq t$ escrevemos:

$$K \in G^{\sigma}_{\Delta}SV^u([a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}, L(X,Y)).$$

O próximo teorema caracteriza os operadores de $L[G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X),G([a,b]_{\mathbb{T}},Y)]$ causais.

Teorema A.0.4 *Dado* $K:\Gamma\to L(X,Y)$ *onde*

$$\Gamma=\{(t,s)\in[a,b]_{\mathbb{T}}\times[a,b]_{\mathbb{T}};t\le s\}.$$

Se temos $K\in G^{\sigma}_{\Delta}SV^{u}([a,b]_{\mathbb{T}}\times[a,b]_{\mathbb{T}},L(X,Y))$ *então o operador* k_a *definido por* k *é causal, onde* k *definido como: para todo* $f\in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$

$$(k_af)(t)=\int_{[a,t]_{\mathbb{T}}}\mathbb{D}_sK(t,s)f(s)=\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}}\mathbb{D}_sK(t,s)f(s),\quad t\in[a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Reciprocamente, para todo operador causal $A\in L[G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X),G([a,b]_{\mathbb{T}},Y)]$
existe $K\in G^{\sigma}_{\Delta}SV^{u}([a,b]_{\mathbb{T}}\times[a,b]_{\mathbb{T}},L(X,Y))$ *para o qual* $Af(t)=(k_af)(t)$. *Tomamos* $K(t,s)x=k[\chi_{(a,s]_{\mathbb{T}}}x](t)$.

<u>**Demonstração:**</u> Mostremos que o operador K_a é causal.

Seja $f\in G([a,b]_{\mathbb{T}},X)$. Suponha que para $\forall\ \tau\in[a,t]_{\mathbb{T}},\ \ f(\tau)=0$, então

$$(k_af)(\tau)=\int_{[a,\tau]_{\mathbb{T}}}\mathbb{D}_sK(\tau,s)f(s)=\lim_{P\in\wp}\sum_{i=1}^{n(P)}[K^t(t_i)-K^t(t_{i-1})]0$$

Logo, $k_af(\tau)=0$, para todo $\tau\in[a,t]_{\mathbb{T}}$, e portanto, k_a é causal.

Reciprocamente, tomando $K(t,s)x=k[\chi_{(a,s]_{\mathbb{T}}}x](t)$ temos:

$$(k_a\chi_{(a,t]_{\mathbb{T}}}x)(t)=\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}}\mathbb{D}_sK(t,s)\chi_{(a,t]_{\mathbb{T}}}x(s)=K(t,s)x$$

Provemos que $K\in G^{\sigma}_{\Delta}SV^{u}([a,b]_{\mathbb{T}}\times[a,b]_{\mathbb{T}},L(X,Y))$ e $Af=k_af$.

$i)$ $\quad K(t,s)\in L(X,Y)$, pois

$$\|K(t,s)x\|\le\|k[\chi_{(a,s]_{\mathbb{T}}}x]\|\le\|k\|\|\chi_{(a,s]_{\mathbb{T}}}x]\|\le\|k\|\|x\|$$

$ii)$ $\quad K$ é simplesmente regrada como função na primeira variável, pois como K toma valores em $G^-([a,b]_{\mathbb{T}},X)$, da definição de k, temos que para cada $s\in[a,b]_{\mathbb{T}}$ e $x\in X$, a função que a cada $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$ associa $K(t,s)x\in Y$ é regrada.

iii) K é uniformemente de semivariação limitada na segunda variável pois, se $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, $x_i \in X$ com $\|x_i\| \leq 1$ e $P \in \wp$, segue que,

$$\| \sum_{i=1}^{n(P)} [K^t(s_i) - K^t(s_{i-1})]x_i\| \leq \|k[\sum_{i=1}^{n(P)} \chi_{(s_{i-1},s_i]}]\| \leq \|k\|.$$

iv) $Af = (k_a f)$, pois ocorre a igualdade num subconjunto total de $G^-([a,b]_{\mathbb{T}}, X)$.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 12 de julho de 2013.

Camila Afonso Martins

Assinatura