

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-M.005/98

Deflexão de Fótons pelo Sol no Contexto da Teoria de Gravitação
 $R + R^2$

Abel Dionizio Azeredo

Orientador:

Prof. Dr. Antonio Accioly

Agosto de 1998

Resumo

Calcula-se a seção de choque para o espalhamento de fótons pelo campo gravitacional do Sol, tratado como campo externo, no contexto da teoria de gravitação $R + R^2$. Encontra-se um valor para o ângulo de deflexão de um fóton que passa nas vizinhanças da superfície do Sol que é exatamente o mesmo que aquele fornecido pela relatividade geral. Discute-se o porquê da coincidência desses resultados.

Palavras Chave: Teoria de Gravitação $R + R^2$, Espalhamento de Fótons pelo Campo Gravitacional do Sol, Teoria de Gravitação Renormalizável.

Área de Conhecimento: 1.05.03.01-3

Abstract

The cross-section for the scattering of a photon by the Sun's gravitational field, treated as an external field, is computed in the framework of $R + R^2$ gravity. It is found a value for the deflection angle of a photon passing near to the Sun which is exactly the same as that given by general relativity. An explanation for this strange coincidence is provided.

Key Words: $R + R^2$ Gravity, Scattering of Photons by the Sun's Gravitational Field, Renormalizable Gravity Theory.

Para
todas as mulheres bonitas,
porque, (plagiando o poeta)
beleza é fundamental.

Agradecimentos

- (i) Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Accioly, pela assistência e incentivo na elaboração deste trabalho e por auxiliar-me no começo de minha vida científica.
- (ii) Ao IFT-UNESP pelos recursos técnicos e à CAPES pelo apoio financeiro.
- (iii) Ao Edgard C. de Rey Neto e a Hatsumi Mukai pela colaboração e discussões durante todo o desenvolvimento deste trabalho.
- (iv) Aos colegas do IFT (Cláudio, “Caverna”, “Medalha”, “Labrador”, “Anarquista”, ...), pela convivência (“Opção”, “Aurora”, etc.).

Índice

| | |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| INTRODUÇÃO | 8 |
| 1 O Potencial Efetivo | 11 |
| 1.1 Introdução | 11 |
| 1.2 A Interação Gravitacional | 12 |
| 1.3 A Amplitude \mathcal{M} no Limite Não-Relativístico | 15 |
| 1.4 Cálculo do Potencial Efetivo | 16 |
| 2 O Campo Gravitacional do Sol | 19 |
| 2.1 Introdução | 19 |
| 2.2 O Campo gravitacional do Sol | 20 |
| 2.2.1 Cálculo de $h(\vec{r})$ | 20 |
| 2.2.2 Cálculo de $h_{00}(\vec{r})$ | 21 |
| 2.2.3 Cálculo de $h_{ij}(\vec{r})$ | 22 |
| 2.2.4 Cálculo de $h_{i0}(\vec{r})$ | 24 |
| 2.2.5 Resumo | 24 |
| 2.3 Cálculo de $h_{\mu\nu}(\vec{k})$ | 25 |
| 3 Deflexão Gravitacional da Luz | 27 |
| 3.1 Introdução | 27 |

| | | |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.2 | Seção de Choque para o Espalhamento de Fótons pelo Campo Gravitacional do Sol | 29 |
| 3.3 | Previsão da Teoria $R + R^2$ para a Deflexão Gravitacional Solar | 32 |

EPÍLOGO 33

A Quantização na Aproximação de Campo Fraco 36

| | | |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| A.1 | Introdução | 36 |
| A.2 | Expressões Úteis na Aproximação de Campo Fraco | 37 |
| A.2.1 | A expansão de $g^{\mu\nu}$ | 37 |
| A.2.2 | A expansão de $(-g)^{1/2}$ | 38 |
| A.3 | A Ação Escrita em Termos do Campo $h_{\mu\nu}$ | 38 |
| A.3.1 | A forma $\Gamma - \Gamma$ da ação de Einstein | 39 |
| A.3.2 | A ação de Einstein em função do campo $h_{\mu\nu}$ | 41 |
| A.4 | O Propagador de Feynman Para a Teoria de Gravitação $R + R^2$ | 42 |
| A.4.1 | Introdução | 42 |
| A.4.2 | O termo proporcional a R^2 em função do campo $h_{\mu\nu}$ | 43 |
| A.4.3 | A Lagrangeana de Fixação de Gauge | 44 |
| A.4.4 | Cálculo do Inverso do Operador $\mathcal{P}^{\mu\nu,\alpha\beta}$ | 45 |
| A.4.5 | O Propagador de Feynman | 47 |

Bibliografia 48

INTRODUÇÃO

Entre os testes fundamentais da teoria da relatividade geral, a deflexão da luz pelo Sol é sem dúvida o mais popular. De fato, a idéia da luz sendo defletida de sua trajetória clássica pela presença de matéria é de um apelo irresistível. Historicamente esta predição da teoria de Einstein foi testada pela primeira vez durante o eclipse solar ocorrido em 29 de março de 1919, por duas expedições organizadas por Eddington e Dyson, uma para a cidade de Sobral no Brasil e a outra para a ilha Príncipe, na África portuguesa. Os resultados obtidos por estas duas expedições foram os seguintes

$$\theta = \begin{cases} 1,98 \pm 0,16'' & \text{(Sobral)} \\ 1,61 \pm 0,40'' & \text{(Príncipe)}. \end{cases}$$

Estes resultados ocuparam os cabeçalhos dos principais jornais da época. O verso que se segue foi enviado a Einstein em um cartão postal em 11 de outubro de 1919 pelos participantes de um colóquio de Física realizado em Zurique (Debye, Weyl, ...) e mostra claramente o entusiasmo reinante na comunidade científica de então :

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><i>„Alle Zweifel sind entschwunden, Endlich ist es nun gefunden: Das Licht, das läuft natürlich krumm Zu Einsteins allergrösstem Ruhm! ”</i></p> | <p><i>“Então todas as dúvidas desapareceram, Finalmente foi descoberto: A luz, naturalmente anda encurvada Para o máximo engrandecimento da fama de Einstein!”</i></p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

A partir daí, numerosas medidas relativas ao desvio da luz estelar foram feitas durante os eclipses solares apresentando resultados bastante diferenciados. Com o advento da radioastronomia, em 1969, passou-se a estudar não mais o desvio da luz estelar pelo Sol, mas sim o das ondas de rádio. Os resultados mais precisos obtidos até o presente sendo os de Fomalont e Sramek [1], que encontram um valor para o ângulo de deflexão próximo àquele previsto pela teoria da relatividade geral.

Por outro lado, sabe-se que a ação relativa à gravitação é determinada pela sua invariância sob transformações de coordenadas gerais, e tem a forma [2]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \alpha' R^2 + \beta' R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma' R_{\mu\nu} R^{\nu\delta} R_{\delta}{}^{\mu} + \dots \right] .$$

Neste trabalho utilizamos o sistema natural de unidades ($\hbar = c = 1$). Em nossa notação a assinatura é (+ - - -). O tensor de curvatura é definido por $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = -\partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} + \dots$, o tensor de Ricci por $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\nu\alpha}$, e o escalar de curvatura por $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. Aqui $\kappa^2 = 32\pi G$, onde G é a constante de Newton, e α', β', γ' , etc. , são parâmetros apropriados.

A assim chamada teoria de gravitação mínima (relatividade geral) consiste em se considerar apenas o primeiro termo da ação precedente, o que não implica que exista algum princípio conhecido que permita excluir potências mais elevadas de R . Assim sendo, concentremos nossa atenção na teoria de gravitação $R + R^2$, que é definida pela ação [3]

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 \right] ,$$

onde α é um parâmetro adimensional. Como a quantidade R envolve derivadas segundas atuando sobre a métrica e numa dada interação cada derivada torna-se um fator do momento transferido k , ou da escala do inverso da distância $k \sim \frac{1}{r}$, podemos dizer que R é da ordem de $k^2 \left(\frac{1}{r^2} \right)$, enquanto que R^2 é da ordem de $k^4 \left(\frac{1}{r^4} \right)$. Portanto, para energias suficientemente

pequenas, ou para distâncias muito grandes, os termos quadráticos são negligenciáveis, e a teoria $R + R^2$ reduz-se à teoria mínima. Podemos argumentar então que para valores pequenos da energia E da radiação incidente ($E \sim 0$) as medidas da deflexão gravitacional solar devem estar em excelente concordância com a relatividade geral. De fato, na medida da deflexão gravitacional solar utilizando ondas de rádio ($E \sim 1cm^{-1}$), Fomalont e Sramek [1] encontraram um valor de $1,761 \pm 0,016$ segundos de arco para a deflexão nas periferias do Sol (a predição da relatividade geral é $1,75''$). Como consequência, devemos esperar uma contribuição não negligenciável do termo quadrático para a deflexão gravitacional solar da luz estelar ($E \sim 10^5 cm^{-1}$). É importante observar que o valor médio obtido para a deflexão gravitacional solar baseado em todas as expedições realizadas durante os eclipses até hoje é $2,04''$.

Nossa motivação neste trabalho é analisar, na base da teoria $R + R^2$, a questão da deflexão de fótons pelo Sol, utilizando uma aproximação semiclássica.

No Capítulo 1 calculamos o potencial efetivo não relativístico, no contexto da gravitação $R + R^2$, que descreve a interação gravitacional de dois bósons massivos idênticos de spin zero. Utilizando este resultado mostramos que esta teoria só admite limite newtoniano se o modo massivo nela presente for não-taquiônico.

No Capítulo 2 determinamos o campo gravitacional do Sol, tratado como campo fraco, no contexto da teoria $R + R^2$.

Mostramos no Capítulo 3 que o ângulo de deflexão de um fóton que passa próximo ao Sol, coincide com aquele previsto pela teoria de Einstein.

Reservamos o Epílogo para explicar a razão das duas teorias levarem ao mesmo resultado para a deflexão gravitacional solar.

Capítulo 1

O POTENCIAL EFETIVO NÃO-RELATIVÍSTICO PARA A GRAVITAÇÃO $R + R^2$

1.1 Introdução

Uma das mais simples e duradouras idéias para estender a relatividade geral é incluir na ação gravitacional termos envolvendo potências mais altas do tensor de curvatura. Se incluirmos apenas um termo proporcional a R^2 , a ação resultante toma a forma da eq.(A.2)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 \right] , \quad (1.1)$$

onde α é um parâmetro adimensional e κ^2 tem dimensão L^2 .

Evidentemente, o termo quadrático representa uma correção à teoria de Einstein, não importando quão pequena ela possa ser. Isto suscita uma interessante questão: qual a predição da gravitação $R + R^2$ para o desvio de um fóton passando nas proximidades do Sol? Obviamente, a resposta a esta questão não pode ser encontrada no âmbito clássico, pois isto exigiria que encontrássemos a solução estática e esfericamente simétrica das equações de campo da teoria da gravitação $R + R^2$ – uma tarefa completamente impossível na prática!

O caminho a seguir, no contexto desta teoria, para obter a deflexão de um fóton pelo

Sol, é usar um tratamento semiclássico. O campo gravitacional do Sol, um objeto clássico, deve ser tratado como um campo externo que interage com uma partícula quântica, o fóton. Sendo assim, devemos começar obtendo o potencial efetivo não-relativístico para a gravitação $R + R^2$. Obter este potencial é o objetivo deste capítulo.

1.2 A Interação Gravitacional

O potencial efetivo não-relativístico para a interação de dois bósons massivos e idênticos de spin zero (veja Fig. 1) é dado por

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4m^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \mathcal{F}_{N.R.} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad , \quad (1.2)$$

com $\mathcal{F}_{N.R.} = i\mathcal{M}_{N.R.}$, onde $\mathcal{M}_{N.R.}$ é o limite não-relativístico da amplitude de Feynman para o processo representado na figura 1.

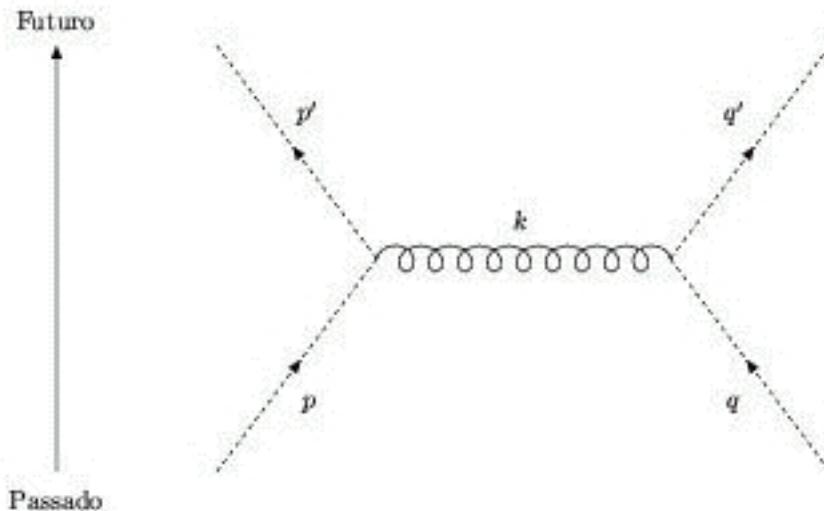


Fig. 1 – Interação gravitacional de dois bósons massivos e idênticos de spin zero.

A densidade lagrangeana para a interação da gravitação com um campo escalar massivo livre ϕ , é

$$\mathcal{L}_{int} = \sqrt{-g} \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2) \quad . \quad (1.3)$$

As flutuações quânticas do campo gravitacional podem ser expandidas em torno de uma métrica de fundo, que em nosso caso (aproximação de campo fraco) é o espaço-tempo plano

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad .$$

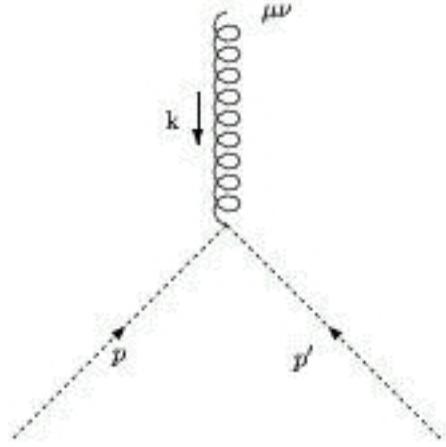


Fig. 2 – O vértice de interação.

Usando as expansões para $\sqrt{-g}$ e $g^{\mu\nu}$ obtidas no Apêndice [eqs. (A.4) e (A.6)], obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= \left(1 + \frac{1}{2} \kappa h - \dots\right) \frac{1}{2} \left[(\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \dots) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2 \right] \\ &= -\frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - m^2 \phi^2) \right] \quad , \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde desprezamos os termos de ordem igual ou superior a κ^2 e omitimos a densidade lagrangeana para o campo escalar livre.

Da expressão precedente, as regras de Feynman para o vértice elementar mostrado na Fig. 2 podem ser deduzidas facilmente.

O vértice de interação é dado, portanto, por

$$V_{\mu\nu}(p, p') = \frac{i}{2}\kappa \left[p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - \eta_{\mu\nu} (p \cdot p' + m^2) \right] \quad . \quad (1.5)$$

No espaço dos momentos, o propagador livre da gravitação $R + R^2$, no gauge de de Donder (gauge harmônico), é (veja a eq. (A.26) do Apêndice)

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu, \lambda\theta}^F(k) = & \frac{i}{2k^2} \left\{ - \left[\frac{-2 + 2\alpha k^2 \kappa^2}{-2 + 3\alpha k^2 \kappa^2} \right] \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\theta} + (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\theta} + \eta_{\nu\lambda} \eta_{\mu\theta}) + \right. \\ & \left. + \frac{-2\alpha\kappa^2}{2 - 3k^2\kappa^2\alpha} \left[\eta_{\mu\nu} k_\lambda k_\theta + \eta_{\lambda\theta} k_\mu k_\nu + \frac{2}{k^2} k_\mu k_\nu k_\lambda k_\theta \right] \right\} \quad . \quad (1.6) \end{aligned}$$

A amplitude de Feynman para o processo mostrado na Fig. 1 é dada por

$$\mathcal{M} = V_{\mu\nu}(p, -p') \Delta^{\mu\nu, \lambda\theta}(k) V_{\lambda\theta}(q, -q') \quad . \quad (1.7)$$

Uma observação bastante útil e que nos faz poupar bastante trabalho na obtenção da amplitude de Feynman é notarmos que na eq. (1.4) $\mathcal{L}_{int} = -\frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$, o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ do campo escalar massivo ϕ [4] se conserva, ou seja, $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Transcrevendo isto para o espaço de momentos, temos $T^{\mu\nu} k_\nu = 0$. Isto significa que todos os termos do propagador livre da gravitação $R + R^2$ proporcionais a k_ν não contribuirão para o cálculo da amplitude de Feynman. Feita esta observação, obtemos¹

¹Onde

$$\begin{aligned} V(p, -p') &= \eta^{\mu\nu} V_{\mu\nu}(p, -p') = i\kappa (p \cdot p' - 2m^2) \quad e \\ V^{\mu\nu}(p, -p') V_{\mu\nu}(q, -q') &= -\frac{\kappa^2}{4} [(p \cdot q)(p' \cdot q') + (p \cdot q')(p' \cdot q) + \\ &+ p \cdot p' (m^2 - q \cdot q') + q \cdot q' (m^2 - p \cdot p') + 2(m^2 - p \cdot p')(m^2 - q \cdot q')] \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= iV_{\mu\nu}(p, -p') A [B\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\theta} + \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\theta} + \eta^{\nu\lambda}\eta^{\mu\theta}] V_{\lambda\theta}(q, -q') \\
&= iA [BV(p, -p') V(q, -q') + 2V^{\mu\nu}(p, -p') V_{\mu\nu}(q, -q')] \\
&= i\kappa^2 A [B(p \cdot p' - 2m^2)(q \cdot q' - 2m^2) + (p \cdot q)(p' \cdot q') + (p \cdot q')(p' \cdot q) + \\
&\quad + (p \cdot p')(m^2 - q \cdot q') + (q \cdot q')(m^2 - p \cdot p') + 2(m^2 - p \cdot p')(m^2 - q \cdot q')] \quad , (1.8)
\end{aligned}$$

onde

$$A \equiv \frac{1}{2k^2} \quad , \quad B \equiv \left[\frac{2 - 2\alpha k^2 \kappa^2}{2 - 3\alpha k^2 \kappa^2} \right] \quad .$$

1.3 A Amplitude \mathcal{M} no Limite Não-Relativístico

No limite não-relativístico temos que $p^2 = p_0^2 - |\vec{p}|^2 \simeq E^2 = m^2$. Logo $p^2 = p'^2 = q^2 = q'^2 = m^2$. Assim a amplitude de Feynman dada pela eq. (1.8) se reduz a

$$\mathcal{M}_{N.R.} = -i\kappa^2 A m^4 (B + 2) \quad , \quad (1.9)$$

onde, evidentemente, A e B também são tomados no limite não-relativístico;² ou seja,

$$A = -\frac{1}{2|\vec{k}|^2} \quad , \quad B = -\left[\frac{2 - 2\alpha|\vec{k}|^2 \kappa^2}{2 - 3\alpha|\vec{k}|^2 \kappa^2} \right] \quad .$$

A expressão (1.9) pode ser escrita como

$$\mathcal{M}_{N.R.} = -i\kappa^2 m^4 \left[\frac{(1 + \alpha\kappa^2|\vec{k}|^2)}{(3\alpha\kappa^2|\vec{k}|^2 + 2)|\vec{k}|^2} - \frac{1}{|\vec{k}|^2} \right] = \frac{i\kappa^2 m^4}{|\vec{k}|^2} \left[\frac{1 + 2\alpha\kappa^2|\vec{k}|^2}{2 + 3\alpha\kappa^2|\vec{k}|^2} \right] \quad . \quad (1.10)$$

²Com $k^2 = k_0^2 - |\vec{k}|^2 \simeq -|\vec{k}|^2$.

1.4 Cálculo do Potencial Efetivo

Substituindo (1.10) em (1.2) obtemos

$$U(\vec{r}) = -\frac{\kappa^2 m^2}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{|\vec{k}|^2} \left[\frac{1 + 2\alpha\kappa^2 |\vec{k}|^2}{2 + 3\alpha\kappa^2 |\vec{k}|^2} \right] \quad (1.11)$$

A realização desta integral é que nos dará a expressão final para o potencial efetivo não-relativístico da teoria de gravitação $R + R^2$. Com $d^3 \vec{k} = |\vec{k}|^2 d|\vec{k}| \text{sen}\theta d\theta d\varphi$ (Vide Fig. 3), obtemos após integrar nos ângulos

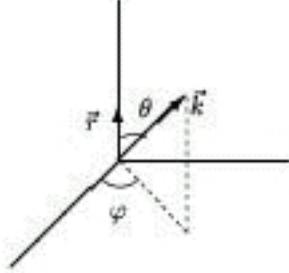


Fig. 3 – Geometria para o cálculo da integral (1.11).

$$U(\vec{r}) = -\frac{\kappa^2 m^2}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d|\vec{k}| \text{sen}(|\vec{k}| |\vec{r}|)}{|\vec{k}| |\vec{r}|} \left[\frac{1 + 2\alpha\kappa^2 |\vec{k}|^2}{2 + 3\alpha\kappa^2 |\vec{k}|^2} \right]$$

Fazendo a mudança de variável $|\vec{k}| = x/r$, escrevemos

$$U(\vec{r}) = -\left(\frac{\kappa m}{4\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \text{sen}x}{rx} \left[\frac{1 + 2\alpha\kappa^2 \frac{x^2}{r^2}}{2 + 3\alpha\kappa^2 \frac{x^2}{r^2}} \right]$$

A expressão anterior pode ser reescrita como

$$U(\vec{r}) = -\frac{2}{3} \left(\frac{\kappa m}{4\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \text{sen}x}{rx} \left[\frac{x^2 + \frac{3}{4}R^2}{x^2 + R^2} \right],$$

onde $R^2 = \frac{2}{3} \frac{r^2}{\alpha \kappa^2}$.

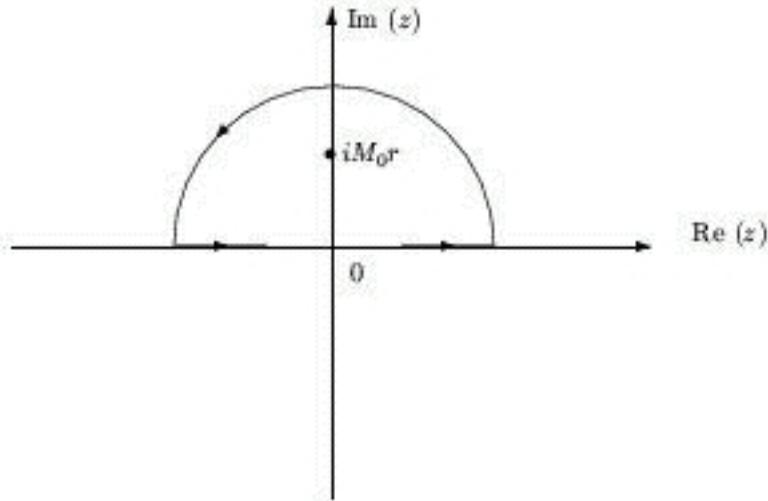


Fig. 4 – Contorno de integração para o cálculo de I .

Segue-se, que,

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{6r} \left(\frac{\kappa^2 m}{4\pi} \right)^2 [3\pi + I] \quad ,$$

onde

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + M_0^2 r^2} \quad , \quad (1.12)$$

e $M_0^2 \equiv \frac{2}{3\alpha\kappa^2}$.

Do ponto de vista matemático a integral (1.12) só faz sentido se α é positivo ($M_0^2 > 0$), o que corresponde à ausência de táquions no campo dinâmico. Supondo que $\alpha > 0$, a integral em

questão pode ser facilmente avaliada utilizando-se o contorno de integração da Fig. 4. Usando o teorema dos resíduos, obtemos imediatamente que $I = \pi e^{-M_0 r}$. Logo,

$$U(\vec{r}) = -\frac{\kappa^2 m^2}{32\pi r} \left[1 + \frac{1}{3} e^{-M_0 r} \right] . \quad (1.13)$$

Lembrando que $\kappa^2 = 32\pi G$, (1.13) pode ser escrita como

$$U(\vec{r}) = -m^2 G \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{3} \frac{e^{-M_0 r}}{r} \right] . \quad (1.14)$$

O potencial efetivo não-relativístico é obtido de (1.14), que representa a energia potencial gravitacional, por meio da relação $V(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{m}$. Segue-se que o potencial efetivo não-relativístico relacionado à teoria de gravitação $R + R^2$ é dado por

$$V(\vec{r}) = Gm \left[-\frac{1}{r} - \frac{1}{3} \frac{e^{-M_0 r}}{r} \right] . \quad (1.15)$$

A eq. (1.15) fornece um limite newtoniano aceitável, no sentido que só existe uma exponencial decrescente e nenhum termo $\frac{1}{r}$ oscilatório no infinito. Note que isto é verdade somente na hipótese de α ser positivo ($M_0^2 > 0$), o que implica no modo massivo da teoria ser não-taquiônico. Portanto, a teoria $R + R^2$ admite limite newtoniano se e somente se o seu modo massivo for não taquiônico.

Capítulo 2

O CAMPO GRAVITACIONAL DO SOL NA APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO E NO CONTEXTO DA TEORIA $R + R^2$

2.1 Introdução

No Capítulo precedente mostramos que a teoria $R + R^2$ só admite limite newtoniano se o seu modo massivo for não-taquiônico. Vamos supor então que esta teoria seja não-taquiônica, ou seja, que $\alpha > 0$ ($M_0 > 0$), e computar o campo gravitacional do Sol na aproximação de campo fraco.

A ação para a teoria de gravitação $R + R^2$ pode ser escrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \mathcal{L}_m \right] , \quad (2.1)$$

onde \mathcal{L}_m é a densidade lagrangeana da matéria. As equações para o campo gravitacional são obtidas do princípio da mínima ação , ou seja, $\delta S = 0$.

Variando S em relação a $g^{\mu\nu}$, obtemos[5]

$$\frac{2}{\kappa^2} G_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{2} \left[-\frac{1}{2} R^2 g_{\mu\nu} + 2R R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square R \right] + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0 , \quad (2.2)$$

onde o tensor de energia-momento da matéria é definido por

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{T_{\mu\nu}}{2} \delta g^{\mu\nu} \quad .$$

Na aproximação de campo fraco e no gauge de de Donder, as equações para o campo gravitacional tomam a forma

$$\frac{2}{\kappa^2} \square \gamma_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{2} \square (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) h + \frac{1}{\kappa} T_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.3)$$

onde

$$\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad . \quad (2.4)$$

Tomando o traço de (2.3), obtemos:

$$\square \left(\frac{2}{\kappa^2} + 3\alpha \square \right) h = \frac{T}{\kappa} \quad . \quad (2.5)$$

Estamos agora aptos a determinar o campo gravitacional do Sol na aproximação de campo fraco e no contexto da teoria $R + R^2$.

2.2 O Campo gravitacional do Sol

Imaginemos o Sol como sendo uma partícula pontual de massa M , fixa na origem de coordenadas ($T_{\mu\nu} = M \delta^0_\mu \delta^0_\nu \delta^3(\vec{r})$).

2.2.1 Cálculo de $h(\vec{r})$

De (2.5), chegamos à equação

$$\nabla^2 \left[-\frac{2}{\kappa^2} + 3\alpha \nabla^2 \right] h(\vec{r}) = \frac{M}{\kappa} \delta^3(\vec{r}) \quad ,$$

que pode ser reescrita como

$$\left(1 - \frac{3\alpha\kappa^2}{2} \nabla^2 \right) \nabla^2 h(\vec{r}) = -\frac{\kappa}{2} M \delta^3(\vec{r}) \quad . \quad (2.6)$$

Como estamos supondo que a teoria seja não-taquiônica, ou seja, que $\alpha > 0$, que é a mesma coisa que admitir que $M_0^2 \equiv \frac{2}{3\alpha\kappa^2} > 0$, podemos escrever (2.6) como se segue

$$\left(1 - \frac{1}{M_0^2} \nabla^2 \right) \nabla^2 h(\vec{r}) = -\frac{\kappa}{2} M \delta^3(\vec{r}) \quad . \quad (2.7)$$

Esta equação encontra-se resolvida em detalhe em [6], sendo sua solução dada por

$$h(\vec{r}) = \frac{\kappa M}{8\pi} \frac{1 - e^{-M_0 r}}{r} \quad . \quad (2.8)$$

2.2.2 Cálculo de $h_{00}(\vec{r})$

De (2.3), segue-se, que,

$$\nabla^2 \left[\frac{2}{\kappa^2} \gamma_{00} + \alpha \nabla^2 h \right] = \frac{M}{\kappa} \delta^3(\vec{r}) \quad . \quad (2.9)$$

A equação anterior pode ser escrita como

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = \frac{M}{\kappa} \delta^3(\vec{r}) \quad , \quad (2.10)$$

onde

$$f(\vec{r}) \equiv \frac{2}{\kappa^2} \gamma_{00} + \alpha \nabla^2 h \quad .$$

A solução de (2.10) é

$$f(\vec{r}) = -\frac{M}{4\pi\kappa r} \quad .$$

Portanto,

$$\frac{2}{\kappa^2}\gamma_{00} + \alpha\nabla^2 h = -\frac{M}{4\pi\kappa r} \quad . \quad (2.11)$$

Levando (2.8) em (2.11), obtemos:

$$\gamma_{00} = \frac{M\kappa}{8\pi r} \left[1 - \frac{1}{3}e^{-M_0 r} \right] \quad . \quad (2.12)$$

De (2.4) e (2.12), concluímos imediatamente que

$$h_{00}(\vec{r}) = \frac{M\kappa}{16\pi} \left[-\frac{1}{r} - \frac{1}{3} \frac{e^{-M_0 r}}{r} \right] \quad . \quad (2.13)$$

É interessante notar que

$$h_{00}(\vec{r}) = \frac{2}{\kappa} V(\vec{r}) \quad . \quad (2.14)$$

2.2.3 Cálculo de $h_{ij}(\vec{r})$

Usando (2.3) podemos escrever

$$\nabla^2 \left[\frac{2}{\kappa^2}\gamma_{ij} + \alpha(\partial_i\partial_j - \delta_{ij}\nabla^2)h \right] = 0 \quad . \quad (2.15)$$

Logo

$$\gamma_{ij} = \frac{\alpha\kappa^2}{2} (\partial_i\partial_j - \delta_{ij}\nabla^2) h \quad . \quad (2.16)$$

Porém $h = h(r)$, mas $r = r(x^i)$, ou seja

$$r = \left[\sum_{i=1}^3 (x^i)^2 \right]^{1/2} .$$

Portanto

$$\frac{\partial r}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 (x^i)^2 \right]^{-1/2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (x^i)^2}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \frac{1}{r} 2x^i \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{x^i}{r} \sum_{i=1}^3 \delta_{ij} = \frac{x^j}{r} ,$$

$$\begin{aligned} \partial_j h &= \frac{\partial}{\partial x^j} h = \frac{\partial r}{\partial x^j} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{x^j}{r} \frac{\partial h}{\partial r} , \\ \partial_i \partial_j h &= \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) + x^j \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) = \delta_{ij} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{x^i x^j}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) . \end{aligned}$$

Assim (2.16) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= -\frac{1}{3M_0^2} \left[\delta_{ij} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{x^i x^j}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) - \delta_{ij} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3M_0^2 r} \left(\delta_{ij} + \frac{x^i x^j}{r^2} \right) \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{3M_0^2} \left(\delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Com $h(\vec{r})$ dado pela expressão (2.8) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= \frac{\kappa M}{8\pi} \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} e^{-M_0 r} + \frac{M_0}{r} e^{-M_0 r} \right] , \\ \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} &= \frac{\kappa M}{8\pi} \left[\frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^3} e^{-M_0 r} - \frac{2M_0}{r^2} e^{-M_0 r} - \frac{M_0^2}{r} e^{-M_0 r} \right] . \end{aligned}$$

Com estes resultados (2.17) se escreve:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= -\frac{4GM}{\kappa b^2} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{3} \left[-\frac{1}{r^3} (1 - e^{-M_0 r}) + \frac{M_0}{r^2} e^{-M_0 r} + \frac{M_0^2}{r} e^{-M_0 r} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^i x^j}{r^2} \left[\frac{1}{r^3} (1 - e^{-M_0 r}) - \frac{M_0}{r^2} e^{-M_0 r} - \frac{M_0^2}{3r} e^{-M_0 r} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= \gamma_{ij} - \frac{4GM}{\kappa M_0^2} \frac{\delta_{ij}}{3} \left[\frac{3M_0^2}{2r} (1 - e^{-M_0 r}) \right] \\
&= -\frac{4GM}{\kappa M_0^2} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{3} \left[-\frac{1}{r^3} (1 - e^{-M_0 r}) + \frac{M_0}{r^2} e^{-M_0 r} + \frac{M_0^2}{r} e^{-M_0 r} + \frac{3M_0^2}{2r} (1 - e^{-M_0 r}) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{x^i x^j}{r^2} \left[\frac{1}{r^3} (1 - e^{-M_0 r}) - \frac{M_0}{r^2} e^{-M_0 r} - \frac{M_0}{3r} e^{-M_0 r} \right] \right\} . \tag{2.19}
\end{aligned}$$

2.2.4 Cálculo de $h_{i0}(\vec{r})$

De (2.3) vem que

$$\nabla^2 \gamma_{i0} = 0 .$$

Portanto,

$$\gamma_{i0} = 0 .$$

Como $\gamma_{i0} = h_{i0}$, concluímos que $h_{i0}(\vec{r}) = 0$.

2.2.5 Resumo

Definindo

$$\begin{aligned}
\Gamma(r) &\equiv \frac{1}{3r^3} (1 - e^{-M_0 r}) - \frac{M_0}{3r^2} e^{-M_0 r} - \frac{M_0^2}{3r} e^{-M_0 r} - \frac{M_0^2}{2r} (1 - e^{-M_0 r}) , \\
\Lambda(r) &\equiv -\frac{1}{r^3} (1 - e^{-M_0 r}) + \frac{M_0}{r^2} e^{-M_0 r} + \frac{M_0^2}{3r} e^{-M_0 r} , \tag{2.20}
\end{aligned}$$

podemos escrever as componentes de $h_{\mu\nu}(\vec{r})$ como se segue

$$h_{\mu\nu}(\vec{r}) = \frac{\kappa M}{8\pi M_0^2} \begin{pmatrix} -\frac{M_0^2}{2r} \left(1 + \frac{1}{3}e^{-M_0 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma(r) + \frac{x^2}{r^2}\Lambda(r) & \frac{xy}{r^2}\Lambda(r) & \frac{xz}{r^2}\Lambda(r) \\ 0 & \frac{yx}{r^2}\Lambda(r) & \Gamma(r) + \frac{y^2}{r^2}\Lambda(r) & \frac{yz}{r^2}\Lambda(r) \\ 0 & \frac{zx}{r^2}\Lambda(r) & \frac{zy}{r^2}\Lambda(r) & \Gamma(r) + \frac{z^2}{r^2}\Lambda(r) \end{pmatrix}$$

2.3 Cálculo de $h_{\mu\nu}(\vec{k})$

No próximo Capítulo vamos calcular a deflexão de um fóton pelo campo gravitacional do Sol, tratado como campo externo. Como este cálculo envolve a transformada de Fourier do campo gravitacional, ou seja,

$$h_{\mu\nu}(\vec{k}) = \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} h_{\mu\nu}(\vec{r}) \quad ,$$

vamos aproveitar esta seção para determinar $h_{\mu\nu}(\vec{k})$. Algumas das integrais envolvidadas neste cálculo só existem como distribuições . Na tabela em anexo encontram-se listadas todas as integrais necessárias para o cálculo em questão . Utilizando a tabela mencionada, chegamos ao seguinte resultado

$$h_{\mu\nu}(\vec{k}) = \frac{-\kappa M}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{M_0^2 + k^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{M_0^2 + k^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{M_0^2 + k^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} - \frac{1}{M_0^2 + k^2} \end{pmatrix}$$

com $k \equiv |\vec{k}|$.

Integrais Envolvidas no Cálculo de $h_{\mu\nu}(\vec{k})$

$$1. \int_0^\infty e^{-M_0 r} \operatorname{sen} kr dr = \frac{k}{M_0^2 + k^2}$$

$$2. \int_0^\infty \frac{e^{-M_0 r} \operatorname{sen} kr}{r} dr = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{k}{M_0}$$

$$3. \int_0^\infty \frac{e^{-M_0 r} \operatorname{sen} kr}{r^2} dr = k - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{k}{M_0} - \frac{k}{2} \ln(M_0^2 + k^2)$$

$$4. \int_0^\infty \frac{e^{-M_0 r} \operatorname{sen} kr}{r^3} dr = \frac{1}{2} (M_0^2 - k^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{k}{M_0} - \frac{3M_0 k}{2} + \frac{M_0 k}{2} \ln(M_0^2 + k^2)$$

$$5. \int_0^\infty \frac{e^{-M_0 r} \operatorname{sen} kr}{r^4} dr = -\frac{11k^3}{36} + \frac{11M_0^2 k}{12} + \frac{M_0}{6} (3k^2 - M_0^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{k}{M_0} \\ + \frac{1}{12} (k^3 - 3M_0^2 k) \ln(M_0^2 + k^2)$$

$$6. \int_0^\infty e^{-M_0 r} \operatorname{cos} kr dr = \frac{M_0}{M_0^2 + k^2}$$

$$7. \int_0^\infty \frac{e^{-M_0 r} \operatorname{cos} kr}{r} dr = -\frac{1}{2} \ln(M_0^2 + k^2)$$

$$8. \int_0^\infty \frac{e^{-M_0 r} \operatorname{cos} kr}{r^2} dr = -k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{k}{M_0} + \frac{M_0}{2} \ln(M_0^2 + k^2) - M_0$$

$$9. \int_0^\infty \frac{e^{-M_0 r} \operatorname{cos} kr}{r^3} dr = -\frac{3k^2}{4} + M_0 k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{k}{M_0} + \frac{1}{4} (k^2 - M_0^2) \ln(M_0^2 + k^2) + \frac{3M_0^2}{4}$$

$$10. \int_0^\infty \operatorname{sen} kr dr = \frac{1}{k}$$

$$11. \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} kr}{r^2} dr = k(1 - \ln k)$$

$$12. \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} kr}{r^4} dr = -\frac{11k^3}{36} + \frac{k^3}{6} \ln k$$

$$13. \int_0^\infty \frac{\operatorname{cos} kr}{r^3} dr = \frac{k^2}{4} (-3 + 2 \ln k)$$

Capítulo 3

DEFLEXÃO GRAVITACIONAL DE FÓTONS NO CONTEXTO DA TEORIA $R + R^2$

3.1 Introdução

Vamos agora analisar o espalhamento de um fóton pelo campo gravitacional do Sol, tratado como um campo externo.

A função lagrangeana para a interação do campo eletromagnético com o campo gravitacional é

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}}{4} \quad , \quad (3.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \quad .$$

Segue-se que a lagrangeana para a interação fóton-gráviton é dada por

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\kappa}{8} \left[h\eta^{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - 4h^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} \right] F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.2)$$

e o vértice correspondente por (vide Fig. 5)

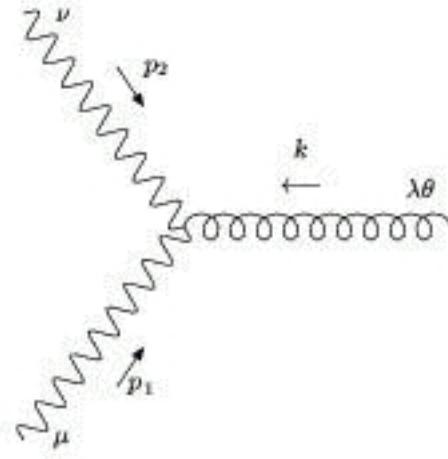


Fig. 5 – Vértice para a interação foton-gráviton.

$$\begin{aligned}
V_{\mu,\nu,\lambda\theta}(p_1, p_2) = & -i\frac{\kappa}{2} [\eta_{\lambda\theta} p_{1\nu} p_{2\mu} - \eta_{\lambda\theta} p_1 \cdot p_2 \eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} p_{1\theta} p_{2\lambda} - \eta_{\nu\lambda} p_{1\theta} p_{2\mu} - \\
& - \eta_{\mu\theta} p_{1\nu} p_{2\lambda} + \eta_{\mu\theta} \eta_{\nu\lambda} p_1 \cdot p_2 + \eta_{\mu\nu} p_{1\lambda} p_{2\theta} - \\
& - \eta_{\nu\theta} p_{1\lambda} p_{2\mu} - \eta_{\mu\lambda} p_{1\nu} p_{2\theta} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\theta} p_1 \cdot p_2] \quad .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

No caso do campo gravitacional ser tratado como campo externo, o vértice é dado por (vide Fig. 6)

$$\begin{aligned}
V_{\mu\nu}(p, p') = & V_{\mu,\nu,\lambda\theta}(p, -p') h_{ext}^{\lambda\theta}(k) = i\frac{\kappa}{2} h_{ext}^{\lambda\theta} [\eta_{\lambda\theta} p_\nu p'_\mu - \eta_{\lambda\theta} \eta_{\mu\nu} p \cdot p' + \\
& + 2(\eta_{\mu\nu} p_\lambda p'_\theta - \eta_{\nu\theta} p_\lambda p'_\mu - \eta_{\mu\lambda} p_\nu p'_\theta + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\theta} p \cdot p')] \quad .
\end{aligned} \tag{3.4}$$



Fig. 6 – Interação foton-campo gravitacional externo.

Passemos, então, ao cálculo da seção de choque para o espalhamento de fótons pelo campo gravitacional externo.

3.2 Seção de Choque para o Espalhamento de Fótons pelo Campo Gravitacional do Sol

A amplitude de Feynman para o processo mostrado na Fig. 6 com o campo estático obtido na Seção 2.3 é da forma

$$\mathcal{M}_{rr'} = \mathcal{M}_{\mu\nu} \epsilon_r^\mu(\vec{p}) \epsilon_{r'}^\nu(\vec{p}') \quad , \quad (3.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mu\nu} = & i \frac{\kappa}{2} h_{ext}^{\lambda\theta}(\vec{k}) \left[\eta_{\lambda\theta} p_\nu p'_\mu - \eta_{\lambda\theta} \eta_{\mu\nu} p \cdot p' + \right. \\ & \left. + 2 \left(\eta_{\mu\nu} p_\lambda p'_\theta - \eta_{\nu\theta} p_\lambda p'_\mu - \eta_{\mu\lambda} p_\nu p'_\theta + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\theta} p \cdot p' \right) \right] \quad , \quad (3.6) \end{aligned}$$

e $\epsilon_r^\mu(\vec{p})$ e $\epsilon_{r'}^\nu(\vec{p}')$ são os vetores de polarização relativos aos fótons incidentes e espalhados, respectivamente.

A seção de choque não polarizada é proporcional a

$$X = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \sum_{r'=1}^2 |\mathcal{M}_{rr'}|^2 \quad , \quad (3.7)$$

onde estamos tomando a média sobre as polarizações iniciais e somando sobre as polarizações finais. Usando algumas propriedades bem conhecidas dos vetores de polarização [7], obtemos de pronto de (3.7)

$$X = \frac{1}{2} \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu}^* \quad .$$

Assim¹

$$\begin{aligned} X = &= \frac{\kappa^2}{8} \left[4(p \cdot p')^2 h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - 2h^2 (p \cdot p')^2 + 2(4p \cdot p' h_{\lambda\theta} p^\lambda p'^\theta - \right. \\ &\left. - 8h_{\theta\rho} h^\rho{}_\lambda p^\lambda p'^\theta p \cdot p' + 4h_{\lambda\theta} h_{\rho\mu} p^\lambda p'^\theta p'^\rho p'^\mu) \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.8)$$

A seção de choque não-polarizada para o processo em questão pode ser obtida da expressão [8]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \frac{X}{(2\pi)^2} \quad .$$

Como $M_0^2 + |\vec{k}|^2 \approx M_0^2$, podemos reescrever as componentes de $h_{\mu\nu}(\vec{k})$ encontradas na Seção 2.3 como

$$\begin{aligned} h_{00}(\vec{k}) &= -\frac{\kappa M}{4} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{M_0^2} \right] \quad , \\ h_{11}(\vec{k}) &= h_{22}(\vec{k}) = -\frac{\kappa M}{4} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{M_0^2} \right] \quad , \\ h_{33}(\vec{k}) &= -\frac{\kappa M}{4} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{M_0^2} \right] \quad . \end{aligned}$$

¹Daqui em diante vamos denotar a transformada de Fourier do campo gravitacional externo ($h_{\mu\nu}^{ext}(\vec{k})$) simplesmente por $h_{\mu\nu}$, a fim de facilitar a notação.

Logo

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\kappa^2}{8} \left\{ (p \cdot p')^2 (4h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - 2h^2) + 4k^2 \left[E^2 h_{00} (h - 2h_{00}) + \left(E^2 - \frac{k^2}{4} \right) h_{11} (h + 2h_{11}) \right] + \right. \\
&+ \left. 8 \left[E^4 (h_{00} + h_{11})^2 + \frac{E^2 k^2}{2} (h_{33} - h_{11}) (h_{00} + h_{11}) \right] \right\} \\
&= \frac{\kappa^4 M^2}{32} \left[\frac{1}{2} - 4 \frac{E^2}{k^2} + 8 \frac{E^4}{k^4} \right] = \frac{\kappa^4 M^2}{32} \left[\frac{k^4 - 8E^2 k^2 + 16E^4}{2k^4} \right] , \tag{3.9}
\end{aligned}$$

onde E é a energia do fóton incidente.

Levando em conta que

$$\vec{k} = \vec{p}' - \vec{p} \quad \longrightarrow \quad k^2 = 2|\vec{p}|^2 - 2|\vec{p}|^2 \cos\theta = 2|\vec{p}|^2 (1 - \cos\theta) = 2E^2 (1 - \cos\theta) \tag{3.10}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\kappa^4 M^2}{32} \left[\frac{4E^4 (1 - \cos\theta)^2 - 16E^4 (1 - \cos\theta) + 16E^4}{2k^4} \right] \\
&= \frac{\kappa^4 M^2 E^4}{16 k^4} (1 + \cos\theta)^2 . \tag{3.11}
\end{aligned}$$

A seção de choque não polarizada para o espalhamento de fótons pelo campo gravitacional do Sol é então dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\kappa^4 M^2}{64 (2\pi)^2} \frac{E^4}{k^4} (1 + \cos\theta)^2 \\
&= \frac{\kappa^4 m^2}{64 (2\pi)^2} \frac{E^4 (1 + \cos\theta)^2}{4E^4 (1 - \cos\theta)^2} \\
&= \frac{\kappa^4 M^2}{256 (2\pi)^2} \left(\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} \right)^2 \tag{3.12}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\kappa^4 M^2}{256 (2\pi)^2} \cot^4 \frac{\theta}{2} . \tag{3.13}$$

3.3 Previsão da Teoria $R + R^2$ para a Deflexão Gravitacional Solar

Para θ pequeno,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{16G^2M^2}{\theta^4} . \quad (3.14)$$

Por outro lado [9],

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{r dr}{\text{sen}\theta d\theta} \right| . \quad (3.15)$$

Para pequenos valores de θ , esta expressão se reduz a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{r dr}{\theta d\theta} \right| . \quad (3.16)$$

Combinando (3.14) e (3.16) resulta

$$r^2 = \frac{16G^2M^2}{\theta^2} . \quad (3.17)$$

Podemos concluir então que a deflexão sofrida por um fóton ao passar nas vizinhanças da superfície do Sol, no contexto da teoria $R + R^2$, é dada por

$$\theta = \frac{4GM}{r} = 1,75'' . \quad (3.18)$$

Este valor é exatamente o mesmo que se obtém utilizando a teoria de Einstein. Em outras palavras, o termo quadrático em R não contribui para a deflexão gravitacional solar. Qual a origem deste paradoxo? Será ele apenas uma característica da teoria $R + R^2$? Discutiremos estas questões no próximo Capítulo (Epílogo).

EPÍLOGO

Iniciamos este trabalho conjecturando que o termo quadrático da teoria $R+R^2$ deveria apresentar uma contribuição não negligenciável para a deflexão gravitacional solar da luz estelar ($E \sim 10^5 cm^{-1}$). Um cálculo cuidadoso, a nível de árvore, mostrou, no entanto, que se a teoria $R+R^2$ for não-taquiônica, o ângulo de deflexão de um fóton que passa próximo ao Sol, coincide com aquele previsto pela teoria de Einstein. Em outras palavras, a contribuição do termo quadrático para a deflexão gravitacional solar é nula. Como explicar este resultado inesperado? Para respondermos a esta indagação, começamos notando que a nível de árvore – visto que

$$h_{\mu\nu}(\vec{k}) = h_{\mu\nu}^{(E)}(\vec{k}) + h_{\mu\nu}^{(R^2)}(\vec{k}),$$

onde

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(R^2)}(\vec{k}) &= \frac{\kappa M}{12M_0^2} [-\eta_{\mu\nu} + 2\delta_{\mu^3}\delta_{\nu^3}] \quad , \\ h_{\mu\nu}^{(E)}(\vec{k}) &= \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} h_{\mu\nu}^{(E)}(\vec{r}) \quad , \end{aligned}$$

e $h_{\mu\nu}^{(E)}(\vec{r})$ é solução das equações linearizadas de Einstein suplementadas pela condição de coordenada harmônica usual ($\gamma_{\mu\nu}^{(E),\nu} = 0, \gamma_{\mu\nu}^{(E)} \equiv h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2}h^{(E)}\eta_{\mu\nu}$) - a amplitude de Feynman pode ser reescrita como

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(E)} + \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R^2)} \quad ,$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R^2)} &\equiv \frac{i\kappa}{2} \left[\frac{\kappa M}{12M_0^2} \left(-\eta^{\lambda\rho} + 2\delta_3^\lambda \delta_3^\rho \right) \right] \left[-\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} p \cdot p' \right. \\ &+ \eta_{\lambda\rho} p_\nu p'_\mu + 2 \left(\eta_{\mu\nu} p_\lambda p'_\rho - \eta_{\nu\rho} p_\lambda p'_\mu \right. \\ &\left. \left. - \eta_{\mu\lambda} p_\nu p'_\rho + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} p \cdot p' \right) \right] . \end{aligned}$$

Por outro lado, mostra-se trivialmente que $\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R^2)} \equiv 0$. Portanto,

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(E)} ,$$

o que claramente explica o porquê das duas teorias levarem precisamente ao mesmo resultado para a deflexão gravitacional solar.

A nível clássico, por sua vez, a equação de campo da teoria $R + R^2$, na aproximação de campo fraco, e no gauge $A_\mu \equiv -\gamma_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} + \frac{\alpha\kappa^2}{2} R_{,\mu} = 0$, onde $\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$, se reduz a

$$\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R\eta_{\mu\nu} = \kappa \left[\frac{T\eta_{\mu\nu}}{6} - \frac{T_{\mu\nu}}{2} \right]$$

onde $R = \frac{1}{2}\square h - \gamma_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}$, e os índices são levantados (abaixados) com o tensor $\eta^{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu}$).

É fácil mostrar que neste gauge o campo gravitacional do Sol é dado por

$$h_{\mu\nu}(\vec{r}) = h_{\mu\nu}^{(E)}(\vec{r}) + \phi(\vec{r})\eta_{\mu\nu} ,$$

onde

$$\phi(\vec{r}) \equiv -\frac{M\kappa}{48\pi} \frac{e^{-M_0 r}}{r} .$$

Como consequência, a métrica toma a forma

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \left[h_{\mu\nu}^{(E)} + \phi\eta_{\mu\nu} \right] \kappa + \eta_{\mu\nu} \\ &= g_{\mu\nu}^{(E)} + \kappa\phi\eta_{\mu\nu} \\ &= (1 + \kappa\phi) g_{\mu\nu}^{(E)} , \end{aligned}$$

onde o produto de $h_{\mu\nu}^{(E)}$ por ϕ foi negligenciado. Podemos então concluir que[10]

Teorema. *Na ausência de táquions ($\alpha > 0$) e supondo que $1 + \kappa\phi > 0$ (esta condição é necessária para que a transformação conforme não inverta a assinatura da métrica), a teoria de gravitação linearizada $R + R^2$ é conformemente relacionada à teoria linearizada de Einstein.*

Como as duas teorias estão relacionadas por um mapeamento conforme e sob um tal mapeamento ângulos são preservados, chegamos a conclusão que o ângulo de deflexão fornecido pela teoria $R + R^2$ é o mesmo que aquele dado pela teoria de Einstein.

Para concluir, seria interessante especular como seria a deflexão gravitacional solar, se incluíssemos o próximo termo quadrático na ação gravitacional. Neste caso teríamos que repetir os cálculos realizados neste trabalho, usando a ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{2R}{\kappa} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right] .$$

Evidentemente, o termo quadrático em R não vai contribuir. Pode-se mostrar que na ausência de táquions a deflexão gravitacional solar, ao contrário da teoria de Einstein, depende da energia da radiação incidente [11, 12]; o que, conforme havíamos sugerido, explica a razão da teoria de Einstein estar em tão boa concordância com os resultados experimentais obtidos usando-se ondas de rádio ($E \sim 1cm^{-1}$). A teoria de gravitação de ordem superior, por sua vez, fornece um valor para o ângulo de desvio da luz estelar ($E \sim 10^5 cm^{-1}$) próximo de $2,04''$, que é o valor que se obtém tomando-se a média dos valores encontrados nos eclipses solares.

Apesar da teoria de gravitação com derivadas de ordem mais alta ser uma “teoria assombrada”, com “ghosts” e “poltergeists”, é importante lembrar que esta é a única teoria de gravitação que se sabe ser renormalizável [13]; sendo, além disso, uma extensão natural da teoria da relatividade geral de Einstein.

Apêndice A

QUANTIZAÇÃO NA APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO

A.1 Introdução

A validade do princípio da equivalência, que expressa a igualdade entre massa inercial e massa gravitacional e que também pode ser entendido como a afirmação de que todas as partículas submetidas à mesma condição inicial, “caem” da mesma forma no campo gravitacional, isto é, seguem as mesmas trajetórias, permite-nos supor que a gravitação seria apenas um efeito do espaço-tempo, no qual as partículas se deslocam. Assim a métrica plana de Minkowski (Relatividade Restrita), $\eta_{\mu\nu}$, poderia ser generalizada para uma métrica mais geral, $g_{\mu\nu}$, na forma:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad .$$

E esta generalização, feita por Einstein em 1916 na sua teoria da relatividade geral, leva-nos a seguinte forma para a ação

$$S = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad , \quad (\text{A.1})$$

onde R é o escalar de curvatura, a contração do Tensor de Ricci, e κ é uma constante com dimensão de comprimento.

A teoria de gravitação $R + R^2$, com a qual trabalhamos é uma extensão natural da relatividade geral e se faz incluindo um termo quadrático em R , na ação de Einstein, ou seja,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 \right] , \quad (\text{A.2})$$

onde α é um parâmetro adimensional.

Como já discutimos anteriormente, para o efeito que desejamos obter, o caminho a seguir é utilizar um tratamento semiclássico. Para isso, trabalhamos na aproximação de campo fraco onde expandimos $g_{\mu\nu}$ em torno de uma métrica de fundo $\eta_{\mu\nu}$, que é a métrica do espaço-tempo plano de Minkowski ($\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$). Assim,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} (\delta^\alpha_\nu + \kappa h^\alpha_\nu) . \quad (\text{A.3})$$

É fundamental para o prosseguimento deste trabalho obter expressões para quantidades tais como $g^{\mu\nu}$ e $\sqrt{-g}$ em termos do novo campo $h_{\mu\nu}$ introduzido na aproximação de campo fraco, ou aproximação linear. Estas expressões, expansões em torno da métrica plana de fundo $\eta_{\mu\nu}$ devido a perturbação causada pelo campo $h_{\mu\nu}$, são obtidas na seção que se segue.

A.2 Expressões Úteis na Aproximação de Campo Fraco

A.2.1 A expansão de $g^{\mu\nu}$

Nos será de muita valia obtermos uma expressão para $g^{\mu\nu}$ na aproximação de campo fraco. Utilizando a propriedade do cálculo matricial que diz que se uma matriz tem inversa, a inversa é única, escrevemos

$$g^{\mu\nu} \equiv [g_{\mu\nu}]^{-1} = \eta^{\mu\nu} + a\kappa h^{\mu\nu} + b\kappa^2 h^{\mu\alpha} h^\nu_\alpha + O(\kappa^3) .$$

Logo,

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\theta} = \delta_\mu^\theta = (\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}) (\eta^{\nu\theta} + a\kappa h^{\nu\theta} + b\kappa^2 h^{\nu\alpha} h^\theta_\alpha + \dots)$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_\mu^\theta + a\kappa h_\mu^\theta + b\kappa^2 h_\mu^\alpha h^\theta_\alpha + \kappa h_\mu^\theta + a\kappa^2 h_{\mu\nu} h^{\nu\theta} + \dots \\
&= \delta_\mu^\theta + \kappa (ah_\mu^\theta + h_\mu^\theta) + \kappa^2 (bh_\mu^\alpha h^\theta_\alpha + ah_{\mu\nu} h^{\nu\theta}) + \dots
\end{aligned}$$

Para que a igualdade seja satisfeita, temos que ter $a = -1$, $b = 1$ e todos os outros coeficientes da expansão nulos. Portanto, obtemos

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu\alpha} h^\nu_\alpha + O(\kappa^3) \quad . \quad (\text{A.4})$$

A.2.2 A expansão de $(-g)^{1/2}$

Também nos será de grande utilidade obter uma expressão para $\sqrt{-g}$ na aproximação de campo fraco. Usando a relação

$$\det A = \exp \{Tr [\ln A]\} \quad , \quad (\text{A.5})$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} &= \exp \frac{1}{2} Tr \ln (-g_{\mu\nu}) = \exp \frac{1}{2} Tr \ln [(-\eta_{\mu\alpha}) (\delta^\alpha_\nu + \kappa h^\alpha_\nu)] \\
&= \exp \frac{1}{2} Tr \ln (-\eta_{\mu\alpha}) \exp \frac{1}{2} Tr \ln (\delta^\alpha_\nu + \kappa h^\alpha_\nu) \\
&= \sqrt{-\eta} \exp \frac{1}{2} Tr \left(\kappa h^\alpha_\nu - \frac{\kappa^2}{2} h^\beta_\nu h^\alpha_\beta + \dots \right) = \exp \left(\frac{\kappa h}{2} - \frac{\kappa^2}{4} h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \dots \right) \\
&= 1 + \left(\frac{\kappa h}{2} - \frac{\kappa^2}{4} h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa h}{2} - \frac{\kappa^2}{4} h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \dots \right)^2 + \dots
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{h\kappa}{2} - \frac{\kappa^2}{4} h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \frac{\kappa^2 h^2}{8} + O(\kappa^3) \quad . \quad (\text{A.6})$$

A.3 A Ação Escrita em Termos do Campo $h_{\mu\nu}$

A ação da teoria de gravitação $R + R^2$ é, conforme a eq. (A.1), escrita em termos do escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci que, em termos dos símbolos de Cristoffel, é dado por

$$R_{\mu\nu} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} \quad . \quad (\text{A.7})$$

Os Γ 's (símbolos de Cristoffel), escrevem-se em termos da métrica como, se segue:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\theta} [g_{\mu\theta,\nu} + g_{\nu\theta,\mu} - g_{\mu\nu,\theta}] \quad . \quad (\text{A.8})$$

Assim, todos os termos da ação S podem ser escritos em função do campo $h_{\mu\nu}$ presente na métrica de campo fraco [eq.(A.3)].

A.3.1 A forma $\Gamma - \Gamma$ da ação de Einstein

O primeiro termo da ação da gravitação quadrática $R + R^2$ [eq. (A.1)] é justamente a ação de Einstein [eq. (A.1)]. Usando a definição de $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ acima [eq. (A.8)], a ação de Einstein fica

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} \right] \quad . \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

Nos dois primeiros termos de S comparecem derivadas segundas da métrica, enquanto que nos dois últimos, produtos das derivadas primeiras da métrica.

A quantidade

$$H^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \quad ,$$

é uma densidade tensorial, e sua derivada é

$$\partial_{\alpha} (H^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}) = H^{\mu\nu}{}_{,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + H^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} \quad .$$

Segue-se que

$$H^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} = -H^{\mu\nu}_{,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\alpha}\left(H^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) \quad ,$$

e a Ação de Einstein toma a forma

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \left\{ H^{\mu\nu} \left[-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} \right] + H^{\mu\nu}_{,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \right. \\ &\quad \left. - H^{\mu\nu}_{,\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \partial_{\alpha} \left(-H^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + H^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} \right) \right\} \quad , \end{aligned}$$

onde o último termo vai a zero, pois é natural supor que $h_{\mu\nu}$ vá a zero no infinito.

Com¹

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu}_{;\alpha} &= \left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \right)_{;\alpha} \equiv 0 \\ &= H^{\mu\nu}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}H^{\beta\nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}H^{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}H^{\mu\nu} \equiv 0 \quad , \end{aligned}$$

ou seja,

$$H^{\mu\nu}_{,\alpha} = H^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} - H^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} - H^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} \quad ,$$

escrevemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \left\{ H^{\mu\nu} \left(-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} \right) + H^{\mu\nu}_{,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - H^{\mu\nu}_{,\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} \right\} \\ &= \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \left\{ -H^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} + H^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} + \left(H^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} - H^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - H^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} \right) \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \left(H^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\beta\nu} - H^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\beta\nu} - H^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu} \right) \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} \right\} \quad . \end{aligned}$$

Simplificando, encontramos a forma $(\Gamma - \Gamma)$ da ação de Einstein

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \left\{ -H^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} + H^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} \right\} \\ &= \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x H^{\mu\nu} \left(-\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} \right) \\ &= \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \left(-\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} \right) \quad . \end{aligned} \tag{A.10}$$

Esta equação contém somente produtos de derivadas primeiras da métrica.

¹Onde “;” denota derivada covariante e “,” denota derivada comum.

A.3.2 A ação de Einstein em função do campo $h_{\mu\nu}$

Com os resultados das expansões para $g^{\mu\nu}$ [eq. (A.4)] e $\sqrt{-g}$ [eq. (A.6)] na aproximação de campo fraco, podemos escrever a ação S [eq. (A.10)] como função do campo de spin 2 $h_{\mu\nu}$. Os Γ 's escritos em função da métrica de campo fraco são

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} &= \frac{1}{2}g^{\beta\theta} [g_{\mu\theta,\nu} + g_{\nu\theta,\mu} - g_{\mu\nu,\theta}] \\ &= \frac{1}{2} [\eta^{\beta\theta} - \kappa h^{\beta\theta} + \dots] \kappa [h_{\mu\theta,\nu} + h_{\nu\theta,\mu} - h_{\mu\nu,\theta}] \\ &= \frac{1}{2}\kappa [h_{\mu}^{\beta}{}_{,\nu} + h_{\nu}^{\beta}{}_{,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\beta} + O(\kappa^2)] \quad .\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left(1 + \frac{1}{2}\kappa h - \dots\right) (\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \dots) \kappa^2 \left[- \left(h_{\mu}^{\beta}{}_{,\alpha} + h_{\alpha}^{\beta}{}_{,\mu} - h_{\mu\alpha}{}^{,\beta} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(h_{\beta}^{\alpha}{}_{,\nu} + h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\beta} - h_{\beta\nu}{}^{,\alpha} \right) + \left(h_{\mu}^{\beta}{}_{,\nu} + h_{\nu}^{\beta}{}_{,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\beta} \right) \left(h_{\beta}^{\alpha}{}_{,\alpha} + h_{\alpha}^{\alpha}{}_{,\beta} - h_{\beta\alpha}{}^{,\alpha} \right) \right] \quad .\end{aligned}$$

Rearranjando os termos, fica,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \int d^4x \left[2h^{\nu\beta}{}_{,\nu} h_{\beta}^{\alpha}{}_{,\alpha} + 2h^{\nu\beta}{}_{,\nu} h_{\alpha}^{\alpha}{}_{,\beta} - 2h^{\nu\beta}{}_{,\nu} h_{\beta\alpha}{}^{,\alpha} - h^{\nu}{}_{\nu}{}^{\beta} h_{\alpha}^{\alpha}{}_{,\beta} + \right. \\ &\quad \left. + 2h^{\nu\beta}{}_{,\alpha} h_{\beta\nu}{}^{,\alpha} + 2h_{\alpha}^{\beta,\nu} h_{\beta\nu}{}^{,\alpha} - 2h_{\alpha}^{\beta,\nu} h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\beta} - 2h^{\nu\beta}{}_{,\alpha} h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\beta} - h_{\alpha}^{\beta,\nu} h_{\beta}^{\alpha}{}_{,\nu} + \dots \right] \quad ,\end{aligned}$$

ou seja,

$$S = \int d^4x \left[-h^{\nu\beta}{}_{,\alpha} h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\beta} + h^{\nu\beta}{}_{,\nu} h_{,\beta} + \frac{1}{2} \left(h^{\nu\alpha,\beta} h_{\nu\alpha,\beta} - h_{,\beta} h^{,\beta} \right) + \dots \right] \quad . \quad (\text{A.11})$$

O integrando da eq. (A.11) é a lagrangeana de Einstein na aproximação de campo fraco, isto é,

$$\mathcal{L}_E = -h^{\nu\beta}{}_{,\alpha} h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\beta} + h^{\nu\beta}{}_{,\nu} h_{,\beta} + \frac{1}{2} \left(h^{\nu\alpha,\beta} h_{\nu\alpha,\beta} - h_{,\beta} h^{,\beta} \right) + \dots$$

Vamos agora, a fim de facilitar o cálculo do propagador de Feynman que será feito na seção seguinte, escrever \mathcal{L}_E na forma $h_{\mu\nu} [\text{operador}]^{\mu\nu,\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$. Assim

$$\mathcal{L}_E = -h^{\nu\beta}{}_{,\alpha} h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\beta} + h^{\nu\beta}{}_{,\nu} h_{,\beta} + \frac{1}{2} \left(h^{\nu\alpha,\beta} h_{\nu\alpha,\beta} - h_{,\beta} h^{,\beta} \right) + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= h^{\nu\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h_\nu^\alpha - h^{\nu\beta} \partial_\nu \partial_\beta h_\alpha^\alpha - \frac{1}{2} h^{\nu\alpha} \partial^\beta \partial_\beta h_{\nu\alpha} + \frac{1}{2} h^\nu{}_\nu \partial_\beta \partial^\beta h_\alpha^\alpha + \dots \\
&= \eta^{\mu\nu} h_{\mu\beta} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\nu\alpha} - h_{\nu\beta} \partial^\nu \partial^\beta h_\alpha^\alpha - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\beta} \square h_{\nu\alpha} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \square h_\beta^\beta + \dots \\
&= h_{\mu\nu} \eta^{\mu\beta} \partial^\alpha \partial^\nu h_{\beta\alpha} - h_{\nu\alpha} \partial^\nu \partial^\alpha h_\beta^\beta - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\nu} \square h_{\beta\alpha} + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square h_{\alpha\beta} + \dots \\
&= h_{\mu\nu} \left[\eta^{\mu\alpha} \partial^\beta \partial^\nu - \eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu - \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} \square + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square \right] h_{\alpha\beta} + \dots \tag{A.12}
\end{aligned}$$

A.4 O Propagador de Feynman Para a Teoria de Gravitacão $R + R^2$

A.4.1 Introdução

No formalismo da Teoria Quântica de Campos, o propagador de Feynman é obtido, a partir da lagrangeana, por meio da seguinte relação

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \mathcal{P}^{\mu\nu, \alpha\beta} h_{\alpha\beta} \tag{A.13}$$

onde o propagador de Feynman é simplesmente

$$\Delta_{\alpha\beta, \lambda\theta}^F(\vec{k}) = i \mathcal{P}_{\alpha\beta, \lambda\theta} \quad . \tag{A.14}$$

onde

$$\mathcal{P}^{\mu\nu, \alpha\beta} \mathcal{P}_{\alpha\beta, \lambda\theta} = \frac{1}{2} (\delta^\mu{}_\lambda \delta^\nu{}_\theta + \delta^\mu{}_\theta \delta^\nu{}_\lambda) \quad , \tag{A.15}$$

já que o produto do operador $\mathcal{P}^{\mu\nu, \alpha\beta}$ por seu inverso é o operador identidade.

Sendo assim, precisamos colocar a lagrangeana da eq.(A.2) na forma (A.13). O primeiro termo da eq.(A.2) é exatamente a lagrangeana de Einstein que já está escrita em termos do campo $h_{\mu\nu}$ na eq.(A.12). Resta-nos então escrever o segundo termo de (A.2), aquele proporcional a R^2 , na aproximação de campo fraco.

A.4.2 O termo proporcional a R^2 em função do campo $h_{\mu\nu}$

Como já havíamos visto

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (\text{A.16})$$

$$R_{\mu\nu} = -\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma\Gamma + \Gamma\Gamma \quad ,$$

onde os produtos $\Gamma\Gamma$ são da ordem de κ^2 porque contém produtos das derivadas primeiras da métrica.

Com $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ de acordo com a equação (A.11), o tensor de Ricci fica

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\kappa \left[-h_{\mu,\nu\alpha}^\alpha - h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha + h_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + h_{\mu,\alpha\nu}^\alpha + h_{\alpha,\mu\nu}^\alpha - h_{\mu\alpha}^{\alpha,\nu} \right] + O(\kappa^2) \\ &= \frac{1}{2}\kappa \left[-h_{\mu,\nu\alpha}^\alpha - h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha + \square h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} \right] + O(\kappa^2) \quad ; \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

e sua contração, o escalar de curvatura, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = [\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu}] \frac{1}{2}\kappa \left[-h_{\mu,\nu\alpha}^\alpha - h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha + \square h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} \right] + \dots \\ &= \frac{1}{2}\kappa \left[-2h^{\mu\alpha}_{,\mu\alpha} + 2\square h \right] + O(\kappa^2) = \kappa \left[-h^{\mu\alpha}_{,\mu\alpha} + \square h \right] + O(\kappa^2) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Desta forma

$$\begin{aligned} R^2 &= \kappa^2 \left[-h^{\mu\alpha}_{,\mu\alpha} + \square h \right] \left[-h^{\nu\beta}_{,\nu\beta} + \square h \right] + \dots \\ &= \kappa^2 \left[h^{\mu\alpha}_{,\mu\alpha} h^{\nu\beta}_{,\nu\beta} - 2h^{\mu\alpha}_{,\mu\alpha} \square h + \square h \square h \right] + \dots \\ &= \kappa^2 h_{\mu\nu} \left[\partial^\mu \partial^\nu \partial^\alpha \partial^\beta - 2\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \square + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square \square \right] h_{\alpha\beta} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Assim, com os resultados das eqs. (A.12) e (A.19), podemos escrever a lagrangeana da teoria da gravitação $R + R^2$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{-g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left\{ 2\eta^{\mu\alpha} \partial^\beta \partial^\nu - 2\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} \square + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square + \right. \\ &\quad \left. + \kappa^2 \alpha \left[\partial^\mu \partial^\nu \partial^\alpha \partial^\beta - 2\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \square + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square \square \right] \right\} h_{\alpha\beta} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A.4.3 A Lagrangeana de Fixação de Gauge

A lagrangeana da teoria da gravitação $R + R^2$ [eq. (A.20)] leva-nos a um operador que, no espaço de momentos, se escreve

$$\eta^{\mu\alpha} k^\beta k^\nu - \eta^{\alpha\beta} k^\mu k^\nu + \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} k^2 - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} k^2 + \frac{\kappa^2 \alpha}{2} [k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta + 2\eta^{\alpha\beta} k^\mu k^\nu k^2 + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} k^4]$$

e este operador não possui inverso.

Para calcular o propagador de Feynman precisamos inverter este operador. A solução é adicionar um termo de fixação de gauge a esta lagrangeana, de modo que possamos invertê-la.

Para fixar o gauge adicionamos a lagrangeana \mathcal{L} da eq. (A.20), um termo de fixação de gauge, $\mathcal{L}_{f.g.}$, de modo que

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{f.g.}$$

No gauge de de Donder (gauge harmônico), $\mathcal{L}_{f.g.}$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f.g.} &= \left(h^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \frac{1}{2} h^{,\mu} \right)^2 = \left(h^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \frac{1}{2} h^{,\mu} \right) \left(h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} - \frac{1}{2} h_{,\mu} \right) \\ &= h^{\mu\nu}{}_{,\nu} h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu}{}_{,\nu} h_{,\mu} - \frac{1}{2} h^{,\mu} h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} + \frac{1}{4} h^{,\mu} h_{,\mu} \\ &= -h^{\mu\nu} \partial_\nu \partial^\alpha h_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu h^\beta{}_\beta + \frac{1}{2} h^\nu{}_{,\nu} \partial^\mu \partial^\alpha h_{\mu\alpha} - \frac{1}{4} h^\nu{}_{,\nu} \partial^\mu \partial_\mu h^\beta{}_\beta \\ &= -h^\alpha{}_{,\nu} \partial^\nu \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square h_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[-2\eta^{\alpha\mu} \partial^\nu \partial^\beta + \eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square \right] h_{\alpha\beta} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Assim, com \mathcal{L} dado pela eq. (A.20) e $\mathcal{L}_{f.g.}$ pela eq. (A.21) acima, escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_{f.g.} \\ &= \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[2\eta^{\mu\alpha} \partial^\beta \partial^\nu - 2\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} \square + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square - 2\eta^{\alpha\mu} \partial^\nu \partial^\beta + \eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu + \right. \\ &+ \left. \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square \right] h_{\alpha\beta} + \frac{\kappa^2 \alpha}{2} h_{\mu\nu} \left[\partial^\mu \partial^\nu \partial^\alpha \partial^\beta - 2\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \square + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square \square \right] h_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left\{ \left[-\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \square + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square \right] + \kappa^2 \alpha \left[\partial^\mu \partial^\nu \partial^\alpha \partial^\beta - 2\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \square + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square \square \right] \right\} h_{\alpha\beta} \quad . \end{aligned}$$

Para garantir a simetria da lagrangeana acima, nas trocas dos índices $\mu \leftrightarrow \nu$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ e $\mu\nu \leftrightarrow \alpha\beta$ escrevemos

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left\{ \left[\frac{-\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta}}{2} \right] \square + \kappa^2 \alpha \left[\partial^\mu \partial^\nu \partial^\alpha \partial^\beta - \left(\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \right) \square + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square \square \right] \right\} h_{\alpha\beta} .$$

De acordo com a eq. (A.13), $\mathcal{P}^{\mu\nu, \alpha\beta}$ é, no espaço de momentos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\mu\nu, \alpha\beta} &= \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \left[-\frac{k^2}{2} + \alpha \kappa^2 k^4 \right] + \frac{k^2}{2} \left[\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} \right] \\ &+ \kappa^2 \alpha k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta - \alpha \kappa^2 k^2 \left[\eta^{\alpha\beta} k^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu} k^\alpha k^\beta \right] . \end{aligned}$$

Ou,

$$\mathcal{P}^{\mu\nu, \alpha\beta} = A \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + B \left(\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} \right) + C k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta + D \left(\eta^{\alpha\beta} k^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu} k^\alpha k^\beta \right) ,$$

com

$$A = -\frac{k^2}{2} + \alpha \kappa^2 k^4 \quad , \quad B = \frac{k^2}{2} \quad , \quad C = \alpha \kappa^2 \quad , \quad D = -\alpha \kappa^2 k^2 \quad . \quad (\text{A.22})$$

A.4.4 Cálculo do Inverso do Operador $\mathcal{P}^{\mu\nu, \alpha\beta}$

Como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\alpha\beta, \lambda\theta} &= \mathcal{A}(k) \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\theta} + \mathcal{B}(k) (\eta_{\alpha\lambda} \eta_{\beta\theta} + \eta_{\beta\lambda} \eta_{\alpha\theta}) \\ &+ \mathcal{C}(k) k_\alpha k_\beta k_\lambda k_\theta + \mathcal{D}(k) (\eta_{\alpha\beta} k_\lambda k_\theta + \eta_{\lambda\theta} k_\alpha k_\beta) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

segue-se que

$$\mathcal{P}^{\mu\nu, \alpha\beta} \mathcal{P}_{\alpha\beta, \lambda\theta} = 4A \mathcal{A} \eta^{\mu\nu} \eta_{\lambda\theta} + 2AB \eta^{\mu\nu} \eta_{\lambda\theta} + AC k^2 \eta^{\mu\nu} k_\lambda k_\theta + AD \left(4\eta^{\mu\nu} k_\lambda k_\theta + \eta^{\mu\nu} k^2 \eta_{\lambda\theta} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + 2BA\eta^{\mu\nu}\eta_{\lambda\theta} + 2BB(\delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\theta + \delta^\nu_\lambda\delta^\mu_\theta) + 2BCk^\mu k^\nu k_\lambda k_\theta + 2BD(\eta^{\mu\nu}k_\lambda k_\theta \\
& + \eta_{\lambda\theta}k^\mu k^\nu) + CAk^\mu k^\nu k^2\eta_{\lambda\theta} + CB2k^\mu k^\nu k_\lambda k_\theta + CCk^\mu k^\nu k_\lambda k_\theta k^4 \\
& + CD(k^\mu k^\nu k^2 k_\lambda k_\theta + k^\mu k^\nu k^4 \eta_{\lambda\theta}) + DA(4k^\mu k^\nu \eta_{\lambda\theta} + \eta^{\mu\nu} k^2 \eta_{\lambda\theta}) \\
& + 2DB(k^\mu k^\nu \eta_{\lambda\theta} + \eta^{\mu\nu} k_\lambda k_\theta) + DC(k^2 k^\mu k^\nu k_\lambda k_\theta + \eta^{\mu\nu} k^4 k_\lambda k_\theta) \\
& + DD(4k^\mu k^\nu k_\lambda k_\theta + \eta_{\lambda\theta} k^2 k^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu} k^2 k_\lambda k_\theta + \eta^{\mu\nu} \eta_{\lambda\theta} k^4) \\
& = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\theta + \delta^\mu_\theta \delta^\nu_\lambda) \quad .
\end{aligned}$$

Reordenando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{\mu\nu,\alpha\beta}\mathcal{P}_{\alpha\beta,\lambda\theta} & = \eta^{\mu\nu}\eta_{\lambda\theta}(4AA + 2AB + 2BA + DAk^2 + DDk^4 + k^2AD) + (\delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\theta \\
& + \delta^\nu_\lambda \delta^\mu_\theta)2BB + k^\mu k^\nu k_\lambda k_\theta(2BC + 2CB + CCk^4 + CDk^2 + DCk^2 \\
& + 4DD) + \eta^{\mu\nu}k_\lambda k_\theta(ACK^2 + 4AD + 2BD + 2DB + DCk^4 + DDk^2) \\
& + k^\mu k^\nu \eta_{\lambda\theta}(2BD + CAk^2 + CDk^4 + 4DA + 2DB + DDk^2) \\
& = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\theta + \delta^\mu_\theta \delta^\nu_\lambda) \quad .
\end{aligned}$$

Consequentemente,

- 1) $\mathcal{A}(4A + 2B + Dk^2) + 2BA + \mathcal{D}(Dk^4 + Ak^2) = 0$
- 2) $2BB = 1/2$
- 3) $2CB + C(2B + Ck^4 + Dk^2) + \mathcal{D}(Ck^2 + 4D) = 0$
- 4) $2BD + C(Ak^2 + Dk^4) + \mathcal{D}(4A + k^2D + 2B) = 0$
- 5) $\mathcal{A}(Ck^2 + 4D) + 2BD + \mathcal{D}(2B + Ck^4 + Dk^2) = 0 \quad .$

Substituindo A, B, C e D por seus respectivos valores, fica

$$1) \quad [-1 + 3\alpha\kappa^2 k^2] \mathcal{A} + [-1 + 2\alpha\kappa^2 k^2] \mathcal{B} - \frac{k^2}{2} \mathcal{D} = 0$$

$$\begin{aligned}
2) \quad & 2k^2\mathcal{B} = 1 \\
3) \quad & 2\alpha\kappa^2\mathcal{B} + k^2\mathcal{C} - 3\kappa^2k^2\alpha\mathcal{D} = 0 \\
4) \quad & -2\kappa^2k^2\alpha\mathcal{B} - \frac{k^4}{2}\mathcal{C} + k^2[-1 + 3\alpha\kappa^2k^2]\mathcal{D} = 0 \\
5) \quad & -3\kappa^2k^2\alpha\mathcal{A} - 2\kappa^2k^2\alpha\mathcal{B} + k^2\mathcal{D} = 0 \quad .
\end{aligned}$$

O que leva ao seguinte resultado

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{c} -2 + 2\alpha\kappa^2k^2 \\ -2 + 3\alpha\kappa^2k^2 \end{array} \right] \mathcal{B} \quad , \quad \mathcal{B} = \frac{1}{2k^2} \quad , \quad \mathcal{C} = \frac{2}{k^2}\mathcal{D} \quad , \quad \mathcal{D} = -\frac{2\kappa^2\alpha^2}{2 - 3\kappa^2k^2\alpha}\mathcal{B} \quad .(A.24)$$

A.4.5 O Propagador de Feynman

O Propagador de Feynman é, de acordo com a eq.(A.14), simplesmente:

$$\Delta_{\mu\nu,\lambda\theta}^F(k) = i\mathcal{P}_{\mu\nu,\lambda\theta} \quad , \quad (A.25)$$

com $\mathcal{P}_{\mu\nu,\lambda\theta}$ conforme a eq. (A.23). Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mu\nu,\lambda\theta}^F(k) = \frac{i}{2k^2} & \left\{ - \left[\begin{array}{c} -2 + 2\alpha k^2 \kappa^2 \\ -2 + 3\alpha k^2 \kappa^2 \end{array} \right] \eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\theta} + (\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\theta} + \eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\theta}) + \right. \\
& \left. + \frac{-2\alpha\kappa^2}{2 - 3k^2\kappa^2\alpha} \left[\eta_{\mu\nu}k_\lambda k_\theta + \eta_{\lambda\theta}k_\mu k_\nu + \frac{2}{k^2}k_\mu k_\nu k_\lambda k_\theta \right] \right\} \quad . \quad (A.26)
\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] E. B. Fomalont and R. A. Sramek, *Astrophys. J.* **199**, 749 (1975); *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1475 (1976); *Comm. Astrophys.* **7**, 19 (1977).
- [2] John F. Douglas, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2996 (1994).
- [3] J. H. Kung, *Phys. Rev. D* **52**, 6922 (1995).
- [4] A. J. Accioly, A. D. Azeredo, C. M. L. Aragão, H. Mukai, *Class. Quantum Grav.* **14**, 1163 (1997).
- [5] A. J. Accioly, *Rev. Bras. de Física* **18**, 4 (1988).
- [6] Antonio Accioly, Hatsumi Mukai, *Braz. J. Phys.* **28**, 35 (1998).
- [7] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory* (John Wiley & Sons, 1994).
- [8] C. Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions* (Addison-Wesley Publishing Company, 1996).
- [9] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, 1980).
- [10] A. Accioly, A. D. Azeredo, E. C. de Rey Neto, *Bending of light in the framework of $R + R^2$ gravity* (submetido à publicação); A. Accioly, S. Ragusa, E. C. de Rey Neto, H. Mukai, *Prediction of $R + R^2$ gravity for the deflection of a photon passing close to the Sun* (submetido à publicação).

-
- [11] A. Accioly, E. C. de Rey Neto, H. Mukai, S. Ragusa, *A phenomenological estimative of $R + R^2$ gravity parameter from measurements of starlight deflection* (a ser publicado).
- [12] A. Accioly, E. C. de Rey Neto, *General Relativity as the ground state of quadratic gravity* (a ser publicado).
- [13] K. S. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).