

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS
EXATAS

RAFAEL AMATTE BIZÃO

Dissipação via arrasto viscoso como mecanismo de
supressão da aceleração de Fermi no bilhar
elíptico-ovoide com fronteira dependente do tempo

Rio Claro

2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO
DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas Câmpus de
Rio Claro

RAFAEL AMATTE BIZÃO

DISSIPACÃO VIA ARRASTO VISCOSO COMO
MECANISMO DE SUPRESSÃO DA ACELERAÇÃO
DE FERMI NO BILHAR ELÍPTICO-OVOIDE COM
FRONTEIRA DEPENDENTE DO TEMPO

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel -
Unesp

VERSÃO ORIGINAL

Rio Claro

2013

RAFAEL AMATTE BIZÃO

Dissipação via arrasto viscoso como mecanismo de
supressão da aceleração de Fermi no bilhar
elíptico-ovoide com fronteira dependente do tempo

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel - Unesp

Prof. Dr. Tiago Kroetz - UTFPR

Dr. Diego Fregolente Mendes de Oliveira - Universidade de Indiana/Bloomington (EUA)

VERSÃO ORIGINAL

Rio Claro

2013

Dedico esta dissertação à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

Aos meus pais **Valdomiro** e **Marisa** e aos meus irmãos **Rodrigo** e **Ricardo** pela educação e pelos ensinamentos que foram de grande importância e que tornaram tudo isso possível.

Aos meus familiares pela preocupação e incentivo, em especial aos tios **Zeção** e **Maria** e primas **Cristiane** e **Andressa** por fazerem parte de minha criação, educação e evolução.

Meus amigos pelas discussões sobre física e por tornarem minha caminhada divertida. Desde os que me ajudaram com um pontapé inicial, aos que continuam fazendo parte da minha vida. Todos são de muita importância e jamais os esquecerei. Não posso deixar de destacar: **Tiago Botari**, **Vinícius Santana**, **Everton Cortez**, **Guilherme Lesseux**, **Rodrigo Moreira**, **Rivânia Teixeira**, **Amanda Prina**, **Júlia Guermendi**, **César Augusto**, **Ana Curcio**, **Henrique Pessoa**, **Guilherme Santana**, **Leonardo Salim**, **Eduardo José**, **Vinícius Ottani**, **Bruno Denardi**, **Geraldo Gebin**, **Tiago Cantalice**, **João Sartorello**, **João Fonseca**, **Éverton Carvalho**, **Ivan Bolorino**, **Diogo Sanchez**, **André Livorati**, **Carlos Awano**, **Jean Wiesel**, **Heitor Capuani**, **Jorbison Portella**, **Fábio Bortolini**, **Pedro Brasil**, **Nilson Júnior**, **Renan Celli**, **Bruno Correa** e **Felipe Capovilla**.

Ao orientador **Prof. Dr. Edson Denis Leonel** pela orientação, amizade, paciência, pelas aulas e discussões.

À **Larissa**, por dicas de português/inglês, carinho e incentivo. Você é muito importante para mim! Agradeço também ao **Chico**, a **Sirlei** e a **Fernanda** pela hospitalidade e incentivo constante.

Aos técnicos de laboratório do **DF** e do **DEMAC** por me ajudarem diversas vezes quando precisei, em especial ao **Orlando** por sempre sanar minhas dúvidas de Linux com muito entusiasmo.

Às secretárias do **DF** por atenderem prontamente aos meus pedidos. Em especial à **Mariana** pelo esforço em manter tudo funcionando, dedicação e apoio.

Aos idealizadores do **GridUnesp** por disponibilizar e democratizar essa enorme estrutura de processamento que me ajudou bastante e com certeza continuará ajudando muitos outros. Agradeço também as equipes **Ubuntu Linux** pelo excelente sistema operacional e **LaTeX/TeXMaker** pelas facilidades de seu editor de texto, e é claro, por disponibilizar isso tudo **DE GRAÇA**.

Aos professores que me motivaram a continuar descobrindo as maravilhas da Física, pela paciência e disposição para discussões e ensinamentos que levarei para sempre.

Ao membro da banca e amigo Dr. Diego Fregolente Mendes de Oliveira e ao Prof. Dr. Tiago Kroetz pelas correções e sugestões que ajudaram a enriquecer este trabalho.

À **CAPES** pelo apoio financeiro.

“Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes. O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano.”

Isaac Newton, físico inglês.

Resumo

Bizão, R. A. **Dissipação via arrasto viscoso como mecanismo de supressão da aceleração de Fermi no bilhar elíptico-ovoide com fronteira dependente do tempo**, 63 p. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2013.

Bilhares são sistemas em que uma ou mais partículas são confinadas em uma região fechada Q do espaço e colidem com a fronteira ∂Q que delimita essa região. Nesse trabalho, estudamos um bilhar bidimensional conhecido na literatura como elíptico-ovoide que trata-se de um híbrido entre o bilhar elíptico e o bilhar ovoide. Começamos estudando sua versão estática, mostrando todas as possíveis órbitas de uma partícula confinada nesse bilhar e as implicações que a mudança na curvatura de sua fronteira acarreta. Posteriormente, introduzimos uma dependência temporal mostrando que esse bilhar possui aceleração de Fermi (ganho ilimitado de energia) para alguns conjuntos de parâmetros de controle e condições iniciais e justificamos através do comportamento de um observável do sistema (a velocidade média). Por fim, adicionamos dissipação no voo da partícula cuja força é proporcional a uma potência de sua velocidade v em três diferentes casos: (i) $F \propto -v$, (ii) $F \propto -v^2$ e (iii) $F \propto -v^\delta$ com $\delta \in (1, 2)$. Para todos os casos a aceleração de Fermi é suprimida. Se uma condição inicial com velocidade inicial alta é considerada, o caso (i) mostra um decaimento linear na velocidade da partícula, ao passo que o caso (ii) um decaimento exponencial e por fim o caso (iii) exibe um decaimento em lei de potência. Para o caso (ii) propusemos algumas hipóteses de escala para a transição entre ganho ilimitado e limitado de energia e confirmamos nossas hipóteses com uma mudança na escala que levou a um colapso de várias curvas de velocidade média em uma curva universal. Os expoentes críticos de escala encontrados correspondem aos mesmos expoentes de um bilhar unidimensional conhecido na literatura como *bouncer* dissipativo, concluindo que apesar da notável diferença entre os dois bilhares, perto da transição de fase eles agem de maneira semelhante e portanto pertencem a mesma classe de universalidade.

Palavras-chave: Bilhares. Caos. Aceleração de Fermi. Supressão da Aceleração de Fermi.

Abstract

Bizão, R. A. **Dissipation and supression of the Fermi acceleration in a elliptical oval-shapped billiard with time-dependent boundary**, 63 p. Dissertation (Master in Applied Physics) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2013.

Billiards are dynamical systems in which one or more particles are confined in a closed region Q of space colliding with a boundary ∂Q delimiting this region. In this work, we study a two-dimensional billiard known as elliptical oval-shaped billiard which consists of a hybrid between the elliptical and the oval-shaped one. We started considering the static version, showing all the possible orbits of a confined particle on this billiard and the implications that a curvature change at the boundary may result. Then we introduce a time dependent perturbation on the boundary showing that this billiard has Fermi acceleration (unlimited energy gain) for some control parameters as well as initial conditions which was justified by using the behavior of one observable of the system namely the average velocity. Finally, we introduced in-flight dissipation into the system which is proportional to a power of particles velocity v in three ways: (i) $F \propto -v$, (ii) $F \propto -v^2$ and (iii) $F \propto -v^\delta$ where $\delta \in (1, 2)$. For all cases Fermi acceleration was suppressed. If the initial velocity is large enough the case (i) shows a linear decay for the particle's velocity while case (ii) shows an exponential decay and case (iii) a power decay. For case (ii) we proposed some scaling laws for the transition between the unlimited to limited energy gain and we confirmed our scaling hypothesis with a rescale which led us to overlap some velocity curves onto an universal plot. The critical exponents found are the same as those obtained for an one-dimensional dissipative bouncer model. Therefore we conclude that, despite the remarkable difference between the two systems, they behave similarly near the phase transition and belong to the same class of universality.

Keywords: Billiards. Chaos. Fermi acceleration. Suppression of Fermi acceleration.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Esquema de um bilhar.	p. 16
1.2	Exemplo de dois bilhares unidimensionais originados após o trabalho sobre aceleração de raios cósmicos proposto por Enrico Fermi.	p. 18
2.1	Possíveis fronteiras para o bilhar elíptico-ovoide obtidas com a variação dos parâmetros de controle da Eq. (2.1).	p. 21
2.2	Esboço da definição da curvatura k de acordo com a Eq. (2.2).	p. 22
2.3	Definição das variáveis necessárias para a construção do mapa que descreve o movimento de uma partícula confinada em um bilhar elíptico-ovoide.	p. 25
2.4	(a) Espaço de fases do bilhar circular obtido assumindo $e = \varepsilon = 0$ na Eq. (2.1). Nota-se que o espaço de fases é preenchido por retas, indicando movimento periódico. (b) Ilustração da trajetória de uma partícula confinada nesse bilhar.	p. 26
2.5	(a) Espaço de fases do bilhar elíptico obtido assumindo $e = 0,6$, $q = 1$ e $\varepsilon = 0$ na Eq. (2.1). Trata-se de um bilhar integrável, com três tipos possíveis de órbitas: (b) <i>rotator</i> , (c) <i>librator</i> e (d) em cima da separatriz.	p. 27
2.6	(a) Espaço de fases do bilhar elíptico obtido através de poucas órbitas, porém em todas as possíveis regiões. (b) Gráfico do produto do momento angular em relação aos dois focos da elipse f definido na Eq. (2.36) como função do número de colisões n da partícula com a fronteira.	p. 28
2.7	(a) Espaço de fases do bilhar ovoide obtido obtido com $e = 0$, $p = 2$. Em (a) $\varepsilon = 0,10$ e em (b) $\varepsilon = 0,21$, o que corresponde a um valor acima do $\varepsilon_c = 0,20$	p. 29
2.8	Espaço de fases para o bilhar elíptico-ovoide. Em (a) $\varepsilon = 0,01$ e em (b) $\varepsilon = 0,06$, o que corresponde a um valor acima do $\varepsilon_c = 0,05$ nesse caso.	p. 30

2.9	Expoente de Lyapunov para o bilhar ovóide com $e = 0$, $\varepsilon = 0,05$ e $p = 2$. O valor médio obtido foi $\langle \lambda \rangle = 0,32(2)$	p. 34
3.1	Ilustração da trajetória de uma partícula confinada em uma fronteira móvel (<i>non-breathing</i>). Os parâmetros utilizados na simulação foram $b = 0,7$, $\varepsilon = 0,3$, $e = 0$ e $p = 1$	p. 38
3.2	Ilustração da mudança de um referencial fixo para um referencial móvel em que \vec{r}_n é o vetor posição da partícula no referencial fixo, \vec{r}'_n o vetor posição da partícula no referencial móvel e \vec{R} o vetor posição do referencial móvel medido no fixo.	p. 40
3.3	Gráficos mostram que a introdução desse tipo de dependência temporal na fronteira não afeta a dinâmica do bilhar circular por ser eliminada ao fazermos $e = \varepsilon = 0$. Foram consideradas 81 partículas que colidiram 10^5 vezes com a fronteira.	p. 42
3.4	Velocidade média \bar{v} de um conjunto de 100 partículas com diferentes condições iniciais como função do número da iteração n . As condições iniciais foram obtidas a partir de uma grade 10×10 igualmente espaçada no intervalo dos possíveis valores de θ e α . Os parâmetros utilizados foram $a = 0,1$, $\varepsilon = 0$, $e = 0,6$ e $q = 1$. Um ajuste por lei de potência na figura forneceu um expoente $0,2164(3)$	p. 43
3.5	Projeção do espaço de fases do bilhar elíptico nas variáveis α e θ . A destruição da curva separatriz e o surgimento de uma <i>stochastic layer</i> podem ser observados conforme aumentamos o valor de a . Os outros parâmetros de controle foram mantidos constante $e = 0,6$, $\varepsilon = 0$ e $q = 1$	p. 44
3.6	(a) Evolução do observável f em função do número de colisões n . (b) Evolução da velocidade em função do número de colisões n para uma única partícula com $v_n = 0,01$. (c) Evolução do observável l em função do número de colisões. Os parâmetros utilizados para construção dessas figuras foram $a = 0,1$, $e = 0,6$, $\varepsilon = 0$ e $q = 1$	p. 45
3.7	Velocidade média em função de n para o bilhar ovóide considerando 400 condições iniciais dadas em uma grade 20×20 igualmente espaçada no intervalo dos possíveis valores de θ e α . A velocidade inicial foi mantida $v_n = 10$ e os parâmetros de controle utilizados foram $b = 0,1$, $\varepsilon = 0,21$, $e = 0$ e $p = 2$	p. 46
3.8	Velocidade média em função do número de colisões n da partícula com a fronteira para o bilhar elíptico-ovoide a partir de uma grade de 10×10 condições iniciais igualmente espaçadas no intervalo dos possíveis valores de θ e α . A velocidade inicial foi mantida constante $v_n = 0,01$ e os parâmetros de controle utilizados foram $a = b = 0,1$, $\varepsilon = 0,6$, $e = 0,2$ e $p = q = 1$	p. 47

4.1	Gráfico da distância percorrida r obtido na Eq. (4.5) em função do tempo t para diferentes valores de η como ilustrado na própria figura.	p. 49
4.2	Gráfico da velocidade média ao longo das colisões para um ensemble de 100 partículas igualmente espaçadas no intervalo $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\alpha \in [0, \pi]$ em um bilhar ovoide com dependência temporal e dissipação no voo. A velocidade inicial dada foi $v_n = 10$ e os parâmetros de controle utilizados na simulação foram $\eta = 0,001$, $p = 3$, $a = b = 0,1$, $e = 0$ e $\varepsilon = 0,1$. Um ajuste linear foi feito na região do decaimento resultando em uma inclinação $-0,0015273(7)$	p. 50
4.3	Slope de decaimento em função de η utilizando os mesmos parâmetros de controle da Fig. 4.2 e mantendo a velocidade inicial $v_n = 10$	p. 51
4.4	(a) Velocidade média \bar{v} em função de n para um ensemble de 81 partículas. Pudemos observar que o decaimento da velocidade é exponencial para esse tipo de dissipação através de um ajuste que resultou expoente $-0,000308365(4)$. Os parâmetros de controle utilizados foram $b = 0,1$, $p = 3$, $e = 0$, $\varepsilon = 0,1$, $v_n = 10$ e $\eta = 2 \times 10^{-4}$	p. 53
4.5	(a) Velocidade média em função de n para um ensemble de 1600 partículas com velocidade inicial $v_n = 10^{-2}$. (b) e (c) são os expoentes críticos obtidos a partir de ajustes por lei de potência. (d) Gráfico de todas as curvas se sobrepondo em uma única universal, validando as hipóteses de escala. Os parâmetros utilizados para construção das figuras foram $v_n = 0,01$, $b = 0,1$, $e = 0$, $p = 3$ e $\varepsilon = 0,1$	p. 54
4.6	Velocidade média em função do número de colisões n para um ensemble de 144 partículas sujeitas a dissipação durante o voo do tipo $F \propto -v^\delta$ para dois valores de δ ilustrados na figura. Pudemos observar que o decaimento da velocidade é quadrático para esse tipo de dissipação através de um ajuste. Os parâmetros de controle utilizados foram $b = 0,1$, $p = 3$, $e = 0$, $\varepsilon = 0,1$, $v_n = 10$ e $\eta = 2 \times 10^{-4}$	p. 55
4.7	Probabilidade de sobrevivência P das partículas em função do parâmetro δ para uma força de dissipação do tipo $F \propto -v^\delta$. Os parâmetros de controle utilizados foram $p = 3$, $\varepsilon = 0,1$, $b = 10^{-3}$ e $v_n = 10$	p. 56
4.8	(a) Evolução do observável f em função do número de colisões n . (b) Evolução da velocidade em função do número de colisões n para uma única partícula com velocidade inicial $v_n = 10^{-2}$. (c) Evolução do observável l em função do número de colisões. Os parâmetros utilizados para construção dessas figuras foram $a = b = 0,1$, $e = 0,6$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 1 \times 10^{-4}$ e $q = 1$	p. 57

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	p. 15
2	BILHAR ELÍPTICO-OVOIDE COM FRONTEIRA ESTÁTICA	p. 20
2.1	Análise da curvatura da fronteira	p. 21
2.2	Dedução do mapa que descreve o movimento da partícula	p. 24
2.3	Resultados numéricos	p. 26
2.3.1	Bilhar circular	p. 26
2.3.2	Bilhar elíptico	p. 27
2.3.3	Bilhar ovoide	p. 29
2.3.4	Bilhar elíptico-ovoide	p. 30
2.3.5	Caracterização de órbitas caóticas - O expoente de Lyapunov	p. 31
3	BILHAR ELÍPTICO-OVOIDE COM FRONTEIRA MÓVEL	p. 36
3.1	Conjectura LRA	p. 36
3.2	Dedução das equações que descrevem o movimento da partícula	p. 37
3.3	Resultados numéricos	p. 41
3.3.1	Bilhar circular	p. 41
3.3.2	Bilhar elíptico	p. 42
3.3.3	Bilhar ovoide	p. 45
3.3.4	Bilhar elíptico-ovoide	p. 46
4	INTRODUZINDO DISSIPACÃO POR ARRASTO VISCOSO	p. 48
4.1	Dissipação através de uma força do tipo $F \propto -v$	p. 49
4.2	Dissipação através de uma força do tipo $F \propto -v^2$	p. 51
4.3	Dissipação através de uma força do tipo $F \propto -v^\delta$	p. 55

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	p. 58
Apêndice A – Cálculo da matriz jacobiana	p. 60
Referências Bibliográficas	p. 61

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Desde as civilizações antigas já se tinha interesse em explicar os acontecimentos que eram observados no dia a dia. Primeiramente, isso foi feito utilizando a filosofia e todo o método científico se baseava nela, até que no século XVI Galileu Galilei e posteriormente no século XVII Isaac Newton deram início a uma nova maneira de pensar e fazer ciência, utilizando a matemática.

Com as Leis de Newton para a gravitação, surgiram os primeiros estudos analíticos do movimento dos planetas. Inicialmente, o problema de dois corpos¹ foi resolvido sem dificuldade e os resultados obtidos condiziam com as observações. Porém, ao se tentar resolver o problema de três corpos², encontrar uma equação de movimento explícita para cada um deles se tornou mais complicado devido ao elevado número de variáveis e não-linearidades envolvidas no problema.

Pensando nisso, Poincaré propôs uma nova maneira (geométrica) de olhar para o problema [3], no sentido que para se entender o comportamento do sistema não precisamos medir a trajetória individual de cada corpo a todo instante e sim investigar se o sistema é estável, instável, possui órbitas caóticas³ ou órbitas regulares, ou seja, olhar para o que chamamos de espaço de fases⁴.

¹O problema de dois corpos estuda o movimento do sistema Terra-Sol considerando a força de atração gravitacional como sendo inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Mais detalhes podem ser encontrados em [1].

²No problema de três corpos, além da Terra e do Sol, considera-se um terceiro corpo, como por exemplo a Lua ou um pequeno satélite. Mais detalhes podem ser encontrados em [2].

³Por órbitas caóticas me refiro aquelas que são sensíveis às condições iniciais.

⁴O espaço de fases de um sistema é o conjunto de todas suas possíveis órbitas.

raio unitário até uma forma ovoide pura, elíptica, ou ainda uma combinação das duas, que recebe o nome de elíptica-ovoide.

Esse bilhar, apesar da aparente simplicidade, dependendo dos parâmetros de controle escolhidos pode apresentar caos e órbitas periódicas que formam ilhas Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) e curvas invariantes *spanning* no espaço de fases, o que torna seu estudo ainda mais interessante.

Em nosso trabalho, posteriormente adicionamos uma dependência temporal conhecida como *non-breathing* nas fronteiras do bilhar, isto é, uma dependência temporal que depende do ângulo e faz com que o formato da fronteira não seja preservado. Existe um outro tipo de dependência temporal, conhecida como *breathing* (do inglês respiração), em que o formato da fronteira se preserva no tempo alterando apenas seu tamanho.

A introdução de dependência temporal na fronteira do bilhar acarreta uma consequente troca de *momentum* entre a fronteira e a partícula e um fenômeno conhecido como aceleração de Fermi pode vir a ser observado.

Aceleração de Fermi é o nome dado a um mecanismo proposto por Enrico Fermi em 1949 [6] para explicar porque alguns raios cósmicos⁶ chegam à superfície da Terra com energias tão altas (até $10^{21}eV$). Consiste no conceito de que partículas carregadas podem ser aceleradas a partir de interações com campos magnéticos oscilantes pertencentes ao espaço interestelar. Ou seja, um campo magnético oscilante ocasiona em uma partícula carregada uma força oscilante, que dependendo das circunstâncias, pode produzir uma aceleração ilimitada.

Depois disso, surgiram diversos modelos partindo da proposta de Fermi para estudar o fenômeno da aceleração de Fermi e conhecer mais a seu respeito. A maioria dos trabalhos foram desenvolvidos de uma maneira análoga. As partículas carregadas que eram influenciadas por campos magnéticos, foram substituídas por partículas com massa colidindo com paredes rígidas. Para exemplificar, tomemos o modelo Fermi-Ulam [7] e o *bouncer* [8].

O modelo Fermi-Ulam consiste no movimento de uma partícula clássica com massa m , confinada entre duas paredes rígidas, sendo uma fixa e outra oscilante periodicamente no tempo [Fig. 1.2 (a)]. Nesse modelo, é importante enfatizar que não se observa o fenômeno da aceleração de Fermi, ou seja, a partícula não ganha energia indefinidamente. Isso se deve ao fato que o espaço de fases possui curvas invariantes do tipo *spanning*

⁶Raios cósmicos são radiações existentes no espaço e parte delas são formadas essencialmente por partículas subatômicas. Essas radiações são produzidas por diversos objetos pertencentes ao cosmo, incluindo o Sol, algumas outras estrelas e buracos negros. Existem também raios cósmicos criados durante o surgimento das supernovas e outros de origem desconhecida.

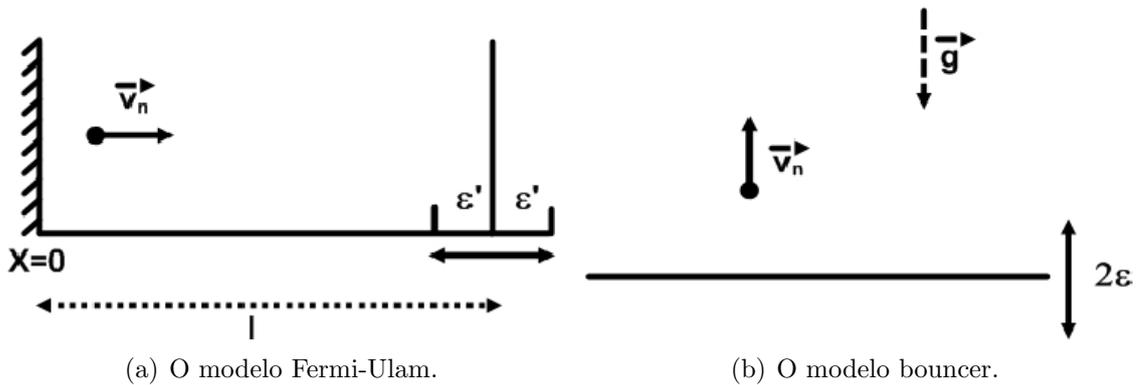


Figura 1.2: Exemplo de dois bilhares unidimensionais originados após o trabalho sobre aceleração de raios cósmicos proposto por Enrico Fermi.

que limitam o crescimento da velocidade. Por outro lado, se alterarmos o movimento da parede móvel para uma função não periódica, aleatória [9] ou até mesmo introduzir outra não-linearidade [10] as curvas invariantes podem ser destruídas e o modelo vir a apresentar aceleração ilimitada.

Quanto ao modelo *bouncer*, que é descrito pelo movimento de uma partícula, também clássica, imersa em um campo gravitacional constante e limitada apenas inferiormente por uma parede oscilante [Fig. 1.2 (b)], a aceleração de Fermi pode ser observada até quando a parede móvel é regida por funções periódicas, como seno e cosseno. No entanto, o que leva um dos modelos a possuir aceleração de Fermi e o outro não?

Conforme explicado [11], para que um bilhar unidimensional apresente aceleração de Fermi, a equação que rege a velocidade da fronteira móvel deve ser aleatória ou possuir descontinuidade em suas derivadas. Isso explica porque o modelo Fermi-Ulam não possui aceleração de Fermi. Porém, ainda não explica porque o modelo *bouncer* possui aceleração de Fermi, já que a velocidade de sua fronteira móvel é dada por uma função periódica em que o argumento é a fase da fronteira no instante do choque. Acontece que, como o modelo *bouncer* não é limitado superiormente por uma parede fixa, quanto maior for a velocidade da partícula, maior será seu tempo de retorno. Isso faz com que eventualmente esse tempo de retorno seja muito grande e a fase em que a partícula encontra a parede na próxima colisão seja pseudo-aleatória. Como a fase é argumento da velocidade da fronteira, encontramos o termo aleatório que procurávamos.

Nesse trabalho, tentamos entender o mecanismo da aceleração de Fermi em bilhares bidimensionais. Uma outra pergunta a ser respondida é: O que acontece com a velocidade de uma partícula confinada em um bilhar bidimensional ao introduzirmos dissipação?

Para responder a essa pergunta, introduzimos dissipação durante o voo da partícula proporcional ao módulo de sua velocidade v em três diferentes configurações: (i) $F \propto -v$,

(ii) $F \propto -v^2$ e (iii) $F \propto -v^\delta$ com $\delta \in (1,2)$.

Essa dissertação está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2 discutimos os procedimentos necessários para a obtenção do mapa que descreve o movimento de uma partícula confinada em um bilhar bidimensional com fronteira elíptico-ovoide. Apresentamos também alguns resultados numéricos importantes para a compreensão da aceleração de Fermi nesses bilhares. No Capítulo 3 introduzimos uma dependência temporal na fronteira, com objetivo de constatar em quais condições os bilhares bidimensionais possuem aceleração de Fermi. No Capítulo 4 introduzimos dissipação no voo da partícula, para constatar as influências sobre a aceleração de Fermi.

CAPÍTULO 2

BILHAR ELÍPTICO-OVOIDE COM FRONTEIRA ESTÁTICA

O bilhar elíptico-ovoide é um modelo bi-dimensional criado com o objetivo de estudar como a dinâmica de uma partícula confinada no interior de uma fronteira com a qual sofre colisões elásticas é influenciada quando sua forma geométrica é modificada.

A equação que descreve a fronteira do bilhar elíptico-ovoide é dada por

$$R(\theta, p, q, e, \varepsilon) = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos(q\theta)} + \varepsilon \cos(p\theta), \quad (2.1)$$

na qual $\theta \in [0, 2\pi)$ é o ângulo medido no sentido anti-horário em relação ao eixo horizontal positivo e formado pela reta que une o centro da fronteira e a posição da partícula, p e q são inteiros que modificam o período, $e \in [0, 1)$ controla a excentricidade da elipse e $\varepsilon \in [0, 1)$ a perturbação oval.

Se $e = 0$ e $\varepsilon \neq 0$, a Eq. (2.1) perde a parte elíptica e recuperamos o que ficou conhecido na literatura como bilhar ovoide [12]. Por outro lado, se $\varepsilon = 0$ e $e \neq 0$, a parte oval é eliminada e recuperamos o bilhar elíptico [13], ao passo que se $e \neq 0$ e $\varepsilon \neq 0$ temos o bilhar elíptico-ovoide [14, 15] e se $e = 0$ e $\varepsilon = 0$ recuperamos o bilhar circular [16]. A Fig. 2.1 mostra algumas das possíveis fronteiras obtidas ao variar os parâmetros de controle da Eq. (2.1).

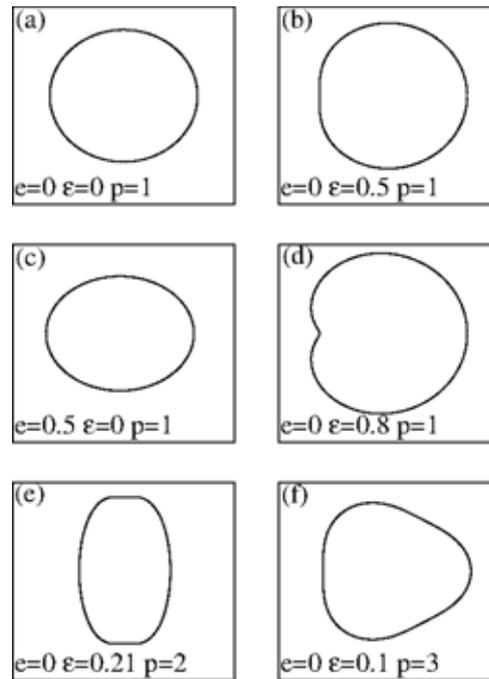


Figura 2.1: Possíveis fronteiras para o bilhar elíptico-ovoide obtidas com a variação dos parâmetros de controle da Eq. (2.1).

2.1 Análise da curvatura da fronteira

A curvatura k da fronteira pode ser definida como

$$k = \frac{d\phi}{dS}, \quad (2.2)$$

em que ϕ é o ângulo medido no sentido anti-horário entre a reta tangente à superfície S e o eixo x positivo (ver Fig. 2.2). Ao alterarmos os parâmetros de controle a curvatura k pode vir a mudar de sinal levando ao surgimento de regiões convexas na fronteira do bilhar e, com isso, acarretando mudanças drásticas na dinâmica da partícula.

Se a fronteira é descrita como uma função $y = f(x)$, devemos escrever k como função de x e y . Pela regra da cadeia

$$\frac{d\phi}{dS} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{dS}, \quad (2.3)$$

e $\frac{dx}{dS}$ pode ser facilmente obtido descrevendo uma pequena fatia da superfície S como $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, onde Δx e Δy são pequenos incrementos em x e y respectivamente. Logo, dividindo a expressão por Δx obtemos

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}, \quad (2.4)$$

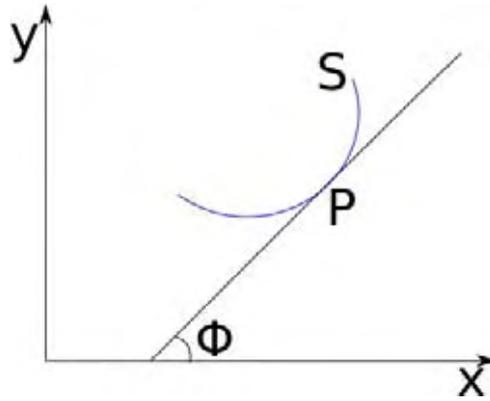


Figura 2.2: Esboço da definição da curvatura k de acordo com a Eq. (2.2).

e aplicando limite, obtemos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{dS}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (2.5)$$

Se uma função é contínua podemos escrever

$$\frac{dx}{dS} = \frac{1}{\frac{dS}{dx}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \quad (2.6)$$

e com isso encontrar o que procurávamos.

Falta agora encontrar a expressão de $\frac{d\phi}{dx}$ que faremos através do coeficiente angular da reta $\frac{dy}{dx} = \tan \phi$ (ver Fig. 2.2). Derivando implicitamente em relação a x , obtemos

$$\sec^2 \phi \frac{d\phi}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (2.7)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \tan^2 \phi}, \quad (2.8)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (2.9)$$

Portanto, substituindo as Eqs. (2.6) e (2.9) na Eq. (2.3) encontramos

$$k = \frac{d\phi}{dS} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad (2.10)$$

que corresponde ao cálculo da curvatura de superfícies escritas como $y = f(x)$. No nosso caso, a fronteira do bilhar foi escrita em coordenadas polares que podem ser decompostas

como $r(\theta) = x(\theta)\hat{\mathbf{i}} + y(\theta)\hat{\mathbf{j}}$ em que $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ correspondem aos vetores unitários nas direções x e y respectivamente.

Pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}, \quad (2.11)$$

da mesma maneira, podemos escrever

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right), \quad (2.12)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} \right), \quad (2.13)$$

$$= \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{d\theta} \right), \quad (2.14)$$

$$= \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dy}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dx}, \quad (2.15)$$

$$= \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dx^2} + \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \frac{d^2y}{d\theta^2}. \quad (2.16)$$

Sabemos também que $\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}$ e então podemos calcular

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\theta}{dx} \right), \quad (2.17)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} \right), \quad (2.18)$$

$$= -\frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{d\theta} \right)}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2}, \quad (2.19)$$

$$= -\frac{\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dx}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dx}}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2}, \quad (2.20)$$

$$= -\frac{\frac{d^2x}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dx}}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2}. \quad (2.21)$$

Substituindo a Eq. (2.21) na Eq. (2.16) e depois a Eq. (2.16) na (2.2) juntamente com a Eq. (2.11) e adotando a notação $\frac{dy}{d\theta} = y'$ e $\frac{dx}{d\theta} = x'$, obtemos a equação que calcula a curvatura de uma fronteira em que as equações que a descrevem são dadas em coordenadas polares por

$$k(\theta) = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \quad (2.22)$$

A fronteira do bilhar elíptico-ovoide apresentada na Eq. (2.1) pode ser decomposta nas componentes $x(\theta) = R(\theta) \cos(\theta)$ e $y(\theta) = R(\theta) \sin(\theta)$ e as derivadas em relação a θ

são

$$x'(\theta) = \frac{dR}{d\theta} \cos(\theta) - R(\theta) \sin(\theta), \quad (2.23)$$

$$y'(\theta) = \frac{dR}{d\theta} \sin(\theta) + R(\theta) \cos(\theta), \quad (2.24)$$

$$x''(\theta) = \frac{d^2R}{d\theta^2} \cos(\theta) - 2 \frac{dR}{d\theta} \sin(\theta) - R(\theta) \cos(\theta), \quad (2.25)$$

$$y''(\theta) = 2 \frac{dR}{d\theta} \cos(\theta) + \frac{d^2R}{d\theta^2} \sin(\theta) - R(\theta) \sin(\theta), \quad (2.26)$$

em que a derivada da equação da fronteira R em θ $\frac{dR}{d\theta}$ e a segunda derivada $\frac{d^2R}{d\theta^2}$ são

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{e(1-e^2)q \sin(q\theta)}{(e \cos(q\theta) + 1)^2} - \varepsilon p \sin(p\theta), \quad (2.27)$$

$$\frac{d^2R}{d\theta^2} = \frac{2e^2(1-e^2)q^2 \sin(q\theta)^2}{(e \cos(q\theta) + 1)^3} + \frac{e(1-e^2)q^2 \cos(q\theta)}{(e \cos(q\theta) + 1)^2} - \varepsilon p^2 \cos(p\theta). \quad (2.28)$$

Substituindo as derivadas na Eq. (2.22) e fazendo $k(\theta) = 0$ para $\theta = 0$ encontramos que ocorre uma mudança de curvatura de positiva ($k(\theta) > 0$) para negativa ($k(\theta) < 0$) em um determinado ε crítico ε_c , dado pela equação

$$\varepsilon_c = \frac{(e-1)(e(q^2-1)-1)}{(1+e)(p^2+1)}. \quad (2.29)$$

Isso significa que valores do parâmetro $\varepsilon < \varepsilon_c$ levam a curvaturas positivas enquanto valores de $\varepsilon > \varepsilon_c$ levam partes da fronteira a apresentarem curvaturas negativas e a mudança de sinal ocorre em $\varepsilon = \varepsilon_c$.

2.2 Dedução do mapa que descreve o movimento da partícula

A dinâmica do modelo pode ser descrita em termos de um mapa bi-dimensional não linear $T(\theta_n, \alpha_n) = (\theta_{n+1}, \alpha_{n+1})$ nas variáveis θ_n , que é a posição angular medida no sentido anti-horário em relação ao eixo horizontal positivo e α_n , que é o ângulo que a trajetória da partícula faz com a reta tangente à fronteira em θ_n ¹. Além desses ângulos, para descrever a dinâmica devemos definir um ângulo auxiliar ϕ_n entre a reta tangente à fronteira no ponto de colisão e o eixo horizontal positivo. Uma ilustração desses ângulos pode ser vista na Fig. 2.3 que também mostra claramente a relação entre eles, dada por

$$\alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n). \quad (2.30)$$

¹O subíndice n denota a n ésima colisão da partícula com a fronteira

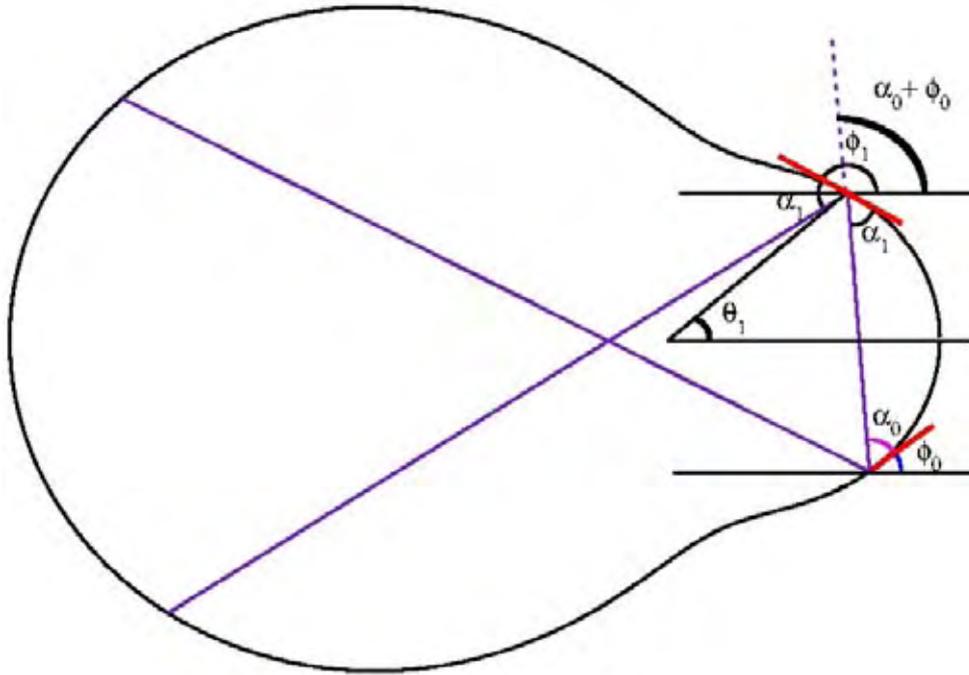


Figura 2.3: Definição das variáveis necessárias para a construção do mapa que descreve o movimento de uma partícula confinada em um bilhar elíptico-ovoide.

A posição da partícula no instante da colisão pode ser escrita em coordenadas polares como

$$x(\theta_n) = R(\theta_n) \cos \theta_n = \left[\frac{1 - e^2}{1 + e \cos(q\theta_n)} + \varepsilon \cos(p\theta_n) \right] \cos \theta_n, \quad (2.31)$$

$$y(\theta_n) = R(\theta_n) \sin \theta_n = \left[\frac{1 - e^2}{1 + e \cos(q\theta_n)} + \varepsilon \cos(p\theta_n) \right] \sin \theta_n. \quad (2.32)$$

O ângulo ϕ_n é calculado de

$$\phi_n = \arctan \left[\frac{y'(\theta_n)}{x'(\theta_n)} \right], \quad (2.33)$$

na qual x' e y' são dados pelas Eqs. (2.23) e (2.24) respectivamente.

Como a partícula não está sujeita a nenhum campo externo, sua trajetória será uma reta de inclinação $(\alpha_n + \phi_n)$ dada por

$$y(\theta_{n+1}) - y(\theta_n) = \tan(\alpha_n + \phi_n)[x(\theta_{n+1}) - x(\theta_n)], \quad (2.34)$$

na qual θ_{n+1} é obtido numericamente como solução dessa equação. Com o valor de θ_{n+1} , podemos substituir na Eq. (2.33) avaliada na iteração $n + 1$ e então encontrar ϕ_{n+1} . Com o valor de ϕ_{n+1} , podemos substituir na Eq. (2.30) e então obter α_{n+1} .

O procedimento do parágrafo anterior é iterativo e pode ser descrito pelo mapea-

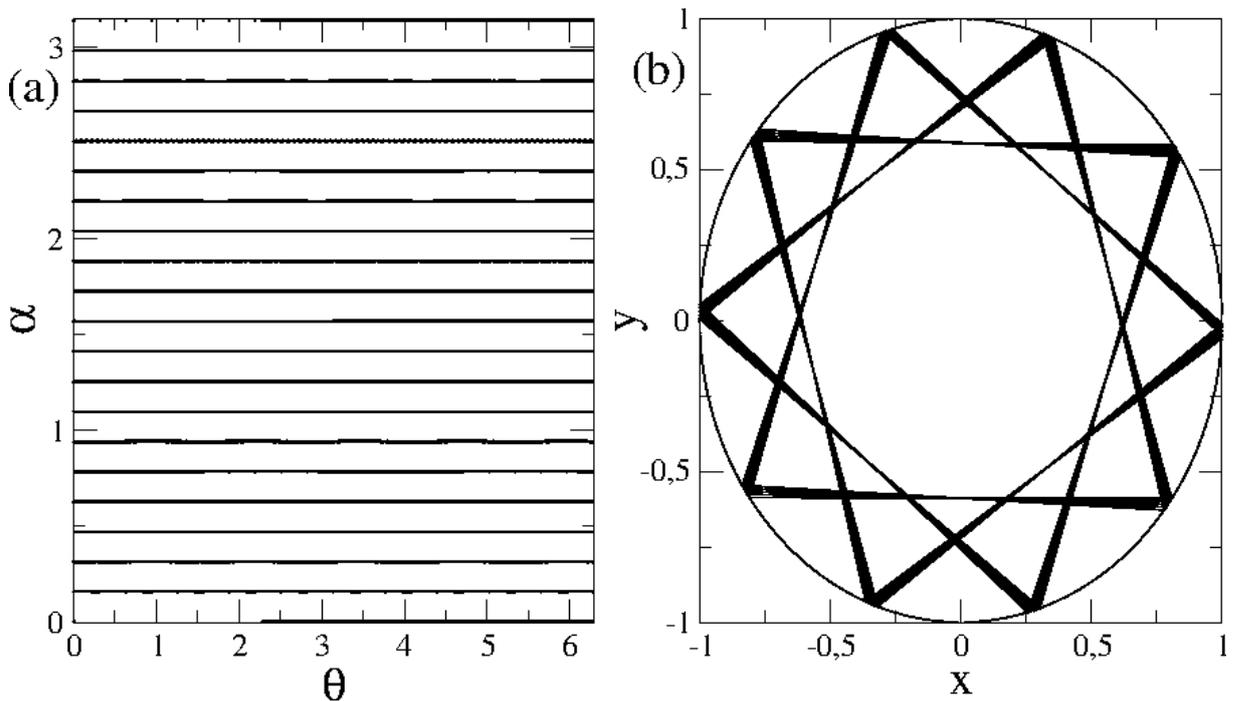


Figura 2.4: (a) Espaço de fases do bilhar circular obtido assumindo $e = \varepsilon = 0$ na Eq. (2.1). Nota-se que o espaço de fases é preenchido por retas, indicando movimento periódico. (b) Ilustração da trajetória de uma partícula confinada nesse bilhar.

mento

$$T : \begin{cases} F(\theta_{n+1}) = R(\theta_{n+1}) \sin(\theta_{n+1}) - y(\theta_n) - \tan(\alpha_n + \phi_n) [R(\theta_{n+1}) \cos(\theta_{n+1}) - x(\theta_n)] \\ \alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n) \end{cases} \quad (2.35)$$

ou seja, a partir da definição dos parâmetros que descrevem o formato da fronteira do bilhar e de uma condição inicial (θ_0, α_0) podemos iterar o mapa descrito pela Eq. (2.35) e recuperar numericamente a dinâmica de uma partícula confinada em seu interior. O ângulo θ_{n+1} é obtido numericamente quando $F(\theta_{n+1}) = 0$.

2.3 Resultados numéricos

2.3.1 Bilhar circular

O bilhar circular de raio unitário é recuperado fazendo $e = \varepsilon = 0$ na Eq. (2.1) e com isso recuperando uma fronteira circular que pode ser vista na Fig. 2.1(a). Trata-se de um bilhar integrável² composto apenas por órbitas periódicas (uma delas pode ser vista na Fig. 2.4(b)) tornando seu espaço de fases preenchido por retas, como mostra a Fig.

²Simplificadamente, um sistema é dito integrável quando o número de graus de liberdade é igual ao número de constantes de movimento. O bilhar circular possui dois graus de liberdade, já que a partícula se move no plano xy , e duas constantes de movimento (energia e momento angular).

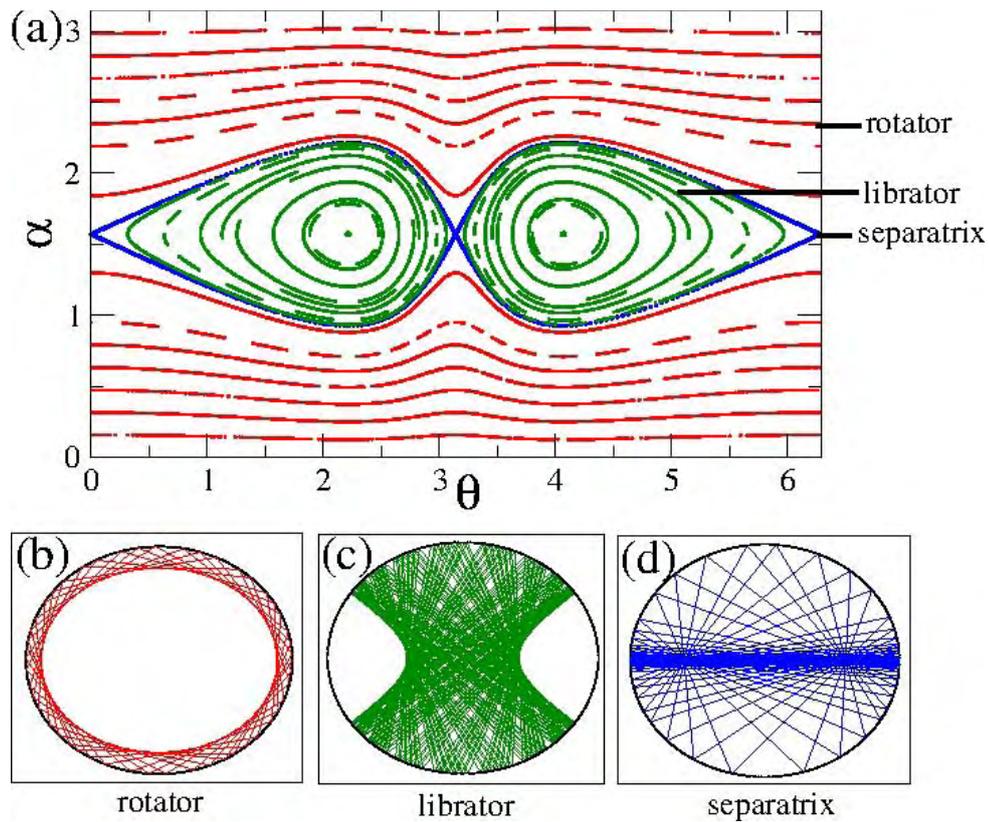


Figura 2.5: (a) Espaço de fases do bilhar elíptico obtido assumindo $e = 0,6$, $q = 1$ e $\varepsilon = 0$ na Eq. (2.1). Trata-se de um bilhar integrável, com três tipos possíveis de órbitas: (b) *rotator*, (c) *librator* e (d) em cima da *separatrix*.

2.4(a). O conceito de espaço de fases foi discutido no Capítulo 1. Basicamente, trata-se do conjunto de todos os estados possíveis para o sistema.

2.3.2 Bilhar elíptico

O bilhar elíptico é recuperado tomando valores de $e \neq 0$ e $\varepsilon = 0$. Trata-se também de um bilhar integrável e portanto, assim como o bilhar circular, não possui caos em seu espaço de fases.

Um exemplo do espaço de fases para o bilhar elíptico pode ser encontrado na Fig. 2.5 onde também estão ilustradas as possíveis órbitas que uma partícula confinada em uma fronteira desse tipo pode experimentar.

Órbitas do tipo (b) *rotator* (ou órbitas de rotação) representam um conjunto de órbitas na qual a condição inicial é dada de forma que não atravesse a área central limitada pelo dois focos da elipse. Órbitas do tipo (c) *librator* (ou órbitas de libração) são aquelas que, ao contrário das do tipo *rotator*, são dadas na região central dos focos. Por outro lado, uma órbita (d) em cima da *separatrix* representa a transição entre uma órbita do

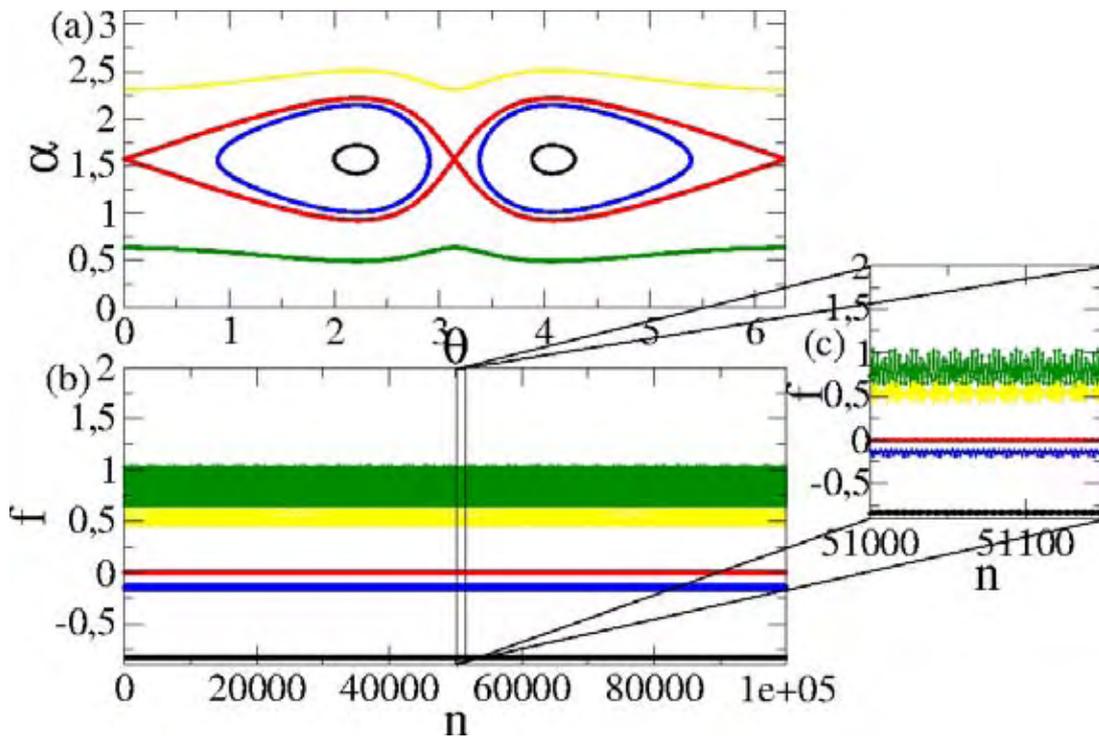


Figura 2.6: (a) Espaço de fases do bilhar elíptico obtido através de poucas órbitas, porém em todas as possíveis regiões. (b) Gráfico do produto do momento angular em relação aos dois focos da elipse f definido na Eq. (2.36) como função do número de colisões n da partícula com a fronteira.

tipo *rotator* e *librator*, ou seja, é aquela órbita cuja condição inicial é dada exatamente na interface entre os dois tipos de movimento.

A dinâmica do sistema é tal que uma órbita *rotator* jamais transitará para uma órbita *librator* e vice-versa, ou seja, faz com que a órbita gerada por condições iniciais que passem pela região entre os focos jamais se transfira para região externa e também com que condições iniciais que passem por entre os focos jamais se transfira para a região de rotação.

As constantes de movimento do bilhar elíptico são a energia total e o produto do momento angular calculado em relação aos dois focos da elipse [12], que é definido como

$$f(\alpha, \phi) = \frac{\cos^2(\alpha) - e^2 \cos^2(\phi)}{1 - e^2 \cos^2(\phi)}. \quad (2.36)$$

Se analisarmos, de acordo com a condição inicial dada, o valor dessa grandeza que denotamos por f , retiramos algumas propriedades importantes:

- $f < 0$ para condições iniciais em cima das chamadas ilhas de estabilidade, nome dado a representação gerada por órbitas *librator* no espaço de fases.
- $f = 0$ para uma condição inicial dada em cima da curva separatriz.

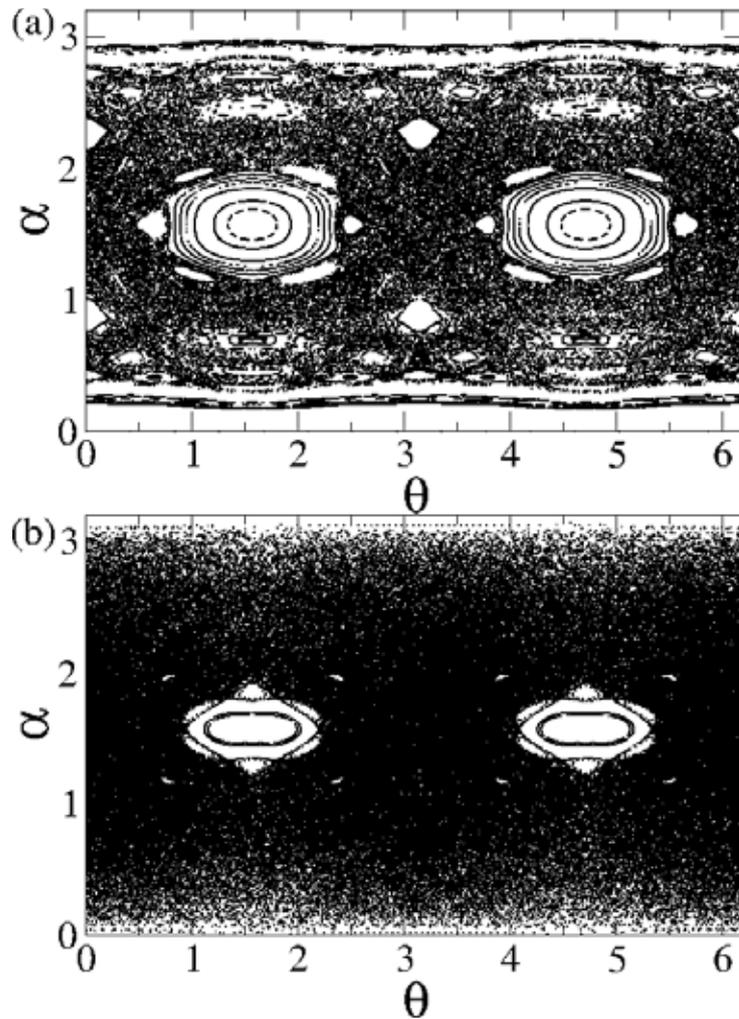


Figura 2.7: (a) Espaço de fases do bilhar ovoide obtido obtido com $e = 0$, $p = 2$. Em (a) $\varepsilon = 0,10$ e em (b) $\varepsilon = 0,21$, o que corresponde a um valor acima do $\varepsilon_c = 0,20$.

- $f > 0$ para uma condição inicial em cima de uma curva invariante, nome dado a representação gerada por órbitas *rotator* no espaço de fases.

A Fig. 2.6(b) mostra o comportamento da grandeza f calculada para diferentes órbitas do espaço de fases da Fig. 2.6(a) como função do número de colisões n . As cores representam os diferentes tipos de órbitas que podem ser comparadas entre os dois gráficos e assim confirmar as propriedades apresentadas anteriormente.

2.3.3 Bilhar ovoide

O bilhar ovoide é recuperado fazendo $e = 0$ e $\varepsilon \neq 0$ na Eq. (2.1). Trata-se de um bilhar que além da possibilidade de órbitas periódicas, pode exibir caos para algumas condições iniciais.

Se calcularmos o parâmetro ε_c conforme definido na Eq. (2.29) para o bilhar ovoide

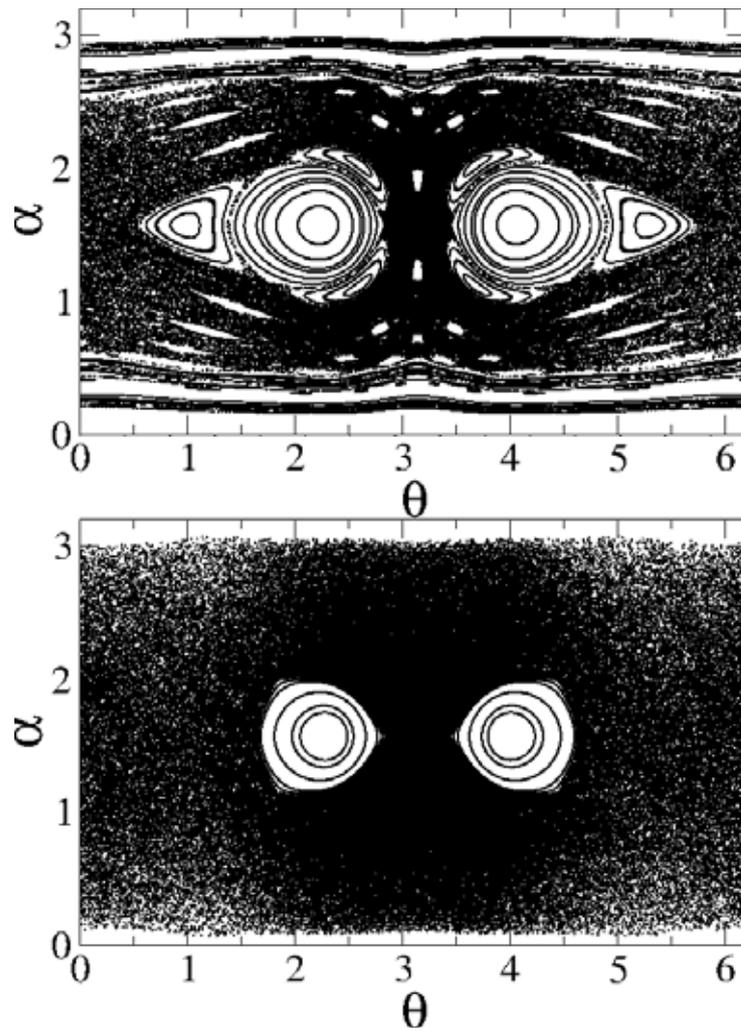


Figura 2.8: Espaço de fases para o bilhar elíptico-ovoide. Em (a) $\varepsilon = 0,01$ e em (b) $\varepsilon = 0,06$, o que corresponde a um valor acima do $\varepsilon_c = 0,05$ nesse caso.

($e = 0$) e para $p = 2$ encontramos que ocorre uma mudança de curvatura de positiva para negativa em $\varepsilon_c = 0,20$.

Ao fazermos o gráfico do espaço de fases do bilhar ovoide para dois valores de ε diferentes, um abaixo de ε_c , como mostra a Fig. 2.7(a) e outro acima de ε_c , como mostra a Fig. 2.7(b) percebemos que ocorre uma mudança drástica no espaço de fases. De fato essa mudança faz com que as órbitas estáveis do tipo *rotator* que caracterizam as órbitas de rotação não existam mais, devido a mudança na curvatura da fronteira.

2.3.4 Bilhar elíptico-ovoide

O bilhar elíptico-ovoide é recuperado tomando $e \neq 0$ e $\varepsilon \neq 0$ na Eq. (2.1) que define a fronteira do bilhar. Assim como o bilhar ovoide, o elíptico-ovoide também apresenta caos para alguns parâmetros de controle.

Ao calcularmos o valor de ε_c definido na Eq. (2.29) para $e = 0,6$, $p = 2$ e $q = 1$ encontramos $\varepsilon_c = 0,05$. A mesma destruição das órbitas de rotação é observada, como mostra o espaço de fases da Fig. 2.8(a) para $\varepsilon = 0,01$ e Fig. 2.8(b) para $\varepsilon = 0,06$.

2.3.5 Caracterização de órbitas caóticas - O expoente de Lyapunov

Uma ferramenta matemática muito utilizada na caracterização de sistemas dinâmicos são os expoentes de Lyapunov. Eles são obtidos escolhendo duas condições iniciais extremamente próximas, evoluindo-as segundo as equações que regem o mapa e medindo o afastamento entre as mesmas ao longo das iterações.

Começaremos a dedução para mapas unidimensionais do tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ em que f é uma função não-linear de suas variáveis. Considere uma condição inicial x_0 e outra bastante próxima $x_0 + \delta_0$ com δ_0 muito pequeno. A distância entre essas condições iniciais varia com a iteração n do mapa, o que leva a uma distância δ_n entre elas após n iterações.

Um sistema é dito caótico quando a distância entre duas condições iniciais próximas diverge exponencialmente ao longo do tempo. Em nosso trabalho, o tempo é medido indiretamente através das iterações do mapa, o que nos leva a propor um afastamento do tipo

$$|\delta_n| = |\delta_0|e^{\lambda n}, \quad (2.37)$$

em que λ é o Expoente de Lyapunov.

O sistema será caótico [17], ou sensível as condições iniciais, quando a distância entre elas diverge exponencialmente com o tempo (caracterizado por ao menos um expoente de Lyapunov λ positivo). Por outro lado, quando não houver divergência entre as condições iniciais ou essa divergência for linear dizemos que o sistema não é sensível as condições iniciais (caracterizado por expoentes de Lyapunov negativos ou nulos). Essas informações podem ser verificadas facilmente olhando para a Eq. (2.37) e verificando que se $\lambda = 0$ a distância entre as condições iniciais permanece constante ao longo das iterações do mapa, ao passo que $\lambda < 0$ leva as condições iniciais a uma aproximação conforme passa o número de iterações n .

Linearizando a Eq. (2.37) com a aplicação do logaritmo neperiano em ambos lados e isolando λ considerando n suficientemente grande, obtemos

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \right), \quad (2.38)$$

que trata-se de uma equação para o Expoente de Lyapunov λ . Ela pode ser simplificada

substituindo a separação entre as condições iniciais após n iterações δ_n por

$$\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0), \quad (2.39)$$

onde f^n é a n -ésima composição de um mapa unidimensional qualquer $x_{n+1} = f(x_n)$, ou seja, $f^2(x) = f(f(x))$ até que $f^n(x) = f(f \dots f(x) \dots)$ n vezes, de forma que a Eq. (2.38) agora se torna

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| \right). \quad (2.40)$$

No limite em que a distância inicial entre as condições iniciais é pequena ($\delta_0 \rightarrow 0$), encontramos

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \right). \quad (2.41)$$

Pela regra da cadeia, podemos escrever

$$\frac{df^n(x_0)}{dx_0} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{df(x_i)}{dx_0}, \quad (2.42)$$

e ao substituir na Eq. (2.41) podemos aplicar a regra do produto de logaritmos transformando-os em uma soma da forma

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_0} \right| \right). \quad (2.43)$$

Podemos generalizar a Eq. (2.43) para mapas de dimensão m qualquer [18], de forma que

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \text{autovalor } j \text{ de } M = \prod_{i=0}^{n-1} J_i(\mathbf{x}_i) \right| \right), j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.44)$$

ou ainda, de uma forma simplificada

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln |\Lambda_j| \right), j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.45)$$

na qual \mathbf{x} é um vetor de m componentes, Λ_j é o j -ésimo autovalor da matriz $M = \prod_{i=0}^{n-1} J_i(\mathbf{x}_i) = J_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1})J_{n-2}(\mathbf{x}_{n-2}) \dots J_1(\mathbf{x}_1)J_0(\mathbf{x}_0)$ e J é a matriz jacobiana do mapa avaliada ao longo da órbita calculada no Apêndice A.

Para evitar a realização do produto das matrizes para a posterior obtenção dos autovalores de M , utilizaremos um procedimento conhecido como algoritmo de triangulação [18]. Podemos reescrever a matriz J como o produto entre uma matriz triangular

superior (T) e uma ortogonal (Θ), de forma que $J = \Theta T$ na qual

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

e também

$$J = \Theta T, \quad (2.49)$$

$$\Theta^{-1} J = \Theta^{-1} \Theta T, \quad (2.50)$$

$$T = \Theta^{-1} J. \quad (2.51)$$

Como $\Theta \Theta^{-1} = I$, podemos escrever $M = J_{n-1} \dots J_3 J_2 J_1 \Theta_0 \Theta_0^{-1} J_0$, o que nos leva a $M = J_{n-1} \dots J_3 J_2 J_1 \Theta_0 T_0$, pois $T_0 = \Theta_0^{-1} J_0$, ou ainda em notação matricial usando o fato que para uma matriz ortogonal $\Theta^{-1} = \Theta^t$

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

o que nos leva a

$$T_{11} = J_{11} \cos \theta_0 + J_{21} \sin \theta_0, \quad (2.53)$$

$$T_{12} = J_{11} \sin \theta_0 + J_{12} \cos \theta_0, \quad (2.54)$$

$$0 = -J_{11} \sin \theta_0 + J_{21} \cos \theta_0, \quad (2.55)$$

$$T_{22} = -J_{12} \sin \theta_0 + J_{22} \cos \theta_0. \quad (2.56)$$

Da Eq. (2.55) encontramos

$$\theta_0 = \arctan \left[\frac{J_{21}}{J_{11}} \right], \quad (2.57)$$

$$\cos \theta_0 = \frac{J_{11}}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}, \quad (2.58)$$

$$\sin \theta_0 = \frac{J_{21}}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}. \quad (2.59)$$

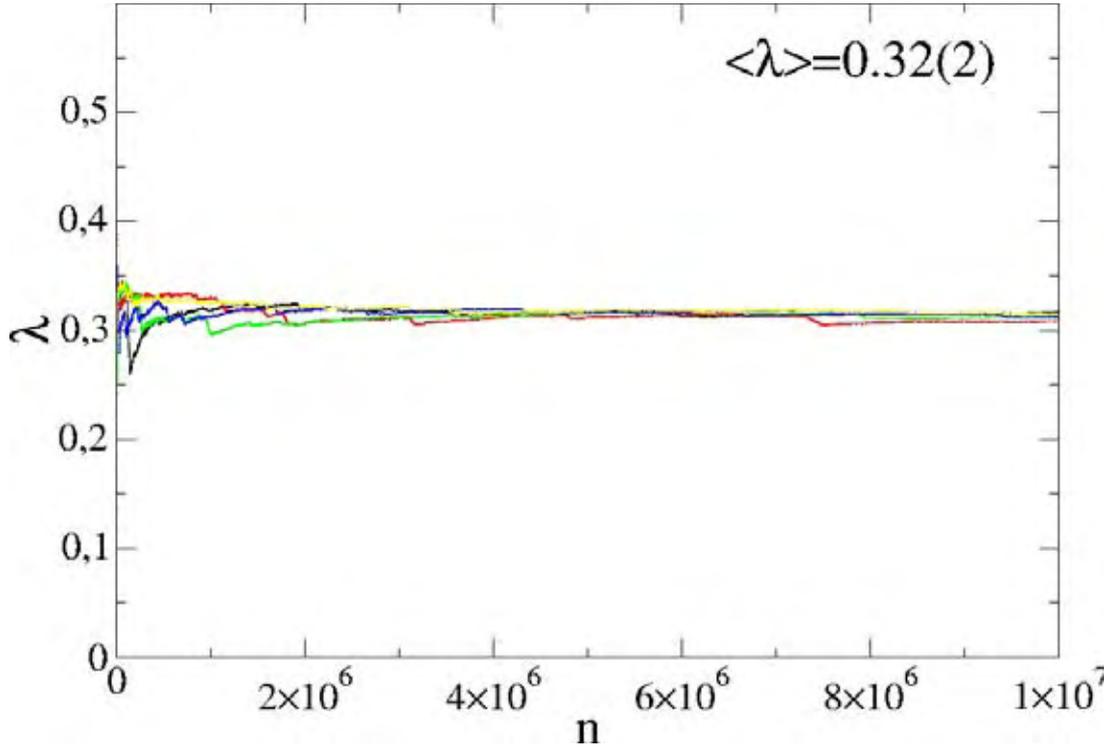


Figura 2.9: Expoente de Lyapunov para o bilhar ovóide com $e = 0$, $\varepsilon = 0,05$ e $p = 2$. O valor médio obtido foi $\langle \lambda \rangle = 0,32(2)$.

e substituindo nas Eqs. (2.53) e (2.56)

$$T_{11} = \frac{J_{11}^2 + J_{21}^2}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}, \quad (2.60)$$

$$T_{22} = \frac{J_{11}J_{22}}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}} - \frac{J_{12}J_{21}}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}. \quad (2.61)$$

Também podemos definir $\tilde{J}_1 = J_1 \Theta_0$, que corresponde em notação matricial a

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_{11} & \tilde{J}_{12} \\ \tilde{J}_{21} & \tilde{J}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

ou ainda

$$\tilde{J}_{11} = J_{11} \cos \theta_0 + J_{12} \sin \theta_0, \quad (2.63)$$

$$\tilde{J}_{12} = J_{12} \cos \theta_0 - J_{11} \sin \theta_0, \quad (2.64)$$

$$\tilde{J}_{21} = J_{21} \cos \theta_0 + J_{22} \sin \theta_0, \quad (2.65)$$

$$\tilde{J}_{22} = J_{22} \cos \theta_0 - J_{21} \sin \theta_0, \quad (2.66)$$

de modo que $M = J_{n-1} \dots J_3 J_2 \Theta_1 \Theta_1^{-1} \tilde{J}_1 T_0$. Agora, substituindo $\Theta_1^{-1} \tilde{J}_1 = T_1$, obtemos $M = J_{n-1} \dots J_3 J_2 \Theta_1 T_1 T_0$ e assim sucessivamente até que $M = \Theta_{n-1} T_{n-1} T_{n-2} \dots T_2 T_1 T_0$. Após essa

transformação, o algoritmo para o cálculo do expoente de Lyapunov se reduz a encontrar os elementos da diagonal principal das matrizes T_i . Definindo esses elementos como T_{11}^i e T_{22}^i , o expoente de Lyapunov pode ser calculado fazendo

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |T_{jj}^i| \right). \quad (2.67)$$

Em sistemas conservativos, os expoentes de Lyapunov aparecem aos pares, com sinal trocado e soma igual a zero [19].

A Fig. 2.9 mostra o expoente de Lyapunov formalmente definido na Eq. (2.67) em função da iteração do mapa para o bilhar ovoide. Na figura, podemos ver claramente que λ converge para valores suficientemente grandes de n . O expoente foi calculado para 5 condições iniciais diferentes pertencentes à região de caos do espaço de fases mantendo $e = 0$, $\varepsilon = 0,05$ e $p = 2$ e uma média entre os valores assintóticos foi feita chegando em $\langle \lambda \rangle = 0,32(2)$, confirmando a consistência do algoritmo.

CAPÍTULO 3

BILHAR ELÍPTICO-OVOIDE COM FRONTEIRA MÓVEL

Nesse capítulo, introduziremos dependência temporal na fronteira do bilhar elíptico ovoide com o intuito de ver quais implicações isso traz para a dinâmica da partícula que colide com a fronteira. Começaremos discutindo a conjectura LRA.

3.1 Conjectura LRA

A conjectura LRA foi proposta no ano de 2000 por Loskutov, Ryabov e Akinshin [20]. Ela diz respeito ao fato de um bilhar bidimensional possuir ou não aceleração de Fermi. É enunciada como:

“Dinâmica caótica em um bilhar com fronteira fixa é condição suficiente para aceleração de Fermi nesse sistema quando uma dependência temporal é introduzida na fronteira”.

Seguindo essa conjectura, se introduzirmos uma dependência temporal no bilhar ovoide ou no elíptico-ovoides eles devem apresentar aceleração de Fermi. Também é importante ressaltar que a conjectura não diz nada a respeito de quais sistemas não devem apresentar aceleração de Fermi. É um erro então afirmar que o bilhar elíptico, por exemplo, não possui aceleração de Fermi [21], sendo que de fato ele apresenta, como já foi mostrado anteriormente [22, 13].

Baseado nessas ideias, Leonel e Bunimovich em 2010 [13] estenderam a conjectura LRA, substituindo o fato da necessidade da existência de caos no espaço de fases do bilhar com fronteiras estáticas pela existência de uma órbita heteroclínica¹.

3.2 Dedução das equações que descrevem o movimento da partícula

Existem pelo menos dois tipos possíveis de dependência temporal a serem introduzidas nas fronteiras de um bilhar bi-dimensional. Uma delas é conhecida como dependência do tipo *breathing*, por haver preservação da forma geométrica da fronteira, enquanto a outra é conhecida como *non-breathing*, por não haver preservação na forma.

Nessa seção, introduziremos dependência temporal non-breathing na fronteira do bilhar elíptico-ovoide de modo que agora ela assumirá a forma

$$R(\theta, t) = \frac{1 - e^2[1 + a \cos(t)]^2}{1 + e[1 + a \cos(t)] \cos(q\theta)} + \varepsilon[1 + b \cos(t)] \cos(p\theta), \quad (3.1)$$

na qual a é um parâmetro que controla a dimensão dessa dependência na parte elíptica da fronteira e b na parte ovoide, enquanto t corresponde ao instante de tempo. A Fig. 3.1 mostra um exemplo da trajetória de uma partícula que colide com a fronteira três vezes.

O raio da fronteira R desse bilhar jamais poderá ser negativo. Baseado nisso, fizemos um cálculo simples para saber para quais valores dos parâmetros de controle (e , a , b e ε) ela está definida. Para isso, como $-1 < \cos(x) < 1$ consideramos que em um limite extremo que faz com que R seja o menor possível para $\cos(p\theta) = -1$ e para $\cos(t) = 1$, o que nos leva a

$$R \geq 0 = \frac{1 - e^2[1 + a]^2}{1 + e[1 + a]} - \varepsilon[1 + b], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \leq \frac{1 - e^2(1 + a)^2}{[1 + e(1 + a)](1 + b)}. \quad (3.3)$$

Com isso, escolhemos de antemão os valores de e , a e b e baseado neles encontramos o maior valor aceitável para ε de forma que a fronteira seja sempre positiva, independente de θ e t .

Uma das formas de descrever o movimento de uma partícula confinada em um bilhar com essas configurações é através de um mapeamento discreto quadri-dimensional

¹Uma órbita heteroclínica, também conhecida como conexão heteroclínica, é um caminho no espaço de fases que liga dois pontos fixos diferentes.

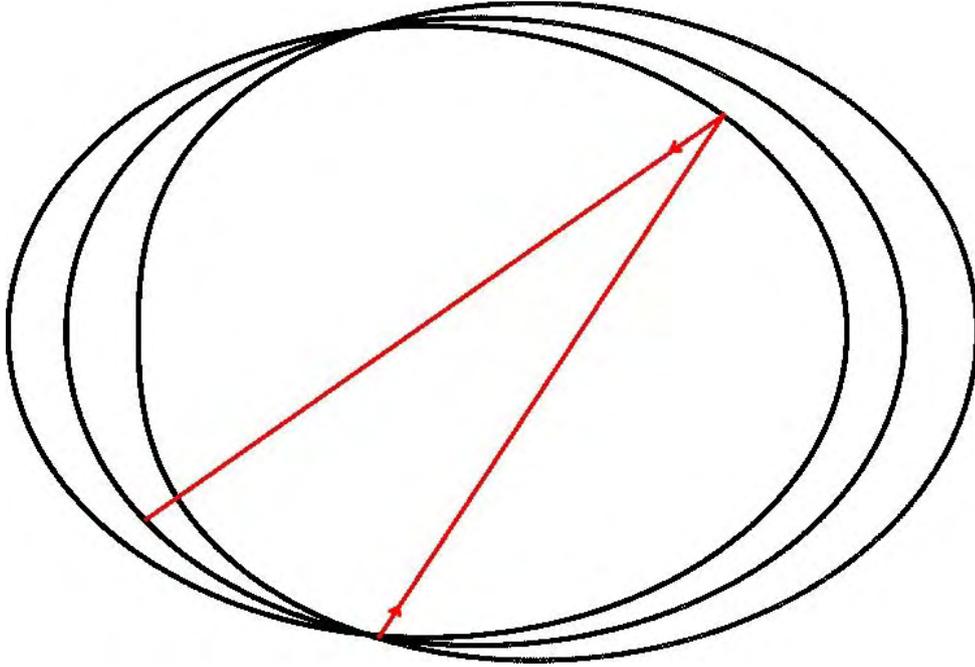


Figura 3.1: Ilustração da trajetória de uma partícula confinada em uma fronteira móvel (*non-breathing*). Os parâmetros utilizados na simulação foram $b = 0,7$, $\varepsilon = 0,3$, $e = 0$ e $p = 1$.

$(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1}, v_{n+1}, t_{n+1}) = T(\theta_n, \alpha_n, v_n, t_n)$, no qual θ_n é a posição angular da partícula na n -ésima colisão, α_n o ângulo que a reta tangente faz com a trajetória, v_n a velocidade da partícula e t_n o tempo da n -ésima colisão.

Em coordenadas polares, a posição da partícula (x_n, y_n) no instante da primeira colisão t_n que ocorre em θ_n com velocidade v_n e ângulo entre a reta tangente ao ponto de colisão e a trajetória da partícula α_n é calculada da mesma maneira que no caso estático ilustrado na Fig. 2.3, mas agora com dependência temporal, ou seja,

$$x_n(\theta_n, t_n) = R(\theta_n, t_n) \cos(\theta_n), \quad (3.4)$$

$$y_n(\theta_n, t_n) = R(\theta_n, t_n) \sin(\theta_n), \quad (3.5)$$

o que leva a um vetor posição do choque da forma

$$\vec{r}_0 = x_n(\theta_n, t_n)\hat{\mathbf{i}} + y_n(\theta_n, t_n)\hat{\mathbf{j}} = [R(\theta_n, t_n) \cos(\theta_n)]\hat{\mathbf{i}} + [R(\theta_n, t_n) \sin(\theta_n)]\hat{\mathbf{j}}. \quad (3.6)$$

Baseado nas Eqs. (3.4) e (3.5) podemos escrever o vetor posição da partícula ao longo do tempo, que será

$$\vec{r}_n(t) = [x_n(\theta_n, t_n) + r(t) \cos(\alpha_n + \phi_n)]\hat{\mathbf{i}} + [y_n(\theta_n, t_n) + r(t) \sin(\alpha_n + \phi_n)]\hat{\mathbf{j}}, \quad (3.7)$$

em que $r(t)$ é a equação da trajetória da partícula medida a partir de uma colisão anterior que depende do tipo de movimento, t é o tempo medido a partir da colisão anterior e ϕ_n o ângulo formado entre a reta tangente à fronteira no instante da colisão e o eixo x positivo

(ver Fig. 2.3) dado por

$$\phi_n = \arctan \left[\frac{\frac{dy(\theta_n, t_n)}{d\theta_n}}{\frac{dx(\theta_n, t_n)}{d\theta_n}} \right], \quad (3.8)$$

e as derivadas em relação a θ_n assumem as formas

$$\frac{dx(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} = \frac{dR(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} \cos \theta_n - R(\theta_n, t_n) \sin \theta_n, \quad (3.9)$$

$$\frac{dy(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} = \frac{dR(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} \sin \theta_n + R(\theta_n, t_n) \cos \theta_n, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} &= \frac{e q (a \cos(t_n) + 1) \left(1 - e^2 (a \cos(t_n) + 1)^2\right) \sin(q \theta_n)}{(e (a \cos(t_n) + 1) \cos(q \theta_n) + 1)^2} \\ &- \varepsilon p (b \cos(t_n) + 1) \sin(p \theta_n). \end{aligned} \quad (3.11)$$

A inclinação da trajetória que a partícula descreve em relação ao eixo x positivo é $\tan(\alpha_n + \phi_n)$ e faz com que o vetor velocidade da partícula seja

$$\vec{v}_n(t) = |\vec{v}_n(t)| [\cos(\alpha_n + \phi_n) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\alpha_n + \phi_n) \hat{\mathbf{j}}], \quad (3.12)$$

em que $|\vec{v}_n(t)|$ é o módulo do vetor velocidade que, assim como $r(t)$, depende do tipo de movimento. Se a partícula for livre, a velocidade será constante durante o vôo $|\vec{v}_n(t)| = v_n$ e $r(t) = v_n t$. Caso exista alguma força agindo sobre ela, tanto velocidade quanto posição devem ser obtidos pela solução da segunda lei de Newton.

Sabendo as equações que regem o movimento da partícula e da parede podemos obter o ângulo θ_{n+1} em que ocorrerá a colisão resolvendo numericamente a equação

$$|\vec{r}_n(\theta_{n+1}, t_{n+1})| = R(\theta_{n+1}, t_{n+1}), \quad (3.13)$$

na qual t_{n+1} é o tempo que leva para a partícula cruzar o limite da fronteira.

Agora, devemos aplicar as regras de reflexão. Para isso, definiremos os versores tangencial (\hat{T}_{n+1}) e normal ($\hat{N}_{n+1} = \frac{d\hat{T}_{n+1}}{d\phi_{n+1}}$) à fronteira móvel no instante de sua colisão com a partícula medidos na colisão $n+1$, que podem ser calculados como

$$\hat{T}_{n+1} = \cos(\phi_{n+1}) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\phi_{n+1}) \hat{\mathbf{j}}, \quad (3.14)$$

$$\hat{N}_{n+1} = -\sin(\phi_{n+1}) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\phi_{n+1}) \hat{\mathbf{j}}. \quad (3.15)$$

Isso faz com que a projeção do vetor velocidade da partícula na direção tangencial e normal imediatamente antes da colisão sejam

$$\vec{v}_n \cdot \hat{T}_{n+1} = |\vec{v}_n| [\cos(\alpha_n + \phi_n) \cos \phi_{n+1} + \sin(\phi_n + \alpha_n) \sin \phi_{n+1}], \quad (3.16)$$

$$\vec{v}_n \cdot \hat{N}_{n+1} = |\vec{v}_n| [\sin(\alpha_n + \phi_n) \cos \phi_{n+1} - \cos(\phi_n + \alpha_n) \sin \phi_{n+1}]. \quad (3.17)$$

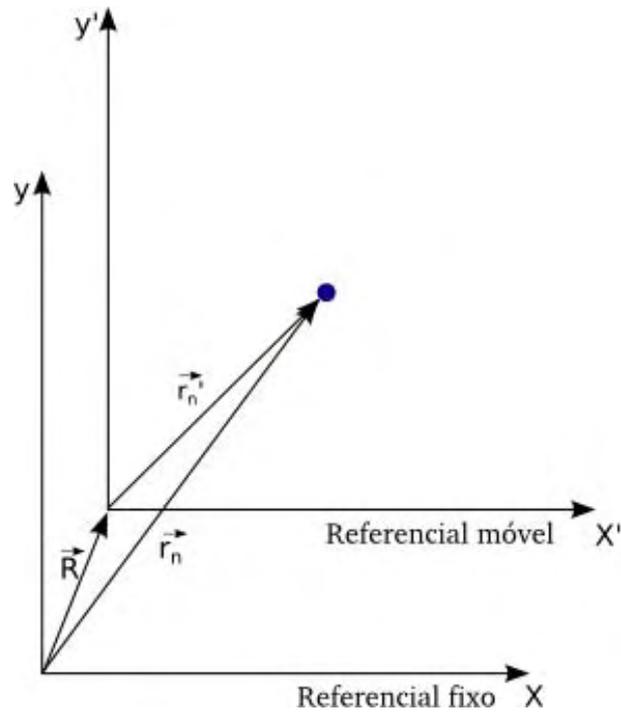


Figura 3.2: Ilustração da mudança de um referencial fixo para um referencial móvel em que \vec{r}_n é o vetor posição da partícula no referencial fixo, \vec{r}'_n o vetor posição da partícula no referencial móvel e \vec{R} o vetor posição do referencial móvel medido no fixo.

A reflexão é considerada especular e a energia e o momento se conservam no instante da colisão no referencial da parede móvel. A Fig. 3.2 ilustra a relação entre os referenciais utilizados, na qual \vec{r}_n é o vetor posição da partícula no referencial fixo, \vec{r}'_n sua posição no referencial móvel da fronteira oscilante e \vec{R} a posição da fronteira oscilante medida no referencial fixo. Ainda analisando a Fig. 3.2 concluímos por soma vetorial que $\vec{r}_n = \vec{R} + \vec{r}'_n$ e derivando em relação ao tempo temos

$$\vec{v}_n = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_n}{dt}, \quad (3.18)$$

$$\vec{v}'_n = \vec{v}_n - \vec{V}. \quad (3.19)$$

Aqui $\vec{v}'_n = \frac{d\vec{r}'_n}{dt}$ é a velocidade da partícula no referencial da fronteira móvel e

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad (3.20)$$

$$= \frac{dR}{dt} [\cos \theta_{n+1} \hat{i} + \sin \theta_{n+1} \hat{j}], \quad (3.21)$$

a velocidade da fronteira medida em um referencial fixo.

Nesse trabalho, consideraremos a massa da fronteira muito maior que a massa da partícula de forma que a fronteira não sinta a colisão e fazendo com que exista apenas uma inversão do sentido da velocidade da partícula, ou seja, a componente tangencial

permanece a mesma depois do choque e a componente normal muda de sinal. Assim temos

$$\vec{v}'_{n+1} \cdot \hat{T}_{n+1} = \vec{v}'_n \cdot \hat{T}_{n+1}, \quad (3.22)$$

$$\vec{v}'_{n+1} \cdot \hat{N}_{n+1} = -\vec{v}'_n \cdot \hat{N}_{n+1}. \quad (3.23)$$

em que \vec{v}'_{n+1} e \vec{v}'_n são os vetores velocidade da partícula nas colisões $(n+1)$ e n respectivamente, no referencial da parede móvel.

A componente tangencial da velocidade da partícula por permanecer constante continua sendo dada pela Eq. 3.16.

Já a componente normal da velocidade da partícula inverte o sinal no instante da colisão, ou seja, $\vec{v}'_{n+1} = -\vec{v}'_n = \vec{V} - \vec{v}_n$. Feito isso, podemos retornar para o referencial fixo utilizando a Eq. (3.18) de modo que $\vec{v}_{n+1} = \vec{V} + \vec{v}'_{n+1} = 2\vec{V} - \vec{v}_n$, o que nos leva a

$$\vec{v}_{n+1} \cdot \hat{N}_{n+1} = [2\vec{V}(t_{n+1}) - \vec{v}_n] \cdot \hat{N}_{n+1}, \quad (3.24)$$

$$= 2\vec{V}(t_{n+1}) \cdot \hat{N}_{n+1} - \vec{v}_n \cdot \hat{N}_{n+1}, \quad (3.25)$$

$$= 2 \frac{dR}{dt_{n+1}} [-\cos \theta_{n+1} \sin \phi_{n+1} + \sin \theta_{n+1} \cos \phi_{n+1}] \quad (3.26)$$

$$- |\vec{v}_n| [-\cos(\phi_n + \alpha_n) \sin \phi_{n+1} + \sin(\phi_n + \alpha_n) \cos \phi_{n+1}]. \quad (3.27)$$

Para finalizar a construção do mapa, a velocidade v_{n+1} com que a partícula é ejetada após a colisão será

$$|\vec{v}_{n+1}| = \sqrt{[\vec{v}_{n+1} \cdot \hat{T}_{n+1}]^2 + [\vec{v}_{n+1} \cdot \hat{N}_{n+1}]^2}, \quad (3.28)$$

enquanto que o ângulo entre a reta tangente ao ponto de colisão e a trajetória da partícula α_{n+1} será

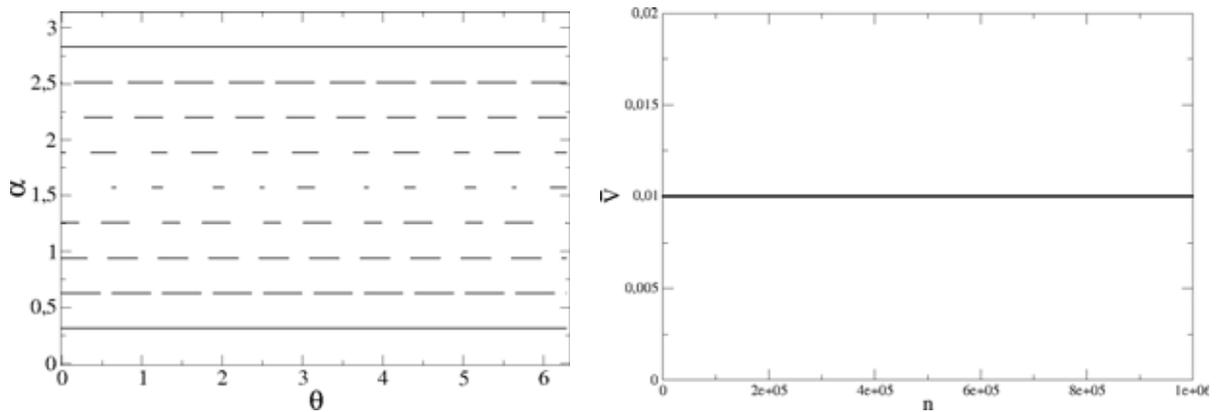
$$\alpha_{n+1} = \arctan \left(\frac{\vec{v}_{n+1} \cdot \hat{N}_{n+1}}{\vec{v}_{n+1} \cdot \hat{T}_{n+1}} \right). \quad (3.29)$$

3.3 Resultados numéricos

3.3.1 Bilhar circular

Com a dedução do mapeamento para o modelo mais geral feita, vamos iniciar a particularização começando com o bilhar circular.

Diferentemente dos bilhares de fronteira estática deduzidos no Capítulo 2 que eram descritos por mapas bi-dimensionais, os de fronteira móvel são descritos por mapas quadri-dimensionais. Isso significa que um espaço de fases para sistemas desse tipo possui quatro



(a) Projeção do espaço de fases para o bilhar circular nas variáveis α e θ . Os parâmetros de controle utilizados foram $e = \varepsilon = 0$. (b) Velocidade média \bar{v} de uma partícula confinada em um bilhar circular.

Figura 3.3: Gráficos mostram que a introdução desse tipo de dependência temporal na fronteira não afeta a dinâmica do bilhar circular por ser eliminada ao fazermos $e = \varepsilon = 0$. Foram consideradas 81 partículas que colidiram 10^5 vezes com a fronteira.

dimensões, o que torna impossível sua confecção. Por outro lado, embora não mostre o comportamento global, podemos fazer projeções desse espaço de fases e a partir dele retirar algumas propriedades do sistema. A Fig. 3.3(a) mostra uma projeção do espaço de fases do bilhar circular obtido tomando $e = \varepsilon = 0$ na Eq. (3.1) e evoluindo 81 condições iniciais para colidir 10^5 vezes com a fronteira.

Nesse caso, a projeção corresponde ao espaço de fases desse bilhar para o caso estático apresentado na Fig. 2.4 já que ao fazer $e = \varepsilon = 0$ na Eq. (3.1) eliminamos a dependência temporal. Uma outra evidência, pode ser vista na Fig. 3.3(b) na qual foi calculada a velocidade média da partícula \bar{v} (que permanece constante) ao longo das colisões n .

3.3.2 Bilhar elíptico

O bilhar elíptico, como antecipado na Seção 3.1, é exemplo de um bilhar que não possui caos em sua dinâmica com fronteiras fixas (como visto na Fig. 2.5) mas que apresenta aceleração de Fermi quando uma dependência temporal é introduzida [22], como mostra a Fig. 3.4 em que um crescimento tendencioso da velocidade da partícula v é observado ao longo da iteração n .

O motivo que faz com que apareça a aceleração de Fermi, como explicado na literatura [22], está relacionado à existência de uma curva separatriz. Ao se introduzir dependência temporal na fronteira a curva separatriz se transforma em uma estrutura conhecida como *stochastic layer*. Com isso, órbitas que antes da introdução da dependência

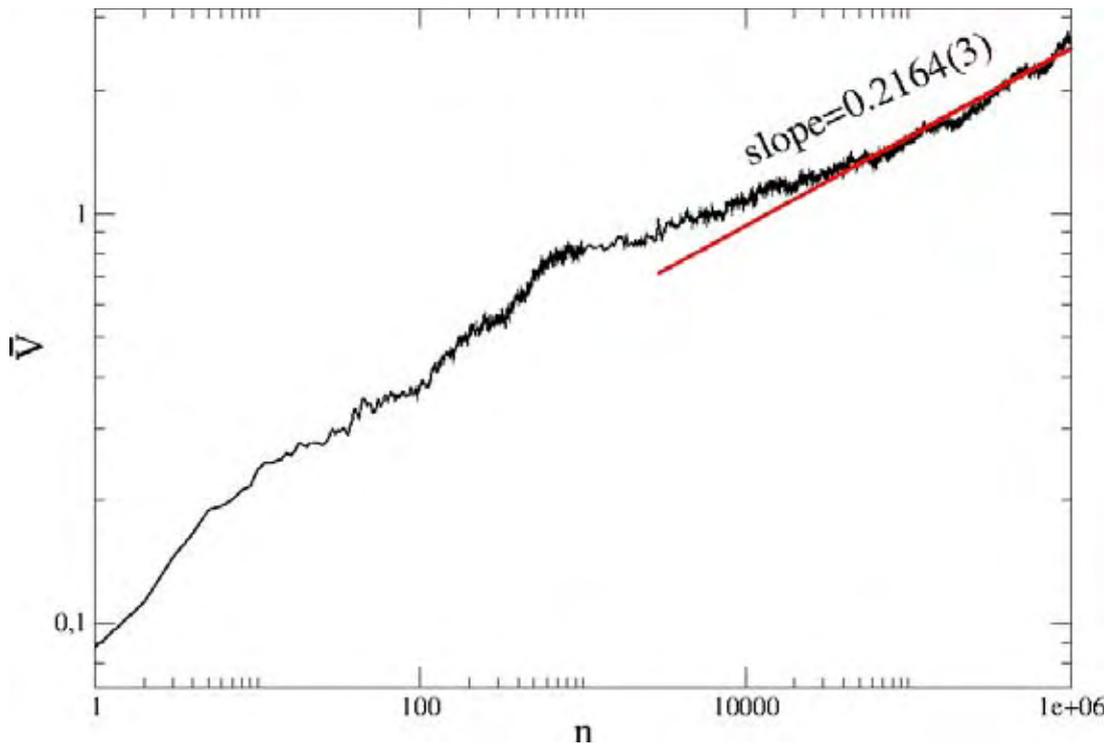


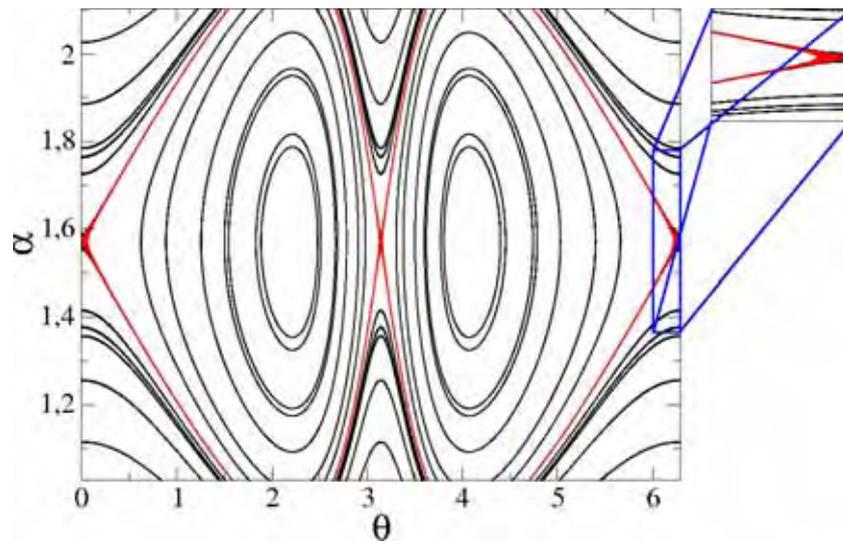
Figura 3.4: Velocidade média \bar{v} de um conjunto de 100 partículas com diferentes condições iniciais como função do número da iteração n . As condições iniciais foram obtidas a partir de uma grade 10×10 igualmente espaçada no intervalo dos possíveis valores de θ e α . Os parâmetros utilizados foram $a = 0,1$, $\varepsilon = 0$, $e = 0,6$ e $q = 1$. Um ajuste por lei de potência na figura forneceu um expoente $0,2164(3)$.

temporal pertenciam à região *librator* agora podem migrar para a região *rotator* e vice-versa. Essa mudança de regiões produz flutuações no observável f definido anteriormente no Cap. 2 o que leva à difusão na velocidade produzindo assim a condição necessária para se observar aceleração de Fermi.

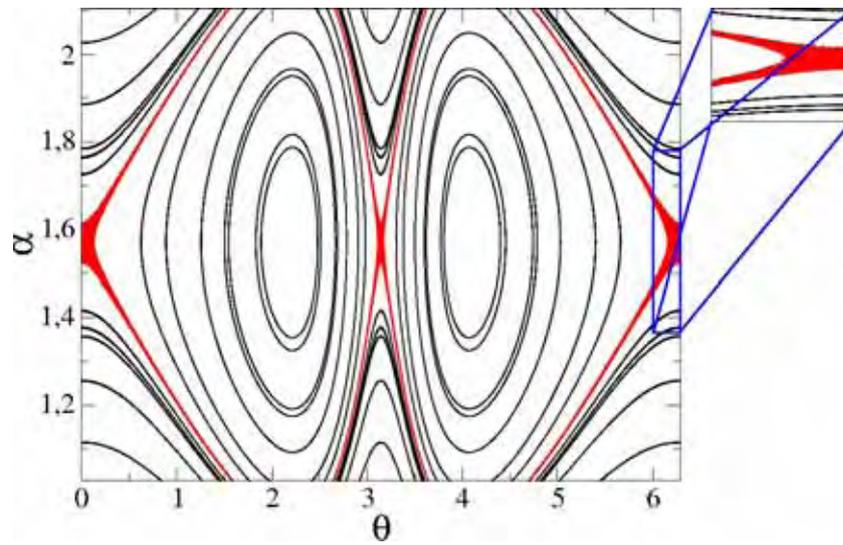
A Fig. 3.5 mostra uma projeção do espaço de fases nas variáveis α e θ para o bilhar elíptico dependente do tempo em que é possível observar o surgimento de caos nas proximidades da órbita separatriz conforme aumentamos a magnitude da perturbação a .

Na verdade, para que ocorra crescimento na velocidade da partícula, acredita-se que sua trajetória deve cruzar a *stochastic layer* [22]. Para fundamentar essa afirmação, mostramos na Fig. 3.6 uma comparação entre a velocidade da partícula v , o produto entre o momento angular calculado em relação aos dois focos da elipse f definido na Eq. (2.36) e o “sentido de rotação” da partícula medido pela grandeza \vec{l} , definida como

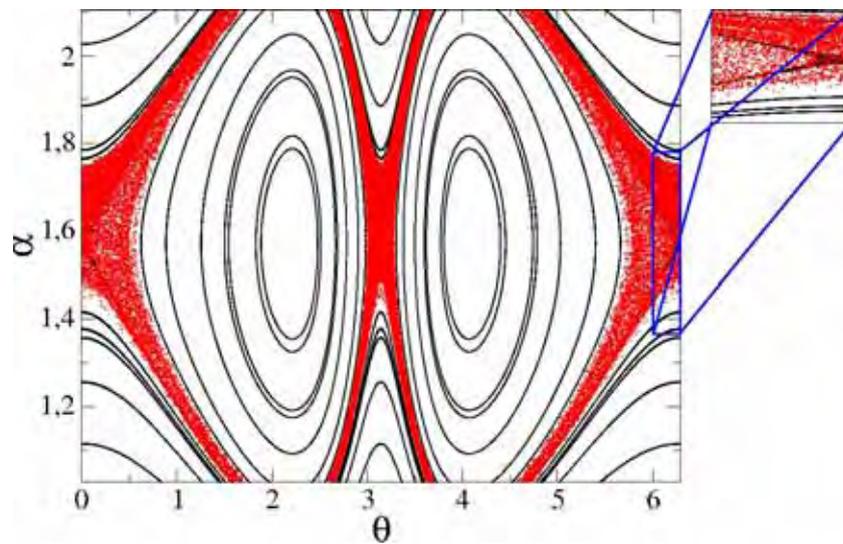
$$\begin{aligned} \vec{l} &= \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|} = \frac{m}{|\vec{L}|} \vec{r}_n \times \vec{v}_n, \\ &= \frac{m|\vec{v}_n| R(\theta_n, t_n) [\cos(\theta_n) \sin(\alpha_n + \phi_n) - \sin(\theta_n) \cos(\alpha_n + \phi_n)]}{|\vec{L}|} \hat{k}. \end{aligned} \quad (3.30)$$



(a) $a = 1.0 \times 10^{-7}$



(b) $a = 1.0 \times 10^{-6}$



(c) $a = 1.0 \times 10^{-5}$

Figura 3.5: Projeção do espaço de fases do bilhar elíptico nas variáveis α e θ . A destruição da curva separatriz e o surgimento de uma *stochastic layer* podem ser observados conforme aumentamos o valor de a . Os outros parâmetros de controle foram mantidos constante $e = 0,6$, $\varepsilon = 0$ e $q = 1$.

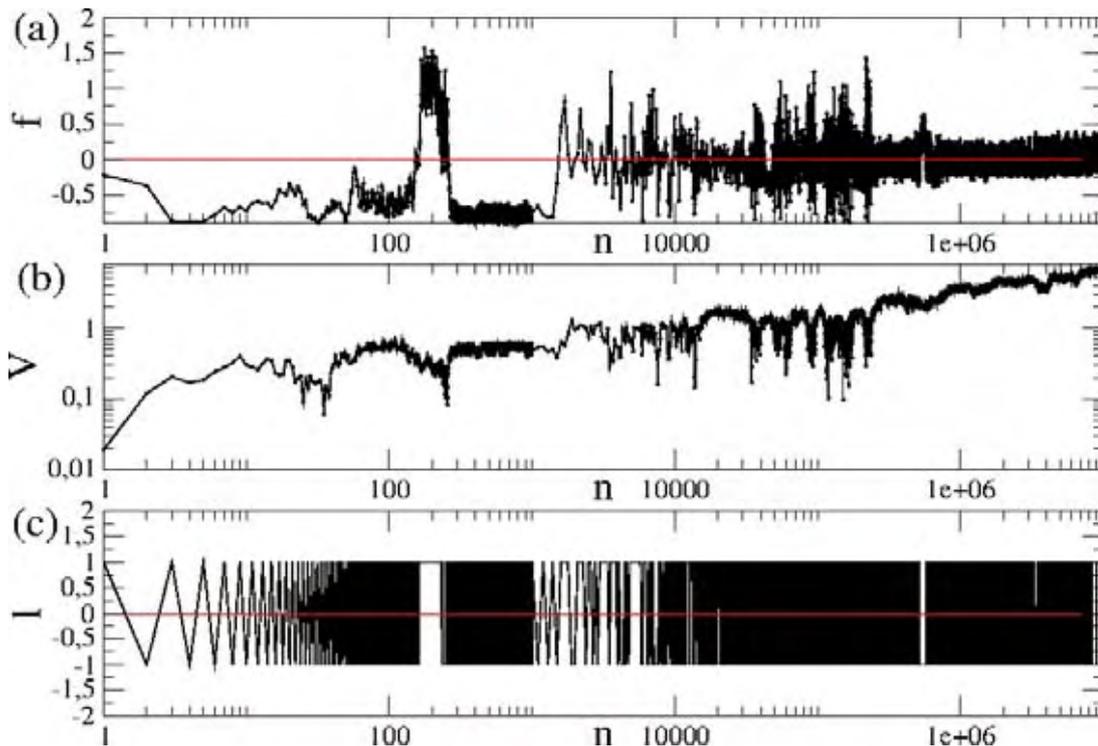


Figura 3.6: (a) Evolução do observável f em função do número de colisões n . (b) Evolução da velocidade em função do número de colisões n para uma única partícula com $v_n = 0,01$. (c) Evolução do observável l em função do número de colisões. Os parâmetros utilizados para construção dessas figuras foram $a = 0,1$, $e = 0,6$, $\varepsilon = 0$ e $q = 1$.

Aqui \vec{L} é o momento angular medido em um eixo perpendicular ao plano formado pela fronteira do bilhar que passa por sua origem e \vec{r}_n e \vec{v}_n são respectivamente a posição e velocidade da partícula em cada colisão, definidos pelas Eqs. (3.7) e (3.12).

É importante destacar que m , $|\vec{v}_n|$ e $R(\theta_n, t_n)$ serão sempre positivos, o que nos leva a concluir que o sinal de l depende apenas do restante da expressão. Como ela está dividida pelo seu próprio módulo, o resultado será $l = 1$ se a partícula estiver “girando” no sentido anti-horário e $l = -1$ no sentido horário.

Observando a Fig. 3.6 podemos concluir que a maior parte dos saltos de velocidade que a partícula realiza estão relacionados com um cruzamento pelo valor de $f = 0$, correspondendo então a uma visita à região da *stochastic layer*.

3.3.3 Bilhar ovoide

O bilhar ovoide é um dos bilhares que possui caos em sua dinâmica com fronteira fixa e seguindo a conjectura LRA, é esperado que apresente aceleração de Fermi ao introduzirmos dependência temporal em sua fronteira.

Como uma maneira de confirmar a conjectura, apresentamos na Fig. 3.7 um gráfico

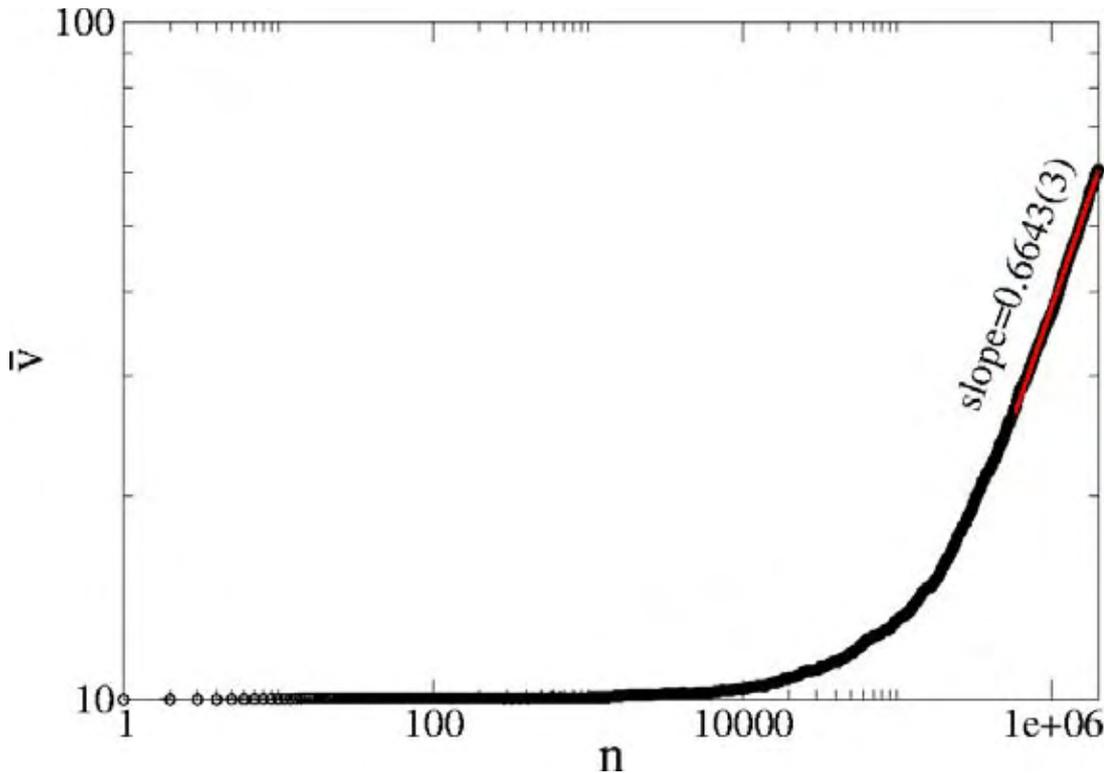


Figura 3.7: Velocidade média em função de n para o bilhar ovóide considerando 400 condições iniciais dadas em uma grade 20×20 igualmente espaçada no intervalo dos possíveis valores de θ e α . A velocidade inicial foi mantida $v_n = 10$ e os parâmetros de controle utilizados foram $b = 0,1$, $\varepsilon = 0,21$, $e = 0$ e $p = 2$.

da velocidade média \bar{v} como função do número de colisões n utilizando um ensemble de 1600 condições iniciais diferentes e percebemos uma tendência de crescimento da velocidade ainda maior comparada ao bilhar elíptico. Os parâmetros de controle utilizados na simulação foram $b = 0,1$, $\varepsilon = 0,21$, $e = 0$ e $p = 2$.

Recentemente foi mostrado por hipóteses de escala que o comportamento da velocidade média desse bilhar independe da escala que observamos [14].

3.3.4 Bilhar elíptico-ovoide

Assim como o bilhar ovoide, o elíptico-ovoide também deve apresentar aceleração de Fermi segundo a conjectura LRA.

Novamente, como uma maneira de confirmar a conjectura, apresentamos um gráfico da velocidade média \bar{v} como função do número de colisões n onde é possível perceber uma tendência de crescimento em lei de potência, com um expoente entre o encontrado para o bilhar elíptico e ovoide. Seria como se o comportamento desse modelo fosse uma média do comportamento dos outros dois.

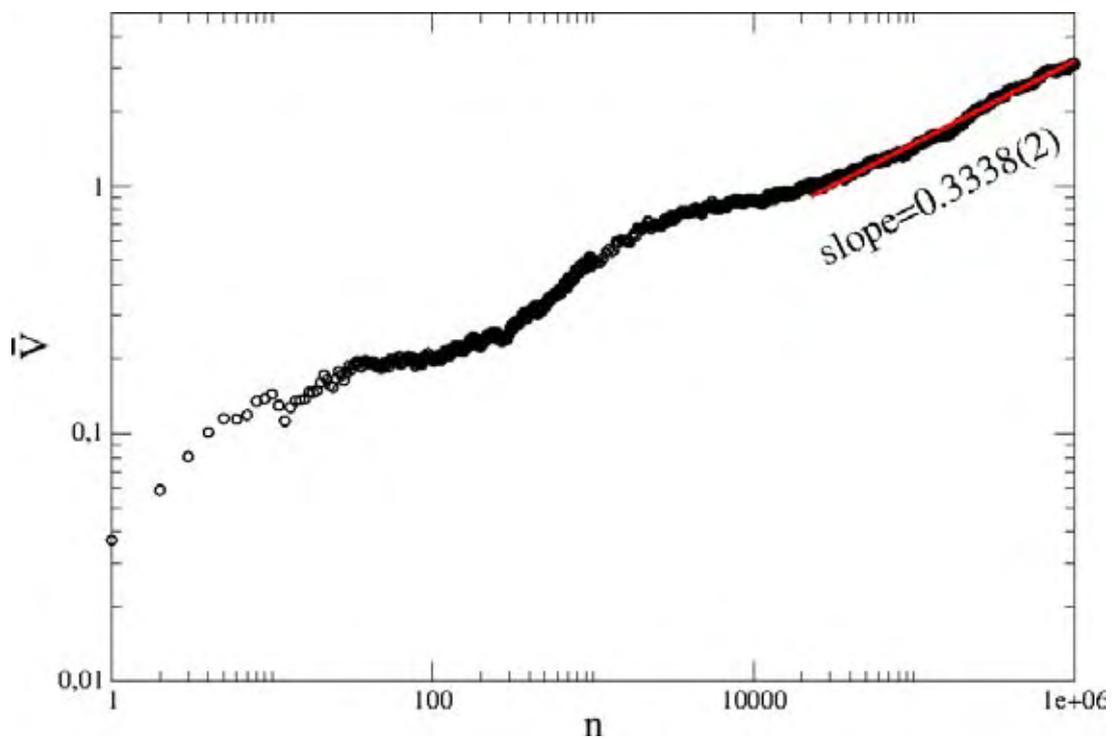


Figura 3.8: Velocidade média em função do número de colisões n da partícula com a fronteira para o bilhar elíptico-ovoide a partir de uma grade de 10×10 condições iniciais igualmente espaçadas no intervalo dos possíveis valores de θ e α . A velocidade inicial foi mantida constante $v_n = 0,01$ e os parâmetros de controle utilizados foram $a = b = 0,1$, $\varepsilon = 0,6$, $e = 0,2$ e $p = q = 1$.

CAPÍTULO 4

INTRODUZINDO DISSIPAÇÃO POR ARRASTO VISCOSO

Até então, ignoramos todos os possíveis atritos e forças que pudessem vir a retardar o movimento da partícula no interior do bilhar. Porém, sabemos que em todos os sistemas reais, por mais perfeitos que sejam, possuem algum tipo de atrito inerente que consome parte de sua energia mecânica.

Com o propósito de investigar as consequências da introdução de dissipação em nosso sistema, introduziremos um fluido (um gás) no interior da fronteira do bilhar que não irá interagir com ela, mas interagirá com a partícula, retirando parte de sua energia durante o voo.

A introdução de dissipação em bilhares tanto unidimensionais quanto bidimensionais continua sendo muito estudada [23, 24, 25, 26, 27, 28] devido a maior aproximação entre o modelo e a realidade, além é claro, de acarretar grandes mudanças na dinâmica do modelo.

A dissipação será introduzida através de uma força de arrasto viscoso na direção contrária ao movimento da partícula de módulo: (i) $F \propto -v$, (ii) $F \propto -v^2$ e (iii) $F \propto -v^\delta$ com $\delta \in (1, 2)$ e $v = |\vec{v}_n(t)|$ é o módulo da velocidade da partícula. É importante ressaltar que o método de obtenção das equações que descrevem o movimento da partícula é o mesmo do Capítulo 3. Portanto, nesse capítulo não repetiremos esse procedimento. Concentraremos

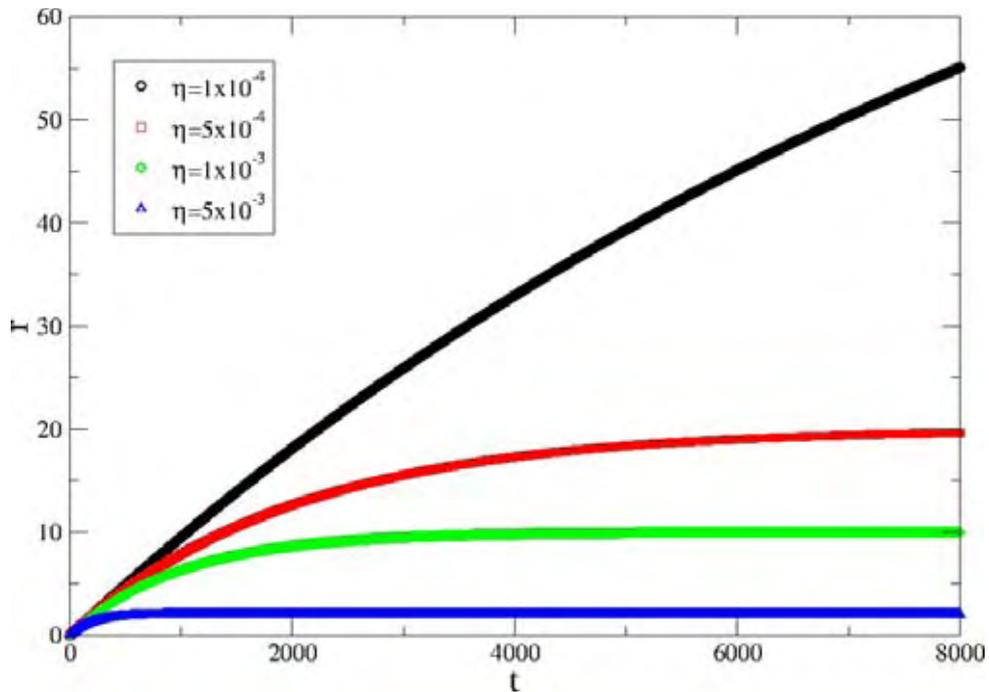


Figura 4.1: Gráfico da distância percorrida r obtido na Eq. (4.5) em função do tempo t para diferentes valores de η como ilustrado na própria figura.

em encontrar os termos afetados pela dissipação, ou seja, as expressões de $r(t)$ e $|\vec{v}_n(t)|$ necessárias nas Eqs. (3.7) e (3.12) respectivamente.

4.1 Dissipação através de uma força do tipo $F \propto -v$

Nessa seção consideraremos a força de dissipação dada por

$$F = -\eta'v, \quad (4.1)$$

na qual η' é uma constante de proporcionalidade que depende do fluido em que a partícula está imersa, conhecida como coeficiente de arrasto. Aplicando a segunda lei de Newton, chegamos em

$$\frac{dv}{dt} = -\eta v, \quad (4.2)$$

na qual $\eta = \eta'/m$. Integrando, chegamos na expressão para o módulo do vetor velocidade da partícula

$$v(t) = v_n e^{-\eta t}, \quad (4.3)$$

em que $v_n = |\vec{v}_n(0)|$ é o módulo da velocidade da partícula imediatamente após a colisão com a fronteira e t é o tempo medido a partir de uma colisão.

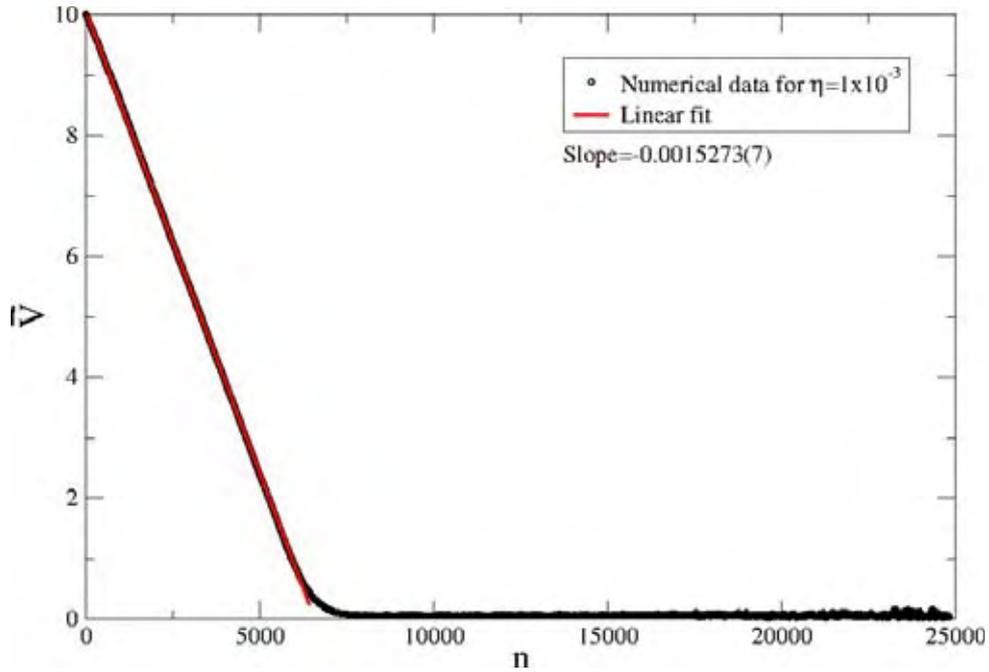


Figura 4.2: Gráfico da velocidade média ao longo das colisões para um ensemble de 100 partículas igualmente espaçadas no intervalo $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\alpha \in [0, \pi]$ em um bilhar ovoide com dependência temporal e dissipação no voo. A velocidade inicial dada foi $v_n = 10$ e os parâmetros de controle utilizados na simulação foram $\eta = 0,001$, $p = 3$, $a = b = 0,1$, $e = 0$ e $\varepsilon = 0,1$. Um ajuste linear foi feito na região do decaimento resultando em uma inclinação $-0,0015273(7)$.

A partir da Eq. (4.3) podemos escrever o vetor velocidade da partícula como

$$\vec{v}_n(t) = v_n e^{-\eta t} [\cos(\alpha_n + \phi_n) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\alpha_n + \phi_n) \hat{\mathbf{j}}]. \quad (4.4)$$

Para obtermos a equação que descreve a distância percorrida $r(t)$ devemos integrar a Eq. (4.3), o que nos leva a

$$r(t) = \frac{v_n}{\eta} [1 - e^{-\eta t}]. \quad (4.5)$$

A Fig. 4.1 mostra um gráfico de r em função do tempo t para vários valores de η conforme ilustrado na própria figura. É possível concluir que quanto maior o valor de η , menor o alcance r da partícula. Podemos concluir também que dependendo da velocidade com que a partícula sai de uma colisão e do coeficiente de arrasto, ela eventualmente pode parar durante sua trajetória entre colisões já que quando t se torna suficientemente grande, $r(t) \rightarrow v_n/\eta$.

Substituindo a Eq. (4.5) na Eq. (3.7) chegamos ao vetor posição da partícula dado pela equação

$$\begin{aligned} \vec{r}_n(t) &= [x_n(\theta_n, t_n) + \frac{v_n}{\eta} [1 - e^{-\eta t}] \cos(\alpha_n + \phi_n)] \hat{\mathbf{i}} \\ &+ [y_n(\theta_n, t_n) + \frac{v_n}{\eta} [1 - e^{-\eta t}] \sin(\alpha_n + \phi_n)] \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

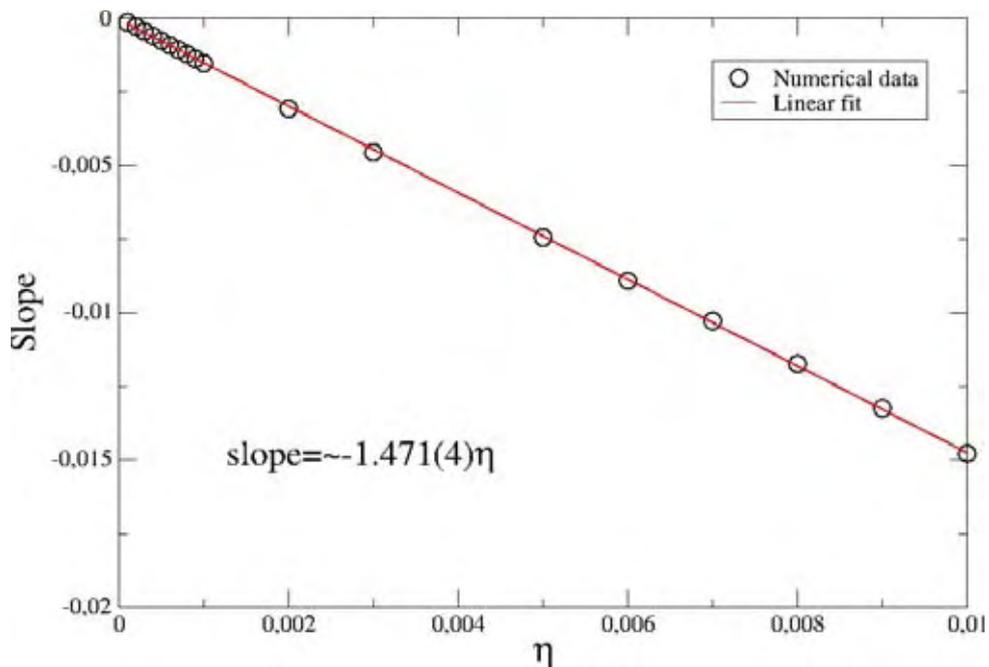


Figura 4.3: Slope de decaimento em função de η utilizando os mesmos parâmetros de controle da Fig. 4.2 e mantendo a velocidade inicial $v_n = 10$.

De posse das equações que descrevem a dinâmica do bilhar, podemos estudar as consequências que a dissipação acarreta. A Fig. 4.2 mostra um gráfico da velocidade média \bar{v} de um conjunto de partículas em função do número de colisões n do mapa que descreve esse movimento. É possível observar um decaimento linear até que as partículas cheguem a uma velocidade $v \approx 0$ e permaneçam até começarem a parar. Por volta da colisão 25000 todas as partículas param.

Já a Fig. 4.3 mostra um ajuste linear para várias inclinações (*slope*) obtidas como a da Fig. 4.2 variando o parâmetro de controle η . O resultado do ajuste foi uma equação de reta do tipo $y \simeq -1.471(4)\eta$.

4.2 Dissipação através de uma força do tipo $F \propto -v^2$

Agora trataremos um bilhar cuja partícula está sujeita a uma força $F \propto -v^2$. Da mesma maneira, eliminando a proporcionalidade encontramos

$$F(t) = -\eta'v^2. \quad (4.7)$$

Aplicando a segunda lei de Newton e integrando chegamos na expressão da velocidade da partícula

$$v(t) = \frac{v_n}{1 + \eta v_n t}, \quad (4.8)$$

em que $\eta = \eta'/m$. Podemos substituir essa expressão na Eq. (3.12) para obtermos o vetor velocidade da partícula

$$\vec{v}_n(t) = \frac{v_n}{1 + \eta v_n t} [\cos(\alpha_n + \phi_n) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\alpha_n + \phi_n) \hat{\mathbf{j}}]. \quad (4.9)$$

Integrando novamente a Eq. (4.8), encontramos a equação da trajetória, que será dada por

$$r(t) = \frac{1}{\eta} \ln[1 + \eta v_n t], \quad (4.10)$$

que novamente pode ser substituída na Eq. (3.7), o que nos leva ao vetor posição que descreve a trajetória da partícula

$$\begin{aligned} \vec{r}_n(t) &= [x_n(\theta_n, t_n) + \frac{1}{\eta} \ln[1 + \eta v_n t] \cos(\alpha_n + \phi_n)] \hat{\mathbf{i}} \\ &+ [y_n(\theta_n, t_n) + \frac{1}{\eta} \ln[1 + \eta v_n t] \sin(\alpha_n + \phi_n)] \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Novamente, temos todas as equações que descrevem a trajetória da partícula e podemos retirar algumas conclusões. Olhando para a Eq. (4.10) é fácil ver que conforme o tempo t passa, diferentemente do caso anterior $r(t)$ também cresce, o que faz com que nesse caso a partícula não pare durante sua viagem. Outro fato importante é que diferentemente do caso apresentado na Seção 4.1 em que o decaimento na velocidade da partícula era linear, para esse tipo de dissipação o decaimento é exponencial, como mostra a Fig. 4.4. Nenhuma das 81 partículas lançadas parou seu movimento até a colisão 1×10^5 .

A Fig. 4.5 (a) mostra três curvas para a velocidade média \bar{v} de um ensemble de 1600 partículas não interagentes em função do número de colisões n com a fronteira. Baseado nessa figura, podemos estabelecer algumas hipóteses de escala [29]:

1. Quando $n \ll n_x$, em que n_x é o número de colisões de *crossover* definido quando ocorre uma mudança de regime de crescimento em lei de potência para saturação linear, a velocidade média \bar{v} cresce de acordo com

$$\bar{v}(n, \eta) \propto n^\beta, \quad (4.12)$$

em que β é um expoente crítico de crescimento.

2. A medida que o número de colisões com a fronteira n aumenta, $n \gg n_x$, a velocidade média se aproxima da saturação de acordo com

$$\bar{v}_{sat}(\eta) \propto \eta^\gamma, \quad (4.13)$$

na qual γ é um expoente crítico de saturação.

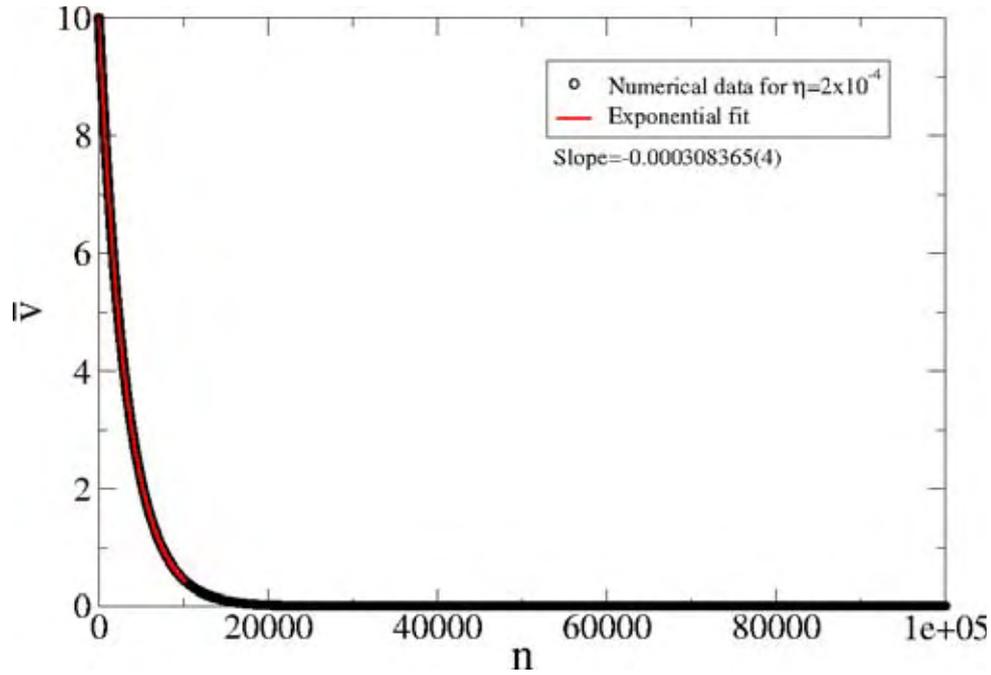


Figura 4.4: (a) Velocidade média \bar{v} em função de n para um ensemble de 81 partículas. Pudemos observar que o decaimento da velocidade é exponencial para esse tipo de dissipação através de um ajuste que resultou expoente $-0,000308365(4)$. Os parâmetros de controle utilizados foram $b = 0,1$, $p = 3$, $e = 0$, $\varepsilon = 0,1$, $v_n = 10$ e $\eta = 2 \times 10^{-4}$.

3. O número de colisões de *crossover* que marca a mudança de comportamento é descrito como

$$n_x \propto \eta^z, \quad (4.14)$$

e z faz o papel de um expoente dinâmico de *crossover*.

Após considerar essas três suposições iniciais podemos descrever a velocidade média em termos de uma função de escala do tipo

$$\bar{v}(n, \eta) = \ell \bar{v}(\ell^c n, \ell^d \eta), \quad (4.15)$$

na qual ℓ é um fator de escala, c e d são expoentes de escala. Um aspecto importante que deve ser observado é que os fatores de escala c e d devem estar relacionados aos expoentes característicos γ, β e z . Escolhendo $\ell^c n = 1$, chegamos em $\ell = n^{-1/c}$ e podemos reescrever a Eq. (4.15) como

$$\bar{v}(n, \eta) = n^{-1/c} \bar{v}_1(n^{-d/c} \eta), \quad (4.16)$$

em que $\bar{v}_1(n^{-d/c} \eta) = \bar{v}(1, n^{-d/c} \eta)$ é assumido ser constante para $n \gg n_x$. Considerando as Eqs. (4.12) e (4.16), obtemos $\beta = -1/c$.

Se escolhermos $\ell^d \eta = 1$, temos $\ell = \eta^{-1/d}$ e a Eq. (4.15) se torna

$$\bar{v}(n, \eta) = \eta^{-1/d} \bar{v}_2(\eta^{-c/d} n), \quad (4.17)$$

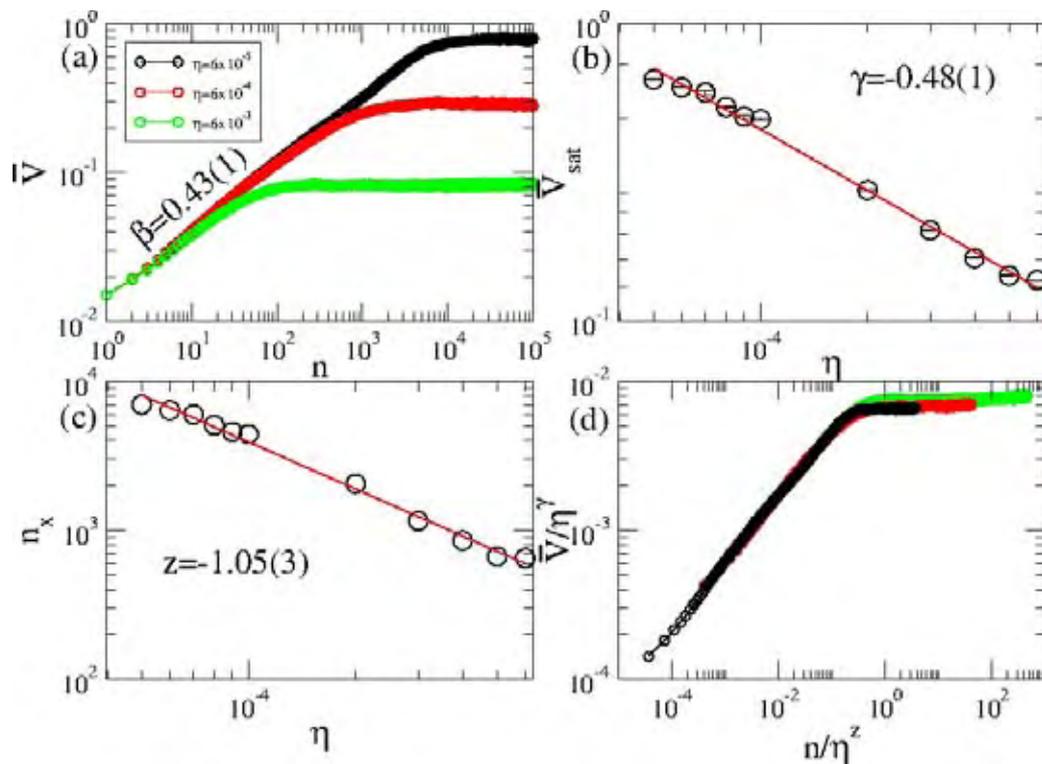


Figura 4.5: (a) Velocidade média em função de n para um ensemble de 1600 partículas com velocidade inicial $v_n = 10^{-2}$. (b) e (c) são os expoentes críticos obtidos a partir de ajustes por lei de potência. (d) Gráfico de todas as curvas se sobrepondo em uma única universal, validando as hipóteses de escala. Os parâmetros utilizados para construção das figuras foram $v_n = 0,01$, $b = 0,1$, $e = 0$, $p = 3$ e $\varepsilon = 0,1$.

na qual a função \bar{v}_2 é definida como $\bar{v}_2(\eta^{-c/d}n) = \bar{v}(\eta^{-c/d}n, 1)$ que também será assumida constante para $n \gg n_x$. Comparando as Eqs. (4.13) e (4.17) temos que $\gamma = -1/d$. A partir dos dois valores de ℓ , encontramos o expoente dinâmico z que será

$$z = \frac{\gamma}{\beta}. \quad (4.18)$$

Todos os expoentes de escalas são determinados se os expoentes γ e β forem obtidos numericamente. O expoente de crescimento β é obtido através de uma média extraída por ajuste em lei de potência na curva da velocidade média [Fig. 4.5(a)], na região em que $n \ll n_x$. Em nosso caso, o valor médio obtido foi $\beta = 0,43(1)$. Na Fig. 4.5 mostramos também o comportamento de (b) \bar{v}_{sat} versus η e (c) n_x versus η . A partir de um ajuste em lei de potência aplicado na Fig. 4.5(b) e 4.5(c) encontramos $\gamma = -0,48(1)$ e $z = -1,05(3)$. Outro modo de se obter o valor do expoente z é considerando a Eq. (4.18) e o valor de γ e β . Isso nos leva a $z = -1,12(5)$, que está razoavelmente em bom acordo com o resultado analítico.

Dados os valores dos expoentes de escala γ , β e z podemos verificar nossas hipóteses. Uma verificação final da validade de nossos argumentos de escala pode ser vista na Fig.

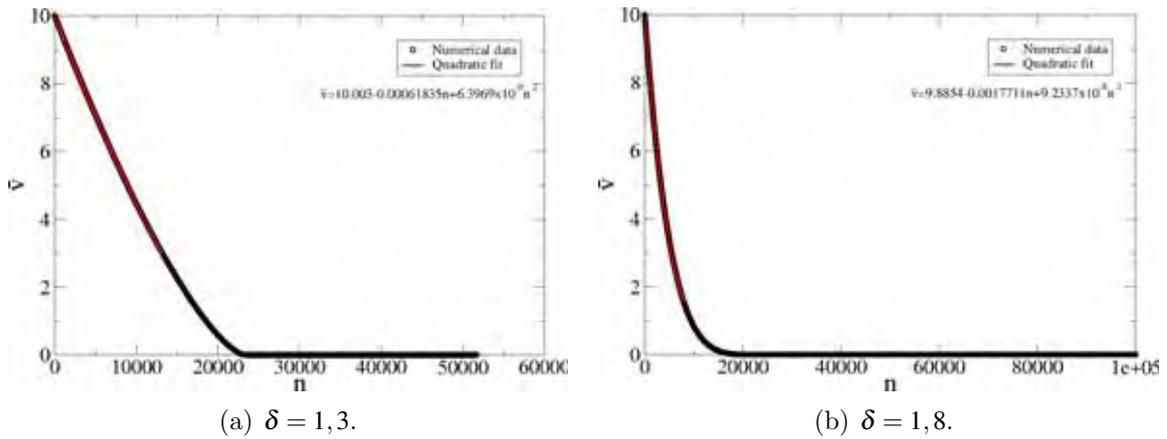


Figura 4.6: Velocidade média em função do número de colisões n para um ensemble de 144 partículas sujeitas a dissipação durante o voo do tipo $F \propto -v^\delta$ para dois valores de δ ilustrados na figura. Pudemos observar que o decaimento da velocidade é quadrático para esse tipo de dissipação através de um ajuste. Os parâmetros de controle utilizados foram $b = 0,1$, $p = 3$, $e = 0$, $\varepsilon = 0,1$, $v_n = 10$ e $\eta = 2 \times 10^{-4}$.

4.5 (d), na qual três diferentes curvas da velocidade média se sobrepuseram em uma única curva universal.

4.3 Dissipação através de uma força do tipo $F \propto -v^\delta$

Por último trataremos um bilhar cuja partícula está sujeita a uma força $F \propto -v^\delta$, com $\delta \in (1,2)$. De maneira análoga, podemos eliminar a proporcionalidade fazendo

$$F(t) = -\eta'v^\delta. \quad (4.19)$$

Dessa vez, aplicando a segunda lei de Newton e integrando chegamos na expressão

$$v(t) = \left[v_n^{1-\delta} - \eta t(1-\delta) \right]^{\frac{1}{1-\delta}}, \quad (4.20)$$

que pode ser substituída na Eq. (3.12) para obtermos o vetor velocidade da partícula, que será

$$\vec{v}_n(t) = \left[v_n^{1-\delta} - \eta t(1-\delta) \right]^{\frac{1}{1-\delta}} \left[\cos(\alpha_n + \phi_n) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\alpha_n + \phi_n) \hat{\mathbf{j}} \right]. \quad (4.21)$$

Integrando novamente em relação ao tempo a Eq. (4.20), encontramos a equação da distância percorrida pela partícula como

$$r(t) = \frac{v_n^{2-\delta}}{\eta(2-\delta)} - \frac{[v_n^{1-\delta} - \eta t(1-\delta)]^{\frac{2-\delta}{1-\delta}}}{\eta(2-\delta)}, \quad (4.22)$$

que pode ser substituída na Eq. (3.7), o que nos leva ao vetor posição que descreve a

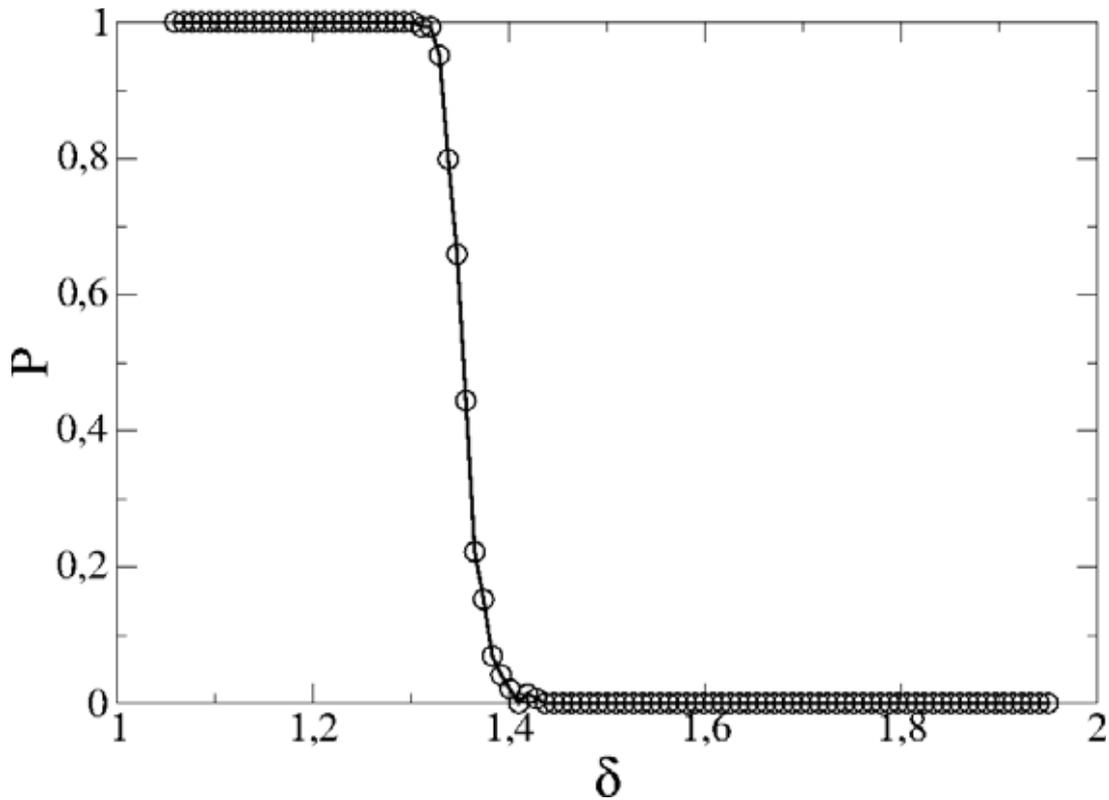


Figura 4.7: Probabilidade de sobrevivência P das partículas em função do parâmetro δ para uma força de dissipação do tipo $F \propto -v^\delta$. Os parâmetros de controle utilizados foram $p = 3$, $\varepsilon = 0,1$, $b = 10^{-3}$ e $v_n = 10$.

trajetória da partícula

$$\begin{aligned} \vec{r}_n(t) = & \left[x_n(\theta_n, t_n) + \left[\frac{v_n^{2-\delta}}{\eta(2-\delta)} - \frac{[v_n^{1-\delta} - \eta t(1-\delta)]^{\frac{2-\delta}{1-\delta}}}{\eta(2-\delta)} \right] \cos(\alpha_n + \phi_n) \right] \hat{\mathbf{i}} \\ & + \left[y_n(\theta_n, t_n) + \left[\frac{v_n^{2-\delta}}{\eta(2-\delta)} - \frac{[v_n^{1-\delta} - \eta t(1-\delta)]^{\frac{2-\delta}{1-\delta}}}{\eta(2-\delta)} \right] \sin(\alpha_n + \phi_n) \right] \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Novamente, depois de encontrar todas as equações que descrevem a dinâmica do bilhar podemos estudar as consequências que uma dissipação desse tipo acarreta. A Fig. 4.6 mostra o decaimento da velocidade média \bar{v} tomada sobre um conjunto de 144 partículas não interagentes. Na Fig. 4.6(a) foi utilizado $\delta = 1,3$ e observamos que o decaimento da velocidade segue uma função quadrática de equação $\bar{v} = 10,003 - 0,00061835n + 6,3969 \times 10^{-9}n^2$. Além disso, para esse valor de δ todas as partículas pararam até por volta da colisão 50000. Na Fig. 4.6(b) foi utilizado $\delta = 1,8$ e o decaimento encontrado também segue uma função quadrática, só que dessa vez de equação $\bar{v} = 9,8854 - 0,0017711n + 9,2337 \times 10^{-8}n^2$. Para esse caso, nenhuma partícula parou até a colisão considerada (10^5).

Pensando nisso, a Fig. 4.7 mostra um gráfico da probabilidade de sobrevivência

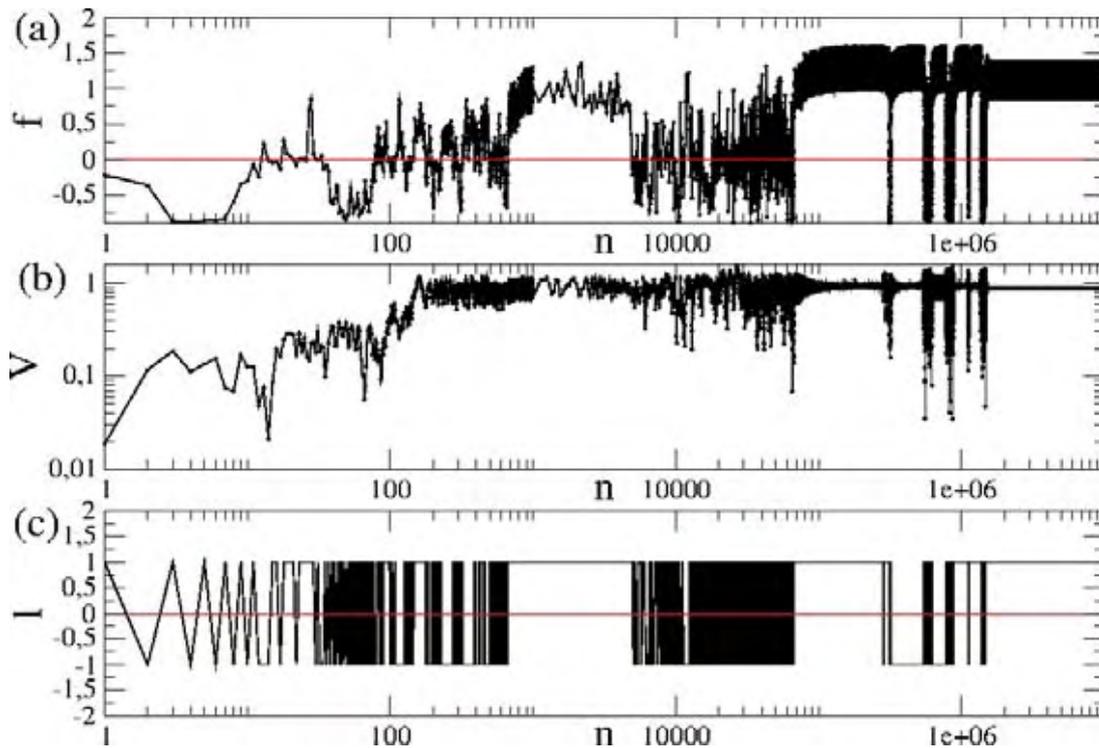


Figura 4.8: (a) Evolução do observável f em função do número de colisões n . (b) Evolução da velocidade em função do número de colisões n para uma única partícula com velocidade inicial $v_n = 10^{-2}$. (c) Evolução do observável l em função do número de colisões. Os parâmetros utilizados para construção dessas figuras foram $a = b = 0,1$, $e = 0,6$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 1 \times 10^{-4}$ e $q = 1$.

P das partículas em função do parâmetro δ obtida através de uma porcentagem entre quantas partículas pararam e quantas não pararam seu movimento conforme variamos o valor de δ . Dessa forma, $P = 1$ significa que todas as partículas pararam, $P = 0$ nenhuma parou e um valor intermediário a porcentagem de quantas pararam. A partir desse gráfico é possível concluir que ocorre uma transição entre interrupção (morte da dinâmica) e não-interrupção do movimento da partícula para $\delta \approx 1,48$.

Para o caso dissipativo também podemos fazer uma análise do observável f definido no Capítulo 2 e do módulo do vetor momento angular l definido do Capítulo 3. Isso foi feito na Fig. 4.8 na qual é possível ver que o crescimento da velocidade da partícula v está relacionado com o cruzamento por $f = 0$ o que significa uma visita à região da *stochastic layer*. Para $n \approx 2 \times 10^6$ a velocidade estabiliza e nenhum cruzamento por $f = 0$ é observado depois disso levando portanto a uma supressão da aceleração de Fermi.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesse trabalho, investigamos o fenômeno conhecido na literatura como aceleração de Fermi aplicado em um bilhar bidimensional.

Mostramos quais configurações levam o bilhar elíptico-ovoide a possuir aceleração de Fermi. De início, fizemos isso utilizando a conjectura LRA e explicamos a aceleração no bilhar ovoide e no elíptico-ovoide. Para o bilhar elíptico, a conjectura LRA não se aplica. Foi então que apresentamos sua extensão, proposta por Leonel[13], na qual o bilhar elíptico se enquadra. Estabelecemos também relações entre a aceleração de Fermi e alguns observáveis da dinâmica (f, l) para esse bilhar. Concluímos que a grandeza f , que representa o produto entre o momento angular calculado com relação aos dois focos da elipse, troca de sinal durante os instantes em que a velocidade da partícula mais cresce. Isso indica que durante o fenômeno de aceleração, a partícula cruza com maior frequência a região conhecida como *stochastic layer* definida na Fig. 3.5. Por outro lado, o módulo do versor momento angular da partícula (l) não se mostrou eficiente para estabelecermos qualquer tipo de relação entre ele e a aceleração de Fermi.

Mostramos também que o expoente de crescimento de velocidade para os bilhares que possuem aceleração de Fermi é diferente, sendo maior para o bilhar ovoide, intermediária para o elíptico-ovoide e menor para elíptico. Como o bilhar ovoide possui o maior expoente de crescimento e o elíptico o menor, acreditamos que o bilhar elíptico-ovoide também age como um híbrido no sentido de influenciar um expoente intermediário.

Quando a dissipação foi introduzida, para o caso (i) em que $F \propto -v$ observamos um

decaimento linear na velocidade da partícula além da possibilidade da partícula eventualmente parar. Já para o caso (ii) em que $F \propto -v^2$, o decaimento é exponencial e a partícula não para. Parece paradoxal pensarmos que no caso (ii) a partícula para e no caso (i) não já que a dissipação em (ii) é “maior”. Porém, a dissipação só é maior em (ii) quando o módulo da velocidade da partícula $|\vec{v}_n| > 1$. Quando $|\vec{v}_n| < 1$ o caso (i) apresenta uma maior dissipação comparado ao caso (ii).

No caso (iii) em que $F \propto -v^\delta$ com $\delta \in (1, 2)$ encontramos que o decaimento da velocidade da partícula obedece uma função quadrática. Quanto ao fato da partícula parar ou não, depende do valor de δ adotado. Para valores menores que $\delta \approx 1,48$ as partículas podem parar, enquanto que para valores maiores não. Para valores próximos de $\delta \approx 1,48$ uma fração das partículas para e outra não.

Para todos os tipos de dissipação introduzidos, observamos supressão da aceleração de Fermi. Isso mostra que a aceleração de Fermi não é um fenômeno estruturalmente estável (robusto).

Propusemos também hipóteses de escala para o caso (ii) na transição de fase que ocorre entre ganho ilimitado e limitado de energia para parâmetros de controle η pequenos. Encontramos os expoentes de escala e comprovamos nossas hipóteses com um perfeito colapso de várias curvas da velocidade média da partícula em uma única universal, mostrando que o sistema é invariante de escala.

Como perspectiva para esse projeto, uma explicação para a aceleração de Fermi usando a expressão do mapa que descreve a velocidade da partícula pode ser investigada. O que daria mais suporte a explicação apresentada.

APÊNDICE A – Cálculo da matriz jacobiana

A matriz jacobiana para o mapa da Eq. (2.35) é definida como

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

e os coeficientes da matriz obtidos a partir da derivada das equações do mapa são

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{[1 + \tan^2(\alpha_n + \phi_n) \frac{\partial \phi_n}{\partial \theta_n}] \psi + y'(\theta_n) - \tan(\alpha_n + \phi_n) x'(\theta_n)}{\gamma}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n} = - \frac{[1 + \tan^2(\alpha_n + \phi_n)] \psi}{\gamma}, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \theta_{n+1}} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial \phi_n}{\theta_n}, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \theta_{n+1}} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n} - 1. \quad (\text{A.5})$$

Foram definidos alguns termos auxiliares para simplificar as expressões. Há também termos dependentes de outras derivadas. Suas expressões são

$$\psi = R(\theta_{n+1}) \cos(\theta_{n+1}) - x(\theta_n), \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma = R(\theta_{n+1}) [\cos(\theta_{n+1}) + \sin(\theta_{n+1}) \tan(\alpha_n + \phi_n)] \quad (\text{A.7})$$

$$+ \frac{\partial R(\theta_{n+1})}{\partial \theta_{n+1}} [\sin(\theta_{n+1}) - \cos(\theta_{n+1}) \tan(\alpha_n + \phi_n)], \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{x'(\theta) y'(\theta) - y'(\theta) x'(\theta)}{[1 + (\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)})^2] x'(\theta)^2}. \quad (\text{A.9})$$

A partir do conhecimento da matriz jacobiana J , podemos calcular seu determinante

$$\det(J) = - \frac{y'(\theta_n) - x'(\theta_n) \tan(\phi_n + \alpha_n)}{y'(\theta_{n+1}) - x'(\theta_{n+1}) \tan(\phi_n + \alpha_n)}. \quad (\text{A.10})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. Boston - MA: Addison Wesley, 1980.
- [2] MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. São Paulo - SP: Editora Livraria da Física, 2006.
- [3] POINCARÉ, H.; MAGINI, R. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. *Il Nuovo Cimento (1895-1900)*, Springer, v. 10, n. 1, p. 128–130, 1899.
- [4] FERRARA-FIEDLER, N.; PRADO, C. P. C. Caos: uma introdução. *Edgard Blücher Ltda. São Paulo-SP*, 1994.
- [5] BIRKHOFF, G. D. *Dynamical systems*. New York - NY: Amer Mathematical Society, 1927.
- [6] FERMI, E. On the origin of the cosmic radiation. *Physical Review*, APS, v. 75, n. 8, p. 1169, 1949.
- [7] ULAM, S. M. On some statistical properties of dynamical systems. In: *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley - CA: University of California. v. 3, p. 315–320.
- [8] PUSTYL'NIKOV, L. D. On ulam's problem. *Theoretical and Mathematical Physics*, Springer, v. 57, n. 1, p. 1035–1038, 1983.
- [9] LEONEL, E. D.; MARINHO, E. P. Fermi acceleration with memory-dependent excitation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 388, n. 24, p. 4927–4935, 2009.
- [10] LEONEL, E. D.; SILVA, M. R. A bouncing ball model with two nonlinearities: a prototype for fermi acceleration. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 41, n. 1, p. 015104, 2007.
- [11] LICHTENBERG, A.; LIEBERMAN, M.; COHEN, R. Fermi acceleration revisited. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 1, n. 3, p. 291–305, 1980.

- [12] BERRY, M. V. Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular 'billiard'. *European Journal of Physics*, v. 2, n. 2, p. 91, 1981.
- [13] LEONEL, E. D.; BUNIMOVICH, L. A. Suppressing fermi acceleration in a driven elliptical billiard. *Physical Review Letters*, APS, v. 104, n. 22, p. 224101, 2010.
- [14] OLIVEIRA, D. F. M. *Bilhares dependentes do tempo: um mecanismo para suprimir aceleração de Fermi*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Unesp Rio Claro, 2009.
- [15] OLIVEIRA, D. F. M.; LEONEL, E. D. On the dynamical properties of an elliptical-oval billiard with static boundary. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 15, n. 4, p. 1092–1102, 2010.
- [16] CHERNOV, N.; MARKARIAN, R. *Chaotic billiards*. Providence - RI: Amer Mathematical Society, 2006.
- [17] STROGATZ, S. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Perseus Books Group, 2001.
- [18] ECKMANN, J. P. et al. Liapunov exponents from time series. *Physical Review A*, v. 34, n. 6, p. 4971–4979, 1986.
- [19] ALMEIDA, A. M. O. D. *Hamiltonian systems: Chaos and quantization*. New York - NY: Cambridge University Press, 1990.
- [20] LOSKUTOV, A.; RYABOV, A. B.; AKINSHIN, L. G. Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 33, n. 44, p. 7973, 2000.
- [21] KOILLER, J. et al. Static and time-dependent perturbations of the classical elliptical billiard. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 83, n. 1, p. 127–143, 1996.
- [22] LENZ, F.; DIAKONOS, F. K.; SCHMELCHER, P. Tunable fermi acceleration in the driven elliptical billiard. *Physical Review Letters*, APS, v. 100, n. 1, p. 14103, 2008.
- [23] LIVORATI, A. L. P.; LADEIRA, D. G.; LEONEL, E. D. Scaling investigation of fermi acceleration on a dissipative bouncer model. *Physical Review E*, APS, v. 78, n. 5, p. 056205, 2008.
- [24] PETRI, C. et al. Particle focusing in oscillating dissipative billiards. *Physical Review E*, APS, v. 82, n. 3, p. 035204, 2010.
- [25] OLIVEIRA, D. F. M.; LEONEL, E. D. Boundary crisis and suppression of fermi acceleration in a dissipative two-dimensional non-integrable time-dependent billiard. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 374, n. 30, p. 3016–3020, 2010.
- [26] OLIVEIRA, D. F. M.; LEONEL, E. D. Suppressing fermi acceleration in a two-dimensional non-integrable time-dependent oval-shaped billiard with inelastic collisions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 389, n. 5, p. 1009–1020, 2010.

-
- [27] LEONEL, E. D.; BUNIMOVICH, L. A. Suppressing fermi acceleration in two-dimensional driven billiards. *Physical Review E*, APS, v. 82, n. 1, p. 016202, 2010.
- [28] TAVARES, D. F.; LEONEL, E. D.; FILHO, R. N. C. Non-uniform drag force on the fermi accelerator model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, 2012.
- [29] OLIVEIRA, J. A. de; BIZÃO, R. A.; LEONEL, E. D. Finding critical exponents for two-dimensional hamiltonian maps. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 81, p. 046212, 2010.