UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

O Livro "THÉORIE DES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES ET DU CALCUL ABRÉGÉ" de Agliberto Xavier

Fabiane Cristina Höpner Noguti

Orientador: Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosóficos Científicos para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2005

510.09 Noguti, Fabiane Cristina Höpner
N778L O livro "Théorie des approximations numériques et du calcul abrégé" de Agliberto Xavier / Fabiane Cristina Höpner Noguti. – Rio Claro : [s.n.], 2005
130 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Marcos Vieira Teixeira

1. Matemática – História. 2. Cálculo numérico. 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Sumário

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma análise do livro escrito pelo Prof. Agliberto Xavier, intitulado *Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé*, publicado na França em 1909. Considerando que são poucos os documentos que versam a respeito do desenvolvimento do Cálculo Numérico no Brasil, decidimos por analisar um período na História do Ensino de Cálculo Numérico, mediante o livro de Agliberto Xavier. O referido livro é fonte primária e, portanto, essencial para o desenvolvimento deste trabalho.

A proposta foi desenvolvida por meio de uma pesquisa histórico-documental, realizada na Biblioteca da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC/USP), na Biblioteca do Instituto de Ciências Matemáticas e da Computação (ICMC/USP); na Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística (IME/USP), no Museu Casa Benjamin Constant, e no NUDOM - Núcleo de Documentação do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro.

Este trabalho inclui uma análise do livro feita através de uma descrição do conteúdo exposto pelo autor, e comentários ao final de cada capítulo, de forma a compreender os passos utilizados pelo mesmo.

Abstract

The aim of this work is to present an analysis of the book written by Prof. Agliberto Xavier, entitled *Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé*, published in France in 1909. Considering that there are few documents regarding the development of the Numerical Methods in Brazil, we have decided to analyze a period in the History of Numerical Methods Teaching, using the book of Agliberto Xavier. The related book is primary source, therefore, essential for the development of this work.

The proposal was developed by a historical analyses of documents found in the library of the Escola de Engenharia de São Carlos (EESC/USP), in the library of the Instituto de Ciências Matematicas e da Computação (ICMC/USP); in the library of the Instituto de Matemática e Estatística (IME/USP), in the Museum Casa Benjamin Constant, and in the NUDOM - Nucleus of Documentation of the Colégio Pedro II, in Rio de Janeiro.

This work includes an analysis of the book made through a description of the content displayed by the author, and commentaries at the end of each chapter. With these commentaries we believe that the reading will be easier.

Agradecimentos

Ao Prof. Marcos Vieira Teixeira, pela valiosa orientação, amizade e incentivo dispensados durante o desenvolvimento do trabalho.

Aos professores e colegas da Unesp pela amizade, troca de experiências e sugestões.

À professora Alice Libardi, pelas inúmeras caronas para Rio Claro.

Às bibliotecárias do NUDOM - Núcleo de Documentação do Colégio Pedro II (RJ), pela atenção e colaboração.

Aos colegas de trabalho que suportaram comigo longas viagens de van..., Lauro, Genê, Eliene, Márcia, Douglas, Malu, Marcelo Motta, Sônia, Sandra, Seu Décio...

À Cristiane, Marisol, Edilson, Carlos e Elisa, Cristhian e Mari, Marcos e Kelly, pela amizade.

Aos meus pais Armim e Inês...por tudo.

Ao Marcelo, Nina e Otto, pela paciência, equilíbrio e inspiração...

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, propomos analisar o livro escrito pelo professor Agliberto Xavier, intitulado "*Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé*", publicado no França no ano de 1909. Através desta análise, buscamos contribuir com a História do Ensino de Cálculo Numérico no Brasil, no século XX, bem como compreender o processo de formação e desenvolvimento do conteúdo da disciplina de Cálculo Numérico.

Dividimos o trabalho em quatro capítulos. O primeiro traz uma breve introdução, onde situamos o Cálculo Numérico no mundo ocidental, e citamos alguns dos trabalhos que contribuíram para o seu desenvolvimento; posteriormente falamos do Cálculo Numérico no Brasil, e do que julgamos ser o 'provável primeiro curso de cálculo numérico'; sobre a Escola de Engenharia de São Carlos, e sobre o Prof. Ivan de Queiroz Barros, que ministrou aulas neste curso.

Agliberto no início do livro, deixa uma dedicatória a Benjamin Constant Botelho de Magalhães, seu professor e figura de grande importância na campanha da proclamação da república brasileira:

> "A La Chère et Vénérée Mémoire de Mon Éminent Maitre en Mathématiques Benjamin - Constant Botelho de Magalhães.
>
> Témoignage de ma profunde reconnaissance. "- Agliberto Xavier [1]

Foi por meio desta dedicatória que conseguimos reunir alguns documentos sobre a

[1] Tradução da autora: 'A Cara e Venerada Memória do Meu Eminente Mestre em Matemática Benjamin - Constant Botelho de Magalhães. Testemunho do meu profundo reconhecimento.' Dedicatória apresentada na página V do livro.

vida do autor, que detalharemos no capítulo II.

No terceiro capítulo fazemos a análise do texto escrito pelo Prof. Agliberto Xavier, *Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé*; e no quarto capítulo colocamos as considerações finais deste trabalho.

Ao iniciar a pesquisa, propomos detalhar um pouco da História do Cálculo Numérico no mundo ocidental, este trabalho inicial nos ajudou a conhecer um pouco dos passos dos matemáticos que participaram da construção desta área de pesquisa.

Sabemos que desde a antiguidade, o homem tem procurado resolver problemas práticos utilizando a matemática; no século XIX em particular culminou uma gama de pensadores matemáticos que se interessavam por problemas físicos e a interpretação matemática desses fenômenos.

Podemos citar vários personagens que contribuíram para o desenvolvimento da matemática numérica desde seus primórdios; é o caso de Newton, Gauss, Legendre, Raphson, Euler e Cauchy, dentre outros.

Com a necessidade de aprofundar o conhecimento na área da matemática numérica, surgiram muitos trabalhos que começaram a formar o que hoje chamamos de Cálculo Numérico.

No projeto inicial de mestrado, propusemos uma investigação sobre o surgimento da disciplina de Cálculo Numérico nas grades curriculares dos cursos de graduação do país. Entretanto, durante a pesquisa foi necessário adaptar a proposta inicial, pois não haveria tempo hábil para verificar a existência dos documentos, bem como de obtê-los para então descrever corretamente, e na íntegra, os fatos ocorridos na implantação da disciplina nas instituições de ensino superior no Brasil.

Compreender o porque da necessidade da criação de uma nova disciplina e quem foram seus precursores, onde surgiram seus primeiros movimentos e como se deu à inserção nas grades curriculares são questionamentos que não poderemos responder somente com esta pesquisa, ficando em aberto para contribuições futuras.

Considerando-se que são poucos os documentos encontrados que versam a respeito do desenvolvimento do Cálculo Numérico no Brasil, decidimos por analisar um período na História do Ensino de Matemática, em particular da disciplina de Cálculo Numérico, mediante o livro de Agliberto Xavier.

O livro de Agliberto nos proporcionou um novo enfoque à pesquisa, pois tratava-se de um livro texto para estudantes de matemática sobre o conteúdo que estávamos pesquisando. Salientamos que o livro do professor Agliberto Xavier é fonte primária e essencial para o desenvolvimento deste trabalho.

Optamos, portanto, em descrever e analisar o trabalho feito pelo Prof. Agliberto, que ele mesmo descreve como sendo **"um tratado de Cálculo Numérico".** Um livro escrito sobre um assunto extremamente atual para a época e que aparece precocemente no Brasil.

1.1 Procedimentos Metodológicos

O levantamento de material bibliográfico relativo à disciplina de Cálculo Numérico ocorreu na Biblioteca da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC/USP), na Biblioteca do Instituto de Ciências Matemáticas e da Computação (ICMC/USP); e na Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística (IME/USP).O material relacionado à vida e obra do professor Agliberto Xavier foi levantado mediante pesquisa no Museu Casa Benjamin Constant, e no contato com as bibliotecárias do NUDOM - Núcleo de Documentação do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro, através de leitura e pesquisa nos materiais de interesse para o trabalho.

Realizamos uma entrevista com o Professor Ivan de Queiroz Barros, primeiro professor da disciplina de Cálculo Numérico na Escola de Engenharia de São Carlos no ano de 1953. Com ele, conseguimos o material utilizado no curso que ministrou na EESC (1953-1957), material que consideramos de fonte primária, podendo ser utilizado em trabalhos futuros.

O livro *Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé* foi analisado em duas fases; na primeira ocorreu a leitura e tradução do texto, na segunda fase, nos detemos em analisar e compreender o conteúdo exposto pelo autor.

Na análise do livro que apresentamos neste trabalho, primeiramente descrevemos o conteúdo abordado pelo autor e, posteriormente fizemos comentários ao final de cada capítulo, de forma a compreender os passos utilizados por Agliberto.

Em todos os capítulos apresentamos exemplos resolvidos pelo autor, que foram selecionados de acordo com a ordem proposta pelo mesmo, sendo que inicialmente trabalhamos com exemplos que pudessem promover a melhor interpretação dos métodos descritos.

Para a realização deste trabalho, foi necessário por vezes, deixar que o texto do Prof. Agliberto aparecesse na íntegra para que pudéssemos comentar e analisar algumas idéias expostas por ele; em outros momentos utilizamos o texto somente como base para descrever seus procedimentos e conteúdos.

1.2 O Cálculo Numérico

A matemática até o final do século XVIII era muito utilizada em diversas áreas, por exemplo, na astronomia, na mecânica, e na arquitetura. A distinção entre a matemática pura e aplicada aparece em alguns resultados individuais, mas nunca para um conjunto de trabalhos de matemática. Podemos citar como exemplos de trabalhos desenvolvidos: Em 1687, no *Principia*, Isaac Newton publicou sua descoberta sobre um método para determinar zeros de funções reais; este método foi aperfeiçoado por Joseph Raphson, e hoje é conhecido como método de Newton – Raphson. Além disso, Newton também contribuiu para a Interpolação Numérica, com o Método de Newton que utiliza as diferenças divididas e de Newton - Gregory, que utiliza diferenças finitas. Joseph-Louis Lagrange comunicou em 1778 à Academia de Ciências de Berlin e publicou em 1798, o método que hoje conhecemos como Método de Lagrange para o polinômio interpolador. Um século depois do comunicado de Lagrange, em 1878, Charles Hermite generalizou o método de Lagrange para ordem superior.

Estes e outros trabalhos foram feitos de forma isolada, ou seja, sem que os matemáticos envolvidos pensassem na possibilidade da matemática numérica como uma área de pesquisa em criação e desenvolvimento. Segundo Schreiber :

> "A mudança na posição da matemática e da sociedade de matemática desde o século XIX produziu o que muitas pessoas chamam de 'os primeiros matemáticos

> puros' tais como Niels Abel, Evariste Galois, Bernard Bolzano e János Bolyai, e da mesma forma, os 'primeiros matemáticos aplicados', tais como, Gaspard Monge, Gaspard de Prony, Charles Babbage e Adolphe Quetelet. Entretanto, muitos matemáticos permaneceram nas duas direções, como Augustin Louis Cauchy, Joseph Fourier, Carl Friedrich Gauss e Pafnuty Chebyshev".[2]

Uma das ferramentas mais utilizadas do cálculo numérico é o Método dos Mínimos Quadrados, que já era utilizado por Gauss, mas foi inicialmente publicado por Adrien - Marie Legendre em 1805. Em 1810, Carl Friedrich Gauss publicou o seu procedimento para eliminação de equações lineares, hoje conhecidos como Método da Eliminação de Gauss. Philipp Ludwig von Seidel, em 1879 reescreveu o método de Gauss tornando-o iterativo, hoje conhecemos este trabalho como Método de Gauss- Seidel.

Em 1824, Augustin Louis Cauchy utilizou os trabalhos de Leonhard Euler para determinar a solução numérica de equações diferenciais ordinárias, conhecido atualmente como método de Euler. Segundo Goldstine (1977), Carl Jacobi, em 1826 publicou no artigo *"Über Gauss neue Methode die Werte der Integrale näherrungsweise zu finden"* um novo estudo sobre a quadratura de Gauss para Integração Numérica. Jacobi escreveu e publicou ainda muitos outros artigos sobre sistemas de equações lineares.

Aqui estão citados apenas alguns dos tantos trabalhos de matemática numérica desenvolvidos no século XIX. Devido a esse grande número de pesquisas, a matemática numérica começava a tomar forma, e a se estabelecer, ainda que isso não estivesse tão evidente. Mesmo no final do século XIX, a matemática aplicada era considerada como parte inclusa das outras áreas afins e, na década de 20, do século XX, foram incluídos todos os métodos gráficos de solução de problemas numéricos ao corpo da matemática numérica, atualmente conhecida como Cálculo Numérico.

O progresso da matemática numérica no século XIX, segundo Schreiber:

> "... não é adequadamente descrito em muitos livros – texto de história da matemática, e até hoje são insuficientemente estudados na pesquisa histórica".[3]

[2]SCHREIBER, P. General Numerical Mathematics.p.585
[3]SCHREIBER, P. General Numerical Mathematics.p.586.

Por volta de 1900 começaram a surgir os primeiros centros de formação de professores para a matemática aplicada; por exemplo, Göttingen em 1904 com Carl Runge, München em 1910 com H. Liebmann e Berlin em 1920 com Richard von Mises.

Temos poucas informações sobre a linha tênue que separa os estudos em Cálculo daqueles que começaram a se desenvolver no Cálculo Numérico. Quando se deu esta separação e como foi a organização da nova área de pesquisa que começou a surgir, são tópicos relevantes de pesquisa que ainda não foram devidamente explorados.

1.3 O Ensino de Cálculo Numérico no Brasil

No Brasil, a matemática numérica surge com força nas escolas de engenharia como a Politécnica do Rio de Janeiro e posteriormente, a Politécnica de São Paulo. Vários autores citam a matemática aplicada à engenharia como área de pesquisa em ascensão.

Entre os dias 6 a 16 de agosto de 1905, realizou-se no Rio de Janeiro o Terceiro Congresso Científico Latino -Americano. De acordo com Silva (1999b):

> "... Uma das primeiras manifestações da necessidade de congraçamento advindo da troca de idéias, experiências, e informações entre pessoas residentes na América Latina e dedicadas à ciência e à tecnologia..."

No referido Congresso encontram-se as seguintes sessões conjuntas: Matemáticas puras e aplicadas e engenharia; Ciências físicas e naturais; Medicina; Cirurgia; Medicina pública; Ciências jurídicas e aplicadas; Ciências antropológicas; Ciências pedagógicas; Agronomia e zootécnica.

Na sessão referente a matemáticas puras e aplicadas e engenharia, segundo Silva (1999b), encontra-se o trabalho de Antonio de Paula Freitas intitulado *"Os métodos gráficos na Matemática Aplicada".*

O Cálculo Numérico aparece como disciplina nos cursos de engenharia e, em meados da década de 50, os professores da disciplina eram, em sua grande maioria, engenheiros. Nas décadas posteriores, com o advento dos computadores e a divisão da matemática em pura e aplicada, criaram-se novos departamentos de matemática aplicada e, com eles, as disciplinas de cálculo numérico para os cursos de matemática.

Poucas pesquisas foram feitas sobre esse assunto; e não se encontra bibliografia que relate a História do Ensino de Cálculo Numérico no Brasil. Esta foi uma das preocupações de pesquisa, porém, devido a grandes dificuldades de tempo, de documentação, ou mesmo de pessoas que pudessem elucidar os fatos, a pesquisa tomou um novo enfoque, partindo para a análise do livro do Prof. Agliberto Xavier que está feita no capítulo 3.

Podemos citar, a pesquisa feita pelo Prof. Huberto Brunner (2000) intitulada "O Progresso do Cálculo Numérico: Com enfoque em Lagrange",[4] como uma das poucas feitas que se tem conhecimento até o presente momento.

O Provável Primeiro Curso de Cálculo Numérico no Brasil (1953)

No ano de 1953, foi definitivamente instalada a Escola de Engenharia de São Carlos, uma unidade da Universidade de São Paulo no interior do estado.

A escola contava com os cursos de Engenharia Mecânica e Civil e iniciou suas aulas em 22 de abril de 1953 com 39 alunos matriculados de um total de 200 candidatos inscritos. Os alunos tinham um curso fundamental com duração de dois anos e um curso específico com duração de três anos. O curso fundamental contava com a seguinte estrutura:

Escola de Engenharia de São Carlos - Curso Fundamental

1° e 2° Semestres: Cálculo Diferencial e Integral; Cálculo Vetorial (A); Cálculo Numérico (A); Geometria Analítica e Projetiva; Física Geral e Experimental (A); Mineralogia e Geologia; Desenho.

3° e 4° Semestres: Física Geral e Experimental (B); Cálculo Diferencial e Integral: Cálculo Vetorial (B); Cálculo Numérico (B); Complementos de Geometria e Geometria Descritiva; Mecânica Geral; Química Geral e Tecnológica.

[4]Neste trabalho segundo o Prof. Huberto: "Destacamos que a primeira vez que encontramos o nome Cálculo Numérico como disciplina foi no currículo da Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio de Janeiro e que foi lecionada no período de 1956 a 1966."

Sabe-se hoje que, antes da Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio de Janeiro, a Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP já possuía o referido curso em sua grade curricular.

Texto extraído de 'O Progresso do Cálculo Numérico: Um enfoque em Lagrange', p.154.

Nesta parte fundamental do curso encontramos as disciplinas de Cálculo Numérico A e B, que possuíam os seguintes programas:

Programas Resumidos das Disciplinas da Escola de Engenharia de São Carlos:

CÁLCULO NUMÉRICO - PARTE A

Aproximação nas operações elementares. Nomogramas. Sistemas lineares.

Polinômios: diferenças finitas. Interpolação e aplicações. Equações $f(x) = 0$.

Teoria geral da iteração e casos particulares.

CÁLCULO NUMÉRICO - PARTE B

Complementos à solução de equações numéricas. Probabilidades e erros de observação. Mínimos quadrados. Tabelação de funções por meio de séries.

Fórmulas de quadratura e fórmulas somatórias. Equações diferenciais.

Segundo o anuário da Escola de Engenharia de São Carlos do ano de 1958, o departamento de matemática possuía a seguinte organização desde 1953:

Corpo Docente- Organização Departamento de Matemática

Chefe do Departamento - Prof. Achille Bassi

Departamento constituído pelas Cadeiras "Mecânica Geral", "Cálculo" e "Geometria".

Cadeira de Cálculo:

Compreende as disciplinas: "Cálculo Diferencial e Integral", "Cálculo Vetorial (Partes A e B)" e as disciplinas subordinadas: "Cálculo Numérico (Partes A e B)" e "Complementos de Matemática (I e II)".

Regente da Cátedra - Prof. Jorès Pacifico Cecconi

Instrutores. Eng^o. Ivan de Queiroz Barros
Eng^o. Rubens Gouvea Lintz
Bel. Ubiratan D'Ambrosio.

Prof^o. Ivan de Queiroz Barros

A recém-fundada Escola de Engenharia de São Carlos necessitava de professores para ministrar aulas para os cursos de Engenharia Civil e Mecânica. Neste período, no Brasil, havia carência de professores titulados, visto que o número de professores doutores era muito reduzido e não existia nenhum curso de pós-graduação no país.

Segundo o relato em entrevista feito pelo professor Ivan, a solução encontrada pelo diretor e pelos docentes da Escola foi buscar pessoas conhecidas que haviam se destacado dentre os alunos oriundos dos cursos de Engenharia da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Foi assim que, em maio de 1953, Ivan de Queiroz Barros foi convidado pelo Prof. Eurico Serut, para trabalhar em São Carlos.

O Sr. Ivan havia concluído o curso de engenharia civil pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo em 1950, onde ainda trabalhava como assistente do Prof. José Otávio de Camargo.

Apresentado pelo então diretor Prof. Dr. Theodoreto de Arruda Souto como "professor especialista em Cálculo Numérico", assumiu as disciplinas Cálculo Numérico A e Cálculo Numérico B, do curso fundamental no período de 1953 a 1957, quando retornou para o Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP).

Consta no Anuário da EESC do ano de 1958 que o Prof. Ivan tinha como trabalho publicado as **Apostilas de Cálculo Numérico** no ano de 1956. A partir da leitura dos anuários, passamos a investigar os nomes das pessoas que pudessem confirmar a existência dos cursos de cálculo numérico na Escola de Engenharia de São Carlos (EESC) no ano de 1953.

A pesquisa começou com os três nomes que figuravam como instrutores para a cadeira de cálculo: Eng^o. Ivan de Queiroz Barros, Eng^o. Rubens Gouvea Lintz, Bel. Ubiratan D'Ambrosio.

Por meio de conversa com o Prof. Ubiratan D'Ambrosio, foi possível identificar que a pessoa designada para trabalhar com as disciplinas de Cálculo Numérico A e B era o Eng^o. Ivan de Queiroz Barros.

Buscou-se então informações no *site* da Universidade de São Paulo, onde encontra-se o nome do Prof. Ivan como docente do Departamento de Matemática Aplicada, na categoria de professor associado. Em contato com a Universidade foi possível obter o e-mail do professor e marcar uma entrevista com o mesmo. Durante a entrevista o Prof. Ivan relatou como foi a sua contratação para a escola de engenharia e retificou alguns itens que constavam nos anuários.

Segundo o Prof. Ivan, ele não possuía nenhuma especialização na área. Não existiam nem mesmo no seu curso de graduação disciplinas que tratassem especificamente de Cálculo Numérico.

Mesmo não sendo especialista em Cálculo Numérico, o Prof. Ivan empenhou-se em estudar e preparar os cursos de forma a suprir as necessidades da ementa e dos seus alunos. Compilou suas idéias e estudos nas Apostilas de Cálculo Numérico citadas nos anuários da Escola. Apostilas estas, que ficaram guardadas por mais de 50 anos e que o professor gentilmente cedeu uma cópia para estudos. As apostilas são formadas pelos seguintes tópicos: **Solução dos Sistemas Lineares, Cálculo das Diferenças Finitas, Interpolação, Nomografia, e Teoria dos Erros.**

No ano de 1963, o Prof. Ivan já com uma tese de doutoramento orientada pelo Prof. José Otávio de Camargo na USP, afastou-se para fazer sua pós-graduação a nível de mestrado nos Estados Unidos pela *Stanford University.*

Após a saída do Prof. Ivan da Escola de Engenharia de São Carlos, assumiu em seu lugar as cadeiras de Cálculo Numérico o Prof. Odelar Leite Linhares.

O Prof. Odelar na apresentação do livro 'Algoritmos Numéricos', de Frederico Ferreira Campos Filho cita:

> "ocorreu-me relembrar um fato marcante da história do Ensino de Cálculo Numérico e da Análise Numérica no Brasil. Foi em São Carlos, SP, em 1953, na recém criada Escola de Engenharia de São Carlos -USP (EESC-USP) que se inclui, pela primeira vez neste país, o Ensino de Cálculo Numérico como matéria obrigatória dos currículos de Cursos de Engenharia. A matéria era ministrada pelo departamento de matemática dessa Escola, ao lado de Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica e Projetiva, através de duas disciplinas, Cálculo Numérico A e B. Por muitos anos, até, segundo me consta, meados de 60, continuou a EESC-USP a ser a

única escola de engenharia do Brasil a assim proceder." [5]

O Prof. Ivan publicou no ano de 1972 o livro "Introdução ao Cálculo Numérico", no ano de 1995 publicou o livro "Mecânica Analítica Clássica" juntamente com o Prof. Manuel Valentim de Pera Garcia e desenvolveu o *software WinCad* que é um programa para *"Computer Aided Design" (CAD)*, bem documentado, com ícones em Inglês, mas documentação em Português, distribuido pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Brasil, somente para uso não-comercial. Trabalhou como Prof. Adjunto do departamento de Matemática Aplicada da USP, e hoje, é colaborador do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, onde desenvolve trabalhos como pesquisador nas áreas de Análise Funcional, Análise Numérica e Mecânica.

[5] Texto extraído da Apresentação do livro 'Algoritmos Numéricos'.

Capítulo 2

Agliberto Xavier (1869 -1952)

Nascido no ano de 1869 no Rio de Janeiro, filho de agricultores, Agliberto Xavier formou-se em engenharia civil pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro e, com apenas 22 anos, começou a trabalhar como professor. Dedicou-se ao ensino trabalhando em diversas instituições, foi professor na Escola do Estado Maior do Exército, onde ensinava o estudo das projeções da esfera e das cartas geográficas, foi docente na Escola Normal do Distrito Federal (Instituto de Educação), preparador de química orgânica na Escola Politécnica e professor de matemática de escolas secundárias no Rio de Janeiro.

Em maio de 1909, o Prof. Agliberto Xavier foi aprovado por unanimidade no concurso público para a cadeira de Lógica do Internato Nacional Bernardo de Vasconcellos. Tomou posse como Lente de Lógica no Internato no dia primeiro de outubro de 1910; permanecendo até dezoito de março de 1915 quando ingressou como professor catedrático de psicologia, lógica e história da filosofia do Instituto do Colégio Pedro II, sendo transferido para o externato do Colégio em vinte e cinco de julho de 1917.

Em seu parecer para a Cátedra de Filosofia do Externato do Ginásio Nacional, Farias Brito comenta os trabalhos escritos e apresentados por Agliberto Xavier, dentre eles o livro *"Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé"*, cita o mesmo: *"...obra que foi aprovada pela Congregação da Escola Polytechnica desta Capital unanimemente, e que foi elogiada e recomendada pelo conselho de Instrução da Escola Naval, pelo conselho de Instrução da Escola de Artilharia e Engenharia, conforme* *documentos que foram enviados pelo próprio candidato e que aqui apresento."*[1]

Em dez de abril de 1919, foi eleito pela congregação do colégio para representante no Conselho Superior de Ensino, biênio de 1919 -1921, ocupando o lugar do Dr. Eugenio de Barros Raja Gabaglia.

Agliberto, que estudou matemática com Benjamin Constant e biologia na França com o positivista Dr. Georges Audiffrent, ministrava o seu ensino de filosofia através das 15 leis de filosofia primeira formuladas por Augusto Comte na Política Positiva que eram reproduzidas em suas aulas no Colégio Pedro II.

Foi escolhido paraninfo dos alunos do Externato do Colégio Pedro II que, em dois de dezembro de 1929, formaram-se bacharéis em ciências e letras.

Segundo seus alunos, era pessoa agradável e muito educada, tratando-os com grande respeito. Quando questionado sobre algo, costumava dizer: " - *Se souber, respondo: do contrário direi que não sei. Se quiserem, procurarei saber. Como tenho mais prática e alguns bons livros, ser-me-à menos difícil conhecer."*[2]

Possuía uma vasta biblioteca, com inúmeras obras raras de diversas áreas do conhecimento. Figuravam em sua biblioteca obras de vários matemáticos importantes, segundo seu ex-aluno Ascânio Pedro de Farias, alguns de seus 'bons livros', constituíam uma variada biblioteca:

> "...obras completas de Arquimedes, Descartes, Euler, Cramer, Lagrange, Monge, Fourier, Poinsot, Carnot, Poncelet, Navier; trabalhos de Diofante, memórias de Monge, Euler, Lancret, Sophie German, Dupin, etc., copiados das bibliotecas da França com aquela sua letra tão nossa conhecida..."[3]

Conhecedor e estudioso da língua francesa, Agliberto escreveu alguns textos para serem publicados na França:

> "...Nós o sabíamos grande matemático e dominador da língua francesa,

[1]Parte extraída do trabalho de mestrado de Evandro Luis Gomes: "Sobre a História da lógica no Brasil: da lógica das faculdades à lógica positivista (1808-1909). Apêndice Documental sobre o parecer de Farias Brito. Pag. 392, USP- 2002.

[2]Extraído do Discurso de Ascânio Pedro de Farias - Anuário do Colégio Pedro II, vol. XIII, 1945-1946, pag.64.

[3]Extraído do Discurso de Ascânio Pedro de Farias - Anuário do Colégio Pedro II, vol. XIII, 1945-1946, pag.65.

que manejava como ao idioma pátrio..."[4]

Agliberto Xavier escreveu vários livros de inspiração positivista, tais como "Ensaios sobre Lógica", Rio 1908, "Funções do Cérebro", Rio 1909, "Cálculo das Secções Angulares", Rio 1909, *"Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé"*, Paris, 1909, "Secções Cônicas", Rio 1924. Estes livros são apenas parte das publicações deixadas pelo Prof. Agliberto. Homem de conhecimento vasto, escreveu sobre vários ramos da ciência, deixando ainda as seguintes obras: "Da Pluralidade das Substâncias Albuminóides", Rio, 1906, "Teoria electro-coloidal", Rio, 1919, "Entre o Abstrato e o Concreto", Rio, 1921, "Em defesa do Pavilhão Nacional e do Mestre e Ciência e Arte", Rio, 1921, "Georges Audiffrent. Noticia Sumária de sua obra", Rio, 1923, "O catolicismo em sua origem", Rio, 1925, "Carta ao dr. Sebastião José de Souza", Rio, 1928, "Discurso paraninfando os alunos do Externato Pedro II", Rio, 1929, "Carta sôbre a Educação", Rio, 1943, "A Paz Universal", Rio, 1943, "Lições de Filosofia Primeira", Rio, 1960 (edição póstuma).

Seu livro *"Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé"*, segundo seus alunos[5], foi citado em dois livros italianos: *Complementi di matematica,* de Salvatore Ortu Carboni, editado em Roma em 1920, e *Cálculo Numérico Aprossimato,* de Dott Eugenio Mecaferri, publicado em Milão, em 1919.

Contribuiu com a Revista Brasileira de Matemática, que surgiu em 1929, escrevendo artigos de natureza filosófica, como o texto "Ciência e Arte", que segundo Silva [1999] aborda a questão entre o abstrato e o concreto na ciência e na arte. Fala sobre dois tipos de razão: a teórica e a prática, onde a primeira refere-se a previsão de fenômenos e a segunda a modificação dos seres. Agliberto neste trabalho, busca mostrar como a razão concreta e abstrata, a teórica e a prática intervieram na evolução intelectual da humanidade.

Proferiu sua última aula no colégio em 12 de novembro de 1937, quando foi também homenageado pelos colegas professores, alunos e ex-alunos. Iniciou seu discurso esclarecendo sua aposentadoria:

[4]Fernando Segismundo, Memória de Estudante - C. Pedro II, p.54.

[5]Extraído do Discurso de Ascânio Pedro de Farias - Anuário do Colégio Pedro II, vol. XIII, 1945-1946, p.65.

> "Compelido por uma lei constitucional que limita o prazo de magistério público em nosso país, vou deixar as minhas cátedras, sendo esta a derradeira aula que me cabe dar aos meus alunos do Colégio Pedro II."[6]

Apesar da importante carreira no magistério e de suas publicações, pouco se sabe sobre a vida pessoal do Prof. Agliberto Xavier; foram feitas pesquisas no Colégio Pedro II, no Museu Casa de Benjamin Constant, e na Escola Politécnica. Nestas encontra-se alguns livros que foram escritos por ele, mas nada sobre sua trajetória de vida. Segundo os discursos proferidos por alguns de seus ex-alunos, era muito querido por todos e respeitado por seus colegas.

[6]Extraído da Última Aula do Professor Agliberto Xavier - Anuário do Colégio Pedro II, vol. XIII, 1945-1946, p.8.

Capítulo 3

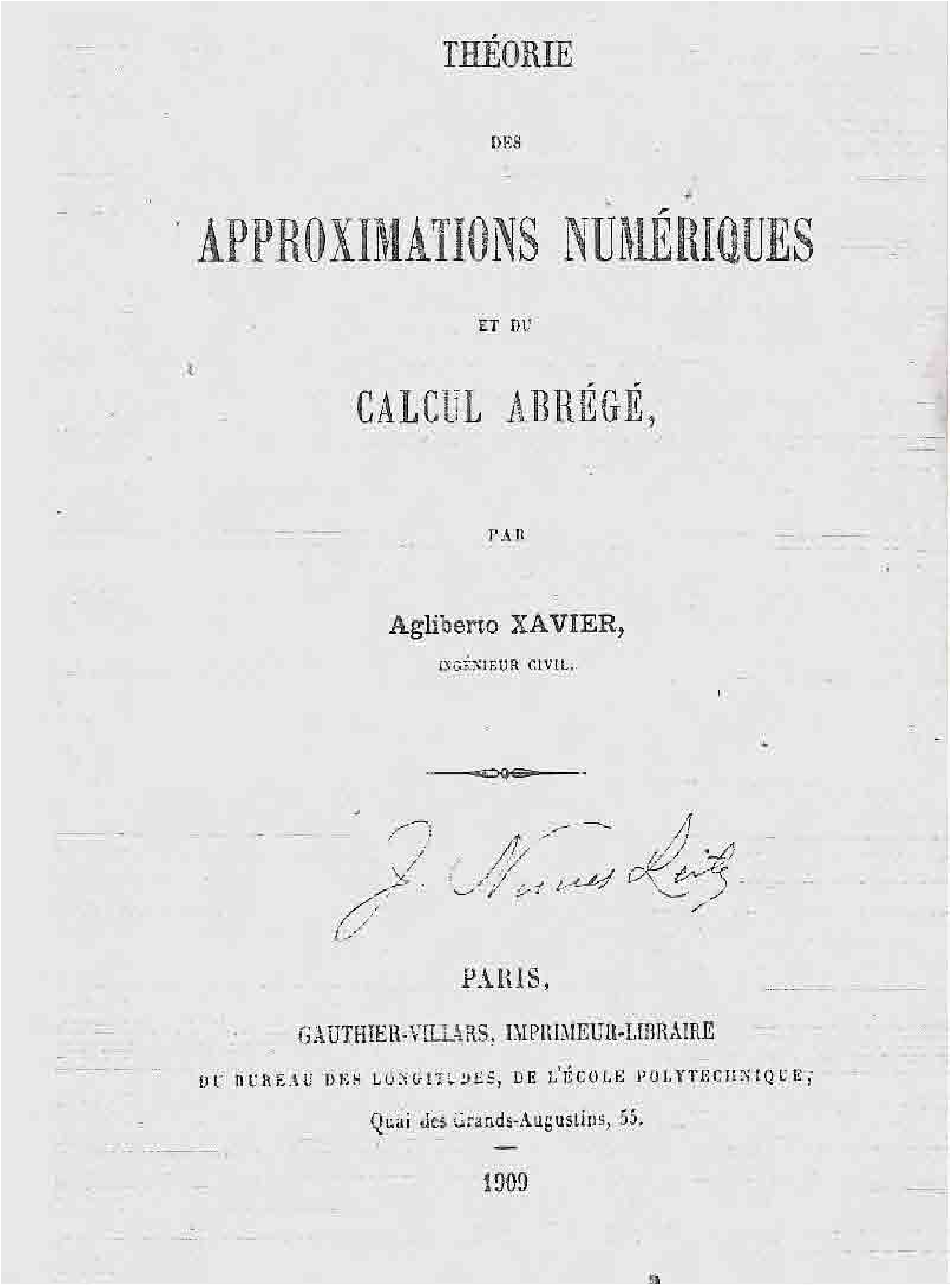
"Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé"

Neste capítulo, propomos analisar a obra do Prof. Agliberto Xavier, identificando conteúdos que hoje chamamos de Cálculo Numérico. O presente trabalho procura colaborar com os estudos no campo da História da Matemática, particularmente na área de conteúdos e disciplinas para que posssamos compreender o processo de formação do pensamento matemático no Brasil, quem foram os professores, quais os conteúdos que eram ministrados e que influência tiveram na sociedade. Temos interesse no discurso matemático que demonstra o conhecimento matemático do autor no assunto em questão; ou seja, o quanto de Cálculo Numérico pode-se encontrar na obra.

Segundo o próprio autor, o livro destina-se aos estudantes de matemática interessados no cálculo:

> "Le Livre que nous présentons aujourd'hui au monde savant a été spécialement écrit à l'usage des calculateurs et des élèves en Mathématiques qui n'ont pas le temps de méditer les ouvres originales des grands géomètres et doivent néanmoins employer leurs meilleures méthodes avec la pleine conscience de l'étendue que les calculs comportent, en vertu des éléments approximatifs sur lesquels ils sont fondés..." [1]

[1] Tradução da autora: 'O Livro que nós apresentamos hoje ao mundo sábio foi escrito especialmente para o uso dos calculadores e dos estudantes de Matemática que não têm o tempo para meditar sobre as obras originais dos grandes geômetras e devem, no entanto, empregar os seus melhores métodos com a plena consciência da extensão que os cálculos comportam, em virtude dos elementos aproximativos sobre os quais são fundados.' Parte extraída da Advertência feita por Agliberto Xavier na página VII.



THÉORIE

DES

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES

ET DU

CALCUL ABRÉGÉ,

PAR

Agliberto XAVIER,

INGÉNIEUR CIVIL.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

Capa do Livro.

Agliberto faz no início do livro um parecer aos leitores onde coloca as diretrizes que utilizará no decorrer do mesmo, mediante as idéias positivistas de Auguste Comte:

> "J'écris toujours mathématiques au singulier, pour indiquer l'unité de la science, et formation au lieu de function, me conformant aux idées d'Auguste Comte dans sa Synthèse subjective. D'aprés le même philosophe j'emploie le terme racine singulière au lieu de racine imaginaire."[2]

O livro de Agliberto possui 281 páginas, destas 275 de texto e 6 do sumário que se encontra ao final da obra. O autor não dispõe a bibliografia de forma separada ao final do texto, porém faz anotações e citações de autores e livros enquanto discorre sobre o assunto.

O texto foi publicado no ano de 1909 em Paris, pela editora Gauthier - Villars. O exemplar que serviu de consulta a este trabalho pertenceu ao Sr. J. Nunes Leite, cuja assinatura está presente na contra capa e na folha de rosto. O livro possui capa, contra capa, Dedicatória a Benjamin Constant, Advertência - onde o autor faz uma breve apresentação do trabalho, e Aviso aos leitores, em que explica os termos que utilizará ao longo da obra. Seguem uma introdução e os capíulos.

Apresenta em cada capítulo um sumário, onde constam os assuntos que serão tratados. Utilizaremos a estrutura do autor para a análise dos capítulos, apresentando o título seguido de um sumário traduzido de forma a nortear o desenvolvimento do trabalho. Alguns exemplos serão apresentados ao longo da análise de cada capítulo, escolhidos dentre os que o autor propõe com o intuito de melhor esclarecer o método em questão.

A analise feita inicia na Introdução do Livro *"Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé"*.

Encontram-se exemplares dessa obra na Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística - IME /USP, São Paulo; na Biblioteca do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/ USP, São Carlos; na Biblioteca do Instituto de Biociências,

[2]Tradução da autora: 'Escrevo sempre matemática no singular, para indicar a unidade da ciência, e formação no lugar de função, conformando-me às idéias de Auguste Comte na sua Síntese subjetiva. De acordo com o mesmo filósofo, emprego o termo raiz singular em vez de raiz imaginária.' Parte extraída do Aviso aos Leitores, página IX.

Letras e Ciências Exatas-IBILCE /UNESP, São José do Rio Preto.

3.1 A Introdução

Sumário:

1. De erros nas medidas de grandezas e a influência destes erros no cálculo.
2. Problema preliminar e fundamental para resolver na avaliação de uma fórmula.
3. Plano da obra.
4. Sobre os erros absolutos.
5. Exercícios sobre a determinação de erros absolutos.
6. Observação sobre a notação dos números aproximados.
7. Sobre erros relativos.

Nesta primeira parte do livro, o autor dedica-se a apresentar sua obra, cita o que contém cada capítulo, e descreve que o que propõe é um tratado de Cálculo Numérico.

> "Nous ferons une étude des courbes des erreurs en leur appliquant les formules de Newton e Lagrange; nous y ferons rentrer la théorie des interpolations, des parties proportionelles et de fausse position, et nous exposerons en outre la théorie des logarithmes. C'est un Traité de calcul numérique que nous avons en vue."[3]

Ao falar dos erros de medidas, afirma que os erros das aproximações, por pequenos que sejam, são influentes nas avaliações da fórmulas, e que o importante na avaliação de uma fórmula é conhecer seu grau de precisão.

> "Si l'on veut le résultat d'une formule avec une approximation donnée, savoir avec quelle précision il faut estimer ses éléments."[4]

[3]Tradução da autora: 'Faremos um estudo das curvas de erros e suas aplicações nas fórmulas de Newton e de Lagrange; recordaremos a teoria das interpolações, das partes proporcionais e de falsa posição, e apresentaremos a teoria dos logaritmos. É um Tratado de cálculo numérico que temos em vista.' Parte extraída da Introdução, p.4.

[4]Tradução da autora: 'Se se quer o resultado de uma fórmula com uma aproximação dada, deve-se saber com qual precisão é necessário estimar os seus elementos.' Parte extraída da Introdução, p.2.

Faz ainda algumas considerações preliminares ao se referir aos erros de medidas.

Define erro como:

> "On appelle erreur d'un nombre la différence entre sa valeur exacte et sa valeur approximative."[5]

A partir de sua definição de erro, o autor, mostra os erros por falta (defeito) e por excesso que podem ser calculados na diferença entre dois números. Coloca ainda o conceito de erro relativo:

> "Nous pouvons donc définir les erreurs relatives, comme les erreurs par unité, ou ce qui est la même chose, le rapport entre l'erreur absolue du nombre et sa valeur exacte." [6]

Comentários: Estas são algumas idéias fundamentais, que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo Numérico. Por meio dos conceitos de erros, o autor trabalha as fórmulas, aproximações e exemplos. Na primeira parte do livro o autor procura colocar o leitor a par do que ele pretende desenvolver nos próximos capítulos, e utiliza as noções preliminares de erros e aproximações na forma de idéias a serem estudadas posteriormente. As definições de erros relativos e absolutos continuam sendo amplamente utilizadasna atualidade no cálculo numérico; que conta também com os conceitos de erros por truncamento e arredondamento provenientes da utilização de *softwares* e calculadoras científicas.

Neste capítulo o autor cita as seguintes obras como referência bibliografica: *A Estimatio errorum in mixta mathesi per variationes trianguli plani et sphaerici - Harmonia Mensurarum (Cotes*[7]*); Analyse des équations déterminées (Fourier*[8]*); Traités d'arithmétiques .*

[5]Tradução da autora: 'Chama-se erro de um número a diferença entre o seu valor exato e o seu valor aproximativo.' Parte extraída da Introdução, p.4.

[6]Tradução da autora: 'Podemos por conseguinte definir os erros relativos como os erros por unidade, ou, o que é a mesma coisa, a razão entre o erro absoluto do número e o seu valor exato.' Parte extraída da Introdução, p.10.

[7]Roger Cotes (1682 - 1716), matemático inglês que estudou e reeditou o *Principia* de Newton.

[8]Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 -1830), matemático francês que atuou em diversas áreas sendo reconhecido por desenvolver qualquer função em série de senos e cossenos.

3.2 O Capítulo I: Do grau de precisão sobre a avaliação de uma fórmula.

Sumário:

1. Problema direto: determinação do grau de precisão que comporta uma fórmula seguida da aproximação de seus diversos elementos.
2. Aplicação de certa regra a qualquer exemplo.
3. Emprego dos erros relativos de cada exemplo.
4. Problema inverso: determinação do grau de aproximação que falta aos elementos de uma fórmula pelo qual é feito o cálculo de precisão dada.
5. Aplicações a qualquer exemplo.
6. Emprego de erros relativos nestes exemplos.

O autor relembra no início do capítulo que o problema das aproximações numéricas consiste em determinar o grau de precisão da fórmula por sequência das aproximações de diversos elementos. Por meio da fórmula de Taylor[9], onde são dados os elementos aproximativos $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$, etc, o mesmo apresenta a fórmula a duas variáveis, ou a duas grandezas aproximativas:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \Delta x f^{'}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y) + \Delta y f^{'}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)$$

onde a expressão que denota o erro absoluto (ϵ), é representada por $\epsilon : f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$. O autor determina a fórmula como sendo: $\epsilon < \Delta x f^{'}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y) + \Delta y f^{'}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)$.[10]

Utiliza f'_x, f'_y, f'_z como as derivadas em relação a x, y, z etc, de uma formação com um número qualquer de variáveis, o que dá a forma geral:

[9] Brook Taylor (1685 -1731) matemático inglês.

[10] Nota da autora: Como $\epsilon = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$, deveríamos ter $\epsilon = \Delta x f^{'}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y) + \Delta y f^{'}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)$; porém, Agliberto não esclarece como obteve o símbolo de menor na desigualdade: $\epsilon < \Delta x f^{'}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y) + \Delta y f^{'}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)$.

Supõe-se que, como em geral não sabemos precisar o valor de $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$, o autor tenha utilizado um limitante superior para o erro.

$$\epsilon < \Delta x f^{'} x + \Delta y f^{'} y + \Delta z f^{'} z + ...$$

Salienta que devido ao erro devemos freqüentemente adicionar os seus termos independentes. Suponha calcular o erro de dois termos de sinais opostos, $0,07468$ e $-0,06359$:

$$\epsilon < 0,07468 - 0,06359; \text{ ou seja } \epsilon < 0,00009$$

o que não dá uma boa aproximação do erro, sendo que o problema de sinais opostos deve ser encarado como uma soma e não como uma subtração dos valores: $\epsilon < 0,07468 + 0,06359 < 0,13827 < 0,2$. O texto apresenta alguns exemplos de aplicações dos princípios estudados anteriormente; dentre os quais destacamos aqui o primeiro proposto pelo autor:

Exemplo 1 *Calcular o grau de precisão da fórmula* $\frac{7,5283}{\sqrt{9,235}}$ *cujos elementos são conhecidos a menos de uma unidade aproximativa de seus últimos números.*

Agliberto soluciona o problema da seguinte maneira:

Represente $7,5283$ *por* x *onde* $\Delta x < 0,0001$;

$9,235$ *por* y *onde* $\Delta y < 0,001$;

$$f = \frac{x}{\sqrt{y}}; \quad f'_x = \frac{1}{\sqrt{y}}; \; f'_y = \frac{-x}{2y\sqrt{y}}; \qquad \epsilon < \frac{\Delta x}{\sqrt{y}} + \frac{x \Delta y}{2y\sqrt{y}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{9,235}} < \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} < 0,4 \text{ e } \frac{x}{2y\sqrt{y}} = \frac{7,5283}{2 \times 9,235\sqrt{9,235}} < \frac{8}{2 \times 9 \times 3} = \frac{4}{27} < 0,2.$$

Substituindo encontra-se: $\epsilon < 0,4 \times 0,0001 + 0,2 \times 0,001 = 0,00024$.

Acrescentando $0,00024$ ao valor aproximativo de $\frac{7,5283}{\sqrt{9,235}}$ temos $0,00024 + 2,47731 = 2,47755$. Observando os valores $2,47731$ e $2,47755$ vemos que são diferentes apenas na quarta casa decimal. Podemos portanto, considerar seus três primeiros números decimais.

A resolução proposta por Agliberto, nos sugere que ele conhecia o valor aproximativo da fórmula $\frac{7,5283}{\sqrt{9,235}} \sim 2,47731$ porém, o mesmo não cita como obteve este valor.

O autor aborda ainda mais quatro outras aplicações sobre erros e aproximações para então tratar dos erros relativos e suas fórmulas.

> "Quand on a vue les erreurs relatives, le calcul devient plus simple s'il s'agit des formules algébriques. La raison en est évidente, car cette manière d'envisager les erreurs exige la division de l'erreur absolue donnée par l'expression par la formule considérée:"[11]

$$\Delta x f^{'} x + \Delta y f^{'} y + \Delta z f^{'} z + ...$$

Agliberto adota ε para o erro relativo que de forma geral pode ser escrito como:

$$\varepsilon < \frac{\Delta x f_x^{'}}{f} + \frac{\Delta y f_y^{'}}{f} + \frac{\Delta z f_z^{'}}{f} + ...$$

Para o produto temos a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} f &= xyz \qquad f_x' = yz \qquad f_y' = xz \qquad f_z' = xy \\ \varepsilon &< \frac{yz\Delta x}{xyz} + \frac{xz\Delta y}{xyz} + \frac{xy\Delta z}{xyz} \text{ ou } \varepsilon < \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} \end{aligned}$$

onde

$\frac{\Delta x}{x}$ é o erro relativo de x; $\frac{\Delta y}{y}$ é o erro relativo de y; $\frac{\Delta z}{z}$ é o erro relativo de z

O autor cita que este é um teorema demonstrado nos *Traités d'Arithmétique* assim como os teoremas para o quociente, potências e raízes:

"L'erreur relative d'un produit est égale à la somme des erreurs relatives des facteurs."[12]

"L'erreur relative d'une fraction est égale à la différence entre l'erreur relative du numerateur et celle du dénominateur."[13]

---

[11]Tradução da autora: 'Quando está em vista os erros relativos, o cálculo torna-se mais simples se tratar das fórmulas algébricas. A razão é evidente, porque esta maneira de encarar os erros exige a divisão do erro absoluto dado pela expressão pela fórmula considerada.' Parte extraída do Capítulo I, p.22.

[12]Tradução da autora: 'O erro relativo de um produto é igual à soma dos erros relativos dos fatores.' Parte extraída do Capítulo I, p.23.

[13]Tradução da autora: 'O erro relativo de uma fração é igual à diferença entre o erro relativo do numerador e a do denominador.' Parte extraída do Capítulo I, p.23.

"L'erreur relative de la puissance du m^{ième} degré d'un nombre approximatif est m fois plus grande que l'erreur relative de ce nombre."[14]

"L'erreur relative de la racine m^{ième} d'un nombre approximatif est m fois plus petite que l'erreur relative de ce nombre."[15]

O autor retoma os exemplos que havia feito anteriormente para mostrar agora seus cálculos por meio dos erros relativos. Propõe pensar no problema no sentido inverso, ou seja, se uma fórmula deve ser avaliada com uma dada aproximação, qual será a precisão de seus diversos elementos? Salienta e responde que mediante a série de Taylor é que se obtém a solução para esta questão. Sabendo que :

$$\varepsilon < \Delta x f^{'}x + \Delta y f^{'}y + \Delta z f^{'}z + ...$$

o problema é de natureza indeterminada pois queremos conhecer os valores $\Delta x, \Delta y, \Delta z$,etc, vinculados pela relação acima. Devemos observar se os valores atribuídos a $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ excederão a um certo limite, ou os valores x, y, z serão aproximados grosseiramente, mas a desigualdade permanecerá porque a soma dos termos $\Delta x f^{'}x + \Delta y f^{'}y + \Delta z f^{'}z + ...$ continuará maior que ε, o que é um absurdo, visto que a aproximação diminui à medida que os erros $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ tornam-se consideráveis.

A desigualdade fica então invertida para que a soma $\Delta x f^{'}x + \Delta y f^{'}y + \Delta z f^{'}z +$ ...não atinja o limite ε : $\varepsilon > \Delta x f^{'}x + \Delta y f^{'}y + \Delta z f^{'}z + ...$ lembra ainda o autor que devemos considerar todos os termos $\Delta x f^{'}x, \Delta y f^{'}y, \Delta z f^{'}z$, positivos e eles devem ser adicionados.

Salienta que se existem n termos onde cada um vale a $n - ésima$ parte de ε. Assim tem-se: $\Delta x < \frac{\varepsilon}{nf'x}$ $\quad \Delta y < \frac{\varepsilon}{nf'y}$ $\quad \Delta z < \frac{\varepsilon}{nf'z}$ tomados por falta (defeito).

Para elucidar a teoria, o autor insere algumas aplicações dos erros relativos; abaixo apresento o segundo exemplo proposto pelo mesmo.

Exemplo 2 *Qual precisão é necessária dar aos elementos* (π, e) *da fórmula* $0,251\pi e$ *de modo que a sua avaliação seja aproximada a* $0,00001$*, sabendo que o número* $0,251$*, é aproximado perto de 1 unidade do seu último número?*

[14]Tradução da autora: 'O erro relativo da potência do m^{ésimo} grau de um número aproximativo é m vez maior que o erro relativo deste número.' Parte extraída do Capítulo I, p.10.

[15]Tradução da autora: 'O erro relativo da m^{ésima} raíz de um número aproximativo é m vezes menor que o erro relativo deste número.' Parte extraída do Capítulo I, p.24.

Representando a fórmula $0,251\pi e$ por $x\pi e$, a desigualdade assim será expressa:

$$\begin{aligned} 0,00001 &> \Delta x\pi e + \Delta\pi 0,251e + \Delta e 0,251\pi, \\ \Delta x\pi e &< \frac{0,00001}{3}, \text{ ou ainda } \Delta x < \frac{0,00001}{3\pi e}, \end{aligned}$$

utilizando (π, e) por definição: $\pi = 3, e = 2$,

$$\Delta x < \frac{0,00001}{3 \times 3 \times 2} < 0,0000006.$$

Este resultado indica que a fórmula não comporta a aproximação de $0,00001$, porque seria necessário que o elemento $0,251$ fosse avaliado com uma precisão superior a $0,0000006$.

Se retornamos ao problema direto, para saber a precisão que comporta a fórmula $0,251\pi e$, na qual $0,251$ aproxima perto de 1 unidade do seu último número, e se supomos os valores (π, e) exatos, temos a relação $E < \pi e\Delta x$; tomando $\pi, e, \Delta x$, por excesso, $\pi = 4$, $e = 3$, $\Delta x = 0,001$; onde $E < 4 \times 3 \times 0,001 < 0,012$.

Segundo Agliberto, não podemos contar com uma aproximação superior à $0,012$ e devemos ainda determinar a precisão que nos convém (π, e) de modo que o erro não atinja este limite. Escreve-se a desigualdade $0,012 > \Delta x\pi e + \Delta\pi 0,251e + \Delta e 0,251\pi$e observa-se que, o termo $\Delta x\pi e$ agora conhecido, pode ser substituído pelo seu valor por defeito (falta), o que reduz a fórmula, para: $\Delta x = 0,001$ (por falta); $\pi = 3$ (por falta); $e = 2$ (por falta); tem-se por conseguinte:

$$0,012 > 0,006 + \Delta\pi 0,251e + \Delta e 0,251\pi, \text{ ou } 0,006 > \Delta\pi 0,251e + \Delta e 0,251\pi,$$

$$\Delta\pi 0,251e = \frac{0,006}{2} \text{ (por falta); e } \Delta e 0,251\pi = \frac{0,006}{2} \text{ (por falta)}$$

$$\Delta\pi = \frac{0,006}{2 \times e} \text{ (por falta) } = \frac{0,006}{6} = 0,001; \text{ e } \Delta e = \frac{0,006}{2 \times \pi} \text{ (por falta) } = \frac{0,006}{8} = 0,0007,$$

Conseqüentemente, pode-se tomar $\pi = 3,141$, e $e = 2,718$.

Comentários: Para elucidar a teoria, o autor trabalha com aplicações de erros relativos. Podemos perceber que a teoria de erros desenvolvida pelo Prof. Agliberto utiliza noções fundamentais de erro e aproximação de forma que fica de fácil entendimento para o leitor. Neste capítulo, bem como no livro todo, Agliberto não apresenta demonstrações dos teoremas que enuncia; faz a validação dos resultados por meio de exemplos.

Apesar de todo o cuidado com os cálculos de erros e suas aproximações, muitos de seus exemplos neste capítulo apresentam uma resolução bastante suscinta, onde o autor conclui algumas repostas sem deixar claro o processo que utilizou para resolver algumas passagens.

Neste capítulo o autor cita a seguinte obra como referência bibliográfica: *Traités d'arithmétiques.*[16]

3.3 O Capítulo II: Cálculo algébrico e de aproximações

Sumário:

1. Diferença entre o cálculo algébrico e o cálculo de aproximações.

2. Aproximações de adição e subtração.

3. Subtração algébrica.

4. Multiplicações aproximadas pela regra de Lagrange[17].

5. Multiplicações algébricas, pela 'rhabdologie' de Napier[18] e pela tábua de produtos de multiplicadores e pela regra de Fourier.

6. Divisão algébrica pela 'rhabdologie' de Napier e pela tábua de produtos de divisores.

[16] Nota da autora: Ao que parece, Agliberto está se referindo a todas as obras de aritmética conhecidas na época.

[17] Joseph-Louis Lagrange (1736 -1813), matemático italiano, trabalhou com diversas áreas, dentre elas equações diferenciais, teoria de números e grupos, mecânica analítica, etc.

[18] John Napier (1550 -1617), matemático escocês conhecido pelo trabalho que desenvolveu com os logaritmos.

7. Divisão algébrica e aproximações pela regra de Fourier, dita "divisão ordinária".

8. Aplicação da divisão ordinária à resolução de equações numéricas.

9. Conseqüências das regras de Fourier relativas à extração da raiz quadrada.

10. Extração da raíz quadrada aproximada.

O autor começa o capítulo salientando a diferença entre o cálculo abreviado e o cálculo aproximado esclarecendo que um cálculo pode ser feito por um procedimento abreviado e contudo ser exato e uma operação pode ser calculada aproximadamente sem abreviaturas.

Para a adição e subtração aproximada coloca o seguinte problema:

Problema 1 *Suponha que deve-se adicionar os números*[19] $32,451603$; $2,1152791$; $0,0291873$ *e* $123,2015943$, *onde deseja-se que a soma tenha um erro máximo de* $0,001$.

$$\begin{array}{r}
32,4516 \\
7,0215 \\
2,1152 \\
0,0291 \\
123,2015 \\
\hline
164,8189
\end{array}$$

Segundo Agliberto se tomarmos cada fator aproximado com quatro casas decimais, faremos um erro máximo de $0,001$. Considerando então, que o resultado seja $164,8189$ representamos por S o valor exato da soma, por α o erro absoluto da soma aproximada por falta, e β o erro por excesso, temos

$$S = 164,818 + \alpha$$
$$S = 164,819 - \beta$$

[19]Nota da autora: Encontramos um provável erro de edição, visto que o número $7,0215$, a ser adicionado, não aparece no enunciado do exemplo.

onde a diferença será $\alpha+\beta = 0,001$; ou seja, tomando $164,818$ ou $164,819$, o erro continua sempre menor que $0,001$[20]. Para a subtração propõe o autor:

Problema 2 *Suponha que se deseje subtrair do número* $8,64157$ *o número* $5,286957$ *a menos de* $0,001$.

Representando por α o erro absoluto do primeiro núemro, $8,641$ e β o erro absoluto do segundo número, $5,286$ temos

$$\begin{array}{l} 8,641+\alpha \\ 5,286+\beta \\ \hline 3,355+(\alpha-\beta) \end{array}$$

onde α e β são menores do que $0,001$, e a sua diferença portanto também será menor do que $0,001$.

O autor mostra ainda a subtração abreviada, onde a subtração pode ser reduzida à adição pelo emprego dos complementos numéricos.

Exemplo 3 *Seja a subtração* $964-257$ *adicionando e simplificando o mesmo número, não se altera a operação;*

$$964-257+1000-1000 \text{ reescrevemos como } 964+(1000-257)-1000.$$

A diferença $1000-257$ é dita o complemento do número 257, ou seja 743.Pode-se escrever o número 1707 com uma barra para indicar que este número deve ser subtraído, assim $964+\bar{1}743 = 707$.

Segundo o autor podemos dizer que o complemento de um número é o que falta para formar uma unidade de ordem imediatamente superior, ou seja, o complemento de 23600 é a diferença entre $100000-23600$. O autor salienta:

"L'emploi de la soustraction par complément a une grande importance pra-

[20]Nota da autora: Na resolução do exemplo, o autor retira 3 casas decimais, para obter a aproximação desejada, manipulando o resultado e o método.

tique, quand il y a plusieurs nombres à sommer il à retrancher."[21]

Para os métodos abreviados de multiplicação, o autor cita Lagrange para mostrar que os cálculos podem ser feitos começando pelos números de maior valor do multiplicador:

> "Mais, dit Lagrange, rien n'oblige à commencer par la gauche; et à dire vrai, je ne sais pas pourquoi on ne préfère pas cette manière, qui aurait l'avantage de donner tout de suite les chiffres de la plus grande valeur; car, ordinairement dans la multiplication des plus grands nombres, ce qui intéresse le plus, ce sont les derniers rangs des chiffres; souvent même on ne fait la multiplication que pour connaître quelques-uns des chiffres des derniers rangs; et c'est là, pour le dire en passant, un des grands avantages du calcul par les logartihmes, lesquels donnent toujours, dans les multiplications, comme dans le divisions, ainsi que dans les élévations aux puissances et dans l'extraction des racines, les chiffres suivant l'ordre de leur rang, à commencer par le plus élevé, c'est-à-dire en allant de gauche à droite."[22]

Agliberto comenta que para fazer uma multiplicação de números decimais aproveitando as vantagens do método, é necessário seguir o modo operacional indicado por Lagrange:

> "On écrit le multiplicateur au-dessous du multiplicande, de manière que le chiffre des unités du multiplicateur soit au-dessous du dernier chiffre du multiplicande. Ensuite, on commence par le dernier chiffre à gauche du multiplicateur, qu'on multipliera comme à l'ordinaire par tous ceux du multiplicande, en commençant par le dernier à droite, et en allant successivement vers la

[21] Tradução da autora: 'O emprego da subtração por complemento tem uma grande importância prática, quando há vários números a somar ou a subtrair.' Parte extraída do Capítulo II, p.40.

[22] Tradução da autora: 'Mas, diz Lagrange, nada obriga a começar pela esquerda; e para dizer a verdade, não sei porque não se prefere esta maneira, que teria a vantagem de dar imediatamente os números de maior valor; porque, geralmente na multiplicação de números maiores, o que mais interessa, são as últimas filas dos números; freqüentemente mesmo indica-se a multiplicação apenas para alguns dos números das últimas filas; é esta, diga-se de passagem, uma das grandes vantagens do cálculo pelos logaritmos, os quais dão sempre, nas multiplicações, como em divisões, bem como nas elevações às potências e na extração das raízes, os números de acordo com a ordem da sua fila, começando pelo mais elevado, ou seja, indo da esquerda para a direita'.

Leçons élémentaires sur les Mathématiques données à l'École normale en 1795 (Journal de l'École Polytechnique, 7º et 8º cahiers, t.II,1812). Parte extraída do Capítulo II, p.42.

> gauche; et l'on observera de poser le premier chiffre de ce produit au-dessous du chiffre du multiplicateur, et les autres successivement à gauche de celui-ci. On continuera de même pour le second chiffre du multiplicateur, en posant également au-dessous de ce chiffre le premier chiffre du produit, et ainsi de suite. La place de la virgule, dans ces différents produits, sera la même que dans le multiplicande, c'est-à-dire que les unités des produits se trouveront toutes dans une même ligne verticale avec celles du multiplicande; par conséquent, celles de la somme de tous les produits ou du produit total seront encore dans la même ligne."[23]

Conclui ao final dos exemplos que é possível formular a seguinte regra que também foi dada por William Oughtred:[24]

1^o Fazendo avançar ou recuar a vírgula no multiplicador de maneira que se tenha um só número na sua parte inteira, cada número opera em sentido oposto no multiplicando.

2^o Escrevemos o multiplicador abaixo do multiplicando de modo que o número das unidades do multiplicador esteja abaixo último número cuja a fileira é dos produtos parciais.

3^o Devemos multiplicar o primeiro número do multiplicador a partir do último número do multiplicando; o segundo número do multiplicador a partir do último e assim por diante.

[23]Tradução da autora: 'Escreve-se o multiplicador abaixo do multiplicando, de modo que o número das unidades do multiplicador esteja abaixo do último número do multiplicando. Seguidamente, começa-se pelo último número à esquerda do multiplicador, que multiplicar-se-à com todos os do multiplicando, começando pelo último à direita, e indo sucessivamente para a esquerda; e observará-se de pôr o primeiro número deste produto abaixo do número do multiplicador, e os outros sucessivamente à esquerda deste. Continuar-se-à de mesmo modo para o segundo número do multiplicador, pondo igualmente abaixo deste número o primeiro número do produto, e assim por diante. O lugar da vírgula, diferente em produtos, será a mesma que no multiplicando, ou seja que as unidades dos produtos encontrar-se-ão numa mesma linha vertical com as do multiplicando; por conseguinte, as da soma dos produtos ou o produto total estarão ainda na mesma linha.' *Leçons élémentaires sur les Mathématiques données à l'École normale en 1795 (Journal de l'École Polytechnique, 7^o et 8^o cahiers, t.II,1812).* Parte extraída do Capítulo II, p.43.

[24]William Oughtred, geômetra inglês do século XVII que segundo Agliberto, reproduziu quase todos os tratados de aritmética em seu "*Artis analytical praxis*". Parte extraída do Capítulo II, p.46.

Exemplo 4 *Multiplicar* 192, 643217 *por* 32, 15423 :

	192,643217
	32,15423
5779	29651
385	286434
19	2643217
9	63216085
	770572868
	385286434
	577929651
6194	29430735791

Multiplicando 3 por 192, 643217 temos a primeira linha figura acima com o número 5779, 29651; o próximo número a ser multilpicado é o 2 que resultará 385, 286434 e, assim por diante até efetuarmos a multiplicação do último número do multiplicador, 3, por 192, 643217 resultando577929651.

Depois de feitas as multiplicações, devemos fazer a adição dos resultados parciais, assim obtemos como resposta para a multiplicação, o número 6194, 29430735791.

O autor faz uma breve explicação da regra de multiplicação e sistematização das abreviaturas através da chamada Tábua de Pitágoras como fez Napier.

Salienta que o método não foi largamente utilizado por necessitar da tábua e por existirem outros mais fáceis, mas tem uma grande importância histórica pois foi por meio deste método que Napier iniciou a abordagem da teoria dos logaritmos.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	3	6	9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	4	8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
6	6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
7	7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

Tábua de Pitágoras

Para multiplicar o número 123456789 por 6 tem-se na linha de índice 6.

			1			1		1	
6	6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
	7	4	0	7	4	0	7	3	4

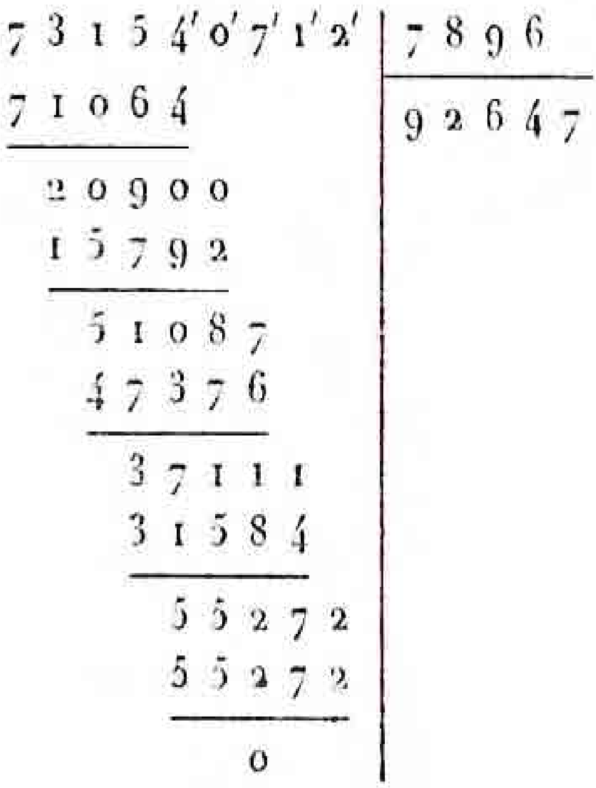
onde devemos acrescentar a partir das unidades 5 e 8, das centenas, dos milhares etc, que resulta em 740740734.

A este método Napier chamou *"rhabdologie"* do grego $\rho\alpha\beta\delta o\varsigma$, vara e $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, cálculo. Segundo a *"rhabdologie"* também é possível fazer cálculos de divisões.

Salienta o autor que o método de Napier não possui grande utilização prática, dado que o método de Fourier para a multiplicação é conhecido, e que consiste em efetuar a multiplicação sem escrever os produtos parciais. Para empregar este método escrevemos o multiplicando, e o multiplicador de traz para frente. Multiplicamos cada posição da direita para a esquerda escrevendo o resultado e seguidamente da esquerda para a direita.

Explica ainda o autor, que da mesma forma que a *"rhabdologie"* de Napier faz da multiplicação a adição, transforma a divisão em subtração.

Exemplo 5 *Dividir* 731540712 *por* 7896.



1	7	8	9	6
1	7	8	9	6
2	1/4	1/6	1/8	1/2
3	2/1	2/4	2/7	1/8
4	2/8	3/2	3/6	2/4
5	3/5	4/0	4/5	3/0
6	4/2	4/8	5/4	3/6
7	4/9	5/6	6/3	4/2
8	5/6	6/4	7/2	4/8
9	6/3	7/2	8/1	5/4

Para efetuar a divisão, separamos primeiramente no dividendo uma parte capaz de conter o divisor, ou seja 73154 e procuramos nas linhas horizontais da tabela ao lado, o produto imediatamente inferior à este número; encontramos o índice 9; ou seja, o primeiro quociente é 9; escrevemos então sob o dividendo parcial, fazemos a subtração e escrevemos ao lado o número seguinte do dividendo; temos então o dividendo parcial 20900. Procuramos na linha horizontal o produto imediatamente inferior à 20900, correspondente ao índice 2; ou seja o quociente é 2, e assim por diante.

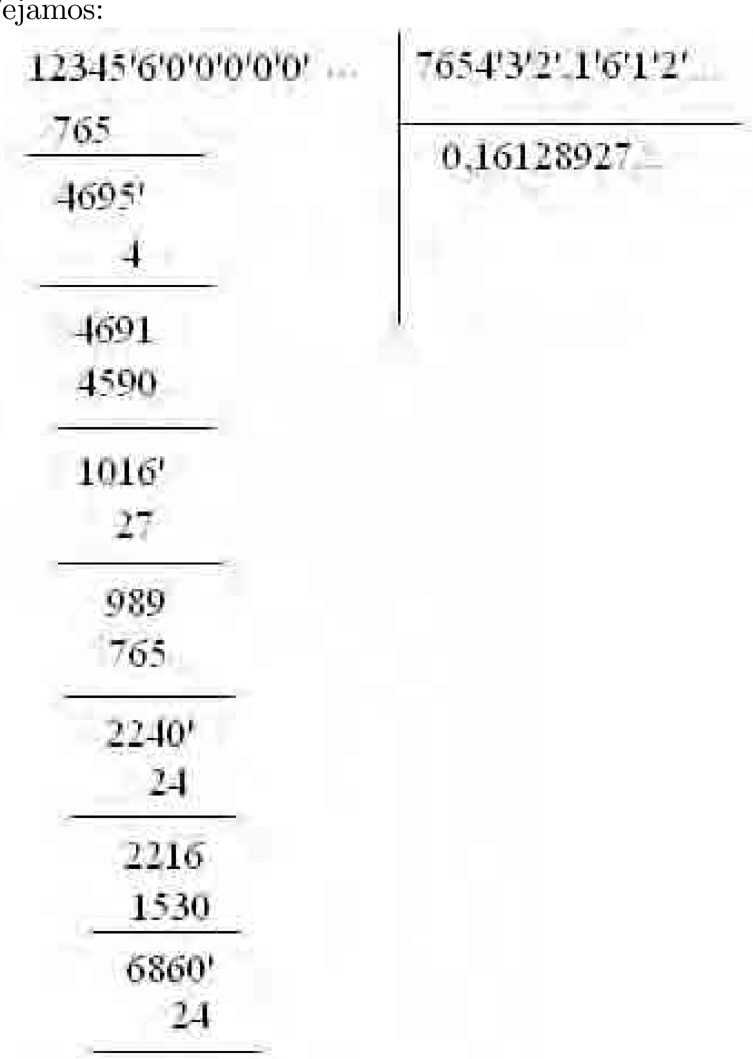
Agliberto mostra ainda neste capítulo como Fourier aplica a sua divisão ao desenvolvimento da raíz de uma equação qualquer.

$$x^2 + 765432x - 123456 \;=\; 0$$

$$x\,(765432 + x) = 123456$$
$$x = \frac{123456}{765432 + x}$$

faz-se a divisão de 123456 por 765432 onde 765 é divisor designado. O primeiro número que se obtém exprime os décimos, o seguinte 6, os centésimos, e assim por diante, onde $x = 0,16...$

Vejamos:



6836
6120

7160′
52

7108
6885

2230′
102

2128
1530

5980′
67

5913
5355

558

"On parvient ainsi, dit Fourier, à l'expression des racines des équations d'un degré quelconque, ou même de celles qu'on a appelées transcendantes. Nous ne nous arrêterons point à cette méthode exégétique, quelque générale qu'elle soit, parce que les règles dont nous nous servons pour le calcul des racines sont d'une application plus prompte et plus facile. Cet emploi de la division ordonnée suppose que l'équation est convenablement préparée. A la vérité, cette transformation et celles qui peuvent devenir nécessaires dans la suite de l'opération se réduisent toujours à diminuer la valeur de la racine d'une quantité qui en est très approchée, et l'on y parvient faciliment au moyen des règles données dans l'Ouvrage Analyse des équations déterminées. [25]

[25]Tradução da autora: 'Chega-se assim, diz Fourier, à expressão das raízes das equações de grau qualquer, ou mesmo daquelas que chamou-se transcendentes. Nós não pararemos neste método minucioso de interpretação, por geral que seja, porque as regras das quais servimo-nos para o cálculo das raízes são aplicáveis mais rápida e facilmente. Este emprego da divisão ordenada supõe que a equação é preparada convenientemente. À verdade, esta transformação e as que podem ficar necessárias na sequência da operação reduzem-se sempre em diminuir o valor da raíz de uma quantidade que é muito aproximada , e chega-se facilmente as regras dadas na obra *Analyse des équations déterminées, pag.195.'* Parte extraída do Capítulo II, p.64.

Agliberto propõe mostrar a importância teórica da regra de Fourier relativa à multiplicação sem a necessidade de escrever os produtos parciais. Vamos executar a extração da raiz quadrada como uma divisão cujo divisor e quociente são desconhecidos, mas apresentados à condição de serem iguais. Encaramos primeiro esta operação como um caso específico da divisão ordenada, do qual o divisor designado é o primeiro número da raíz.

O autor termina o capítulo com a regra de extração da raíz quadrada abreviada que resulta na regra de extração abreviada de qualquer raíz.

Seja N o número dado, α a parte da raíz já encontrada e x a parte desconhecida.

$$\sqrt{N} = \alpha + x,$$

ou $N = (\alpha + x)^2 = \alpha^2 + 2\alpha x + x^2$, ou ainda

$$N - \alpha^2 = 2\alpha x + x^2 = 2\alpha\left(x + \frac{x^2}{2\alpha}\right)$$

assim

$$\frac{N - \alpha^2}{2\alpha} = x + \frac{x^2}{2\alpha}$$

onde 2α é composto pelo dobro do número de números cujo x é composto, e $\frac{x^2}{2\alpha}$ é menor que 1, e portanto uma quantidade que pode ser negligenciada quando se quer apenas números inteiros.

Comentários: Neste capítulo o autor apresenta os métodos para a resolução dos cálculos sem suas demonstrações e provas; porém explica detalhadamente como cada método funciona através de vários exemplos.

Todos os métodos e exemplos inicialmente propostos pelo autor parecem ter sido escolhidos de forma a tornar mais fácil a compreensão dos procedimentos. Apresenta os métodos relativos a multiplicação e divisãoatravés da regra de Fourier e Napier.

Agliberto faz os primeiros métodos visando chegar ao ponto que consideramos o mais importante do capítulo que é a divisão ordinária aplicada a resolução de equações numéricas e as regras de Fourier para a extração da raíz quadrada.

Muitos dos métodos citados e utilizados por Agliberto não são mais ensinados hoje nos cursos de cálculo numérico, tendo em vista que os cálculos manuais foram gradativamente substituídos pelos computadores.

O autor cita neste capítulo as seguintes obras : *Leçons élementaires sur les mathématiques donées à l'école normale en 1795 - Journal de l'école Polytechnique, 7º et 8ª Cahiers, t.III, 1812. (Lagrange); Artis analyticae praxis (William Oughtred); Analyse des équations déterminées (Fourier).*

3.4 O Capítulo III: Separação das raízes de equações numéricas quaisquer.

Sumário:

1. Os métodos de resolução detalhada de equações que vem suprir a impossibilidade de resoluções algébricas.

2. Observação fundamental que serve de base ao método de Fourier.

3. Observação geral de Rolle[26].

4. Separação de raízes reais.

5. Redução do teorema de De Gua ao conjunto da teoria de Fourier.

6. Distinção de raízes singulares.

7. Aplicação a qualquer exemplo.

8. Redução do teorema de Descartes[27] ao conjunto da teoria de Fourier.

9. Aplicação, feita simultaneamente por Lagrange e Budan[28], do teorema de Descartes a separação de raízes de uma equação qualquer.

[26]Michael Rolle (1652 -1719), matemático francês conhecido pelo teorema que leva seu nome e que foi publicado em seu *Méthode pour résoudre les égalitéz.*

[27]René Descartes (1596 -1650) matemático francês que trabalhou com geometria.

[28]Ferdinand François Désiré Budan de Boislaurent (1761 -1840), médico francês considerado um matemático amador, descobriu a regra em que uma equação polinomial tem raízes entre dois números dados.

10. Algoritmo deste método.

11. Modificação especial apontada por Sturm[29] à teoria geral de Fourier para o seu caso de equações algébricas.

12. Considerações gerais sobre a diferença de métodos de Fourier e Budan e sua prioridade na concepção de Fourier.

O autor inicia o capítulo chamando atenção para a trajetória e desenvolvimento do estudo das equações de terceiro e quarto grau. Com bastante ênfase filosófica descreve a descoberta dos geômetras no fim do século XVI sobre as soluções destas equações.

> "L'impuissance de la raison théorique étant ainsi reconnue, on fit appel à la raison pratique; l'empirisme vint donc suppléer le dogmatisme; la résolution exégétique des équations vint remplacer la résolution algébrique."[30]

Salienta que embora Viète[31] em seu *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione ex opere resolutae mathematicae analysis seu algebra nova*, tenha tentado resolver o problema numérico das equações, foi Lagrange quem colocou o mesmo.

Segundo o autor, a resolução algébrica das equações exige a classificação para cada tipo, tendo em vista um meio de interpretação minuciosa do problema que pode ser tomado em qualquer generalidade, quer tratando-se de equações algébricas, quer tratando-se de equações transcendentais. Foi isso que fez Fourier quando concebeu primeiro um método para separar raízes, e em seguida o método de Newton para avaliar as raízes incomensuráveis.

Segundo o autor, devemos ter em vista neste novo cálculo as raízes procuradas; trata-se das raízes ditas normais que são apenas comensuráveis dividindo-se em inteiras e naturalmente fracionárias.

Segundo Agliberto, os geômetras consideravam as raízes negativas e singulares como inúteis. A denominação de imaginários indica o ponto de vista numérico considerado

[29] Jacques Charles François Sturm (1803 -1855), matemático suíço que trabalhou com equações diferenciais, geometria projetiva e geometria diferencial.

[30] Tradução da autora: 'A impotência da razão teórica assim reconhecida, recorreu-se à razão prática, o empirismo veio por conseguinte substituir o dogmatismo; a resolução por interpretação minuciosa das equações veio substituir a resolução algébrica.' Parte extraída do Capítulo III, p.76.

[31] François Viète (1540 -1603), francês, membro do conselho do rei, Viète ocupava seu tempo de lazer com a matemática. Contribuiu com a aritmética, álgebra, geometria e trigonometria.

no cálculo algébrico. Depois destas considerações, o autor expõe o método de Fourier partindo da equação algébrica racional e inteira na forma

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + ... + sx^2 + tx + u = 0$$

que Fourier representa por $X = 0$, e escreve as suas derivadas na ordem inversa $X^{(m)}, X^{(m-1)}, X^{(m-2)}, ...X^{ii}, X^{i}, X$.

Segundo Agliberto, Fourier observa que existem nesta equação variações de sinais positivos e negativos, resultados da substituição de x por $+\infty$ e $-\infty$. Para a equação $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ escreve-se a sequência

$$\begin{aligned} X^{v} &= 2.3.4.5 \\ X^{iv} &= 2.3.4.5x + 2.3.4a \\ X^{iii} &= 3.4.5x^2 + 2.3.4ax + 2.3b \\ X^{ii} &= 4.5x^3 + 3.4ax^2 + 2.3bx + 2c \\ X^{i} &= 5x^4 + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ X &= x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \end{aligned}$$

onde

x	X^V	X^{IV}	X^{III}	X^{II}	X^I	X
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Ao fazer variar a incógnita em um intervalo que contenha raízes reais quaisquer da equação, observamos que o primeiro valor que excede a raíz perde uma variação. Apresento o primeiro exemplo proposto pelo autor para a compreensão do método:

Exemplo 6 *Seja a equação* $x^4+2x^3-25x^2+26x+120 = 0$*, cujas raízes são* $-4, -2, +3, +5$ *forma-se a sequência*

$$\begin{aligned} X^{IV} &= 24, \\ X^{III} &= 24x - 12, \\ X^{II} &= 12x^2 - 12x - 50, \\ X^{I} &= 4x^3 - 6x^2 - 50x + 26, \\ X &= x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 26x + 120; \end{aligned}$$

fazendo x variar de -5 até $+6$, e assinalando os resultados destas formações quando x atinge os valores $-5, -3, +1, +4, +6$ em vez de x, temos:

x	X^{IV}	X^{III}	X^{II}	X^{I}	X
-5	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
-3	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$+1$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$+4$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$+6$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Com esta substituição percebemos que não existem raízes negativas além de 5 pois a substituição -5 dá variações de sinal; não há raízes positivas superiores à 6 pois a substituição de $+6$ resulta apenas valores positivos iguais. Substituindo -3 na equação há uma variação de sinal, há portanto uma raíz entre -5 e -3. Conclui o autor, que há de fato a raíz -4, da mesma forma temos uma raíz entre -3 e $+1$ outra entre 1 e 4 e outra entre 4 e 6 o que está de acordo com as raízes conhecidas anteriormente.

Agliberto faz o exemplo para confirmar e validar a teoria exposta por Fourier. O que podemos observar é que o autor conhecia as raízes da equação $x^4 + 2x^3 - 25x^2 + 26x + 120 = 0$ antecipadamente, pois ele no início do exemplo já descreve quem são os valores das raízes.

Estas considerações feitas por Fourier para equações algébricas foram estendidas por ele para as equações transcendentais.

Agliberto considera que devemos retornar com isto à observação original de Rolle, que segundo ele ficou esquecida por cerca de um século e que Fourier soube melhorar. Consideramos:

1^o Se a é uma raíz da equação $f(x) = 0$ e h uma quantidade tal que entre $a - h$ e $a + h$ não exista outra raíz a; substitui-se sucessivamente $a - h$ e $a + h$ em x nesta equação tem-se resultados de sinais opostos.

2^o Quando x varia continuamente de $a - h$ até $a + h$, a série dos sinais sofre uma variação pois $f(x)$ muda de sinal enquanto que $f'(x)$ não se altera.

3^o As duas formações $f(x)$ e $f'(x)$ tem sinais contrários para $a - h$ e mesmo sinal para $a + h$ quando supõe-se que $a - h < a + h$.

Ao aplicar a fórmula do resto ao desenvolvimento de $f(a - h)$ pela série de Taylor, temos $f(a-h) = f(a) - hf'(a-\theta h)$ como a é uma raíz de $f(x) = 0$, resulta $f(a) = 0$ então $f(a-h) = -hf'(a-\theta h)$;

$$\frac{f(a-h)}{f'(a-\theta h)} = -h, \text{ou ainda } \frac{f(a+h)}{f'(a+\theta h)} = h$$

Isto mostra que $f(x)$ e $f'(x)$ possuem sinais opostos para $x = a - h$ e mesmo sinal para $x = a + h$, ou seja, são de sinais opostos antes de x crescente atingir um raíz real de $f(x) = 0$ e mesmo sinal após. Se a e b são raízes reais e consecutivas da equação $f(x) = 0$, ou seja, entre a e b esta equação não tem outra raíz e que $a < b$ temos então duas hipóteses a considerar:

Primeira hipótese: $f(a-h) = -$.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$a-h$	$+$	$-$
$a+h$	$+$	$+$

Se $f(a+h) = +$, temos igualmente $f(b-h) = +$, dado que entre $a+h$ e $b-h$ a equação$f(x) = 0$ não tem nenhuma raíz. Temos por sequência

x	$f'(x)$	$f(x)$
$b-h$	$-$	$+$
$b+h$	$-$	$-$

Este resultado mostra-nos que a primeira derivada da equação dada tem uma raíz compreendida entre os limites a e b, porque os valores $a+h$ e $b+h$ substituídos em x na equação $f'(x) = 0$, temos resultados de sinais contrários.

Segunda hipótese: $f(a-h) = +$.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$a-h$	$-$	$+$
$a+h$	$-$	$-$
$b-h$	$+$	$-$
$b+h$	$+$	$+$

Para $f(a+h) = +$, tem-se $f(b-h) = +$, visto que entre $a+h$ e $b-h$ a equação $f(x) = 0$ não possui raíz.

Quando $a+h$ e $b-h$ são substituídos em x na equação derivada $f'(x) = 0$ produzem resultados de sinais contrários. As raízes da equação dada são os limites das raízes da sua derivada, e reciprocamente. Esta é a observação original de Rolle, chamado método das *cascatas* divulgado no seu **Algebra** em 1690. De acordo com este método, as raízes de uma equação dependem de uma equação formada pela sua primeira derivada, e por conseguinte de uma equação de um grau inferior em uma unidade, e os limites das raízes desta, dependem da mesma maneira de uma equação de um grau menor em uma unidade, e assim por diante. O autor comenta que Père Reyneau[32], fez uma exposição meticulosa deste método no seu *Analyse démontrèe.*

A seguir Agliberto passa a expor o método de Fourier, onde supõe que forma-se a seguinte sequência de derivadas incluindo a equação dada:

$$f^{m}(x), f^{m-1}(x), f^{m-2}(x), ..., f''(x), f'(x), f(x).$$

Supondo que x varie continuamente, o autor mostra os casos onde x atinge uma raíz real da equação dada, uma raíz de uma das equações derivadas e uma raíz real das várias equaçõs sucessivas.

Primeira hipótese: Suponha que x atinja um valor a, raíz da equação $f(x) = 0$; dando a a um crescimento positivo $+h$ e um crescimento negativo $-h$, tão pequeno que entre $a-h$ e $a+h$ não tenha nenhuma raíz de $f(x) = 0$ nem das suas derivadas. Desenvolvendo a equação sucessivamente com este dois acréscimos, tem-se $f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{2.3}f'''(a) + ...$, e $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{2.3}f'''(a) + ...$, observando que $f(a)$ é nulo, porque a é por hipótese raíz da equação $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(a-h) &= -hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{2.3}f'''(a) + ..., \\ f(a+h) &= +hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{2.3}f'''(a) + ..., \end{aligned}$$

Pode-se supor h tão pequeno que o primeiro termo do segundo membro destas duas igualdades seja maior que a soma dos outros, de modo que os sinais de $f(a-h)$ e $f(a+h)$ dependam exclusivamente do sinal do primeiro termo. Se $f'(a)$ é positivo, $f(a-h)$ será negativo; se $f'(a)$ é negativo, $f(a-h)$ é positivo; estas considerações são também aplicáveis $f(x+h)$. Suponha sucessivamente os dois casos $f'(a) = +$ e $f'(a) = -$.

[32]Segundo Agliberto, Père Reyneau um geômetra do século XVIII, apresenta uma exposição do método na página 303 de seu livro *Analyse démontrèe.* Parte extraída do Capítulo III, p.84.

Primeiro caso: $f'(a) = +$. **Segundo Caso:** $f'(a) = -$.

x	$f'(x)$	$f(x)$	x	$f'(x)$	$f(x)$
$a-h$	$+$	$-$	$a-h$	$-$	$+$
a	$+$	0	a	$-$	0
$a+h$	$+$	$+$	$a+h$	$-$	$-$

Vemos que nos dois casos há uma perda de variação.

Segunda hipótese: Estes são os sinais quando uma das derivadas se anula para $x = a$. Seja $f^n(x)$ esta derivada que se torna nula para $x = a$; aplica-se à $f^n(x)$ e $f^{n+1}(x)$ as mesmas considerações que em relação a $f(x)$ e $f'(x)$, porque $f^{n+1}(x)$ é a derivada de $f^n(x)$, como $f'(x)$ é a derivada de $f(x)$. Reproduzindo os dois casos anteriores e combinando com as hipóteses de $f^{n+1}(a) = +$ e $f^{n+1}(a) = -$, tem-se:

Primeiro caso: $f^{n+1}(a) = +$. **Segundo caso:** $f^{n+1}(a) = -$.

x	$f^{n+1}(x)$	$f^n(x)$	$f^{n-1}(x)$	x	$f^{n+1}(x)$	$f^n(x)$	$f^{n-1}(x)$
$a-h$	$+$	$-$	$+$	$a-h$	$-$	$-$	$+$
a	$+$	0	$+$	a	$-$	0	$+$
$a+h$	$+$	$+$	$+$	$a+h$	$-$	$+$	$+$
$a-h$	$+$	$-$	$-$	$a-h$	$-$	$-$	$-$
a	$+$	0	$-$	a	$-$	0	$-$
$a+h$	$+$	$+$	$-$	$a+h$	$-$	$+$	$-$

Como não há não outras combinações possíveis, conclui-se, que ou há duas perdas de variações, ou não tem nenhuma. Há duas perdas de variações quando $x = a$, substituído em $f^{n+1}(x)$ e $f^{n+1}(x)$, dá resultados de mesmo sinal; não há perda de sinal quando os resultados são de sinais contrários.

Terceira hipótese: Examinamos agora quando várias derivadas consecutivas anulam-se ao mesmo tempo, e procuramos seguidamente o significado algébrico e geométrico deste fenômeno. Suponhamos que haja i derivadas consecutivas que se anulam desde $f^{n-i}(x)$ até a $f^n(x)$. Observamos que

$$\begin{aligned} f^n(a+h) &= f^n(a) + hf^{n+1}(a) + \frac{h^2}{2}f^{n+2}(a) + \frac{h^3}{2.3}f^{n+3}(a) + \frac{h^4}{2.3.4}f^{n+4}(a) + ... \\ f^{n-1}(a+h) &= f^{n-1}(a) + hf^n(a) + \frac{h^2}{2}f^{n+1}(a) + \frac{h^3}{2.3}f^{n+2}(a) + \frac{h^4}{2.3.4}f^{n+3}(a) + ... \end{aligned}$$

e ainda, $f^n(a) = 0, f^{n-i}(a) = 0, f^{n-2} = 0, ..., f^{n-i+1}(a) = 0$, fazendo a substituição de $-h$ por $+h$, tem-se

$$f^n(a-h) = -hf^{n+1}(a) + \frac{h^2}{2}f^{n+2}(a) - \frac{h^3}{2.3}f^{n+3}(a) + \frac{h^4}{2.3.4}f^{n+4}(a) - ...$$

$$f^{n-1}(a-h) = +\frac{h^2}{2}f^{n+1}(a)+\frac{h^3}{2.3}f^{n+2}(a)+\frac{h^4}{2.3.4}f^{n+3}(a)+-\frac{h^5}{2.3.4.5}f^{n+4}(a)+...$$

A observação destes resultados traduz o princípio:

> "Lorsque la substitution de a au lieu de x annule i dérivées à partir de $f^n(x)$, on écrit près des zéros; au lieu de $a+h$, toujours le même igne que $f^{n+i}(a)$, et au lieu de $a-h$ des signes alternés, le premier de signe opposé à celui de $f'^{n+i}(a)$. Telle est la faouse règle du duoble signe." [33]

Segundo Agliberto, concluimos que:

1^o Se a é uma raíz da equação $f(x)=0$, substituindo no lugar de a dois valores infinitamente aproximados para baixo e para cima deste valor, há uma variação.

2^o Se a é uma raíz de qualquer uma das derivadas, esta substituição passa de duas variações à nenhuma variação.

3^o Se a é uma raíz de i derivadas, há $2i$ variações.

Suponha a seguinte sequência das perdas de variações :

x	$f^n(x)...f^{r+1}(x)$	$f^r(x)$	$f^{r-1}(x)...f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
a					
	0 ... 1	1	2 2	2	2
b					

Pode-se considerar cada um destas derivadas como uma formação primitiva, desde que consideremos a derivada imediatamente superior como a primeira derivada, a seguinte como a segunda, e assim por diante. Para $f^{r-1}(x)=0$, representada por $F(x)=0$ como a equação primitiva, sabe-se que a sequência dos índices mostra que $f^{r-1}(x)=0$ ou $F(x)=0$ tem duas raízes entre a e b. Igualando $F(x)=0$ à uma variável y e procurando sua representação geométrica sem olhar as derivadas $F'(x)=0$ e

[33] Tradução da autora: 'Quando a substituição de a no lugar de x anula i derivadas a partir de $f^n(x)$, escreve-se perto dos zeros, no lugar $a+h$, sempre o mesmo sinal que $f^{n+1}(a)$, e ao lugar de $a-h$ dos sinais alternados, o primeiro de sinal oposto ao de $f^{n+1}(a)$. Esta é a famosa regra do duplo sinal.' Parte extraída do Capítulo III, p.88.

$F''(x) = 0$, temos uma dupla imagem, porém quando utilizamos as derivadas percebe-se que a equação $F'(x) = 0$ tem uma raíz entre os limites, que representa um ponto de mínimo em I e máximo em y[34], ou seja ponto onde a tangente é paralela ao eixo das abscissas e $F''(x) = 0$ tem uma raíz entre os limites o que indica o ponto de inflexão M.

Graficamente:

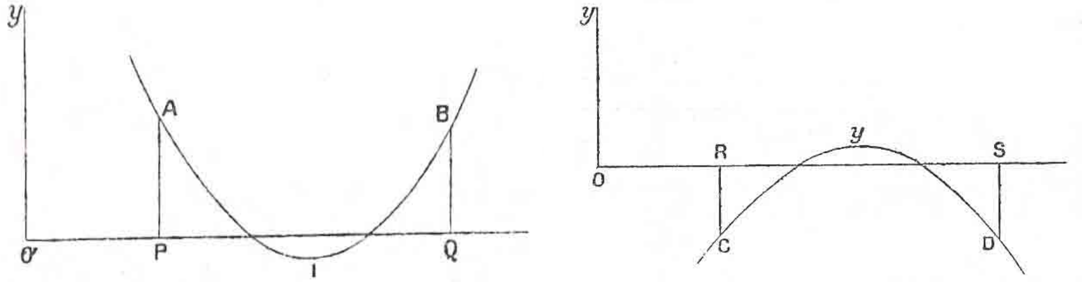
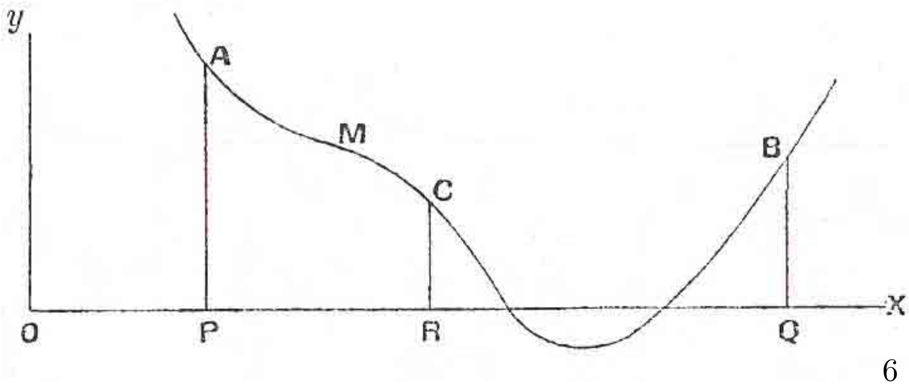


Fig.I



6

Com isso, conclui o autor:

1º Quando uma raiz da equação $f^r(x) = 0$ compreendida entre a e b é substituída nas equações $f^{r+1}(x) = 0$ e $f^{r-1}(x) = 0$, obtendo resultados de sinais opostos, a equação primitiva $f(x) = 0$ não tem nenhuma raíz entre a e b, porque a sequência de sinais que correspondem a $f^r(x) = 0, f^{r-1}(x) = 0, f^{r-2}(x) = 0, ...,$ $f''(x) = 0, f'(x) = 0, f(x) = 0$ não indica nenhuma perda de variação neste intervalo.

2º Contrariamente, quando esta raíz produz resultados de mesmo sinal, da equação primitiva $f(x) = 0$ faltam duas raízes neste intervalo, porque a sequência de

[34] Nota da autora: Na página 72 do Capítulo III onde Agliberto expõe os gráficos, cabe salientar um erro provável de edição pois cita o texto: ...'mínimo em I e máximo em J'...porém a letra que aparece no esboço do gráfico é y. Apresento o texto com a correção.

índices assinala duas variações. Estas conclusões, segundo o autor estão no notável teorema do padre De Gua de Malves:

> "Une équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles lorsque les racines de l'une de ses dérivées $f^r(x) = 0$, étant substituées dans les dérivées $f^{r-1}(x)$, et $f^{r-1}(x)$, donnent des résultats de signes contrires. Inversement, une équation $f(x) = 0$ a des racines imaginaires quand une racine de l'une de ses dérivées $f^r(x) = 0$, étant substituée dans les dérivées voisines $f^{r+1}(x)$ et $f^{r-1}(x)$, produit des résultats de même signe."[35]

O autor analisa o último caso e conclui que como a derivada segunda não tem raíz no intervalo, a curva não tem ponto de inflexão, e como a derivada primeira possui uma raíz entre a e b, a curva é uma tangente paralela ao eixo das abscissas neste intervalo. O arco pode ser então representado de três formas. A primeira indica a existência de duas raízes representadas pelas abscissas dos pontos onde a curva corta o eixo x; a segunda é a imagem das raízes iguais representadas pela abscissa do ponto onde a curva toca o exio x ; e o terceiro representa a ausência de raízes reais:

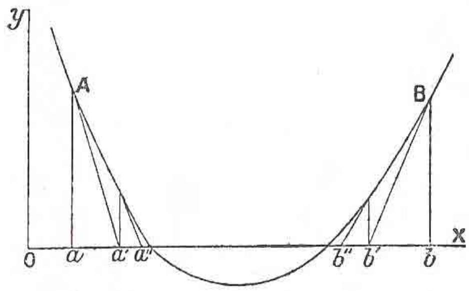


Fig.I

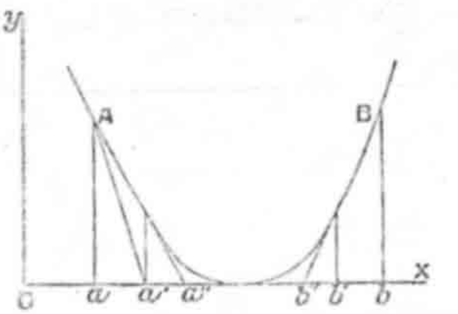


Fig.II

[35]Tradução da autora: 'Uma equação $f(x) = 0$ tem todas as raízes reais quando as raízes de uma das suas derivadas $f^r(x) = 0$, sendo substituída nas derivadas vizinhas $f^{r+1}(x)$ e $f^{r-1}(x)$, dá resultados de sinais contrários. Contrariamente, uma equação $f(x) = 0$ tem raízes imaginárias quando uma raíz de uma das suas derivadas $f^r(x) = 0$, sendo substituída nas derivadas vizinhas $f^{r+1}(x)$ e $f^{r-1}(x)$ produz resultados do mesmo sinal.'

Agliberto coloca como nota para esta citação as Memórias da Academia das Ciências, ano 1741. Parte extraída do Capítulo III, p.94.

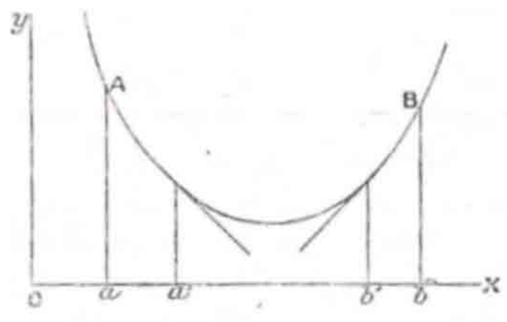


Fig.III

Para a primeira figura, caso das raízes reais e distintas tem-se:

$$Oa' = Oa + aa', \qquad Ob' = Ob + bb',$$

onde $Oa + aa' < Ob + bb'$, mas $Oa = a$, $Ob = b$, e do triângulo Bbb' tira-se

$$Bb = bb' \tan g(bb'b), \text{ ou seja } bb' = \frac{Bb}{\tan g\,(Bb'b)};$$

do triângulo Aaa' tem-se da mesma forma

$$\begin{aligned} aa' &= \frac{Aa}{\tan g\,(Aa'a)}, \quad Bb = f\,(b)\,, \quad Aa = f\,(a)\,, \\ \tan g\,(Bb'b) &= f'\,(b)\,, \quad \tan g\,(Aa'a) = -f\,(a)\,. \end{aligned}$$

Substitui-se em $Oa + aa' < Ob + bb'$,

$$a - \frac{f\,(a)}{f'\,(a)} < b - \frac{f\,(b)}{f'\,(b)}$$

ou

$$\frac{f\,(b)}{f'\,(b)} + \frac{f\,(a)}{-f'\,(a)} < b - a.$$

Com isso, a expressão mostra que se um dos quocientes $\frac{f(b)}{f'(b)}$ e $\frac{f(a)}{f'(a)}$ ignorado o sinal, exceder ou igualar a diferença $b - a$, as raízes serão reais, se for menor devemos dividir o intervalo e fazer novas tentativas. Para a existência de duas raízes iguais no intervalo considerado, assegura o autor, é suficiente aplicar as regras já conhecidas. Constata que os quocientes $\frac{f(b)}{f'(b)}$ e $\frac{f(a)}{f'(a)}$ quando somados são superiores a $b - a$ e que tomados separadamente são superiores a esta diferença, antes de dividir o intervalo é necessário saber se há um fator comum $\varphi(x)$ entre $f'(x)$ e $f''(x)$; se existir um, é necessário saber se $\varphi(x) = 0$ não tem raíz entre a e b; se não há raíz nestas condições, ou se não há fator comum, faz-se a divisão do intervalo, mas se o fator $\varphi(x)$ é igual a zero, e quando resolvido dá uma raíz c entre a e b, a equação dará duas raízes iguais a c compreendidas no intervalo.

Agliberto cita o teorema de Descartes:

> "L'équation $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}+, ..., +sx^2 + tx + u = 0$ ne peut avoir plus de racines positives ou négatives qu'il n'y a dans cette équation de variations ou de permanences de signes."[36]

Salienta o autor, que a regra de Descartes fornece um meio para determinar os limites das raízes de uma equação para os números reais, pois reduz-se as raízes da equação em uma quantidade α, que se obtém substituindo $z + \alpha$ em x, a equação em z ou melhor em $x - \alpha$, terá portanto, tantas raízes negativas quanto as raízes negativas da equação dada, que terá tantas variações de sinal no mesmo número de raízes positivas da equação em x, que ficam negativas na equação em $x - a$. Formando sucessivamente as transformadas em $x-1, x-2, x-3$...cada variação de sinal perdida de uma transformada a outra, indica a passagem de x por uma raíz positiva da primitiva. O autor cita Lagrange:

> " J'ignore, dit Lagrange, si cette remarque avait été faite avant le Mémoire que M.Budan présenta à l'Institut en 1803, et qu'il vient de publier avec des augmentations sous le titre de *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques.* L'auteur y donne un moyen simple et élégant de former les coefficients des transformées en $x - 1, x - 2, ...$, et, appliquant la règle de Descartes à ces transformées ainsi qu'à d'autres déduites de celles-là, il trouve les limites de toutes les racines et leurs aussi approchées qu'on veut. On peut dire que cet Ouvrage ne laisse rien à désirer sur la résolution des équations numériques *dont toutes les racines sont réelles,* et il pourrait à cet égard servir de supplément au présent Traité." [37]

[36]Tradução da autora: 'A equação $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}+, ..., +sx^2 + tx + u = 0$ pode não ter mais raízes positivas ou negativas do que variações ou permanências de sinais.' Parte extraída do Capítulo III, p.105.

[37]Tradução da autora: 'Ignoro, disse Lagrange, se esta observação foi feita antes da Memória que o

Explica Agliberto, que a primeira tentativa que parece ter sido feita para simplificar o cálculo das raízes de uma equação deve-se ao marquês de Courtivron e foi aplicada por ele à avaliação das raízes incomensuráveis das equações pelo método de Newton[38]. A mesma simplificação foi empregada por Cramer[39] em seu *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*[40], no cálculo da transposição dos eixos para uma situação paralela, onde é necessário aumentar algebricamente as coordenadas de certa quantidade, porém para isso é necessário o uso do cálculo infinitesimal.

Salienta o autor que, querendo evitar o emprego do cálculo infinitesimal, Budan utilizou como recurso as séries especiais, que chamou *syntagmatiques* ou *coordonées*, para criar um algoritmo cômodo para o seu método. Inicia-se por uma questão preliminar: substituir a incógnita numa equação algébrica racional e inteira de valor qualquer.

Seja a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ na qual queremos substituir x por h. O resultado desta substituição é o mesmo que o resto da divisão desta equação pela diferença entre a incógnita e este valor. Com efeito, sabemos dos elementos de álgebra que o resto da divisão do polinômio inteiro em x por $x - h$ obtém-se substituindo h em vez de x. Executando o cálculo temos:

$$
\begin{array}{l|l}
ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e & x - h \\
\quad + ahx^3 & \hline ax^3 + (ah+b)x^2 + [(ah+b)h+c]x + \{[(ah+b)h+c]h+d\} \\
\quad (ah+b)x^3 & \\
\qquad + (ah+b)hx^2 & \\
\qquad [(ah+b)h+c]x^2 & \\
\qquad\qquad + [(ah+b)h+c]hx & \\
\qquad\qquad + \{[(ah+b)h+c]h+d\}x & \\
\qquad\qquad\qquad + \{[(ah+b)h+c]h+d\}h+e. &
\end{array}
$$

(1)

Sr. Budan apresentou ao Instituto em 1803, e que acaba de publicar sob o título de *Novo método para a resolução de equações numéricas.* O autor dá um meio simples e elegante de formar os coeficientes das transformadas em $x-1, x-2..$, e, aplicando a regra de Descartes à estas transformadas bem como outros deduzidos daquelas, encontra-se os limites de todas as raízes e os valores aproximados que se quer. Pode-se dizer que esta Obra não deixa nada a desejar sobre a resolução das equações numéricas cujas todas as raízes são reais, e poderia a esse respeito servir de suplemento ao presente Tratado.'(LAGRANGE, *Traité de la résolution des équations numériques, édition de Serret, p. 207.*) Parte extraída do Capítulo III, p.106.

[38]Segundo Agliberto, ver as Memórias da Academia Ciências, 1740: *Sobre um método de resolver os graus das equações.* Parte extraída do Capítulo III, p.106.

[39]Gabriel Cramer (1704 -1752) matemático suíço conhecido pelos trabalhos em probabilidades, equações e curvas algébricas, além da conhecida regra que leva seu nome.

[40]Tradução da autora: 'Introdução à análise das linhas curvas algébricas'.(Genebra, 1850).

O quociente fica constituído de todos os termos, à exceção do último, que contêm uma potência de x, cujo expoente vai diminuindo de uma unidade, desde o primeiro, onde o fator possui um grau menor que o dividendo. O coeficiente do primeiro termo do quociente é o mesmo coeficiente do primeiro termo do dividendo. O coeficiente do segundo termo do quociente é igual ao coeficiente do primeiro termo do quociente multiplicado por h e aumentado do coeficiente do segundo termo do dividendo, e assim por diante.

Dividindo o quociente dado em (1) por $x-h$ sucessivamente; obtemos os seguintes quocientes e restos pela regra que estabelecemos:

Quocientes	**Restos**
$ax^3+(ah+b)\,x^2+[(ah+b)\,h+c]x$ $+\{[(ah+b)\,h+c]h+d\}$	$\{[(ah+b)\,h+c]h+d\}h+e.$
$ax^2+(2ah+b)\,x+[(3ah+2b)\,h+c]$	$[(4ah+3b)\,h+2c]h+d$
$ax+(3ah+b)$	$(6ah+3b)\,h+c$
a	$4ah+b$

Propomos agora, um dos exemplos feitos por Agliberto, onde deseja-se calcular as raízes da equação dada, de forma que as raízes sejam as do precedente aumentada algebricamente da quantidade h.

Exemplo 7 *Seja a equação* x^3-150

Coeficientes da equação:

Para x..........$1+0+0-150$

Para $(x-1)$..........$1+3+3-149$

Para $(x-2)$..........$1+6+12-142$

Para $(x-3)$..........$1+9+27-123$

Para $(x-4)$..........$1+12+48-86$

Para $(x-5)$..........$1+15+75-25$ (1 raíz)

Para $(x-6)$..........$1+18+108+66$

Podemos verificar que a raíz está compreendida entre 5 e 6.

Agliberto propõe a alteração de Sturm para determinar as raízes, onde se supõe uma equação algébrica racional e inteira $V = 0$. Dividimos a formação V pela sua primeira derivada, que é representada por V_1; sejam Q_1 o quociente e V_2, o resto; mudando os sinais dos termos deste resto; temos $V = V_1Q_1 = V_2$. Dividindo agora V_1 por V_2 e representando por Q_2, o quociente e V_3 o resto, muda-se os sinais dos termos do resto. Continua-se sucessivamente com estas divisões até que o resto torne-se uma constante. Ou seja,

$$\begin{aligned} V &= V_1Q_1 \quad - V_2, \\ V_1 &= V_2Q_2 \quad - V_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{n-2} &= V_{n-1}Q_{n-1} - V_n. \end{aligned}$$

Segundo Agliberto, é evidente supor que a equação não tenha raízes iguais, porque os polinômios V e V_1, não têm divisor comum na formação de x. A alteração de Sturm consiste no emprego sistemático do seguinte teorema:

"Si l'on substitue dans la suite de formations $V_n, V_{n-1}, ..., V_2, V_1, V$ deux nombres a et b, il y a strictement autant de pertes de variations de l'une à l'autre *que l'équation donnée a de racines réelles entre a et b.*"[41]

O autor sugere a seguinte demonstração:

Fazendo x de maneira contínua desde $a-h$ até $a+h$, de modo que possa-se conceber o valor $x = 0$, que supõe-se anular primeiro V, e em seguida alguma outra formação, de forma que este valor nunca anulará duas formações consecutivas, porque anularia então todas as outras. Com efeito, se $x = a$ anula V_1, e V_2 anula também V_3, porque a igualdade $V_1 = V_2.Q_2 - V_3$,tornar-se-ia $V_2.Q_2 - V_3 = 0$ ou $V_2.Q_2 = V_3$, e como $V_2 = 0$, a igualdade exige também $V_3 = 0$. Se $V_2 = 0$ e $V_3 = 0$, a igualdade $V_2 = V_3.Q_3 - V_4$, provoca $V_4 = 0$ e assim a todos os outros termos.

Percebe-se que o teorema indica o número exato de raízes reais compreendidas em um intervalo qualquer. Se, ao lugar do intervalo a, b, toma-se o espaço $-\infty$ à $+\infty$,

[41] Tradução da autora: 'Substitui -se na sequência de formações $V_n, V_{n-1}, ..., V_2, V_1, V$ dois números a e b, há estritamente perdas de variações de uma à outra que a equação dada tem raízes reais entre a e b.

que compreende todas as raízes da equação, temos o número exato de raízes reais da equação dada. Se do número que indica o grau da equação tiramos o número das raízes reais, temos o número exato das suas raízes singulares. Para isso, supõe o autor:

1° Que a anula V : Sabemos que $V_1 = 0$ é a derivada da equação dado $V = 0$, portanto, pelos raciocínios que foram feitos em relação ao método de Fourier, há uma variação quando o valor de x passa de $a-h$ à $a+h$.

Com efeito, pode-se tomar h perto de a tal que V_1, não altera o sinal quando substitui-se sucessivamente $x = a-h$ e $x = a+h$. Vejamos:

Supondo $V_1 = +$, tem-se

x	V_1	V
$a-h$	$+$	$-$
$a+h$	$+$	$+$

Supondo $V_1 = -$, tem-se

x	V_1	V
$a-h$	$-$	$+$
$a+h$	$-$	$-$

2° Que a anula uma formação intermediária V_r: Se a é uma raíz da equação $V_r = 0$, a formação $V_{r-1} = V_r.Q_r - V_{r+1}$ reduz-se $V_{r-1} = -V_{r+1}$, isso prova que os resultados da substituição $x = a$ nas formações vizinhas de V_r dão resultados de sinais opostos. Ao substituir na equação $V_r = 0$ os valores $a-h$ e $a+h$, aproximados de tal forma que não haja não outra raíz, tem-se resultados de sinais opostos:

V_r
$+$
$-$

Pode-se supôr h aproximado de a, tal que a substituição $a-h$ e $a+h$ no lugar de x nas formações V_{r-1} e V_{r+1}, não altera os sinais dos resultados. Esta substituição comporta apenas duas hipóteses:

1ª Hipótese:

x	V_{r-1}	V_r	V_{r+1}
$a-h$	$+$	$+$	$-$
a	$+$	0	$-$
$a+h$	$+$	$-$	$-$

2ª Hipótese:

x	V_{r-1}	V_r	V_{r+1}
$a-h$	$-$	$+$	$+$
a	$-$	0	$+$
$a+h$	$-$	$-$	$+$

Há por conseguinte uma variação nas duas hipóteses. Assim demonstramos que, se x cresce e atinge ou excede um valor que torna V igual à zero, a série dos sinais sofre uma variação, ou seja, se x passa sucessivamente pelos dois valores a e b a série dos sinais sofre tantas variações quantas a equação dada tem de raízes reais entre estes dois limites.

Quando a sequência das formações está completa, há um método de determinação das raízes singulares mais simples que a indicada anteriormente. Com efeito, sabemos que podemos atribuir à x um valor tão elevado em um polinômio que o primeiro termo torne-se maior que a soma dos outros.

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + ... + sx^2 + tx + u$$

Isto estabelecido, substituições de $-\infty$ em x dão todas as formações $V_n, V_{n-1}, ...V_2, V_1, V$; os resultados serão positivos e alternadamente negativos porque os primeiros termos destas formações são alternadamente de graus iguais e ímpares. Substituições de $+\infty$ em x darão as mesmas formações; os resultados serão respectivamente de mesmo sinal que os primeiros termos de cada uma destas formações; as variações de sinal que há são os que na sequência não perderam eventualmente $x = -\infty$ por $x = +\infty$, os que não correspondem à raízes reais, os que representam as raízes singulares.

Podemos concluir que a equação $V = 0$ tem tantas duplas de raízes singulares como há variações na sequência dos sinais dos primeiros termos das formações $V_n, V_{n-1}, ...V_2, V_1, V$.

Segundo Agliberto, a data da publicação da Memória de Sturm sobre o seu método de separação das raízes das equações algébricas é suficiente para revelar a originalidade da teoria geral de Fourier em relação à uma alteração secundária, aplicável apenas às equações algébricas, porque tem por base a investigação do maior divisor comum. Mas convém recordar que Sturm mesmo confessa que a sua Memória é fundada sobre os trabalhos de Fourier, que lhe foram confiados pelo autor na forma de manuscrito.

> "L'ouvrage qui doit renfermer l'ensemble des travaux de M. Fourier sur l'Analyse algébrique n'a pas encore été publié. Une partie du manuscrit qui contient ces précieuses recherches a été communiquée à quelques personnes. M. Fourier a bien voulu m'en accorder la lecture, et j'ai pu l'étudier à loisir. Je déclare donc que j'ai eu pleine connaissance des travaux inédits de M. Fourier, qui se rapportent à la résolution des équations, et je saisis cette occasion de lui témoigner la reconnaissance dont ses bontés m'ont pénétré. C'est en m'appuyant sur les principes qu'il a posés et en imitant ses démonstrations que j'ai trouvé les nouveaux théorèmes que je vais énoncer." [42]

[42]Tradução da autora: 'A Obra que deve conter o conjunto dos trabalhos do Sr. Fourier sobre

Salienta Agliberto que a teoria de Fourier é confundida geralmente nos Tratados de Álgebra com o método de Budan, e chegou-se mesmo a apresentar a concepção de Fourier como posterior à de Budan.

O autor fecha o capítulo fazendo algumas considerações a cerca dos métodos e dos seus autores, expondo as suas opiniões com base em suas leituras. Inicia pontuando:

1^o Que o teorema de Descartes é um caso específico do conjunto da teoria de Fourier;

2^o Que, por sua vez, a teoria de Budan é uma bonita consequência do teorema de Descartes.

Isto posto conclui Agliberto, concebe-se que, se a teoria de Fourier for posterior ao método de Budan, não teria perdido o seu valor, quer no que diz respeito a a sua originalidade, quer em sobretudo a sua elevada importância dogmática, dado que na sua generalidade, abraçava como um caso específico o teorema de Descartes e, como consequência desta proposta, o método de Budan. Cita ainda que precedeu a teoria de Budan, porém pondera ser necessário dizer que foi Arago[43], em elogio a Fourier[44], que fez confusão no que é perfeitamente nítido. Com efeito, segundo o autor, dizArago sobre Fourier:

> "Je doute qu'on puisse citer une seule découverte scientifique de quelque importance qui n'ait pas suscité des discussions de priorité. La nouvelle méthode de Fourier pour résoudre les équations numériques est, sous ce rapport, largement comprise dans la loi commune. On doit, au surplus, reconnaître que le théorème qui sert de base à cette méthode a été d'abord publié par M. Budan; que, d'après une règle qu'ont solennellement anctionées les principales académies

a Análise algébrica ainda não foi publicada. Uma parte do manuscrito que contém estas preciosas investigações foi comunicada à algumas pessoas. O Sr. Fourier quis atribuir-me a leitura, e pude estudá-lo à lazer. Declaro portanto que tive pleno conhecimento dos trabalhos inéditos do Sr. Fourier, que se referem à resolução das equações, e aproveito esta ocasião para testemunhar-lhe do reconhecimento de sua bondade. É apoiando-me sobre os Princípios que pôs e imitando as suas demonstrações que encontrei novos teoremas que vou enunciar.' [STURM, Memória sobre a resolução das equações numéricas (Memórias da Academia Real das Ciências do Instituto da França, t.VI, 1835).] Parte extraída do Capítulo III, p.124.

[43] Dominique François Jean Arago (1786 -1853), matemático francês foi professor de geometria analítica da Escola politécnica, tendo trabalhado também com eletricidade e magnetismo.

[44] Nota da autora: Biografia lida em sessão pública da Academia das Ciências, em 18 de Novembro 1833. Parte extraída do Capítulo III, p.126.

de l'Europe, et dont les historiens des Sciences ne sauraient s'écarter sans tomber dans l'arbitraire et la confusion, M. Budan doit être considéré comme l'inventeur. Je dirai avec une égale assurance qu'il serait impossible de refuser à Fourier le mérite d'être arrivé au but par ses droits que personne n'entendait nier, il ait jugé nécessaire de recourir à des certificats 'anciens élèves de l'École Polytechnique ou de professeurs de l'Université. Puisque notre confrère avait la modestie de croire que sa simple déclaration ne devait pas suffire, pouquoi, et ce argument eût été plein de force, ne faisait-il pas remarquer à quel point sa démonstration diffère de celle de son compétiteur. Démonstration admirable, en effet, et tellement imprégnée des éléments intimes de la question, qu'un jeune géomètre, M. Sturm, vient d'en faire usage pour établir la vérité du beau thérème à l'aide duquel il détermine, non plus de simples limites, mais le nombre exact de racines d'une équation quelconque, qui sont comprises entre deux quantités données."

[45]

Nesta passagem, escreve Agliberto ... *'há várias coisas a considerar que não passarei em silêncio':*

1^o A falta de lógica que consiste em fazer do teorema de Budan a base da teoria de Fourier, quando, pelo contrário, este teorema é um corolário da regra de Descartes, que é uma consequência própria da teoria do geômetra.

[45] Tradução da autora: 'Duvido que possa-se citar só uma descoberta científica de alguma importância que não suscitou discussões de prioridade. O novo método de Fourier para resolver as equações numéricas, sob este relatório, é compreendido largamente na lei comum. Deve-se, ao excesso, reconhecer que o teorema que serve de base à este método de abordagem foi publicado pelo Sr. Budan; que, após uma regra que aprovou solenemente as principais academias da Europa, e cujos historiadores das Ciências não saberiam afastar-se sem estar a cair na arbitrariedade e na confusão, o Sr. Budan deve ser considerado como o inventor. Direi com um igual seguro que seria impossível recusar à Fourier o mérito a ter chegado ao objetivo pelos seus próprios esforços. Lamento mesmo que, para estabelecer os seus direitos que ninguém não se propunha negar, julgou necessário recorrer à certificados de antigos alunos da Escola Politécnica ou professores da Universidade. Dado que o nosso confrade tinha a modéstia de crer que a sua simples declaração não devia ser suficiente, porque, e este argumento estêve cheio de força, não fazia observar qual ponto a sua demonstração difere da do seu concorrente. Demonstração admirável, de fato, e um tanto impregnada dos elementos íntimos da pergunta, que o jovem geômetra, o Sr. Sturm, acaba de fazer uso para estabelecer a verdade do bonito teorema, ajuda das quais determina, também não simples limites, mas o número exato de raízes da equação qualquer, que são compreendidas entre duas quantidades dadas.'(François ARAGO, Notas biográficas, t. 1, p.30l.) Parte extraída do Capítulo III, p.126.

2º Se a única declaração de Fourier, sem os certificados, como afirma Arago, é suficiente para provar a precedência da sua teoria, como atribui-la à Budan? Para adaptar o espírito dos seus leitores à esta estranha lógica, Arago estabelece primeiro um método de filiação histórico não menos estranho... *"de acordo com uma regra que aprovaram solenemente as principais academias da Europa, e cujo os historiadores das Ciências não saberiam afastar-se sem estar a cair na arbitrariedade e na confusão".* Segundo Agliberto, para Arago, a verdade é a arbitrariedade e a confusão.

3º O erro matemático de supôr que o teorema de Sturm indica o número exato de raízes de equação qualquer. Esta alteração é fundada sobre a investigação do maior divisor comum, e seria aplicável apenas ao caso das equações algébricas.

A Memória de Budan de Bois-Laurent, contendo a primeira exposição do seu método, foi apresentada ao Instituto em 1803. A concepção de Fourier já tinha sido exposta nos cursos da Escola Politécnica de Paris em 1797 e 1803, como vemos pelos certificados dos quais fala Arago. Atrasado, em 1807, Budan publicava o seu '*Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques'.* Nesta obra, Budan mesmo estabelece o seu método como um corolário do teorema de Descartes.

Segundo Agliberto, Budan confessa que em 1803 ainda não tinha demonstrado a extensão de seu teorema para as equações quaisquer, dado que declara: *"Temos fortes razões de crer que a segunda proposta é aplicável a qualquer equação",* Fourier já tinha estabelecido na sua teoria com qualquer generalidade, como prova uma carta de Poisson a este geômetra, datada de 24 de Abril de 1807 :

> "Un docteur en médicine, dit Poisson à Fourier, vient de publier un Ouvrage sur la résolution numérique des équations... Le docteur entrevu votre théorème sur les changements de signes; il a de *fortes raisons* de penser qu'il a lieu dans le cas des racines imaginaires; j'en ai de bien plus fortes que les siennes, puisque vous m'avez dit autrefois que vous aviez une démonstration générale de cette proposition. Vous devriez bien publier au moins les différents théorèmes sur lesquels est fondée votre méthode pour résoudre les équations..."[46]

[46]Tradução da autora: 'Um doutor em medicina, disse Poisson à Fourier, acaba de publicar uma

Quanto aos certificados que atestam a existência e a divulgação do conjunto da teoria de Fourier, segundo Agliberto, se o leitor se dirigir à Obra póstuma deste eminente geômetra: *Analyse des équations déterminées,* Paris, 1830, encontrará na Advertência do editor, redigido por Navier, não somente estes certificados, mas os diferentes resumos feitos por Fourier.

Comentários: Agliberto neste capítulo apresenta de forma bastante rebuscada os métodos de separação de raízes de equações numéricas. Sugere uma demonstração do teorema que mostra a alteração de Sturm à separação de raízes e aplica o método à vários exemplos, dos quais escolhi apenas os primeiros propostos pelo autor.

Envolve-se na discussão sobre a descoberta do método de separação das raízes das equações que são creditadas a Fourier e Budan, defende a originalidade da teoria de Fourier e fecha o capítulo fazendo algumas considerações sobre o assunto.

Este capítulo, além da parte teórica e prática exposta pelo autor, é rico em citações de obras e idéias de grandes matemáticos da época.

Agliberto utiliza grande parte do capítulo fazendo considerações gerais sobre a diferença dos métodos de Fourier e Budan e a concepção de Fourier.

Neste capítulo foram citadas pelo autor as seguintes obras: *Traité de la résolution des équations numériques (Lagrange); De numerosa potestatum ad exegesim resolutione ex opere resoluta mathematicae analysis seu algebra nova (Viète); Algèbre (Rolle); Analyse démontrée (Pére Reyneau); Mémoires de l'académie des sciences (De Gua Malves); Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques (Budan); Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques (Cramer); Mémoires de l'académie des sciences: Sur une méthode de résoudre les équations de tous les degrés (Newton); Mémoire sur la résolution des équations numériques (Sturm); Biographie lue en séance publique de l'académie des sciences (Arago); Notices biographiques (Arago); Bulletin des sciences: Note de M. Gaston darboux relative au mémoire de Fourier: Sur*

Obra sobre a resolução numérica das equações...O doutor previu vosso teorema sobre as mudanças de sinais; tem forte razão de pensar que tem lugar no caso das raízes imaginárias; bem mais fortes que os nossos, dado que tem-me dito anteriormente que tinha uma demonstração geral desta proposta. Deveria bem publicar pelo menos diferentes teoremas sobre as quais é fundado o vosso método para resolver as equações... '[Nota do Sr. Gaston Darboux relativo à Memória de Fourier: Sobre o uso do teorema de Descartes sobre a investigação dos limites das raizes (Boletim das Ciências, pela 1820)]. Parte extraída do Capítulo III, p.128.

l'usage du théoreme de Descartes sur la recherche des limites des racines. (Fourier).

3.5 O Capítulo IV: Método de avaliação de raízes incomensuráveis, esboçado por Newton e constituídos por Fourier.

Sumário:

1. Esboços de Newton.
2. Aperfeiçoamento de Fourier.
3. Pesquisas a fim de saber se dois limites de raízes consideradas são bastante aproximadas para depois conhecer o cálculo das aproximações.
4. Escolha de um limite que convém tomar pelo ponto de partida de avaliação.
5. Determinação do grau de aproximação do produto para cada operação no cálculo de raízes.
6. Resumo do método.
7. Aplicação a um exemplo.

O autor inicia o capítulo falando sobre o Método de Newton que foi concebido por meio de diferenças por Newton[47], por Raphson[48] e Halley[49][50].

O método de Newton consiste em dar a um dos valores aproximados da raíz um crescimento indeterminado, desenvolver pela série de Taylor, negligenciar todos os ter-

[47]Isaac Newton (1643 -17270, matemático e físico inglês, considerado um dos maiores matemáticos de seu tempo.

[48]Joseph Raphson (1648 -1715), matemático inglês, trabalhou com os métodos de aproximação para as raízes de uma equação, dentre outros assuntos.

[49]Edmond Halley (1656 -1742), matemático inglês, dedicou-se à astronomia.

[50]Segundo o autor, a primeira forma que apareceu foi a de Newton, comunicada à Barow em 1669 na Obra intitulada: *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas.* A de Raphson, foi exposta na Obra: *Analysis aequationum universalis Londini, 1690*; e a de Halley foi publicada em 1694 no n° 210 do *Philosophical transactions.* Parte extraída do Capítulo IV, p.131.

mos que contêm as potências dos incrementos superiores à primeira e resolver seguidamente a equação em relação a este crescimento. Seja $f(x) = 0$ a equação dada, e a um primeiro valor aproximativo da raíz; dando a a um incremento indeterminado h; substituimos $a + h$ por x na equação proposta, desenvolvemos pela série de Taylor: $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{2.3}f'''(a) + ...+ = 0$. Negligenciando todos os termos a partir de $\frac{h^2}{2}f''(a)$, temos $f(a) + hf'(a) = 0$; resolvendo em relação a h, $h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$. O novo valor aproximativo da raíz será

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a'.$$

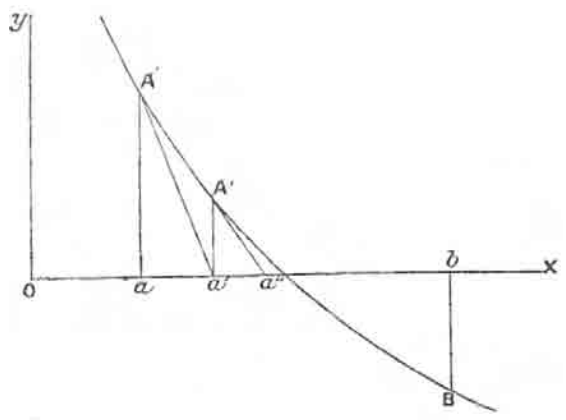
Segundo Agliberto, este método, apesar da sua extrema simplicidade, apresenta algumas imperfeições que Fourier corrigiu. Todo o aperfeiçoamento de Fourier consiste em vencer três dificuldades principais que apresenta o método, como Newton formulou:

1^o Verificar se os dois limites a e b, que compreendem a raíz que se quer calcular, são suficientemente aproximados de modo que possamos proceder à aproximação;

2^o Determinar qual dos dois limites a e b deve ser tomado para ponto de partida da aproximação;

3^o Calcular o grau de aproximação produzido no cálculo de cada operação de raíz.

Para resolver a primeira dificuldade, vamos apresentar a imagem geométrica do método de Newton.



Seja o arco AB da curva representada pela equação $y = f(x)$, compreendido entre os limites $x = a$ e $x = b$; seja $Oa = a$ a abcissa que corresponde ao valor aproximativo, e $y = f(a)$, a ordenada deste ponto. Do ponto de encontro A desta ordenada com a curva tangente, prolongamos até que atinja o eixo das abcissas em a'. Do triângulo Aa', temos $aa' = \frac{Aa}{\tan g(Aa'a)}$; sabemos que $Aa = f(a)$; o ângulo $Aa'a = 180 - Aa'x$ e conseqüentemente $\tan g(Aa'a) = -\tan g(Aa'x)$;

mas $\tan g(Aa'x) = f'(a)$.

Substitui-se

$$aa' = -\frac{f(a)}{f'(a)} \text{ e portanto } a - \frac{f(a)}{f'(a)} = Oa + aa'.$$

Do ponto de encontro a' efetua- se outra ordenada $a'A'$, e do ponto A efetuamos uma tangente $A'a''$; resolvendo o triângulo $A'a'a''$, e assim por diante.

O exame desta imagem conduz à duas considerações extremamente importantes:

1^o De modo que a curva considerada corte o eixo das abcissas em só um ponto no intervalo compreendido entre $x = a$ e $x = b$ é necessário que a equação dada tenha só uma raiz compreendida neste intervalo.

2^o De modo que tangentes Aa', $A'a''$, etc. encontrem o eixo das abcissas em pontos sempre mais próximos de onde a curva corta este eixo, é necessário que a curva não tenha neste espaço nenhuma tangente paralela ao eixo das abcissas, nem apresente ponto de inflexão. A primeira condição exige que a derivada $f'(x) = 0$ não tenha nenhuma raíz compreendida entre a e b; o segundo é preenchido se a segunda derivada $f''(x) = 0$ não apresenta mais nenhuma raiz entre a e b. Não estamos por conseguinte certos que os limites a e b são aproximados suficientemente para proceder à aproximação quando os três índices formados pelas três últimas formações correspondem a $0, 0, 1$.

Na condição acima, é necessário examinar as quatro formas diferentes que pode apresentar o arco de curva compreendido entre $x = a$ e $x = b$.

Reconhecemos facilmente que, partindo do ponto A da figura I, a tangente efetuada deste ponto encontraria o eixo das abcissas num ponto para além de b, ou seja,

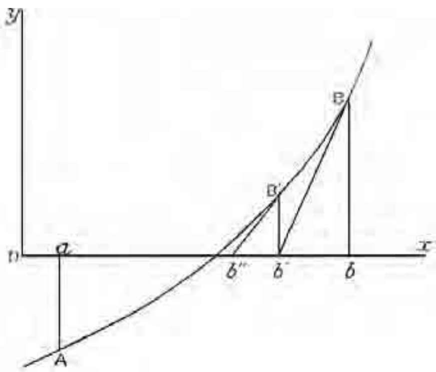


Fig. I

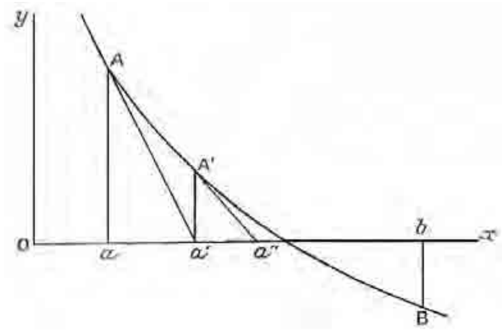


Fig.II

além do ponto onde a curva corta o eixo das abcissas, ao passo que a partir de B os pontos de encontro das tangentes com o eixo dos x todos são situados no intervalo onde a curva corta o eixo dos x e o ponto correspondendo a $x = b$.

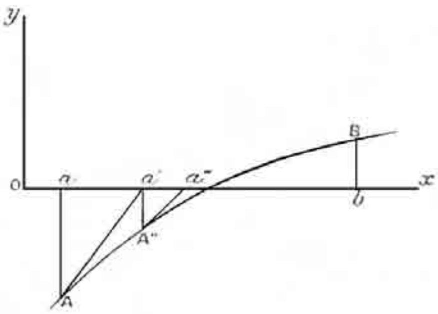


Fig. III

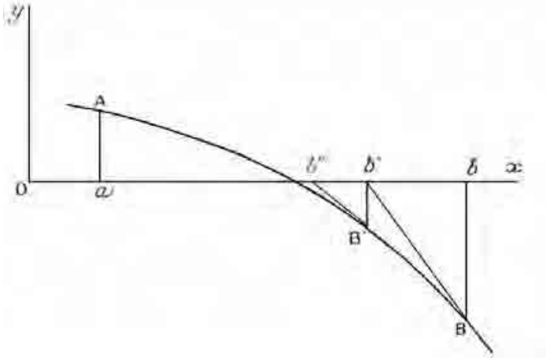


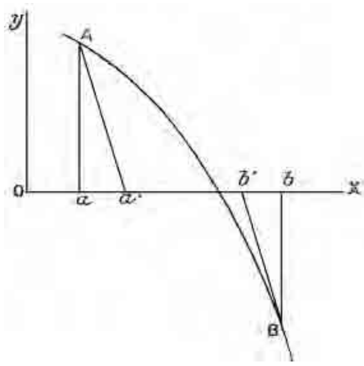
Fig.IV

A mesma consideração é aplicável aos pontos A da figura II, A da figura III e B da figura IV. O autor expõe a característica geométrica deste ponto, ou melhor do limite a que ele corresponde. Um único exame destas quatro figuras mostra que este ponto da curva corresponde a um ponto da abcissa onde vê-se a convexidade da curva e não a sua concavidade; este limite chama-se *externo*, porque o ponto que determina-o está fora do espaço que compreende a curva; o outro limite chama-se *interno*. É necessário indicar a significado de tal propriedade. O sentido da curvatura dos eixos das figuras I e II é indicado pelo sinal $+$ que toma a segunda derivada para os valores de x compreendidos neste intervalo; o sentido da curvatura dos arcos das figuras III e IV é detectado pelo sinal $-$. Sabemos que se a ordenada de uma curva aumenta num intervalo dado, quando a sua primeira derivada é constantemente positiva para os valores de x compreendidos neste intervalo; a curva decresce quando as derivadas tornam-se negativas para estes valores. Por último os pontos considerados encontram-se acima e abaixo do eixo dos x, conforme o primeiro membro da equação dada fica positivo ou negativo por os valores,

a, b, atribuídos a x. Assim, reunindo estas considerações, pode-se construir o seguinte quadro:

	x	$f"(x)$	$f'(x)$	$f(x)$		x	$f"(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
Figura I	a	$+$	$+$	$-$	Figura II	a	$+$	$-$	$+$
	b	$+$	$+$	$+$		b	$+$	$-$	$-$
	x	$f"(x)$	$f'(x)$	$f(x)$		x	$f"(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
Figura III	a	$-$	$+$	$-$	Figura IV	a	$-$	$-$	$+$
	b	$-$	$+$	$+$		b	$-$	$-$	$-$

Segundo o autor, para reconhecer o grau de aproximação que cada operação introduz na raiz, é necessário atribuir cada um dos dois limites entre os quais o valor ou parte dele esteja compreendido. Devemos, portanto, aplicar aos dois limites primitivos a e b o mesmo método de aproximação, de maneira a ter $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ e $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$; mas, de acordo com o que se disse, aplicando este método ao limite interno, encontramos um novo limite além do ponto onde a curva corta o eixo das abcissas, a raíz permanece assim na parte externa do intervalo dos limites.



Seja b o limite externo e a o limite interno; a curva tem consequentemente a forma representada pela figura acima. Do ponto A trace uma paralela à tangente Bb'; esta paralela encontra o eixo dos x num ponto a', entre a e o ponto onde a curva corta o eixo das abcissas. Temos, consequentemente, um limite abaixo da raíz e mais próximo da primitiva. Resolvendo o triângulo Aaa', observamos que $\widehat{Aa'a} = \widehat{Bb'b}$ e que $\tan g\,(Aa'a) = -f'(b)$; sabendo que $Aa = f(a)$,tem-se $aa' = -\frac{f(a)}{f'(b)}$, e as expressões

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)}, \qquad b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

são os limites procurados.

Vemos que estas considerações geométricas são traduzidas algebricamente na regra que consiste em tomar para denominador $f'(b)$, ou seja a primeira derivada da equação proposta quando se substitui o limite externo, e para numerador a equação dada substituindo o limite.

Segundo Agliberto, é necessário representar por a' e b' estes dois novos limites: $a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}$, e $b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$; representa-se ainda por i e i' as diferenças dos mesmos: $b - a = i$ e $b' - a' = i'$. Substituindo a por $b - i$ na fórmula $a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}$ tem-se $a' = b - i - \frac{f(b-i)}{f'(b)}$ desenvolvendo de acordo com a série Taylor, tem-se

$$\begin{aligned} a' &= b - i - \frac{f(b) - if'(b) + \frac{i^2}{2}f''(b) - \frac{i^3}{2.3}f'''(b) + ...}{f'(b)} \\ &= b - i - \frac{f(b)}{f'(b)} + i - \frac{i^2}{2}\frac{f'(b - i....b)}{f'(b)} \end{aligned}$$

representando pela notação $f'(b - i....b)$ um valor compreendido entre $b - i$ e b, quer dizer entre a e b. Tem-se por conseguinte a notação $a' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{i^2}{2}\frac{f''(a...b)}{f''(b)}$.

Coloque b' em vez de $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ e façamos passar b' para o primeiro membro $b' - a' = i^2\frac{f''(a...b)}{2f'(b)}$. Substituindo por último i'por $b' - a'$ e designando por $f''(B)$ a maior das duas quantidades $f''(a)$ e $f''(b)$, sem considerar o sinal, temos a fórmula procurada $i' < i^2\frac{f''(B)}{2f'(b)}$. Representando por $\frac{1}{10^n}$ a unidade decimal imediatamente superior à diferença entre a e b; temos $i < \frac{1}{10^n}$ e $i^2 < \frac{1}{10^{2n}}$.

Designando por k a unidade decimal imediatamente superior ao quociente $\frac{f''(B)}{2f'(b)}$, temos do mesmo modo $\frac{f''(B)}{2f'(b)} < \frac{1}{10^k}$.

Substituindo estes valores na expressão de i' : $i' < \frac{1}{10^{2n}}\frac{1}{10^k}$, ou ainda, $i' < \frac{1}{10^{2n+k}}$. Ao calcular uma raíz que difere do valor exato de uma unidade menor que $\frac{1}{10^{2n+k}}$, substituindo este valor, obtemos pelo mesmo método a outra raíz cujo erro é menor que $\frac{1}{10^{4n+3k}}$.

Uma nova operação dará um resultado menor de $\frac{1}{10^{8n+7k}}$ e assim sucessivamente. Constatamos assim, que as diferentes aproximações são feitas pela fórmula

$$\frac{1}{10^{2^r n} + (2^r - 1)^k},$$

no qual r indica o número de operações. Esta fórmula supõe que k conserva um valor constante; contudo k pode aumentar nas aproximações rápidas.

Suponhamos que $\frac{f''(B)}{2f'(b)} < 10^n = \frac{1}{10^{-n}}$; e i' seria $i' < \frac{1}{10^{2n}}\frac{1}{10^{-n}} = \frac{1}{10^{2n-n}} = \frac{1}{10^n}$; neste caso a aproximação não avançaria. Mas, se $\frac{f''(B)}{2f'(b)} < 10^{n-1} = \frac{1}{10^{1-n}}$, temos $i' < \frac{1}{10^{2n}}\frac{1}{10^{1-n}} = \frac{1}{10^{n+1}}$. Vemos que a aproximação toma um curso regular apenas quando $k \geqq 1 - n$.

Resumindo o que foi feito acima, Agliberto cita que pode-se enunciar a seguinte regra :

1^o Constatar se os dois limites da raíz que se quer calcular são aproximados suficientemente de modo que possamos proceder à aproximação.

2^o Verificar dentre os dois limites de onde deve-se partir.

3^o Determinar o grau de aproximação que a divisão comporta e podemos proceder à divisão.

Explica o autor, que a primeira condição exige que os índices que correspondem às três últimas formações sejam $0, 0, 1$. Se esta condição não for preenchida, divide-se o intervalo até que tenha-se estes índices. Para verificar dos dois limites de onde deve-se partir, procura-se o limite externo, ou seja o que, substituído na equação dada e na sua segunda derivada, dá resultados de mesmo sinal.

Para determinar o grau de aproximação que cada divisão comporta, dividimos o maior dos dois resultados $f''(a)$ e $f''(b)$ pelo menor das duas quantidades $2f'(a)$ e $2f'(b)$. Se $\frac{1}{10^k}$ é a unidade de aproximação do primeiro número, diferente de zero, do quociente e que $\frac{1}{10^n}$ é a unidade, no mínimo, igual à diferença $a - b$, procuramos saber se n é menor ou igual à $1 - k$. Esta condição não preenchida, apertamos mais os limites; mas se a condição for preenchida, determinamos a unidade da ordem $\frac{1}{10^{2n+k}}$ e procedemos à divisão parando na fila decimal de ordem $2n+k$; aumentamos este último número de uma unidade e acrescentamos o resultado ao limite de onde se partiu.

O autor toma como exemplo a equação que Fourier resolveu no seu Tratado e que é a mesma em que Newton aplicou o seu método.

Segundo Agliberto, isto permite observar a diferença de convergência dos dois métodos.

Exemplo 8 *Seja a equação* $x^3 - 2x - 5 = 0$, *cuja a sequência das formações é*

$$\begin{aligned} X &= x^3 - 2x - 5, \\ X' &= 3x^2 - 2, \\ X'' &= 6x, \\ X''' &= 6, \end{aligned}$$

nas quais, substituindo os números de progressão,

x	X'''	X''	X'	X
-1	$+$	$-$	$+1$	-4
$-h$	$+$	$-$	$-$	$-$
0	$+$	0	-2	-5
$+h$	$+$	$+$	$-$	$-$
1	$+$	$+$	$+$	$-$
10	$+$	$+$	$+$	$+$

Este quadro mostra que a equação dada tem duas raízes entre -1 e 0, e uma entre 1 e 10 reconhecemos facilmente que as duas raízes entre -1 e 0 são singulares, porque a soma dos quocientes $\frac{4}{1} + \frac{5}{2}$ excede a diferença 1 dos dois limites. É necessário reservar os limites da única raíz real.

Tentando os números 2 e 3, encontra-se:

x	X'''	X''	X'	X	
2	$+$	$+12$	$+10$	-1	
		0	0	1	onde 0 0 1 são as variações
3	$+$	$+18$	$+25$	$+16$	

Este resultado mostra que a raíz real está compreendida entre os limites 2 e 3. Como a sequência dos índices é $0, 0, 1$, podemos executar a aproximação; mas dividindo o maior dos valores de $f''(x)$, que é 18, pelo menor resultado $2f'(x)$, que é 2×10, temos para o quociente $\frac{18}{20} = 0,9$; como a unidade decimal imediatamente superior ao primeiro número deste quociente é 1, sabemos que para ter $\frac{1}{10^k} = 1$ é necessário fazer $k = 0$.

A diferença dos dois limites $3 - 2 = 1$, dará $\frac{1}{10^k} = 1$ onde $n = 0$.

A condição $n \geqq 1-k$ não é satisfeita, concluimos que os limites 2 e 3 não são aproximados o suficiente de modo que se possa proceder à aproximação. Tentamos então os números intermediários:

x	X'''	X''	X'	X
$2,0$	$+$	$+12$	$+10$	-1
$2,1$	$+$	$+12,6$	$+11,23$	$+0,061$

O maior valor de $f''(x)$, dividido pelo mínimo resultado de $2f'(x)$, dá $\frac{12,6}{20}=0,6$; a unidade decimal imediatamente superior ao primeiro número do quociente a 1 pelas considerações já feitas, $k=0$.

A diferença dos limites é $2,1-2,0=0,1$. Por consequente $n=1$.

A condição $n \geqq 1-k$ sendo satisfeita, podemos proceder à aproximação.

O limite, externo é $2,1$ porque, ao ser substituído por x em $f(x)$, dará resultados de mesmo sinal $(+)$. Dividindo $\frac{f(2,1)}{f'(2,1)}$ e efetuando a aproximação até o número decimal de ordem $2n+k$, que é 2, temos

$$\frac{f(2,1)}{f'(2,1)}=\frac{0,061}{11,23}=0,00...,$$

ou aproximadamente, de acordo com a regra, $0,01$. Como o limite de onde partimos é maior, devemos subtrair esta aproximação do limite $2,1-0,01=2,09$.

É necessário verificar agora se este número é maior ou menor que a raíz. Substituimos $2,09$ em $f(x)$ e com isso alteramos o sinal do resultado; mas para aproveitar de todas as operações numéricas executadas, desenvolvemos $f(2+0,09)$ de acordo com a série Taylor:

$$f(2+0,09)=f(2)+0,09f'(2)+\frac{0,09^2}{2}f''(2)+\frac{0,09^3}{2.3}f'''(2)+...$$

Para evitar qualquer repetição, dispomos o cálculo da seguinte forma: escrevemos primeiro os valores já conhecidos de $f(2)\,,f'(2)\,,f''(2)$ e $f'''(2)\,;$ seguidamente multiplicamos por $0,09$ todos os resultados a partir de $f'(2)$; multiplicamos ainda por $0,09$ e divide-se por 2 todos os resultados a partir de $f''(2)$; multiplicamos por último por $0,09$, e dividimos por 3 a partir de $f'''(2)\,.$

$f(2)$	$f'(2)$	$f''(2)$	$f'''(2)$
-1	10	12	6
	$0,09$	$0,09$	$0,09$
	$0,90$	$1,08$	$0,54$
		$0,09$	$0,09$
		$0,0972$	$0,0486$
		$0,0486$	$0,0243$
			$0,09$
			$0,002187$
			$0,000727$

Para ter $f(2,09)$ devemos acrescentar

$$
\begin{array}{rr}
 & 0,90 \\
 & 0,0486 \\
 & 0,000729 \\
\hline
 & 0,949329 \\
 & -1 \\
\hline
f(2,09) = & -1,050671
\end{array}
$$

Empregando o mesmo método, calculamos $f'(2,09), f''(2,09), ...$, que precisamos. A série de Taylor resultará em

$$
\begin{aligned}
f'(2+0,09) &= f'(2) + 0,09 f''(2) + \frac{0,09^2}{2} f'''(2). \\
f'(2,09) &= 10 \qquad f''(2,09) = 12 \qquad f'''(2,09) = 6
\end{aligned}
$$

Sendo o resultado negativo, o valor substituído $2,09$ é menor que a raíz; é consequentemente compreendido entre $2,09$ e $2,10$. A diferença destes limites é $0,01$ ou $\left(\frac{1}{10}\right)^2$, $n = 2$, e a aproximação pode ser efetuada até ao quarto número decimal, porque $2n + k = 4$. Substituindo na sequência de formações $x = 2,09$ e $x = 2,10$ tem-se

x	X''	X'	X
$2,09$	$+$	$+11,1043$	$-0,50671$
$2,10$	$+$	$+11,23$	$+0,061$

O limite externo $2,10$, divide-se $\frac{0,061}{11,22}$ e efetua-se a operação até quarta casa decimal, o que produz $0,0055$. Subtraindo este resultado de $2,10$, temos $2,0945$ para segundo valor aproximativo. Antes de proceder à terceira aproximação, é necessário ver se o número $2,0945$ é menor ou maior que a raíz. É necessário por conseguinte desenvolver em série $f\left(2,09+0,0045\right)$. Como anteriormente, fazendo os cálculos encontramos:

$$\begin{aligned} f\left(2,0945\right) &= -0,000574591375 \\ f'\left(2,0945\right) &= 11,16079075, \\ f''\left(2,0945\right) &= 12,5670, \\ f'''\left(2,0945\right) &= 6. \end{aligned}$$

temos $n=4$, por conseguinte $2n+k=8$; pode-se efetuar até o oitavo decimal a divisão

$$\frac{f\left(\beta\right)}{f'\left(\beta\right)} = \frac{0,000541550536}{11,16204748} = 0,00004851.$$

Subtraindo este número do limite $2,0946$, temos o terceiro valor aproximativo que é $2,09455148$. Substituindo este valor na equação dada, como feito anteriormente, encontramos:

$$\begin{aligned} f\left(2,0945\right) &= -0,000574591375; \quad f'\left(2,0945\right) = 0,0005745575078100 \\ f''\left(2,0945\right) &= 0,0000001665247137840 \\ f'''\left(20,945\right) &= 0,0000000000000409295405376 \end{aligned}$$

onde concluimos que

$$\begin{aligned} f\left(2,09455148\right) &= -0,000000017214582189798208 \\ f'\left(2,09455148\right) &= 11,1614377071105712 \\ f''\left(2,09455148\right) &= 12,56730888; \quad f'''\left(2,09455148\right) = 6. \end{aligned}$$

Com o resultado da substituição de $2,09455148$ na equação dada negativa, concluimos que se o valor encontrado é menor que a raíz; a raiz é por conseguinte compreendida entre $2,09455148 \quad \text{e} \quad 2,09455149$. Empregando os métodos já conhecidos, temos também

$$
\begin{aligned}
f\,(2,09455149) &= 0,00000009\\
f'\,(2,09455149) &= 11,1614378327836603\\
f''\,(2,09455149) &= 12,56730894; \quad f'''\,(2,09455149) = 6.
\end{aligned}
$$

O valor $2,09455149$ que tem oito números decimais, da divisão de $\frac{f(2,09455149)}{f'(2,09455149)}$ deve ser efetuado até décima sexta casa decimal. Executando esta divisão, encontramos $0,0000000084576734$; aumentando o último número deste número de uma unidade e subtraindo-o do valor precedente, temos, para o quarto valor aproximado,

$$2,0945514815423265 = m.$$

Operando da mesma maneira, temos

$$
\begin{aligned}
f\,(m) &= -0,000000000000001021074960443679845432495185865375,\\
f'\,(m) &= 11,16143772649346472644563309780675,\\
f''\,(m) &= 12,5673088892539590.
\end{aligned}
$$

Com o resultado $f(m)$ negativo, o número m, menor que a raíz, é o limite inferior; aumentando de uma unidade a ordem do último número decimal, temos o limite externo

$$2,0945514815423266 = n.$$

Este valor, substituído na sequência de formações pela regra precedente, dá

$$
\begin{aligned}
f\,(n) &= 0,00000000000000005906881220566669004861257018 5096,\\
f'\,(n) &= 11,16143772649346598317652202320268,\\
f''\,(n) &= 12,5673088892539596.
\end{aligned}
$$

Dividindo $f(n)$ por $f'(n)$ e empurrando o cálculo até o trigésimo segundo número decimal a partir da vírgula, temos por quociente

$$0,00000000000000000851761345942069;$$

acrescentando uma unidade ao último número e subtraindo-o do valor de n; temos para quinto valor aproximado da raíz

$$2,0945514815423265914823865405793 0.$$

Tal é a raíz real da equação $x^3 - 2x - 5 = 0$; que segundo o autor, foi calculado por Fourier na sua obra póstuma *Analyse des équations déterminées.*[51]

Comentários: Neste capítulo, o autor se deteve em analisar o trabalho de Newton e Fourier para determinar valores para raízes incomensuráveis. Exibiu o método feito por Newton, mostrou suas falhas, e verificou as alternativas dadas por Fourier para o mesmo.

Agliberto não fez nenhuma demonstração dos resultados encontrados, fez apenas uma descrição dos métodos e de suas falhas; em particular apresenta apenas um único exemplo para a utilização dos métodos, porém faz de forma bem detalhada. Supõe inicialmente os valores do intervalo em que se encontram as raízes e desenvolve o método para determiná-las. Utiliza tentativas para determinar os intervalos onde estão compreendidas as raízes. É um capítulo importante do ponto de vista do cálculo numérico pois apresenta um de seus métodos mais importantes que é o método de Newton.

Os cálculos desenvolvidos por Agliberto utilizam várias casas decimais, apesar de o autor não comentar se utilizou algum instrumento de cálculo para realizá-los. Sabemos que atualmente os cursos de cálculo numérico não dão tamanha ênfase na resolução dos cálculos e sim na compreensão do método, visto que podemos dispor do uso de calculadoras e *softwares.*

Obras citadas pelo autor neste capítulo: *Analysis per aequationes numerotermi-norum infinitas (Newton); Analysis aequationum universalis londini (Raphson); Philosophical transactions (Halley); Analyse des équations detérminées (Fourier).*

[51]Nota da autora: Parte extraída do livro, Capítulo IV, p.156.

3.6 O Capítulo V: Da extração das raízes de números.

Sumário:

1. Conexão entre o problema de extração de raízes de números e do cálculo das raízes de equações.

2. Sobre o método de Newton - O procedimento da extração das raízes dos números é um caso específico do método.

3. Imagem geométrica deste método.

4. Aplicação a um exemplo.

5. Observação relativa à elevação dos número às potências.[52]

Agliberto inicia o capítulo esclarecendo ao leitor como é o procedimento para a extração das raízes dos números. Afirma que para o cálculo da raíz real e positiva de uma equação binomial cujo grau é marcado pelo índice da raíz, utiliza-se geralmente um caso particular do método de Newton para a avaliação das raízes numéricas de equações quaisquer.

O autor, relembra o método de Newton que foi trabalhado no capítulo anterior. Salienta que consiste em dar a um dos valores aproximados da raíz um crescimento indeterminado, e desenvolver seguidamente a equação de acordo com a série de Taylor, negligenciar todos os termos que contêm as potências de crescimento superiores à primeira, e resolver por último a equação em relação à este crescimento.

Ou seja, o valor aproximado da raíz será dado por $a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a'$.

Substituindo este resultado por a aumentado de um acréscimo indeterminado h e operando da mesma forma, temos um novo resultado a'' ao qual aplicamos o mesmo procedimento e assim por diante.

Considerando que no caso da extração da raíz, a equação a resolver é

$$x^m - A = 0,$$

[52]Nota da autora: O sumário deste capítulo apresentado por Agliberto possui um erro de edição, no livro, a numeração passa do ítem 4 - *Imagem geométrica deste método*, para o ítem *6 - Aplicação a um exemplo.* p.157.

tem-se $f\,(a) = a^m - A, \qquad f'\,(a) = ma^{m-1},$ e conseqüentemente $h = \frac{a^m - A}{ma^{m-1}}$ e

$$a' = a + \frac{a^m - A}{ma^{m-1}}$$

Este resultado mostra que, após ter encontrado a primeira parte a da raíz, devemos elevar esta parte à potência m, subtrair do número dado A e dividir o resto $a^m - A$ por m vezes a potência $m-1$ da parte encontrada a.

Onde devemos parar com esta divisão? Qual é o grau de aproximação? A resposta para estas questões, segundo o autor, podem ser encontradas no aperfeiçoamento que Fourier trouxe ao método geral de Newton. Propõe a criação de uma imagem geométrica do método de Newton e da alteração feita por Fourier.

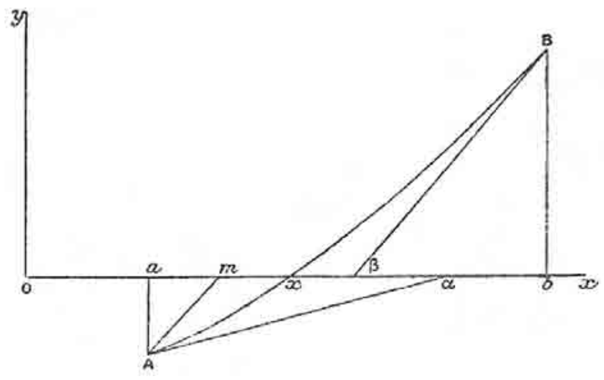
Representando pelo arco de curva AB a parte da equação

$$y = x^m - A$$

compreendida entre os valores aproximados das abcissas $x = a$ (representado por Oa) e $x = b$ (representado por Ob).

Traçando em A uma tangente à curva e prolongando até o ponto α, temos $\tan x = f'\,(a)$, traçando em A a perpendicular, temos um triângulo $Aa\alpha$, no qual, $Aa = f'(a)$. Deste triângulo concluimos que: $a\alpha = Aa \times \cot x = \frac{Aa}{\tan\alpha} = \frac{f(a)}{f'(a)}$, do ponto A traça-se Am paralelo à $B\beta$, temos o triângulo Aam:

$$am = Aa \times \cot m = Aa \times \cot\beta = \frac{Aa}{\tan\beta} = \frac{f\,(a)}{f'\,(b)}.$$



O método de Newton consiste em acrescentar à Oa a abcissa $a\alpha$, ou seja, $a + \frac{f(a)}{f'(a)}$. Ou, nos casos específicos das equações binomiais, $a + \frac{a^m - A}{ma^{m-1}}$.

O aperfeiçoamento de Fourier considera um ponto m antes de x, de modo que x permaneça entre m e a; o ponto m é escrito como

$$a + \frac{a^m - A}{mb^{m-1}}$$

Segundo Agliberto, podemos traduzir esta expressão na seguinte regra:

> "En représentant par R la différence $a^m - A$, on effectue successivement les divisions $\frac{R}{ma^{m-1}}$ et $\frac{R}{mb^{m-1}}$, et l'on met en regard les deux résultats; on prend de ces résultats les chiffres communs."[53]

Apresenta o cálculo da aproximação que dá esta divisão, salientando que é melhor calcular as duas divisões, para controlar os resultados.

Designando por a' a segunda aproximação

$$a' = a - \frac{a^m - A}{mb^{m-1}}$$

Representa-se $b - a$ por i, de modo que $i = b = a$, onde $a = b - i$;

Substituindo, $a' = b - i - \frac{(b-i)^m - A}{mb^{m-1}}$ e desenvolvendo pela série Taylor,

$$a' = b - i - \frac{b^m - mib^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} i^2 b^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} i^3 b^{m-3} + ... - A}{mb^{m-1}}$$

Ou ainda

$$a' = b - i - \frac{b^m - A}{mb^{m-1}} + i - \frac{i^2}{2}\frac{m-1}{b} + \frac{i^3}{2.3}\frac{(m-1)(m-2)}{b^2} - ...$$

Temos $b - \frac{b^m - A}{mb^{m-1}} = b'$; substituindo esta expressão reduzida,

$$a' = b' - \frac{i^2}{2}\frac{m-1}{b} + \frac{i^3}{2.3}\frac{(m-1)(m-2)}{b^2} - \frac{i^4}{2.3.4}\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{b^3} + ...$$

Fazendo passar b' ao primeiro membro da igualdade e observando que $a' - b' = i'$;

Encontramos $i' = \frac{i^2}{2}\frac{m-1}{b} - \frac{i^3}{2.3}\frac{(m-1)(m-2)}{b^2} + \frac{i^4}{2.3.4}\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{b^3} - .....$ Podemos tomar b grande de modo que

$$i' < \frac{i^2}{2}\frac{m-1}{b}$$

[53] Tradução da autora: 'Representando por R a diferença $a^m - A$, efetua-se sucessivamente as divisões $\frac{R}{ma^{m-1}}$ e $\frac{R}{mb^{m-1}}$, e olhando os dois resultados; toma-se destes resultados os números comuns.' Parte extraída do Capítulo V, p.161.

Exemplo 9 *Seja a raíz quinta do número* 6330012345678

Agliberto coloca que a primeira aproximação é a raíz de 300, vamos dividir por $\frac{R}{5a^4}$, mas é necessário conhecer sua combinação de números fracionários para que se possa contar nesta divisão. Para isto, aplicamos a fórmula $i' < \frac{i^2}{2}\frac{m-1}{b}$; que, no caso da raíz quinta, será $i' < \frac{2i^2}{b}$; tem-se $a = 300$, $b = 400$, conseqüentemente $i^2 = 10000$,

$$i' < \frac{20000}{400} = 50.$$

A ordem, imediatamente superior à 50 nas centenas, é a mesma parte já encontrada da raíz 300, a divisão não deve ser efetuada. Dividindo sucessivamente

$$\frac{R}{5 \times 300^4} \quad \text{e} \quad \frac{R}{5 \times 400^4},$$

Encontramos respectivamente 96 e 30. Os resultados $300+96 = 396$ e $300+30 = 330$ confirmam a previsão que a divisão não acrescenta nada à parte já encontrada.

O autor propõe por tentativas verificar que o número das dezenas é 6. Temos então a raiz 360. Aplicando novamente a fórmula $i' < \frac{2i^2}{b}$; com $a = 360$, $b = 370$, conseqüentemente $i = 10$ $\quad i^2 = 100$, temos

$$i' < \frac{200}{370} < 0,6.$$

A ordem imediatamente superior à $0,6$ é a unidade, inferior portanto à parte já encontrada da raíz, podemos efetuar a divisão para obter apenas os números das unidades. Para isto, é necessário calcular

$$\begin{aligned} 360^2 &= 129600; \quad 360^3 = 46656000 \\ 360^4 &= 16796160000; \; 5 \times 360^4 = 83980800000 \\ 360^5 &= 6046617600000 \end{aligned}$$

e a diferença $a^5 - A$, onde $A = 6330012345678$ e $a^5 = 6046617600000$, será

$$a^5 - A = 283394745678$$

e o quociente

$$\frac{R}{5a^4} = \frac{283394745678}{83980800000} = 3, \ldots.$$

Para calcular as potências sucessivas da raíz, devemos fazer as multiplicações de acordo com o método de Fourier (sem escrever os produtos parciais). Temos assim

$$\begin{aligned} 363^4 &= 17363069361; \quad 5a^4 = 86815346805 \\ 363^5 &= 6302794178043 \end{aligned}$$

Por outro lado, $363^5 - A = 27218167635$.

Antes de efetuar a divisão $\frac{R}{5a^4}$ calculamos o limite $i' < \frac{2i^2}{b}$. Fazendo $a = 363$, $b = 364$ conseqüentemente $i = 1$, $i^2 = 1$,

$$i' < \frac{2}{364} < 0,006.$$

podemos contar com os dois primeiros números fracionários

$$\frac{R}{5a^4} = \frac{27218167635}{86815346805} = 0,31...$$

e conseqüentemente

$$x = 363,31$$

Ao olhar os dois resultados $\frac{R}{5a^4}$ e $\frac{R}{5b^4}$, devemos calcular 364^4 e 5×364^4.Temos, da mesma forma,

$$\begin{aligned} 364^4 &= 17555190016; \quad 5 \times 364^4 = 87775950080 \\ \frac{R}{5b^4} &= \frac{27218167635}{87775950080} = 0,31..., \end{aligned}$$

e vemos que a raíz é $x = 363,31$. Podemos continuar a operação, obtendo assim a raíz

$$x = 363,31297776572134...$$

O autor observa que não querendo empregar a multiplicação de Fourier para elevar as raízes às potências, pode-se operar facilmente pela série Taylor, porque este procedimento permite aproveitar do trabalho já feito para a avaliação das partes anteriores da raíz.

Comentários: Sendo este um trabalho sobre cálculo numérico como bem afirma Agliberto em sua introdução, não poderiam faltar cálculos com muitas casas decimais.

É o que faz o autor neste capítulo. Para compreender seus cálculos, utilizei por vezes, uma calculadora científica com 10 dígitos, e não consegui resolver o exercício com tamanha precisão. Durante todo o livro Agliberto não sugere como faz os cálculos, não se sabe se ele utiliza réguas de cálculo, nomogramas ou mesmo lápis e papel; apenas apresenta os resultados com excelentes aproximações. Agliberto faz um trabalho numérico muito interessante, neste capítulo apresentando dois exemplos e resolvendo por meio dos métodos de forma bem rigorosa.

O capítulo expõe de forma clara o seu ponto mais importante que é o método de Newton por meio do procedimento da extração das raízes dos números.

Neste capítulo em particular Agliberto não cita nenhuma obra de forma específica.

3.7 O Capítulo VI: Teoria dos logaritmos.

Sumário:

1. Concepção aritmética e algébrica dos logaritmos e suas propriedades.
2. Concepção mecânica dos logaritmos, ou do Método de Napier para calcular as tábuas de logaritmos.
3. Modificação feita por Briggs[54] ao sistema e ao método de Napier.
4. Dos diferentes sistemas de logaritmos.
5. Concepção geométrica dos logaritmos quaisquer, das suas representações pela área da hipérbole eqüilátera incluída entre as suas assíntotas.
6. Cálculo das tábuas de logaritmos pelas séries e pelo método de Koralek.
7. Logaritmos de Leonelli, ditos de Gauss[55].

[54]Henry Briggs (1561-1630), matemático inglês que desenvolveu a teoria dos logaritmos conjuntamente com Napier.

[55]Carl Friedrich Gauss (1777 -1855), matemático alemão, considerado um dos grandes matemáticos de seu tempo.

8. A controvérsia entre Leibniz[56] e Jean Bernoulli, continuação seguida por Euler[57] e d'Alembert[58], para os logaritmos de números negativos.

Agliberto inicia o capítulo colocando uma idéia simples de compreender os logaritmos, segundo ele, devemos escrever todos os números por potências de 10, como encontramos nas Tábuas de logaritmos. Assim, representamos por exemplo 53 pela potência que lhe é equivalente $53 = 10^x$. Podemos representar da mesma forma 27 por uma outra potência de 10: $27 = 10^y$. Os expoentes x e y são os logaritmos de 53 e de 27.

Sabemos, que o produto destes dois números implica a soma destes expoentes e que o quociente exige a sua subtração:

$$\begin{aligned} 53 &= 10^x, \qquad 27 = 10^y \\ 53 \times 27 &= 10^{x+y} \quad 53 \div 27 = 10^{x-y} \end{aligned}$$

Por meio de uma Tábua de números geralmente utilizados nos cálculos, para ter o produto de 53 por 27, será suficiente acrescentar os seus logaritmos x e y e procurar na Tábua o número que corresponde ao logaritmo $x + y$. Para a divisão, subtraimos o logaritmo y e do logaritmo x e procuramos o número do qual o logaritmo é $x - y$. Observando que o logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores, é fácil conhecer o logaritmo de uma potência $a^m = a \times a \times a \times a \times a...$ que conseqüentemente será dada por:

$$\log a^m = \log a + \log a + \log a + ... = m \log a$$

Complementa o autor que reconhecendo que o logaritmo de uma potência de um número é igual ao expoente da potência multiplicado pelo logaritmo deste número, para conhecer o logaritmo de uma raíz, podemos estender o resultado precedente às potências fracionárias. Ou seja, $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$, e por conseguinte

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a$$

[56] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 -1716), matemático alemão conhecido por seus trabalhos em cálculo conjuntamente com Isaac Newton.

[57] Leonhard Euler (1707 -1783), matemático suíço que se destacou em diversas áreas.

[58] Jean Le Rond d'Alembert (1717 -1783), matemático suíço que dedicou-se à algebra e a geometria.

O autor propõe justificar este resultado como segue:

A igualdade $b = \sqrt[m]{a}$ equivale a $b^m = a$; tomando os logaritmos desta última expressão, temos $m \log b = \log a$ ou $\log b = \frac{\log a}{m}$ e conseqüentemente

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$

Segundo Agliberto, quando Napier inventou os logaritmos, não se conhecia ainda a teoria das potências; não se pensava que a raíz de um número poderia ser encarada como uma potência fracionária. A idéia que se apresentou a Napier foi a de duas progressões, uma geométrica e a outra aritmética; os termos da progressão aritmética são os logaritmos dos termos correspondentes da progressão geométrica. Assim, as duas progressões

Números................1 : 9 : 81 : 729 : 6561 : 59049 : 531441 : ...

Logaritmos................0 : 2 : 4 : 6 : 8 : 10 : 12...

representam, a primeira, os números, e a segunda os logaritmos.

Suponhamos multiplicar 81 por 6561; sabemos que à 81 corresponde o termo 4 e à 6561 corresponde 8; acrescentando estes termos ou melhor estes logaritmos, temos $4 + 8 = 12$. O número que corresponde ao logaritmo 12 é 531441. Isto equivale a dizer que $81 \times 6561 = 531441$.

Se ao contrário, procuramos o quociente de 59049 dividido por 6561, cujos logaritmos são respectivamente 10 e 8. Subtraindo do logaritmo 10 o logaritmo 8, temos o logaritmo 2, que corresponde ao número 9, que equivale a dizer que: $59049 \div 6561 = 9$.

Assegura Agliberto que o valor da invenção dos logaritmos, como observado por Biot[59], não consiste em ter encontrado as propriedades das progressões geométricas e aritméticas, dado que Archimedes[60], no seu *Traité de l'Arénaire*, já o tivesse comparado e tivesse empregado os mesmo termos da progressão aritmética como índices para

[59] Jean-Baptiste Biot (1774 -1862) matemático francês que trabalhou com geometria analítica.

[60] Archimedes de Syracuse (287 A.C - 212 A.C), matemático que estudou com os estudantes de Euclides. É conhecido por diversas máquinas de guerra que inventou.

marcar a fila de cada termo na progressão geométrica, de maneira que a multiplicação e a divisão dos termos da progressão geométrica podem ser reduzidas a adição e subtração dos seus índices correspondentes da progressão aritmética. O mérito incontestável de Napier, segundo Agliberto, não consistiu em encontrar as propriedades que nenhum geômetra ignorava desde Archimedes, mas incluir todos os números de uma mesma progressão geométrica, procedendo continuamente por razões iguais.

Duas progressões (dos números e os logaritmos) podem ter razões quaisquer e devem satisfazer unicamente à condição de começar, a progressão geométrica ou dos números por 1, e a progressão aritmética ou dos logaritmos por 0.

Chamamos base de um sistema de logaritmos o *número cujo logaritmo é igual à unidade.* Esta definição, segundo o autor é naturalmente deduzida de considerar os logaritmos como termos de uma progressão aritmética, que corresponde respectivamente aos termos de uma progressão geométrica. Mas relembrando a concepção dos expoentes, podemos defini-lo *como a base da potência que é igual ao número.* Na expressão $x^{\log A} = A$, a base do logaritmo é x.

O autor afirma que ao calcularmos a base do sistema de logaritmos que foi utilizado no método das duas progressões acima, é suficiente inserir entre os dois termos da progressão aritmética 0 e 2 uma média para fazer aparecer o termo 1 ou o logaritmo 1, e de inserir entre os dois termos correspondentes da progressão geométrica 1 e 9 um termo médio, que é 3. Este cálculo indica que 3 tem por logaritmo 1, e conseqüentemente que 3 é a base deste sistema de logaritmos. Para as novas progressões temos que:

$$\begin{array}{rcl} \text{Números..........}1 & : & 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729.... \\ \text{Logaritmos...........}0 & : & 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6...... \end{array}$$

os termos $1, 9, 81, 729$, etc., da progressão dos números e $0, 2, 4, 6$,etc., da progressão dos logaritmos, tomados respectivamente de duas em duas filas, coincidindo com os termos sucessivos da progressão acima. Podemos escrever estas duas progressões como segue:

$$\begin{array}{rcl} \text{Números...........}3^0 & : & 3^1 : 3^2 : 3^3 : 3^4 : 3^5 : .... \\ \text{Logaritmos..............}0 & : & 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : ..... \end{array}$$

o que justifica a segunda definição da base dos logaritmos, como sendo a base da potência que é igual ao número.

As propriedades fundamentais reconhecidas pela teoria dos expoentes são demonstradas facilmente pelo emprego das duas progressões, dado que na progressão geométrica o produto de dois termos igualmente afastados dos extremos é igual ao produto dos extremos, e na progressão aritmética, esta propriedade pode ser verificada para a soma. Assim, pelas propriedades:

Números...........1. : $a : b : c$
Logaritmos........0. $\log a. \log b. \log c$

$$\begin{aligned} 1 \times c &= a \times b, \\ 0 + \log c &= \log a + \log b, \end{aligned}$$

E, prossegue o autor, colocando ab em vez de c, temos $\log ab = \log a + \log b$. Concebemos ainda uma progressão geométrica que não começa pela unidade e um progressão aritmética que também não começa por zero:

Números...............$i : a : b : c$
Logaritmos.......... $\log i. \log a. \log b. \log c$

temos $ic = ab$, onde $c = \frac{ab}{i}$, e $\log i + \log c = \log a + \log b$, onde $\log c = \log a + \log b - \log i$, e colocando $\frac{ab}{i}$ em vez de c.

$$\log \frac{ab}{i} = \log a + \log b - \log i.$$

Reconhecendo ainda que o logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores, deduzimos facilmente que o logaritmo de um quociente é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo divisor. Se $b = ac$ e $\log b = \log a + \log c$, concluimos que

$$a = \frac{b}{c} \quad \text{e} \quad \log a = \log b - \log c.$$

Mas podemos verificar esta propriedade pelo único emprego dos teoremas relativos as progressões.

Números............$b : 1 : c : a$
Logaritmos....... $\log b. 0. \log c. \log a$

Da primeira deduzimos $1 \times c = a \times b$ ou $a = \frac{b}{c}$; da segunda $0 + \log c = \log a + \log b$ ou $\log a = \log b - \log c$, e conseqüentemente

$$\log \frac{b}{c} = \log b - \log c$$

> "Les logarithmes, dit Lagrange, sont un instrument d'un usage universel dans les sciences et même dans les arts qui dépendent du calcul. En voici, par exemple une application bien sensible. Ceux qui ne sont pas tout à fait étrangers à la musique savent que l'on exprime les différents sons de l'octave par les nombres qui déterminent les parties d'une même corde tendue, qui rendraient ces mêmes sons; ainsi, le son principal étant exprimé par 1, son octave le sera par $\frac{1}{2}$, la quinte par $\frac{2}{3}$,la tierce par $\frac{4}{5}$,la quarte par $\frac{3}{4}$, la seconde par $\frac{8}{9}$, et ainsi des autres La distance d'un des sons à l'autre s'appelle *intervale*, et doit se mesurer, non par la différence, mais par le rapport des nombres qui expriment ces deux sons. Ainsi l'on regarde l'intervalle entre la quarte et la quinte, appelé *ton majeur*, comme sensiblement double de celui entre la tierce et la quarte, appelé *semi-ton majeur*. En effet, le premier se trouve exprimé par $\frac{8}{9}$, le second par $\frac{15}{26}$, et le premier ne diffère pas beaucoup u carré du second, ce qui est aisé à vérifier; or il est clair que cette considération des intervalles, sur laquelles est fondée toute la théorie du tempérament, conduit naturellement aux logarithmes; car, si l'on exprime les valeurs des différents sons par les logarithmes des longueurs des cordes qui y répondent, alors l'intervalle d'un son à l'autre sera exprimé par la différence même de valeur de ces sons; et si l'on voulait diviser l'octave en douze semi-tons égaux, ce qui donnerait le tempérament le plus simple et le plus exact, il n'y aurait qu'à diviser le logarithme de $\frac{1}{2}$, valeur de l'octave, en douze parties égales."[61]

[61] Tradução da autora: 'Os logaritmos, disse Lagrange, são um instrumento de uso universal nas ciências e mesmo nas artes que dependem do cálculo. Eis, por exemplo, uma aplicação bem sensível.:

Os que não são completamente estranhos à música sabem que exprime-se os diferentes sons da oitava pelos números que determinam as partes de uma mesma corda tensa, que tornariam este mesmos sons; assim, o som principal exprimido por 1, a sua oitava será por $\frac{1}{2}$, a quinta por $\frac{2}{3}$, a terça por $\frac{4}{5}$, a quarta por $\frac{3}{4}$, a segunda por $\frac{8}{9}$, e assim por diante. A distância de um dos sons ao outro chama-se intervalo, e deve medir-se, não pela diferença, mas pelo relatório dos números que exprimem os dois sons. Assim o intervalo entre a quarta e a quinta, é chamado tom maior, como o duplo entre

Segundo Agliberto, o uso algébrico dos logaritmos consiste em dar as raízes reais das equações exponenciais. Assim, prossegue o autor, a resolução das equações exponenciais, independentemente das dificuldades que lhe são inerentes, está impregnada das imperfeições da resolução algébrica das equações. Mas não podemos perder de vista que as equações exponenciais, como todas as equações transcendentais, têm uma infinidade de raízes e o emprego dos logaritmos daria apenas as raízes reais.

Segundo Agliberto, para incluir na progressão geométrica todos os números e encontrar os termos correspondentes da progressão aritmética, Napier utilizou uma concepção mecânica, comparando as duas progressões com duas linhas direitas paralelas percorridas por dois móveis, um com uma velocidade uniformemente retardada e o outro com uma velocidade uniforme. Os espaços percorridos pelo primeiro móvel são a representação mecânica dos termos da progressão geométrica decrescente, ou seja a sucessão dos números; os espaços percorridos pelo segundo móvel que representa os termos correspondentes da progressão aritmética ou a sucessão dos logaritmos.

Para o autor, Montucla[62] e a maioria dos que escreveram a história da Matemática sem ter sob os olhos a obra póstuma de Napier, que ficou extremamente rara, imaginou que este geômetra tivesse concebido duas progressões crescentes e atribuiu-lhe um método de bissecção que foi empregado apenas por Briggs. Recomenda Agliberto que o leitor desejoso para conhecer nos detalhes os métodos empregados pelo inventor da teoria dos logaritmos na construção das suas Tábuas, pode ver Hutton[63] na sua *Introdução Tables mathématiques* de Sherwin, que foram impressas no primeiro Volume do *Scriptores logarithmici;* ou ainda a Análise das Obras de Napier relativas à invenção

a terça e a quarta, é chamado semi tom maior. Com efeito, o primeiro encontra-se expresso por $\frac{8}{9}$, o segundo por $\frac{15}{26}$, e o primeiro não difere muito do quadrado do segundo, o que é fácil de verificar; ora é claro que esta consideração dos intervalos, sobre a qual é fundada toda a teoria do temperamento, é conduzida naturalmente aos logaritmos; porque, se exprime os valores dos diferentes sons pelos logaritmos dos comprimentos das cordas, então o intervalo de um som ao outro será expresso pela mesma diferença de valor destes sons; e, se quisesse dividir a oitava em doze semitons iguais, que daria um temperamento mais simples e mais exato, ele não seria o único a dividir o logaritmo de $\frac{1}{2}$, valor da oitava, em doze partes iguais.'(LAGRANGE, *Leçons élémentaires sur les Mathématiques,* dados à Escola normal em 1795.)

Parte extraída do Capítulo VI, p.183.

[62]Jean Etienne Montucla (1725 -1799), matemático e historiador francês, um dos primeiros a se interessar pela História da Matemática. Publicou : *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle*, e a *Histoire des mathématiques*, dentre outros.

[63]Charles Hutton (1737 -1823), matemático inglês.

dos logaritmos, por Biot, publicada em *Additions à la Connaissance des Temps*, de 1838. Esta excelente Memória foi reproduzida no Volume 1 de *A short account of the history of mathematics*, de Walter-W. Rouse-Ball. A proposta de Agliberto é fazer um resumo da Memória de Biot.

Segundo o autor, foi observando que os intervalos compreendidos na progressão geométrica ou dos números aumentam cada vez mais, que Napier concebeu a idéia de inverter esta progressão. Desta maneira, teve êxito não somente em introduzir todos os números, o que foi extremamente difícil, mas ainda formar os termos sucessivos da progressão geométrica, com toda a precisão necessária, por simples subtrações sucessivas, sem multiplicações nem divisões.

Salienta Agliberto, que para Napier construir a sua Tábua de logaritmos definitiva que chama *Table radical*, obrigou-se a construir as *Tables preparatórias*. A Tábua radical é formada pela progressão geométrica seguinte:

$$\begin{array}{c} 10000000 \\ 9995000 \\ 9990002 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Para o autor, os termos desta progressão seriam suficientes para introduzir os números desejados na Tábua, mas não são aproximados o bastante, como reconheceu Napier, para dar a aproximação necessária nos logaritmos. É para afastar este erro que construiu as suas Tábuas preparatórias. A primeira destas Tábuas preparatórias forma os seguintes termos da progressão:

$$\begin{array}{c} 10000000 \\ 9999999 \\ 9999998 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 9999900 \end{array}$$

Que serve para dar o termo da progressão aritmética correspondente à 9999900, ou seja o logaritmo deste número. A segunda Tábua preparatória, forma a progressão que serve para dar o termo da progressão aritmética correspondente à 9995000, ou o logaritmo deste número. A terceira Tábua preparatória, serve para dar-lhe o logaritmo do número 9900000. Afirma agliberto, que com os logaritmos dos números 9999900, 9995000, 9900000, Napier pôde construir a sua Tábua radical[64], composta de 69 colunas de 21 termos cada uma, assim disposta:

1re COLONNE.		2e COLONNE.			69e COLONNE.	
Nombres naturels.	Logarithmes.	Nombres naturels.	Logarithmes.		Nombres naturels.	Logarithmes.
10000000.0000	0.0	9900000,0000	100503,4	...	5048858,8879	6834228,4
9995000.0000	5001,2	9895050,0000	105504,6	...	5046334,4584	6839229.6
9990002.5000	10002,5	9890102,4750	110505,9	...	5043811,2112	6844230,9
9985007,4987	15003,7	9885157,4237	115507,1	...	5041289,3856	6849232,1
9980014,9950	20005,0	9880214,8451	120508,3	...	5038768,7409	6852433,4
...	...	...	...	...	...	...
					5001109,9568	6929252,1
9900473,5780	100025,0	9801468,8422	200528,4	...	4998609,4019	6934253,4

Vemos que o logaritmo de 9900000, dado pela terceira Tábua preparatória, serve para começar a segunda coluna. Observando que este termo deduz-se de 10000000 pela sua razão:

$$\frac{9900000}{10000000} = \frac{99}{100} = \frac{100-1}{100} = 1 - \frac{1}{100},$$

ou seja, subtraindo de 10000000 sua 100^a parte (100000) obtemos facilmente o primeiro termo da coluna seguinte subtraído do primeiro termo da coluna precedente 9900000 sua 100^a parte (99000), e calculando a diferença $9900000 - 99000 = 981000$ obteriamos da mesma maneira o primeiro termo da quarta coluna, e assim por diante.

Segundo o autor, os termos de cada coluna de números naturais deduzem-se os uns dos outro formando a primeira razão do segundo ao primeiro termo da primeira coluna:

$$\frac{9995000}{10000000} = \frac{9995}{10000} = \frac{1999}{2000} = \frac{2000-1}{2000} = 1 - \frac{1}{2000}.$$

[64]Nota da autora: Tabela extraída do Capítulo VI, p.187.

Desta forma cada número natural deve ser subtraído do precedente a sua 2000^a parte. Assim, obtém-se o terceiro termo da primeira coluna cortando do segundo a sua 2000^a parte $\frac{9995000}{2000} = 4997,5$, ou seja, $9995000 - 4997,5 = 9990002,5$.

Os termos da coluna dos logaritmos são formados acrescentando à cada termo a razão constante $5001,25041645$, que obtemos tomando a diferença entre os logaritmos de 10000000 e 9995000. Assim, dado que o segundo termo da primeira coluna dos logaritmos é $5001,2$, obtemos o terceiro acrescentando esta razão constante $5001,2 + 5001,25 = 10002,4$; formamos da mesma maneira o quarto, e assim por diante.

Segundo o autor, a aplicação logarítmica que Napier tinha em vista era o cálculo trigonométrico; é para isto que chamava freqüentemente os números naturais de senos. Esta aplicação exigia empurrar a sua Tábua desde 10000000 até a 0, dado que concebia as linhas trigonométricas num círculo de raio igual à 10^7.

No entanto, afirma Agliberto, a sua Tábua não desce além do número 5000000, que representa o seno de $30°$. Para obter os logaritmos dos números inferiores à 5000000, ele empregou as relações trigonométricas que abreviam o cálculo para as partes de um mesmo quadrante, ou os artifícios de multiplicações que trazem estes números à sua Tábua radical.

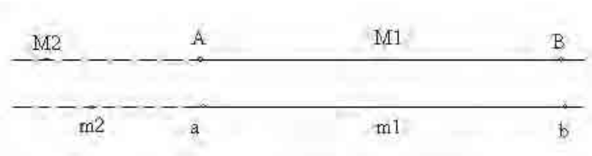
Segundo o autor, ficou estabelecido que uma progressão geométrica e uma progressão aritmética constituem um sistema de logaritmos apenas na condição de que a progressão geométrica começa por 1 e a progressão aritmética por 0; no entanto percebe-se que na Tábua radical de Napier a progressão geométrica começa por 10000000, embora a progressão aritmética comece por 0. Percebemos facilmente que a condição fundamental é verificada, supondo todos os termos da progressão geométrica reduzidos à sua 10000000^a parte. Esta consideração é aplicável do mesmo modo às Tábuas preparatórias.

Para construir a primeira Tábua preparatória com base na Tábua radical, devemos partir do número 10000000 e subtrair a sua décima milionésima parte, isto é 9999999. Deduzimos cada termo do precedente subtraindo da décima milionésima parte. Assim, para ter o terceiro termo, tiramos do precedente 9999999 da sua décima milionésima parte, ou seja $0,9999999$. Eis a disposição desta Tábua[65]:

Voici la disposition de cette Table :

Rangs successifs des termes à partir du premier.	Termes successifs de la progression géométrique.
0	10000000,0000000
	1,0000000
1	9999999,0000000
	0,9999999
2	9999998,0000000
	0,9999998
3	9999997,0000003
.	. . . .
100	9999900,0004950

O último termo desta progressão é $9999900,0004850$, mas Napier quer parar exatamente no termo 9999000. Agliberto expõe como Napier procede: Procura dois limites, um por falta, o outro por excesso. Para isto, representa pela direita AB, de comprimento definido, o valor $A = 10000000$, e pela direita indefinida ab a progressão aritmética. Imagina dois móveis M e m, que se deslocam da esquerda, para a direita com velocidades diferentes, mas passando pelos pontos A e a com a mesma velocidade.



Suponha que o móvel M ande a uma velocidade uniformemente atrasada e o móvel m com uma velocidade uniforme. Segundo o autor, é evidente que a velocidade do móvel M antes de atingir o ponto A é superior a velocidade comum que ele tem respectivamente aos pontos A e a, antes dos quais a velocidade do móvel M torna-se a cada momento menor que a velocidade comum. Resulta que, medindo os caminhos percorridos durante o mesmo tempo por estes dois móveis antes e após a sua passagem pelos pontos A e a; reconhecemos que o espaço percorrido pelo móvel m antes de ter passado pelo ponto m continua menor que o espaço correspondente percorrido pelo

[65]Nota da autora: Tabela extraída do Capítulo VI, p.190.

móvel M, e que o espaço percorrido pelo móvel m após ter passado pelo ponto a é maior que o espaço correspondente percorrido pelo móvel M.

Segundo Agliberto, no primeiro caso, temos $am_2 < AM_2$,ou, representando por x os espaços percorridos pelo móvel a e designando por y os espaços percorridos pelo móvel A, $x < y$,para o limite superior.

Quanto ao segundo caso, temos,

$$am_1 > AM_1; \tag{1}$$

mas, querendo trazer AM, ao comprimento constante AB, é necessário ter em vista uma outra desigualdade que contém este comprimento e que encontramos

$$AB > AB - AM_1, \tag{2}$$

e, dividindo (2) por (1) $\frac{am_1}{AB} > \frac{AM_1}{AB-AM_1}$. Substituindo x por am, A por AB e y por AM_1, temos $x > \frac{Ay}{A-y}$, que é o limite inferior.

Considerando um ponto M_2 à esquerda de A, é necessário fazer $y = A - M_2$, e substituir esta expressão nos dois limites;

$$x < A - M_2, \tag{3}$$

a por conseguinte

$$x > \frac{A\,(A - M_2)}{M_2}. \tag{4}$$

Para o autor, Archimedes tinha estabelecido as relações que existem entre os termos correspondentes das duas progressões do Arénaire. Napier reproduziu estas relações demonstrando a equidiferença dos logaritmos para os números que se seguem continuamente numa mesma razão. Deste teorema conclui que, se M é o maior dos dois números e M_1, o menor, podemos deduzir que um terceiro M_2 esteja para A como M_1 está para M, $\frac{M_2}{A} = \frac{M_1}{M}$, onde $M_2.M = A.M_1$, ou, acrescentando e subtraindo, ao mesmo tempo AM ao segundo número, tem-se $M_2.M = A.M - A.M + A.M$ ou, dividindo os dois membros da igualdade por M, $M_2 = A - A.\frac{M-M_1}{M}$.

Substituindo esta expressão do valor de M nas fórmulas (3) e (4) dos limites, temos as expressões finais dos limites empregados por Napier: $x < \frac{A(M-M_1)}{M}$,

$$x > \frac{\frac{A(M-M_1)}{M}}{1-\frac{M-M_1}{M}}.$$

para o último termo da progressão geométrica ou dos números $9999900,0004950$ e o seu correspondente da progressão aritmética ou logaritmos 100, Napier aplica a fórmula dos limites aos números $A = 10000000$, $M = 9999900,0004950$, $M_1 = 9999900$ e conseqüentemente

$$\frac{A\,(M-M_1)}{M} = \frac{10^7 \times 0,000495}{9999900} = \frac{10^5 \times 0,000495}{10^5 - 1} = \frac{0,000495}{1-\frac{10^5}{1}} = 0,0004950049500495,$$

$$\frac{A\frac{M-M_1}{M}}{1-\frac{M-M_1}{M}} = \frac{0,00049500495}{1-0,000000000495} = 0,000495004950245.$$

assim

$$x < 0,0004950049500495,$$
$$x > 0,000495004950245;$$

podemos tomar a parte comum $0,000495004950$. Para obter a razão da progressão por diferença, considerando que está compreendida entre 1 e $\frac{10000000}{9999999}$.

Se a razão é $1,00000010$, o centésimo termo será $100,00001$, ao qual será necessário acrescentar $0,00049500495$. Por conseguinte, teremos para logaritmo do último termo 99999000, que é $100,000505004950$. O logaritmo de 99999000 conhecido,construímos então a sua segunda Tábua preparatória[66], que é formada pelas progressões seguintes; onde o logaritmo de 99999000, encontrado é $100,000500$.

Rangs successifs des termes à partir du premier.	Termes successifs de la progression géométrique.
0	10000000,000000
	100,000000
1	9999900,000000
	99,999000
2	9999800,001000
	99,998000
3	9999700,003000
	99,997000
4	9999600,006000
.	. . . .
50	9995001,224804

[66]Nota da autora: Tabela extraída do capítulo VI, p.195.

> "Mais, dit Biot, ces résultats sont encore viciés par la petite erreur du dernier terme de sa seconde Table; et, en les en dépouillant, on trouve par sa méthode de logarithme de 9900000 égal a 100503, 3585228, tandis que le calcul direct par les séries donne 100503, 358525350; de sorte que l'erreur du résultat obtenu par sa méthode ne commence plus qu'à la sixième décimale."[67]

Segundo o autor[68], Henry Briggs, professor do *Gresham'Colege*, recebeu de Napier, a idéia de uma outra Tábua que tem por base a base do sistema de numeração, que se adapta melhor ao uso habitual. Esta idéia, segundo Agliberto, encontra-se num Apêndice da Obra póstuma de Napier. Briggs publicou a sua Tábua, *Logaritlunorum Chilias prima* em 1618, contendo os logaritmos decimais dos números de 1 para 1000 com catorze casas decimais. Seis anos mais tarde, mostrou, no seu *Arithmetica Logarithmica*[69], os logaritmos de 1 para 20000 e de 90000 para 100000. A lacuna deixada por Briggs, de 20000 para 90000 nas suas Tábuas foi preenchida por Adrien Vlacq[70], que publicou em 1828 as suas Tábuas, com dez casas decimais, os logaritmos dos números desde 1 até a 100000, os logaritmos dos senos, tangentes e secantes de minuto em minuto, para o quarto do círculo.

Em 1633, complementa o autor, Vlacq mostrou o seu *Trigonometria artificialis* que contém uma Tábua com dez casas decimais dos logaritmos seno, cosseno, tangentes e cotangentes de 10 em 10 segundos por meio dos senos naturais. O método utilizado por

[67] Tradução da autora: 'Mas, disse Biot, estes resultados ainda são viciados pelo pequeno erro do último termo da sua segunda Tábua; e, contando, encontra-se pelo seu método o logaritmo de 9900000 igual a 100503, 3585228, onde o cálculo direto pelas séries dá 100503, 358525350; de modo que o erro do resultado obtido pelo seu método comece apenas à sexta casa decimal.'

Parte extraída do Capítulo VI, p.197.

[68] Nota da autora: Segundo Agliberto, o primeiro trabalho de Napier foi impresso quando ele estava vivo, em 1614, em Edimburgo; tinha por título: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio.* O segundo, *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, foi editado pelos seus filhos em 1619, após a sua morte.

Parte extraída do Capítulo Segundo Agliberto, o primeiro trabalho de Napier foi impresso quando ele estava vivo, em 1614, em Edimburgo; tinha por título: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio.* O segundo, *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, foi editado pelos mais seus filhos em 1619, após a sua morte. Parte extraída do Capítulo VI, p.197.

[69] Nota da autora: Esta Obra apareceu em 1624 em Londres; contém um discurso em inglês sobre a natureza, as propriedades e os usos dos logaritmos. Parte extraída do Capítulo VI, p.198.

[70] Adriaan Vlacq (1600 -1667), matemático holandês; segundo Agliberto era livreiro e geômetra.

Briggs e outros geômetras foi o da bissecção, o autor mostra por meio de dois móveis em movimento a forma de se obter tal método.

Utilizando 1 e $\sqrt{s}$ e 1 e $\frac{x}{2}$; encontramos $\sqrt{\sqrt{s}} = \sqrt[2s]{s}$ e $\frac{x}{2s^2}$, que equivale a escrever as progressões seguintes:

$$\begin{array}{ll} \text{Números......} & 1 : (1+\sqrt[2^m]{s}) : (1+\sqrt[2^m]{s})^2 : (1+\sqrt[2^m]{s})^3 : ... : (1+\sqrt[2^m]{s})^{2^m} \\ \text{Logaritmos.....} & 0.\sqrt[2^m]{s}.2\sqrt[2^m]{s}.3\sqrt[2^m]{s}.......2^m\sqrt[2^m]{s} \end{array}$$

Estes logaritmos foram chamados *naturais* e depois *hyperboliques* pois podem ser expressos pela área da hipérbole eqüilátera entre os seus ramos e suas assíntotas. Representando por α uma quantidade muito pequena, a que foi representada acima por $\sqrt[2^m]{s}$, podemos formar as progressões seguintes, de acordo com o método:

$$\begin{array}{ll} \text{Números......} & 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : ... : (1+\alpha)^m = A \\ \text{Logaritmos.....} & 0.\alpha.2\alpha.3\alpha.......m\alpha = lA \end{array}$$

designando por lA o logaritmo natural de A, e se designamos $(1+\alpha)^m$ por A, temos$1+\alpha = A^m$, onde $\alpha = A^{\frac{1}{m}} - 1$; substituindo encontramos $lA = m\left(A^{\frac{1}{m}} - 1\right)$que sintetiza o método das bissecções para calcular os logaritmos naturais. Tomando para valor de m, uma potência do número 2, $m = 2^r$, que reduz o método da extração de raízes quadradas consecutivas. Para calcular a base neperiana, devemos fazer $m\alpha = 1$, onde $\alpha = \frac{1}{m}$, e substituir $(1+\alpha)^m$, o que dá

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{2.3}\left(1+\frac{3}{m}+\frac{2}{m^2}\right)+\frac{1}{2.3.4}\left(1-\frac{6}{m}+\frac{11}{m^2}-\frac{6}{m^3}\right)+...,$$

negligenciando a fração $\frac{1}{m}$ como muito pequena, $\frac{2}{m^2}, \frac{11}{m^2}, \frac{6}{m^3}, ...$; a fórmula fica

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}... = \\ e &= 2,71828182845904523536028747135266249 8... \end{aligned}$$

Podemos variar à infinito os sistemas de logaritmos, conservando ao mesmo tempo a progressão geométrica, alterando apenas a progressão aritmética. Com efeito, podemos escrever as progressões:

$$\begin{array}{ll} \text{Números.......} & 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 ... \\ \text{Logaritmos.....} & \begin{cases} 0.k\alpha.2k\alpha.3k\alpha.... \\ 0.\alpha.2\alpha.3\alpha........ \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Números....} & (1+\alpha)^m = A \ \ ...(1+\alpha)^r = e \ \ ...(1+\alpha)^s = a \\ \text{Logaritmos...} & \begin{cases} mk\alpha = \log A...rk\alpha = \log e...sk\alpha = 1 \\ m\alpha = lA...r\alpha = 1...s\alpha = la \end{cases} \end{array}$$

Fazendo $k = 1$, temos a progressão aritmética correspondente ao sistema neperiano ou natural; dando a k um valor como $sk\alpha = 1$, temos o sistema básico. Esta aproximação tem a vantagem defacilitar a compreensão de um sistema a outro. O autor salienta que se quisermos, por exemplo, passar de lA no sistema natural ao $logA$, temos o sistema de base a, deve-se observar que $lA = m\alpha$ e $\log A = mk\alpha$, ou, substituindo o valor de $m\alpha$, $\log A = klA$. Para calcular o módulo k, dividimos a igualdade $sk\alpha = 1$ por $s\alpha = la : k = \frac{1}{la}$.

Este valor do módulo k, substituído na expressão de $logA$, $\log A = \frac{1}{la}lA$. Encarando os logaritmos como dos expoentes, obtemos igualmente $e^n = a^x$, ou, aplicando os logaritmos naturais, $n = xla$; onde $x = \frac{1}{la}n$.

> "Si l'on veut le logarithme x de base a d'un nombre, connaissant le logarithme naturel n de ce nombre, il faut multiplier par le module $\frac{1}{la}$."[71]

Segundo Agliberto, procuramos uma fórmula para calcular os logaritmos na base a, como feito para a base neperiana. Da segunda progressão, deduzimos $\log A = mk\alpha$;do termo correspondente $(1+\alpha)^m = A$,da primeira, foi deduzido que $\alpha = \sqrt[m]{A} - 1$; substituindo, $\log A = mk\left(\sqrt[m]{A} - 1\right)$; e pondo $\frac{1}{la}$ em vez de k, temos

$$\log A = \frac{m\left(\sqrt[m]{A} - 1\right)}{la}. \tag{1}$$

Podemos reduzir também o cálculo à extração das raízes m de a. É evidente que se $lA = m\left(\sqrt[m]{A} - 1\right)$, temos igualmente $la = m\left(\sqrt[m]{a} - 1\right)$; mas, para repetir o mesmo raciocínio, é necessário dar à α um valor como o termo $(1+\alpha)^m$ da progressão geométrica que possa ser igual a a. É necessário por conseguinte ter

$$\begin{array}{ll} \text{Números...} & 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : ... : (1+\alpha)^m = a \\ \text{Logaritmos...} & 0.\alpha.2\alpha.3\alpha..... = m\alpha = la \end{array}$$

Do termo $(1+\alpha)^m = a$, tiramos $\alpha = \sqrt[m]{a} - 1$, que substituimos, em vez de α no termo $la = m\alpha$, $la = m\left(\sqrt[m]{a} - 1\right)$; substituindo esta expressão do valor na fórmula (1) encontramos

$$\log A = \frac{\sqrt[m]{A} - 1}{\sqrt[m]{a} - 1},$$

[71] Tradução da autora: 'Se se quer o logaritmo x de base a de um número, conhecendo o logaritmo natural n deste número, é necessário multiplicar pelo módulo $\frac{1}{la}$.' Parte extraída do Capítulo VI, p.205.

no qual m, para tornar o cálculo mais simples, deve ser igual à uma potência do número 2.

O denominador $\sqrt[m]{a}-1$ é constante para uma mesma base de logaritmos; é igual à α, dado que encontramos $la = m\left(\sqrt[m]{a}-1\right)$. Fazendo $m = 2^{60}$ e $a = 10$, temos

$$\frac{1}{m} = 0{,}00000\,00000\,00000\,00086.73617.37988.40354.72059.62240.69595.36691.40625\ldots,$$

$$\sqrt[m]{a}-1 = 0{,}00000\,00000\,00000\,00199.71742.08125.50527.08004.083175\ldots,$$

$$k = \frac{1}{la} = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{a}-1\right)} = \frac{867\,316\,173\ldots}{199\,717\,420\ldots}$$

$$= 0{,}43429\,44819\,03251\,82765\,11289\,18916\,60508\ldots.$$

Segundo Agliberto, esta é a fórmula que resume o método bissecções empregado por Briggs. Segundo o autor, foi obtida de maneira muito elegante por Lagrange em seu *Théorie des fonctions analytiques, Chap. IV.*

Exemplo 10 *Suponha que se queira encontrar o logaritmo do número* 7*;*

Procura-se uma média geométrica entre 1 e 10, $\sqrt{1 \times 10} = 3,16228$; uma média aritmética entre 0 e 1, $\frac{0+1}{2} = 0,5$.Tem-se assim as progressões:

Números...	$1 : 3,16228.10$
Logaritmos...	$0.0,5.1$

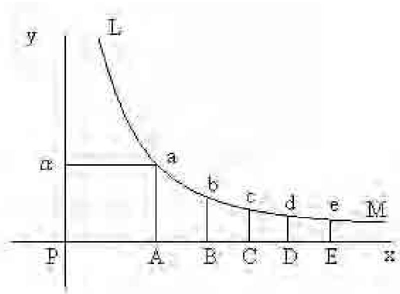
O número 7 está compreendido entre 3,16228 e 10, calcula-se uma média geométrica entre estes dois termos, $\sqrt{3,16228 \times 10} = 5,62341$ e uma média aritmética entre os termos correspondentes da progressão dos logaritmos $\frac{0,5+1}{2} = 0,75$. Temos por conseguinte duas outras progressões:

Números...	$3,16228 : 5,62341 : 10$
Logaritmos...	$0,5.0,75.1$

Como o número 7 agora está compreendido entre 5,62341 e 10, resta calcularmos uma média geométrica entre estes termos correspondentes da progressão dos logaritmos, $\sqrt{5,62341 \times 10} = 7,49894$, e uma média aritmética entre os termos correspondentes da progressão dos logaritmos, $\frac{0,75+1}{2} = 0,875$. E assim por diante.

Segundo o autor, Napier deu uma imagem mecânica desta concepção dos logaritmos; agora apresentamos uma imagem geométrica desta teoria, e, para dar mais clareza ao assunto Agliberto utiliza as idéias de Côtes a esse respeito. Côtes e, depois alguns geômetras ingleses chamaram de medidas das razões geométricas das quantidades quaisquer em progressão aritmética que correspondem respectivamente aos termos de uma seqüência de razões em progressão geométrica, de tal maneira que estas quantidades continuassem proporcionais às potências das razões que medem.

Assim, representando por a a razão $\frac{A}{B}$, ou seja a medida desta razão, a progressão aritmética: $a.2a.3a.4a...$ é a medida da progressão geométrica: $A : B : C : D : E...$ Dado que $2a = \frac{C}{A}$, $3a = \frac{D}{A}$, $4a = \frac{E}{A}, ...$ a grandeza a é o módulo. Segundo Agliberto de acordo com Walmesley, pode-se definir *o módulo* como *a quantidade constante à qual trazem-se todas as medidas das razões e que determina a grandeza.* Representa-se por LM um arco de hipérbole eqüilátera



Com assíntotas Py e Px. Toma-se sobre PX os comprimentos $PA, PB, PC, PD, PE...$,que formam entre eles, uma progressão geométrica

$$PA : PB : PC : PD : PE : ... \tag{1}$$

E efetuamos ordenadas: $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee...$ resulta desta construção e da equação da hipérbole eqüilátera mostrada pelas suas assíntotas que as áreas $Ab, Bc, Cd, De...$, são equivalentes entre elas. Com efeito, deduzimos da progressão (1) $\frac{PB-PA}{PA} = \frac{PC-PB}{PB} = \frac{PD-PC}{PC} = ...$ Ou

$$\frac{AB}{PA} = \frac{BC}{PB} = \frac{CD}{PC} = ... \tag{2}$$

Por outro lado, salienta o autor, da equação da hipérbole eqüilátera pelas assíntotas é $xy = k^2$; sabemos que k^2 designa o quadrado $PAa\alpha$, de tal forma que $k^2 = \overline{PA}^2$ e por seqüência $k = PA$. Representamos y sucessivamente por $Aa, Bb, Cc, Dd...$, e x por $PA, PB, PC, PD...$, e substituindo consecutivamente estes valores em $y = \frac{1}{x}k^2$, temos $Aa = \frac{1}{PA}k^2$, $Bb = \frac{1}{PB}k^2$, $Cc = \frac{1}{PC}k^2, ...$ Substituindo, por último, os valores de $Aa, Bb, Cc...$, nas expressões das áreas dos retângulos infinitesimais $Ab = AB \times Aa$, $Bc = BC \times Bb$, $Cd = CD \times Cc, ...$encontramos

$$\begin{aligned} Ab &= \frac{AB}{PA}k^2, \\ Bc &= \frac{BC}{PB}k^2, \\ Cd &= \frac{CD}{PC}k^2, .. \end{aligned}$$

Mas de (2) sabemos que as razões $\frac{AB}{PA} = \frac{BC}{PB} = \frac{CD}{PC} = ...$ são iguais. Resulta que as superfícies $Ab, Bc, Cd...$, são iguais entre elas. Da igualdade destas áreas, podemos formar a progressão aritmética seguinte:

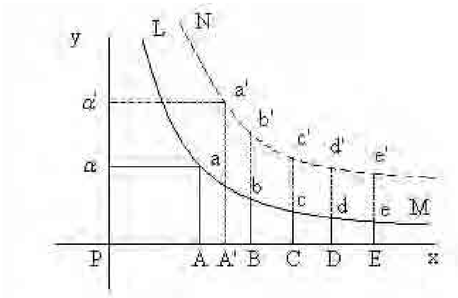
$$Ab.Ac.Ad.Ae..., \tag{2}$$

que é a medida as razões geométricas (1), ou, as áreas compreendidas entre um dos ramos da hipérbole eqüilátera e sua assíntota são as medidas das abcissas correspondentes, ou ainda estas áreas são os logaritmos das abcissas correspondentes:

Abcissas	$PA : PB : PC : PD : ...$
Áreas	$Ab.Ac.Ad.Ae...$

Ab é a medida de $\frac{PB}{PA}$; Bc a medida de $\frac{PC}{PB}$, Cd será $\frac{PD}{PC}$,..., resulta que $\frac{PB}{PA} \times \frac{PC}{PB} \times \frac{PD}{PC} = \frac{PD}{PA}$, e $Ab + Bc + Cd = Ad$; a medida de $\frac{PD}{PA} = Ad$ à sua volta, é igual a $Ab + Bc + Cd$.

A medida do produto das razões é igual à soma das medidas destas razões, ou, o logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores. Para Agliberto, o quadrado $PAa\alpha$, que os antigos geômetras chamavam de potência da hipérbole, representada por k^2 na equação $xy = k^2$, pode ter valores diferentes de acordo com as hipérboles. Assim, na hipérbole representada por LM, é $PAa\alpha$; na hipérbole NS, é $PA'a'\alpha'$, e assim de seqüência.



Afirma Agliberto que o sistema de logaritmos de Napier corresponde à hipérbole cuja potência é igual à 1, ($k^2 = 1$). A linha PA da primeira é o módulo destas razões, porque as progressões (1) e (2) dão $\frac{PB}{PA} = Ab$, $\frac{PC}{PA} = Ac$, $\frac{PD}{PA} = Ad, ...$ para o segundo (NS), teriamos outros pares $\frac{PB}{PA'} = A'b'$, $\frac{PC}{PA'} = A'c'$, $\frac{PD}{PA'} = A'd', ..$

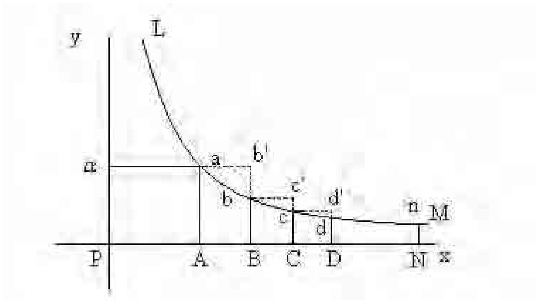
Dado que $Ab, Ac, Ad...$, guardam entre si a mesma razão que $\frac{PA}{PA'}$, podemos calcular as razões das mesmas abscissas consideradas em várias hipérboles, ou, melhor ainda, podemos calcular os logaritmos dos mesmos números em vários sistemas; pode-se passar facilmente de um sistema ao outro, apenas multiplicando os logaritmos pela razão das suas potências. Com efeito, dividimos as duas razões $A'b' = \frac{PB}{PA}$ e $Ab = \frac{PB}{PA}$, temos $\frac{A'b'}{Ab} = \frac{PB}{PA'}\frac{PA}{PB}$ Ou $\frac{A'b'}{Ab} = \frac{PA}{PA'}$; onde

$$A'b' = \frac{PA}{PA'}Ab. \tag{3}$$

Tendo a medida Ab da primeira hipérbole, para ter a medida correspondente $A'b'$ da segunda, é necessário multiplicar Ab pela constante $\frac{PA}{PA'}$. Esta constante é designada pela letra k. Para calcular a razão $\frac{PA}{PA'}$, devemos observar na igualdade (3) que esta razão é a mesma que $\frac{A'b'}{Ab}$, ou seja $\frac{PA}{PA'} = \frac{A'b'}{Ab}$.

Suponha que se queira passar do sistema natural ou neperiano ao decimal. Temos a hipérbole LM que representa o sistema neperiano, no qual $PA = 1$, e a hipérbole NS que representa o sistema decimal, fazendo $PA' = 10$ $Ab = l_{10}$ $A'b' = \log_{10} = 1$. Temos por conseguinte $\frac{PA}{PA'} = \frac{A'b'}{Ab} = \frac{1}{l_{10}} = \frac{1}{2{,}30258...} = 0,434294481903...$

Agliberto cita o problema que tem por objetivo calcular a base neperiana que consiste em verificar a razão que teria para medida 1, ou ainda procurar a abscissa que corresponde à área equivalente à potência da hipérbole. Assim, procuramos, na hipérbole LM, entre duas ordenadas, a área equivalente à $PA a\alpha$.



Segundo Agliberto, observamos que os retângulos $Ab', Bc, Cd...$, são todos iguais entre si, e se tomamos o primeiro, podemos calcular assim a sua área comum $Ab' = (PB - PA)\, Aa$, observamos que o sistema neperiano exige que $PA = 1$ e $Aa = 1$, $Ab' = (PB - 1)\, 1 = PB - 1$. Podemos por conseguinte escrever as duas progressões

Abcissas	$1 : PB : \overline{PB}^2 : \overline{PB}^3 : ... : \overline{PB}^m = x$
Áreas	$0. (PB - 1) .2 (PB - 1) .3 (PB - 1) ...m (PB - 1) = 1$

Do primeiro termo da progressão das abcissas $PB^m = x$, tira-se $PB = \sqrt[m]{x}$, que, substituído no último termo da progressão das áreas $(PB - 1) = 1$, resulta $x = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$. Segundo o autor, os métodos modernos de cálculo dos logaritmos têm por base o emprego da série $l\,(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + ...$, onde l designa um logaritmo neperiano, ou, substituindo $y = z - 1$; $lz = (z - 1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + ...,$ que é rapidamente convergente apenas na condição de z ser fracionário e pouco diferente da unidade.

Segundo o autor, foram propostas várias transformações que têm por objetivo tornar estas séries cada vez mais convergentes. Uma destas transformações consiste em fazer $y = \frac{1}{x}$ na série, $l\,(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + ...,$ que resulta em $l\left(1 + \frac{1}{x}\right) = l\frac{x+1}{x} = l\,(x + 1) - lx = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + ...$ ou ainda

$$l\,(x + 1) = lx + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + ...$$

Obtemos outra transformação, tomando a diferença das duas séries $l\,(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}...$, e $l\,(1 - y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}...$ o que dá

$$l\,(1 + y) - l\,(1 - y) = 2\left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + ...\right)$$

Substituindo $y = \frac{1}{1+2x}$, simplificando e fazendo $x = 1$, temos

$$l_2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 3^3} + \frac{1}{5\times 3^5} + ...\right) = 0,693...$$

Obtemos igualmente os logaritmos de $3, 5, 7, 11...$, fazendo $x = 2, 4, 6, 10, ...$

Conhecidos os logaritmos dos primeiros números, obtemos por simples adições os logaritmos dos números múltiplos. Se se quer, por exemplo, o logaritmo de 6, devemos fazer $l_6 = l_2 + l_3$. Uma terceira transformação, que torna a série ainda mais convergente, consiste em substituir sucessivamente $z - 1 = \frac{2}{x^3-3x}$ e $z - 1 = -\frac{2}{x^3-3x}$ na série $lz = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + ...$,obtemos $l\frac{x^3-3x+2}{x^3-3x} = \frac{2}{x^3-3x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^4 + ...$, e seguidamente $l\frac{x^3-3x+2}{x^3-3x} = -\frac{2}{x^3-3x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^4 - ...$,

Subtraindo da primeira série, temos

$$\begin{aligned} l\frac{x^3-3x+2}{x^3-3x} - l\frac{x^3-3x+2}{x^3-3x} &= l\frac{x^3-3x+2}{x^3-3x-2} \\ &= 2\left[\frac{2}{x^3-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5 - ...\right] \end{aligned}$$

Observamos que $\frac{x^3-3x+2}{x^3-3x-2} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)^2(x-2)}$, e concluimos que $l\frac{x^3-3x+2}{x^3-3x-2} = 2l(x-1) + l(x+2) - 2l(x+1) - l(x-2)$; substituindo esta expressão na série precedente,

$$\begin{aligned} l(x+2) &= l(x-2) + 2l(x+1) - 2l(x-1) + \\ & 2\left[\frac{2}{x^3-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5 + ...\right]. \end{aligned}$$

De acordo com Agliberto, para ter os logaritmos de $2, 3$ e 5, faz-se x sucessivamente igual a 3, 4 e 7; obtém-se três equações simultâneas em formação de l_2, l_3 e l_5; será necessário por conseguinte eliminar estas três incógnitas. Fazendo primeiro $x = 3$ representado pela série

$$\left[\frac{2}{x^3-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 + ...\right] \tag{1}$$

por A, temos $l_5 = l_1 + 2l_4 - 2l_2 + 2A$. Ou $l_5 = 2l_2 + 2A$.

Substituindo x por 4 e representando pela série correspondente por B, temos igualmente

$$3l_3 = 2l_5 + 2B \tag{2}$$

Fazendo $x = 7$ e representando a série correspondente por C, temos

$$4l_3 = l_5 + 4l_2 + 2C \tag{3}$$

Substituindo agora nas equações (2) e (3) a expressão do valor de l_5 dado por (1), temos

$$l_3 = \frac{4}{3}l_2 + \frac{4}{3}A + \frac{2}{3}B, \tag{3.1}$$

$$4l_3 = 6l_2 + 2A + 2C; \tag{5}$$

substituindo l_3 tirados da equação (4) na equação (5), temos

$$l_2 = 5A + 4B - 3C \tag{6}$$

Esta expressão do valor de l_2, substituído nas equações (4) e (1), dá

$$l_3 = 8A + 6B - 4C, \tag{7}$$

$$l_5 = 12A + 8B - 6C. \tag{8}$$

Substituindo, nas equações $(6), (7)$ e $(8), A, B, C$, pelos valores da série $\frac{2}{x^3-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^7 + ...$, para $x = 3, 4$ e 7, encontramos

$$\begin{aligned}
l_2 &= 5\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\times 9^3} + \frac{1}{5\times 9^5} + ...\right) + 4\left(\frac{1}{26} + \frac{1}{3\times 26^3} + \frac{1}{5\times 26^5} + ...\right) \\
&\quad -3\left(\frac{1}{161} + \frac{1}{3\times 161^3} + \frac{1}{5\times 161^5} + ...\right), \\
l_3 &= 8\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\times 9^3} + \frac{1}{5\times 9^5} + ...\right) + 6\left(\frac{1}{26} + \frac{1}{3\times 26^3} + \frac{1}{5\times 26^5} + ...\right) \\
&\quad -4\left(\frac{1}{161} + \frac{1}{3\times 161^3} + \frac{1}{5\times 161^5} + ...\right), \\
l_5 &= 12\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\times 9^3} + \frac{1}{5\times 9^5} + ...\right) + 8\left(\frac{1}{26} + \frac{1}{3\times 26^3} + \frac{1}{5\times 26^5} + ...\right) \\
&\quad -6\left(\frac{1}{161} + \frac{1}{3\times 161^3} + \frac{1}{5\times 161^5} + ...\right).
\end{aligned}$$

segundo o autor, conhecidos estes logaritmos, calculamos facilmente os outros, dado que não se tem mais eliminações a fazer.

Afirma Agliberto que o geômetra Haros, concebeu uma transformação que torna a série de logaritmo ainda mais convergente. Para compreendê-lo, deve-se retomar as séries $l\left(1+y\right)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}...$, e $l\left(1-y\right)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}...$, e subtrair a segunda da primeira: $l\left(1+y\right)-l\left(1-y\right)=l\frac{1+y}{1-y}=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+...\right)$

Fazendo $\frac{1+y}{1-y}=x$ onde $y=\frac{x-1}{x+1}$, temos $lx=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+...\right]$. Supondo $x=\frac{p}{q}$, onde $x-1=\frac{p-q}{q}$, $x+1=\frac{p+q}{q}$, $\frac{x-1}{x+1}=\frac{p-q}{p+q}$; temos

$$l\frac{p}{q}=2\left[\frac{p-q}{p+q}+\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5+...\right]$$

Suponha agora

$$\begin{aligned} p &= x^4-25x^2=x^2\left(x^2-25\right)=x^2\left(x+5\right)\left(x+5\right), \\ q &= x^4-25x^2+144=\left(x^2-9\right)\left(x^2-16\right)=\left(x+3\right)\left(x-3\right)\left(x+4\right)\left(x-4\right), \end{aligned}$$

E substituindo na série precedente

$$\begin{aligned} & 2lx+l\left(x+5\right)+l\left(x-5\right)-l\left(x+3\right)-l\left(x-3\right)-l\left(x+4\right)-l\left(x-4\right) \\ = & -2\left[\frac{7^2}{x^4-25x^2+144}+\frac{1}{3}\left(\frac{7^2}{x^4-25x^2+144}\right)^3+...\right] \end{aligned}$$

Ou ainda

$$\begin{aligned} l\left(x+5\right) &= l\left(x+3\right)+l\left(x-3\right)+l\left(x+4\right)+l\left(x-4\right)-l\left(x-5\right)-2lx \\ & -2\left[\frac{7^2}{x^4-25x^2+144}+\frac{1}{3}\left(\frac{7^2}{x^4-25x^2+144}\right)^3+...\right] \end{aligned}$$

Segundo o autor, a principal dificuldade da transformação de Haros consiste em encontrar duas formações em x que equivalem respectivamente à p e q. Esta investigação supõe a solução do seguinte problema[72]:

Problema 3 *Encontrar duas equações numéricas que, não diferem unicamente no seu último termo, atendendo suas raízes comensuráveis e inteiras a uma e a outra.*

[72]Nota da autora: Proposto por Lavernède, cujas investigações foram citadas na *Notice des travaux de l'Académie duGard. Lacroix*, no seu excelente *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, t. I, p.51*, indicando três resultados que lhe foram comunicados por Gergonne. Parte extraída do Capítulo VI, p.225.

Agliberto descreve alguns métodos utilizados para o cálculo de logaritmos.

Método de Koralek

Koralek propôs o seguinte problema, que segundo Agliberto, resolveu com tanta sagacidade quanto simplicidade:

Problema 4 *Calcular com a aproximação de sete casas decimais o logaritmo de um número inteiro compreendido entre 1 e 10000000 pelo único conhecimento dos logaritmos dos cinco números 2,3,7,11,13 e o emprego da fórmula* $\log(a+x) = \log a + 2k\frac{x}{2a+x}$*, onde* k *é o módulo dos logaritmos.*

Esta fórmula é composta dos dois primeiros termos do desenvolvimento em série $\log(a+x)$, que obtem-se subtraindo as séries $\log(1+y) = k\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + ...\right)$ e $\log(1-y) = k\left(-y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - ...\right)$. Observando que $\log(1+y) - \log(1-y) = \log\frac{1+y}{1-y}$ e $\log\frac{1+y}{1-y} = 2k\left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + ...\right)$; e fazendo seguidamente $\frac{1+y}{1-y} = 1+z$, e por conseguinte $y = \frac{z}{2+z}$, e substituindo, temos

$$\log(1+z) = 2k\left[\frac{z}{2+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{z}{2+z}\right)^7 + ...\right]$$

Substituindo, ainda $\frac{x}{a}$ em z, obtemos $\log(1+z) = \log\left(1+\frac{x}{a}\right) = \log\frac{a+x}{a} = \log(a+x) - \log a$, e conseqüentemente

$$\log(a+x) = \log a + 2k\left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^7 + ...\right]$$

Observe que se a é igual à 945 e x igual à 10, temos $\frac{x}{2a+x} = \frac{10}{1900}\frac{1}{190}$ e $\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 = \left(\frac{1}{190}\right)^3 = 0,00000015$, conseqüentemente

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 = 0,00000005.$$

Segundo Agliberto, resulta que este termo influencia sobre a soma dos outros apenas a partir da oitava casa decimal, e, observa-se que $2k$ é um número menor que a unidade, reconhecemos que este terceiro termo, multiplicado por $2k$, não influencia a soma dos outros após a oitava casa decimal. Por seqüência, é fácil compreender que se x é 95 vezes menor que a, ou mesmo menor ainda, é suficiente calcular os dois primeiros termos da série acima, para ter o logaritmo com sete números isentos de erros, ou seja:

$$\log(a+x) = \log a + 2k\frac{x}{2a+x},$$

Todo o artifício de Koralek, segundo o autor, consiste em encarar o número dado como a soma de dois outros, como se um fosse decomposto nos fatores $2, 3, 5, 7, 11, 13$. Este número, do qual o logaritmo é conhecido pelos logaritmos dos seus fatores, corresponde ao elemento a da fórmula acima; o outro número é representado por x.

Segundo Agliberto, às vezes não é possível decompor o número em duas partes, o que está sujeito à condições também restritas. Neste caso, multiplicamos o número dado pelos fatores $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,\ \ 9, 1^{\frac{1}{4}}, 1^{\frac{1}{2}}, 1^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}$ e satisfazemos assim à condição exigida.

É necessário observar então que todos os fatores são redutíveis à $2, 3, 7, 11, 13$,dado que $4 = 2^2$, $\ 5 = \frac{10}{2}$, $\ 6 = 2 \times 3$, $\ 8 = 2^3$, $\ 9 = 3^2$, $\ 1^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}, ...$

Para tornar mais a clara aplicação deste método, Agliberto divide em dois casos:

Primeiro caso: O número cujo logaritmo se quer é menor que 1000 e maior que 800, ou é maior que 1000, mas o número formado pelos seus três primeiros números está compreendido entre 800 e 1000.

É necessário observar que há entre este limite vinte e cinco números que contêm um ou outro fator primeiro que $2, 3, 5, 7, 11, 13$, e que os logaritmos dos outros números compreendidos entre estes limites podem ser calculados pela fórmula acima, porque satisfaz a condição de $x < \frac{a}{95}$. Dado que a maior diferença entre dois números consecutivos deste quadro é $960 - 945 = 15$, cuja metade é $7,5$: $\frac{7,5}{945} = \frac{2,5}{3,5} = \frac{0,5}{63} = \frac{1}{26} < \frac{1}{95}$, e conseqüente $x < \frac{a}{95}$.

Suponha o número 847; escrevemos $847 = 845 + 2$, dado que $845 = 5 \times 13^2$. Portanto $\log 845 = \log 5 + 2\log 13$.

Ou seja o número 9546253. O número formado pelos seus três primeiros números 954 está compreendido entre 945 e 960 faz-se $9546253 = 954,6253 \times 10000$ e

$$954,6253 = 945 + 9,6253.$$

Segundo caso: O número considerado é menor que 800, ou, se é maior, o número formado pelos seus três primeiros números é menor que 800.

Se o número 642, está compreendido entre 600 e 666, é necessário, multiplicá-lo por $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, que produz 963. Temos portanto

$$\log 963 = \log 642 \times \frac{3}{2} = \log 642 + \log 3 - \log 2,$$

onde $\log 642 = \log 963 + \log 2 - \log 3$.

Segundo o autor, Koralek aplica seguidamente o seu método no sentido oposto com muito domínio. Propõe calcular o número, dado o seu logaritmo. Agliberto salienta que não irá mostrar em seu livro a 'curiosa inversão', *porque a intenção não é ensinar a calcular logaritmos sem Tábuas, e sim quer-se aprender a confeccionar estas Tábuas e calcular empregando-as.*[73] Podemos aplicar este método à alguns exemplos. Sabemos que $847 = 845 + 2$ e $\log 845 = \log 5 + 2\log 13$.

Fazendo $a = 845, \quad x = 2$, e calculando a fórmula $\log(a+x) = \log a + 2k\frac{x}{2a+x}$

$$\begin{array}{ll} \log 5 = 0,6989700 & 2k\frac{x}{2a+x} = 0,00102671 \\ 2\log 13 = 2,22788670 & \log a = 2,92685670 \\ \log 845 = 2,92685670 & \log(a+x) = 2,92788341 \end{array}$$

assim:

$$\log 845 = 2,9278834.$$

Veja agora como Koralek calcula os logaritmos de $2, 3, 7, 11, 13$, ou seja os elementos fundamentais do seu método.

Logaritmo de 2 : $\log 1024 = \log 2^{10} = 10\log 2 = \log 1000 + \dfrac{2k24}{2024}$.

Logaritmo de 3 : $\log 3^4 = 4\log 3 = \log 81 = \log 80 + \dfrac{2k}{161}$.

Logaritmo de 7 : $\log 7^4 = 4\log 7 = \log 2401 = \log 2400 + \dfrac{2k}{4801}$.

[73]Nota da autora: Segundo Agliberto, o leitor desejoso de meditar a obra do geômetra austríaco poder ver a interessante Memória intitulada: *Nouvelle méthode pour calculer rapidement les logaritmes des nombres,* pelo Sr. Philippe Koralek; 59 páginas. Paris 1851, Título de bacharelado. Parte extraída do Capítulo VI, p.233.

$$\begin{aligned}
\textbf{Logaritmo de 11} \quad &: \quad \log 100 = 2 = \log 99 + \frac{2k}{199} = \log 11 + 2\log 3 + \frac{2k}{199} \quad \text{ou} \\
\log 11 \quad &= \quad 2 - 2\log 3 - \frac{2k}{199} = 2 - 0,95424250 - \frac{2k}{199}. \\
\textbf{Logaritmo de 13} \quad &: \quad \log 1001 = \log 7 \times 11 \times 13 = \log 7 + \log 11 + \log 13 \\
&= \quad \log 1000 + \frac{2k}{20001} = 3 + \frac{2k}{20001}.
\end{aligned}$$

Logaritmos de Leonelli, ditos de Gauss.

Segundo Agliberto, não devemos deixar de salientar a engenhosa idéia que teve Leonelli de construir uma Tábua que facilmente dá o logaritmo de uma soma ou uma diferença, se os logaritmos dos números a acrescentar ou subtrair forem conhecidos. Quando se quer apresentar uma fórmula ao cálculo logarítmico, transformamos freqüentemente as somas e as diferenças em multiplicações e divisões. Para evitar estas transformações, o geômetra italiano Leonelli[74] concebeu uma Tábua que permite encontrar o logaritmo de uma soma ou, de uma diferença por leituras da Tábua, se conhece o logaritmo de cada um dos elementos.

De acordo com o autor, tendo conhecimento desta Obra, Gauss realiza a intenção de Leonelli elaborando sua Tábua, que foi publicada na *Correspondance de Zach* em 1812. A concepção de Leonelli é fundada sobre a seguinte observação $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a\left(1 + \frac{1}{\frac{a}{b}}\right)$, onde $\log(a+b) = \log a + \log\left(1 + \frac{1}{\frac{a}{b}}\right)$.Supõe uma Tábua à três colunas A, B, C, como

$$\begin{aligned}
A \quad &= \quad \log\frac{a}{b}, \quad B = \log\left(1 + \frac{1}{\frac{a}{b}}\right) = \log\frac{a+b}{a}, \\
C \quad &= \quad \log\left(1 + \frac{a}{b}\right) = \log\frac{a+b}{b}
\end{aligned}$$

	A.	B.	Diff.	C.	Diff.
I)	0,315	0,17148		0.48648	
			32		68
	0,316	0,17116		0,48716	
			33		67
	0,317	0,17083		0,48783	
			32		68
	0,318	0,17051		0,48851	
			33		67
	0,319	0,17018		0,48918	
			..		..
	.....	....		....	

[74]Nota da autora: 'A Obra de Leonelli, surgiu no século XI sob o título: *Supplément logarithmique*, foi inserida nos *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t.X, p.289, et t.XII, p.171.)'. Parte extraída do Capítulo VI, p. 236.

E construída de maneira que $A + B = C$, porque $\log \frac{a}{b} + \log \frac{a+b}{a} = \log \frac{a+b}{a}$, dado que $\frac{a}{b} \frac{a+b}{a} = \frac{a+b}{b}$ das razões $B = \log \frac{a+b}{a}$ e $C = \log \frac{a+b}{b}$, concluimos que

$$\log (a+b) = \log a + B \quad \text{e} \quad \log (a+b) = \log b + C$$

Assim, a investigação do $log(a+b)$ pode ser feita quer alterando o logaritmo de a, quer alterando o logaritmo de b. No primeiro caso, Agliberto salienta que é necessário acrescentar ao logaritmo de a o termo da coluna B da Tábua que corresponde ao termo $\log \frac{a}{b}$ da coluna A; no segundo caso, é necessário acrescentar ao logaritmo de b o termo da coluna C que corresponde ainda ao termo $\log \frac{a}{b}$ da coluna A. Seja, por exemplo, $log(a+b)$, a e b dados por seus logaritmos: $\log a = 2,44283; \log b = 2,12583; \log \frac{a}{b} = \log a - \log b = 0,317$.

Primeiro método:

$$\log (a+b) = \log a + B.$$

O termo da coluna B da Tábua acima que corresponde à $\log \frac{a}{b} = 0,317$, que encontramos na coluna A, é $0,17083$. Temos, por conseguinte apenas a acrescentar: $\log a = 2,44283 +\ 0,17083 = \log (a+b) = 2,61366$.

Segundo método:

$$\log (a+b) = \log b + C$$

O termo da coluna C, correspondente a $\log \frac{a}{b} = 0,317$, é $0,48783$; tem-se $\log b = 2,12583 + 0,48783 = \log (a+b) = 2,61366$.

Leonelli concebeu o emprego das mesmas Tábuas para o caso da diferença de dois números. Para efetivamente apreender o seu pensamento, reproduzimos em relação à subtração o raciocínio que acabamos de fazer para a adição: $a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right) = a\left(1 - \frac{1}{\frac{a}{b}}\right)$,

$$\begin{aligned} A &= \log \frac{a}{b}, \qquad -B = \log\left(1 - \frac{1}{\frac{a}{b}}\right) = \log \frac{a-b}{a}, \\ C &= \log\left(\frac{a}{b} - 1\right) = \log \frac{a-b}{b}. \end{aligned} \tag{I}$$

Observamos que o numerador da fração $\frac{a-b}{b}$ é menor que o denominador $\frac{a-b}{a}$, reconhecemos facilmente que $\log \frac{a-b}{a}$, ou a diferença $\log(a-b) - \log a$, é negativa. Assim, todos os termos da coluna B são negativos. Quanto ao $\log\frac{a-b}{b}$, pode ser positivo ou negativo. Nas Tábuas de Gauss, $\log\frac{a-b}{b}$ é negativo quando $\log\frac{a}{b} < 0,30103$.

O autor examina o caso onde $\log\frac{a}{b} < 0,30103$; e onde, conseqüentemente, $\log\frac{a+b}{b}$ é negativo.

Se $\log\frac{a}{b} < 0,30103$, o seu valor não pode estar compreendido na coluna A; por conseguinte procuramos na coluna B, ou seja altera-se B por A e reciprocamente $-A = \log\frac{a-b}{a}$, $\quad B = \log\frac{a}{b}$, $\quad -C = \log\frac{a-b}{b}$. Temos, por conseqüente $\log(a-b) = \log a - A$ e $\log(a-b) = \log b - C$.

Se $\log\frac{a}{b} > 0,30103$, também não se encontra na coluna A do quadro (1), mas na coluna C. Devemos alterar B por C e reciprocamente. Fazendo $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{a'}{b'}}$; e substituindo na fórmula $1 - \frac{1}{\frac{a}{b}}$, encontra-se $1 - \frac{a'}{b'} = \frac{b'-a'}{b'}$. Encarando $a' > b'$, como feito em $a > b$, e por conseqüente $b' - a'$ negativo, reconhecemos que é necessário alterar de sinal o resultado, para não ter um logaritmo de número negativo; tem-se por conseguinte $\frac{a'-b'}{b'}$. Raciocinando do mesmo modo em relação a $\frac{a}{b} - 1$, temos, em vez de $\frac{b'-a'}{a'}$, $\frac{a'-b'}{a'}$. A expressão $1 - \frac{1}{\frac{a}{b}}$ dos valores de B torna-se por conseguinte $\frac{a'-b'}{b'} = \frac{a'}{b'} - 1$, que é a expressão dos valores de C; e reciprocamente $\frac{a}{b} - 1 = C$ se transforma em $\frac{a'-b'}{a'} = 1 - \frac{1}{\frac{a'}{b'}}$, que é a expressão dos valores de B. Temos, por conseguinte o quadro $A = \log\frac{a-b}{b}$, $-B = \log\frac{a-b}{a}$, $\quad C = \log\frac{a}{b}$, de onde tiramos

$$\log(a-b) = \log b + A \quad \text{e} \quad \log(a-b) = \log a - B$$

Segundo o autor, as Tábuas concebidas desta maneira são de construção fácil, como observa-o Sr. Houël, mas apresentam graves inconvenientes que podem não ter escapado à Leonelli. Para Agliberto, Gauss quis fazer face à estes inconvenientes, mas não completamente, porque o emprego da sua Tábua exigia uma dupla interpolação. Uma boa modificação foi executada pelo Sr. Zech na construção das Tábuas à sete casas decimais anexadas à nova edição das Tábuas de Vega, e pelo Sr. Houël nas suas *Tables de Logarithmes à cinq décimales.*

Para Agliberto, é na troca de cartas entre Leibniz e Jean Bernoulli que foi levantada a memorável controvérsia relativa aos logaritmos das quantidades negativas e singulares, controvérsia que foi retomada seguidamente por Euler e d'Alembert. Em sua centésima oitava carta, Leibniz dizia à Bernoulli que a razão de $+1$ à -1, ou -1 à $+1$ é singular, dado que o logaritmo, ou a medida desta razão, são singulares. Bernoulli respondeu que a sua maneira de ver, era outra, porque pensava que os logaritmos dos números negativos eram não somente positivos, mas ainda iguais aos logaritmos positivos dos mesmos números. Afirmava, por conseguinte que $l\,(+x) = l\,(-x)$ porque

$$dlx = \frac{dx}{x} \quad \text{e} \quad dl\,(-x) = \frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}$$

Segundo Agliberto, Leibniz replica, observando que a regra que consiste em diferenciar os logaritmos dividindo a diferencial do número pelo mesmo número não é aplicável apenas aos números positivos. Salienta o autor que a extrema generalidade das concepções meramente abstratas, sobretudo na Matemática, exigia por parte de Leibniz uma apreciação mais precisa da pergunta. Para o autor, é o que fez Euler observando que da igualdade das diferenciais de $l(+x)$ e $l(-x)$ não se saberia de modo algum inferir a igualdade destas quantidades, porque como os diferenciais $x+1$ e $x-1$ são iguais à dx, não se pode contudo concluir à igualdade destas duas quantidades tão diferentes. Este mesmo raciocínio, que segundo Agliberto, acrescentou Euler, conduziria a $\ln x = lx$, o que é um absurdo, dado que

$$d \ln x = \frac{ndx}{nx} = \frac{dx}{x} = dlx.$$

O autor salienta queao se apoiar mesmo tempo sobre os mesmos argumentos, Bernoulli pretendia provar que a curva logarítmica tem duas partes iguais e simetricamente dispostas dos dois lados de suas assíntotas, de modo que, à cada abscissa ou logaritmo correspondam duas ordenadas ou dois números iguais, um positivo, o outro negativo. Para provar esta proposição, ele diz que tomando a equação desta curva $ydx = ady$ onde x indica a abscissa tomada sobre a assíntota, y a ordenada e a a subtangente constante, esta equação é satisfeita quer para $y = u$, quer para $y = -u$, dado que no primeiro caso temos

$$udx = adu, \text{ e, no segundo, } -udx = -adu,$$

Para o autor, este raciocínio, como de fato observa Euler, é semelhante ao precedente e provém deste mesmo defeito de supor iguais duas quantidades porque os seus diferenciais são iguais. Com efeito, fazendo sucessivamente $y = nu$ e $y = -nu$, temos do mesmo modo

$$nudx = andu \quad \text{e} \quad -nudx = -audu.$$

Uma equação diferencial é sempre indeterminada devido as constantes que desaparecem com a diferenciação. Assim a equação diferencial $my^{m-1}dy = adx$ provém não apenas da equação $y^m = ax$, mas de todas as equações que podemos deduzir $y^m = ax \pm c$ quando faz-se variar c de maneira qualquer.

Segundo o autor, querendo demonstrar que a curva logarítmica tem dois ramos iguais, Bernoulli e outros geômetras tentaram provar por analogia, ou seja pela construção, que a assíntota do logaritmo é também o seu eixo. Por analogia, tomaram, em vez de $dx = \frac{dy}{y}$, a equação mais geral $dx = \frac{dy}{y^n}$ cuja a integral é $x = \frac{1}{(1-n)y^{n-1}} + c$, e observaram que n sendo um número ímpar, a curva tem um eixo e, por seqüência, dois ramos iguais. Isto feito, supuseram $n = 1$, número ímpar, e inferiram que o logaritmo tem um eixo.

Para Agliberto, a este respeito, observou Euler:

> "Quand il s'agit, dans l'analogie, des cas d'intégrabilité, ou dans la Géométrie, de certaines propriétés des courbes, on trouve rarement des propositions assez générales, et il faut presque toujours excepter un ou plusiers cas auxquels on ne peut pas faire l'application." [75]

De acordo com o autor, para tornar mais vidente a sua afirmação, Euler apresenta os seguintes exemplos:

Exemplo 11 *A fórmula $x^n dx$ é geralmente integrável, qualquer que seja o valor que dá-se à n, desde que exclua-se o caso $n = -1$.*

Exemplo 12 *A equação $dx = \frac{dy}{y^n}$ representa sempre uma equação algébrica, exceto quando faz-se $n = 1$.*

[75] Tradução da autora: 'Quando trata-se, na analogia, dos casos de integrabilidade, ou da Geometria escolhe-se, certas propriedades das curvas, encontra-se raramente proposições bastante gerais, e é necessário quase sempre excluir um caso aos quais não se pode fazer a aplicação.' Parte extraída do Capítulo VI, p. 245.

> "La propriété des axes des courbes algébriques elle-même, dit Euler, est soumise à des exceptions qu'on doit reconnaître dans les intégrations."[76]

Segundo Agliberto, seja por exemplo a equação geral $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3 (b - x)}$ que não deixa a mínima dúvida sobre a existência do seu eixo, porque fazendo desaparecer os radicais, tem-se uma equação do oitavo grau cujos os expoentes das potências de y, são iguais.

> "Quelque légitime que soit cette conclusion, il faut cepedant en excepter le cas où $b = 0$, car si l'on rend rationnelle l'équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3 x}$ on obtient cette équation $y^4 - 2xy^2 - 4a^2xy + a^2x^2 - a^3x = 0$,qui, en vertu du terme $4a2xy$, est dépourvue d'axe." [77]

Para o autor, por construção, Bernoulli figurava uma hipérbole trazida de suas assíntotas retangulares YY' e XX' cujos ramos, que constituem a curva, são RS e $R'S'$. Observa Bernoulli seguidamente que, tomando dois pontos A e B sobre assíntota XX' e faz-se $A\alpha$ constantemente proporcional temos a área $AabB$, o ponto α é um dos pontos do logaritmo LM, dado que AB cresce uniformemente, $A\alpha$ cresce como o logaritmo de AB. Temos, todos os pontos do ramo LM do logaritmo.

Se fazemos crescer BA até a BA', em que supomos $PA' = PA$, ordenada $A'\alpha$ deve ser igual ao espaço $AabB$ e por seqüência $Aa = A'a'$. Resulta outra curva $L'M'$ igual à LM, tendo a mesma assíntota YY'. Assim, o logaritmo tem dois ramos, um à direita e o outro à esquerda do eixo y.

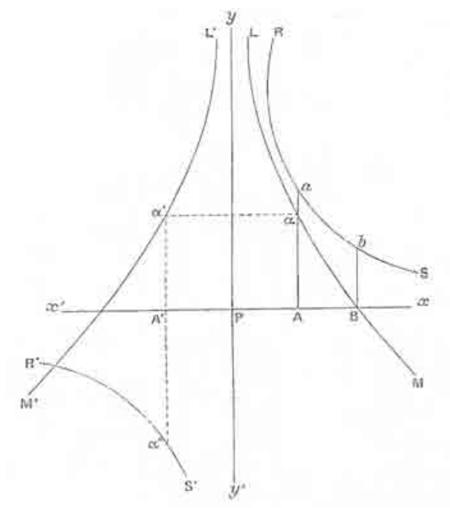
Segundo Agliberto, Bernoulli acrescentou necessário que não há exemplo em Geometria das curvas formadas de um único ramo, como Leibniz supõe para o logaritmo, e que se admitimos um dos ramos, deve-se admitir a curva inteira. À estas afirmações, Euler respondia que havia razões bem fortes para crer que estes dois ramos constituem uma só curva contínua.

---

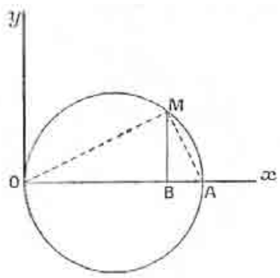
[76]Tradução da autora: 'A propriedade dos eixos das curvas algébricas próprias, disse Euler, está sujeito à exceções que deve-se reconhecer nas integrações.' Parte extraída do Capítulo VI, p.245.

[77]Tradução da autora: "Por legítima que seja esta conclusão, é necessário contudo excluir o caso onde $b = 0$, que reduz a equação racional $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$ à equação $y^4 - 2xy^2 - 4a^2xy + a^2x^2 - a^3x = 0$,que, em virtude do termo $4a2xy$; é desprovido de eixo."

Parte extraída do Capítulo VI, p.246.



De acordo com o autor, e como também observa Euler, se supõe duas parábolas $v^2 = ax$ e $u^4 = a^3x$, descritas sobre o mesmo eixo, e se constrói uma nova curva cuja ordenada y, correspondendo à abscissa comum x, ou seja igual à soma das ordenadas $v+u$ das duas parábolas propostas, e observando que estas ordenadas podem ser tomadas tanto positivamente como negativamente, reconhecemos que devemos encontrar, para cada abscissa x, quatro ordenadas $v+u$, $-v-u$, $v-u$, $-v+u$. Esta curva tem, como conseqüência, um eixo; contudo a sua equação $y = v + u = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$, como já tínhamos constatado, revela-nos que a curva não tem eixo.



Segundo Agliberto, Euler observa ainda que, assim como há construções que dão duas curvas diferentes, de mesmo modo há em contrapartida construções defeituosas que dão apenas uma parte de uma linha curva. Euler faz a demonstração considerando um círculo AMO, do qual o diâmetro é igual a a, e no qual calcula a abscissa $\overline{MB}^2 = BO \times BA$, ou $y^2 + x\,(a-x)$, ou ainda $y = \sqrt{ax - x^2}$. Prolonga seguidamente a ordenada até ela torne-se uma corda, e procura a expressão geral da corda. Se toma, por exemplo, a corda OM, ele deduz do triângulo OMB; $\overline{OB}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{OM}^2$, e, do retângulo AMO, $\overline{OM}^2 = AO \times OB$, ou $x^2 + y^2 = \overline{OM}^2$; $\overline{OM}^2 = ax$; substituindo $x^2 + y^2 = ax$.

Esta nova ordenada $OM = \sqrt{ax}$ representa uma parábola. Para o autor, esta descrição da parábola não se estende para além do círculo, embora a parábola tenha ramos infinitos. Por esta simples consideração, reconhecemos que não devemos sempre julgar a forma de uma curva e de todas as partes pela construção que podemos fazer.

Segundo o autpr, um dos argumentos deduzidos da série exponencial para provar a realidade dos logaritmos dos números negativos consiste em considerar que

$$\begin{aligned} y &= e^{\frac{1}{2}} \ \text{ e consequentemente } \ ly = \frac{1}{2}, \\ -y &= e^{\frac{1}{2}} \ \text{ e consequentemente } \ l\left(-y\right) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e que estas duas expressões elevadas ao quadrado dão igualmente $y^2 = e$, onde $2ly = 2$ onde $ly = \frac{1}{2}$; o que dá lugar à esta ambigüidade que $ly = l\left(-y\right)$; mas não tem lugar quando tratamos radicais ímpares, porque $e^{\frac{1}{3}} = y$, elevado ao cubo, dá $e = y^3$, e $e^{\frac{1}{3}} = -y$ dá $e = -y^3$. Considerando uma base inteira e positiva como a base neperiana, $e^x = y$ onde $x = ly$, compreendemos facilmente que, y sendo um número positivo, continua possível dar à x do valor que torne e^x igual a y; mas, se y é negativo, não é possível encontrar um valor real de x que torne e^x igual a y.

De acordo com Agliberto, Jean Bernoulli descobriu a famosa relação $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 2\pi$, que prova que se $\sqrt{-1}$ é singular, é necessário que $l\sqrt{-1}$ também seja.

"Personne partant, die Euler, n'aura moins de droit que M. Bernoulli lui-même, de soutenir désormais que $l\sqrt{-1}$ soit égal à zero."[78]

Segundo o autor, após ter contestado todos os argumentos provenientes das contradições que encontrou, Euler tinha a tarefa de procurar a resposta do enigma e encontrá-la de maneira em engenhosa. Assim como Côtes[79], Moivre[80] e Walmesley

[78]Tradução da autora: 'Qualquer pessoa, disse Euler, não terá menos direito que o Sr. Bernoulli, de apoiar doravante que $l\sqrt{-1}$ seja igual à zero.' Parte extraída do Capítulo Vi, p.251.

[79]Roger Cotes (1682 -1716), matemático inglês, dedicou-se preparando a segunda edição do Principia de Newton, morreu prematuramente, deixando uma obra incompleta.

[80]Abraham De Moivre (1667 -1754) matemático francês, trabalhou com probabilidades.

trouxeram as integrais a avaliação dos logaritmos e à medida do círculo, Euler reduziu a determinação dos logaritmos ao cálculo dos arcos de círculo, em que reduz assim as dificuldades da curva logarítmica às propriedades do círculo, através de ás formula $\cos x + \sin x\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}}$. Aplicou os logaritmos, à esta fórmula e transformou na seguinte:

$$l\left(\cos x + \sin x\sqrt{-1}\right) = x\sqrt{-1}.$$

Segundo Agliberto, esta fórmula confirma o sentimento de Leibniz, dado que provou que à cada número corresponde uma infinidade de logaritmos dos quais um único é real, todos os outros singulares, e que os logaritmos dos números negativos assim como os logaritmos dos números singulares, são todos singulares.

Segundo Agliberto, aqueles que desejam conhecer em detalhes mais sobre este assunto de tanto respeito na história da matemática, devem consultar a Memória de Euler: *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, inserido nas *Actes de l'Académie de Berlin* (Atas da Academia de Berlim), t. V, 1749, e a Memória de D'Alembert sobre o mesmo assunto, no primeiro volume de seu *Opuscules,* 1761.

Comentários: Neste capítulo em particular procuramos descrever ao máximo o trabalho de Agliberto por considerarmos que a s idéias expostas por ele são de grande importância dentro da história dos logaritmos. Agliberto utilizou obras raras para escrever este capítulo, sendo assim, optamos por descrevê-lo quase na íntegra.

O capítulo de logaritmos, o maior escrito por Agliberto neste livro, apresenta toda a teoria de logaritmos descrita e refeita passo a passo, em todos os seus detalhes. Agliberto faz não somente uma obra de matemática, quando está disposto a fazer um tratado de cálculo numérico e se preocupa com a matemática numérica, fez um capítulo recheado de história da matemática, situando os autores, comentando suas idéias e deixando espaço para suas falas. Como em todos os capítulos, Agliberto deixa uma quantidade enorme de citações no texto, fazendo as vezes de referência bibliografica. Um capítulo muito rico no ponto de vista da história da matemática e da matemática. Apresenta a gênese dos logaritmos e discute toda a sua evolução, coloca poucos exemplos, porém o capítulo contém muita teoria desde a idéia inicial de logaritmos, a sua obtenção, a criação das tábuas, suas operações e propriedades.

Obras citadas pelo autor neste capítulo: *Traité de L'arénaire (Archimedes); Leçons Élémentaires sur les mathématiques, L'École Normale, 1795 (Lagrange); Tables Mathématiques - Sherwin - Impresso na Introdução do 1º Volume dos Scriptores Logarithmici; Analyse des Ouvrages de napier relatifs à l'invention des logarithmes, 1838 (Biot); A short account of the history of mathematics (Walter-W Rouse-Ball); Mirifici Logarithmorum Canonis Descripitio, 1614 (Napier); Logarithmorum Chilias prima, 1618 (Briggs); Arithmetica Logarithmica, 1622 (Briggs); Trigonometria artificialis, 1633 (Vlacq); Théorie des fonctions analytiques (Lagrange); Notice des travaux de l'Académie du gard (Lavernède); Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, t.I, p.51 (Lacroix[81]); Nouvelle méthode pour calculer rapidement les logarithmes des nombres, 1851- 59 pag (M. Philippe Koralek); Supplément logarithmique - parte integrante do livro Nouvelles Annales de Mathématiques, t.X, p.289 et t.XII, p.171 (Leonelli); Correspondance de Zach, 1812 (Gauss- Leonelli); Tables de logarithmes à cinq décimales (M. Houël); Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires - Actes de l'Académie de Berlin, t.V, 1749 (Euler); Opuscules, 1761 (D'Alembert).*

3.8 O Capítulo VII: Das curvas de erros.

Sumário:

1. Considerações sobre as curvas de erros como recurso do empirismo teórico; redução espontânea do método de interpolação juntamente com a teoria.

2. Método de Newton para calcular os coeficientes de uma curva parabólica de erros.

3. Suas aplicações à qualquer exemplo.

4. Método de Lagrange.

5. Suas aplicações à um exemplo.

6. O método das partes proporcionais é uma conseqüência da teoria das curvas de erros.

[81]Sylvestre François Lacroix (1765 -1843), matemático francês, trabalhou com geometria analítica.

7. A regra da falsa posição está implicitamente contida dentro da regra das partes proporcionais.

8. Simplificação do método de Newton.

9. Aplicação à um exemplo.

10. Justificativa da regra para calcular o logaritmo de um número incluído entre dois números consecutivos os quais tem logaritmos registrados nas tábuas.

Agliberto inicia o capítulo afirmando que quando a resolução de uma equação qualquer excede o alcance efetivo dos recursos teóricos, procuramos soluções por meio de tentativas, ou em outros termos empregamos métodos mais minuciosos. É a sistematização destas tentativas que constitui os métodos de resolução numérica das equações. Mas a natureza do problema pode ser tal que seja muito difícil descrevê-lo na forma de equação; temos desta forma,que recorrer à outra espécie de empirismo. Tentamos soluções sobre a questão concreta e observamos os resultados; umas soluções não convêm por excesso, as outras por falta, de modo que a verdadeira solução permaneça entre uma e outra.

Segundo Agliberto, representando, de acordo com a concepção de Descartes, os números pelas abcissas de um sistema de eixos retilíneos e retangulares e os resultados para as ordenadas, temos uma seqüência qualquer de pontos. Desenhamos uma curva que passa por todos os pontos; sabemos que a curva não pode passar dos pontos situados acima do eixo das abcissas aos pontos situados abaixo deste eixo sem cortar o eixo x, ou seja, a ordenada não pode passar dos valores positivos aos negativos sem passar por zero; é a abscissa correspondente ao valor nulo da ordenada indicada pelo ponto, que dá a solução do problema. A curva pode ser traçada facilmente e temos assim a solução gráfica do problema. **Esta curva é chamada de curva dos erros.**

No entanto, assegura o autor, podemos calcular a equação de uma curva que passa por todos estes pontos. É um problema indeterminado, porque há uma infinidade de curvas que passam pelos mesmos pontos. Mas a razão prática aproveita a indeterminação do problema para escolher a solução mais fácil, empregando as curvas ditas parabólicas cujas equações são, como sabemos,

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + ...$$

Qualquer questão consiste em dispor das indeterminações $a, b, c, d, e...$, de maneira que a curva passe pelos pontos dados. De acordo com Agliberto, na resolução deste problema, acredita-se que trabalhou Auguste Comte na teoria do número de condições determinantes de uma curva.

Esta maneira de resolver o problema aproximadamente, segundo Agliberto, tem uma elevada importância para a Geometria, a Astronomia e a Física, dado que a teoria da interpolação das seqüências é um caso específico e esta teoria é, após Lagrange, a descoberta mais útil que se fez posterior aos logaritmos. A teoria da interpolação, instituída desde 1670, por Mouton[82], no seu *Observations diametrorum Solis et Lunae*, tem por objetivo a resolução do problema cujo enunciado, de acordo com Lagrange, é o seguinte:

Problema 5 *Sendo dada uma sequência de números cujas diferenças de ordem qualquer sejam constantes, encontrar o número qualquer de termos intermediários que seguem a mesma lei.*

'Para o autor, concebendo, por conseguinte uma curva que passa pelos pontos que representam os números dados, a solução consiste em encontrar os pontos da mesma curva respectivamente correspondente aos termos pedidos. A primeira solução do problema de determinação das constantes arbitrárias de acordo com as coordenadas dos pontos deve-se à Newton.

Sejam $p, q, r, s...$ os valores das abcissas dos pontos dados, e $P, Q, R, S...$ os valores das ordenadas correspondentes. Substituindo cada uma das abcissas em x na equação geral das curvas parabólicas, tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned} P &= a + bp + cp^2 + dp^3 + ... \qquad \text{(I)} \\ Q &= a + bq + cq^2 + dq^3 + ... \\ R &= a + br + cr^2 + dr^3 + ... \end{aligned}$$

[82] Gabriel Mouton (1618 -1694), teólogo francês que se dedicava à matemática e astronomia.

onde deduzimos por subtração[83]

$$\begin{aligned} Q-P &= b(q-p)+c\left(q^2-p^2\right)+d\left(q^3-p^3\right)-..., \\ R-Q &= b(r-q)+c\left(r^2-q^2\right)+d\left(r^3-q^3\right)+..., \end{aligned}$$

dividindo a primeira igualdade por $(q-p)$, a segunda por $(r-q)$ e assim por diante, temos

$$\begin{aligned} \frac{Q-P}{q-p} &= b+c(q+p)+d\left(q^2+qp+p^2\right)+..., \\ \frac{R-Q}{r-q} &= b+c(r+q)+d\left(r^2+rq+q^2\right)+..., \end{aligned} \tag{II}$$

Fazendo $\frac{Q-P}{q-p}=Q_1$, $\frac{R-Q}{r-q}=R_1$, $\frac{S-R}{s-r}=S_1,...$ tem-se ainda, subtraindo e dividindo,

$$\frac{R_1-Q_1}{r-p}=c+d(r+q+p)+...; \quad \frac{S_1-R_1}{s-q}=c+d(s+r+q)+...,$$

Fazendo $\frac{R_1-Q_1}{r-p}=R_2$, $\frac{S_1-R_1}{s-q}=S_2,......$ encontra-se igualmente para todos os termos $\frac{S_2-R_2}{s-r}=d+....,.$

Parando, por exemplo, na abscissa r e na ordenada R (I), temos três pontos; por conseguinte, três constantes arbitrárias a,b,c; para determinar as constantes b e c, utilizamos o descrito pelo autor em (II), encontrando o valor c e posteriormente b e a.

$$\frac{Q-P}{q-p}=b+c(q+p)=Q_1; \quad \frac{R-Q}{r-q}=b+c(r+q)=R_1,$$

e ainda $\frac{R_1-Q_1}{r-p}=c=R_2$ onde[84]

$$\begin{aligned} c &= R_2 & &= R_2, \\ b &= Q_1-R_2(q+p)=Q_1-R_2q-R_2p, \\ a &= P-[Q_1-R_2(q+p)]p-R_2p^2 \\ &= P-Q_1p+R_2qp \end{aligned}$$

[83]Nota da autora: A equação $R-Q=b(r-q)+c\left(r^2-q^2\right)+d\left(r^3-q^3\right)+...,$ possui um provável erro de edição, pois na página 258 do capítulo VII, encontra-se como: $R-Q=b(r-q)+c\left(r^2-q^2\right)+d^2\left(r^3-q^3\right)+...,$ de potência quadrada para a constante d, quando na verdade ela possui potência 1.

[84]Nota da autora: A equação $b=Q_1-R_2(q+p)=Q_1-R_2q-R_2p$, possui um provável erro de edição, pois na página 259 do capítulo VII, encontra-se como:
$b=Q_1-R_2(q+p)=Q-R_2q-R_2p$, sendo o índice de Q o número 1.

substituindo na fórmula $y = a + bx + cx^2$, temos $y = P - Q_1 p + R_2 qp + Q_1 x - R_2 qx - R_2 px + R_2 x^2$, ou ainda[85]

$$y = P + Q_1 (x - p) + R_2 (x - p)(x - q)$$

Generalizando,

$$y = P + Q_1 (x - p) + R_2 (x - p)(x - q) + S_3 (x - p)(x - q)(x - r) + ...$$

O cálculo $P, Q, R, S...$, através de $p, q, r, s...$, torna-se fácil pela seguinte disposição:

$$\begin{array}{rcl}
 & & x, y, \\
 & & p, P, \\
q, Q, \dfrac{Q-P}{q-p} & = & Q_1, \\
r, R, \dfrac{R-Q}{r-q} & = & R_1, \dfrac{R_1 - Q_1}{r-p} = R_2, \\
s, S, \dfrac{S-R}{s-r} & = & S_1, \dfrac{S_1 - R_1}{s-q} = S_2, \dfrac{S_2 - R_2}{s-p} = S_3, \\
t, T, \dfrac{T-S}{t-s} & = & T_1, \dfrac{T_1 - S_1}{t-s} = T_2, \dfrac{T_2 - S_2}{t-q} = T_3, \dfrac{T_3 - S_3}{t-p} = T_4, ...
\end{array}$$

Agliberto apresenta alguns exemplos dos quais apresento aqui o primeiro:

Exemplo 13 *Seja, por exemplo, calcular a equação da curva parabólica que passa pelos pontos dos quais os abcissas são* $-2, -1, 0, +1, +2$ *e as ordenadas respectivamente* $67, 14, 3, 4, 11$,

$$\begin{array}{rcllllll}
p & = & -2, & P = 67, & & & & \\
q & = & -1, & Q = 14, & Q_1 = -53, & & & \\
r & = & 0, & R = 3, & R_1 = -11, & R_2 = 21, & & \\
s & = & 1, & S = 4, & S_1 = 1, & S_2 = 6, & S_3 = -5, & \\
t & = & 2, & T = 11, & T_1 = 7, & T_2 = 3, & T_3 = -1, & T_4 = 1.
\end{array}$$

[85]Nota da autora: A equação $y = P + Q_1 (x - p) + R_2 (x - p)(x - q)$ possui um provável erro de edição, pois na página 259 do capítulo VII, encontra-se como: $y = P + Q_1 (x - p) + R_1 (x - p)(x - q)$ porém através dos cálculos sabe-se que o índice de R é 2.

A equação da curva parabólica é

$$y = 67 - 53\,(x+2) + 21\,(x+2)\,(x+1) - 5\,(x+2)\,(x+1)\,x - (x+2)\,(x+1)\,x\,(x-1) \quad \text{ou}$$

$$y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3.$$

Chegamos pelo método de Newton a seguinte fórmula:

$$y = P + Q_1\,(x-p) + R_2\,(x-p)\,(x-q) + S_3\,(x-p)\,(x-q)\,(x-r) + ...$$

observando agora que podemos calcular $P, Q, R, S...$, fazendo x consecutivamente igual a $p, q, r, s.t.....$ temos os seguintes resultados

$$\begin{array}{cccccc} x=p & A=1 & B=0 & C=0 & D=0 & ... \\ x=q & A=0 & B=1 & C=0 & D=0 & ... \\ x=r & A=0 & B=0 & C=1 & D=0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{array}$$

É fácil reconhecer que estes resultados são obtidos supondo

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x-q)\,(x-r)\,(x-s)\,(x-t)\,...}{(p-q)\,(p-r)\,(p-s)\,(p-t)\,...}, \\ B &= \frac{(x-p)\,(x-r)\,(x-s)\,(x-t)\,...}{(q-p)\,(q-r)\,(q-s)\,(q-t)\,...}, \\ C &= \frac{(x-p)\,(x-q)\,(x-s)\,(x-t)\,...}{(r-p)\,(r-q)\,(r-s)\,(r-t)\,...}, ... \end{aligned}$$

Esta fórmula nos dá o resultado y para as suposições $x = p, q, r, s, t...$ mas podemos, para o problema oposto, procurar a suposição que dá um certo resultado. Para isto, segundo o autor, inverte-se as coordenadas: chamando $x = p, q, r, s, t...$os resultados dos quais as suposições seriam $P, Q, R, S...$ Para resolver o problema oposto, é necessário procurar a suposição que daria o resultado nulo, por conseguinte $x = 0$. A fórmula torna-se $y = AP + BQ + CR + DS + ...$ na qual

$$\begin{aligned} A &= \frac{q}{q-p} \times \frac{r}{r-p} \times \frac{s}{s-p} \times .., \\ B &= \frac{p}{p-q} \times \frac{r}{r-q} \times \frac{s}{s-q} \times ..., \\ C &= \frac{p}{p-q} \times \frac{q}{q-r} \times \frac{s}{s-r} \times ..., \end{aligned}$$

Formado de tantos fatores que de suposições, menos um. Conclui Agliberto que este é o método de Lagrange.

Aplicando o método de Lagrange ao primeiro exemplo, temos

$$\begin{array}{llllll}
p=-2 & x-p=x+2 & p-q=-1 & p-r=-2 & p-s=-3 & p-t=-4 \\
q=-1 & x-q=x+1 & q-p=+1 & q-r=-1 & q-s=-2 & q-t=-3 \\
r=0 & x-r=x & r-p=+2 & r-q=+1 & r-s=-1 & r-t=-2 \\
s=1 & x-s=x-1 & s-p=+3 & s-q=+2 & s-r=+1 & s-t=-1 \\
t=2 & x-t=x-2 & t-p=+4 & t-q=+3 & t-r=+2 & t-s=+1
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(x+1)\,x\,(x-1)\,(x-2)}{1\times -1\times -2\times -3} = \frac{x^4-x^3-4x^2-4x}{-6} = \frac{-4x^4+4x^3+16x^2-16x}{24}, \\
B &= \frac{(x+2)\,(x+1)\,(x-1)\,(x-2)}{2\times 1\times -1\times -2} = \frac{x^4-5x^2+4}{4} = \frac{6x^4-30x^2+24}{24}, \\
D &= \frac{(x+2)\,(x+1)\,x\,(x-2)}{3\times 2\times 1\times -1} = \frac{x^4+x^3-4x^2-4x}{-6} = \frac{-4x^4-4x^3+16x^2+16x}{24}, \\
E &= \frac{(x+2)\,(x+1)\,x\,(x-1)}{4\times 3\times 2\times 1} = \frac{x^4+2x^3-x^2-2x}{24}.
\end{aligned}$$

Substituindo na fórmula $y = AP + BQ + CR + DS + ...$, ou seja,

$$\begin{aligned}
y &= 67\times\frac{x^4+2x^3-x^2-2x}{24} + 14\times\frac{-4x^4-4x^3+16x^2+16x}{24} \\
&\quad +3\times\frac{6x^4-30x^2+24}{24} + 4\times\frac{-4x^4+4x^3+16x^2-16x}{24} + 11\times\frac{x^4+2x^3-x^2-2x}{24}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{array}{lllll}
24y=67 & x^4-134 & x^3-67 & x^2+134 & x+72 \\
-56 & +56 & -224 & -224 & \\
+18 & -16 & -90 & +64 & \\
-16 & +22 & +64 & -22 & \\
+11 & & -11 & &
\end{array}$$

resulta em

$$24y = 24x^4 - 72x^3 + 120x^2 - 48x + 72, \text{ ou ainda,}$$

$$y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3.$$

Concebendo a linha parabólica passando por dois pontos apenas, temos a linha mais simples do tipo parabólico, que o autor denomina de linha direita. É o caso das curvas dos erros quando há apenas duas suposições, que designamos geralmente do nome de *métodos das partes proporcionais*. Mas é necessário observar que neste caso a pergunta é invertida, porque se procura a suposição que dá um certo resultado.

Tomamos, por conseguinte a fórmula de Newton aplicada ao caso linear

$$y = P + Q_1 (x - p);$$

Suponha que P e Q sejam as suposições e p, q os resultados. A suposição procurada é a que corresponde ao ponto onde a curva corta o eixo das abcissas, e, por seqüência, a que torna $x = 0$, porque x indica à presente as ordenadas. Esta consideração reduz a fórmula a $y = P - Q_1 p$ ou, substituindo ao lugar de Q, a expressão de valor $\frac{Q-P}{q-p}$

$$y = P - \frac{Q-P}{q-p} p.$$

Aplicando a fórmula de Lagrange aos problemas relativos à regra das partes proporcionais, temos

$$\begin{aligned} y &= \frac{Pq}{q-p} + \frac{Qp}{p-q} = \frac{Pq(p-q) + Qp(q-p)}{(q-p)(p-q)} = \frac{Qp(q-p) - P(q-p)}{(q-p)(p-q)} \\ &= \frac{(Qp-Pq)(q-p)}{(q-p)(p-q)} = \frac{Qp-Pq}{p-q} = \frac{Pq-Qp}{p-q} = P - \frac{Q-P}{q-p} p. \end{aligned}$$

Supõe como exemplo o autor, que se queira o número que, acrescentado à sua metade, ao seu terço, a sua quarta parte é igual à 75.

Podemos fazer duas suposições: O autor[86] supõe primeiramente que $P = 12$ e $Q = 48$, e obtém os seguintes resultados: $p = -50, q = 25$.

Apresento aqui os cálculos que o levaram a estes números: de $y = P - \frac{Q-P}{q-p} p$ o autor encontra graficamente para y o valor 36 e substitui: $36 = 12 + \frac{36}{75}.p$ onde $p = -50$. E consequentemente $q = 25$.

$$Q - P = 36, \quad q - p = 75,$$

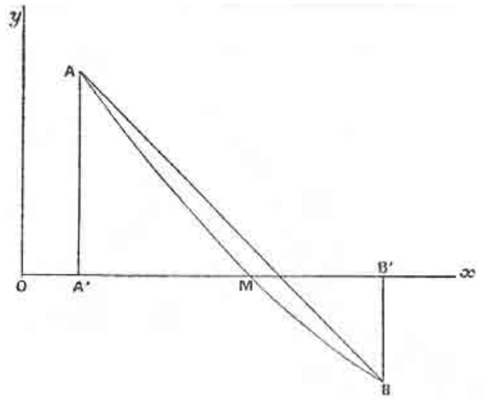
e, conseqüentemente

$$y = 12 + \frac{36 \times 50}{75} = 12 + 24 = 36.$$

O autor propõe construir a imagem geométrica deste método para melhor compreender os aperfeiçoamentos que se pode ter. Suponha que AB seja uma parte da

[86]Nota da autora: Na página 267, do capítulo VII, encontra-se um provável erro de edição, pois por meio de cálculos é possível encontrar $p = -50$, e não $p = 50$ como mostra o autor.

curva tal que se possa, sem erro sensível, substituí-lo pela sua corda. E sejam $OA' = P$ e $OB' = Q$ as duas suposições cujos os resultados são respectivamente $AA' = p$ e $BB' = -q$.



A solução do problema consiste em encontrar OM, o que é fácil, pela semelhança entre os triângulos PMA e QBM. Com efeito, $\frac{A'M}{AA'} = \frac{B'M}{B'B}$, onde

$$\frac{A'M}{A'A} = \frac{A'M + B'M}{A'A + B'B}.$$

Da figura $A'M + B'M = A'B' = OB' - OA' = Q - P$. Substituindo por $AA' = p$ e $BB' = -q$, temos $\frac{A'M}{p} = \frac{Q-P}{p-q}$, e observando que $\frac{Q-P}{p-q} = \frac{-Q+P}{-p+q} = \frac{Q-P}{q-p}$, temos $\frac{A'M}{p} = -\frac{Q-P}{q-p}$. Ou $A'M = -\frac{Q-P}{q-p}p$. Mas o procurado é $OM = OA' + A'M$ fazendo as substituições,

$$OM = x = P - \frac{Q-P}{q-p}p.$$

Segundo o autor, este método torna-se simples ao fazer coincidir AA' com o eixo y, que resulta $P = 0$ e, por seqüência, $p = f(0)$. A redução faz sempre uma suposição igual $P = 0$ e uma suposição qualquer. A fórmula torna-se $x = \frac{Q}{q-p}p$ ou

$$\frac{Q-P}{q-p} = \frac{p}{x}.$$

Para Agliberto, esta fórmula pode ser ainda mais simples observando que $Q = A'B'$ é um abscissa qualquer, que $q - p$ é a diferença das ordenadas de ponto qualquer B e do ponto fixo A, e que $\frac{Q}{q-p}$ está por seqüência em relação constante entre uma abscissa e a sua ordenada, razão que representamos por $\frac{a}{b}$, a sendo uma abscissa qualquer e b

sua ordenada. Substituindo $\frac{a}{b} = \frac{x}{p}$ ou ainda $\frac{b}{a} = \frac{p}{x}$. Considerando que p é o resultado da suposição $x = 0$, de acordo com o autor, podemos enunciar esta regra:

O resultado de uma suposição qualquer está para esta suposição assim como o resultado da suposição de zero está para uma incógnita.

Podemos enunciar o resultado de diferente maneiras, guardando a proporcionalidade das suposições aos respectivos resultados . **Esta é a regra de falsa posição.**

Problema 6 *Encontrar um número que acrescentado à sua metade, ao seu terço, e à sua quarta parte é igual à 75.*

O número 12 já foi tentado e encontramos o resultado 25. Podemos, por conseguinte formar a proporção

$$\frac{12}{25} = \frac{x}{7^5} \text{ ou } x = \frac{12 \times 75}{25} = 36.$$

Instituindo a fórmula de Newton, sabemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{Q-P}{q-p} &= Q_1, \ \ldots \\
\frac{R-Q}{r-q} &= R_1, \frac{R_1 - Q_1}{r-p} = R_2, \ldots \\
\frac{S-R}{s-r} &= S_1, \frac{S_1 - R_1}{s-q} = S_2, \frac{S_2 - R_2}{s-p} = S_3, \ldots \\
\frac{T-S}{t-s} &= T_1, \frac{T_1 - S_1}{t-s} = T_2, \frac{T_2 - S_2}{t-q} = T_3, \frac{T_3 - S_3}{t-p} = T_4 \ldots
\end{aligned}$$

De acordo com Agliberto, suponha constantes as diferenças entre q e p, r e q..., como nos problemas de interpolação em Astronomia, de maneira que $q - p = r - q = s - r = t - s = \ldots = h$,

Temos $q = p + h, r = p + 2h, s = p + 3h, t = p + 4h, \ldots$ Fazendo agora $Q - P = A_1, R - Q = A_{2,} S - R = A_3, T - S = A_4$, de maneira que o Quadro acima seja reduzido a:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{A_1}{h}, R_1 = \frac{A_2}{h}, S_1 = \frac{A_3}{h}, T_1 = \frac{A_4}{h}, \ldots, \\
R_2 &= \frac{\frac{A_2}{h} - \frac{A_1}{h}}{2h} = \frac{A_2 - A_1}{2h^2} = \frac{B}{2h^2}, \\
S_2 &= \frac{A_3 - A_2}{2h^2} = \frac{B_1}{2h^2}, \\
T_2 &= \frac{A_4 - A_3}{2h^2} = \frac{B_2}{2h^2}, \ldots
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{\frac{B_1}{2h^2} - \frac{B}{2h^2}}{3h} = \frac{B_1 - B}{2.3h} = \frac{C}{2.3h^3}, \\
T_3 &= \frac{B_2 - B_1}{2.3h^3} = \frac{C}{2.3h^3}, ... \\
T_4 &= \frac{\frac{C_1}{2.3h^3} - \frac{C}{2.3h^3}}{4h} = \frac{C_1 - C}{2.3.4h^4} = \frac{D}{2.3.4h^4}, ...
\end{aligned}$$

Fazendo $x - p = z$ e se observando que a diferença de p e q, q e r, r e s..., é constante e igual à h, temos:

$$\begin{aligned}
x - p &= z, \\
x - q &= z - h, \\
x - r &= z - h - h = z - 2h, \\
x - s &= z - 2h - h = z - 3h, ...
\end{aligned}$$

Fazendo estas substituições e pondo A ao lugar de P na fórmula

$$y = P + Q_1 (x - p) + R_2 (x - p)(x - q) + S_3 (x - p)(x - q)(x - r) + ...$$

Temos $y = A + \frac{z}{h}B + \frac{z(z-h)}{2h^2}C + \frac{z(z-h)(z-2h)}{2.3h^3}D + ...,$. Ou, supondo $h = 1$,

$$y = A + zB + \frac{z(z-1)}{2}C + \frac{z(z-1)(z-2)}{2.3}D + ...$$

Segundo Agliberto, o uso comum dos logaritmos, utilizamos freqüentemente a aplicação da regra da interpolação para encontrar o logaritmo de um número compreendido entre dois números consecutivos dados nas Tábuas. Esta interpolação é reduzida ao caso linear; é necessário, por conseguinte ser tratado como problema aplicado à regra das partes proporcionais.

Após o método de Newton, a solução deste problema consiste na aplicação da fórmula $y = P + Q_1 (x - p)$, na qual $Q_1 = Q - P$ ou, substituindo, $y = P + (x - p)(Q - P)$ na fórmula de Lagrange, obtemos

$$y = P\frac{x - p}{p - q} + Q\frac{x - p}{q - p},$$

E, neste caso, $q-p=1$ por conseguinte, $q=p+1$ e $x-q=x-p-1$. Substituindo estes valores, temos $y=P\frac{x-p-1}{-1}+Q\frac{x-p}{1}$ ou

$$y=-Px+Pp+P+Qx-Qp=P+(Q-P)\,x-(Q-P)\,p,$$

ou ainda

$$y=P+(x-p)\,(Q-P)\,.$$

Exemplo 14 *Seja, por exemplo, o logaritmo do número* 5196372. *O número imediatamente inferior que se encontra na Tábua de Callet é* 51963*, cujo logaritmo é* 6, 7156942*; o número seguinte é* 51964 *e o seu logaritmo é* 6, 7157026.

Fazendo

$$\begin{aligned}
x &= 5196372 \quad P=6,7156942,\\
p &= 5136300 \quad Q=6,7157026,\\
x-p &= 72, \quad Q-P=0,0000084,
\end{aligned}$$

e substituindo estes valores na fórmula acima; temos

$$\begin{aligned}
y &= 6,7156942+72\times 0,0000084\\
&= 6,7156942+0,0000060\\
&= 6,7157002.
\end{aligned}$$

Comentários: Neste capítulo Agliberto explica o que ele denomina de métodos exegéticos[87] para resolver as equações por meio de resolução numérica. Continua trabalhando através do método de tentativas para a resolução dos problemas propostos, utiliza a geometria para validar algumas das teorias apresentadas, e nos exemplos mostra números e resultados que não explica. Existem alguns prováveis erros de digitação que tornaram a análise do capítulo um pouco mais demorada e difícil.

Agliberto utiliza os métodos de interpolação de Newton e Lagrange para mostrar a curva dos erros. O capítulo versa quase na sua totalidade sobre interpolação; é um

[87]Nota da autora: 'método utilizado para esclarecimento ou minuciosa interpretação de um texto ou de uma palavra.' *Dicionário Escolar da Língua Portuguesa, 1986.*

capítulo muito expressivo no que diz respeito ao conteúdo, pois trata de dois métodos numéricos importantes e que continuam sendo estudados desta forma até hoje.

Obras citadas pelo autor: *Observations diametrorum solis et lunae, 1670 (Mouton); Traité d'Astronomie pratique de Loomis: An introduction to pratical Astronomy, 7ª edition, p.203.*

Capítulo 4

Considerações Finais

Neste trabalho de pesquisa tomamos como base o livro publicado em Paris pelo brasileiro Agliberto Xavier no ano de 1909, e nos preocupamos em analisar o discurso e conteúdo matemático apresentado pelo autor. Na análise deste trabalho encontramos as idéias do professor de filosofia e matemática do Colégio Pedro II sobre um conteúdo que poucos livros tratavam.

Para a análise do livro, utilizamos a identificação dos conteúdos trabalhados pelo autor com os conhecimentos que hoje temos de Cálculo Numérico. Esta comparação mesmo que não tenha sido sistemática, nos proporcionou analisar o texto compreendendo o desenvolvimento proposto pelo autor.

Na introdução do livro, Agliberto coloca as idéias fundamentais que propiciaram o desenvolvimento do Cálculo Numérico através dos conceitos de erros; trabalha as fórmulas, aproximações e exemplos. Nesta primeira parte o autor procura deixar o leitor a par do que pretende desenvolver nos próximos capítulos.

No primeiro capítulo utiliza aplicações de erros relativos para elucidar a teoria exposta, podemos perceber que o Prof. Agliberto trabalha com noções fundamentais de erro e aproximação, ficando de fácil entendimento para o leitor. Neste capítulo, bem como no livro todo, Agliberto não apresenta demonstrações dos teoremas que enuncia; faz a validação dos resultados por meio de exemplos.

No segundo capítulo o autor apresenta os métodos para a resolução dos cálculos sem suas demonstrações e provas; porém explica detalhadamente como cada método funciona através de vários exemplos. Os métodos e exemplos inicialmente propostos parecem ter sido escolhidos de forma a tornar mais fácil a compreensão dos procedimentos. Agliberto aborda os primeiros métodos visando chegar ao ponto mais importante do capítulo, que é a divisão ordinária aplicada à resolução de equações numéricas e as regras de Fourier para a extração da raíz quadrada.

Agliberto no terceiro capítulo apresenta de forma bastante rebuscada os métodos de separação de raízes de equações numéricas. Envolve-se na discussão sobre a descoberta do método de separação das raízes das equações, que é creditado a Fourier e Budan, defende a originalidade da teoria de Fourier e fecha o capítulo fazendo algumas considerações sobre o assunto. Este capítulo, além da parte teórica e prática exposta pelo autor, é rico em citações de obras e idéias de grandes matemáticos da época.

O autor, no quarto capítulo se deteve em analisar o trabalho de Newton e Fourier para determinar valores para raízes incomensuráveis. Exibiu o método feito por Newton, mostrou suas falhas, e verificou as alternativas dadas por Fourier para o mesmo. Supõe inicialmente os valores do intervalo em que se encontram as raízes e desenvolve o método para determiná-las. Utiliza tentativas para determinar os intervalos onde estão compreendidas as raízes. É um capítulo rico do ponto de vista do cálculo numérico pois, apresenta um de seus métodos mais importantes que é o método de Newton.

Como Agliberto salienta em sua introdução, que o trabalho por ele apresentado é um tratado de Cálculo Numérico, não poderiam faltar cálculos com muitas casas decimais ao longo do mesmo. Particularmente no quinto capítulo, Agliberto utiliza números com até 29 casas após a vírgula, sem comentar a forma com que obteve tais números.

Em todo o livro, Agliberto apresenta cálculos com várias casas decimais e não cita se utilizou algum instrumento de cálculo para obtê-los. Atualmente, estamos acostumados à utilização de *softwares* matemáticos, onde estes cálculos são fáceis de serem executados; porém se utilizamos uma calculadora científica que possui 10 dígitos, não teremos nem de perto a precisão proposta pelo autor. O capítulo expõe de forma clara o seu ponto mais importante que é o método de Newton por meio do procedimento da extração das raízes dos números.

O capítulo seis, sobre os logaritmos, o maior escrito por Agliberto neste livro, apresenta a teoria de logaritmos descrita e refeita passo a passo, em todos os seus detalhes. Agliberto não se restringe aos conteúdos puramente propostos para este capítulo, utiliza a história da matemática, inserindo autores, utilizando suas citações e obras, para complementar suas idéias e exemplificar o conteúdo. Como em todos os capítulos, Agliberto deixa uma quantidade enorme de citações no texto, fazendo as vezes de referência bibliográfica. Um capítulo importante no ponto de vista da história da matemática e da matemática.

No último capítulo, Agliberto explica o que ele denomina de métodos exegéticos[1] para resolver as equações por meio de resolução numérica. Continua trabalhando através do método de tentativas para a resolução dos problemas propostos, utiliza a geometria para validar algumas das teorias apresentadas, e nos exemplos mostra números e resultados que não explica. Existem alguns prováveis erros de digitação que tornaram a análise do capítulo um pouco mais demorada e difícil. Agliberto utiliza os métodos de interpolação de Newton e Lagrange para mostrar a curva dos erros.

O trabalho que fizemos, atinge seus objetivos iniciais quanto à análise matemática do texto escrito por Agliberto, porém deixa algumas perguntas e reflexões sobre a disciplina, seus professores e os cursos onde foram ministrados.

Trabalhar com dados históricos nos faz repensar a cada momento o caminho que se está percorrendo e as possibilidades que se abrem a cada descoberta.

Como trabalho futuro sugerimos a pesquisa sobre outros autores que se interessaram pela matemática numérica no Brasil, bem como a pesquisa sobre a inserção da disciplina de Cálculo Numérico nas grades curriculares e sua contribuição para os cursos de engenharia e matemática. A análise de suas mudanças nas grades curriculares e também frente às novas tecnologias são pontos importantes que podem esclarecer e contribuir com a pesquisa histórica sobre o Cálculo Numérico no Brasil.

[1]Nota da autora: 'método utilizado para esclarecimento ou minuciosa interpretação de um texto ou de uma palavra.' *Dicionário Escolar da Língua Portuguesa, 1986.*

Referências Bibliográficas

Fonte Primária:

XAVIER, A. Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé. Paris: Gauthier-Villars, 1909.

Obras de Referência:

ANUÁRIO DO COLÉGIO PEDRO II, Vol. XIII, 1945- 1946. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1950.

ANUÁRIO DO COLÉGIO PEDRO II, Vol. XV, 1949- 1950. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1954.

BARON, M.E., BOSS, H.J.M. Newton e Leibniz. In: ___ Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.v.3. 73 p .Tradução de MAIER, R.

BARONI, R.L.S., NOBRE, S.R. A pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática. In: ___ Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.313p.

BARONI, R.L.S., TEIXEIRA, M.V., NOBRE, S.R. A investigação científica em história da matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em educação matemática. In: ___ Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücer.1986.488p. Tradução de GOMIDE, E. F.

BRUNNER, H. O Progresso do Cálculo Numérico: Com enfoque em Lagrange. Dissertação de Mestrado. UFES, Vitória, 2000.

CARVALHO, J.B.P. As idéias fundamentais da Matemática. Boletim – GE-PEM, Rio de Janeiro,1988 23 p.7-24.

DORIA, E. Memória Histórica do Colégio Pedro II - 1837 - 1937. Rio de Janeiro.

ECO, U. Como se faz uma tese. São Paulo: Editora Perspectiva, 2002. 170p.

GOLDSTINE, H. H. A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century. New York: Springer – Verlag.1977. 348p.

GOMES, E.V. Sobre a História da Lógica no Brasil: da lógica das faculdades à lógica positivista (1808-1909). Dissertação de Mestrado. USP, São Paulo, 2002.

KATZ, V. A History of Mathematics: An Introduction. 2^a Ed. New York: Addison – Wesley.1998.864p.

LINS, I. História do Positivismo no Brasil. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1964.

MAY. O. K. Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics. Toronto: University of Toronto Press. 1973.

MENINO, F.S. A Escola de Engenharia de São Carlos e a criação de um curso de matemática. Dissertação de Mestrado, UNESP, Rio Claro, 2001.

PEREIRA, O. (Org.) Almanach do pessoal docente e administrativo do Colégio Pedro II. Rio de Janeiro: Tipografia dos Tribunaes, 1921.

SCHREIBER, P. General Numerical Mathematics. In: ___ Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences. Vol.1. New York, 1994.

SEGISMUNDO, F. Excelências do Colégio Pedro II, 1993. Rio de Janeiro.

SEGISMUNDO, F. Memória de estudante (Colégio Pedro II). Edição Comemorativa do sesquicentenário 1837- 1987. Rio de Janeiro.

SEVERINO, A.J. Metodologia do Trabalho Científico. 20 ed. São Paulo: Editora Cortez, 1996.

SILVA, C.M.S da. A matemática positivista e sua difusão no Brasil. Vitória: Editora EDUFES, 1999a.

SILVA, C.P da. A matemática no Brasil: Uma história de seu desenvolvimento. São Leopoldo: Editora UNISINOS, 1999b.

XAVIER, A. Discurso paraninfando os alunos do Colégio Pedro II. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1929.

XAVIER, A. Realismo, Nominalismo e Conceptualismo.In: ___ Studia: Colégio Pedro II, Ano II, N^o. 2, 1951.