

AURELIO MOREIRA DA SILVA NETO

MODELAGEM E SIMULAÇÃO DAS JUNTAS DE UM  
MANIPULADOR ROBÓTICO CILÍNDRICO

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de Projetos e Materiais.

Orientador: Prof. Dr. José Geraldo Trani Brandão

Guaratinguetá  
2008

S586m	<p>Silva Neto, Aurelio Moreira da</p> <p>Modelagem e simulação das juntas de um manipulador robótico cilíndrico / Aurelio Moreira da Silva Neto. - Guaratinguetá: [s.n.], 20078</p> <p>83 f.: il.</p> <p>Bibliografia: f. 55-57</p> <p>Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2008.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. José Geraldo Trani Brandão</p> <p>1. Modelagem cinemática. 2. Modelagem dinâmica. 3. Simulação de robôs. I. Título</p> <p>CDU 007.52</p>
-------	---

UNESP  UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

**"MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO  
CILÍNDRICO"**

**AURELIO MOREIRA DA SILVA NETO**

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**"MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA"**

PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA  
ÁREA: PROJETOS E MATERIAIS

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Marcelo dos Santos Pereira  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**

Prof. Dr. JOSÉ GERALDO TRANI BRANDÃO  
Orientador/UNESP-FEG

Prof. Dr. FRANCISCO JOSÉ GRANDINETTI  
UNESP-FEG

Prof. Dr. ANSELMO MONTEIRO ILKIU  
UNITAU

Dezembro de 2008

**DADOS CURRICULARES****AURELIO MOREIRA DA SILVA NETO**

NASCIMENTO	23.03.1975- AMERICANA / SP
FILIAÇÃO	Jorge Moreira da Silva Maria da Penha Silva Moreira
1995/2000	Curso de Graduação em Engenharia Mecânica (ênfase em mecatrônica), na Universidade de Taubaté.
2006/2008	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.

de modo muito especial, a minha companheira *Carolina Garcia Antunes*, que com seu apoio, foi a grande incentivadora para que eu continuasse em busca da realização de meus objetivos.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a todos os seres sagrados , fonte de todas as bênçãos. Agradeço pela minha preciosa vida humana, que possui todas as liberdades e dotes, minha família e meus amigos.

Ao meu orientador, *Prof. Dr. José Geraldo Trani Brandão* pelo comprometimento e incentivo para desenvolver com qualidade as etapas da elaboração desse trabalho.

Aos meus pais *Jorge Moreira da Silva e Maria da Penha Silva Moreira*, que me ensinaram, com muita sabedoria, com exemplo de vida, honestidade, a seriedade dos valores e princípios para fundamentar minhas escolhas nos caminhos da vida,

A todos os funcionários do Campus de Guaratinguetá, pela atenção imediata e disponibilidade em ajudar.

À participação dos professores *Alberto Adade Filho, João Carlos Menezes, Sérgio Frascino Muller de Almeida, Luís Gonzaga Trabasso*, pela orientação em tantos novos conceitos, e garantindo a aplicação prática do meu conhecimento.

Dedico também o resultado deste esforço àqueles profissionais, em especial os Srs. *Abel Rosato, Domingos Sávio Aguiar, João Bosco Gonçalves e Álvaro Manoel de Souza* professores e amigos que demonstraram grande sabedoria e que me estimularam, ajudando e apoiando em todos os sentidos para a concretização deste objetivo.

Aos professores *Francisco José Grandinetti e José Rui Camargo*, e a funcionária *Maria Aparecida de Moraes*, pela orientação e direcionamento que foram de grande importância na minha iniciação profissional; tenho muito orgulho de participar do quadro acadêmico da Universidade de Taubaté.

Também se faz necessário agradecer aos meus amigos *Mauro Yasumi Yamauti e Flavio Henrique do Nascimento Moreira*, que me apoiaram de forma fundamental para a idealização e conclusão desse trabalho, dispendendo todo tempo necessário, além de seus grandes conhecimentos técnicos.

À Universidade de Taubaté e aos funcionários que colaboraram para que esse trabalho pudesse ser concluído.

Este trabalho contou com apoio da seguinte entidade:

- UNITAU - Universidade de Taubaté – por meio de auxílio para docente da carreira do magistério superior.

SILVA NETO, A. M. **Modelagem e simulação das juntas de um manipulador robótico cilíndrico**. 2008. 83 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2008.

## RESUMO

O estudo de um modelo matemático completo, incluindo os servos atuadores, a dinâmica do corpo rígido e o planejamento e geração de trajetórias do manipulador robótico cilíndrico, é um indispensável ponto de partida para aplicações de simulação das juntas e controle de movimentos. As equações cinemáticas obtidas pelas técnicas da Matriz de Transformação Homogênea e Matriz de Transformação Inversa são a solução para a geração de trajetórias, as quais podem ser feitas no espaço cartesiano ou no espaço das juntas e também possibilitam gerar o volume de trabalho do manipulador, que é de grande interesse para a especificação de determinada configuração em aplicações ou tarefas específicas. As equações de movimento foram derivadas usando a formulação Lagrangiana para prever o comportamento do manipulador quanto à influência da geometria e os parâmetros de massa do manipulador.

**PALAVRAS-CHAVE:** modelagem cinemática, modelagem dinâmica, simulação de robôs



SILVA NETO, A. M. **Modelling and simulation of a manipulator's joints cylindrical robotic.** 2008. 83 f. Dissertation (Master's degree in Mechanical Engineering) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2008.

### **ABSTRACT**

The study of a complete mathematical model including the servos actuators, the dynamics of the body rigid and the planning and generation of the manipulator's cylindrical robotic trajectories is an indispensable starting point for applications of simulation of the joints and control of movements. The Kinematic equations obtained by the techniques Homogeneous Transformation Matrix and Inverse Transformation Matrix make is the solution for generation of trajectories that can be done in the cartesian space or in the space of the joints and they also make possible to generate the volume of the manipulator's work that is of great interest for specification certain configuration in applications or specific tasks. The movement equations were derived using the formulation Lagrangiana to predict the manipulator's behavior as for the influence of the geometry and the parameters of the manipulator's mass.

**KEYWORDS:** kinematic modelling, dynamic modelling, simulation in robotics

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Manipulador robótico - ROBOTAU .....	2
FIGURA 2 – Dimensões do projeto mecânico (mm).....	6
FIGURA 3 – Conjunto do sistema de transmissão da base do manipulador robótico .....	7
FIGURA 4 – Fixação dos eixos coordenados .....	12
FIGURA 5 – Pontos de teste .....	18
FIGURA 6 – Validação da cinemática inversa .....	19
FIGURA 7 – Volume de trabalho (configuração cilíndrica).....	20
FIGURA 8 – Trajetória tipo segmento linear mesclado com segmentos parabólicos .....	21
FIGURA 9 – Simulação trajetória reta .....	24
FIGURA 10 – Simulação espaço cartesiano trajetória reta - variável $X(t)$ .....	24
FIGURA 11 – Simulação espaço cartesiano trajetória reta - variável $Y(t)$ .....	25
FIGURA 12 – Simulação espaço das juntas trajetória reta - variáveis $\theta(t)$ , $r(t)$ , $z(t)$ .....	25
FIGURA 13 – Simulação trajetória arco de circunferência .....	26
FIGURA 14 – Simulação espaço cartesiano trajetória arco de circunferência - variável $X(t)$ .....	26
FIGURA 15 – Simulação espaço cartesiano trajetória arco de circunferência - variável $Y(t)$ .....	27
FIGURA 16 – Simulação espaço das juntas arco de circunferência - variáveis $\theta(t)$ , $r(t)$ , $z(t)$ .....	27
FIGURA 17 – Modelo do servomotor CC .....	28
FIGURA 18 – Modelo da transmissão da base .....	31
FIGURA 19 – Modelo da transmissão do posicionamento do elo horizontal .....	34
FIGURA 20 – Modelo da transmissão do posicionamento do elo vertical .....	36
FIGURA 21 – Diagrama de blocos das equações dinâmicas do elo vertical.....	43
FIGURA 22 – Resposta do elo vertical (sistema instável) .....	44

FIGURA 23 – Diagrama de blocos do elo vertical com alocação de pólos.....	49
FIGURA 24 – Resposta do elo vertical (sistema estável).....	50
FIGURA 25 – Diagrama de blocos do elo vertical com ação de controle proporcional .....	52
FIGURA 26 – Resposta do elo vertical (sistema estabilizado + controle proporcional) .....	52

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Parâmetros dos motores MOOG.....	8
TABELA 2 – Parâmetros das transmissões .....	8
TABELA 3 – Dimensões das polias.....	9
TABELA 4 – Eixos coordenados .....	12
TABELA 5 – Parâmetros D-H .....	12
TABELA 6 – Análise da variável .....	17
TABELA 7 – Pólos das equações na forma original.....	44
TABELA 8 – Pólos das equações reduzidas .....	47
TABELA 9 – Pólos estáveis (Alocação de Pólos) .....	51

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CC	- Corrente Contínua
CTC	- Controle Torque Computado
D-H	- Denavit-Hartenberg
GDL	- Grau de Liberdade
PID	- Proporcional Integral Derivativo
RRP	- Rotativa Rotativa Prismática
SCARA	- Selective Compliance Assembly Robot Arm

## LISTA DE SÍMBOLOS

${}^0T_3$	matriz de transformação homogênea entre o elo 0 e o elo 3	
$\theta(t)$	coordenada generalizada (rotação da base)	$[rad]$
$r(t)$	coordenada generalizada (translação do elo horizontal)	$[m]$
$z(t)$	coordenada generalizada (translação do elo vertical)	$[m]$
$n$	velocidade máxima	$[rpm]$
$J_m$	inércia do motor	$[kg \cdot cm^2]$
$K_t$	constante de torque do motor	$\left[ \frac{Nm}{A_{rms}} \right]$
$i_a$	corrente na armadura do motor	$[A]$
$R_a$	resistência na armadura do motor	$[Ohm]$
$L_a$	indutância na armadura do motor	$[mH]$
$J_p$	momento de inércia das polias	$[kg \cdot cm^2]$
$c_1, c_2, c_3$	coeficiente de amortecimento	$\left[ \frac{N \cdot m \cdot s^2}{rad^2} \right]$
$K_{T1}, K_{T2}$	constante de rigidez da mola torcional	$\left[ \frac{N \cdot m}{rad} \right]$
$r_p$	raio da polia	$[m]$
$i$	relação de transmissão	
$\alpha_i$	ângulo de torção	$[rad]$
$a_i$	comprimento do elo	$[m]$
$\theta_i$	ângulo de rotação (variável de junta revoluta)	$[rad]$
$d_i$	deslocamento de translação (variável de junta prismática)	$[m]$
$D$	offset	$[m]$
$0X_0Y_0Z_0$	sistema de eixos fixos (referencial inercial)	
$0X_1Y_1Z_1$	sistema de eixos móveis	
$0X_2Y_2Z_2$	sistema de eixos móveis	
$0X_3Y_3Z_3$	sistema de eixos móveis	
$ROT$	operador rotacional	
$TRANS$	operador translacional	

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	1
1.1 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO	3
1.2 OBJETIVO DO TRABALHO	3
1.3 RELEVÂNCIA DO TEMA	3
1.4 REVISÃO DA LITERATURA	4
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO	5
<b>2 MODELO REAL DO MANIPULADOR ROBÓTICO</b>	6
2.1 PROJETO MECÂNICO	6
2.2 ACIONAMENTO E TRANSMISSÕES	7
2.2.1 Características dos motores	8
2.2.2 Características das transmissões	8
<b>3 MODELAGEM MATEMÁTICA</b>	10
3.1 CINEMÁTICA DIRETA	10
3.1.1 Notação de Denavit-Hartenberg	12
3.1.2 Regras para fixação dos eixos coordenados	12
3.2 CINEMÁTICA INVERSA	14
3.3 PLANEJAMENTO E GERAÇÃO DE TRAJETÓRIAS	19
3.3.1 Determinação de funções interpoladoras para o planejamento de trajetórias	20
3.3.2 Segmentos lineares mesclados com segmentos parabólicos	21
3.3.3 Planejamento de trajetória: reta	24
3.3.4 Planejamento de trajetória: arco de circunferência	26
3.4 MODELO DINÂMICO DO ACIONAMENTO	28
3.5 MODELO DINÂMICO DAS TRANSMISSÕES	30
3.5.1 Modelo da transmissão do posicionador da base do manipulador	30
3.5.2 Modelo da transmissão do posicionador horizontal do manipulador	33
3.5.3 Modelo da transmissão do posicionador vertical do manipulador	36
3.6 MODELO DINÂMICO DE CORPO RÍGIDO	38
3.6.1 Torque desenvolvido na base do manipulador	38

3.6.2 Força desenvolvida no elo horizontal do manipulador .....	39
3.6.3 Força desenvolvida no elo vertical do manipulador.....	39
3.7 MODELO DINÂMICO COMPLETO .....	41
3.8 SIMULAÇÃO DINÂMICA.....	42
3.8.1 Diagrama de blocos do elo vertical .....	42
3.9 PROJETO DE CONTROLE .....	45
3.9 1 Equações na forma de estado .....	46
3.9 2 Sistema em malha fechada.....	48
<b>4 CONCLUSÃO.....</b>	<b>53</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>55</b>
<b>APÊNDICE A – Parâmetros de Massa do Corpo Rígido.....</b>	<b>58</b>
<b>APÊNDICE B – Programa Maple 8 - Pontos de Teste .....</b>	<b>59</b>
<b>APÊNDICE C – Programa MatLab - Volume de Trabalho .....</b>	<b>62</b>
<b>APÊNDICE D – Programa MatLab - Cinemática Inversa .....</b>	<b>64</b>
<b>APÊNDICE E – Programa MatLab - Trajetória: Reta .....</b>	<b>67</b>
<b>APÊNDICE F – Programa MatLab - Trajetória: Arco de Circunferência .....</b>	<b>72</b>
<b>APÊNDICE G – Programa MatLab - Projeto de Controle .....</b>	<b>77</b>
<b>ANEXO A – Especificação Técnica do Servomotor Moog - G413 .....</b>	<b>80</b>
<b>ANEXO B – Especificação Técnica do Servomotor Moog - G414.....</b>	<b>82</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A robótica é uma área multidisciplinar, altamente ativa, que busca o desenvolvimento de dispositivos de integração de técnicas e algoritmos para a criação de robôs, envolvendo áreas como engenharia mecânica e elétrica, inteligência artificial, entre outras, com um perfeito equilíbrio, necessário para o projeto de surpreendentes inovações.

A robótica atua em várias áreas de nossa sociedade, tais como desarmadores de bomba, robôs cirúrgicos, e além dos “robôs operários”, que se instalaram nas fábricas, sendo responsáveis pela "segunda Revolução Industrial", com o surgimento da produção em série, com maior produtividade e qualidade.

Este trabalho visa explicar sobre a modelagem e simulação de juntas de um robô com elos rígidos, utilizando-se do projeto experimental - ROBOTAU, que pertence ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Taubaté, pensando em futuras aplicações que requeiram repetibilidade, resolução e acuidade no movimento do manipulador que implique elevada confiabilidade nos modelos dinâmicos.

A maioria dos robôs industriais é acionado por servomotores. Neste caso, as entradas são voltagem na armadura do motor, acionando as juntas, e as saídas são posições nas juntas.

A simulação computacional de um robô manipulador determina a eficácia de sua operação e eficiência das leis de controle. Isso é especialmente útil para estudantes que precisam fixar os conceitos fundamentais envolvendo relativamente um sistema complexo, como um manipulador robótico. Muitos robôs industriais são controlados assumindo que as equações do modelo são lineares e desacopladas. Contudo, é observado que eles sofrem significativamente vibrações em baixa velocidade Fu, Gonzalez e Lee (1987). Esse é um indicativo das deficiências da simplificação dos modelos.

O manipulador possui uma base rotativa, sobre a qual são montados dois posicionadores lineares perpendiculares entre si, um associado a um movimento de translação vertical ( $z$ ) e um associado a um movimento de translação radial ( $r$ ). Cada movimento é acionado por servomotores sem-escovas, através de polias e correias

dentadas. O acionamento da base possui uma relação de transmissão, dividido em dois estágios que utilizam correias dentadas de mesmo tamanho, largura e material. Os elementos de acionamento e transmissão também serão levados em consideração para garantir maior exatidão do modelo dinâmico.

Para a modelagem deste trabalho foram feitas as seguintes considerações:

1. Não serão consideradas deflexões nas correias;
2. As caixas de transmissão serão consideradas inicialmente ideais, definidas pela relação de transmissão;
3. Não serão considerados impactos, folgas, e deformações nas polias e eixos;
4. O atrito nos mancais será modelado como atrito viscoso;
5. Devido às considerações 3 e 4, fica determinado que os fenômenos que ocorrem na caixa de transmissão são lineares.
6. Para identificação e simplificação dos sistemas de equações, as mesmas terão as seguintes nomenclaturas adotadas: Junta 1-Junta da base (índice  $b$ ), Junta 2-Junta do elo horizontal (índice  $h$ ) e Junta 3-Junta do elo vertical (índice  $v$ ).

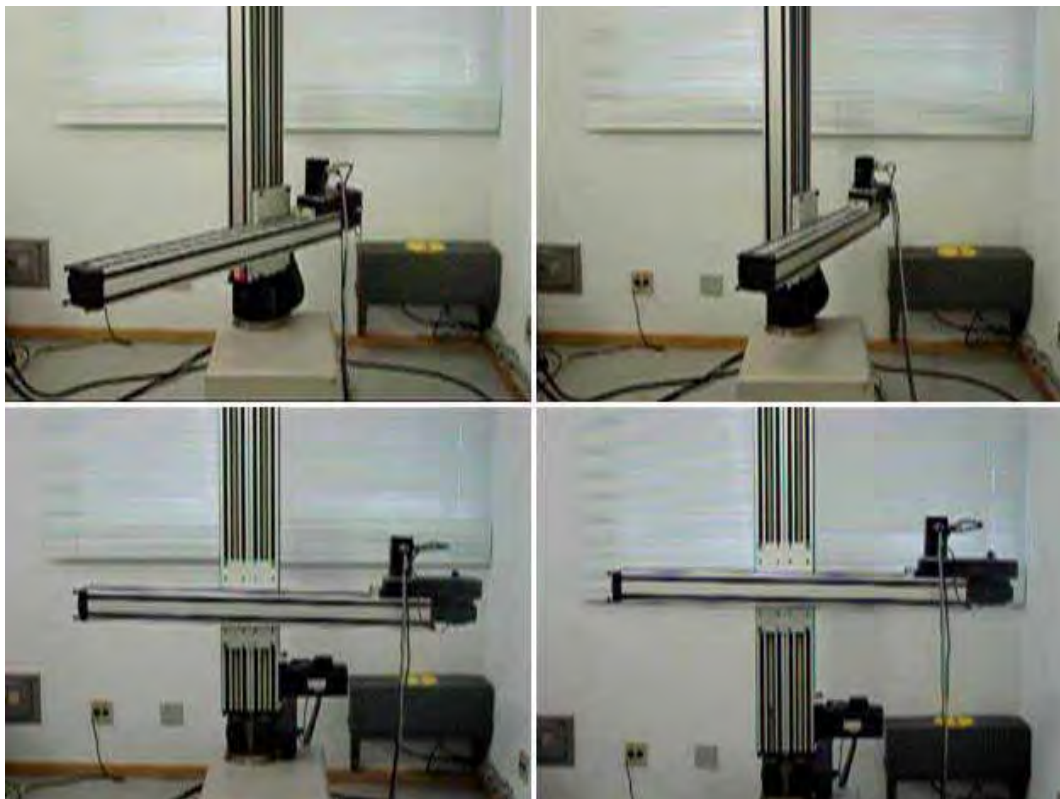


Figura 1 - Manipulador Robótico - ROBOTAU

O robô usado para a simulação foi projetado empregando servomotores comerciais e perfil de alumínio estrutural. Isso permite determinar, com facilidade, todos os parâmetros necessários do manipulador. As equações dinâmicas foram desenvolvidas via formulação Lagrange-Euler e usadas no espaço de estados, base para simulação do programa.

## 1.1 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

Na atualidade, há uma crescente necessidade de se realizar tarefas com eficiência e precisão em lugares onde a presença humana se torna difícil, arriscada e até mesmo impossível. Para realizar essas tarefas, se faz cada vez mais necessário diminuir a possibilidade de erros, e quando um dispositivo robótico realiza determinada atividade, garante maior proximidade à capacidade humana.

## 1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

O principal objetivo deste trabalho é modelar e simular as juntas de um manipulador de três GDL ( $\theta$ ,  $r$ ,  $z$ ), com volume de trabalho cilíndrico representado na Figura 1. Também são descritas e aplicadas técnicas de modelagem de sistemas com a finalidade de obter um modelo dinâmico adequado.

## 1.3 RELEVÂNCIA DO TEMA

Esse trabalho visa aplicar técnicas de modelagem e simulação de sistema com o propósito dos modelos serem utilizados em aplicações de controle e simulação de movimentos e que venham contribuir para a *performance* profissional nas tarefas mais complexas de um projeto como esse, além de fornecer informações exclusivas para a programação de robôs.

## 1.4 REVISÃO DA LITERATURA

Para atingir os objetivos propostos neste trabalho, será necessário integrar um conjunto de temas que dizem respeito às técnicas de modelagem e controle de sistemas robóticos que o embasará de forma sintética sobre as atividades de pesquisas, as quais foram e estão sendo desenvolvidas e aplicadas na comunidade científica mundial. Assim, os artigos que se destacam e foram utilizados como referência neste trabalho são:

Taylan Das e Canan Dulger (2005), apresentam um modelo matemático completo de um manipulador robótico de configuração SCARA e também a simulação dinâmica incluindo os servo-atuadores. As equações de movimento foram derivadas da formulação Lagrangiana. O desempenho do manipulador é comparado entre a simulação numérica e dados experimentais.

Botasso, Croce, Ghezzi e Faure (2004), investigam a solução de problemas da dinâmica de multicorpos entendidos como problemas de controle ótimo para sistemas dinâmicos governados por equações diferenciais algébricas.

Kövecses, Piedbœuf e Lange (2003), fazem uma análise dinâmica, que é elemento básico para o projeto mecânico e implementação de leis de controle, tendo como principal foco sistemas com equações não-lineares e suas condições de restrição (como por exemplo: robôs paralelos e robôs com sistemas de cadeia fechada). A abordagem também pode ser aplicada em sistemas menos complexos.

Iñigo e Morton (1991), descrevem o projeto, a análise dinâmica e a simulação de um manipulador robótico industrial. A modelagem dinâmica é determinada em termos da formulação de Lagrange-Euler. As técnicas de controle PID (Proporcional-Integral-Derivativo) e Torque-Computado são utilizadas para determinar a exatidão desejada no movimento.

Li (1989), desenvolve uma nova formulação Lagrangiana da dinâmica de manipuladores robóticos. A formulação resulta em uma boa forma de estruturar as equações de movimento para os manipuladores robóticos. As equações são um conjunto explícito de segunda ordem, com altíssima não-linearidade e acoplamento das equações diferenciais, as quais podem ser utilizadas em um projeto de um sistema

de controle ou simulação da dinâmica e um algoritmo computacional das forças e torques generalizadas das juntas. O número de operações matemáticas da formulação é tão pouco que é possível realizar a computação da dinâmica Lagrangiana para um manipulador robótico em tempo real, em um microcomputador.

Spong (1987), estuda a modelagem e controle de manipuladores robóticos com juntas elásticas. O modelo é derivado por duas suposições que o reduzem a um modelo rígido habitual encontrado na literatura. O resultado obtido é mais significativo do que modelos não-lineares, em relação ao projeto do controlador que tem sido usado para modelar manipuladores com juntas elásticas.

Good, Sweet e Strobel (1985), apresentam modelos analíticos e dados experimentais para mostrar as interações entre os acionamentos eletromecânicos, levando em consideração a compliância no acoplamento para com o ponto exato de acionamento do elo (junta).

A maior parte destes trabalhos citados possui uma conotação experimental que desperta amplo interesse, uma vez que resultados fundamentados colaboram para um maior entendimento da dinâmica dos sistemas envolvidos.

## 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

O Capítulo II, apresenta o protótipo experimental - ROBOTAU, pertencente à Universidade de Taubaté, destacando suas características e particularidades.

No Capítulo III, serão desenvolvidos os modelos matemáticos do robô em questão, a validação destes, a proposta de um projeto de controle e os resultados obtidos.

Finalmente, no Capítulo IV, as conclusões e possíveis trabalhos que poderão ser desenvolvidos.

## 2 MODELO REAL DO MANIPULADOR ROBÓTICO

### 2.1 PROJETO MECÂNICO

O modelo real do robô usado para simulação é um manipulador robótico de configuração cilíndrica (RRP). Para garantir maior simplicidade, somente são consideradas as três primeiras juntas (de posição). As demais juntas (de orientação) que podem acompanhar o pulso e o órgão terminal não contribuem de modo significativo para a dinâmica do braço do manipulador. O elo 1 é construído por dois posicionadores unidos paralelamente, um relação ao outro, e juntos possuem as dimensões  $(0,1 \times 0,2 \times 1,315)m$  e massa de  $46kg$ . O elo 2 tem dimensão  $(0,1 \times 0,1 \times 1,165)m$  e massa de  $21kg$ .

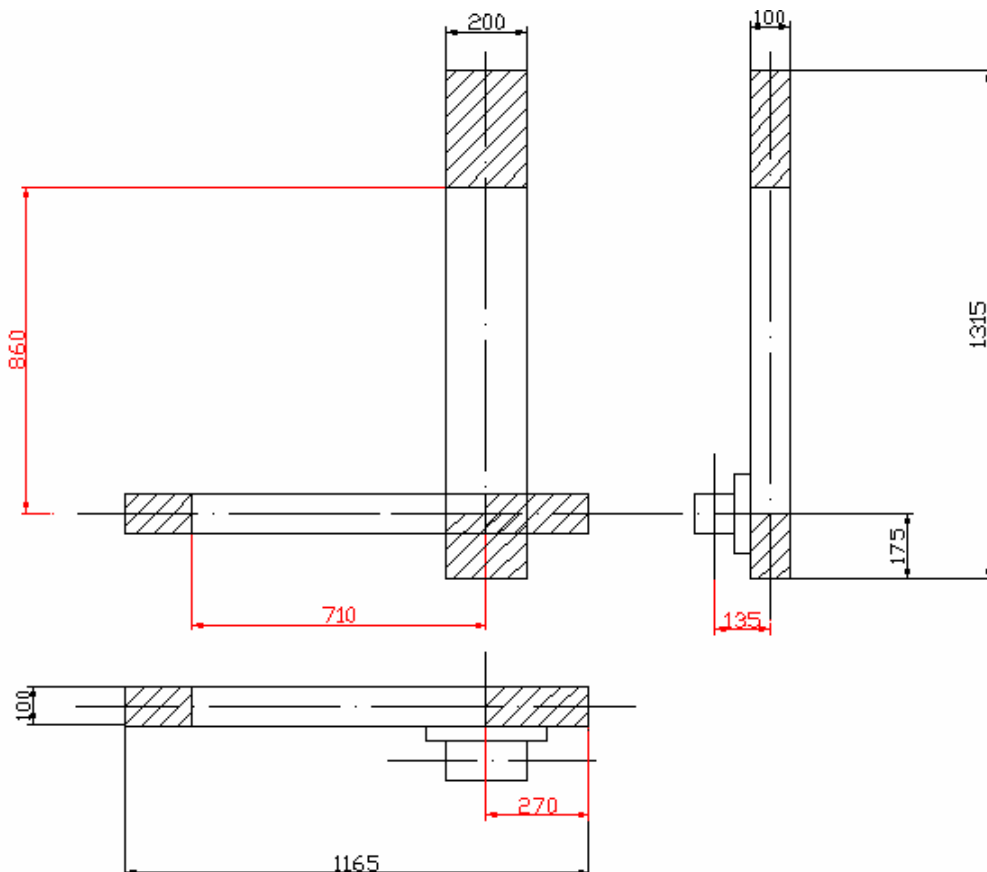


Figura 2 - Dimensões do projeto mecânico (mm)

É muito importante destacar o curso efetivo de cada junta prismática e o *offset* indicado na Figura 2, pois ambos irão determinar o volume de trabalho do manipulador.

## 2.2 ACIONAMENTO E TRANSMISSÕES

Como já mencionado, os servomotores acionam cada uma das juntas através de uma transmissão por correias dentadas, como mostra a Figura 3.

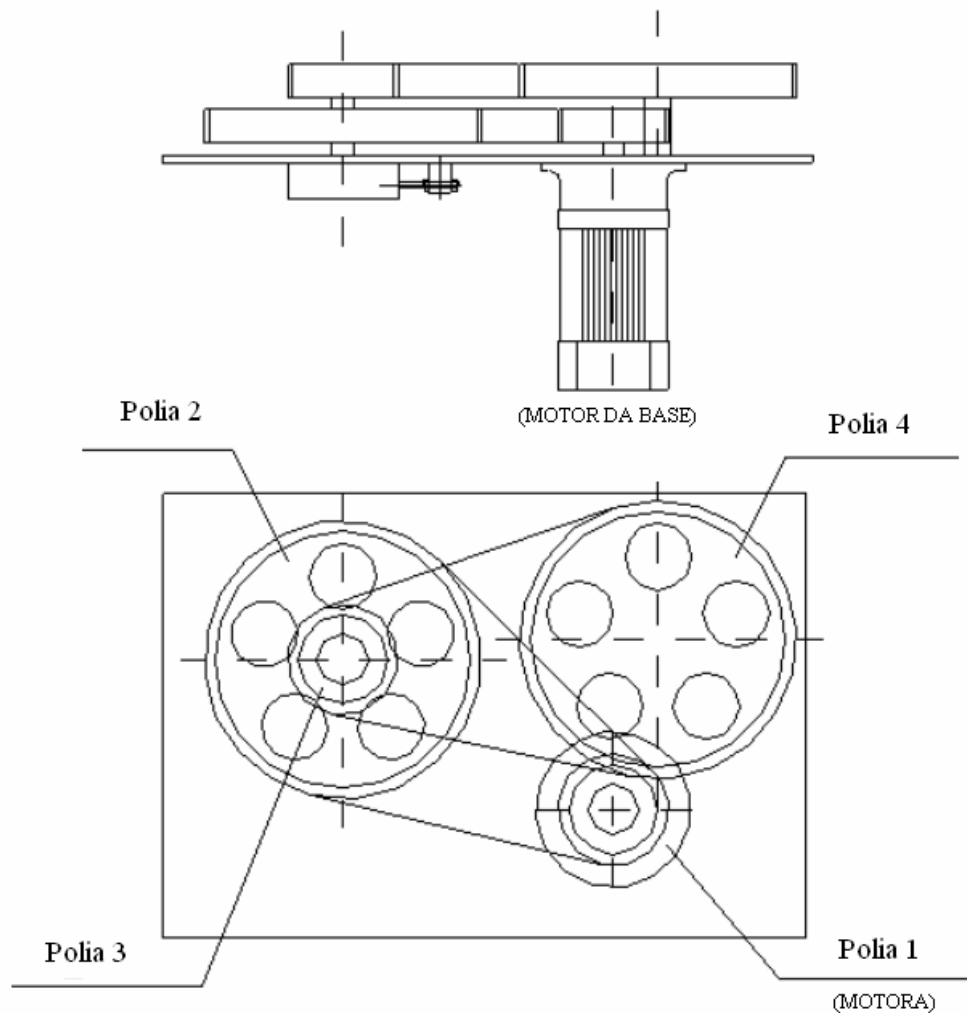


Figura 3 - Conjunto do sistema de transmissão da base do manipulador robótico

### 2.2.1 Características dos motores

A Tabela 1 apresenta os parâmetros dos motores para cada acionamento das juntas.

Tabela 1 - Parâmetros dos motores MOOG

<b>Parâmetros dos motores MOOG</b>										
<b>Junta</b>	<b>Modelo MOOG</b>	$n$	$I_0$	$M_0$	$Massa$	$J_m$	$K_t$	$R_a$	$L_a$	$c_m$
1	G414-603 A	4300	6,7	5,20	4,70	2,60	0,80	1,50	4,60	50
2	G414-414	5500	4,80	4,80	3,60	1,50	0,56	2,70	5,80	50
3	G413-404 A	8800	3,10	1,70	2,00	0,39	0,53	4,90	8,50	50

### 2.2.2 Características das transmissões

A Tabela 2 apresenta os parâmetros de massa, amortecimento e rigidez, para cada uma das juntas.

Tabela 2 - Parâmetros das transmissões

<b>Parâmetros das transmissões</b>							
<b>Junta</b>	$J_{p1}$	$J_{p2}$	$J_{p3}$	$J_{p4}$	$c_1 = c_2 = c_3$	$K_{T1}$	$K_{T2}$
1	0,001	0,010	0,001	0,010	0,5	10000	10000
2	0,001	0,015	0,001	0,001	0,5	10000	20000
3	0,001	0,015	0,001	0,001	0,5	10000	20000



A Tabela 3 apresenta os raios das polias para cada uma das juntas e suas respectivas relações de transmissão.

Tabela 3 - Dimensões das polias

<b>Dimensões das polias</b>					
<b>Junta</b>	<b><math>i</math></b>	<b><math>r_{p1}</math></b>	<b><math>r_{p2}</math></b>	<b><math>r_{p3}</math></b>	<b><math>r_{p4}</math></b>
1	36	0,0210	0,1270	0,0210	0,1270
2	3	0,0240	0,0725	0,0230	0,0230
3	3	0,0240	0,0725	0,0230	0,0230

### 3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo é descrito o modelo cinemático e dinâmico. Na modelagem cinemática, a notação utilizada é a notação de Denavit-Hartenberg, que relaciona um elo separando um par sucessivo de juntas entre um par de elos adjacentes, utilizando um número mínimo de parâmetros D-H. Para a dinâmica do corpo rígido é utilizada a formulação Lagrangeana, que pretende descrever o comportamento do sistema dinâmico em termos de energia armazenada no sistema.

Para a determinação do modelo dinâmico completo do robô, o sistema é dividido em subsistemas, na seguinte seqüência:

- acionamento (servomotor CC);
- transmissões;
- corpo rígido do manipulador robótico;

#### 3.1 CINEMÁTICA DIRETA

Fornece a posição e a orientação do órgão terminal (*end-effector*) em relação ao sistema coordenado da base de um robô manipulador, em função das variáveis de juntas. A representação da cinemática direta é dada por uma matriz  $4 \times 4$ , denominada matriz de transformação homogênea, em robótica. O significado de cada elemento da matriz fica claramente expresso pela representação abaixo:

$${}^0T_n = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & P_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & 1 \times 1 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} \text{Matriz de} & \text{Vetor de} \\ \text{rotação} & \text{posição} \\ \hline \text{Transformação} & \text{Escala} \\ \text{de perspectiva} & \end{array} \right] \quad (1)$$

Os elementos desta matriz são calculados a partir dos parâmetros de D-H  $(\alpha_i, a_i, \theta_i, d_i)$ , associados a cada junta- $i$ , da cadeia de elos do manipulador Fu, Gonzalez e Lee (1982). Esses parâmetros são essenciais para o cálculo da matriz de

transformação entre um determinado sistema móvel e outro sistema fixo Paul (1983). A escolha dos sistemas coordenados, descritos na Tabela 4, utilizados para determinar o movimento de um manipulador é feita de forma que facilite o estudo e as aplicações computacionais. Para a modelagem cinemática do manipulador são utilizados os seguintes sistemas de eixos coordenados, esquematizados na Figura 4.

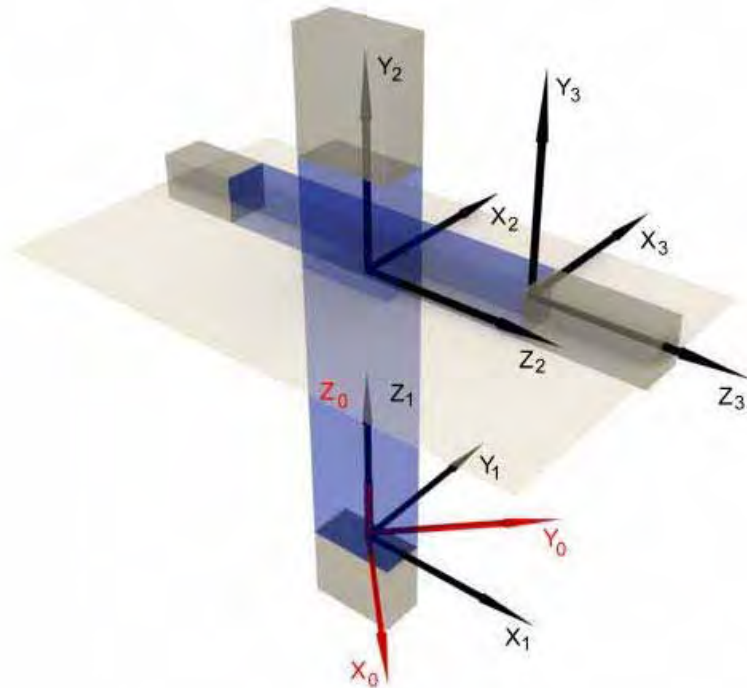


Figura 4 - Fixação dos eixos coordenados

Tabela 4 - Eixos coordenados

<b>Eixos coordenados</b>	
$0X_0Y_0Z_0$	Sistema inercial localizado na base rotativa (rotação de $\theta_1$ , em torno de $Z_0$ );
$0X_1Y_1Z_1$	Sistema móvel fixado no posicionador vertical;
$0X_2Y_2Z_2$	Sistema móvel fixado no posicionador horizontal;
$0X_3Y_3Z_3$	Sistema móvel fixado na extremidade do posicionador horizontal

### 3.1.1 Notação de Denavit-Hartenberg

Descreve um elo separando um par sucessivo de juntas e o relacionamento cinemático entre um par de elos adjacentes, utilizando um número mínimo de parâmetros D-H.

### 3.1.2 Regras para fixação dos eixos coordenados

1. O eixo  $Z_{i-1}$  é definido ao longo do movimento da i-ésima junta;
2. O eixo  $X_i$  é normal  $Z_{i-1}$  apontando para fora dele;
3. O eixo  $Y_{i-1}$  completa o sistema de eixos através da regra da mão direita.

Os parâmetros de D-H associados a esses sistemas de eixos coordenados estão representados na Tabela 5, para o manipulador.

Tabela 5 - Parâmetros D-H

Parâmetros D-H					
Junta	Tipo	$\alpha_i$	$a_i$	$\theta_i$	$d_i$
1	Rotativa	0	0	$\theta_1$	0
2	Prismática	$90^\circ$	0	$90^\circ$	$d_2$
3	Prismática	0	$a_3$	0	$d_3$

A matriz de transformação de um elo do manipulador, com relação a outro, é dada pela matriz expressa como:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Assim, a matriz de transformação homogênea, que descreve o eixo fixado na extremidade do manipulador com relação ao referencial, é descrita pela expressão (3):

$${}^0T_3 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 = [ROT(\theta_1)] \cdot [TRANS(d_2)] \cdot [TRANS(d_3)] \quad (3)$$

${}^0T_3$  é a matriz entre o sistema de eixo 3 e o sistema de eixos da base inercial;

${}^2T_3$  é a matriz entre o sistema de eixo 3 e o sistema de eixos 2;

${}^1T_2$  é a matriz entre o sistema de eixo 2 e o sistema de eixos 1;

${}^0T_1$  é a matriz entre o sistema de eixo 1 e o sistema de eixos da base.

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos[\theta(t)] & -\sin[\theta(t)] & 0 & 0 \\ \sin[\theta(t)] & \cos[\theta(t)] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad d_2 = z(t); \quad (5)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & D \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad d_3 = r(t); \quad a_3 = D \quad (6)$$

Substituindo (4), (5) e (6) em (3), então:

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} -\text{sen}[\theta(t)] & 0 & \cos[\theta(t)] & r(t) \cdot \cos[\theta(t)] - D \cdot \text{sen}[\theta(t)] \\ \cos[\theta(t)] & 0 & \text{sen}[\theta(t)] & D \cdot \cos[\theta(t)] + r(t) \cdot \text{sen}[\theta(t)] \\ 0 & 1 & 0 & z(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$r(t)$  coordenada generalizada do movimento horizontal em função do tempo;

$z(t)$  coordenada generalizada do movimento vertical em função do tempo;

$\theta(t)$  coordenada generalizada do movimento da base em função do tempo;

$D$  é o *offset* do posicionador vertical.

Utilizando-se de uma representação simplificada aplicada em robótica para facilitar a implementação computacional, a matriz expressa (7) é escrita em (8).

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} -S\theta & 0 & C\theta & r \cdot C\theta - D \cdot S\theta \\ C\theta & 0 & S\theta & D \cdot C\theta + r \cdot S\theta \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

### 3.2 CINEMÁTICA INVERSA

A cinemática inversa é o conjunto de ângulos e/ou deslocamentos das juntas que propiciam posição e orientação específicas para o órgão terminal.

O método das matrizes de transformação inversa foi proposto por Paul (1981) e é usado nesta seção para encontrar a cinemática inversa do manipulador.

Utilizando a equação (8) da cinemática direta já conhecida, e também escrita (9):

$${}^0T_3 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \quad (9)$$

Pré-multiplicando-se sucessivamente pela inversa da matriz  ${}^{i-1}T_i$ ,  $i = 1, 2$ , obtêm-se duas equações matriciais.

Primeira interação:

$${}^0T_1^{-1} \cdot {}^1T_3 = {}^1T_3 \quad (10)$$

$${}^1T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & r \\ 1 & 0 & 0 & D \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Segunda interação:

$${}^1T_2^{-1} \cdot {}^0T_1^{-1} \cdot {}^1T_3 = {}^2T_3 \quad (12)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & D \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Paralelamente, fazendo também para um sistema coordenado que representa a rotação e a posição de ponto dado pertencente ao volume de trabalho do manipulador como:

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} nx & ox & ax & px \\ ny & oy & ay & py \\ nz & oz & az & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Primeira interação:

$${}^0T_1^{-1} \cdot {}^1T_3 = {}^1T_3 \quad (15)$$

$${}^1T_3 = \begin{bmatrix} C\theta.nx + S\theta.ny & C\theta.ox + S\theta.oy & C\theta.ax + S\theta.ay & C\theta.px + S\theta.py \\ -S\theta.nx + C\theta.ny & -S\theta.ox + C\theta.oy & -S\theta.ax + C\theta.ay & -S\theta.px + C\theta.py \\ nz & oz & az & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Segunda interação:

$${}^1T_2^{-1} \cdot {}^0T_1^{-1} \cdot {}^1T_3 = {}^2T_3 \quad (17)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} C\theta.nx + S\theta.ny & C\theta.ox + S\theta.oy & C\theta.ax + S\theta.ay & C\theta.px + S\theta.py - D \\ -nz & -oz & -az & -pz + z \\ -S\theta.nx + C\theta.ny & -S\theta.ox + C\theta.oy & -S\theta.ax + C\theta.ay & -S\theta.px + C\theta.py \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

O número de interações é o número de graus de liberdade do manipulador menos um.

Cada equação representa um conjunto de doze equações algébricas. Igualando as equações (11) e (16), o procedimento básico consiste em inspecionar cada conjunto, elemento por elemento, para encontrar a equação que será resolvida facilmente.

$$r = C\theta.px + S\theta.py \quad (19)$$

$$D = -S\theta.px + C\theta.py \quad (20)$$

$$z = pz \quad (21)$$

Determinando  $\theta(t)$ , o restante das variáveis pode ser calculado.



$$\theta 1(t) = \arctan \left( \frac{- \frac{\left( 2.D.py + 2.\sqrt{py^2.px^2 + px^4 - px^2.D^2} \right)py}{2.(py^2 + px^2)} + D}{px}, \frac{\left( 2.D.py + 2.\sqrt{py^2.px^2 + px^4 - px^2.D^2} \right)}{2.(py^2 + px^2)} \right) \quad (22)$$

$$\theta 2(t) = \arctan \left( \frac{- \frac{\left( 2.D.py - 2.\sqrt{py^2.px^2 + px^4 - px^2.D^2} \right)py}{2.(py^2 + px^2)} + D}{px}, \frac{\left( 2.D.py - 2.\sqrt{py^2.px^2 + px^4 - px^2.D^2} \right)}{2.(py^2 + px^2)} \right) \quad (23)$$

$$r(t) = C\theta.px + S\theta.py \quad (24)$$

$$z(t) = pz \quad (25)$$

É importante observar que:

Tabela 6 - Análise da variável

Análise da variável		
Quadrante	Função	Variável
I	$f(px, py)$	$\theta_1$
IV	$f(px, -py)$	$\theta_1$
II	$f(-px, py)$	$\theta_2$
III	$f(-px, -py)$	$\theta_2$

Atribuindo pontos de teste como dados de entrada, para os quatro quadrantes, e contidos no volume de trabalho do manipulador, pode-se validar a cinemática inversa comparando os ângulos de saídas da Figura 5, extraídos pelo software Auto-Cad 2000, e os ângulos de saída obtidos via software Maple-8 (Apêndice B).

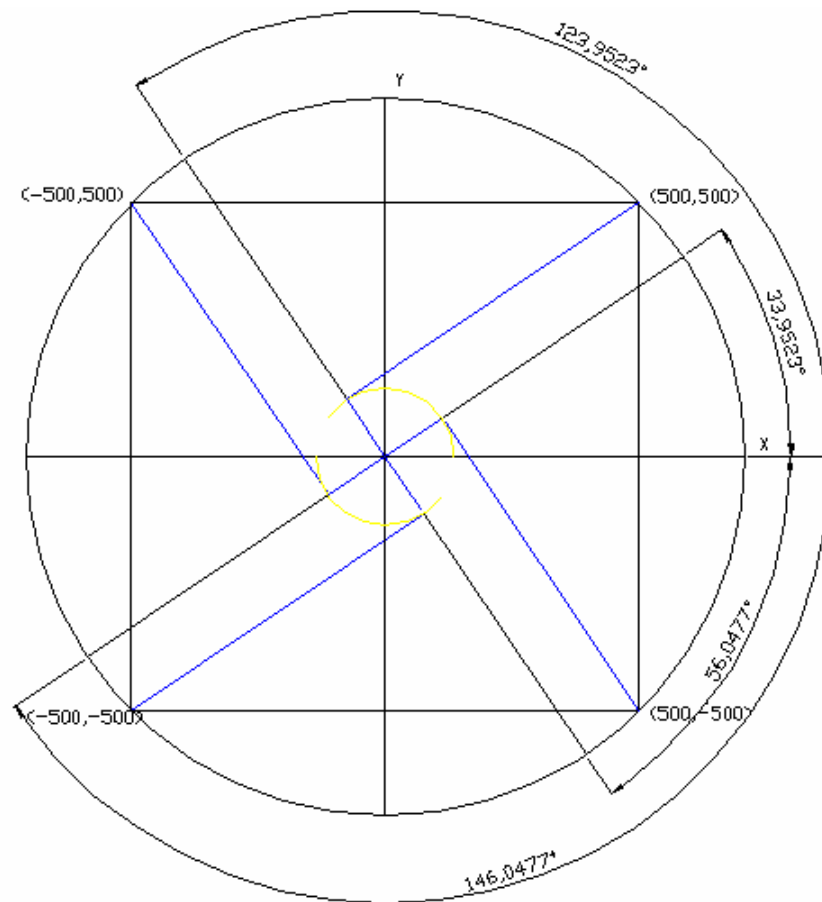


Figura 5 - Pontos de teste

Para validar as mudanças de equações segundo a Tabela 6, apresentada anteriormente, a simulação, utilizando como trajetória um arco de circunferência que passa pelo primeiro e segundo quadrantes na Figura 6, apresenta o comportamento cinemático do órgão terminal no espaço cartesiano.

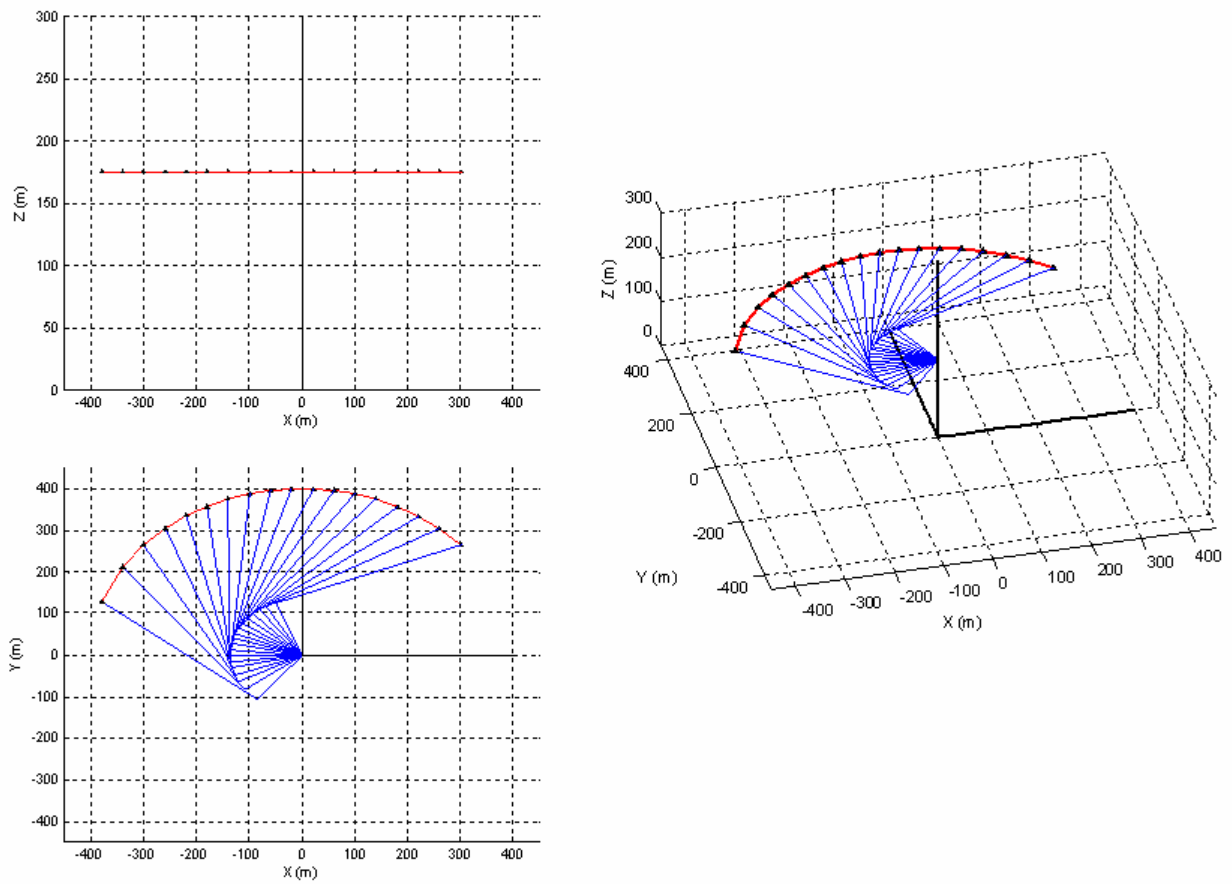


Figura 6 - Validação da cinemática inversa

### 3.3 PLANEJAMENTO E GERAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

O volume de trabalho, como mostra a Figura 7, é o conjunto de todos pontos nos quais o órgão terminal pode ser posicionado no espaço. Este volume é determinado pela geometria do robô (dimensões de seus elos e os limites de movimentos das juntas).

À medida em que se faz necessário efetuar movimentos no volume de trabalho, torna-se difícil representar, especificar e gerar os elementos que descrevem a trajetória desejada. Informações dessa natureza são entradas requisitadas pelo sistema de controle de movimento do manipulador.

Para o usuário do sistema robótico, é mais prático descrever uma trajetória desejada no espaço cartesiano, embora o controle de movimento possa ser efetivado no espaço das juntas.

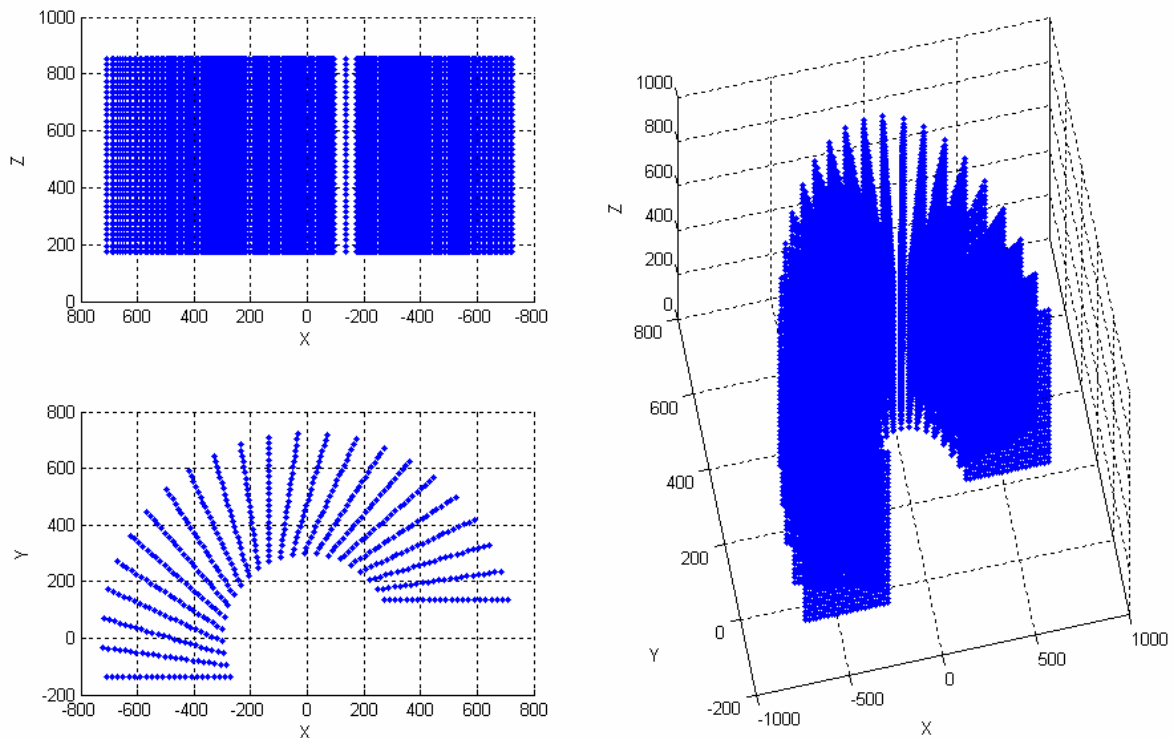


Figura 7 - Volume de trabalho (configuração cilíndrica)

O planejamento de trajetórias pode ser feito no espaço cartesiano ou no espaço das juntas. Como geralmente o controle de movimento é exercido sobre as variáveis das juntas, quando o planejamento é feito no espaço cartesiano, a cinemática inversa do mecanismo deve ser utilizada para geração do ponto-via correspondente. A cada instante da simulação, o gerador de trajetórias determina os *set-points*, os quais deverão ser as posições das juntas no próximo instante para o controlador de movimento. A principal importância para esta abordagem é que os pontos-via sejam suficientemente próximos entre si para garantir movimentos precisos.

### 3.3.1 Determinação de funções interpoladoras para o planejamento de trajetórias

Para determinar o tipo de função interpoladora, deve-se considerar o problema de encontrar funções temporais suaves que interpoem um conjunto especificado de valores de coordenada usado para descrever um trajeto no espaço cartesiano. Muitos

tipos de funções suaves podem ser utilizadas para este fim, mas o planejamento de trajetória de segmentos lineares mesclados com segmentos parabólicos é a solução mais indicada, pela simplicidade de sua implementação e baixa necessidade de capacidade computacional.

### 3.3.2 Segmentos lineares mesclados com segmentos parabólicos

Em determinadas aplicações que requerem velocidade constante do órgão terminal pode ser conveniente interpolar os pontos-via por segmentos lineares com segmentos parabólicos.

Considere a seguinte trajetória particular desejada, apresentada na Figura 8. São dados de entrada  $x_i$ ,  $x_f$ ,  $\dot{x}_i = \dot{x}_f = 0$  e especificado  $t_f = 16$  s ; em decorrência disso, tem-se a seguinte restrição a ser respeitada, apresentada na relação (26):

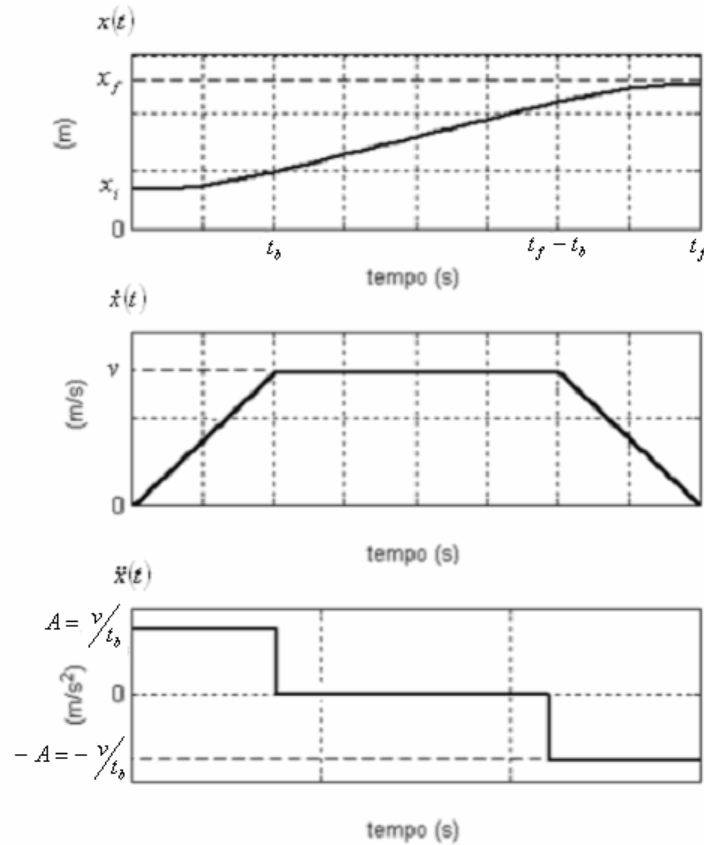


Figura 8 - Trajetória tipo segmento linear mesclado com segmentos parabólicos

$$\frac{x_f - x_i}{v} < t_f < \frac{2(x_f - x_i)}{v} \quad (26)$$

onde:

$x_i$  - posição inicial;

$x_f$  - posição final;

$v$  - velocidade constante durante a parte linear do trajeto entre as posições;

$t_f$  - duração total do trajeto entre as posições;

$A$  - aceleração constante durante a parte não linear do trajeto entre as posições.

Então, utilizando-se da divisão proporcional dos trechos nas equações (27), (28) e (29) :

$$t_1 = t_b = \frac{1}{4} t_f \quad (27)$$

$$t_2 = t_f - t_b = \frac{3}{4} t_f \quad (28)$$

$$t_3 = t_f \quad (29)$$

Obtendo também  $v$  e  $A$  :

$$v = \frac{2(x_f - x_i)}{t_3 + t_2 - t_1} \quad (30)$$

$$A = \frac{v}{t_b} \quad (31)$$

Os segmentos são definidos pelas expressões abaixo, para cada trecho.

Primeiro trecho:  $0 \leq t \leq t_1$ :

$$x(t) = x_i + \left(\frac{A}{2}\right) \cdot t^2 \quad (32)$$

$$\dot{x}(t) = A \cdot t \quad (33)$$

$$\ddot{x}(t) = A \quad (34)$$

Segundo trecho  $t_1 \leq t \leq t_2$ :

$$x(t) = \frac{x_f + x_i - v \cdot t_3}{2} + v \cdot t \quad (35)$$

$$\dot{x}(t) = v \quad (36)$$

$$\ddot{x}(t) = 0 \quad (37)$$

Terceiro trecho  $t_2 \leq t \leq t_3$ :

$$x(t) = x_f - \frac{A}{2} (t^2 + t_3^2) + A \cdot t_3 \cdot t \quad (38)$$

$$\dot{x}(t) = A \cdot t_3 - A \cdot t \quad (39)$$

$$\ddot{x}(t) = -A \quad (40)$$

### 3.3.3 Planejamento de trajetória: reta

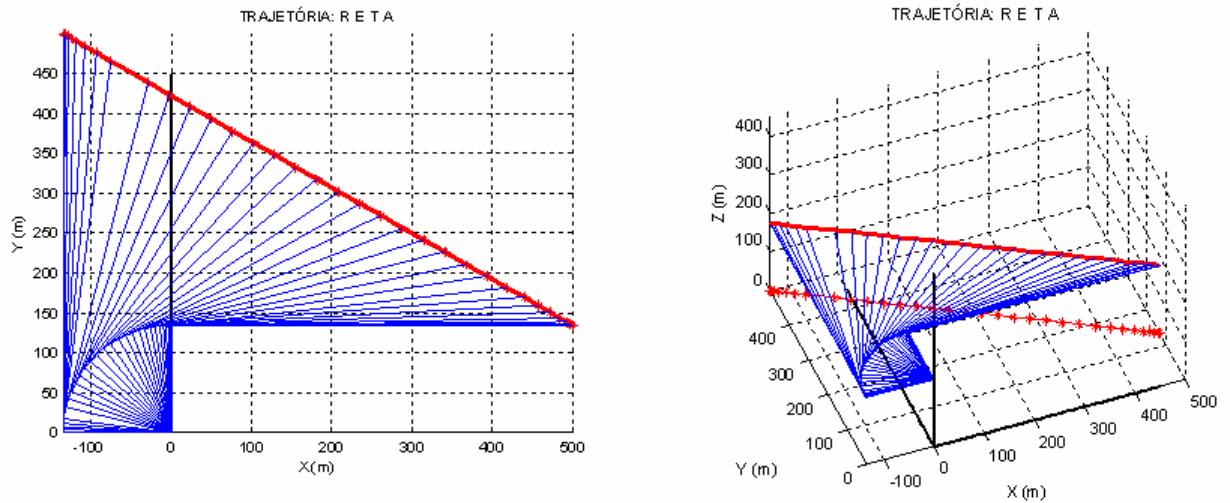


Figura 9 - Simulação trajetória reta

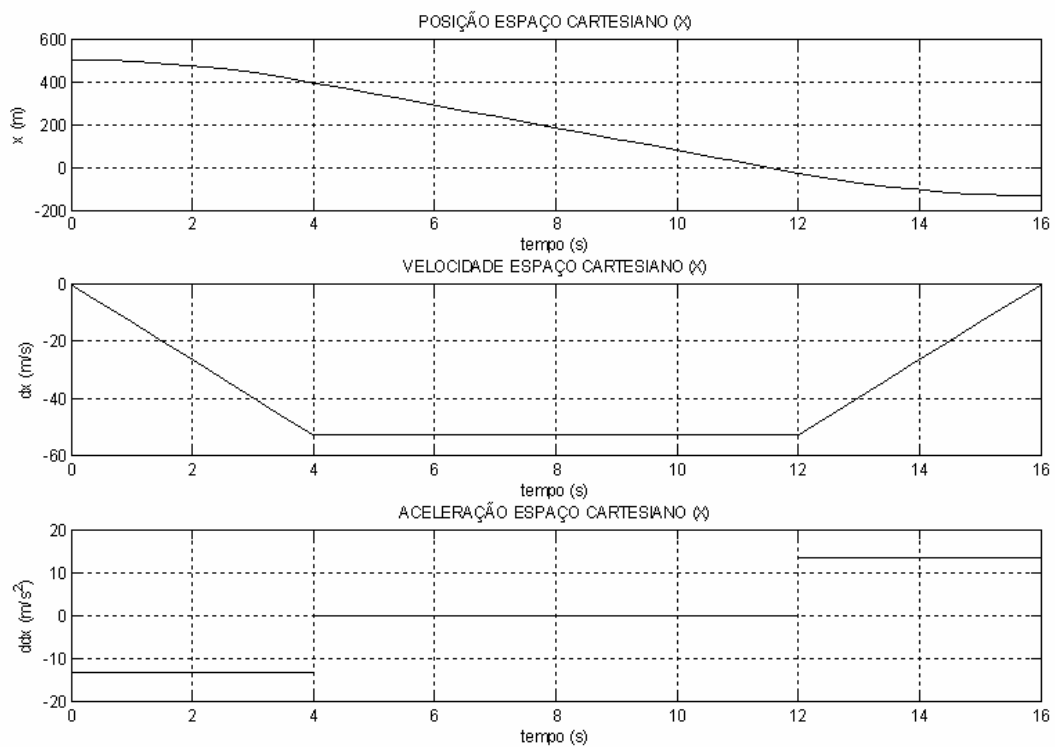


Figura 10 - Simulação espaço cartesiano trajetória reta - variável  $X(t)$



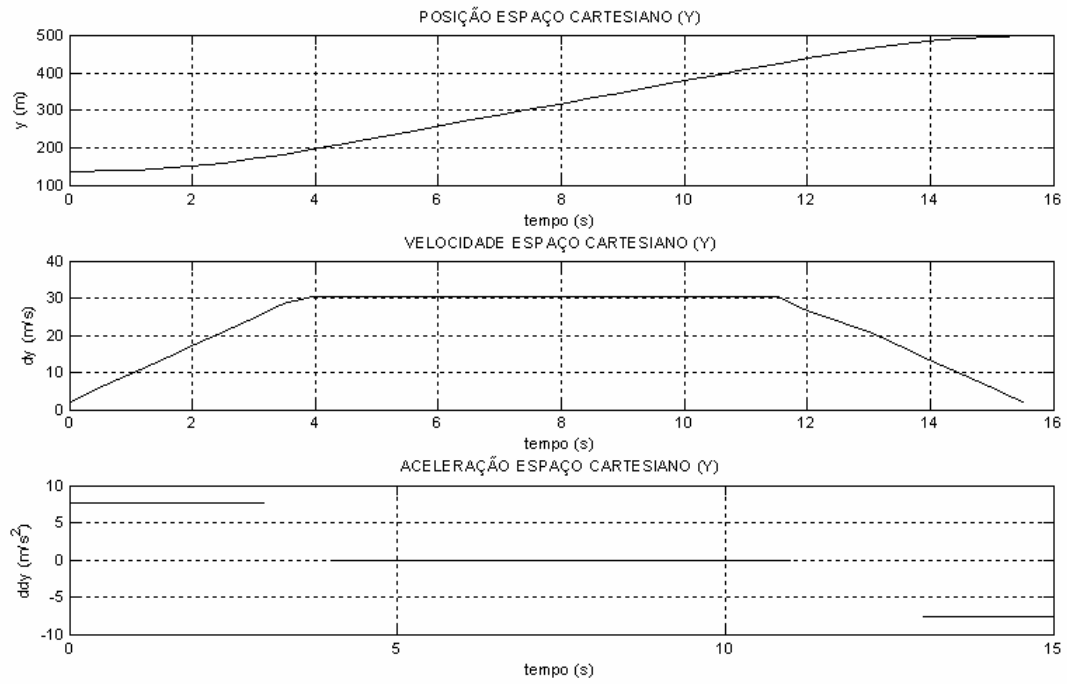


Figura 11 - Simulação espaço cartesiano trajetória reta - variável  $Y(t)$

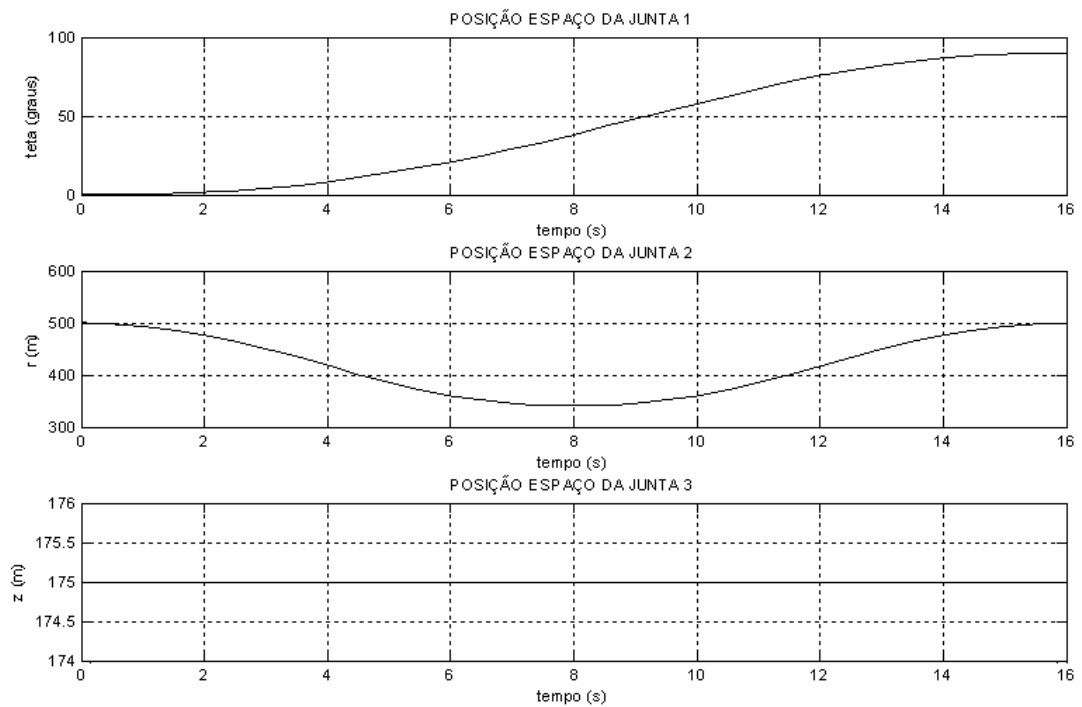


Figura 12 - Simulação espaço das juntas trajetória reta - variáveis  $\theta(t)$ ,  $r(t)$ ,  $z(t)$

### 3.3.4 Planejamento de trajetória: arco de circunferência

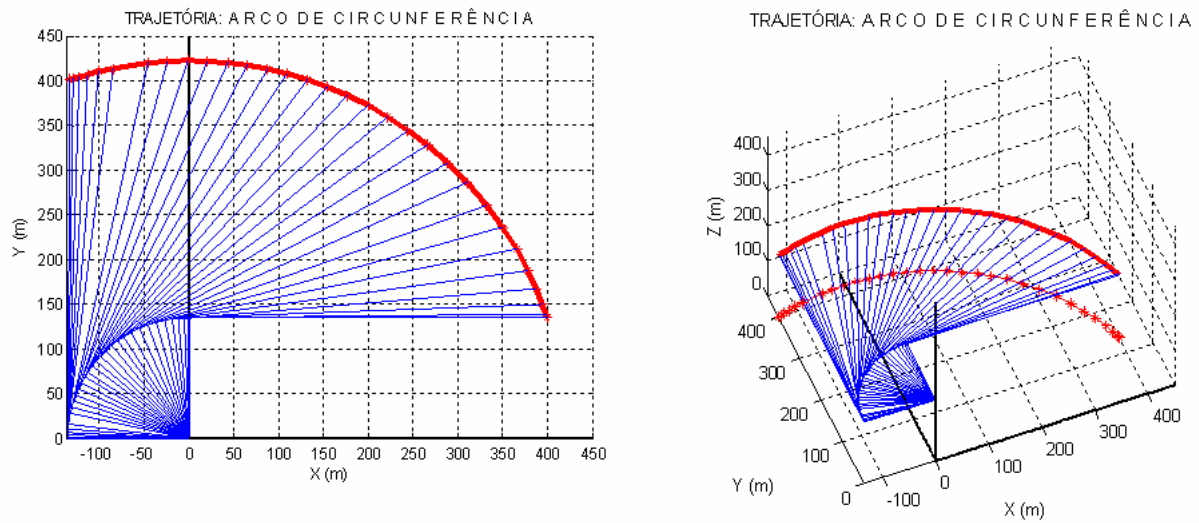


Figura 13 - Simulação trajetória arco de circunferência

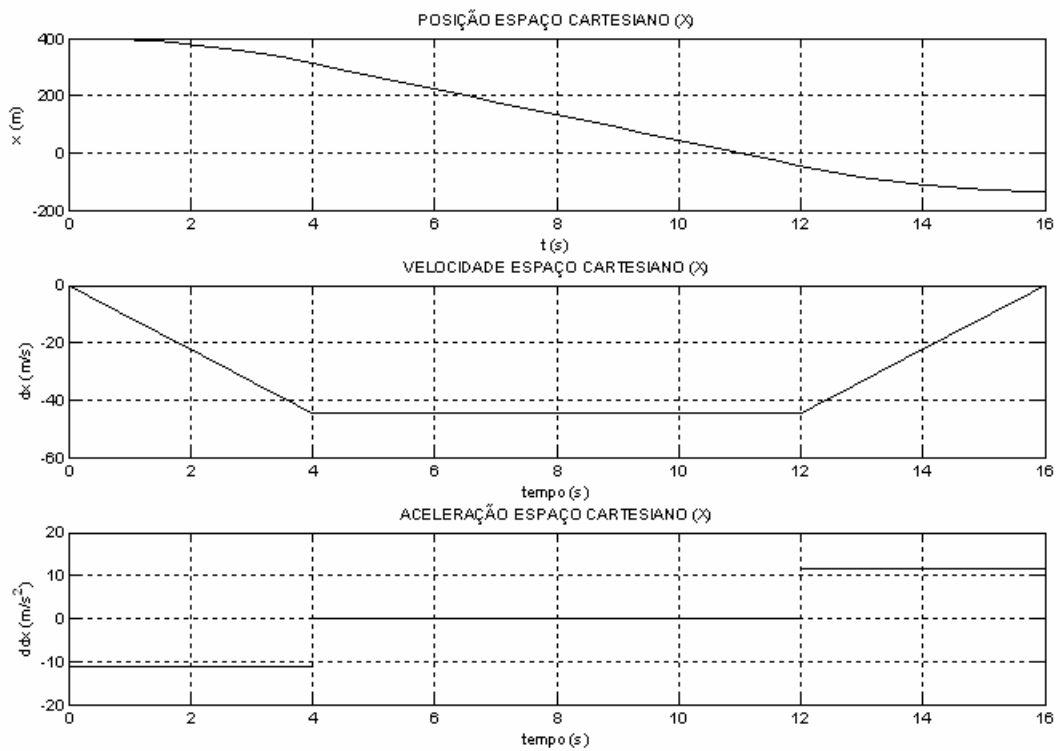


Figura 14 - Simulação espaço cartesiano trajetória arco de circunferência - variável  $X(t)$

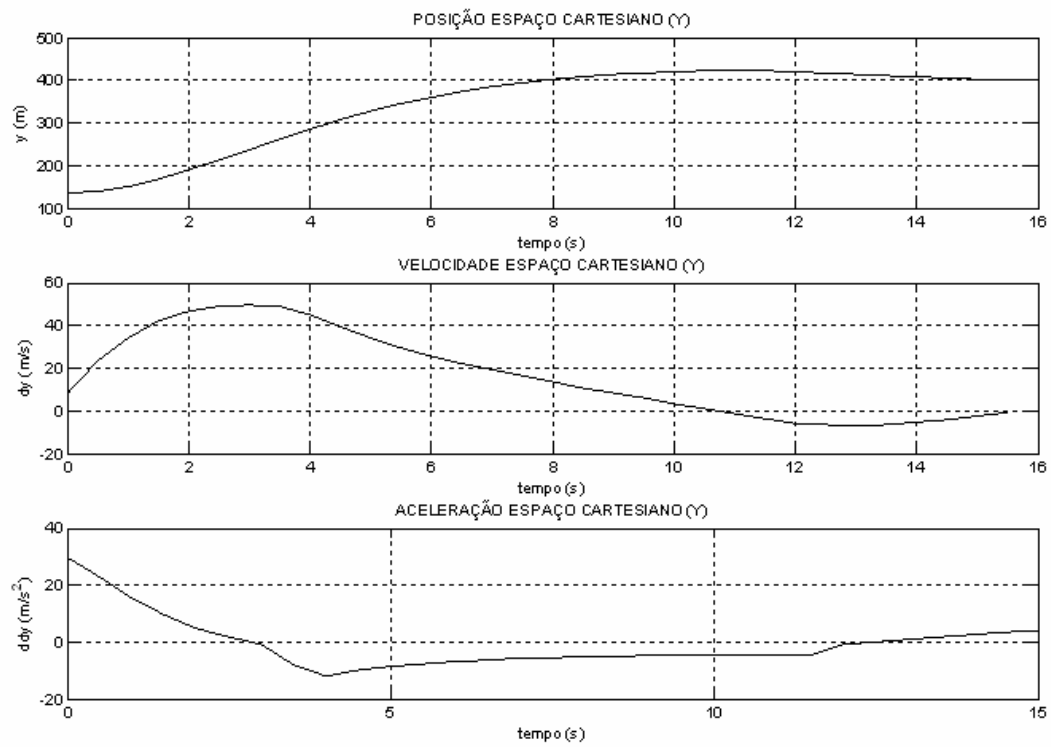


Figura 15 - Simulação espaço cartesiano trajetória arco de circunferência - variável  $Y(t)$

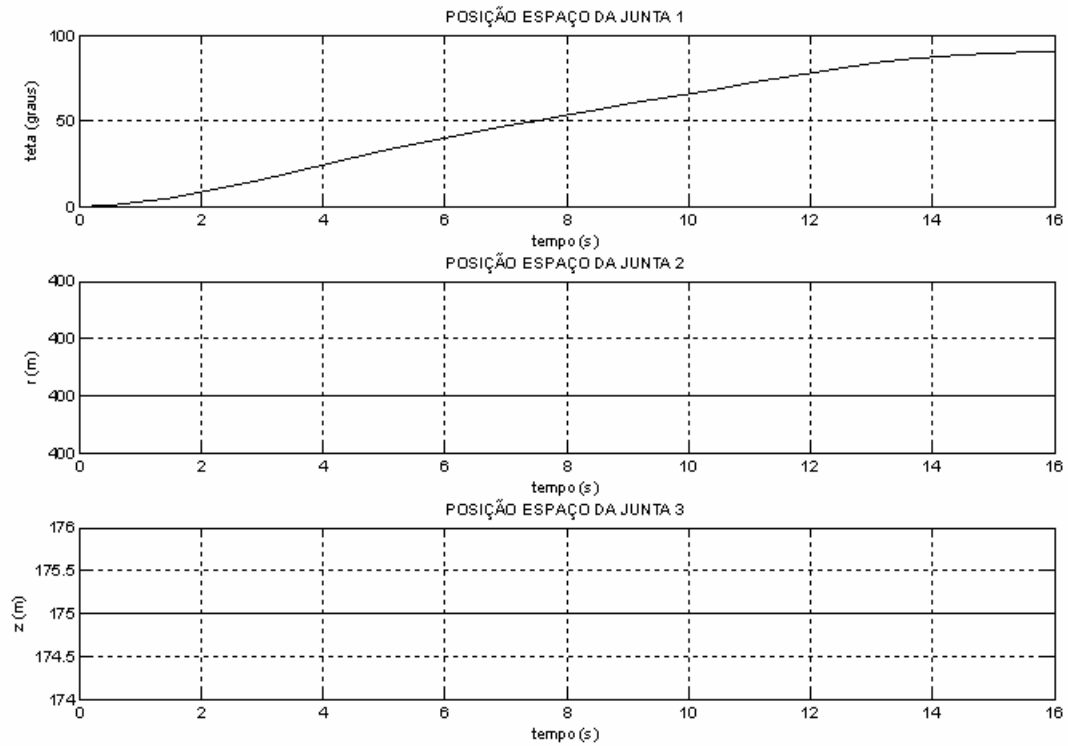


Figura 16 - Simulação espaço das juntas arco de circunferência - variáveis  $\theta(t)$ ,  $r(t)$ ,  $z(t)$

### 3.4 MODELO DINÂMICO DO ACIONAMENTO

O sistema de acionamento do manipulador ROBOTAU é constituído por servomotores de corrente contínua “*brushless*” e pode ser modelado a partir de Ogata (2003).

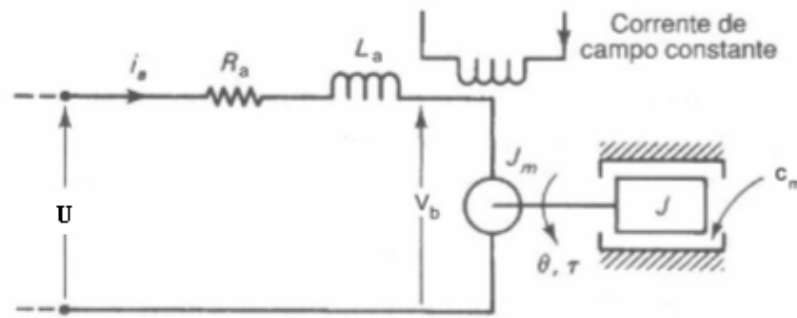


Figura 17 - Modelo do servomotor CC

Equações do servomotor apresentado na Figura 17:

$$\underbrace{L_a \dot{i}_a}_0 + R_a i_a + K_b \dot{\theta} = U \quad (41)$$

$$J_m \ddot{\theta}_m + c_m \dot{\theta}_m - K_t i_a = \tau_{\text{int}} \quad (42)$$

Isolando  $i_a$  em (40):

$$i_a = \frac{U}{R_a} - \frac{K_b}{R_a} \dot{\theta} \quad (43)$$

Substituindo (43) em (42) temos:

$$J_m \ddot{\theta} + \left( c_m + \frac{K_t K_b}{R_a} \right) \dot{\theta} - \frac{K_t}{R_a} U = \tau_{\text{int}} \quad (44)$$

Considerando o elo-1 do manipulador, pode-se representar a expressão de torque do motor como em (44) que fornece o torque de excitação da base, em termos da tensão de armadura do servomotor correspondente, onde:

$U$  - sinal de entrada (tensão);

$R_a$  - resistência da armadura do motor;

$L_a$  - indutância na armadura do motor;

$K_b$  - efeito de força contra-eletromotriz no motor;

$K_t$  - constante de torque do motor;

$J_m$  - inércia do rotor;

$c_m$  - atrito viscoso no motor;

$\tau_{\text{int}}$  - torque disponível p/ movimentar um determinado elo do manipulador robótico.

Este modelo do acionamento pode ser incorporado ao modelo dinâmico do manipulador, descrito pela equação que será apresentada em sequência.

Na equação (44), como já foi mencionado, é incorporado o índice  $b$  para o acionamento da base,  $h$  para o acionamento do elo horizontal e  $v$  para o acionamento do elo vertical, então, podem ser escritos de forma análoga as equações dinâmicas para o acionamento de cada uma das juntas:

$$J_{mb} \ddot{\theta}_{1b} + \left( c_{mb} + \frac{K_t K_b}{R_a} \right) \dot{\theta}_{1b} - \frac{K_t}{R_a} U_b = \tau_{\text{int}/ac/b} \quad (45)$$

$$J_{mh}\ddot{\theta}_{1h} + \left( c_{mh} + \frac{K_t K_b}{R_a} \right) \dot{\theta}_{1h} - \frac{K_t}{R_a} U_h = \tau_{\text{int/ac/h}} \quad (46)$$

$$J_{mv}\ddot{\theta}_{1v} + \left( c_{mv} + \frac{K_t K_b}{R_a} \right) \dot{\theta}_{1v} - \frac{K_t}{R_a} U_v = \tau_{\text{int/ac/v}} \quad (47)$$

### 3.5 MODELO DINÂMICO DAS TRANSMISSÕES

#### 3.5.1 Modelo da transmissão do posicionador da base do manipulador

A Figura 18 mostra o esquema da transmissão da base do manipulador. Este sistema possui uma relação de transmissão de 36:1 ( $i = 36$ ), dividida em dois estágios de 6:1. Ambos os estágios de transmissão possuem pares de polias com o mesmo diâmetro, e correias sincronizadoras de mesmo tamanho, largura e material. Em particular, quando são usados elementos de transmissão, tais como “*harmonic drives*”, correias, observa-se um deslocamento entre a posição do atuador e a posição do elo. Este erro de posicionamento pode ser explicado como um efeito da elasticidade na junta e modelado como uma mola torcional com rigidez  $K_{T1b}$  e  $K_{T2b}$  Spong (1987).

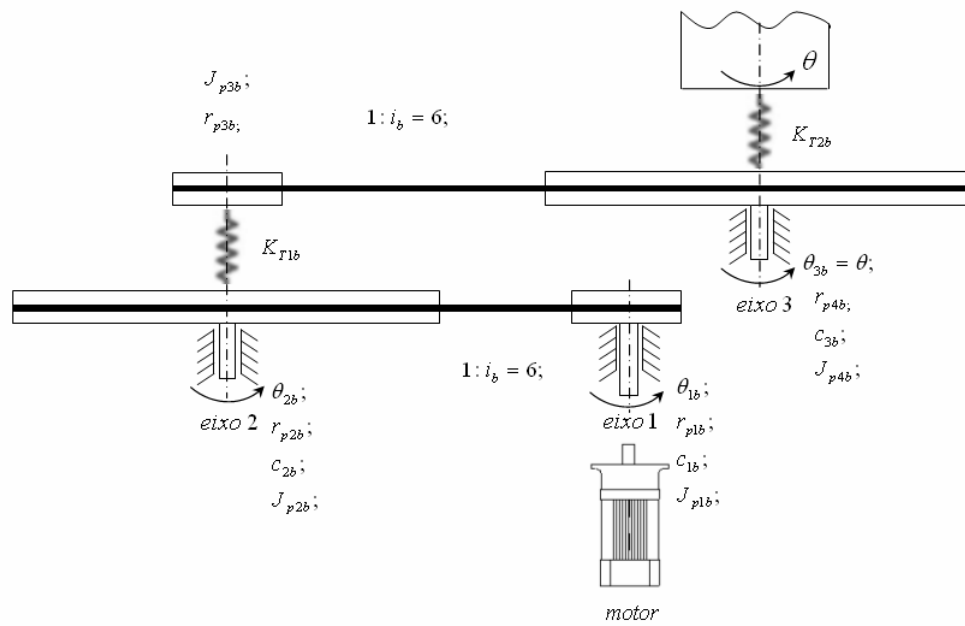


Figura 18 - Modelo da transmissão da base

onde:

$J_{p1b}$  - momento de inércia da polia 1;

$r_{p1b}$  - raio da polia 1;

$c_{1b}$  - coeficiente de atrito no mancal da polia 1;

$\theta_{lb}$  - ângulo de rotação em torno do eixo do servomotor da base;

$J_{p2b}$  - momento de inércia da polia 2;

$r_{p2b}$  - raio da polia 2;

$J_{p3b}$  - momento de inércia da polia 3;

$r_{p3b}$  - raio da polia 3;

$c_{2b}$  - coeficiente de atrito no mancal do conjunto formado pelas polias 2 e 3;

$\theta_{2b}$  - ângulo de rotação em torno do eixo das polias 2 e 3;

$J_{p4b}$  - momento de inércia da polia 4;

$r_{p4b}$  - raio da polia 4;

$i_b$  - relação de transmissão da base;

$c_{3b}$  - coeficiente de atrito no mancal da polia 4;

$\theta_{3b}$  - ângulo de rotação em torno do eixo da polia 4;

$K_{T1b}$  - rigidez da correia 1;

$K_{T2b}$  - rigidez da correia 2.

As equações dinâmicas da transmissão da base são determinadas usando a formulação de Lagrange, e a função de dissipação de Rayleigh conforme Fu, Gonzalez e Lee (1987).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (48)$$

onde  $L$  é a função Lagrangeana dos elementos a parâmetros concentrados do movimento na transmissão da base do manipulador e é dado por:

$$L = T - P \quad (49)$$

onde:

$T$  - energia cinética;

$P$  - energia potencial;

$F$  - função de dissipação de Rayleigh.

Assim, a energia cinética, energia potencial e função de dissipação são dadas por:

$$T = \frac{1}{2} J_{p1b} \dot{\theta}_{1b}^2 + \frac{1}{2} (J_{p2b} + J_{p3b}) \dot{\theta}_{2b}^2 + \frac{1}{2} J_{p4b} \dot{\theta}_{3b}^2 \quad (50)$$



$$P = \frac{1}{2} K_{T1b} \left( \theta_{2b} - \frac{\theta_{1b}}{i_b} \right)^2 + \frac{1}{2} K_{T2b} \left( \theta_{3b} - \frac{\theta_{2b}}{i_b} \right)^2 \quad (51)$$

$$F = \frac{1}{2} c_{1b} \dot{\theta}_{1b}^2 + \frac{1}{2} c_{2b} \dot{\theta}_{2b}^2 + \frac{1}{2} c_{3b} \dot{\theta}_{3b}^2 \quad (52)$$

Aplicando-se as equações de Lagrange, para as coordenadas generalizadas  $\theta_{1b}, \theta_{2b}, \theta_{3b}$ , obtêm-se as equações (53), (54) e (55), respectivamente:

$$J_{p1b} \ddot{\theta}_{1b} + c_{1b} \dot{\theta}_{1b} + \frac{K_{T1b}}{i_b} \left( \frac{\theta_{1b}}{i_b} - \theta_{2b} \right) = -\tau_{\text{int}/ac/b} \quad (53)$$

$$(J_{p2b} + J_{p3b}) \ddot{\theta}_{2b} + c_{2b} \dot{\theta}_{2b} + \frac{K_{T2b}}{i_b} \left( \frac{\theta_{2b}}{i_b} - \theta_{3b} \right) - K_{T1b} \left( \frac{\theta_{1b}}{i_b} - \theta_{2b} \right) = 0 \quad (54)$$

$$J_{p4b} \ddot{\theta}_{3b} + c_{3b} \dot{\theta}_{3b} - K_{T2b} \left( \frac{\theta_{2b}}{i_b} - \theta_{3b} \right) = \tau_{\text{int}/cr/b} \quad (55)$$

$$\theta_{3b} = \theta(t) \quad (56)$$

### 3.5.2 Modelo da transmissão do posicionador horizontal do manipulador

Os sistemas de transmissão por correias e polias, dos elos horizontal e vertical, são iguais, possuindo também as mesmas características geométricas. A Figura 19 mostra o modelo da transmissão do posicionador horizontal.

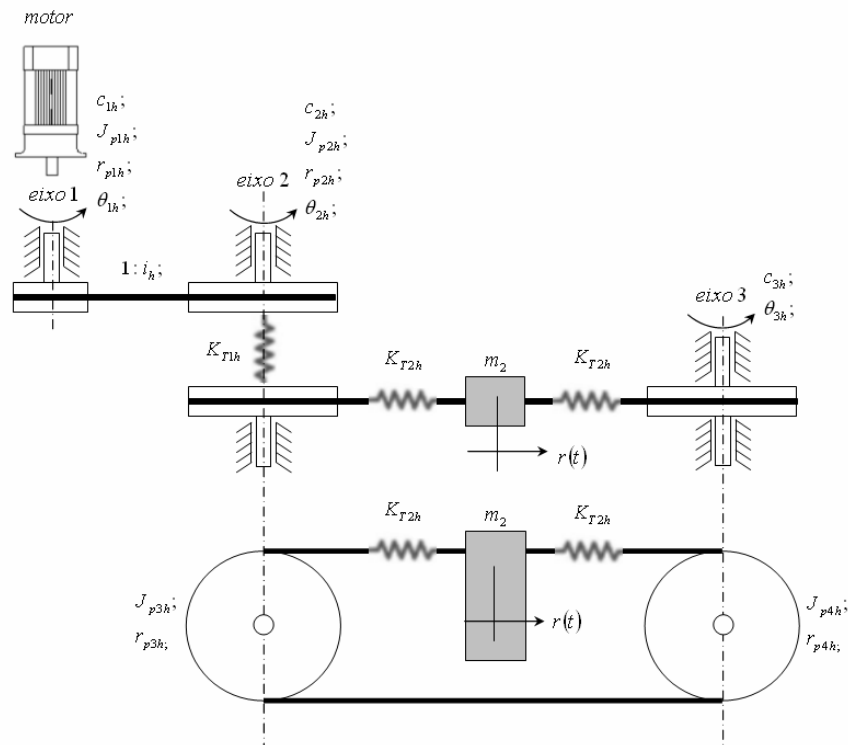


Figura 19 - Modelo da transmissão do posicionamento do elo horizontal

onde:

$J_{p1h}$  - momento de inércia da polia 1;

$r_{p1h}$  - raio da polia 1;

$c_{1h}$  - coeficiente de atrito no mancal da polia 1;

$\theta_{1h}$  - ângulo de rotação em torno do eixo do servomotor da base;

$J_{p2h}$  - momento de inércia da polia 2;

$r_{p2h}$  - raio da polia 2;

$J_{p3h}$  - momento de inércia da polia 3;

$r_{p3h}$  - raio da polia 3;

$i_h$  - relação de transmissão do elo horizontal;

$c_{2h}$  - coeficiente de atrito no mancal do conjunto formado pelas polias 2 e 3;

$\theta_{2h}$  - ângulo de rotação em torno do eixo das polias 2 e 3;

$J_{p4h}$  - momento de inércia da polia 4;

$r_{p4h}$  - raio da polia 4;

$c_{3h}$  - coeficiente de atrito no mancal da polia 4;

$\theta_{3h}$  - ângulo de rotação em torno do eixo da polia 4;

$K_{T1h}$  - rigidez da correia 1;

$K_{T2h}$  - rigidez da correia 2;

$m_2$  - massa do elo horizontal.

Da mesma forma, utilizando a formulação de Lagrange, podem ser escritas as equações:

$$T = \frac{1}{2} J_{p1h} \dot{\theta}_{1h}^2 + \frac{1}{2} (J_{p2h} + J_{p3h}) \dot{\theta}_{2h}^2 + \frac{1}{2} J_{p4h} \left( \frac{\dot{r}}{r_{p4h}} \right)^2 \quad (57)$$

$$P = \frac{1}{2} K_{T1h} \left( \theta_{2h} - \frac{\theta_{1h}}{i_h} \right)^2 + \frac{1}{2} K_{T2h} (r_{p3h} \theta_{2h} - r)^2 \quad (58)$$

$$F = \frac{1}{2} c_{1h} \dot{\theta}_{1h}^2 + \frac{1}{2} c_{2h} \dot{\theta}_{2h}^2 + \frac{1}{2} c_{3h} \left( \frac{\dot{r}}{r_{p4h}} \right)^2 \quad (59)$$

Aplicando-se as equações de Lagrange, para as coordenadas generalizadas  $\theta_{1h}, \theta_{2h}, \theta_{3h}$ , obtêm-se as equações, respectivamente:

$$J_{p1h} \ddot{\theta}_{1h} + c_{1h} \dot{\theta}_{1h} + K_{T1h} \left( \frac{\theta_{1h}}{i_h^2} - \frac{\theta_{2h}}{i_h} \right) = -\tau_{\text{int/ac/h}} \quad (60)$$

$$(J_{p2h} + J_{p3h}) \ddot{\theta}_{2h} + c_{2h} \dot{\theta}_{2h} - K_{T2h} r - K_{T1h} \left( \frac{\theta_{1h}}{i_h} - \theta_{2h} \right) = 0 \quad (61)$$



$c_{1v}$  - coeficiente de atrito no mancal da polia 1;

$\theta_{1v}$  - ângulo de rotação em torno do eixo do servomotor do elo vertical;

$J_{p2v}$  - momento de inércia da polia 2;

$r_{p2v}$  - raio da polia 2;

$J_{p3v}$  - momento de inércia da polia 3;

$r_{p3v}$  - raio da polia 3;

$i_v$  - relação de transmissão do elo horizontal;

$c_{2v}$  - coeficiente de atrito no mancal do conjunto formado pelas polias 2 e 3;

$\theta_{2v}$  - ângulo de rotação em torno do eixo das polias 2 e 3;

$J_{p4v}$  - momento de inércia da polia 4;

$r_{p4v}$  - raio da polia 4;

$c_{3v}$  - coeficiente de atrito no mancal da polia 4;

$\theta_{3v}$  - ângulo de rotação em torno do eixo da polia 4;

$K_{T1v}$  - rigidez da correia 1;

$K_{T2v}$  - rigidez da correia 2;

$m_2$  - massa do elo horizontal.

De forma análoga, são escritas as equações para a transmissão do posicionamento do elo vertical.

$$J_{p1v} \ddot{\theta}_{1v} + c_{1h} \dot{\theta}_{1v} + K_{T1v} \left( \frac{\theta_{1v}}{i_v^2} - \frac{\theta_{2v}}{i_v} \right) = -\tau_{\text{int/ac/v}} \quad (65)$$

$$(J_{p2v} + J_{p3v}) \ddot{\theta}_{2v} + c_{2v} \dot{\theta}_{2v} - K_{T2v} z - K_{T1v} \left( \frac{\theta_{1v}}{i_v} - \theta_{2v} \right) = 0 \quad (66)$$

$$\frac{J_{p4v}}{r_{p4v}^2} \ddot{z} + \frac{c_{3h}}{r_{p4v}^2} \dot{z} + K_{T2v} z = F_{\text{int/cr/v}} \quad (67)$$

$$z = r_{p4v} \cdot \theta_{3v} \quad (68)$$

$$\theta_{3v} = \frac{z}{r_{p4v}} \quad (69)$$

### 3.6 MODELO DINÂMICO DE CORPO RÍGIDO

As expressões da energia cinética e potencial do manipulador são escritas como:

$$T = \frac{1}{2}(I_{zz1} + I_{zz2})\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2[\dot{r}^2 + (r^2 + D^2)\dot{\theta}^2 + 2D\dot{r}\dot{\theta}] + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 \quad (70)$$

$$P = m_2 \cdot g \cdot z \quad (71)$$

onde:

$T$  - energia cinética;

$P$  - energia potencial do Manipulador, respectivamente.

Aplicando-se as equações de Lagrange, para as componentes do vetor de coordenadas generalizadas dado por:  $q = [\theta \ r \ z]^T$ , resulta nas seguintes equações gerais de movimento para o manipulador:

#### 3.6.1 Torque desenvolvido na base do manipulador

$$(I_{zz1} + I_{zz2} + D^2m_2 + m_2r^2)\ddot{\theta} + 2m_2r\dot{r}\dot{\theta} + m_2D\ddot{r} = -\tau_{\text{int}/cr/b} \quad (72)$$

### 3.6.2 Força desenvolvida no elo horizontal do manipulador

$$m_2 \ddot{r} + m_2 D \ddot{\theta} - m_2 r \dot{\theta}^2 = -F_{\text{int}/cr/h} \quad (73)$$

### 3.6.3 Força desenvolvida no elo vertical do manipulador

$$m_2 \ddot{z} + m_2 g = -F_{\text{int}/cr/v} \quad (74)$$

onde:

$m_2$  - massa do elo horizontal (elo 2);

$I_{zz1}$  - momento de inércia, elo 1 (elo vertical), em torno do eixo- $z_1$ ;

$I_{zz2}$  - momento de inércia, do elo 2, em torno do sistema de coordenadas local eixo- $z_2$ ;

$D$  - distância normal (off-set) entre o eixo- $z_1$  e o eixo- $z_2$ ;

$\tau_{\text{int}/cr/b}(t)$  - torque generalizado na base do manipulador;

$F_{\text{int}/cr/h}(t)$  - força generalizada no elo horizontal;  $F_{\text{int}/cr/v}(t)$  - força generalizada no elo vertical;

$\theta(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\ddot{\theta}(t)$  - posição, velocidade e aceleração da junta 1;

$z(t)$ ,  $\dot{z}(t)$ ,  $\ddot{z}(t)$  - posição, velocidade e aceleração vertical da junta 2;

$r(t)$ ,  $\dot{r}(t)$ ,  $\ddot{r}(t)$  - posição, velocidade e aceleração radial da junta 3.

$g = 9,8 \frac{m}{s^2}$  - aceleração da gravidade.

O sistema de equações pode ser escrito na forma matricial abaixo:

$$D(q) \ddot{q}(t) + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau(t) \quad (75)$$

onde:

$D(q)$  - matriz de pseudo-inércia do manipulador;

$C(q, \dot{q})$  - vetor de aceleração centrífuga e de Coriolis;

$G(q)$  - vetor associado as forças gravitacionais;

$\tau(t)$  - vetor de excitação torque na base e de forças (vertical e horizontal);

$q = [\theta \ z \ r]^T$  - vetor de coordenadas generalizadas do manipulador.

Escrevendo assim:

$$\begin{bmatrix} -\tau_{\text{int}/cr/b} \\ -F_{\text{int}/cr/h} \\ -F_{\text{int}/cr/v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{ZZ1} + I_{ZZ2} + m_2 D^2 + m_2 r^2 & m_2 D & 0 \\ m_2 D & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{D(q) - \text{Matriz de Inércia}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{r} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}}_{\ddot{q}(t)} + \quad (76)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2m_2 r \dot{r} \dot{\theta} \\ -m_2 r \dot{\theta}^2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{C(q, \dot{q}) - \text{Vetor torques / forças de Coriolis e Centrífugas}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 g \end{bmatrix}}_{G(q) - \text{Vetor de Carregamento Gravitacional}}$$

$C(q, \dot{q})$  - Vetor torques / forças  
de Coriolis e Centrífugas

$G(q)$  - Vetor de Carregamento  
Gravitacional

### 3.7 MODELO DINÂMICO COMPLETO

Para o tratamento desse sistema, são considerados torque e forças internas para cada subsistema (necessários para o equilíbrio dinâmico - ação e reação), que serão posteriormente eliminados.

Substituindo a equação (45) em (53), (46) em (60), (47) em (65).

E também (55) em (72), (62) em (73), (67) em (74), e rearranjando, obtêm-se:



$$\left\{ \begin{aligned}
& \left( J_{mb} + J_{p1b} \right) \ddot{\theta}_{1b} + \left( c_{mb} + \frac{K_t K_b}{R_a} + c_{1b} \right) \dot{\theta}_{1b} + K_{T1b} \left( \frac{\theta_{1b}}{i^2} - \frac{\theta_{2b}}{i} \right) = \frac{K_t}{R_a} U_b \\
& \left( J_{p2b} + J_{p3b} \right) \ddot{\theta}_{2b} + c_{2b} \dot{\theta}_{2b} + K_{T2b} \left( \frac{\theta_{2b}}{i^2} - \frac{\theta}{i} \right) - K_{T1b} \left( \frac{\theta_{1b}}{i} - \theta_{2b} \right) = 0 \\
& \left( J_{p4b} + I_{ZZ1} + I_{ZZ2} + m_2 D^2 + m_2 r^2 \right) \ddot{\theta} + \left( c_{3b} + 2m_2 r \dot{r} \right) \dot{\theta} - K_{T2b} \left( \frac{\theta_{2b}}{i} - \theta \right) + m_2 D \ddot{r} = 0
\end{aligned} \right. \quad (77)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left( J_{mh} + J_{p1h} \right) \ddot{\theta}_{1h} + \left( c_{mh} + \frac{K_t K_b}{R_a} + c_{1h} \right) \dot{\theta}_{1h} + K_{T1h} \left( \frac{\theta_{1h}}{i^2} - \frac{\theta_{2h}}{i} \right) = \frac{K_t}{R_a} U_h \\
& \left( J_{p2h} + J_{p3h} \right) \ddot{\theta}_{2h} + c_{2h} \dot{\theta}_{2h} - K_{T2h} r - K_{T1h} \left( \frac{\theta_{1h}}{i} - \theta_{2h} \right) = 0 \\
& \left( \frac{J_{p4h}}{r_{p4h}^2} + m_2 \right) \ddot{r} + \frac{c_{3h}}{r_{p4h}^2} \dot{r} + K_{T2h} r + m_2 D \ddot{\theta} - m_2 r \dot{\theta}^2 = 0
\end{aligned} \right. \quad (78)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left( J_{mv} + J_{p1v} \right) \ddot{\theta}_{1v} + \left( c_{mv} + \frac{K_t K_b}{R_a} + c_{1v} \right) \dot{\theta}_{1v} + K_{T1v} \left( \frac{\theta_{1v}}{i^2} - \frac{\theta_{2v}}{i} \right) = \frac{K_t}{R_a} U_v \\
& \left( J_{p2v} + J_{p3v} \right) \ddot{\theta}_{2v} + c_{2v} \dot{\theta}_{2v} - K_{T2v} z - K_{T1v} \left( \frac{\theta_{1v}}{i} - \theta_{2v} \right) = 0 \\
& \left( \frac{J_{p4v}}{r_{p4v}^2} + m_2 \right) \ddot{z} + \frac{c_{3v}}{r_{p4v}^2} \dot{z} + K_{T2v} z + m_2 g = 0
\end{aligned} \right. \quad (79)$$

### 3.8 SIMULAÇÃO DINÂMICA

#### 3.8.1 Diagrama de blocos do elo vertical

Para construir o diagrama de blocos do sistema é utilizado o conjunto de equações (79) que descreve o comportamento dinâmico de cada um dos subsistemas.

Supondo as condições iniciais nulas e que os motores serão excitados separadamente, então o sistema será representado por um conjunto de equações desacopladas.

A partir do conjunto de equações (79), pode ser reescrito:

$$\ddot{\theta}_{1v} = \left( \frac{1}{J_{mv} + J_{p1v}} \right) \cdot \left[ \frac{K_t}{R_a} U_v - \left( c_{mv} + \frac{K_t K_b}{R_a} + c_{1v} \right) \dot{\theta}_{1v} - \frac{K_{T1v}}{i^2} \theta_{1v} + \frac{K_{T1v}}{i} \theta_{2v} \right] \quad (80)$$

$$\ddot{\theta}_{2v} = \left( \frac{1}{J_{p2v} + J_{p3v}} \right) \cdot \left( -c_{2v} \dot{\theta}_{2v} + K_{T2v} z + \frac{K_{T1v}}{i} \theta_{1v} - K_{T1v} \theta_{2v} \right) \quad (81)$$

$$\ddot{z} = \left( \frac{r_{p4v}^2}{J_{p4v} + r_{p4v}^2 m_2} \right) \cdot \left( -\frac{c_{3v}}{r_{p4v}^2} \dot{z} - K_{T2v} z - m_2 g \right) \quad (82)$$

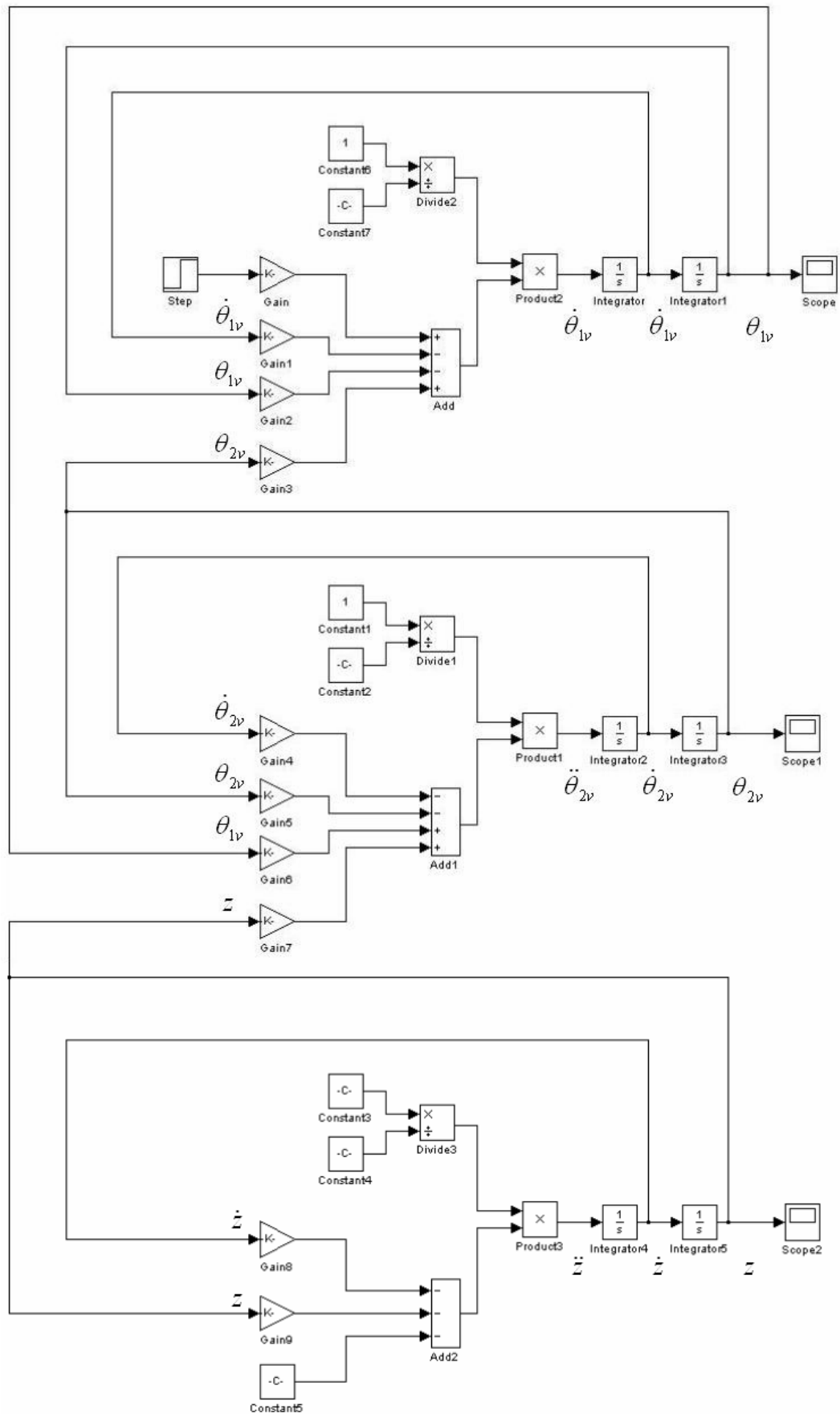


Figura 21 - Diagrama de blocos das equações dinâmicas do elo vertical

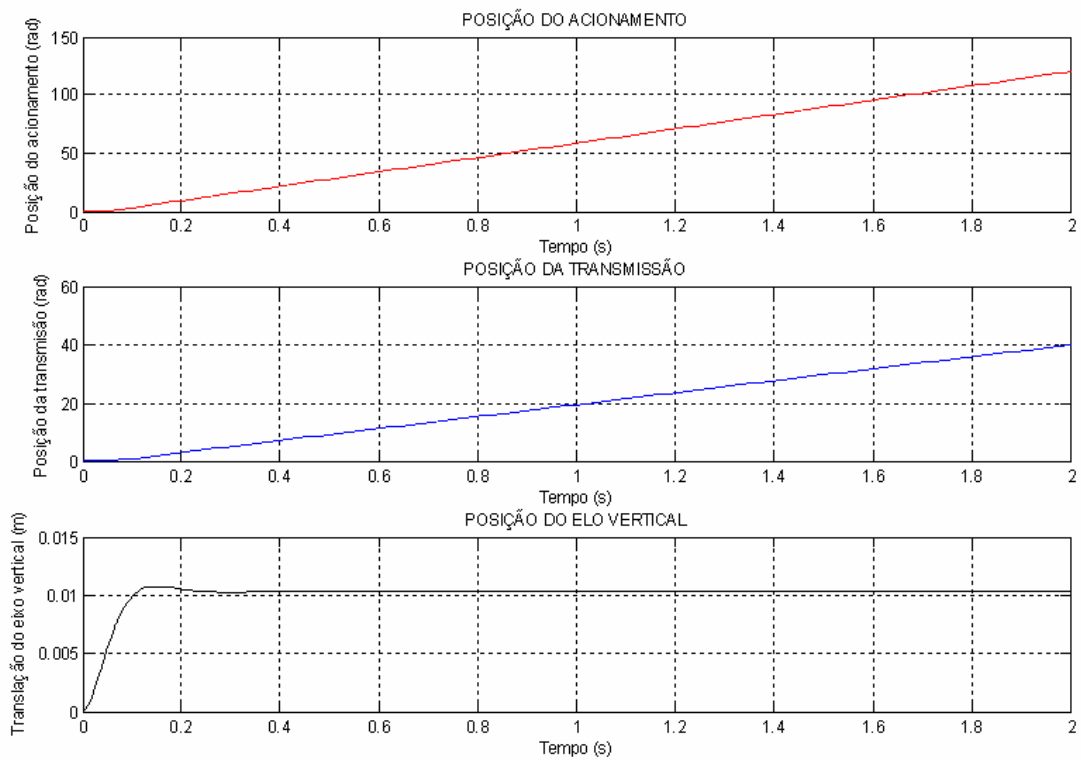


Figura 22 - Resposta do elo vertical (sistema instável)

Por meio da Figura 22, pode-se observar que o sistema em malha aberta é instável. Para essa verificação, também foram obtidos, utilizando-se do Software Matlab, os pólos desse sistema, apresentados na Tabela 7:

Tabela 7 - Pólos das equações na forma original

Pólos das equações na forma original		
Pólos	Amortecimento	Frequência (rad/s)
$2,53 \cdot 10^{-13}$	-1,00	$2,53 \cdot 10^{-13}$
$-20,60 + 21,20 \cdot i$	0,6980	29,60
$-20,60 - 21,20 \cdot i$	0,6980	29,60
-168,00	1,00	168,00
$-39,50 + 919,00 \cdot i$	0,0430	919,00
$-39,50 - 919,00 \cdot i$	0,0430	919,00

### 3.9 PROJETO DE CONTROLE

Para exemplificar um projeto de sistema de controle, optou-se por fechar a malha de controle para o elo vertical, por apresentar um conjunto de equações não acopladas e lineares.

Para facilitar o projeto do sistema de controle, optou-se por reduzir o sistema a um conjunto mínimo de equações dinâmicas do sistema, realizando as seguintes substituições. Substituindo-se (83), (84) e (85) no conjunto de equações (79):

$$z = r_{p4v} \cdot \theta_{2v} \quad (83)$$

$$\dot{z} = r_{p4v} \cdot \dot{\theta}_{2v} \quad (84)$$

$$\ddot{z} = r_{p4v} \cdot \ddot{\theta}_{2v} \quad (85)$$

Pode ser reescrito obtendo:

$$M_{c1v} \ddot{\theta}_{1v} + C_{c1v} \dot{\theta}_{1v} + \frac{K_{cT1v}}{i^2} \theta_{1v} - \frac{K_{cT1v}}{i} \theta_{2v} = \frac{K_t}{R_a} U_v \quad (86)$$

$$C_{c2v} \dot{\theta}_{2v} + K_{cT2v} \theta_{2v} - \frac{K_{T1v}}{i} \theta_{1v} = \frac{adm_2 g}{b} \quad (87)$$

onde:

$$a = r_{p4v}$$

$$b = J_{p4v} + r_{p4v}^2 m_2$$

$$d = J_{p2v} + J_{p3v}$$

$$M_{c1v} = (J_{mv} + J_{p1v})$$

$$C_{c1v} = \left( c_{mv} + \frac{K_t K_b}{R_a} + c_{1v} \right)$$

$$K_{cT1v} = K_{T1v}$$

$$C_{c2v} = \left( c_{2v} - \frac{adc_{3v}}{br_{p4v}} \right)$$

$$K_{cT2v} = \left( K_{T1v} - r_{p4v} K_{T2v} - \frac{adr_{p4v} K_{T2v}}{b} \right)$$

### 3.9.1 Equações na forma de estado

O sistema de equações diferenciais ordinárias (86) e (87), escrito em função das variáveis de estado, apresenta-se como:

$$\dot{x}_{1v} = x_{2v} \quad (88)$$

$$\dot{x}_{2v} = -\frac{K_{cT1v}}{M_{c1v}i^2}x_{1v} - \frac{C_{c1v}}{M_{c1v}}x_{2v} + \frac{K_{cT1v}}{M_{c1v}i}x_{3v} + \frac{K_t}{M_{c1v}R_a}U_v \quad (89)$$

$$\dot{x}_{3v} = \frac{K_{T1v}}{C_{c2v}i}x_{1v} - \frac{K_{cT2v}}{C_{c2v}}x_{3v} + \frac{adm_2g}{C_{c2v}b} \quad (90)$$

onde:

$$x_{1v} = \theta_{1v}; \quad \dot{x}_{1v} = x_{2v}$$

$$x_{2v} = \dot{\theta}_{1v}$$

$$x_{3v} = \theta_{2v}; \quad \dot{x}_{3v} = x_{4v}$$

$$x_{4v} = \dot{\theta}_{2v}$$

Tabela 8 - Pólos das equações reduzidas

<b>Pólos das equações reduzidas</b>		
<b>Pólos</b>	<b>Amortecimento</b>	<b>Frequência (rad/s)</b>
41,80	-1,00	41,80
-270,00	1,00	270,00
-19600,00	1,00	19600,00

Um sistema linear qualquer, em malha aberta, é completamente caracterizado pelas equações:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (91)$$

$$y = Cx \quad (92)$$

onde nenhum tipo de perturbação externa ao sistema é considerado. Em (92), o vetor  $y$  representa as saídas do sistema (variáveis controladas) e a matriz  $C$  representa a matriz de medição (que associa características dos sensores de medição a cada um dos estados do sistema).

As equações (88), (89) e (90), escritas na forma matricial, resultam em:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{1v} \\ \dot{x}_{2v} \\ \dot{x}_{3v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_{cT1v}}{M_{c1v}i^2} & -\frac{C_{c1v}}{M_{c1v}} & \frac{K_{cT1v}}{M_{c1v}i} \\ \frac{K_{T1v}}{C_{c2v}i} & 0 & -\frac{K_{cT2v}}{C_{c2v}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_{1v} \\ x_{2v} \\ x_{3v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_{c2v}}{C_{c2v}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{adm_2}{C_{c2v}b} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ U_v \\ g \end{Bmatrix} \quad (93)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_{cT1v}}{M_{c1v}i^2} & -\frac{C_{c1v}}{M_{c1v}} & \frac{K_{cT1v}}{M_{c1v}i} \\ \frac{K_{T1v}}{C_{c2v}i} & 0 & -\frac{K_{cT2v}}{C_{c2v}} \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_{c2v}}{C_{c2v}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{adm_2}{C_{c2v}b} \end{bmatrix} \quad (95)$$

### 3.9.2 Sistema em malha fechada

Sendo o sistema instável, projetou-se um esquema de controle por realimentação de estados para realocar os pólos no semiplano esquerdo do plano  $s$ . A ação de controle é dada por:

$$u = -K_1 x \quad (96)$$

onde  $K_1$  é a matriz de ganhos a serem determinados para alocação dos pólos. Assim, a equação em malha fechada pode ser obtida substituindo (97) em (91) resultando em:

$$\dot{x} = (A - BK_1)x \quad (97)$$

Para determinar a matriz  $K_1$ , apresentada abaixo, foi utilizado o Software Matlab.



$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -10264,11 & -8,10 & 30817,61 \\ 5223,00 & 0 & -14923,96 \end{bmatrix} \quad (98)$$

Seja a posição do motor o sinal a ser utilizado para controle. A saída do potenciômetro fornece um sinal de tensão proporcional  $\theta$ . Desta forma:

$$y = K_{pot} \theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{pot} \end{bmatrix} x \quad (99)$$

onde  $K_{pot} = 1$  é o ganho do potenciômetro (retroação unitária).

O diagrama de blocos que apresenta a ação de controle proposta está representado na Figura 23.

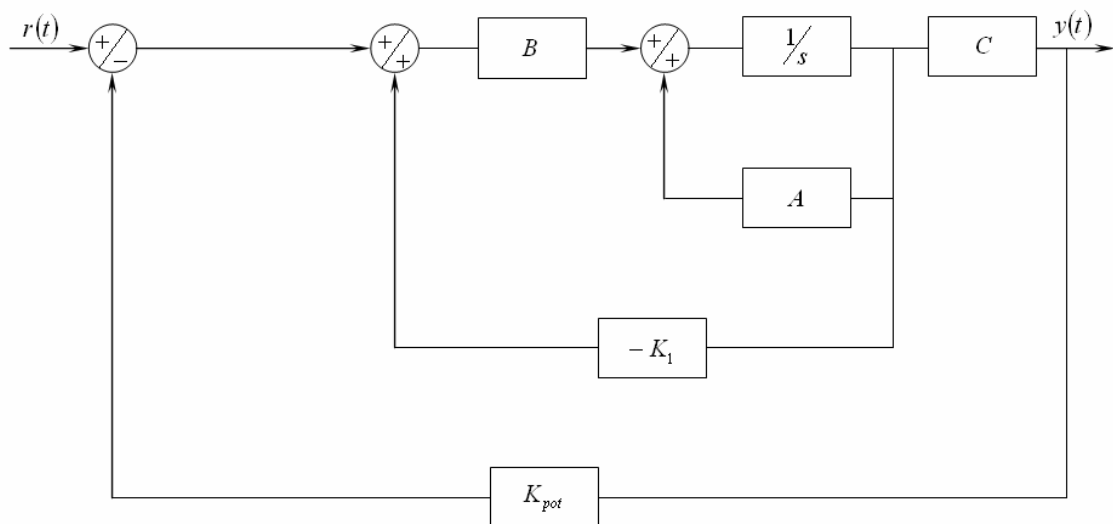


Figura 23 - Diagrama de blocos do elo vertical com alocação de pólos

Para a escolha do pólo dominante, sabe-se que o pólo complexo conjugado é dado por:

$$p_d = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \cdot i \quad (100)$$

Adotando-se, por exemplo, o fator de amortecimento igual a  $\xi = 1,00$  e a frequência natural igual a  $\omega_n = 3,1 \frac{rad}{s}$ , obtém-se o pólo dominante em:

$$p_d = [-3,1 \quad -6,0 \quad -31,0] \quad (101)$$

Sabe-se, também, que esse sistema é de terceira ordem. Assim, para que os pólos complexos conjugados sejam dominantes, adota-se o terceiro pólo real em:

$$p \geq 10R(p_d) \quad (102)$$

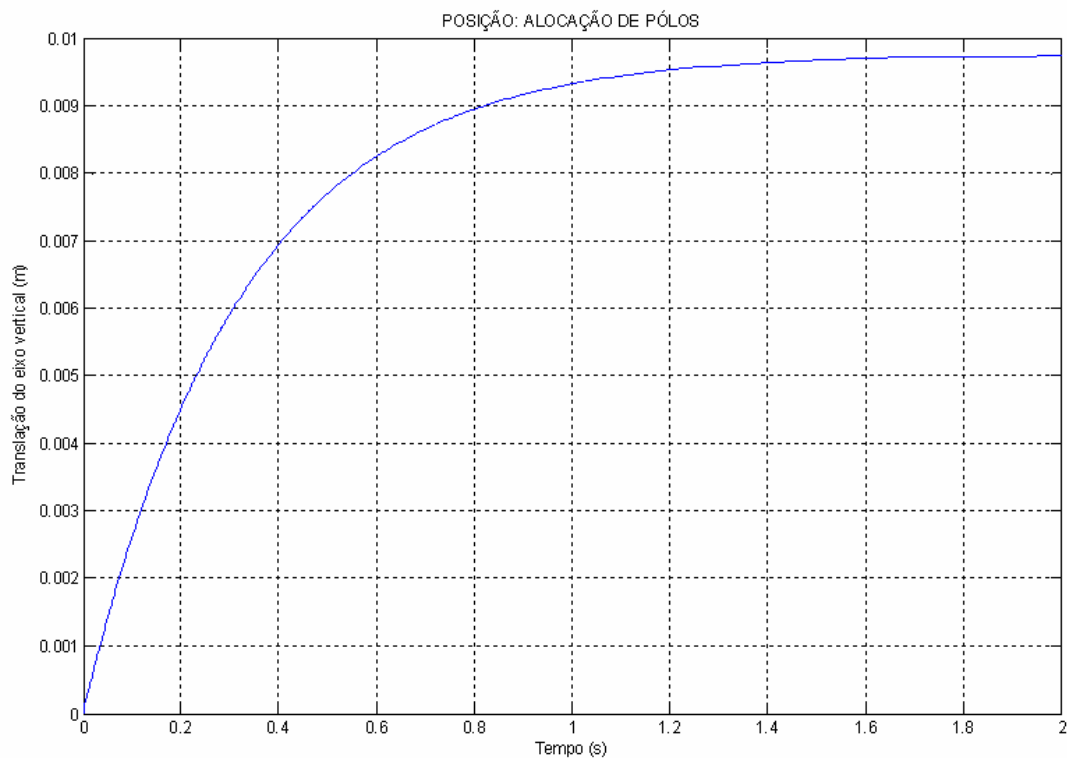


Figura 24 - Resposta do elo vertical (sistema estável)

A nova localização dos pólos em malha fechada é:

Tabela 9 - Pólos estáveis (Alocação de Pólos)

<b>Pólos estáveis (Alocação de Pólos)</b>		
<b>Pólos</b>	<b>Amortecimento</b>	<b>Frequência (rad/s)</b>
- 3,10	1,00	- 3,10
- 6,00	1,00	- 6,00
- 31,00	1,00	- 31,00

Os gráficos da simulação mostram que o sistema em malha fechada é estável, porém há um erro em estado estacionário considerável. Para diminuir o erro, é proposta uma adição de termo à ação controle que agora possui uma parcela que procura estabilizar o sistema (por alocação de pólos) e outra parcela que procura buscar a referência do sistema em malha fechada, reduzindo o erro em estado estacionário. A ação de controle proposta é dada por:

$$u = -K_1x - K_2v \quad (103)$$

onde  $K_2$  é a constante de ganho proporcional e foi obtida de forma empírica (foram realizadas tentativas em simulação para obter o valor de  $K_2 = 100$ ).

O diagrama de blocos que representa a ação de controle proposta é mostrado na Figura 25.

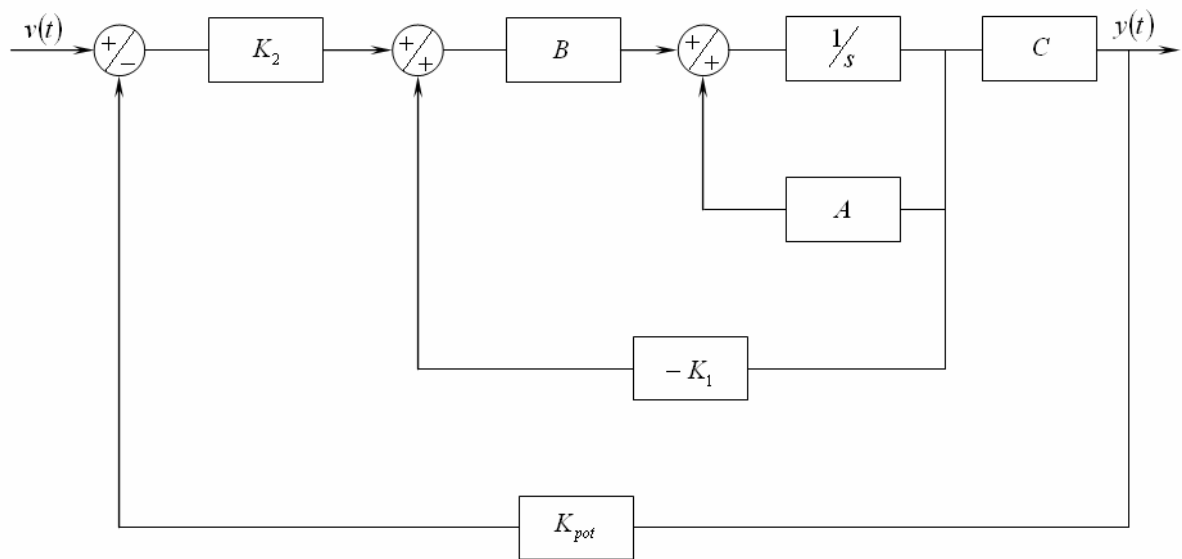


Figura 25 - Diagrama de blocos do elo vertical com ação de controle proporcional

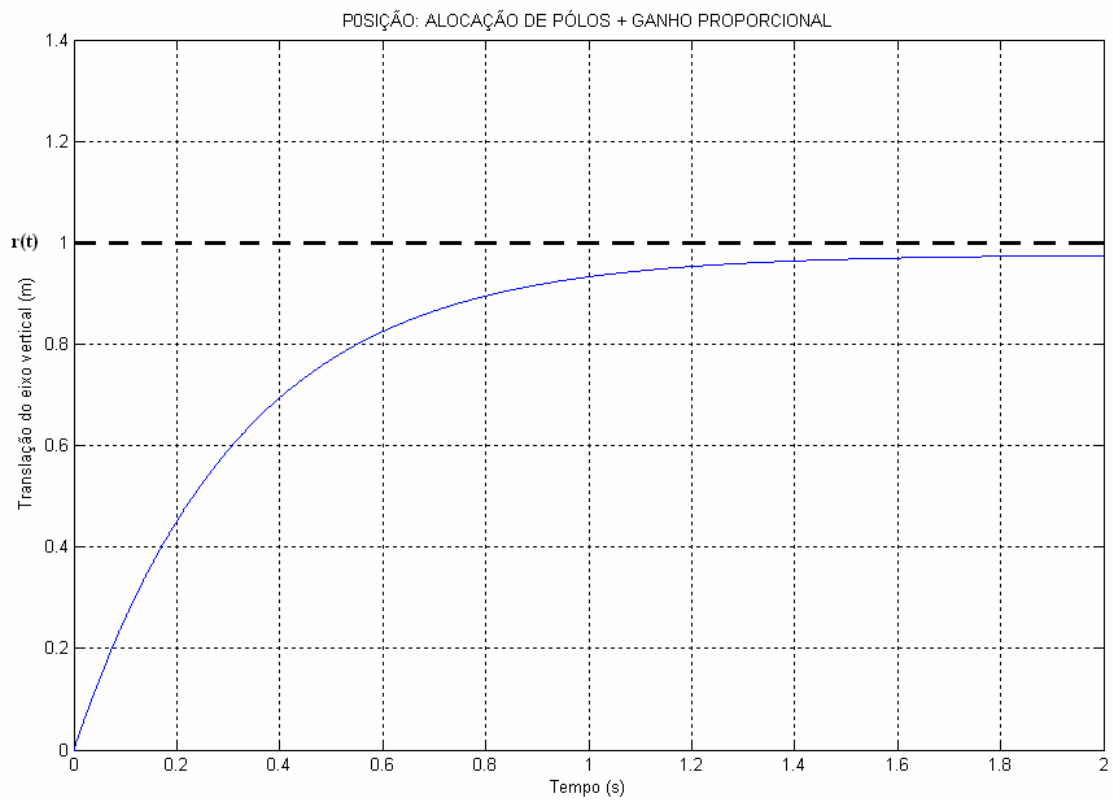


Figura 26 - Resposta do elo vertical (sistema estabilizado + controle proporcional)

## CONCLUSÃO

Este trabalho descreveu os aspectos da modelagem e simulação das juntas de um manipulador robótico de três graus de liberdade. Depois de descritas e aplicadas técnicas de modelagem de sistemas, foram obtidos os modelos cinemático e o dinâmico completos do manipulador. Foi também implementado um controlador proporcional para o movimento da junta do elo vertical, para analisar a eficiência do modelo.

Para a manipulação simbólica, cálculo e obtenção de parâmetros, e apresentação dos dados graficamente, foi utilizado o programa MatLab, com a intenção de simplificar alguns conceitos utilizados neste trabalho, uma vez que são procedimentos muito difundidos na comunidade científica.

A solução da cinemática inversa para manipuladores é complexa, por incluir equações não-lineares e possuir mais de uma solução admissível para uma determinada posição e orientação do órgão terminal. Para este manipulador de configuração cilíndrica, os ângulos de junta da base estão compreendidos entre o intervalo  $0 < \theta(t) < \pi$ , garantindo um número menor de soluções. O volume de trabalho também apresentado foi obtido como resultado da cinemática inversa, que determina o limite de atuação do órgão terminal do robô.

Foram apresentados resultados relevantes na simulação, que evidenciaram a influência da transmissão flexível e do atrito no comportamento dinâmico. É importante mencionar que, em ambos os casos, o problema deverá ser tratado em trabalhos futuros, uma vez que não foi proposto investigar a influência dos mesmos na performance do manipulador.

De posse do modelo, os estudos de simulação dinâmica foram executados recorrendo-se aos parâmetros do manipulador determinados a partir do projeto do sistema robótico, e para os parâmetros de rigidez e amortecimento não disponíveis, o procedimento proposto foi levantar os valores utilizando-se da referência.

O ganho do controlador foi determinado de forma empírica (observando o comportamento dinâmico) não levando em consideração os critérios de eficiência para uma dada operação.

O modelo dinâmico completo poderá ser utilizado como ponto de partida para dar continuidade ao trabalho realizado e na elaboração de trabalhos científicos, devido ao alto grau de complexibilidade das equações diferenciais não-lineares e acopladas para a implementação de uma ação de controle. A simulação computacional do manipulador, usando controladores PID e CTC, produzirá resultados teóricos utilizados para prever aspectos do comportamento dinâmico. Anteriormente, técnicas de identificação de parâmetros deverão ser utilizadas para obtenção dos parâmetros de massa, amortecimento e rigidez, uma vez que estes não são determinados.

## REFERÊNCIAS

BEJCZY, A. K.; TARN, T. J.; CHEN, Y. L. Robot Arm Dynamic Control by Computer. **IEEE**. Pasadena, p. 960-970, 1985.

BOTASSO, C. L.; CROCE, A.; GHEZZI, L.; FAURE, P. On the Solution of Inverse Dynamics and Trajectory Optimization Problems for Multibody Systems. **Multibody System Dynamics**. Netherlands, v.11, p.1-22, 2004

FU, K. S.; GONZALEZ, R. C.; LEE, C. S. G. **Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence**. McGraw-Hill. 1987.

GRANDINETTI, F. J. **Modelagem, Identificação e Controle de um Macro-micro Manipulador Robótico**. 1998. 201 f. Tese (Doutor em Ciências em Engenharia Mecânica e Aeronáutica – Mecatrônica e Dinâmica de Sistemas) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 1998.

GOOD, M. C.; SWEET, L. M.; STROBEL, K. L. Dynamic Models for Control System Design of Integrated Robot and Drive Systems. **Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**. New York, v.107, p.53-59, mar., 1985.

INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 1992, Nios, France. **Dynamic Modelling and Friction Compensated Control of a Robot Manipulator Joint**. **Proceedings of the 1992 IEEE**.

HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B. **MATLAB 6: Curso Completo**. Prentice Hall. 2003.

IÑIGO, R. M.; MORTON, J. S. Simulation of the Dynamics of an Industrial Robot. **IEEE – Transaction on Education**. Charlottesville, v.34, n.1, p.89-99, feb., 1991.

KOIVO, A. J. **Fundamentals for Control of Robotic Manipulators**. John Wiley & Sons. Inc., 1989.

KOZLOWSKI, K. R. **Modelling and Identification in Robotics**. Springer - Verlag London. 1998.

KÖVECSES, J; PIEDBŒUF J.; LANGE, J.-C. Dynamics Modelling and Simulation of Constrained Robotic Systems. **IEEE/ASME Transaction on Mechatronics**. Montréal, v.8, n.2, p.165-177, jun., 2003.

KUSZTA, B.; SINHA, N. K. **Modeling and Identification of Dynamic Systems**. Van Nostrand Reinhold Company. New York. 1983.

LI, C. A New Lagrangian Formulation of Dynamics of Robot Manipulators. **Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**. Beijing, v.111, p. 559-567, dec., 1989.

LUH, J. Y. S. Conventional Controller Design for Industrial Robots - A Tutorial. **IEEE – Transactions on Systems, Man and Cybernetics**. v.SMC-13, n.3, p.210-228, may/jun., 1983.

PAUL, R. P. **Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control**. MIT Press Cambridge. 1981

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. Prentice-Hall do Brasil. 2003.

SICILIANO, B.; SCIAVICCO, L. **Modelling and Control of Robot Manipulators**. IE - Springer – Verlag. 2000.

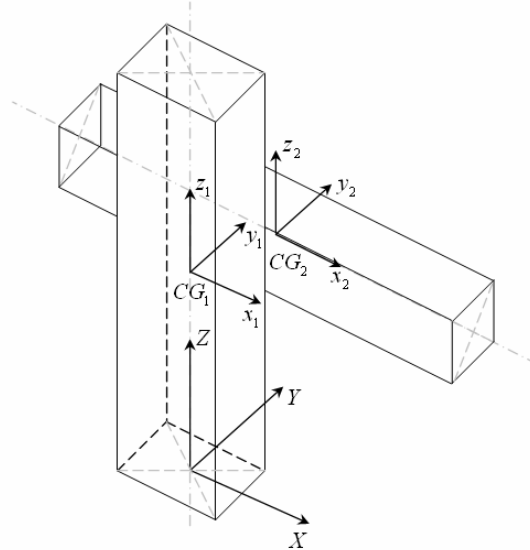


SPONG, M.W. Modelling and Control of Elastic Joint Robots. **Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**. Illinois, v.109, p.310-319, dec., 1987.

TAYLAN DAS , M.; CANAN DULGER, L. Mathematical Modelling, Simulation and Experimental Verification of a SCARA Robot. **Simulation Modelling Practice and Theory**. Gaziantep, v.13, p. 257-271, jan., 2005.

## APÊNDICE A – Parâmetros de Massa do Corpo Rígido

### A.1 MODELO DINÂMICO



### A.2 POSICIONADOR VERTICAL:

$$m_1 = 46 \text{ kg} ;$$

$$a = 0,2 \text{ m}$$

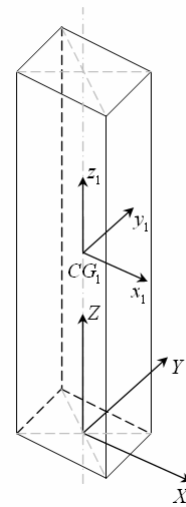
$$b = 0,1 \text{ m}$$

$$c = 1,415 \text{ m} ;$$

$$I_{xx1_{CG}} = 3,0436 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ;$$

$$I_{yy1_{CG}} = 3,0436 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ;$$

$$I_{zz1_{CG}} = 0,1916 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ;$$



### A.3 POSICIONADOR HORIZONTAL:

$$m_2 = 21 \text{ kg} ;$$

$$a = 0,1 \text{ m}$$

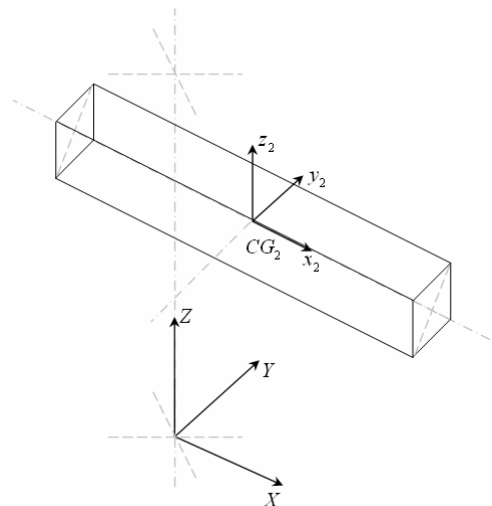
$$b = 0,1 \text{ m}$$

$$c = 1,315 \text{ m} ;$$

$$I_{xx2_{CG}} = 0,0350 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ;$$

$$I_{yy2_{CG}} = 3,0436 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ;$$

$$I_{zz2_{CG}} = 3,0436 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ;$$



## APÊNDICE B – Programa Maple 8 - Pontos de Teste

```

>
> f1 := (arctan(-(-py*(-px^2*(-py^2-
px^2+D^2))^(1/2)+D*px^2)/(py^2+px^2)/px, (D*py+(-px^2*(-py^2-
px^2+D^2))^(1/2))/(py^2+px^2)));

f1 :=

$$\arctan\left(-\frac{-py\sqrt{-px^2(-py^2-px^2+D^2)}+Dpx^2}{(py^2+px^2)px}, \frac{Dpy+\sqrt{-px^2(-py^2-px^2+D^2)}}{py^2+px^2}\right)$$

>
> theta1:=unapply(f1,px,py,D);

θ1 := (px, py, D) →

$$\arctan\left(-\frac{-py\sqrt{-px^2(-py^2-px^2+D^2)}+Dpx^2}{(py^2+px^2)px}, \frac{Dpy+\sqrt{-px^2(-py^2-px^2+D^2)}}{py^2+px^2}\right)$$

>
> f2 := (arctan(-(py*(-px^2*(-py^2-
px^2+D^2))^(1/2)+D*px^2)/(py^2+px^2)/px, (D*py-(-px^2*(-py^2-
px^2+D^2))^(1/2))/(py^2+px^2)));

f2 := arctan\left(-\frac{py\sqrt{-px^2(-py^2-px^2+D^2)}+Dpx^2}{(py^2+px^2)px}, \frac{Dpy-\sqrt{-px^2(-py^2-px^2+D^2)}}{py^2+px^2}\right)
>
> theta2:=unapply(f2,px,py,D);

θ2 := (px, py, D) →

$$\arctan\left(-\frac{py\sqrt{-px^2(-py^2-px^2+D^2)}+Dpx^2}{(py^2+px^2)px}, \frac{Dpy-\sqrt{-px^2(-py^2-px^2+D^2)}}{py^2+px^2}\right)$$


```

<b>&gt; theta1(500,500,135.5);</b>	-2.163375972
<b>&gt; %*180/Pi;</b>	106.6643362
	$\pi$
<b>&gt; evalf(%);</b>	33.95231271

```
> theta1(500,-500,135.5);
-2.163375972
> %*180/Pi;
-  $\frac{389.4076750}{\pi}$ 
> evalf(%);
-123.9523127
```

```
> theta1(-500,-500,135.5);
0.9782166812
> %*180/Pi;
 $\frac{176.0790026}{\pi}$ 
> evalf(%);
56.04768726
```

```
> theta1(500,-500,135.5);
-0.9782166812
> %*180/Pi;
-  $\frac{176.0790026}{\pi}$ 
> evalf(%);
-56.04768726
```

```
> theta2(500,500,135.5);
-2.163375972
> %*180/Pi;
-  $\frac{389.4076750}{\pi}$ 
> evalf(%);
-123.9523127
```

```
> theta2(-500,500,135.5);
```

2.163375972

```
> %*180/Pi;
```

$\frac{389.4076750}{\pi}$

```
> evalf(%);
```

123.9523127

```
> theta2(-500,-500,135.5);
```

-2.549013008

```
> %*180/Pi;
```

$-\frac{458.8223414}{\pi}$

```
> evalf(%);
```

-146.0476872

```
> theta2(500,-500,135.5);
```

2.549013008

```
> %*180/Pi;
```

$\frac{458.8223414}{\pi}$

```
> evalf(%);
```

146.0476872

```
>
```

## APÊNDICE C – Programa MatLab - Volume de Trabalho

```

clear

%
%
%           V o l u m e   d e   T r a b a l h o
%
%           d e s e n v o l v i d o   p o r :
%           Aurelio Moreira da Silva Neto
%
%   Esse material foi produzido pelo autor e pode ser reproduzido
%   desde que seja mencionada a fonte e desde que seja dado conhecimento
%   ao autor.
%
%
% D a d o s   d e   E n t r a d a

D = 135;
teta = 0:pi/22:pi;
r = 270:20:710;
z = 175:20:860;

[TETA, R, Z] = meshgrid(teta, r, z);
%
%
% C i n e m á t i c a   D i r e t a

X = R.*cos(TETA) - D*sin(TETA);
Y = R.*sin(TETA) + D*cos(TETA);
Z1 = Z;
%
%
% G r a f i c o s

figure(1)
subplot(2,2,1); plot3(X(:), Y(:), Z1(:), 'b.')
view(180,0);
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
grid on;

subplot(2,2,3); plot3(X(:), Y(:), Z1(:), 'b.')
view(0,90);
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
grid on;

subplot(2,2,[2 4]); plot3(X(:), Y(:), Z1(:), 'b.')
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
view(-12,60);
grid on;

```

```
figure(2)
hold on
plot3(X(:), Y(:), Z1(:), 'b.')
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
view(-12,60);
grid on;

t=0:0.02:5;
col=size(t,2);
    for i=1:col
        Px(i)=270+cos(t(i)*30)*t(i)/5;
        Py(i)=270+sin(t(i)*30)*t(i)/5;
        Pz(i)=175+20*t(i);
    end

plot3 (Px, Py, Pz, 'r')
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
grid on
%
%
```

---

## APÊNDICE D – Programa MatLab - Cinemática Inversa

```
%clear

%
%
%           C i n e m á t i c a   I n v e r s a
%
%           d e s e n v o l v i d o   p o r :
%           Aurelio Moreira da Silva Neto
%
%   Esse material foi produzido pelo autor e pode ser reproduzido
%   desde que seja mencionada a fonte e desde que seja dado conhecimento
%   ao autor.
%
%-----
% D a d o s   d e   E n t r a d a

D = 135;
raio = 400;
x = [301:-40:-402];
y = sqrt(raio^2-(x.^2));
z = 175*ones(size(x));

%
%-----

q = 0 ;

for n=1:length(x)
    if x(n) > 0
        q = q+1 ;
        xm(q) = x(n) ;
    end
end

%
%-----

for j=1:length(x)

    if x(j) > 0

        for i=1:length(xm)

            raizl4(i) = ( y(i)^2 )*( x(i)^2 ) + ( x(i)^4 ) - ( x(i)^2 )*(
D^2 ) ;
            divi14(i) = ( y(i)^2 )+( x(i)^2 ) ;
            numel4(i) = -(-(1/2)*(( 2*D*y(i) + 2*(sqrt(raizl4(i))))*y(i) )/
divi14(i)) + D) / x(i) ;
            divv14(i) = (1/2)*(( 2*D*y(i) + 2*sqrt(raizl4(i)) ) / divi14(i))
;

            tetal4(i) = atan2(numel4(i) , divv14(i)) ;

            z14(i) = z(i) ;

            r14(i) = cos(tetal4(i))*x(i) + sin(tetal4(i))*y(i) ;
```



```

        z(i) = z14(i) ;
        r(i) = r14(i) ;

    end ;

else

    for k=(i+1):length(z)

        raiz23(k) = ( y(k)^2 )*( x(k)^2 ) + ( x(k)^4 ) - ( x(k)^2 )*(
D^2 ) ;
        divi23(k) = ( y(k)^2 )+( x(k)^2 ) ;
        nume23(k) = -(-(1/2)*(( 2*D*y(k) - 2*(sqrt(raiz23(k))))*y(k) )/
divi23(k)) + D) / x(k) ;
        divv23(k) = (1/2)*(( 2*D*y(k) - 2*sqrt(raiz23(k)) ) / divi23(k))
;

        teta23(k) = atan2(nume23(k) , divv23(k));

        r23(k) = cos(teta23(k))*x(k) + sin(teta23(k))*y(k) ;
        r(k) = r23(k) ;

        z23(k) = z(k) ;
        z(k) = z23(k) ;

    end;

end;

end

%
%G r a f i c o s

figure(1)
teta = [ teta14 teta23(i+1:length(teta23)) ] ;
for i=1:length(z)
    %clf
    view(43,66)
    %view(180,0);
    axis([-450 450 -450 450 0 300])
    Q(i,:) = [ 0 -D*sin(teta(i)) r(i)*cos(teta(i)) - D*sin(teta(i))
] ;
    R(i,:) = [ 0 D*cos(teta(i)) r(i)*sin(teta(i)) + D*cos(teta(i))
] ;
    P(i,:) = [ z(i) z(i) z(i)
] ;

    line(Q(i,:),R(i,:),P(i,:), 'Color', 'b', 'LineWidth', 1) ;

    hold on
    plot3(x,y,z, 'r-^', 'LineWidth', 2, ...
        'MarkerEdgeColor', 'k', ...
        'MarkerFaceColor', 'k', ...

```

```
        'MarkerSize',3)

eixo = [ 0:0.5:400 ] ;
plot3(zeros(size(eixo)),zeros(size(eixo)),eixo,'k','LineWidth',2)
plot3(eixo,zeros(size(eixo)),zeros(size(eixo)),'k','LineWidth',2)
plot3(zeros(size(eixo)),eixo,zeros(size(eixo)),'k','LineWidth',2)

xlabel('X (m)')
ylabel('Y (m)')
zlabel('Z (m)')
grid on
pause(0.2)
view(43,66)
end
```

## APÊNDICE E – Programa MatLab - Trajetória: Reta

```

clear

%
%
% Planejamento e Geração de Trajetórias
%
% desenvolvido por :
%
% Aurelio Moreira da Silva Neto
%
%
% Esse material foi produzido pelo autor e pode ser reproduzido
% desde que seja mencionada a fonte e desde que seja dado conhecimento
% ao autor.
%
%
% Dados de Entrada ( xi , xf , tf )

xi = 500 ;
xf = -135 ;
tf = 16 ;

%
ti = 0 ;
t1 = tf/4 ;
t2 = (3/4)*tf ;
t3 = tf ;
v = 2*(xf - xi) / ( t3 + t2 - t1 ) ;

%
%
% Determinacao de x , y , z e t
% Tempo Total = t0 a t3
% z = constante

t0at1 = [ 0 : 0.5 : t1 ] ;
novoX1 = xi + (( v/(2*t1))*(t0at1.^2)) ;
novoV1 = (v/t1)*t0at1 ;
novoA1 = (v/t1)*ones(size(t0at1)) ;

t1at2 = [ t1 : 0.5 : t2 ] ;
novoX2 = (v*t1at2) + ((xf + xi - (v*t3))/2) ;
novoV2 = v*ones(size(novoX2)) ;
novoA2 = zeros(size(t1at2)) ;

t2at3 = [ t2 : 0.5 : t3 ] ;
novoX3 = xf - ((v/(2*t1))*(t2at3.^2 + t3.^2)) + ((v/t1)*t3*t2at3) ;
novoV3 = (v/t1)*t3 - (v/t1)*t2at3 ;
novoA3 = (-v/t1)*ones(size(t2at3));

t = [ t0at1 t1at2(2:length(t1at2)) t2at3(3:length(t2at3)) ] ;

x = [ novoX1 novoX2(2:length(t1at2)) novoX3(3:length(t2at3)) ] ;

dx = [ novoV1 novoV2(2:length(t1at2)) novoV3(3:length(t2at3)) ] ;

ddx = [ novoA1 novoA2(2:length(t1at2)) novoA3(3:length(t2at3)) ] ;

```

```

%
%
% T r a j e t o r i a : R e t a

%a = (yf - yi)/(xf - xi);
%b = yi - a*xi;
a = -365/635;
b = 135*(-365/635) + 500;
y = a*x + b ;
z = 175*ones(size(x));
%
%

q = 0 ;

for n=1:length(x)
    if x(n) > 0
        q = q+1 ;
        xm(q) = x(n) ;
    end
end

%

saco = 0 ;
asco = 0 ;

D = 135;

for j=1:length(x)
    if x(j) > 0

        for i=1:length(xm)

            raizl4(i) = ( y(i)^2 )*( x(i)^2 ) + ( x(i)^4 ) - ( x(i)^2 )*(
D^2 ) ;
            divil4(i) = ( y(i)^2 )+( x(i)^2 ) ;
            numel4(i) = -(-(1/2)*(( 2*D*y(i) + 2*(sqrt(raizl4(i))))*y(i)
)/ divil4(i)) + D) / x(i) ;
            divvl4(i) = (1/2)*(( 2*D*y(i) + 2*sqrt(raizl4(i)) ) /
divil4(i)) ;

            tetal4(i) = atan2(numel4(i) , divvl4(i)) ;

            zl4(i) = z(i) ;

            r14(i) = cos(tetal4(i))*x(i) + sin(tetal4(i))*y(i) ;

            z(i) = zl4(i) ;
            r(i) = r14(i) ;

            saco = 1 ;

        end ;

    else

```

```

        for k=(i+1):length(z)

            raiz23(k) = ( y(k)^2 )*( x(k)^2 ) + ( x(k)^4 ) - ( x(k)^2 )*(
D^2 ) ;
            divi23(k) = ( y(k)^2 )+( x(k)^2 ) ;
            nume23(k) = -(-(1/2)*(( 2*D*y(k) - 2*(sqrt(raiz23(k))))*y(k)
)/ divi23(k)) + D) / x(k) ;
            divv23(k) = (1/2)*(( 2*D*y(k) - 2*sqrt(raiz23(k)) ) /
divi23(k)) ;

            teta23(k) = atan2(num23(k) , divv23(k));

            z23(k) = z(k) ;

            r23(k) = cos(teta23(k))*x(k) + sin(teta23(k))*y(k) ;

            z(k) = z23(k) ;
            r(k) = r23(k) ;

            asco = 1 ;

        end;

    end;

end

%
% G r a f i c o s
%
eixo = [ 0:1:450 ] ;

if sacco == 1 & asco == 0
    teta = teta14 ;
    r = r14 ;
elseif sacco == 0 & asco == 1
    teta = teta23(i+1:length(teta23)) ;
    r = r23(i+1:length(r23)) ;
else
    teta = [ teta14 teta23(i+1:length(teta23)) ] ;
    r = [ r14 r23(i+1:length(r23)) ] ;
end

for i=1:length(z)
    %clf
    view(43,66)
    axis([-450 450 -450 450 0 300])
    Q(i,:) = [ 0 -D*sin(teta(i)) r(i)*cos(teta(i)) - D*sin(teta(i))
] ;
    R(i,:) = [ 0 D*cos(teta(i)) r(i)*sin(teta(i)) + D*cos(teta(i))
] ;
    P(i,:) = [ z(i) z(i) z(i)
] ;
    line(Q(i,:),R(i,:),P(i,:)) ;
    hold on

```

```

    plot3(x,y,z,'r','LineWidth',3)
    plot3(zeros(size(eixo)),zeros(size(eixo)),eixo,'k','LineWidth',2)
    plot3(eixo,zeros(size(eixo)),zeros(size(eixo)), 'k','LineWidth',2)
    plot3(zeros(size(eixo)),eixo,zeros(size(eixo)), 'k','LineWidth',2)
    grid on
    pause(0.1)
    view(43,66)
end

%


---



for i=1:length(teta)-1
    tetaponto(i) = ( teta(i+1) - teta(i) ) / ( t(i+1) - t(i) ) ;
end

for i=1:length(y)-1
    dy(i) = ( y(i+1) - y(i) ) / ( t(i+1) - t(i) ) ;
end

for i=1:length(dy)-1
    ddy(i) = ( dy(i+1) - dy(i) ) / ( t(i+1) - t(i) ) ;
end

%


---



%clf

figure(1)
plot(x,y,'r*--')
xlabel('X (m)')
ylabel('Y (m)')
zlabel('Z (m)')
title('TRAJETÓRIA: R E T A')
grid on
axis equal

figure(2)
subplot(3,1,1); plot(t,x,'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('x (m)')
title('POSIÇÃO ESPAÇO CARTESIANO (X)')
grid on

subplot(3,1,2); plot(t,dx,'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('dx (m/s)')
title('VELOCIDADE ESPAÇO CARTESIANO (X)')
grid on

subplot(3,1,3); plot(t0at1,novoA1,'k-',tlat2,novoA2,'k-
',t2at3,novoA3,'k-')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('ddx (m/s^2)')
title('ACELERAÇÃO ESPAÇO CARTESIANO (X)')
grid on

```

```

figure(3)
subplot (3,1,1); plot(t,y,'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('y (m)')
title('POSIÇÃO ESPAÇO CARTESIANO (Y)')
grid on

subplot(3,1,2); plot(t(1:31),dy(1:31),'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('dy (m/s)')
title('VELOCIDADE ESPAÇO CARTESIANO (Y)')
grid on

subplot(3,1,3);
plot(t0at1(1:7),ddy(1:7),'k',t1at2(1:15),ddy(9:23),'k',t2at3(3:7),ddy(26:30),
'k')
%subplot(3,1,3); plot(t(1:30),ddy(1:30),'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('ddy (m/s^2)')
title('ACELERAÇÃO ESPAÇO CARTESIANO (Y)')
grid on

figure(4)
subplot (3,1,1); plot(t,teta*180/pi,'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('teta (graus)')
title('POSIÇÃO ESPAÇO DA JUNTA 1')
grid on

subplot (3,1,2); plot(t,r,'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('r (m)')
title('POSIÇÃO ESPAÇO DA JUNTA 2')
grid on

subplot (3,1,3); plot(t,z,'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('z (m)')
title('POSIÇÃO ESPAÇO DA JUNTA 3')
grid on

%

```

---

## APÊNDICE F – Programa MatLab - Trajetória: Arco de Circunferência

```

clear

%
%
%           P l a n e j a m e n t o   d e   T r a j e t ó r i a
%           A r c o   d e   C i r c u n f e r ê n c i a
%
%           d e s e n v o l v i d o   p o r :
%           Aurelio Moreira da Silva Neto
%
%
%   Esse material foi produzido pelo autor e pode ser reproduzido
%   desde que seja mencionada a fonte e desde que seja dado conhecimento
%   ao autor.
%
%
%-----
% D a d o s   d e   E n t r a d a   ( x i , x f , t f )
%
xi = 400 ;
xf = -135 ;
tf = 16 ;
%
ti = 0 ;
t1 = tf/4 ;
t2 = (3/4)*tf ;
t3 = tf ;
v = 2*(xf - xi) / ( t3 + t2 - t1) ;
%
%
%-----
% D e t e r m i n a c a o   d e   x ,   y ,   z   e   t
% T e m p o   T o t a l   =   t 0 a t 3
% z = c o n s t a n t e

t0at1 = [ 0 : 0.5 : t1 ] ;
novoX1 = xi + (( v/(2*t1))*(t0at1.^2)) ;
novoV1 = (v/t1)*t0at1 ;
novoA1 = (v/t1)*ones(size(t0at1)) ;

t1at2 = [ t1 : 0.5 : t2 ] ;
novoX2 = (v*t1at2) + ((xf + xi - (v*t3))/2) ;
novoV2 = v*ones(size(novoX2)) ;
novoA2 = zeros(size(t1at2)) ;

t2at3 = [ t2 : 0.5 : t3 ] ;
novoX3 = xf - ((v/(2*t1))*(t2at3.^2 + t3.^2)) + ((v/t1)*t3*t2at3) ;
novoV3 = (v/t1)*t3 - (v/t1)*t2at3 ;
novoA3 = (-v/t1)*ones(size(t2at3));

t = [ t0at1 t1at2(2:length(t1at2)) t2at3(3:length(t2at3)) ] ;

x = [ novoX1 novoX2(2:length(t1at2)) novoX3(3:length(t2at3)) ] ;

dx = [ novoV1 novoV2(2:length(t1at2)) novoV3(3:length(t2at3)) ] ;

```



```

ddx = [ novoA1 novoA2(2:length(tlat2)) novoA3(3:length(t2at3)) ] ;
%
%
% Trajetoria: Arco de Circunferencia
%
raio = sqrt(xi^2 +xf^2) ;
y = sqrt( raio^2-(x.^2) );
z = 175*ones(size(x));
%
%
q = 0 ;

for n=1:length(x)
    if x(n) > 0
        q = q+1 ;
        xm(q) = x(n) ;
    end
end
%
%
saco = 0 ;
asco = 0 ;

D = 135;

for j=1:length(x)

    if x(j) > 0

        for i=1:length(xm)

            raiz14(i) = ( y(i)^2 )*( x(i)^2 ) + ( x(i)^4 ) - ( x(i)^2 )*(
D^2 ) ;
            divi14(i) = ( y(i)^2 )+( x(i)^2 ) ;
            numel4(i) = -(-(1/2)*(( 2*D*y(i) + 2*(sqrt(raiz14(i))))*y(i)
)/ divi14(i)) + D) / x(i) ;
            divv14(i) = (1/2)*(( 2*D*y(i) + 2*sqrt(raiz14(i)) ) /
divi14(i)) ;

            tetal4(i) = atan2(numel4(i) , divv14(i)) ;

            z14(i) = z(i) ;

            r14(i) = cos(tetal4(i))*x(i) + sin(tetal4(i))*y(i) ;

            z(i) = z14(i) ;
            r(i) = r14(i) ;

            saco = 1 ;

        end ;
    end ;
end ;

```

```

else

    for k=(i+1):length(z)

        raiz23(k) = ( y(k)^2 )*( x(k)^2 ) + ( x(k)^4 ) - ( x(k)^2 )*(
D^2 ) ;
        divi23(k) = ( y(k)^2 )+( x(k)^2 ) ;
        nume23(k) = -(-(1/2)*(( 2*D*y(k) - 2*(sqrt(raiz23(k))))*y(k)
)/ divi23(k)) + D) / x(k) ;
        divv23(k) = (1/2)*(( 2*D*y(k) - 2*sqrt(raiz23(k)) ) /
divi23(k)) ;

        teta23(k) = atan2(nume23(k) , divv23(k));

        z23(k) = z(k) ;

        r23(k) = cos(teta23(k))*x(k) + sin(teta23(k))*y(k) ;

        z(k) = z23(k) ;
        r(k) = r23(k) ;

        asco = 1 ;

    end;

end;

end
%
%
%G r a f i c o s

figure(1)
hold on
eixo = [ 0:1:450 ] ;

if saco == 1 & asco == 0
    teta = teta14 ;
    r = r14 ;
elseif saco == 0 & asco == 1
    teta = teta23(i+1:length(teta23)) ;
    r = r23(i+1:length(r23)) ;
else
    teta = [ teta14 teta23(i+1:length(teta23)) ] ;
    r = [ r14 r23(i+1:length(r23)) ] ;
end

for i=1:length(z)
    %clf
    view(43,66)
    axis([-450 450 -450 450 0 300])
    Q(i,:) = [ 0 -D*sin(teta(i)) r(i)*cos(teta(i)) - D*sin(teta(i))
] ;

```

```

        R(i,:) = [ 0      D*cos(teta(i))    r(i)*sin(teta(i)) + D*cos(teta(i))
    ] ;
        P(i,:) = [ z(i)      z(i)      z(i)
    ] ;
        line(Q(i,:),R(i,:),P(i,:)) ;
        hold on
        plot3(x,y,z,'r','LineWidth',3)
        plot3(zeros(size(eixo)),zeros(size(eixo)),eixo,'k','LineWidth',2)
        plot3(eixo,zeros(size(eixo)),zeros(size(eixo)), 'k','LineWidth',2)
        plot3(zeros(size(eixo)),eixo,zeros(size(eixo)), 'k','LineWidth',2)
        grid on
        pause(0.1)
        view(43,66)

```

```
end
```

```

%
for i=1:length(teta)-1
    tetaponto(i) = ( teta(i+1) - teta(i) ) / ( t(i+1) - t(i) ) ;
end

```

```

for i=1:length(y)-1
    dy(i) = ( y(i+1) - y(i) ) / ( t(i+1) - t(i) ) ;
end

```

```

for i=1:length(dy)-1
    ddy(i) = ( dy(i+1) - dy(i) ) / ( t(i+1) - t(i) ) ;
end

```

```

%
%clf

figure(1)
plot(x,y,'r*--')
xlabel('X (m)')
ylabel('Y (m)')
zlabel('Z (m)')
title('TRAJETÓRIA: A R C O D E C I R C U N F E R Ê N C I A')
grid on
axis equal

figure(2)
subplot(3,1,1); plot(t,x,'k')
xlabel('t (s)')
ylabel('x (m)')
title('POSIÇÃO ESPAÇO CARTESIANO (X)')
grid on

subplot(3,1,2); plot(t,dx,'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('dx (m/s)')
title('VELOCIDADE ESPAÇO CARTESIANO (X)')
grid on

```

```

subplot(3,1,3); plot(t0at1,novoA1,'k-',t1at2,novoA2,'k-
',t2at3,novoA3,'k-')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('ddx (m/s^2)')
title('ACELERAÇÃO ESPAÇO CARTESIANO (X)')
grid on

figure(3)
subplot (3,1,1); plot(t,y,'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('y (m)')
title('POSIÇÃO ESPAÇO CARTESIANO (Y)')
grid on

subplot(3,1,2); plot(t(1:31),dy(1:31),'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('dy (m/s)')
title('VELOCIDADE ESPAÇO CARTESIANO (Y)')
grid on

subplot(3,1,3); plot(t(1:30),ddy(1:30),'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('ddy (m/s^2)')
title('ACELERAÇÃO ESPAÇO CARTESIANO (Y)')
grid on

figure(4)
subplot (3,1,1); plot(t,teta*180/pi,'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('teta (graus)')
title('POSIÇÃO ESPAÇO DA JUNTA 1')
grid on

subplot (3,1,2); plot(t,r,'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('r (m)')
title('POSIÇÃO ESPAÇO DA JUNTA 2')
grid on

subplot (3,1,3); plot(t,z,'k')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('z (m)')
title('POSIÇÃO ESPAÇO DA JUNTA 3')
grid on

```

## APÊNDICE G – Programa MatLab - Projeto de Controle

```

%
%
%               C o n t r o l e
%
%       d e s e n v o l v i d o   p o r :
%       Aurelio Moreira da Silva Neto
%
%
%   Esse material foi produzido pelo autor e pode ser reproduzido
%   desde que seja mencionada a fonte e desde que seja dado conhecimento
%   ao autor.
%
%-----
D a d o s   d e   E n t r a d a

Jmv  = 0.0039;
Jp1v = 0.001;
Mc1v = Jmv + Jp1v;
%M1  = 0.01;

Cmv  = 0.5;
Kt   = 0.53;
Kb   = 0.53;
Ra   = 4.9;
Clv  = 0.5;
Cc1v = Cmv + (Kt*Kb)/Ra + Clv;
%C1  = 100;

Kt1v = 10000;
Kct1v= Kt1v;
%K1  = 100000;

Jp2v = 0.015;
Jp3v = 0.001;
Jp4v = 0.001;
rp4v = 0.023;
C3v  = 0.5;
m2   = 21;
a    = rp4v;
b    = Jp4v + (rp4v)^2*m2;
d    = Jp2v + Jp3v;
C2v  = 0.5;
Cc2v = (C2v - ((a*d*C3v)/(b)));
%C2  = C1;

Kt2v = 20000;
Kct2v = (Kt1v - rp4v*Kt2v - (a*d*rp4v*Kt2v)/b);
%K2  = 200000;

i    = 3.00;
g    = -9.81;

%
%-----
%Matrizes - Forma Canônica Controlável

A = [0, 1, 0;...
```

```

-Kct1v/(Mclv*i^2), -Cc1v/Mclv, Kct1v/(Mclv*i);...

Kt1v/(Cc2v*i), 0, -Kct2v/Cc2v];

B = zeros(3,3); B(2,2) = Kt/(Mclv*Ra); B(3,3) = ((a*d*m2)/(Cc2v*b));

C = zeros(3,3); C(3,3)= 1;

D = C*0;

%
%Matriz de observabilidade

M = [B,A*B,(A^2)*B];

t = (0:0.001:2);
[l,c] = size(t);

posto = rank(M)

sys = ss(A,B,C,D);

damp (sys)

r = ones(l,c);

u = [r*0;r*0;r];

y = lsim(sys,u,t);

z = y*rp4v;

%
%Alocação de Polos

p = [-3.1,-6.0,-31];

%p = [-2+4*i,-2-4*i,-25];

K1 = place(A,B,p)

sysc1 = ss(A-B*K1,B,C,D);

damp (sysc1)

sysc2 = ss(A-B*K1,B*100,C,D);

yc1 = lsim(sysc1,u,t);

yc2 = lsim(sysc2,u,t);

zc1 = yc1*rp4v;

zc2 = yc2*rp4v;

```

```
%  
%G r a f i c o s
```

---

```
figure(1)  
plot(t',zc1(:,3))  
title('POSIÇÃO: ALOCAÇÃO DE PÓLOS')  
xlabel('Tempo (s)')  
ylabel('Translação do eixo vertical (m)')  
grid on  
  
figure(2)  
plot(t',zc2(:,3))  
title('POSIÇÃO: ALOCAÇÃO DE PÓLOS + GANHO PROPORCIONAL')  
xlabel('Tempo (s)')  
ylabel('Translação do eixo vertical (m)')  
line(t,1.0001,'Color','w','LineWidth',0.5)  
line(t,1,'Color','k','LineWidth',0.5)  
grid on
```

## ANEXO A – Especificação Técnica do Servomotor Moog - G413

### TECHNICAL DATA

# G413

#### PERFORMANCE SPECIFICATIONS FOR STANDARD MODELS

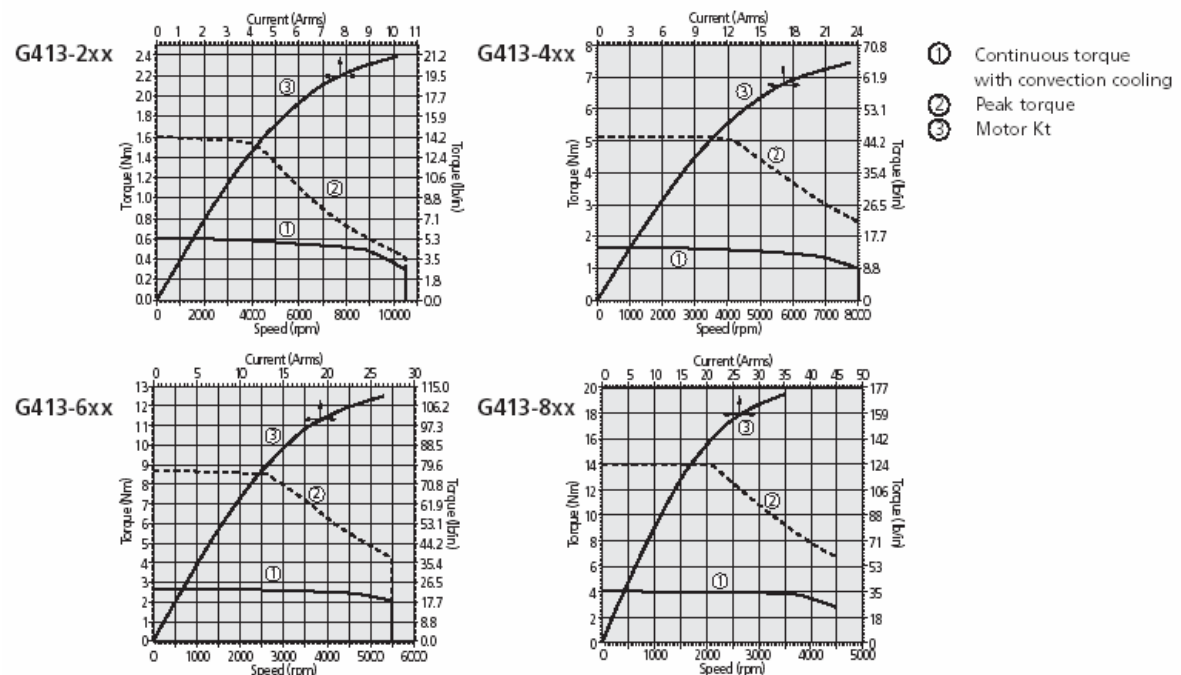
		Metric [English]	G413-2xx	G413-4xx	G413-6xx	G413-8xx
Continuous stall torque	$M_0$	Nm [lb-in]	0.60 [5.3]	1.7 [14.6]	2.7 [23.9]	4.0 [35.4]
Continuous stall current	$I_0$	Arms	1.5	3.1	3.4	4.4
Peak torque	$M_{max}$	Nm [lb-in]	1.6 [14.2]	5.1 [45.1]	8.7 [77.0]	14.0 [124]
Peak current	$I_{max}$	Arms	4.6	10.6	12.4	16.3
Nominal speed	$n_n$	rpm	8800	6300	4800	3900
Nominal power	$P_n$	kW [hp]	0.45 [0.60]	0.95 [1.3]	1.2 [1.5]	1.4 [1.9]
Maximum speed	$n_{max}$	rpm	10500	8000	5500	4500
Torque constant	$k_t$	Nm/Arms [lb-in/Arms]	0.40 [3.5]	0.53 [4.7]	0.80 [7.1]	0.90 [8.0]
Motor terminal resistance	$R_{tt}$	Ohm	15.2	4.9	5.1	4.1
Motor inductance	$L_{tt}$	mH	18.8	8.5	10.3	8.9
Inertia w/o brake	$J$	kg cm <sup>2</sup> [lb-insec <sup>2</sup> x 10 <sup>-4</sup> ]	0.16 [1.4]	0.39 [3.5]	0.62 [5.5]	0.97 [8.6]
Mass w/o brake	$m$	kg [lb]	1.4 [3.1]	2.0 [4.4]	2.6 [5.7]	3.5 [7.7]

Notes: Refer to page 17 for notes on performance specifications.

Optional Holding Brake	metric [english]	Option 1	Option 2
Holding torque	Nm [lb-in]	1.5 [13.3]	3.0 [26.6]
Extra weight	kg [lb]	0.20 [0.44]	0.32 [0.70]
Inertia	kg cm <sup>2</sup> [lb-insec <sup>2</sup> x 10 <sup>-4</sup> ]	0.07 [0.62]	0.18 [1.59]
Power requirement	Watt [Watt]	11.0 [11.0]	10.0 [10.0]

For a complete list of options and accessories, see pages 14-16.

#### PERFORMANCE SPECIFICATIONS FOR STANDARD MODELS

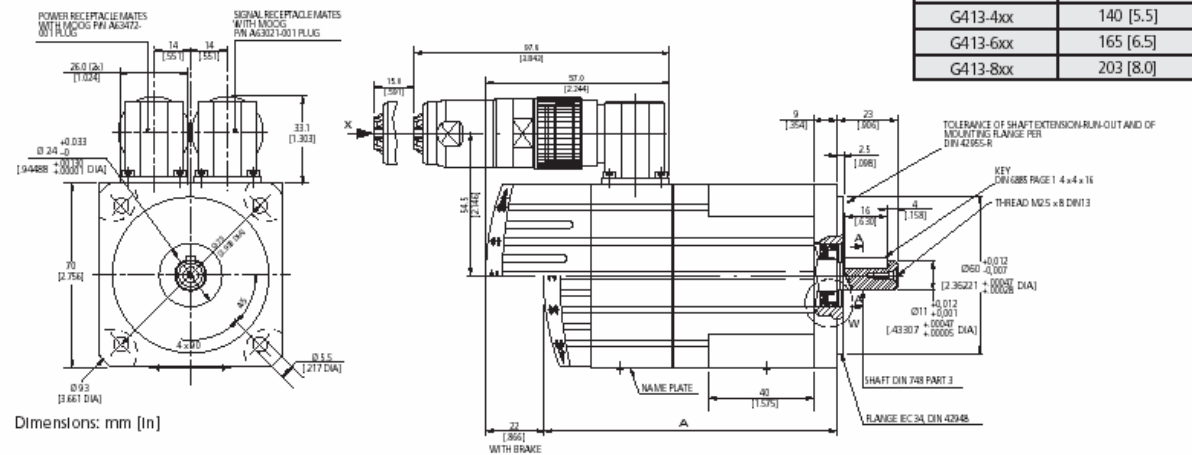




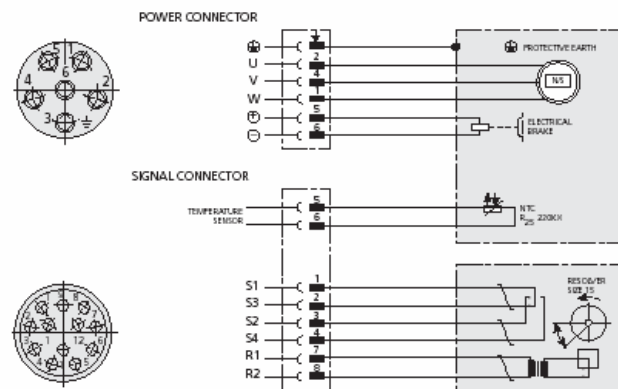
## TECHNICAL DATA

# G413

### INSTALLATION DIAGRAM



### WIRING DIAGRAM



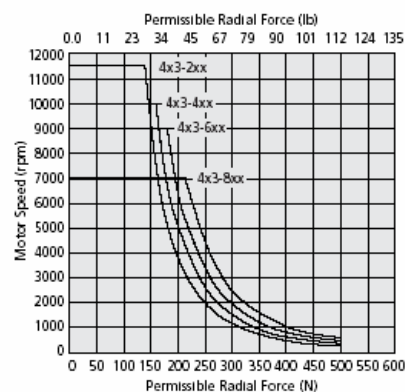
### BEARING LOAD DIAGRAM

#### Maximum Permissible Shaft Load

The maximum permissible radial load depends on desired service length. The bearing load curves illustrated support an operational life of 20,000 hours (L10h) with axial loads up to 75 N. Consult Moog for extended service life requirements or alternate load conditions.

Notes:

1. Load capacity referenced to middle of output shaft.
2. Maximum axial load during installation: 150 N.



## ANEXO B – Especificação Técnica do Servomotor Moog - G414

### TECHNICAL DATA

# G414

#### PERFORMANCE SPECIFICATIONS FOR STANDARD MODELS

		Metric [English]	G414-2xx	G414-4xx	G414-6xx	G414-8xx	G414-9xx
Continuous stall torque 1	$M_0$	Nm [lb-in]	1.3 [11.5]	2.7 [24.0]	5.2 [46.0]	9.0 [79.7]	11.0 [97.4]
Continuous stall current 1	$I_0$	Arms	3.1	4.8	6.7	9.2	9.5
Peak torque 2	$M_{max}$	Nm [lb-in]	3.0 [26.5]	6.6 [58.4]	12.6 [112]	23.0 [204]	31.0 [274]
Peak current 2	$I_{max}$	Arms	9.0	15.0	20.0	28.0	30.0
Nominal speed 4	$n_N$	rpm	5800	5500	4300	3500	3000
Nominal power 4	$P_N$	kW [hp]	0.58 [0.78]	0.95 [1.3]	1.8 [2.4]	2.3 [3.1]	2.4 [3.2]
Maximum speed 6	$n_{max}$	rpm	10000	8000	5800	4700	3800
Torque constant	$k_T$	Nm/Arms [lb-in/Arms]	0.42 [3.7]	0.56 [5.0]	0.8 [6.9]	0.99 [8.8]	1.2 [10.3]
Motor terminal resistance 7	$R_{tt}$	Ohm	5.1	2.7	1.5	0.90	0.96
Motor inductance 7	$L_{tt}$	mH	8.5	5.8	4.6	3.5	4.0
Inertia w/o brake	J	kg cm <sup>2</sup> [lb-insec <sup>2</sup> x 10 <sup>-4</sup> ]	1.05 [9.3]	1.5 [13.7]	2.6 [23.0]	4.7 [41.6]	6.8 [60.2]
Mass w/o brake	m	kg [lb]	3.0 [6.6]	3.6 [7.9]	4.7 [10.4]	6.9 [15.2]	9.1 [20.1]

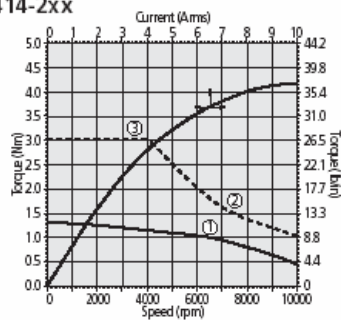
Notes: 1–7 refer to page 17.

Optional Holding Brake	metric [english]	Option 1	Option 2
Holding torque	Nm [lb-in]	6.0 [53.0]	15.0 [133]
Extra weight	kg [lb]	0.50 [1.1]	0.8 [1.8]
Inertia	kg cm <sup>2</sup> [lb-insec <sup>2</sup> x 10 <sup>-4</sup> ]	0.50 [4.4]	1.0 [8.9]
Power requirement	Watt [Watt]	13.0 [13.0]	19.0 [19.0]

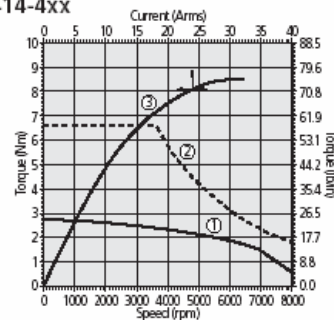
For a complete list of options and accessories, see pages 14-16.

#### PERFORMANCE SPECIFICATIONS FOR STANDARD MODELS

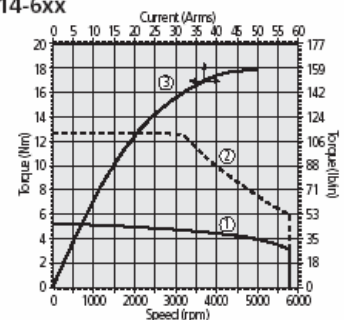
G414-2xx



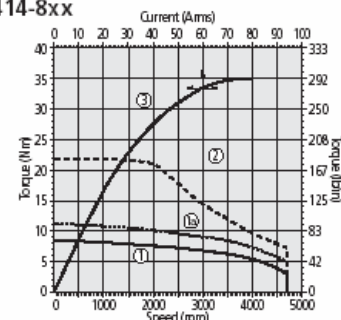
G414-4xx



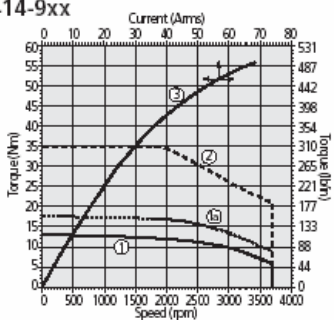
G414-6xx



G414-8xx



G414-9xx

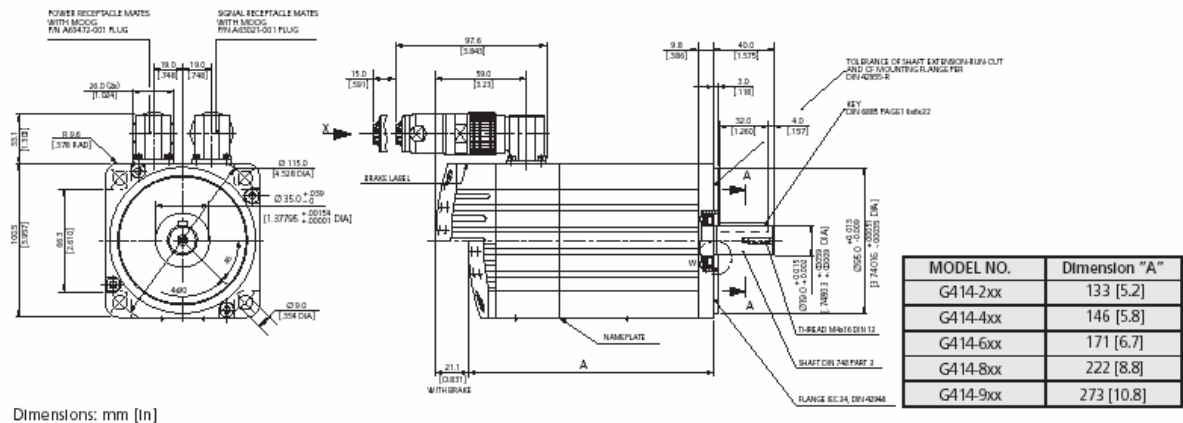


- ① Continuous torque with convection cooling
- ①a Continuous torque with optional fan cooling (select models)
- ② Peak torque
- ③ Motor Kt

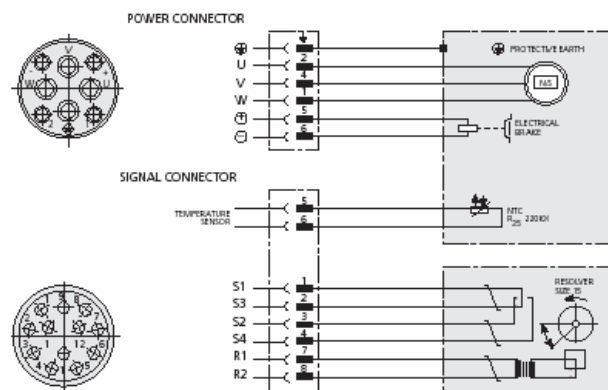
## TECHNICAL DATA

# G414

### INSTALLATION DIAGRAM



### WIRING DIAGRAM



### BEARING LOAD DIAGRAM

#### Maximum Permissible Shaft Load

The maximum permissible radial load depends on desired service length. The bearing load curves illustrated support an operational life of 20,000 hours (L10h) with axial loads up to 150 N. Consult Moog for extended service life requirements or alternate load conditions.

#### Notes:

1. Load capacity referenced to middle of output shaft.
2. Maximum axial load during installation: 300 N.

