



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Campus de São José do Rio Preto

---

Michelli Maldonado Carretero

*Formulações Fortes para o Problema Integrado de  
Dimensionamento e Sequenciamento da Produção*

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática

---

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas  
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000  
São José do Rio Preto - SP - Brasil  
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Michelli Maldonado Carretero

*Formulações Fortes para o Problema Integrado  
de Dimensionamento e Sequenciamento da  
Produção*

Orientadora:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria do Socorro Nogueira Rangel

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS  
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

07 de janeiro de 2011

Carretero, Michelli Maldonado.

Formulações Fortes para o Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento da Produção / Michelli Maldonado Carretero. São José do Rio Preto: [s.n.], 2011.

101 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Socorro Rangel.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Programação (Matemática). 2. Pesquisa Operacional. 3. Planejamento da produção. I. Rangel, Socorro II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas III. Título.

CDU - 519.87

Michelli Maldonado Carretero

*Formulações Fortes para o Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento da Produção*

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria do Socorro Nogueira Rangel  
Professor Adjunto  
UNESP - São José do Rio Preto  
Orientadora

---

Prof. Dr. Alistair Clark  
Professor Doutor  
University of the West of England

---

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo  
Professor Assistente Doutor  
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 07 de janeiro de 2011.

Aos meus amados pais, Dorival e Roseli,  
que lutaram por mim em todos os sentidos;  
À minha amada avó, Linda (*in memoriam*)  
que muita falta faz.  
*Dedico.*

# *Agradecimentos*

Estes anos em que fiz esta pesquisa foram uma árdua jornada de desafio, construção e amadurecimento. Nenhum empreendimento é realizado de forma fácil e sem esforço. Mas quando temos pessoas que nos apóiam, nos incentivam e nos mostram que vale a pena continuar, tudo fica mais fácil.

Agradecer aos meus pais, Dorival e Rose, chega a ser algo redundante. Sei que eles sempre estarão do meu lado me ajudando. Muito obrigada pelo apoio incondicional, pelo amor e por acreditarem em mim quando eu mesma não acreditava.

Agradeço ao meu grande exemplo acadêmico, a professora Socorro. Para mim, é uma imensa honra e orgulho tê-la como orientadora por mais de quatro anos (desde a graduação). Não esqueço seus eternos ensinamentos, seus preciosos conselhos (nem sempre acadêmicos) e sua inestimável confiança. Sei que muitas vezes foram necessários alguns puxões de orelha, mas sempre aprendi muito com eles. Muito obrigada!

Mas também para chegar onde cheguei, tive que passar por muitos professores, por muitas disciplinas que tiravam o meu sono, mas que foram essenciais na minha formação. Mas muitos desses professores, foram muito mais que autoridade da sala de aula, foram amigos, foram companheiros, não poderia esquecer de agradecê-los. Obrigada professora Gorete pelos anos como tutora enquanto eu estava no PET- Matemática foram anos que ajudaram no meu amadurecimento como pessoa e como estudante. Agradeço ao professor Adalberto que também participou todos o tempo da minha permanência no PET e ao professor Silvio por todos os conselhos e dicas. Agradeço sincera e profundamente a todos vocês que muito me encorajaram e me ajudaram a produzir algo de valor em minha vida.

Agradeço ao professor Alistair por participar da minha banca e pelos conselhos. Agradeço também pela confiança que depositou em mim estando disposto a continuar a trabalhar comigo.

E como agradecer os meus amigos? Como falar para eles em tão pouco espaço o quanto eles me ajudaram e me proporcionaram momentos inesquecíveis durante todos esses anos?

Agradeço a Acácia (gorda) que sempre esteve ali presente, mesmo com tanta coisa pra

fazer, sempre me ouviu, sempre me levou para festar quando eu estava pra baixo e mesmo sem entender o que estava acontecendo, sempre dizia, "vai dar tudo certo". Obrigada você foi/ é simplesmente uma amiga incrível.

Dizer obrigada pra Renatinha não é suficiente. Agradeço por tudo o que você fez, faz e sei que ainda vai fazer por mim, por todos os momentos de descontração e pelas muitas broncas que você me deu, pelos muitos conselhos (alguns bons outros dos quais não posso comentar aqui). Mesmo longe de rio preto esse último ano (o que me deixou muito triste), você me ajudou muito. E sempre que você vinha me visitar era só alegria. Obrigada por fazer parte da minha vida.

Tenho que agradecer a Glauce, pois graças a ela, posso dizer que o meu mestrado teve muitos momentos divertidos. E ter uma amiga que nunca reprime a gente é algo maravilhoso, obrigada por tudo, pelas palhaçadas, por me ouvir mesmo sem nunca saber o que dizer, mas estar ali só pra ouvir. Obrigada por sempre atender todos os meus chamados de socorro. Foram muitas as partidas de truco, os sinais secretos e os churras de última hora.

A vezes até tento ficar brava com o Tiago e o Diego, mas com certeza seria chata a salinha sem eles lá para me atormentar. E com certeza outros não aturariam a minha bagunça. Obrigada por tudo.

Agradeço a Andrea e a Ana Luiza, muito mais que amigas, minhas companheiras de casa, elas que aguentaram tudo, todos os momentos de tensão, todos os dias que não limpei a cozinha, pois tinha que terminar algum trabalho. Obrigada.

Agradeço a Jussara que de um dia para o outro se tornou minha amiga de infância e que sempre está preocupada com a minha felicidade, muito obrigada. Agradeço a Amanda Buozi, companheira oficial de fofoca. A Alyne, que sempre esteve disposta a me ajudar. Ao Marcos Proença, meu consultor oficial de Latex, ao Guilherme que sempre estava a postos para me dar conselhos, ao Junior que sempre esteve presente. A Thaisa que sempre esteve torcendo por mim. Ao Marcos William e a Meire que sempre estavam ali por perto e participando de tudo. A Lucero, que aqui passou e deixou muita alegria. A Olga sempre presente nos almoços, ao Marcos (Lab) por sempre me ajudar quando os programas simplesmente paravam.

Agradeço a todos que diretamente ou indiretamente tornou essa pesquisa possível.

Mais uma etapa foi concluída, mas sei que ainda é só o começo.

Ter tempo é questão de preferência.



# *Resumo*

Em alguns setores, o planejamento da produção envolve dois aspectos: o dimensionamento do tamanho dos lotes e a programação da produção (sequenciamento dos lotes). O primeiro problema consiste em determinar o tamanho dos lotes de produção de cada item a ser produzido em uma ou mais máquinas em cada período ao longo de um horizonte de planejamento finito. O segundo problema consiste em encontrar a ordem em que os lotes devem ser produzidos em um dado conjunto de máquinas. Estes dois aspectos do planejamento da produção podem ser tratados de forma independente: em um estágio é resolvido o problema de dimensionamento dos lotes e no outro, realizado antes ou depois, é resolvido o problema de sequenciamento. No entanto, uma tendência recente na literatura são trabalhos que apresentam modelos matemáticos que capturam simultaneamente as relações entre os dois problemas. Na literatura pode-se encontrar modelos integrados que incluem restrições de eliminação de subrotas, propostas para o Problema do Caixeiro Viajante (PCV), para formular as restrições de sequenciamento. No entanto, alguns dos modelos propostos usam restrições de ordem polinomial que fornecem uma relaxação linear fraca. O objetivo desse trabalho é avaliar o uso de inequações válidas, propostas na literatura, para obtenção de formulações mais fortes para o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção. Resultados computacionais usando exemplares aleatórios e exemplares da literatura mostram que as reformulações propostas são eficientes para cenários em que o modelo original não é eficiente.

**Palavras-chave:** Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes, Problema do Caixeiro Viajante, Restrições de Eliminação de Subrotas.

# *Abstract*

Often, the production planning involves the lot sizing and scheduling of items. The first problem is to determine the lot size of each item to be produced in one or more machines in each period over a finite planning horizon. The second problem is to find the order in which the items will be produced. These two aspects of the production planning can be treated independently: in one stage the lot sizing problem is solved, and in the other, that can be executed before or after, the scheduling problem is solved. A recent trend in the literature is to propose mathematical models that capture the relationships between these two problems. In the literature one can find integrated models that include subtour elimination constraints, proposed for the Traveling Salesman Problem, to formulate the scheduling decisions. However, in some of these models, constraints of polynomial order, that provides a weak linear relaxation, are used. The purpose of this study is to evaluate the use of valid inequalities proposed in the literature to obtain stronger formulations to the lot and scheduling problem. Computational results using random instances and instances from the literature show that the proposed formulations have a better performance in scenarios where the original model is not efficient.

**Keywords:** Lot sizing and Scheduling Problems, Traveling Salesman Problem, Subtour elimination constraints.

# *Sumário*

<b>Lista de Símbolos</b>	p. 12
<b>Lista de Tabelas</b>	p. 15
<b>Introdução</b>	p. 17
<b>1 Conceitos Básicos da Teoria de Poliedros</b>	p. 19
1.1 Poliedros . . . . .	p. 19
1.2 Inequação Válida, Face e Faceta . . . . .	p. 22
1.3 Projeção e <i>Lifting</i> . . . . .	p. 29
<b>2 Problemas de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes</b>	p. 33
2.1 Dimensionamento de Lotes . . . . .	p. 33
2.2 Sequenciamento de Lotes . . . . .	p. 38
2.3 Problemas Integrados de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes - PIDSL . . . . .	p. 39
2.4 Aplicações do PIDSL . . . . .	p. 43
2.4.1 Setores Diversos . . . . .	p. 43
2.4.2 Setor de Bebidas . . . . .	p. 44
<b>3 Reformulações</b>	p. 50
3.1 Reformulação Desrochers e Laporte . . . . .	p. 50
3.1.1 PCVA-DL . . . . .	p. 51
3.1.2 Reformulação I do P1S1MTS: P1S1MTS-DL . . . . .	p. 53

3.2	Reformulação Sherali e Driscoll . . . . .	p. 54
3.2.1	PCVA - SD . . . . .	p. 60
3.2.2	Reformulação II do P1S1MTS: P1S1MTS-SD . . . . .	p. 62
3.3	Avaliação Computacional Preliminar - Exemplar Ilustrativo . . . . .	p. 64
<b>4</b>	<b>Estudo Computacional</b>	p. 67
4.1	Descrição do Estudo Computacional . . . . .	p. 67
4.2	Resultados com Exemplos Aleatórios . . . . .	p. 70
4.3	Resultados com Exemplos baseados em Dados Reais . . . . .	p. 81
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	p. 89
	<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 91
	<b>Anexo A O Problema do Caixeiro Viajante</b>	p. 96
A.1	Definição . . . . .	p. 96
A.2	Formulação Matemática . . . . .	p. 97
A.2.1	Eliminação de Subrotas - Formulação DFJ . . . . .	p. 98
A.2.2	Eliminação de Subrotas - Formulação MTZ . . . . .	p. 99

## *Lista de Símbolos*

Conjuntos:

$J$ : conjunto de itens;

$L$ : conjunto de xaropes;

$N$ : conjunto de subperíodos;

$S_t$ : conjunto de subperíodos do período  $t$ ;

$T$ : número total de períodos;

Parâmetros:

$a_j$ : tempo necessário para produzir uma unidade do item  $j$ ;

$a_j^{II}$ : tempo necessário para produzir uma unidade do item  $j$  no estágio II;

$b_{ij}$ : tempo de troca do item  $i$  para o item  $j$ ;

$b_{ij}^{II}$ : tempo de troca na máquina (estágio II) do item  $i$  para o item  $j$ ;

$d_t$ : demanda no período  $t$ ;

$d_{jt}$ : demanda do item  $j$  no período  $t$ ;

$g$ : custo de atraso;

$g_j$ : custo de atraso de uma unidade do item  $j$ ;

$h$ : custo de estoque;

$h_j$ : custo de estoque de uma unidade do item  $j$ ;

$I_{j0}^+$ : estoque inicial do item  $j$ ;

$I_{j0}^-$ : número de unidades em atraso do item  $j$  no início do horizonte de planejamento;

$K_t$ : capacidade de produção da máquina em cada período  $t$ ;

$K_t^{II}$ : capacidade de produção da máquina em cada período  $t$  (estágio II);

$K^I$ : capacidade total do tanque (Estágio I);  
 $m_j$ : produção mínima do produto  $j$ ;  
 $M$ : valor muito grande;  
 $q_l$ : quantidade mínima de xarope necessária para garantir a homogeneidade;  
 $r_{lj}$ : quantidade de xarope  $l$  necessária para a produção de uma unidade do item  $j$ ;  
 $st$ : custo/tempo de preparo da máquina;  
 $st_j$ : custo/tempo de preparo da máquina para a produção do item  $j$ ;  
 $s_{ij}$ : custo de troca do item  $i$  para o item  $j$ ;  
 $s_{ij}^{II}$ : custo de troca na máquina (estágio II) do item  $i$  para o item  $j$ ;  
 $y_{j0}^{II}$ : preparo inicial da máquina (estágio II) para a produção do item  $j$ ;  
 $\gamma_l$ : conjunto de itens que utilizam o xarope  $l$  para serem produzidos;  
 $\rho_j$ : tempo de preparo do item  $j$ .

Variáveis Contínuas:

$I_t$ : estoque no final do período  $t$ ;  
 $I_{jt}$ : estoque do item  $j$  no final do período  $t$ ;  
 $I_t^+$ : número de unidades em estoque no fim do período  $t$ ;  
 $I_{jt}^+$ : número de unidades em estoque do item  $j$  no fim do período  $t$ ;  
 $I_t^-$ : número de unidades em atraso no fim do período  $t$ ;  
 $I_{jt}^-$ : número de unidades em atraso do item  $j$  no fim do período  $t$ ;  
 $n_{lt}$ : utilização parcial de um tanque do xarope  $l$  no período  $t$ ;  
 $u_j$ : ordem em que o vértice  $j$  é visitado;  
 $u_{jt}$ : posição em que o item  $j$  é produzido no período  $t$ ;  
 $x_{js}$ : produção do item  $j$  no subperíodo  $s$ ;  
 $x_{js}^{II}$ : produção na máquina (estágio II) do item  $j$  no subperíodo  $s$ ;  
 $x_t$ : produção no período  $t$ ;

$x_{jt}$ : produção do item  $j$  no período  $t$ ;

$x_{jt}^{II}$ : produção na máquina (estágio II) do item  $j$  no período  $t$ ;

Variáveis Binárias:

$y_{js}$ : preparo da máquina para a produção do item  $j$  no subperíodo  $s$ ;

$y_{js}^{II}$ : preparo da máquina (estágio II) para a produção do item  $j$  no subperíodo  $s$ ;

$y_t$ : preparo da máquina no período  $t$ ;

$y_{jt}$ : preparo da máquina para a produção do item  $j$  no período  $t$ ;

$y_{ls}^I$ : preparo do tanque (estágio I) para a produção do xarope  $l$  no subperíodo  $s$ ;

$y_{lt}^I$ : preparo do tanque (estágio I) para a produção do xarope  $l$  no período  $t$ ;

$z_{ijs}$ : troca do item  $i$  para o item  $j$  no subperíodo  $s$ ;

$z_{ijs}^{II}$ : troca na máquina (estágio II) do item  $i$  para o item  $j$  no subperíodo  $s$ ;

$z_{ijt}$ : troca do item  $i$  para o item  $j$  no período  $t$ ;

$z_{ijt}^{II}$ : troca na máquina (estágio II) do item  $i$  para o item  $j$  no período  $t$ .

Variáveis Inteiras:

$w_{lt}$ : número de tanques do xarope  $l$  que devem ser produzidos no período  $t$ ;

## *Lista de Tabelas*

1	RMTZ $\times$ RDL . . . . .	p. 53
2	MTZ $\times$ SD - RL, Solução e Tempo Computacional . . . . .	p. 60
3	RMTZ $\times$ RSD - Nós . . . . .	p. 61
4	Custo de troca dos itens na máquina ( $s_{ij}$ ). . . . .	p. 64
5	Custos de estoque ( $h_j$ ) e atraso ( $g_j$ ) dos itens. . . . .	p. 64
6	Tempo por unidade de produção ( $a_j$ ). . . . .	p. 64
7	Demanda dos itens por período ( $d_{jt}$ ). . . . .	p. 65
8	Quantidade de xarope por unidade de produção ( $r_{lj}$ ). . . . .	p. 65
9	Tempos de troca dos itens ( $b_{ij}$ ). . . . .	p. 65
10	Exemplar Ilustrativo - <i>Branch and Bound</i> . . . . .	p. 65
11	Exemplar Ilustrativo - <i>Branch and Cut</i> . . . . .	p. 66
12	Planos de Cortes gerados pelos modelos . . . . .	p. 66
13	Diferenças entre as classes . . . . .	p. 68
14	Parâmetros para a geração dos dados aleatórios (Defalque <i>et al.</i> (2010))	p. 69
15	Número de Variáveis e de Restrições - Exemplos Aleatórios . . . . .	p. 69
16	Diferenças entre os exemplos S1-S10 (Ferreira <i>et al.</i> (2010)) . . . . .	p. 70
17	Número de Variáveis e Restrições - Exemplos Reais . . . . .	p. 70
18	Resultados F0 -Capacidade Folgada . . . . .	p. 72
19	Planos de Cortes - F0 - Capacidade Folgada . . . . .	p. 73
20	Resultados F0 - Capacidade Apertada . . . . .	p. 74
21	Planos de Cortes - F0 - Capacidade Apertada . . . . .	p. 75
22	Resultados - F1 - Capacidade Folgada . . . . .	p. 77



---

23	Planos de Cortes - F1 - Capacidade Folgada . . . . .	p. 78
24	Resultados F1 - Capacidade Apertada . . . . .	p. 79
25	Planos de Cortes F1 - Capacidade Apertada . . . . .	p. 80
26	MTZ $\times$ DL $\times$ SD . . . . .	p. 81
27	RL, Melhor Solução Encontrada e GAP - F0 . . . . .	p. 82
28	Número de Nós - F0 . . . . .	p. 82
29	Planos de Cortes - F0 . . . . .	p. 84
30	RL, Melhor Solução Encontrada e GAP - F1 . . . . .	p. 85
31	Número de Nós analisados e Nó da melhor solução - F1 . . . . .	p. 86
32	Planos de Cortes - F1 . . . . .	p. 87
33	Melhores Resultados . . . . .	p. 88

# *Introdução*

As indústrias buscam melhorar o planejamento de sua produção para obter um melhor posicionamento na concorrência dos mercados, minimizando o custo de sua produção e/ou aumentando a eficiência de seus processos produtivos. O planejamento de produção envolve o planejamento de aquisição de recursos e matérias-primas, assim como o planejamento das atividades relacionadas a transformação da matéria-prima em produtos, satisfazendo a demanda de consumidores da maneira mais eficiente e econômica possível.

Decisões de planejamento da produção sempre exerceram grande influência sobre o desempenho das empresas. Questões como dimensionamento e sequenciamento de lotes, adequação dos níveis de estoque, atendimento da demanda de mercado e a consequente sincronização de todos esses processos são ainda hoje desafios presentes na cadeia de suprimentos. O processo de dimensionar lotes de produção consiste em determinar quanto produzir de cada produto em cada período a fim de atender a uma demanda prevista sob as condições e capacidades operacionais existentes. Um dimensionamento incorreto dos lotes pode causar excesso de produto acabado em estoque, ou pedidos de venda não totalmente atendidos e eventuais perdas de material perecível. Por sua vez, sequenciar lotes de produção significa determinar em que ordem produzir esses lotes de forma a melhor aproveitar os recursos produtivos e atender aos prazos estabelecidos. Um sequenciamento ineficiente pode provocar o não cumprimento dos prazos, reduzir significativamente a capacidade da linha de produção, acumular estoques de produtos acabados, gerar custos maiores de preparação de máquinas, entre outros. A incorporação do sequenciamento da produção em modelos de dimensionamento de lotes tem sido objeto de estudo de diversos autores tais como Fleishmann e Meyr (1997), Drexel e Kimms (1997) e Meyr (2000). Vários modelos foram formulados representando diferentes tipos de situações que envolvem o dimensionamento e o sequenciamento da produção.

Os modelos matemáticos dos problemas que aparecem no planejamento de produção em geral e métodos de resoluções associados são amplamente estudados. Com o objetivo de aumentar a eficiência dos métodos de resoluções, existem muitos estudos sobre reformulações e inequações válidas que estão associadas diretamente com os métodos exatos de solução. Estes estudos estão voltados especialmente para o desenvolvimento de for-

mulações e inequações válidas fortes, determinando uma formulação que descreva ou se aproxime do envoltório convexo de um determinado conjunto de soluções viáveis de um Problema de Otimização Inteiro (OI) ou Inteiro Misto (OIM). Para um estudo aprofundado sobre métodos exatos de resolução, formulações e inequações válidas para problemas OI ou OIM gerais consulte, por exemplo, Nemhauser e Wolsey (1988), Wolsey (1998) e Pochet e Wolsey (2006). O objetivo desse trabalho é avaliar o uso de inequações válidas, propostas na literatura, para obtenção de formulações mais fortes para o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção.

No Capítulo 1 deste trabalho é apresentado um estudo resumido sobre a teoria polidrica associada ao desenvolvimento de inequações válidas e formulações fortes. Além disso, é feita uma introdução das técnicas de projeção e *lifting*. No Capítulo 2, é feita uma breve revisão bibliográfica de modelos de otimização inteiro misto que integram o dimensionamento e o sequenciamento de lotes e algumas aplicações em indústrias de vidro, nutrição animal, bens de consumo entre outros. Apresentamos de forma mais detalhada os modelos propostos por Ferreira *et al.* (2010) e Defalque *et al.* (2010) para o dimensionamento e sequenciamento da produção para uma fábrica de refrigerantes de pequeno porte.

No Capítulo 3, apresentamos duas reformulações, propostas na literatura para as restrições de eliminação de subrotas do Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico (PCVA) e propomos duas reformulações para o modelo de Defalque *et al.* (2010), a partir das reformulações do PCVA. No Capítulo 4 são apresentados os testes computacionais realizados pelo método *Branch and Cut* incluído no pacote computacional CPLEX 10.0. Foram testados exemplares aleatórios e exemplares baseados em dados reais.

Finalmente, no Capítulo 5 são apresentadas algumas conclusões e trabalhos futuros.

# Capítulo 1

## Conceitos Básicos da Teoria de Poliedros

Neste capítulo serão apresentados conceitos básicos da teoria de poliedros, e definidos parâmetros para avaliar quando uma formulação ou uma inequação é forte. O desenvolvimento de uma formulação que se aproxime do envoltório convexo de um conjunto de pontos viáveis poderá facilitar a resolução de Problemas de Otimização Inteiro ou Inteiro Misto pelo método *Branch and Bound* ou *Branch and Cut* e pode levar à uma diminuição do tempo de resolução de exemplares do problema. A diminuição do tempo de resolução de um determinado problema de forma satisfatória pode tornar um sistema de apoio a decisões mais flexível e ágil. Os resultados apresentados nesse capítulo são baseados nos textos Nemhauser e Wolsey (1988), Wolsey (1998), Lawer *et al.* (1986) e Balas (2001).

### 1.1 Poliedros

Nesta seção apresentamos alguns conceitos de álgebra linear necessários para mostrarmos como obter a descrição de um conjunto de pontos do  $\mathbb{R}^n$  por um conjunto de inequações lineares.

**Definição 1.1** (Combinação linear, afim e convexa). *Sejam os vetores  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$  e os escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ , então o vetor  $x \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ , é chamado uma combinação linear dos vetores  $x_1, \dots, x_k$ . Se além disso, os escalares  $\lambda_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$  satisfazem a condição  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ , então  $x$  é chamado de combinação afim dos vetores  $x_1, \dots, x_k$ . Se  $x$  é uma combinação afim tal que os escalares  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ , então  $x$  é chamado de combinação convexa dos vetores  $x_1, \dots, x_k$ .*

**Definição 1.2** (Envoltório Convexo). *Dado um conjunto  $S$ , o envoltório convexo de  $S \neq \emptyset$*

e  $S \subset \mathbb{R}^n$ , denotado por  $\text{conv}(S)$ , é o conjunto de todos os pontos  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$  tal que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, k$  e  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq S$ .

De acordo com a Definição 1.2, o envoltório convexo de  $S$  é o conjunto de todos os pontos que são uma combinação convexa de pontos de  $S$ .

**Exemplo 1.1.** A Figura 1 ilustra o envoltório convexo do conjunto

$$S = \{(1, 3); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (4, 2)\}.$$

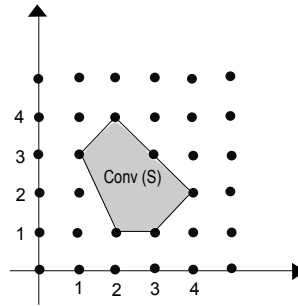


Figura 1: Envoltório Convexo do Conjunto S

**Definição 1.3.** Seja o conjunto não vazio  $\{x_1, \dots, x_k\}$  de  $k$  pontos. Os pontos  $x_1, \dots, x_k$  são linearmente independentes se a única solução para  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$  for  $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, k$ . Caso contrário são chamados de linearmente dependentes.

**Definição 1.4.** Seja o conjunto não vazio  $\{x_1, \dots, x_k\}$  de  $k$  pontos. Os pontos  $x_1, \dots, x_k$  são afim independentes se a única solução para  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$  com  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$  for  $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, k$ . Caso contrário são chamados de afim dependentes.

Observe que todo conjunto do  $\mathbb{R}^n$  linearmente independente contém no máximo  $n$  elementos. E todo conjunto afim independente contém no máximo  $n + 1$  elementos (os  $n$  pontos linearmente independente e o vetor nulo). Mais ainda, todo conjunto unitário é afim e linearmente independente, com exceção do  $\{0\}$  que é apenas afim independente. Por convenção o conjunto vazio é afim e linearmente independente. Podemos notar que se um conjunto é linearmente independente então é afim independente porém a recíproca não é verdadeira.

**Definição 1.5.** Chamamos de posto do conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  a cardinalidade do maior subconjunto de  $S$  linearmente independente. E chamamos de posto afim do conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  a cardinalidade do maior subconjunto de  $S$  afim independente.

Os resultados que seguem agora são úteis para a descrição do conjunto de soluções viáveis de um problema de otimização.

**Definição 1.6** (Semi-espaço). *Um conjunto da forma  $\{x \in \mathbb{R}^n : ax \leq w\}$ , com  $a \in \mathbb{R}^n$ , não nulo e  $w \in \mathbb{R}$ , é chamado semi-espaço.*

**Definição 1.7** (Hiperplano). *Um conjunto de pontos que divide o espaço em dois semi-espaços, ou seja, um conjunto da forma  $\{x \in \mathbb{R}^n : ax = w\}$ , onde  $a \in \mathbb{R}^n$ , não nulo e  $w \in \mathbb{R}$ , é chamado hiperplano.*

**Definição 1.8** (Poliedro). *Um poliedro  $P \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto de pontos que satisfazem um número finito de inequações e que pode ser representado da seguinte forma  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ .*

Em outras palavras um poliedro é a intersecção de um número finito de semi-espaços.

**Exemplo 1.2.** *Considere o poliedro  $P$  definido pelas seguintes inequações:*

$$-2x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1.1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad (1.2)$$

$$x_1 \leq 2 \quad (1.3)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (1.4)$$

$$x_2 \geq 0. \quad (1.5)$$

Na Figura 2 a parte sombreada representa o poliedro  $P$  descrito pelas inequações (1.1) - (1.5).

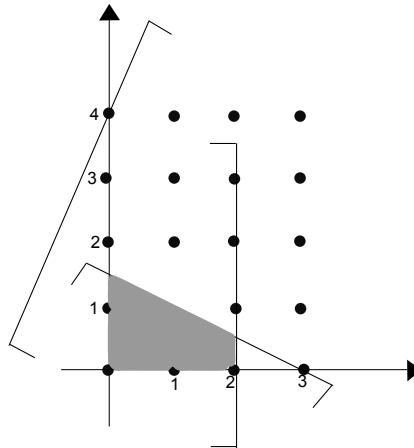


Figura 2: Poliedro P

Um poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  é limitado se existe um  $w \in \mathbb{R}_+$  tal que

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : -w \leq x_j \leq w; j = 1; \dots; n\}$$

e é denominado politopo.

O poliedro definido no Exemplo 1.2 é um politopo, basta tomar  $w = 3$ .

**Definição 1.9.** Dizemos que  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  é de dimensão  $k$ ,  $\dim(P) = k$ , se o número máximo de pontos afim-independentes em  $P$  é  $k + 1$ . Assim, um poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  é chamado de dimensão plena se e somente se  $\dim(P) = n$ .

O envoltório convexo de um conjunto  $S$  é um poliedro e encontrar o envoltório convexo pode ser uma tarefa muito difícil. Na próxima seção apresentamos resultados que podem ser úteis para descrever o envoltório convexo de um conjunto  $S$ .

## 1.2 Inequação Válida, Face e Faceta

Uma maneira de descrever o envoltório convexo de um conjunto  $S$  é através da identificação de inequações que descrevem o poliedro associado.

**Teorema 1.1** (Nemhauser e Wolsey (1988)). Se  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  é um poliedro de dimensão plena, ele tem uma descrição única e mínima da forma:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a^i x \leq b_i \text{ para } i = 1, \dots, m\}$$

em que cada inequação é única, a menos de um múltiplo positivo.

O resultado enunciado no Teorema 1.1 mostra que se uma das inequações da descrição mínima é removida, obtemos um conjunto de pontos diferente, logo cada inequação é necessária para a descrição de  $P$ . Dado um poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ , a questão é encontrar quais inequações  $a^i x \leq b_i$  são necessárias na descrição de  $P$  e quais podem ser retiradas. Os próximos resultados são úteis para obtenção de inequações fundamentais na descrição do poliedro  $P$ .

**Definição 1.10** (Inequação Válida). Uma inequação da forma  $\pi x \leq \pi_0$ , com  $(\pi, \pi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  é uma inequação válida para o poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ , se ela é satisfeita para todos os pontos de  $P$ .

Note que  $\pi x \leq \pi_0$  é uma inequação válida se e somente se  $P$  pertence ao semi-espço  $\{x \in \mathbb{R}^n : \pi x \leq \pi_0\}$ .

**Exemplo 1.3.** Considere o poliedro  $P$ , definido pelas restrições (1.6)-(1.8) e representado na Figura 3(a):

$$7x_1 - 5x_2 \leq 13, \quad (1.6)$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 17, \quad (1.7)$$

$$x \in \mathbb{Z}_+^2. \quad (1.8)$$

A inequação  $x_2 - x_1 \leq 1$ , como mostrada na Figura 3(b), é uma inequação válida para o poliedro  $P$ .

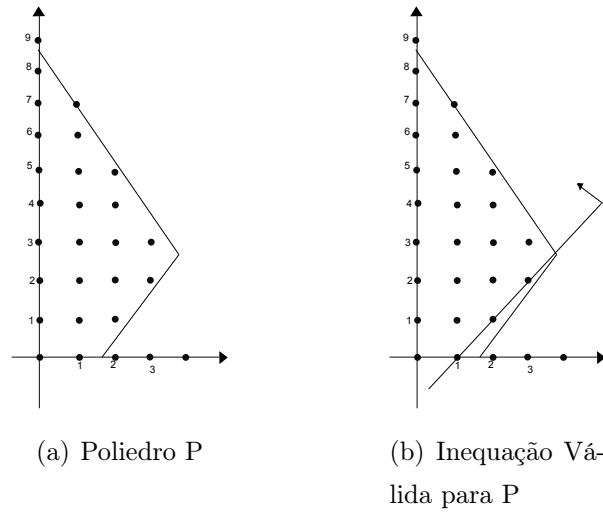


Figura 3: Ilustração de inequação válida

Quando dizemos que uma inequação é forte significa que ela é importante para a descrição do envoltório convexo. A seguir serão apresentadas algumas definições que formalizam o significado de uma inequação válida forte.

**Definição 1.11.** Se  $\pi x \leq \pi_0$  e  $\mu x \leq \mu_0$  são duas inequações válidas para o poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}_+^n$ , então  $\pi x \leq \pi_0$  domina  $\mu x \leq \mu_0$  se existe  $u > 0$  tal que  $\pi \geq u\mu$  e  $\pi_0 \leq u\mu_0$ , e  $(\pi, \pi_0) \neq (u\mu, u\mu_0)$ .

**Exemplo 1.4** (Wolsey (1998)). Sejam as seguintes inequações

$$x_1 + 3x_2 \leq 4 \quad - \quad (I)$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 9 \quad - \quad (II)$$

Com  $u = \frac{1}{2}$ , temos  $\pi \geq \frac{1}{2}\mu$  e  $\pi_0 \leq \frac{1}{2}\mu_0$ . Portando a inequação (I) domina a inequação (II) como mostra a Figura 4.



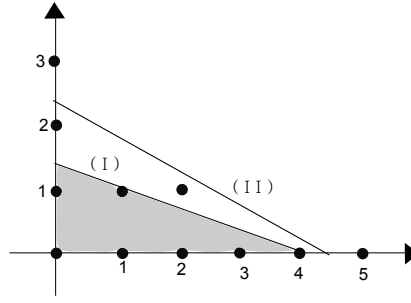


Figura 4: Dominância de inequações

**Definição 1.12** (Inequação Redundante). *Uma inequação  $\pi x \leq \pi_0$  é redundante na descrição do poliedro  $P$ , se existe  $k \geq 2$  inequações válidas  $\pi^i x \leq \pi_0^i$ ,  $i = 1, \dots, k$  para  $P$ , e pesos  $u_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  tal que  $(\sum_{i=1}^k u_i \pi^i) x \leq \sum_{i=1}^k u_i \pi_0^i$  domina  $\pi x \leq \pi_0$ .*

**Exemplo 1.5.** *Supondo que*

$$P = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : 6x_1 - x_2 \leq 9 \text{ (I)}, 9x_1 - 5x_2 \leq 6 \text{ (II)}\}.$$

*Agora considere a inequação válida  $5x_1 - 2x_2 \leq 6$  (III) para  $P$ . Tome os pesos como  $u = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , podemos ver que a inequação  $5x_1 - 2x_2 \leq 6$  é redundante como mostra a Figura 5.*

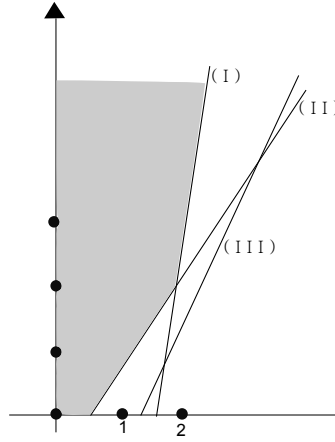


Figura 5: Inequação Redundante

**Definição 1.13** (Face). *Se  $(\pi, \pi_0)$  é uma inequação válida para  $P$ , e  $F = \{x \in P : \pi x = \pi_0\}$ ,  $F$  é chamado de face de  $P$  e dizemos que  $F$  é uma face própria se  $F \neq \emptyset$  e  $F \neq P$ .*

Dizemos que  $F$  é não trivial se  $\emptyset \neq F \neq P$ . Se  $\pi x \leq \pi_0$  é válida em relação a  $P$ , então dizemos que  $P \cap \{x : \pi x = \pi_0\}$  é a face induzida ou definida por  $\pi x \leq \pi_0$ . Claramente, faces de poliedro são também poliedros.

**Exemplo 1.6.** Considere o seguinte poliedro  $P$ , descritos pelas inequações (1.9) - (1.15):

$$2x_1 + 3x_2 \leq 14 \quad (1.9)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9 \quad (1.10)$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 \quad (1.11)$$

$$x_1 + x_2 \leq 7 \quad (1.12)$$

$$x_2 \leq 4 \quad (1.13)$$

$$x_1 \leq 4 \quad (1.14)$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+^2. \quad (1.15)$$

Com exceção da inequação (1.12), que é uma inequação válida e redundante na descrição do poliedro  $P$ , ou seja, não existe nem um ponto de  $P$  que satisfaz a inequação (1.12) na igualdade, as outras inequações definem faces para o poliedro  $P$ , como mostra a Figura 6.

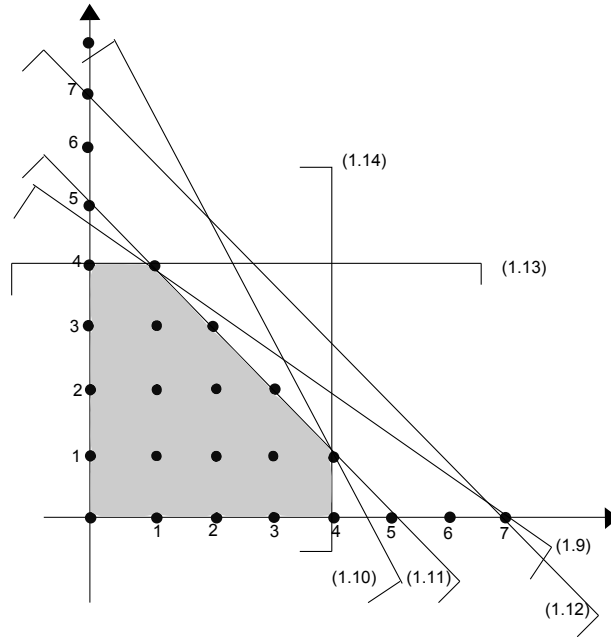


Figura 6: Exemplo de Faces

**Definição 1.14.** Um hiperplano  $H = \{x : \pi x = \pi_0\}$  é um hiperplano suporte do poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  se  $\pi x \leq \pi_0$  para todo  $x \in P$  e  $P \cap H \neq \emptyset$ .

Portanto a inequação (1.12) não é um hiperplano suporte, pois  $P \cap H = \emptyset$ .

**Definição 1.15** (Faceta).  $F$  é uma faceta de  $P$  se  $F$  é uma face de  $P$  e  $\dim(F) = \dim(P) - 1$ .

**Exemplo 1.7** (continuação do Exemplo 1.6). *Considerando o mesmo poliedro do Exemplo 1.6, temos que as inequações (1.11), (1.13) e (1.14) são facetas do poliedro  $P$ .*

**Proposição 1.** *Se  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  é um poliedro com dimensão plena, uma inequação válida  $\pi x \leq \pi_0$  é necessária na descrição de  $P$  se e somente se define uma faceta de  $P$ .*

Pela Proposição 1, para um poliedro com dimensão plena,  $\pi x \leq \pi_0$  define uma faceta de  $P$  se e somente se existem  $n$  pontos afim independentes satisfazendo a inequação válida na igualdade.

Podemos observar que a inequação (1.11), do Exemplo 1.6, é necessária na descrição do poliedro  $P$ , já que temos 2 pontos afim independentes satisfazendo a inequação na igualdade, tome os seguintes pontos (1, 4), (2, 3).

Se uma inequação válida define uma faceta de um poliedro ou, de outra forma, ajuda a definir o envoltório convexo de um conjunto  $S$ , podemos dizer que é uma inequação válida forte.

Para as próximas definições considere o seguinte problema de otimização inteiro (OI).

$$z = \min\{cx : Ax \leq b; x \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

**Definição 1.16.** *Um Poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  é uma formulação para o conjunto  $S \subseteq \mathbb{Z}^n$  se e somente se  $S = P \cap \mathbb{Z}^n$ .*

De acordo com a Definição 1.16 um poliedro será uma formulação para um determinado PI se os seus pontos inteiros coincidem com as soluções viáveis de PI. Cabe observar que um PI pode ter várias formulações como mostra o Exemplo 1.8 a seguir.

**Exemplo 1.8.** *Considere o conjunto  $S$  de pontos inteiros:*

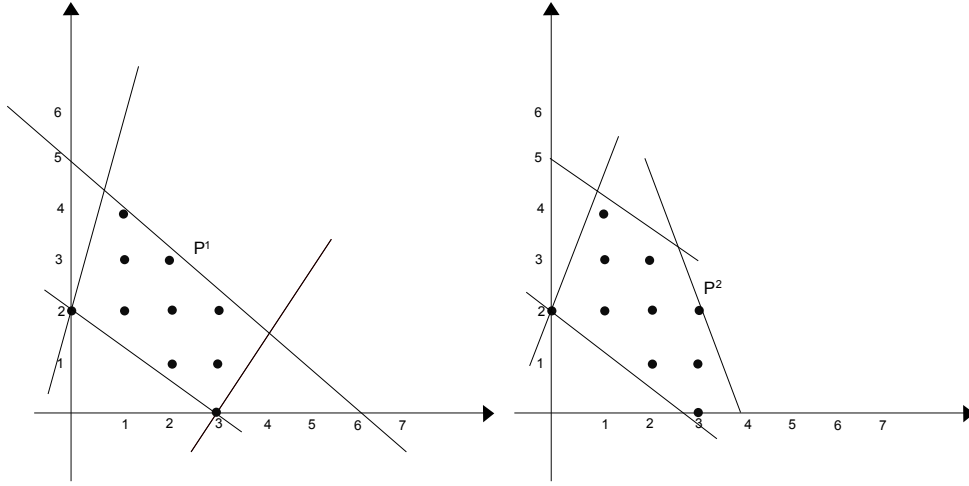
$$S = \{(0, 2), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$$

*Considere também os poliedros  $P^1$  e  $P^2$  descritos a seguir:*

$$P^1 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 - 4x_2 \leq 2, 3x_1 + 2x_2 \geq 6, 6x_1 + 5x_2 \leq 6, -3x_1 + 5x_2 \leq 15\},$$

$$P^2 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : 2x_1 + 5x_2 \leq 20, 3x_1 + 5x_2 \geq 15, x_1 - 3x_2 \leq 2, 5x_2 + 4x_1 \leq 10\}.$$

*Os poliedros  $P^1$  e  $P^2$  são formulações distintas para o conjunto  $S$ , como ilustra a Figura 7.*

Figura 7: Formulações  $P^1$  e  $P^2$ 

Como vimos que o OI pode ter várias formulações, surge assim uma questão importante, que é determinar qual formulação é melhor ou mais forte. Para responder essa questão e auxiliar as discussões posteriores vamos formalizar estes conceitos nas Definições 1.17 e 1.18.

**Definição 1.17.** *Dadas duas formulações  $P^1$  e  $P^2$  para um conjunto  $S$ ,  $P^1$  é melhor que  $P^2$  se  $P^1 \subset P^2$ .*

**Definição 1.18.** *Dado um PI e uma formulação  $P$  para  $S$ ,  $z^{RL} = \min\{cx : x \in P\}$  é uma relaxação linear para PI.*

Na prática, uma maneira de analisar a questão apresentada seria verificando a resolução da relaxação linear do problema associado às duas formulações. Wolsey (1998), define que uma formulação é mais forte se ela fornece um melhor limite dual, que no caso do problema de minimização corresponde ao limite inferior.

Diante disso é possível afirmar que se:

$$z \geq \min\{cx : x \in P^1\} \geq \min\{cx : x \in P^2\}.$$

então  $P^1$  é melhor que  $P^2$ .

Deve-se salientar que o fato de  $P^1 \subset P^2$  nem sempre é suficiente para afirmar que  $P^1$  é melhor que  $P^2$  quando o interesse é resolver um problema. É necessário também analisar a dificuldade para resolver o problema associado a cada uma das formulações. Por outro lado, para que o valor da função objetivo na solução ótima da relaxação linear com a formulação  $P^1$  seja menor ou igual a de  $P^2$ ,  $P^1$  não precisa necessariamente estar

contido em  $P^2$ . Além disso, quando se vai em busca de formulações melhores, o objetivo é encontrar uma formulação que aproxime ou descreva o envoltório convexo. Logo, teoricamente o envoltório convexo é a melhor formulação para  $S$ .

**Exemplo 1.9.** *Considere o conjunto  $X$  apresentado no Exemplo 1.8, a melhor formulação para este conjunto seria o poliedro  $P$  descrito a seguir:*

$$P = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \leq 3, x_1 + x_2 \leq 5, 3x_1 + 2x_2 \geq 6, 2x_1 + 3x_2 \geq 6\}$$

Portanto o  $\text{conv}(X) = P$

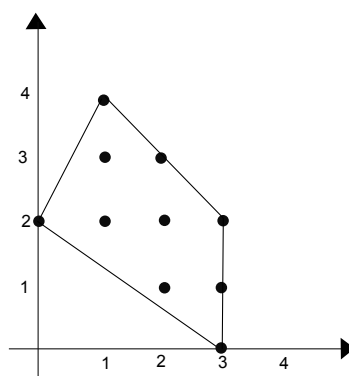


Figura 8: Melhor Formulação para o conjunto  $X$

Nessa seção tratamos de inequações válidas que, quando acrescentadas ao modelo, diminuem a região factível da relaxação linear sem “cortar” soluções inteiras, aproximando-se assim, do envoltório convexo. Encontrar este tipo de inequação implica em encontrar um hiperplano que separe um ponto infactível da região factível (Pochet e Wolsey (2006)). Este problema é conhecido como problema da separação.

Essa idéia é explorada no método de planos de cortes. A idéia básica deste método é tratar o problema de otimização linear inteiro como um problema de otimização linear contínuo e acrescentar a este problema, de forma iterativa, inequações válidas (planos de corte). De forma a eliminar a solução ótima da relaxação linear obtida a cada iteração, quando este for infactível para o problema inteiro.

Existem algumas inequações válidas que podem ser usadas como planos de corte, tais como: Inequações de cobertura, Inequações de cobertura de fluxo, Inequações de cobertura de caminho de fluxo, *Mixed integer rounding*, cortes de cliques, *Implied bounds* e cortes de Gomory. Tais inequações são utilizadas por pacotes de otimização como o CPLEX 10.0 que resolvem problemas gerais de otimização inteiro mistos.

A seguir vamos descrever um pouco sobre as *implied bounds*, pois em vários momentos desse presente trabalho estaremos nos referindo a esse tipo de corte.

Quando temos restrições da seguinte forma:

$$x_1 + \dots + x_n \leq (u_1 + \dots + u_n)y, \quad y \in \{0, 1\}.$$

onde  $u_j$  é um limite superior válido para  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Esta restrição é equivalente, dado a integralidade de  $y$ , as seguintes restrições

$$x_j \leq u_j y \quad (j = 1, \dots, n)$$

Formulações desagregadas são preferidas, pois para relaxação de programação linear são mais fortes. Contudo, dado a habilidade de desagregar automaticamente a primeira restrição, essas restrições *implied bounds* podem ser armazenadas e adicionadas ao PL somente quando necessário. Resumindo, variáveis binárias implicam em limites em variáveis contínuas.

**Exemplo 1.10** (*Implied Bounds*).

$$y_1 + y_2 = 10x$$

$$y_1 = 5 \quad y_2 = 5$$

$$y_1 = 5, \quad y_2 = 0, \quad x = 0.5$$

*Implied bound :*

$$y_1 = 5x$$

## 1.3 Projeção e *Lifting*

Muitos problemas de Otimização Combinatória tendem a ter várias formulações alternativas, algumas delas são mais fáceis de lidar do que outras. A projeção fornece uma conexão entre diferentes formulações.

**Definição 1.19.** *Dado um poliedro da forma*

$$Q = \{(u, x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : A_u + B_x \leq b\},$$

a projeção de  $Q$  em  $\mathbb{R}^q$  é definida por

$$Proj_x(Q) = \{x \in \mathbb{R}^q : \exists u \in \mathbb{R}^p : (u, x) \in Q\}.$$

Então projeção do conjunto  $Q$  em  $\mathbb{R}^q$  pode ser vista como encontrar uma matriz  $C \in \mathbb{R}^{m \times q}$  e um vetor  $d \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$Proj_x(Q) = \{x \in \mathbb{R}^q : Cx \leq d\}.$$

Em outras palavras, projeção é uma formulação para  $Q$  tal que  $Q = Proj_x(Q) \cap \mathbb{R}^q$ .

Veja na Figura 9 uma ilustração de projeção.

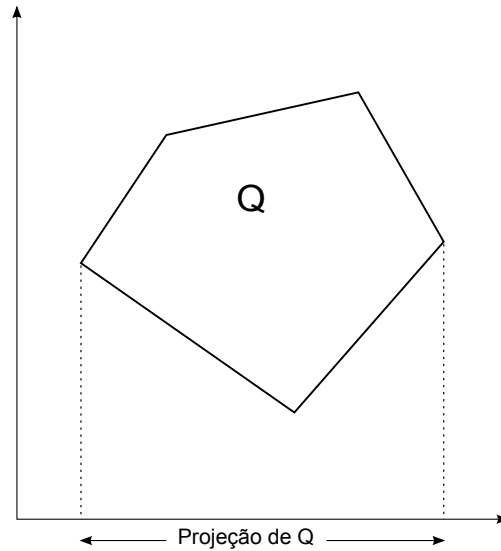


Figura 9: Projeção

Projeção não pode ser confundida com restrição, outra operação que relaciona um objeto de dimensão superior a um em um subespaço. Considerando o mesmo conjunto  $Q \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  a restrição no subespaço definida por  $u = 0$  é

$$\{(u, x) \in Q : u = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^q : (0, x) \in Q\}.$$

Para ilustrar a diferença entre projeção e restrição, considere o conjunto  $Q$ , representado na Figura 10,

$$Q = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : x + u \geq 1, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq u \leq 1\}.$$

A projeção no espaço de  $Q$  é  $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$  (Figura 11), enquanto a restrição de  $Q$

a um subespaço do  $\mathbb{R}^2$  definida por  $u = 0$  é  $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$  (Figura 12).

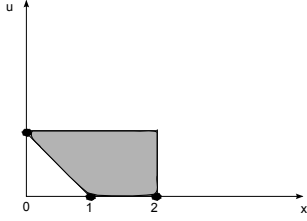


Figura 10: Poliedro Q

Figura 11: Projeção de Q em  $\mathbb{R}$ 

Figura 12: Restrição de Q

Enquanto projeção e restrição projetam o poliedro de uma dimensão maior do espaço para uma dimensão menor, algumas vezes queremos ir na direção oposta. A operação, reversa da projeção, que vai de uma formulação poliédrica de um problema em uma dada dimensão para uma dimensão maior, envolvendo novas variáveis, é chamada formulação estendida ou *lifting*.

**Definição 1.20.** A técnica de *lifting*, é um processo de construir, a partir de uma dada inequação válida para um poliedro de uma dimensão, uma inequação para um poliedro de dimensão maior.

A idéia de *lifting* foi introduzida por Gomory em 1969 no contexto de problemas de grupo. Considere um conjunto de soluções viáveis para um problema inteiro dado por:

$$X = \{x \in \mathbb{R}_+^{|N|} : \sum_{j \in N} a_j x_j \leq d, \\ \sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k, \quad k = 0, \dots, t, \\ x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in I \subset N\}.$$

Aqui  $\{C_k : k = 0, \dots, t\}$  é uma partição de  $N$ ,  $a_j$  e  $d \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  e  $w_j$  e  $r_k \in \mathbb{R}^{m_k \times 1}$ , com  $j \in N$ . Inicialmente, nós consideramos o subconjunto de  $X$  obtido fazendo  $x_j = 0$  para  $j \in N \setminus C_0$  dado por:

$$X^0 = \{x \in \mathbb{R}_+^{|C_0|} : \sum_{j \in C_0} a_j x_j \leq d, \\ \sum_{j \in C_0} w_j x_j \leq r_0, \\ x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in I \cap C_0\}.$$



Seja

$$0 \leq \alpha_0 - \sum_{j \in C_0} \alpha_j x_j \quad (1.16)$$

uma inequação válida arbitrária para  $X^0$ . Nós queremos construir uma inequação válida para  $X$  da forma

$$0 \leq \alpha_0 - \sum_{0 \leq k \leq t} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j. \quad (1.17)$$

Para construir tal inequação, nós começamos com (1.16) e aplicamos a técnica de *lifting* nas variáveis em  $N \setminus C_0$ . Os conjuntos de pontos viáveis,  $X^i$ , para  $i = 1, \dots, t$  são definidos por:

$$\begin{aligned} X = \{x \in \mathbb{R}_+^{\sum_{0 \leq k \leq i} |C_k|} : & \sum_{0 \leq k \leq i} \sum_{j \in C_k} a_j x_j \leq d, \\ & \sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k, \quad k = 0, \dots, i, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in I \cap (\cup_{k=0}^i C_k)\}. \end{aligned}$$

O problema de *lifting* associado a  $C_i$  e uma inequação válida:

$$0 \leq \alpha_0 - \sum_{0 \leq k \leq i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j. \quad (1.18)$$

para  $X^{i-1}$ , é encontrar  $\alpha_j$  para  $j \in C_i$  tal que

$$\sum_{j \in C_i} \alpha_j x_j \leq \alpha_0 - \sum_{0 \leq k \leq i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \quad (1.19)$$

seja uma inequação válida para  $X^i$ .

A técnica de *lifting* normalmente é aplicada sequencialmente: A técnica de *lifting* é aplicada nas variáveis uma após a outra e um problema de separação tem que ser resolvido para determinar cada coeficiente *lifting*.

## *Capítulo 2*

# *Problemas de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes*

Neste capítulo, faremos uma breve revisão bibliográfica sobre os problemas de dimensionamento de lotes e os problemas de sequenciamento da produção. Apresentamos também problemas encontrados na literatura que formulam o sequenciamento da produção baseado no problema do caixeiro viajante. Discutiremos sobre o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção bem como algumas aplicações do mesmo com ênfase no setor de bebidas.

## **2.1 Dimensionamento de Lotes**

O problema de dimensionamento de lotes consiste em determinar a quantidade de lotes a serem produzidos e o período em que os lotes serão produzidos. Essa produção está inserida num horizonte de planejamento e existe uma demanda de produtos a ser atendida. O objetivo é geralmente de cunho econômico e envolve custos de produção, que são tradicionalmente divididos em custos de estoque, custos de processamento de produtos e custos de preparação de máquinas. Na literatura, muitos trabalhos abordam o problema, dentre eles destacamos as revisões de Karimi *et al.* (2003) e Brahimi *et al.* (2006).

O problema de dimensionamento de lotes pode ser dividido em multi-estágio e mono-estágio. Denomina-se sistema de produção multi-estágio quando os itens a serem produzidos são dependentes, isto é, a produção de determinado item depende da produção de outro item, que é chamado item componente. Diz-se que um sistema de produção é mono-estágio quando os itens a serem produzidos são independentes, ou seja, nenhum

item depende da produção de outro item. O problema mono-estágio pode ser subdividido em várias categorias, por exemplo: pode ser considerado para um único item ou para vários itens, com ou sem restrição de capacidade. Essas categorias serão detalhadas a seguir, sendo que uma revisão bibliográfica mais completa pode ser encontrada em Pochet e Wolsey (2006).

A seguir, são apresentados alguns modelos importantes de dimensionamento de lotes. Os modelos apresentados possuem características comuns. O horizonte de planejamento é finito e dividido em períodos, e a demanda de cada item em cada período é dinâmica, isto é, varia ao longo do horizonte. A demanda e outros parâmetros dos modelos são supostos conhecidos, isto é, abordamos modelos determinísticos. Os parâmetros e variáveis usados na descrição dos modelos estão definidos na Lista de Símbolos.

O problema mais simples de dimensionamento de lotes envolve um único item, sem restrição de capacidade e pode ser formulado matematicamente como:

$$\text{Min } Z = \sum_{t=1}^T hI_t \quad (2.1)$$

sujeito a:

$$I_{t-1} + x_t - I_t = d_t, \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.2)$$

$$I_t \geq 0, \quad x_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.3)$$

A função objetivo (2.1) minimiza o custo total de estoque. As inequações (2.2) garantem o atendimento da demanda em cada período  $t$  e são conhecidas como restrições de balanceamento de estoque. As inequações (2.3) definem o domínio das variáveis.

Caso seja necessário garantir que só haverá produção caso a máquina esteja preparada é inserida no modelo uma variável binária que assume 1 caso a máquina esteja preparada para produzir um determinado produto, e 0 caso contrário. Karimi *et al.* (2003) indica dois tipos de estruturas de preparo: estrutura de preparo simples, quando o custo de preparo não é dependente da sequência de produção, e estrutura de preparo complexa, quando o custo de preparo é dependente da sequência de produção.

Se no modelo descrito por (2.1) - (2.3) acrescentarmos uma restrição que garanta que o custo ou tempo de preparação seja contado somente quando houver produção, obtém-se o Modelo de Dimensionamento de Lotes sem restrição de Capacidade (ULSP -

*Uncapacitated lotsizing Problem*), descrito pelas expressões (2.4) - (2.7) a seguir:

$$\text{Min } Z = \sum_{t=1}^T (hI_t + sty_t) \quad (2.4)$$

sujeito a:

$$I_{t-1} + x_t - I_t = d_t, \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.5)$$

$$x_t \leq My_t, \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.6)$$

$$x_t; I_t \geq 0 \quad y_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.7)$$

As restrições (2.6) garantem que só vai haver produção se houve preparo da máquina e  $M$  é um número suficientemente grande que evita a limitação da produção. Substituindo-se  $M$  pela capacidade de produção da máquina no período  $t$ ,  $K_t$ , obtemos um modelo de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade para um item.

Alguns modelos permitem atrasos na produção, ou seja, permite-se satisfazer a demanda após o período em que ela foi requisitada. Neste caso, devemos substituir a variável  $I_t$  pelas variáveis  $I_t^+$  e  $I_t^-$ , que representam respectivamente as quantidades em estoque e em atraso no fim do período  $t$ , e acrescentar na função objetivo o custo  $g$  pelo atraso na produção de uma unidade do produto de um período próximo. O modelo matemático para representar esta situação é dado por:

$$\text{Min } Z = \sum_{t=1}^T hI_t^+ + gI_t^- + sty_t \quad (2.8)$$

sujeito a:

$$I_{t-1}^+ - I_{t-1}^- + x_t - I_t^+ + I_t^- = d_t, \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.9)$$

$$x_t \leq My_t, \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.10)$$

$$x_t; I_t^+; I_t^- \geq 0 \quad y_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.11)$$

Para estender o modelo (2.4) - (2.7) para considerar a produção de vários itens, basta incluir o índice dos itens nas variáveis e ampliar o conjunto de restrições para cada item. A seguir tem-se um modelo sem restrição de capacidade, mono-estágio (ou único nível), multi-item com demanda dinâmica, o modelo ULSP multi-item é descrito pelas inequações

(2.12) - (2.15):

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T h_j I_{jt} + st_j y_{jt} \quad (2.12)$$

sujeito a:

$$I_{jt-1} + x_{jt} - I_{jt} = d_{jt}, \quad t = 1, \dots, T; \quad j = 1, \dots, J; \quad (2.13)$$

$$x_{jt} \leq M y_{jt}, \quad t = 1, \dots, T; \quad j = 1, \dots, J; \quad (2.14)$$

$$x_{jt}; I_{jt} \geq 0 \quad y_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T; \quad j = 1, \dots, J. \quad (2.15)$$

Para considerar a capacidade de produção em um problema mono-estágio, multi-item com demanda dinâmica, é necessário incluir as restrições (2.16), no qual  $a_j$  é a capacidade de tempo necessária para produzir uma unidade do produto  $j$ :

$$\sum_{j=1}^J a_j x_{jt} \leq K_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.16)$$

As restrições (2.16) garantem que o tempo total gasto na produção dos itens no período  $t$  não ultrapasse a capacidade da máquina neste período. O modelo CLSP (*Capacitated Lotsizing and Scheduling Problem*) é dado por:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (h_j I_{jt} + st_j y_{jt}) \quad (2.17)$$

sujeito a:

$$I_{j,t-1} + x_{jt} - d_{jt} = I_{jt}, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.18)$$

$$a_j x_{jt} \leq K_t y_{jt}, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.19)$$

$$\sum_{j=1}^J a_j x_{jt} \leq K_t, \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.20)$$

$$y_{jt} \in \{0, 1\}, \quad I_{jt} \geq 0 \quad x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.21)$$

Uma variação da restrição de capacidade ocorre quando os tempos de preparo,  $\rho_{jt}$ , são considerados, o problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade e

com tempo de preparo pode ser formulado como:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (h_j I_{jt} + st_{jt} y_{jt}) \quad (2.22)$$

sujeito a:

$$I_{j,t-1} + x_{jt} - d_{jt} = I_{jt}, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.23)$$

$$a_j x_{jt} \leq K_t y_{jt}, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.24)$$

$$\sum_{j=1}^J a_j x_{jt} + \rho_{jt} y_j \leq K_t, \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.25)$$

$$y_{jt} \in \{0, 1\}, \quad I_{jt} \geq 0 \quad x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.26)$$

Alguns autores consideram que os tempos de preparo já estão embutidos nos custos de preparo, não sendo necessário considerá-los explicitamente. Billington *et al.* (1994) destacam que o tempo de preparo pode ser ignorado em algumas indústrias, mas em vários sistemas com restrições de capacidade, um dos fatores mais críticos do problema de dimensionamento de lotes é o tempo de preparação, e não seu custo. Trigeiro *et al.* (1989) discute esta questão e mostra exemplos de problemas que não devem ser formulados sem tempos de preparo.

Araujo e Arenales (2000) discutem que a inclusão de tempos de preparação, aumenta bastante o grau de complexidade do problema. Florian *et al.* (1980) mostraram que, para problemas com recursos de produção limitados e custos de preparação, encontrar a solução ótima para o problema com um único item é um problema NP-Hard. Bitran e Yanasse (1982) mostraram que vários casos de problemas com um único item, podem ser resolvidos em tempo polinomial, tornando-se NP-Hard quando um segundo item é introduzido. Quando se considera tempo de preparação, o problema de encontrar uma solução factível é NP-Completo (Maes *et al.* (1991)).

Se o tempo de preparação é independente da sequência, ele é denotado por  $\rho_j$ , e basta definir um tempo para a execução da tarefa  $j$ . Quando o tempo de preparação é dependente da sequência, temos o parâmetro,  $b_{ij}$ , que representa o tempo de preparação da máquina para processar a tarefa  $j$  imediatamente após a tarefa  $i$ , que podemos denominar como tempo de troca. Logo é necessário também definir o custo de troca,  $s_{ij}$  que é incluído na função objetivo com a variável binária  $z_{ijt}$ , que recebe 1 se há troca do item  $i$  para o item  $j$  no período  $t$  e 0 caso contrário.

## 2.2 Sequenciamento de Lotes

O problema de sequenciamento de produtos consiste em estabelecer a sequência dos produtos que devem ser produzidos em uma máquina. O problema de sequenciamento é discutido por exemplo em Pinedo (2005) e Arenales *et al.* (2007).

Os problemas de sequenciamento da produção podem ser classificados com base em três características: o critério de otimização, as características das operações e recursos e as características das máquinas. Existe uma nomenclatura própria para descrever Problemas de Sequenciamento, formada a partir do preenchimento de três campos. Para o critério de otimização chamamos de campo  $\gamma$ , para as características das operações e recursos denominamos campo  $\beta$  e por fim, as características das máquinas chamando de campo  $\alpha$ . Quando falamos do critério de otimização podemos destacar: minimização do tempo de fluxo total, onde o tempo de fluxo total corresponde à soma dos tempos de término das tarefas. Pode-se demonstrar que a solução ótima deste problema é quando as tarefas são sequenciadas em ordem não decrescente dos tempos de processamento, isto é, as tarefas são processadas na sequência:  $[1], [2], [3], \dots, [n]$ , tal que  $p_{[1]} \leq p_{[2]} \leq \dots \leq p_{[n]}$  e  $[i]$  indica que tarefa com tempo  $p_{[i]}$  será processada na  $i$ -ésima posição. Por exemplo,  $p_{[2]}$  é o tempo de processamento da tarefa que ocupa a segunda posição na sequência de produção.

Outro critério de otimização é a minimização do atraso máximo. O atraso máximo, representado por  $T_{max}$ , está associado à tarefa com maior diferença entre seu instante de término e data de entrega. Pode-se mostrar que a solução ótima para esse tipo de problema consiste em sequenciar as tarefas em ordem não decrescente das datas de entrega. Outros critérios são minimização da soma dos atrasos e minimização do número de tarefas atrasadas.

Em relação às máquinas encontramos os seguinte tipos: uma máquina, máquinas paralelas idênticas, máquinas paralelas uniformes e máquinas paralelas não relacionadas. Quando o ambiente de produção contém uma máquina, todas as tarefas são executadas nesta máquina. Em máquinas paralelas idênticas, cada tarefa tem o mesmo tempo de processamento e o mesmo tempo de preparação e pode ser executada em qualquer uma das máquinas. Em máquinas paralelas uniformes, o tempo de processamento de uma tarefa e o tempo de preparação de algumas máquinas são proporcionais aos tempos correspondentes em outras máquinas. E por fim, em máquinas paralelas não relacionadas, não existe relação entre os tempos de processamento e preparação de máquinas distintas, isto é, cada máquina tem tempo de processamento e tempo de preparo distintos para cada item.

Um *job shop* clássico é um ambiente de produção com  $n$  tarefas e  $m$  máquinas, em que cada tarefa é processada nas  $m$  máquinas, de acordo com um roteiro preestabelecido. O ambiente de produção *flow shop* é um caso particular do ambiente *job shop*, em que as  $n$  tarefas tem o mesmo roteiro nas  $m$  máquinas. Quando a sequência das tarefas é a mesma em todas as máquinas, tem-se um *flow shop* permutacional.

Existem diversas variantes dos problemas básicos de *job shop* (*flow shop*): *job shop* com número distinto de operações por tarefa, com interrupção, com instantes de disponibilidade distintos, flexível entre outras.

Na literatura, encontramos muitos trabalhos que modelam o problema de sequenciamento de lotes como um problema do caixeiro viajante (PCV - Ver Anexo A). Bagchi *et al.* (2006) faz uma revisão sobre abordagens baseadas no PCV para problemas com *flowshop*. Uma aplicação do PCV com tempos dependentes para problemas de sequenciamento com uma máquina e atraso pode ser encontrada em Picard *et al.* (1978). Encontramos também na literatura, trabalhos que utilizam o PCV para resolver problemas de sequenciamento no processo de produção de indústrias, como é o caso apresentado por Fenato (2008).

## 2.3 Problemas Integrados de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes - PIDSL

O setor de planejamento e controle da produção de uma empresa, entre outras funções, deve decidir o quê, quando, quanto e como produzir seus produtos da melhor forma possível. É nesse contexto que se encontram os problemas do dimensionamento de lotes e do sequenciamento da produção. Drexler e Kimms (1997) e Karimi *et al.* (2003) afirmam que esses dois problemas são frequentemente tratados tanto na literatura quanto na prática separadamente, uma vez que a etapa de sequenciamento da produção geralmente é feita no chão da fábrica e após o dimensionamento de lotes. De acordo com Toso e Morabito (2005), Toledo *et al.* (2007), Rangel e Ferreira (2003), na indústria de nutrição animal e de refrigerante, ao tratar esses problemas de forma isolada e independente, criam-se dificuldades para que a produção torne-se flexível às mudanças do mercado e para que se obtenham soluções boas e factíveis com base na capacidade disponível e nos prazos de entregas estabelecidos.

Drexler e Kimms (1997) fazem uma revisão de alguns modelos que tratam estas questões de forma integrada: *Discrete Lot sizing and Scheduling* (DLSP), *Continuous Setup Lot Sizing and Scheduling Problem* (CSLP), *Proportional Lot Sizing and Scheduling* (PLSP)



e o *General Lot Sizing and Scheduling* (GLSP) que se diferenciam em alguns aspectos importantes como a quantidade de itens que podem ser produzidos em um determinado período e na forma como é definido o horizonte de planejamento entre outros, mas todos integram as decisões de dimensionamento com as decisões de sequenciamento dos lotes.

O DLSP e o CLSP, se diferenciam dos modelos de dimensionamento de lotes clássicos por permitir apenas a produção de um item por período. No entanto, caso haja produção de um item, o modelo DLSP exige, com restrições do tipo “tudo ou nada”, que toda a capacidade da produção do período seja utilizada, enquanto que o CLSP permite a utilização parcial dessa capacidade.

No caso do PLSP, onde é permitida a utilização parcial da capacidade, é permitido produção de um segundo item dentro de um mesmo período. Assim, podem ocorrer até dois preparos dentro de um período. Kimms (1999) estende este modelo para incluir vários estágios de produção.

Os modelos apresentados acima são do tipo *small bucket*, pois permitem que apenas um item seja produzido por período e os períodos considerados são dias, horas, turnos. Logo, ao se determinar o lote de produção de cada período, está sendo determinado o momento que cada produto será produzido, ou seja, a sequência de produção, além do tamanho dos lotes. Fleishmann e Meyr (1997) apresentam um modelo *big bucket* (vários itens podem ser produzidos em um mesmo período) onde os períodos (macro períodos) são divididos em períodos menores (sub-períodos), e nos sub-períodos apenas um item pode ser produzido por vez. O lote de produção é definido em termos dos subperíodos  $s$  pertencentes aos conjuntos  $S_t$ , que são os conjuntos dos subperíodos do período  $t$ . A produção do item  $j$  no período  $t$  é a soma do que foi produzido daquele item em cada subperíodo  $s$  do período  $t$ . No máximo um item pode ser produzido por subperíodo, assim pode-se saber exatamente o que será produzido em cada subperíodo e, portanto, a sequência de produção de cada período. O tamanho de cada subperíodo é dado pelo quanto foi produzido neste subperíodo. O modelo GLSP é apresentado pelas expressões (2.27) - (2.34).

### Modelo GLSP

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T h_j I_{jt} + \sum_{j=1}^J \sum_{s \in S_t} s_{ij} z_{ijs} \quad (2.27)$$

sujeito a:

$$I_{j,t-1} + \sum_{s \in S_t} x_{js} - d_{jt} = I_{jt}, \quad j = 1, \dots, J, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.28)$$

$$a_j x_{js} \leq K_t y_{js}, \quad j = 1, \dots, J, \quad s \in S_t. \quad (2.29)$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{s \in S_t} a_j x_{js} \leq K_t \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.30)$$

$$\sum_{j=1}^J y_{js} = 1, \quad s \in S_t. \quad (2.31)$$

$$z_{ijs} \geq y_{is} + y_{j,s-1} - 1, \quad i, j = 1, \dots, J \quad s \in S_t. \quad (2.32)$$

$$x_{js} \geq m_j (y_{js} - y_{j,s-1}), \quad j = 1, \dots, J, \quad s \in S_t. \quad (2.33)$$

$$y_{js} \in \{0, 1\}, z_{ijs}, I_{jt}, x_{js} \geq 0, \quad j = 1, \dots, J, \quad t = 1, \dots, T, s \in S_t. \quad (2.34)$$

A função objetivo (2.27) minimiza os custos de estoque e troca. As restrições de balanceamento de estoque são as restrições (2.28) e as restrições (2.29) controlam o preparo da máquina, ou seja, só há produção do item  $j$  no subperíodo  $s$  se a máquina estiver preparada para isso. As restrições (2.30) controlam o uso da capacidade da máquina. Neste modelo é exigido que a máquina esteja preparada para um e apenas um item em cada sub-período, o que é garantido pelas restrições (2.31). As restrições (2.32) garantem que as trocas entre itens entre os sub-períodos serão contadas. As restrições (2.33) garantem que se ocorre preparo de um item  $i$ , então deve haver uma produção mínima  $m_j$  deste item. As restrições (2.34) são as restrições de domínio das variáveis.

Em algumas situações é importante considerar o tempo de troca do item  $i$  para o item  $j$ ,  $b_{ij}$ , nas restrições de capacidade. Para isso, as restrições (2.30) devem ser substituídas pelas restrições (2.35) obtendo assim o modelo GLSP com tempos de troca.

$$\sum_{j=1}^J \sum_{s \in S_t} a_j x_{js} + \sum_{j=1}^J \sum_{j=1}^J \sum_{s \in S_t} b_{ij} z_{ijs} \leq K_t \quad s \in S_t. \quad (2.35)$$

Fleischmann (1994) apresenta uma formulação para o DLSP incluindo custos de preparação dependentes da sequência e reformula o problema usando o problema do caixeiro viajante com janelas de tempo. Com base do trabalho de Fleischmann (1994), Salomon *et al.* (1997) formulam um modelo que inclui além dos custos, os tempos de preparo. Clark (2000) apresenta um modelo de dimensionamento e sequenciamento de lotes integrado com máquinas paralelas e sequência dependente dos tempos de preparo.

Diferente dos trabalhos de Fleischmann (1994) e Salomon *et al.* (1997) que apresentam um modelo matemático para o DLSP e depois reformulam o problema como um PCV, Clark (2000) reformula o problema utilizando as equações clássicas do PCV para modelar as decisões de sequenciamento.

Gupta e Magnusson (2005) apresentam um modelo integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes em que para as decisões de dimensionamento é utilizado o CLSP uma única máquina com sequência dependente e tempos de preparo, e as decisões de sequenciamento são tratadas como um problema do caixeiro viajante considerando que no início de cada período o modelo deve guardar o estado de preparação da linha no final do período anterior (*setup carryover*).

Almada-Lobo *et al.* (2007) propõem um modelo para tratar o problema integrado considerando restrições de capacidade, sequência dependente e custos de preparo, único estágio, multi-itens e uma máquina. O modelo é apresentado a seguir:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T s_{ij} z_{ijt} + \sum_{i=1}^J \sum_{t=1}^T h_i I_{it} \quad (2.36)$$

sujeito a:

$$I_{i,t-1} + x_{it} - d_{it} = I_{it}, \quad i = 1, \dots, J, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.37)$$

$$\sum_{i=1}^J a_i x_{it} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J b_{ij} z_{ijt} \leq K_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.38)$$

$$x_{it} \leq M_{it} \left( \sum_{j=1}^J z_{ijt} \right) \leq K_t, \quad i = 1, \dots, J, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.39)$$

$$\sum_{i=1}^J y_{it} = 1, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.40)$$

$$y_{kt} + \sum_{i=1}^J z_{ikt} = y_{k,t+1} + \sum_{j=1}^J z_{kjt}, \quad i = 1, \dots, J, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.41)$$

$$u_{it} + J z_{ijt} - (J-1) - J y_{it} \leq u_{jt}, \quad i, j = 1, \dots, J, \quad j \neq i \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.42)$$

$$x_{it}, I_{it}, u_{it}, y_{it} \geq 0, \quad z_{ijt} \in \{0, 1\}. \quad i, j = 1, \dots, J, \quad j \neq i \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.43)$$

A função objetivo (2.36) minimiza a soma dos custos de preparo dependentes da sequência, além dos custos de estoque. As restrições (2.40)-(2.42) determinam a sequência de produtos na máquina em cada período e controlam o estado de configuração no começo de cada período por guardar o produto processado no final do período anterior. Estas

restrições estão baseadas nas restrições do problema do caixeiro viajante.

## 2.4 Aplicações do PIDSL

Alguns trabalhos apresentam modelos de dimensionamento e sequenciamento de lotes integrados para modelar problemas na indústria de bebidas, fundição, nutrição animal, contêineres de vidro, bens de consumo, entre outros. Dividimos essa seção em duas partes, na Seção 2.4.1 diversos setores da aplicação de problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção é apresentado e na segunda parte tratamos do setor de bebidas, que é o foco do nosso trabalho.

### 2.4.1 Setores Diversos

Em Araujo *et al.* (2004) é tratado um problema de planejamento e programação de ligas de metal em fornos para produção de diferentes tipos de peças numa fundição no interior de São Paulo. O processo de fundição consiste basicamente em fabricar moldes, preparar e fundir metais, vaziar o metal dentro dos moldes e, após a solidificação, retirar as peças dos moldes para dar os acabamentos finais. A programação da produção envolve a determinação da sequência das ligas que devem ser produzidas nos fornos e a quantidade de cada item a ser produzido em cada máquina de moldagem. Araujo *et al.* (2004) propõem um modelo para uma fundição de pequeno porte, estendem o modelo para considerar custo e tempo de preparação dependente da sequência. Uma fundição de médio e grande porte também são retratadas por modelos matemáticos, que consideram várias máquinas de moldagem. No modelo de fundição de grande porte é considerada também a distribuição de capacidade nos fornos. Nos três primeiros modelos a função objetivo minimiza custos de estoque, atraso e preparo das ligas, e no último modelo é incluído um termo que penaliza algumas proibições do processo produtivo, pois algumas peças não podem ser feitas por determinada linha, devido a alguma restrição da linha de moldagem.

Luche e Morabito (2005) tratam de um problema de produção de grãos eletrofundidos em uma fábrica do interior de São Paulo. Neste tipo de produção a obtenção do produto final é dependente de uma sequência de peneiras vibratórias que possuem diferentes tamanhos de furos. O tempo de preparo dos conjuntos de peneiras é muito alto e, por isso, procura-se evitar a realização de mais de uma preparação por dia. Além da sequência de peneiras, é necessário também programar os fornos, britadeiras e as moendas que fazem parte da produção dos materiais. Dois modelos que combinam modelos de seleção de pro-

cessos a modelos de dimensionamento de lotes mono-estágio são propostos. O primeiro modelo (MNP) minimiza o número de períodos necessários para produção da demanda, e é mais útil quando a programação da produção pode ser cumprida sem atraso da produção de qualquer item. O segundo modelo (MFP) minimiza o atraso de produção entre itens demandados durante o horizonte de planejamento. O MFP é útil em situações em que a programação da produção não pode ser cumprida sem algum atraso da produção de alguns itens.

Almada-Lobo *et al.* (2008) trazem um modelo de dimensionamento e sequenciamento da produção para uma indústria de contêiners de vidro, considerando máquinas em paralelo. Kawamura e Ronconi (2010) tratam do problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção para uma empresa de grande porte da indústria de bens de consumo, como lenços, absorventes e fraldas. Considera-se no modelo máquinas em paralelo e distintas com estrutura de preparo dependente da sequência. Atrasos são permitidos e os produtos são estocados em um armazém com capacidade limitada. Cunha *et al.* (2010) apresentam um modelo matemático para o dimensionamento e sequenciamento da produção para uma empresa que fabrica produtos químicos para mercado a varejo. Neste tipo de problema não existe estoques intermediários ao longo da linha.

Toso e Morabito (2005) modelam matematicamente o problema de programação da produção de ração animal. Eles incluem no modelo GLSP horas extras, como no modelo de Hax e Candea (1984). O modelo de Hax e Candea (1984) considera que a capacidade é a soma das horas extras e da força de trabalho disponível. A função objetivo é minimizar custos de preparo, produção e estoque, horas extras e o custo da força de trabalho utilizada no período. Em Toso *et al.* (2008) são propostos dois modelos para o planejamento da produção de uma indústria de suplementos para nutrição animal em que o sequenciamento é formulado com base no PCVA. Para o dimensionamento de lotes é apresentada uma reformulação do modelo CLSP considerando custos de horas extras e que os custos e tempos de preparo são dependentes da sequência de produção. Em um modelo, o sequenciamento é formulado com base no PCVA, no outro, são incorporadas restrições de preparo *carryover*.

## 2.4.2 Setor de Bebidas

No presente trabalho, o problema considerado é o de uma fábrica de refrigerantes de pequeno porte com apenas uma linha de produção e o gargalo no estágio de envase. Supomos que vários tanques são dedicados a uma máquina e por isso, não é necessário

considerar a programação de xarope nos tanques e nem as trocas. É possível preparar um novo lote de xarope em um dado tanque enquanto a máquina está envasando um produto utilizando este xarope produzido em um outro tanque. A quantidade mínima de produção de xarope para garantir a homogeneidade, e a capacidade máxima do tanque são consideradas no modelo.

Gutiérrez e Pizzolato (2004) modelam a questão do dimensionamento e sequenciamento de lotes de uma fábrica de bebidas. As taxas de produção e demandas são consideradas constantes nos períodos, o problema é resolvido para uma única máquina, e os tempos de preparo são dependentes da sequência. Os atrasos não são permitidos e o processo de xaroparia não é considerado no modelo.

Toledo *et al.* (2007) formulam um problema multiestágio integrado de dimensionamento de lotes e programação da produção, extensão do modelo GLSP, para o planejamento da produção de uma fábrica de refrigerantes com máquinas paralelas que apresentem custos e tempos de preparo dependente da sequência. No trabalho de Ferreira *et al.* (2009) assim como no de Toledo *et al.* (2007) é apresentado um problema de planejamento da produção multiestágio de uma fábrica de refrigerante, onde em cada estágio um problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes com máquinas em paralelo, restrições de capacidade e tempos e custos de preparo dependentes da sequência de produção devem ser resolvidos. Diferente do trabalho de Toledo *et al.* (2007), no trabalho de Ferreira *et al.* (2009) o tamanho dos subperíodos varia de acordo com a quantidade produzida e são feitas simplificações do problemas como a dedicação de um tanque para cada máquina.

### Modelo P1S1M

Em Ferreira *et al.* (2010) foi proposto um modelo integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção para uma fábrica de refrigerante de pequeno porte. O modelo é baseado no GLSP e considera detalhadamente o estágio de envase, com uma linha de produção chamada máquina (Estágio II). Neste modelo, para obter o sequenciamento dos itens, cada período é dividido em subperíodos. O tamanho de cada subperíodo varia de acordo com a quantidade produzida. O número total de subperíodos é definido como sendo o número máximo de preparos em cada período. Apenas um item pode ser produzido em cada subperíodo. Cada combinação vasilhame e sabor é considerado um item. Restrições de capacidade associadas aos lotes mínimo e máximo dos tanques são consideradas no estágio I para assegurar a homogeneidade dos xaropes. É considerado também que uma

vez que a máquina esteja preparada para produzir um produto, sempre existirá um tanque preparado com o xarope necessário para esta produção.

Os parâmetros utilizados para formular o modelo um estágio uma máquina P1S1M (*one-stage one machine lot-scheduling problem*) são, em sua grande maioria, os mesmos utilizados para descrever o modelo GLSP, com a diferença de que alguns parâmetros e variáveis referentes ao estágio II possuem o índice II para diferenciá-los dos referentes ao estágio I que possuem o índice I. As restrições de lote mínimo presentes no modelo GLSP são encontradas no estágio I, e se referem à produção mínima de xarope necessária para a homogeneidade do mesmo. O modelo P1S1M proposto por Ferreira *et al.* (2010) é pelas expressões (2.44) - (2.53).

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J s_{ij}^{II} z_{ijs}^{II} \quad (2.44)$$

sujeito a:

Estágio II (Envase)

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + \sum_{s \in S_t} x_{js}^{II} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T. \quad (2.45)$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{s \in S_t} a_j^{II} x_{js}^{II} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \sum_{s \in S_t} b_{ij}^{II} z_{ijs}^{II} \leq K_t^{II}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.46)$$

$$a_j^{II} x_{js}^{II} \leq K_t^{II} y_{js}^{II}, \quad j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T, s \in S_t. \quad (2.47)$$

$$\sum_{j=1}^J y_{js}^{II} = 1, \quad s = 1, \dots, N. \quad (2.48)$$

$$z_{ijs}^{II} \geq y_{i(s-1)}^{II} + y_{js}^{II} - 1, \quad i, j = 1, \dots, J, s = 1, \dots, N. \quad (2.49)$$

$$\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J z_{ijs}^{II} \leq 1, \quad s = 1, \dots, N. \quad (2.50)$$

Estágio I (Xaroparia)

$$q_l y_{ls}^I \leq \sum_{j \in \gamma_l} r_{lj} x_{js}^{II} \leq K^I y_{ls}^I, \quad l \in \beta, t = 1, \dots, T, s \in S_t. \quad (2.51)$$

$$I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0, \quad j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T. \quad (2.52)$$

$$x_{js}^{II}, z_{ijs}^{II} \geq 0, y_{js}, y_{ls}^I = 0/1, \quad j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T, l \in \beta, s \in S_t. \quad (2.53)$$

A função objetivo (2.44) minimiza a soma total dos custos de estoque, atraso e troca de itens. No estágio II as restrições (2.45) são restrições de balanceamento de estoque de cada item em cada período. Como a variável de produção é definida para cada subperíodo, para obter a produção total do item  $j$  no período  $t$  é necessário somar sua produção em todos os subperíodos do período  $t$ . As restrições (2.46) representam a capacidade da máquina em cada período. As restrições (2.47) asseguram que o item  $j$  será produzido somente se a máquina estiver preparada. As restrições (2.48) estabelecem que ocorra exatamente um preparo por subperíodo. As restrições (2.49) controlam as trocas de itens em cada subperíodo  $s$ . As restrições (2.50) garantem no máximo uma troca em cada subperíodo  $s$ .

No estágio I,  $\sum_{j \in \gamma_l} r_{lj} x_{js}^{II}$  corresponde à demanda do xarope  $l$  em cada subperíodo  $s$ . As restrições (2.51) asseguram que se o tanque está preparado para a produção do xarope  $l$ , então poderá haver produção e a quantidade produzida deve estar entre a quantidade mínima necessária para garantir a homogeneidade e a capacidade máxima do tanque. As restrições (2.52) e (2.53) definem o domínio das variáveis.

### Modelo P1S1MTS

Uma reformulação do modelo P1S1M, denominado P1S1MTS (*traveling salesman one-stage one-machine lot-scheduling problem*), é proposto por Defalque *et al.* (2010). Para modelar o dimensionamento dos lotes, foram utilizadas restrições do CLSP e para modelar as decisões de sequenciamento foram utilizadas idéias similares à apresentada por Toso *et al.* (2009), ou seja, o sequenciamento é modelado utilizando as restrições de eliminação de subrotas do problema do caixeiro viajante assimétrico. As restrições de eliminação de subrotas consideradas em Toso *et al.* (2009) são as propostas por Dantzig, Fulkerson e Johnson (DFJ). Em Defalque *et al.* (2010) são consideradas as restrições propostas por Miller, Tucker e Zemlin (MTZ), mais detalhes sobre as restrições DFJ e MTZ podem ser obtidas no Anexo A. Diferente das restrições DFJ que devem ser incorporadas de forma dinâmica por causa do número elevado de possibilidades, as restrições MTZ podem ser incorporadas *a priori*. No entanto, em geral a relaxação linear associada não fornece bons limites duais.

O Modelo P1S1MTS proposto por Defalque *et al.* (2010) é dado por:



$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^J \sum_{j=1, j \neq i}^J s_{ij}^{II} z_{ijt}^{II} \quad (2.54)$$

sujeito a:

Estágio II (Envase)

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt}^{II} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.55)$$

$$\sum_{j=1}^J a_j^{II} x_{jt}^{II} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1, j \neq i}^J b_{ij}^{II} z_{ijt}^{II} \leq K_t^{II}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.56)$$

$$a_j^{II} x_{jt}^{II} \leq K_t^{II} \sum_{i=1}^J z_{ijt}^{II}, \quad j = 1, \dots, J; \quad j \neq i; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.57)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i_0}^J z_{i_0 jt}^{II} \geq \sum_{i=1}^J z_{ikt}^{II}, \quad k = 1, \dots, J; \quad k \neq i; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.58)$$

$$\sum_{j=1}^J z_{ijt}^{II} \leq 1, \quad i = 1, \dots, J; \quad i \neq j; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.59)$$

$$\sum_{i=1}^J z_{ikt}^{II} = \sum_{j=1}^J z_{kjt}^{II}, \quad k = 1, \dots, J; \quad k \neq i, j; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.60)$$

$$\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J z_{ijt} \leq |S_t|, \quad i \neq j; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.61)$$

$$u_{jt} \geq u_{it} + 1 - (J - 1)(1 - z_{ijt}^{II}); \quad i, j = 1, \dots, J; \quad i \neq j; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.62)$$

Estágio I (Xaroparia)

$$\sum_{j \in \gamma_l} r_{lj} x_{jt}^{II} = K^I (w_{lt} - n_{lt}), \quad l \in L; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.63)$$

$$n_{lt} \leq 1 - \left( \frac{q_l}{K^I} \right), \quad l \in L; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.64)$$

$$y_{lt}^I \leq w_{lt} \leq |S_t| y_{lt}^I, \quad l \in L; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.65)$$

$$\sum_{l \in L} w_{lt} \leq |S_t|; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.66)$$

$$x_{jt}^{II} \geq 0, \quad z_{ijt}^{II}, \quad y_{lt}^I = 0/1, \quad w_{lt} \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq n_{lt}, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T; \quad l \in L. \quad (2.67)$$

A função objetivo (2.54), as restrições de balanceamento de estoque (2.55) e de capa-

cidade (2.56), são as mesmas encontradas no modelo P1S1M, só diferem na definição dos índices. As restrições de preparo (2.57), diferente do modelo P1S1M, onde o preparo da máquina é determinado pela variável  $y_{js}^{II}$ , o modelo P1S1MTS considera o preparo implícito quando  $\sum_{j=1}^J z_{ijt}^{II} = 1$ . As restrições (2.58) garantem que somente haverá troca de um item  $i$  qualquer para um item  $k$  qualquer se existir um troca do item inicial  $i_0$  para algum item  $j$  no período  $t$ , o item  $i_0$  é um item fantasma e para não interferir nos resultados do problema, este item tem os tempos de troca e demanda com valores nulos.

As restrições (2.59) proíbem mais de uma troca a partir de um item  $i$ , o que significa que em cada período só pode ser produzido um único lote de cada produto. As restrições (2.60) garantem que se ocorre uma troca de um item  $i$  para um item  $k$ , então haverá uma troca deste item  $k$  para um item  $j$ . As restrições (2.61) controlam o número total de trocas que podem ocorrer na máquina no período  $t$ . Comparadas às restrições do modelo P1S1M, estas restrições correspondem ao número total de subperíodos em um período  $t$  ( $|S_t|$ ).

As restrições (2.58), (2.59) e (2.60) sozinhas podem gerar subrotas, ou seja, no sequenciamento dos itens, subcaminhos desconexos. Desta forma, as restrições (2.62) são consideradas para a proibição dessas subrotas.

As restrições (2.63) garantem que se o tanque está preparado para a produção do xarope  $l$ , então haverá produção e a quantidade produzida é igual ao número máximo de tanques do xarope  $l$  que podem ser produzidos naquele período. A variável  $n_{lt}$  permite o uso parcial do tanque respeitando a quantidade mínima ( $q_l$ ) necessária para garantir a homogeneidade, como especificado nas restrições (2.64). As restrições (2.65) garantem que só haverá produção do xarope  $l$  se o tanque estiver preparado. De acordo com as restrições (2.66), a soma total do número de tanques produzidos no período  $t$  deve ser limitada pelo número total de preparos do tanque em  $t$ . As restrições (2.67) referem-se ao domínio das variáveis.

## Capítulo 3

# Reformulações

Neste capítulo serão apresentadas duas reformulações para o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção para uma fábrica de refrigerante de pequeno porte discutido na Seção 2.4.2. As reformulações propostas diferem nas decisões de sequenciamento, que são modeladas de acordo com as reformulações das restrições de eliminação de subrotas propostas na literatura. As restrições de eliminação de subrotas do Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico (PCVA), apresentadas por Miller, Tucker e Zemlin (MTZ) são da ordem polinomial (ver Anexo A), o que permite que todas sejam incluídas *a priori*. Entretanto essas restrições produzem uma relaxação linear fraca. Com intuito de melhorar essa relaxação, alguns autores propõem inequações mais fortes para o PCVA derivadas das inequações MTZ. Em Desrochers e Laporte (1991), é apresentada inequações válidas mais fortes obtidas aplicando a técnica de *lifting* (Capítulo 1) nas restrições MTZ. Uma outra proposta foi apresentada em Driscoll e Sherali (2002), aplicando nas restrições MTZ a técnica RLT (*Reformulation Linearization Technique*). Estas duas reformulações são discutidas nas seções seguintes.

### 3.1 Reformulação Desrochers e Laporte

As restrições de eliminação de subrotas MTZ produzem uma relaxação linear fraca, isso se deve ao fato que elas não definem facetas do envoltório convexo do conjunto de soluções viáveis. Em contrapartida, temos a vantagem de que as restrições MTZ possuem um número polinomial,  $(n - 1)^2$  restrições, facilitando a inclusão de todas *a priori*. Motivados por esse fato, Desrochers e Laporte (1991) propõem uma nova classe de inequações para eliminação de subrotas, obtidas a partir das restrições MTZ, que permitem a obtenção de uma formulação mais forte para o PCVA.

Sejam as restrições de eliminação de subrotas MTZ (Anexo A):

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2 \quad i, j = 2, \dots, n; \quad i \neq j. \quad (3.1)$$

$$1 \leq u_i \leq n - 1 \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{B}, \quad u_j \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Queremos construir uma inequação válida para o PCVA incluindo a variável  $x_{ji}$ . Para isso usamos a técnica de *lifting*, ou seja, vamos descobrir qual é o maior valor possível do coeficiente da variável que vai entrar na inequação,  $\alpha_{ji}$ .

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} + \alpha_{ji}x_{ji} \leq n - 2 \quad i, j = 2, \dots, n; \quad i \neq j. \quad (3.4)$$

É necessário determinar qual é o maior valor que  $\alpha_{ji}$  pode assumir, para que a inequação (3.4) continue válida para o PCVA.

Sabemos que  $x_{ji} \in \{0, 1\}$ , então:  $x_{ji} = 0$ , ou  $x_{ji} = 1$ . Se  $x_{ji} = 0$ , então (3.4) torna-se a inequação (3.1), e portanto, (3.4) é válida para qualquer valor de  $\alpha_{ji}$ . Agora, se  $x_{ji} = 1$ , consequentemente,  $x_{ij} = 0$ , logo:

$$u_i - u_j + \alpha_{ji} \leq n - 2. \quad (3.5)$$

Mas, por definição como  $u_j$  representa a ordem em que a cidade  $j$  é visitada, se  $x_{ji} = 1$  então  $u_i = u_j + 1$ , assim

$$\alpha_{ji} \leq n - 3.$$

Portanto

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} + (n - 3)x_{ji} \leq n - 2 \quad i, j = 2, \dots, n; \quad i \neq j, \quad (3.6)$$

com  $u_i, u_j \in [1, n - 1]$ , são inequações válidas para o PCVA.

Também podemos aplicar a técnica de *lifting* nas inequações (3.2), obtendo assim:

$$1 + (n - 3)x_{1j} + (n - 3)x_{j1} \leq u_j \leq (n - 1) - (n - 3)x_{1j} - (1 - x_{j1}) \quad j = 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

### 3.1.1 PCVA-DL

O PCVA pode ser reformulado substituindo as restrições de eliminação de subrotas (3.1) e (3.2) pelas restrições (3.6) e (3.7), denominadas a partir de agora de restrições

RDL. Essa nova reformulação do PCVA será denominada PCVA-DL.

Foram realizados alguns testes computacionais que comprovam que a relaxação linear da formulação do PCVA-DL é melhor do que a formulação PCVA-MTZ. Nos testes foi utilizado um computador com processador Intel Core i7, 2,93 GHz com 4GB de memória RAM, sob a plataforma Windows XP, e o *solver* o CPLEX 10.0. Os exemplares foram tirados da página do TSPLIB. Limitamos o tempo de processamento em 1800 segundos. A Tabela 1 mostra o valor da relaxação linear (RL), o GAP da relaxação linear, o tempo computacional, dado em segundos, para a resolução de cada um dos exemplares, o número de nós analisados e o nó da melhor solução encontrada. A solução ótima foi atingida na maioria dos exemplares.

Podemos observar na Tabela 1 que o valor da RL da formulação DL, apresentou melhores resultados, em 15 exemplares e nos outros 4 obteve o mesmo valor que . E quanto ao tempo computacional a RDL foi melhor em quase 85% dos casos. Notamos que em apenas sete exemplares (br17, ft53, ftv55, ftv170, p43, rbg323 e ry48p) o número de nós analisados é menor com a formulação RMTZ. Desses sete casos, cinco (br17, ft53, p43, rbg323 e ry48p) apresentaram a melhor solução examinando um número menor de nós na formulação RMTZ. Em todos os outros casos a formulação RDL obteve melhores resultados. Um caso particular dos testes, é o exemplar rbg358, no qual a formulação PCVA-DL não conseguiu encontrar uma solução inteira no tempo proposto enquanto a formulação PCVA-MTZ levou 840,88 segundos para provar a otimalidade da melhor solução obtida. Os traços “-” representam que não encontrou o melhor inteiro, ou seja, no calculo do GAP, não tinha um dividendo.

	RL		GAP (%)		Tempo		Num Nós		Melhor Nó	
	RMTZ	RDL	RMTZ	RDL	RMTZ	RDL	RMTZ	RDL	RMTZ	RDL
br17	2,25	22,00	94,23	43,59	1,50	0,89	3.393	3.925	28	99
ft53	5.935,38	6.011,87	14,04	12,93	159,42	175,58	31.923	63.627	31.770	63.183
ft70	37.987,40	38.333,54	1,77	0,88	1.800	27,02	163.823	2.510	88.000	2.470
ftv33	1.187,73	1.217,18	7,64	5,35	1,00	0,84	268	140	248	128
ftv35	1.382,89	1.413,50	6,12	4,04	5,51	1,53	3.289	785	3.288	355
ftv38	1.440,21	1.477,16	5,87	3,45	6,63	2,01	3.096	761	2.828	761
ftv44	1.523,40	1.573,75	5,56	2,43	10,47	3,88	3.428	1.020	3.097	996
ftv47	1.655,82	1.725,66	6,77	2,83	16,27	4,76	6.792	1.307	2.792	530
ftv55	1.438,29	1.510,73	10,55	6,05	23,49	13,15	6.386	6.753	3.386	400
ftv67	1.722,89	1.761,00	6,31	4,24	75,64	35,27	15.940	8.306	5.242	5.420
ftv70	1.769,43	1.858,53	9,26	4,69	64,97	18,32	12.240	2.464	3.000	1.544
ftv170	2.631,48	2.698,47	4,48	2,05	1.708,46	1.491,67	18.280	23.035	13.800	5.200
kro124p	34.008,90	34.976,67	6,13	3,46	717,61	186,08	27.608	17.972	27.476	16.478
p43	149,71	216,00	97,34	96,16	1.800	1.800	239.201	866.876	44.980	633.000
rbg323	1.326	1.326	-	0,67	150,62	1.800	294	501	294	440
rbg358	1.163	1.163	-	-	840,88	1.800	830	151	830	0
rbg403	2.465	2.465	-	-	711,18	313,67	620	0	620	0
rbg443	2.720	2.720	-	-	445,85	192,38	250	0	250	0
ry48p	12.564,70	13.809,17	12,88	4,25	402,82	297,85	98.324	153.154	92.977	145.934

Tabela 1: RMTZ  $\times$  RDL

### 3.1.2 Reformulação I do P1S1MTS: P1S1MTS-DL

Motivados com os resultados da Seção 3.1.1 propomos um modelo um estágio uma máquina com as restrições do sequenciamento reformuladas com base nas restrições de eliminação de subrotas do problema do caixeiro viajante propostas por Desrochers e Laporte (1991), denominado P1S1MTS-DL (*traveling salesman one-stage one machine lot scheduling problem - Desrochers and Laporte*). Esse modelo difere do modelo P1S1MTS nas restrições de eliminação de subrotas que ao invés de usarmos as restrições baseadas na RMTZ (2.62) usaremos as restrições baseadas na RDL (3.16) - (3.18). A seguir, apresentamos o modelo P1S1MTS-DL, descrito pelas inequações (3.8) - (3.23).

Modelo P1S1MTS-DL

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^J \sum_{j=1, j \neq i}^J s_{ij}^{II} z_{ij}^{II} \quad (3.8)$$

sujeito a: Estágio II (Envase)

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt}^{II} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.9)$$

$$\sum_{j=1}^J a_j^{II} x_{jt}^{II} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1, j \neq i}^J b_{ij}^{II} z_{ijt}^{II} \leq K_t^{II}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.10)$$

$$a_j^{II} x_{jt}^{II} \leq K_t^{II} \sum_{i=1}^J z_{ijt}^{II}, \quad j = 1, \dots, J; \quad j \neq i; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.11)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^J z_{iojt}^{II} \geq \sum_{i=1}^J z_{ikt}^{II}, \quad k = 1, \dots, J, \quad k \neq i; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.12)$$

$$\sum_{j=1}^J z_{ijt}^{II} \leq 1, \quad i = 1, \dots, J; \quad i \neq j, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^J z_{ikt}^{II} = \sum_{j=1}^J z_{kjt}^{II}, \quad k = 1, \dots, J; \quad k \neq i, j; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.14)$$

$$\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J z_{ijt} \leq |S_t|, \quad i \neq j; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.15)$$

$$u_{jt} \geq u_{it} + 1 - (J-1)(1 - z_{ijt}^{II}) + (J-3)z_{jit}^{II}, \quad i, j = 1, \dots, J; \quad i \neq j; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.16)$$

$$1 + (1 - z_{1jt}^{II}) + (J-3)z_{j1t}^{II} \leq u_{jt}, \quad j = 1, \dots, J. \quad (3.17)$$

$$u_{jt} \leq (J-1) - (J-3)z_{1jt}^{II} - (1 - z_{j1t}^{II}), \quad j = 1, \dots, J. \quad (3.18)$$

Estágio I (Xaroparia)

$$\sum_{j \in \gamma_l} r_{lj} x_{jt}^{II} = K^I (w_{lt} - n_{lt}), \quad l \in L; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.19)$$

$$n_{lt} \leq 1 - \left( \frac{q_l}{K^I} \right), \quad l \in L; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.20)$$

$$y_{lt}^I \leq w_{lt} \leq |S_t| y_{lt}^I, \quad l \in L; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.21)$$

$$\sum_{l \in L} w_{lt} \leq |S_t|; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.22)$$

$$x_{jt}^{II} \geq 0, \quad z_{ijt}^{II}, \quad y_{lt}^I = 0/1, \quad w_{lt} \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq n_{lt}, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T; \quad l \in L. \quad (3.23)$$

## 3.2 Reformulação Sherali e Driscoll

Nessa seção será apresentada uma outra reformulação para as restrições de eliminação de subrotas RMTZ, proposta por Driscoll e Sherali (2002). A motivação para essa proposta é das restrições RMTZ possuírem uma representação polinomial compacta. Esta representação é muito útil quando o PCVA surge como subproblemas no contexto

problemas de grande porte, como roteamento de veículos, designação e programação da produção. As inequações de eliminação de subrotas mais fortes são geradas aplicando a técnica RLT nas restrições RMTZ. A seguir apresentamos a técnica RLT e propomos uma segunda reformulação para o problema P1S1MTS, modelo P1S1MTS-SD.

A técnica RLT foi apresentada por Sherali e Adams (1989), com o intuito de obter uma aproximação do envoltório convexo de problemas 0-1. A técnica foi estendida para outras classes de problemas por Sherali e Tuncbilek (1992). A técnica é constituído de duas fases. Na primeira fase, a fase da reformulação, uma representação do problema através de um modelo não linear é construída. Em seguida, fatores limitantes, obtidos diretamente da relaxação das variáveis 0-1 são definidos e cada restrição do modelo não linear é multiplicada por cada fator limitante. Na segunda fase, a fase de linearização, os termos não lineares são substituídas por variáveis lineares, obtendo assim uma reformulação linear do problema inicial.

A seguir aplicaremos a técnica RLT no PCVA com as restrições RMTZ para a eliminação de subrotas.

### Formulação Não Linear

Considere a seguinte formulação não linear para o problema do caixeiro viajante:

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} \quad (3.24)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 1 \quad j \neq i; \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.25)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 1 \quad i \neq j; \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.26)$$

$$u_j x_{ij} = (u_i + 1) x_{ij}, \quad \forall i, j \geq 2, i \neq j. \quad (3.27)$$

$$u_j x_{1j} = x_{1j}, \quad \forall j \geq 2. \quad (3.28)$$

$$u_j x_{j1} = (n - 1) x_{j1}, \quad \forall j \geq 2. \quad (3.29)$$

$$1 \leq u_j \leq (n - 1), \quad \forall j \geq 2. \quad (3.30)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \geq 2. \quad (3.31)$$

As restrições (3.25), (3.26), (3.30) e (3.31) são restrições já presentes no modelo original do problema do caixeiro viajante. Sabemos que  $u_j$  representa a ordem que a cidade  $j$  é visitada, então podemos afirmar que  $u_j = u_i + 1$ , assim as restrições (3.27) são válidas



para o modelo, pois a variável  $x_{ij}$  é binária. Por convenção consideramos que  $u_1 = 0$  então quando temos  $x_{1j} = 1$ , necessariamente,  $u_j = 1$ , garantindo assim a validade das restrições (3.28). Já a última cidade a ser visitada recebe  $u_j = n - 1$ , o que ocorre quando  $x_{j1} = 1$ , mostrando que as restrições (3.29) também são válidas para o modelo.

### Reformulação

A próxima etapa é a multiplicação de cada inequação por fatores limitantes. Essa etapa é composta de quatro passos relacionados a seguir.

- **Passo 1:**

Pelas restrições (3.25) e (3.26) podemos afirmar que  $\left[ \sum_{j=1; j \neq i}^N x_{ij} - 1 \right] = 0, \forall i \geq 2$  e que  $\left[ \sum_{i=1; i \neq j}^N x_{ij} - 1 \right] = 0, \forall j \geq 2$ . Como  $u_i \geq 0$ , e  $u_j \geq 0$ , podemos afirmar que as seguintes inequações são válidas

$$u_i \left[ \sum_{j=1; j \neq i}^N x_{ij} - 1 \right] = 0 \quad \forall i \geq 2 \quad (3.32)$$

$$u_j \left[ \sum_{i=1; i \neq j}^N x_{ij} - 1 \right] = 0 \quad \forall j \geq 2. \quad (3.33)$$

- **Passo 2a:**

Da restrição (3.30) podemos afirmar  $(u_j - 1) \geq 0$  para cada  $j \geq 2$ . Logo é válido dizer que  $(u_j - 1)x_{ij} \geq 0, \forall i, j \geq 2; i \neq j$ .

- **Passo 2b:**

Sabemos que  $x_{ij} + x_{ji} \leq 1$ , pois quando  $x_{ij} = 1$  necessariamente  $x_{ji} = 0$  e vice e versa. Também podemos ter o caso em que ambos são zero, mas nunca temos o caso em que ambos tem o valor um. Logo  $(1 - x_{ij} - x_{ji}) \geq 0$ . Se para cada  $j \geq 2$  multiplicarmos a inequação  $(u_j - 1) \geq 0$  de (3.30) por  $(1 - x_{ij} - x_{ji}) \geq 0$  para cada  $i \geq 2; i \neq j$ , obtemos a seguinte inequação válida:

$$(u_j - 1)(1 - x_{ij} - x_{ji}) \geq 0 \quad \forall i, j \geq 2; i \neq j. \quad (3.34)$$

- **Passo 3:**

Semelhante ao Passo 2, mas usando o lado direito da inequação (3.30). Obtemos as seguintes inequações válidas:

$$(n - 1 - u_j)x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \geq 2; i \neq j \quad (3.35)$$

$$(n - 1 - u_j)(1 - x_{ij} - x_{ji}) \geq 0 \quad \forall i, j \geq 2; i \neq j. \quad (3.36)$$

• **Passo 4**

Para cada  $j \geq 2$ , construímos uma inequação válida para a cidade base, assim temos:

$$(u_j - 2)(1 - x_{1j} - x_{j1}) \geq 0 \quad (3.37)$$

$$(n - 2 - u_j)(1 - x_{1j} - x_{j1}) \geq 0. \quad (3.38)$$

**Linearização**

Na fase de linearização os termos que se tornaram-se não lineares na fase de linearização são substituídos por termos lineares.

Considere a seguinte redefinição de variáveis e produtos de variáveis.

$$\lambda_{ij} = u_i x_{ij} \quad \forall i, j \geq 2, i \neq j, \quad (3.39)$$

$$z_{ij} = u_j x_{ij} \quad \forall i, j \geq 2, i \neq j, \quad (3.40)$$

$$u_j x_{1j} = x_{1j} \quad \forall j \geq 2, \quad (3.41)$$

$$u_j x_{j1} = (n - 1)x_{j1} \quad \forall j \geq 2, \quad (3.42)$$

$$z_{ij} = \lambda_{ij} + x_{ij} \quad \forall i, j \geq 2, i \neq j. \quad (3.43)$$

Do Passo 1, temos a partir de 3.32,

$$\begin{aligned} u_i(x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} - 1) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u_i x_{i1} + u_i x_{i2} + \dots + u_i x_{in} - u_i &= 0 \Rightarrow^{3.39, 3.42} \\ \Rightarrow (n - 1)x_{i1} + \lambda_{i2} + \dots + \lambda_{in} - u_i &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sum_{j=2}^n \lambda_{ij} + (n-1)x_{i1} = u_i, \quad \forall i \geq 2; i \neq j. \quad (3.44)$$

A partir de 3.33:

$$\begin{aligned} u_j(x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{nj} - 1) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u_j x_{1j} + u_j x_{2j} + \dots + u_j x_{nj} - u_j &= 0 \Rightarrow^{3.41, 3.40} \\ \Rightarrow x_{1j} + z_{2j} + z_{3j} + \dots + z_{nj} - u_j &= 0 \Rightarrow^{3.43} \\ \Rightarrow x_{1j} + \lambda_{2j} + x_{2j} + \lambda_{3j} + x_{3j} + \dots + \lambda_{nj} + x_{nj} - u_j &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=2}^n \lambda_{ij} + \sum_{i=1}^n x_{ij} &= u_j \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sum_{i=2}^n \lambda_{ij} + 1 = u_j, \quad \forall i \geq 2; i \neq j. \quad (3.45)$$

Das expressões 3.34, 3.35 e 3.36 obtidas nos passos 2a, 2b e 3 temos:

$$(u_j - 1)x_{ji} \geq 0 \Rightarrow u_j x_{ji} - x_{ji} \geq 0 \Rightarrow x_{ji} \leq u_j x_{ji} \Rightarrow^{3.39} x_{ji} \leq \lambda_{ji}.$$

e

$$\begin{aligned} (n-1-u_j)x_{ij} \geq 0 &\Rightarrow nx_{ij} - x_{ij} - u_j x_{ij} \geq 0 \Rightarrow^{3.40} nx_{ij} - x_{ij} - z_{ij} \geq 0 \Rightarrow^{3.43} \\ \Rightarrow nx_{ij} - x_{ij} - \lambda_{ij} - x_{ij} &\geq 0 \Rightarrow \lambda_{ij} \leq (n-2)x_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$x_{ij} \leq \lambda_{ij} \leq (n-2)x_{ij}. \quad (3.46)$$

Temos também, a partir das expressões 3.34, 3.35 e 3.36 obtidas nos passos 2a, 2b e 3:

$$\begin{aligned} (u_j - 1)(1 - x_{ij} - x_{ji}) \geq 0 &\Rightarrow u_j - u_j x_{ij} - u_j x_{ji} - 1 + x_{ij} + x_{ji} \geq 0 \Rightarrow^{3.39, 3.40} \\ \Rightarrow u_j - 1 - z_{ij} - \lambda_{ji} + x_{ij} + x_{ji} &\geq 0 \Rightarrow^{3.43} \\ \Rightarrow u_j - 1 - \lambda_{ij} - x_{ij} - \lambda_{ji} + x_{ij} + x_{ji} &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\lambda_{ij} + \lambda_{ji} \leq u_j - (1 - x_{ji}). \quad (3.47)$$

e da expressão 3.36 temos:

$$\begin{aligned} (n-1-u_j)(1-x_{ij}-x_{ji}) \geq 0 &\Rightarrow n-nx_{ij}-nx_{ji}-1+x_{ij}+x_{ji}-u_j+u_jx_{ij}+u_jx_{ji} \geq 0 \Rightarrow^{3.39 \ 3.40} \\ &\Rightarrow z_{ij} + \lambda_{ji} + n - nx_{ij} - nx_{ji} - 1 + x_{ij} + x_{ji} - u_j \geq 0 \Rightarrow^{3.43} \\ &\Rightarrow \lambda_{ij} + x_{ij} + \lambda_{ji} + n - nx_{ij} - nx_{ji} - 1 + x_{ij} + x_{ji} - u_j \geq 0 \Rightarrow u_j + (n-2)x_{ij} - (n-1)(1-x_{ji}) \leq \lambda_{ij} + \lambda_{ji}. \end{aligned}$$

Portanto

$$u_i + (n-2)x_{ij} - (n-1)(1-x_{ji}) \leq \lambda_{ij} + \lambda_{ji} \leq u_j - (1-x_{ji}) \quad (3.48)$$

Do passo 4 temos:

$$1 + (1 - x_{1j} + (n-3)x_{j1}) \leq u_j \leq (n-1) - (n-3)x_{1j} - (1 - x_{j1}) \quad (3.49)$$

Assim, através da técnica RLT, as reformulações das restrições RMTZ estão descritas por (3.50) - (3.56), denominadas a partir de agora de inequação RSD.

$$\sum_{j=2}^n \lambda_{ij} + (n-1)x_{i1} = u_i \quad \forall i \neq j; i \geq 2. \quad (3.50)$$

$$\sum_{i=2}^n \lambda_{ij} + 1 = u_j \quad \forall i \neq j; i \geq 2. \quad (3.51)$$

$$x_{ij} \leq \lambda_{ij} \leq (n-2)x_{ij} \quad \forall i \neq j; i, j \geq 2. \quad (3.52)$$

$$\lambda_{ij} + \lambda_{ji} \leq u_j - (1 - x_{ji}) \quad \forall i \neq j; i, j \geq 2. \quad (3.53)$$

$$u_i + (n-2)x_{ij} - (n-1)(1-x_{ji}) \leq \lambda_{ij} + \lambda_{ji} \quad \forall i \neq j; i, j \geq 2. \quad (3.54)$$

$$1 + (1 - x_{1j} + (n-3)x_{j1}) \leq u_j \quad \forall j \geq 2. \quad (3.55)$$

$$u_j \leq (n-1) - (n-3)x_{1j} - (1 - x_{j1}) \quad \forall j \geq 2. \quad (3.56)$$

### 3.2.1 PCVA - SD

Realizamos testes computacionais para avaliar se a relaxação linear usando a reformulação RSD é melhor do que a obtida com as restrições RMTZ. Para a realização dos testes foram utilizados os mesmos exemplares e equipamentos usados nos testes da reformulação RDL (Seção 3.1.1). A Tabela 2 mostra o valor da relaxação linear (RL), a solução e o tempo computacional, dado em segundo, para cada um dos exemplares, e a Tabela 3 apresentamos a quantidade de nós analisados como também qual o nó da melhor solução encontrada.

Tabela 2: MTZ x SD - RL, Solução e Tempo Computacional

Exemplar	RL		Solução		Tempo	
	RTZ	RSD	RMTZ	RSD	RMTZ	RSD
br17	2,25	27,68	39	39	1,50	3,92
ft53	5.935,38	6.118,40	6.905	6.905	159,42	894,2
ft70	37.987,40	38.364,55	38.673	38.673	1.800,00	669,56
ftv33	1.187,73	1.224,50	1.286	1.286	1,00	41,42
ftv35	1.382,89	1.415,51	1.473	1.473	5,51	163,44
ftv38	1.440,21	1.480,06	1.530	1.530	6,63	283,78
ftv44	1.523,40	1.573,75	1.613	1.613	10,47	130,51
ftv47	1.655,82	1.727,21	1.776	1.776	16,27	577,31
ftv55	1.438,29	1.513,27	1.608	1.608	23,49	1800
ftv67	1.722,89	1.765,39	1.839	1.839	75,64	1800
ftv70	1.769,43	1.859,58	1.950	1.957	64,97	1800
ftv170	2.631,48	2.698,68	2.755	no integer	1.708,46	1800
kro124p	34.008,89	35.059,58	36.230	no integer	717,61	1800
p43	149,71	864,58	5.623	no integer	1.800,00	1800
rbg323	1.326,00	1.326,00	1.326	no integer	150,62	1800
rbg358	1.163,00	1.163,00	1.163	no integer	840,88	1800
rbg403	2.465,00	-	2.465	no integer	711,18	1800
rbg443	2.720,00	-	2.720	no integer	445,85	1800
ry48p	12.564,70	13.820,43	14.422	14.422	402,82	1800

Tabela 3: RMTZ x RSD - Nós

Exemplar	Número de Nós		Melhor Nó	
	RMTZ	RSD	RMTZ	RSD
br17	3.393	950	28	100
ft53	31.923	11.177	31.770	11.122
ft70	163.823	3.540	88.000	3.526
ftv33	268	1.888	248	1.872
ftv35	3.289	6.236	3.288	5.668
ftv38	3.096	9.700	2.828	9.675
ftv44	3.428	2.377	3.097	2.353
ftv47	6.792	6.692	2.792	6.692
ftv55	6.386	14.757	3.386	14.000
ftv67	15.940	9.251	5.242	1.306
ftv70	12.240	7.116	3.000	6.700
ftv170	18.280	7	13.800	0
kro124p	27.608	4.273	27.476	0
p43	239.201	53.761	44.980	0
rbg323	294	0	294	0
rbg358	830	0	830	0
rbg403	620	0	620	0
rbg443	250	0	250	0
ry48p	98.324	40.016	92.977	19.000

Podemos notar que em praticamente todos os exemplares a formulação SD apresentou uma RL melhor do que a obtida pela formulação RMTZ. Para apenas dois exemplares (rbg403 e rbg443) usando a formulação SD não foi possível, no tempo proposto, encontrar o valor da RL. Porém, podemos observar que quanto ao tempo computacional a formulação SD deixa a desejar, pois em apenas um caso (ft70) ela foi melhor que a MTZ. Driscoll e Sherali (2002) também notaram esse comportamento na formulação SD, e eles explicam que isso era esperado, devido ao fato que a técnica RLT tende a gerar matrizes mal condicionadas.

Apesar do aumento do tempo computacional achamos os resultados encorajadores, pois acreditamos que uma formulação mais forte pode beneficiar o processo de seleção.

### 3.2.2 Reformulação II do P1S1MTS: P1S1MTS-SD

Propomos um modelo um estágio uma máquina com as restrições do sequenciamento reformuladas com base nas restrições de eliminação de subrotas do problema do caixeiro viajante reformuladas por Driscoll e Sherali (2002), denominado P1S1MTS-SD (*traveling salesman one-stage one machine lot scheduling problem - Sherali and Driscoll*). Como no modelo P1S1MTS-DL, o novo modelo só difere do modelo P1S1MTS nas restrições de eliminação de subrotas que ao invés de usarmos as restrições baseadas nas RMTZ (2.62) usaremos as restrições baseadas na RSD (3.50) - (3.56). A seguir apresentamos o modelo P1S1MTS-SD descrito pelas inequações (3.57) - (3.76).

Modelo P1S1MTS-SD

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^J \sum_{j=1, j \neq i}^J s_{ij}^{II} z_{ijt}^{II} \quad (3.57)$$

sujeito a: Estágio II (Envase)

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt}^{II} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.58)$$

$$\sum_{j=1}^J a_j^{II} x_{jt}^{II} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1, j \neq i}^J b_{ij}^{II} z_{ijt}^{II} \leq K_t^{II}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.59)$$

$$a_j^{II} x_{jt}^{II} \leq K_t^{II} \sum_{i=1}^J z_{ijt}^{II}, \quad j = 1, \dots, J; \quad j \neq i; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.60)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i_0}^J z_{i_0jt}^{II} \geq \sum_{i=1}^J z_{ikt}^{II}, \quad k = 1, \dots, J, \quad k \neq i; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.61)$$

$$\sum_{j=1}^J z_{ijt}^{II} \leq 1, \quad i = 1, \dots, J; \quad i \neq j, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.62)$$

$$\sum_{i=1}^J z_{ikt}^{II} = \sum_{j=1}^J z_{kjt}^{II}, \quad k = 1, \dots, J; \quad k \neq i, j; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.63)$$

$$\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J z_{ijt} \leq |S_t|, \quad i \neq j; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.64)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^J \lambda_{ijt} + (J-1)z_{i_0t}^{II} = u_{it}, \quad i = 1, \dots, J, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.65)$$

$$\sum_{i=1, i \neq j}^J \lambda_{ijt} + 1 = u_{jt}, \quad j = 1, \dots, J, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.66)$$

$$z_{ijt}^{II} \leq \lambda_{ijt} \leq (J-2)z_{ijt}^{II}, \quad i, j = 1, \dots, J, \quad i \neq j, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.67)$$

$$u_{jt} + (J-2)z_{ijt}^{II} - (J-1)(1 - z_{jit}^{II}) \leq \lambda_{ijt} + \lambda_{jit}, \quad i, j = 1, \dots, J, \quad i \neq j, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.68)$$

$$\lambda_{ijt} + \lambda_{jit} \leq u_{jt} - (1 - z_{jit}^{II}), \quad i, j = 1, \dots, J, \quad i \neq j, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.69)$$

$$1 + (1 + z_{1jt}^{II}) + (J-3)z_{j1t}^{II} \leq u_{jt}, \quad j = 1, \dots, J, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.70)$$

$$u_{jt} \leq (J-1) - (J-3)z_{1jt}^{II} - (1 - z_{j1t}^{II}), \quad j = 1, \dots, J, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.71)$$

Estágio I (Xaroparia)

$$\sum_{j \in \gamma_l} r_{lj} x_{jt}^{II} = K^I(w_{lt} - n_{lt}), \quad l \in L; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.72)$$

$$n_{lt} \leq 1 - \left( \frac{q_l}{K^I} \right), \quad l \in L; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.73)$$

$$y_{lt}^I \leq w_{lt} \leq |S_t| y_{lt}^I, \quad l \in L; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.74)$$

$$\sum_{l \in L} w_{lt} \leq |S_t|; \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.75)$$

$$x_{jt}^{II} \geq 0, \quad z_{ijt}^{II}, \quad y_{lt}^I = 0/1, \quad w_{lt} \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq n_{lt}, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T; \quad l \in L. \quad (3.76)$$



### 3.3 Avaliação Computacional Preliminar - Exemplos Ilustrativos

Considere uma fábrica de refrigerante com uma máquina e que queira produzir quatro itens: 1, 2, 3 e 4 em um horizonte de planejamento com dois períodos. São necessários dois tipos de xaropes 1 e 2 para a produção de refrigerante; o xarope 1 é usado na produção do item 4 e o xarope 2 na produção dos demais itens. A capacidade da máquina e do tanque é 1000 unidades por período. O estoque inicial considerado é 0 e a quantidade mínima de xarope que deve ser produzida também é 1000. As Tabelas 4, 5, 6, 7, 8 e 9 mostram os custos de troca dos itens, de estoque e atraso, a demanda dos itens nos períodos, a quantidade necessária de xarope para a produção de uma unidade de cada item e os tempos de troca dos itens respectivamente.

Item	1	2	3	4
1	0	6	9,2	12,3
2	7,9	0	9,2	12,3
3	2,9	10	0	12,3
4	19,9	20,1	18,5	0

Tabela 4: Custo de troca dos itens na máquina ( $s_{ij}$ ).

Item	Estoque	Atraso
1	0,007	15
2	0,006	15
3	0,007	16,2
4	0,009	18,9

Tabela 5: Custos de estoque ( $h_j$ ) e atraso ( $g_j$ ) dos itens.

Item	Tempo (s)
1	0,03
2	0,06
3	0,03
4	0,06

Tabela 6: Tempo por unidade de produção ( $a_j$ ).

Item \ Período	1	2
1	1464	1459
2	4691	2719
3	753	746
4	12958	12666

Tabela 7: Demanda dos itens por período ( $d_{jt}$ ).

Item \ 1	1	2
1	-	0,29
2	-	0,29
3	-	0,237
4	0,29	-

Tabela 8: Quantidade de xarope por unidade de produção ( $r_{lj}$ ).

Item	1	2	3	4
1	0	9	15	30
2	12	0	15	30
3	4	15	0	30
4	30	30	30	0

Tabela 9: Tempos de troca dos itens ( $b_{ij}$ ).

Comparamos a solução obtida pelos três modelos: o P1S1MTS (Defalque *et al.* 2010), e os modelos P1S1MTS-DL (3.8) - (3.23) e P1S1MTS-SD (3.57) - (3.76). Os resultados estão descritos na Tabela 10, RL representa a relaxação linear, a quantidade de nós analisada e o nó em que a melhor solução foi obtida. Esse teste foi realizado usando os parâmetros *default* do CPLEX 10.0 porém desligando os planos de cortes. Podemos notar que em todos os quesitos analisados os modelos propostos foram melhor que o modelo P1S1MTS.

Tabela 10: Exemplos Ilustrativos - *Branch and Bound*

Modelo	RL	Tempo	Num Nós	Melhor Nó
P1S1MTS	61661,44	0,19	2356	520
P1S1MTS - DL	61661,44	0,11	839	395
P1S1MTS - SD	77993,74	0,11	458	30

A Tabela 11 apresenta os resultado com a estratégia *Branch and Cut*. A Tabela 12 apresenta os planos de cortes gerados pelos modelos.

Tabela 11: Exemplar Ilustrativo - *Branch and Cut*

Modelo	RL	Tempo	Num Nós	Melhor Nó
P1S1MTS	61661,44	0,11	665	245
P1S1MTS - DL	61661,44	0,12	478	328
P1S1MTS - SD	77993,74	0,17	522	230

Tabela 12: Planos de Cortes gerados pelos modelos

Modelo	Clique	Cover	Implied	Flow Cuts	Mixed	Gomory	Total
P1S1MTS	3	2	36	13	6	6	66
P1S1MTS-DL	0	2	0	10	7	9	28
P1S1MTS-SD	0	2	9	6	10	5	32

Podemos observar que para o modelo P1S1MTS foram gerados uma quantidade de cortes muito maior do que para os modelos propostos.

## Capítulo 4

### *Estudo Computacional*

Neste capítulo apresentamos resultados computacionais para avaliar o desempenho dos modelos P1S1MTS-DL e P1S1MTS-SD, propostos no Capítulo 3. Esses experimentos foram realizados com dados gerados aleatoriamente e dados reais, obtidos em Defalque *et. al* (2010) e Ferreira *et al.* (2010). Os testes realizados para o modelo P1S1MTS foram processados novamente por causa da utilização de um computador com processador e memória diferentes do utilizado em Defalque *at.al.* (2010) resultando em uma pequena diferença entre os resultados desse trabalho e o apresentado por Defalque *et al.* (2010). Os modelos foram descritos na sintaxe do AMPL, e como *solver* utilizamos o CPLEX 10.0 com parâmetros *default*. Foi utilizado um computador com processador Intel Corel i7, com 2,93 GHz e com 1,87 GB de memória RAM, sob a plataforma do Windows 7.

#### 4.1 Descrição do Estudo Computacional

O estudo computacional foi dividido em duas partes. Na primeira avaliamos o comportamento das reformulações usando exemplares obtidos a partir de dados gerados aleatoriamente e na segunda parte foram usados exemplares gerados com base em dados reais.

Foram usadas dois tipos de reformulações, o primeiro denominado Reformulação F0, considera os modelos P1S1MTS-DL ((3.8) - (3.23)) e P1S1MTS-SD ((3.57) - (3.76)), como descritos no Capítulo 3. O segundo tipo, denominado Reformulação F1, foram usados os modelos propostos, excluindo as restrições que limitam a variável  $u_{jt}$ , ou seja, sem as restrições (3.17) - (3.18) do modelo P1S1MTS-DL e sem as restrições (3.70) - (3.71) do modelo P1S1MTS-SD. A variável  $u_{jt}$  é uma variável usada para auxiliar as restrições de eliminação de subrotas. Quando é limitada superiormente no número total de itens

indica a ordem que o item  $j$  vai ser produzido no período  $t$ . Porém essa informação é redundante pois a variável  $z_{ijt}^{II}$  nos fornece a sequência da produção. Assim, mesmo retirando as restrições (3.17) - (3.18) e (3.70) - (3.71) temos a sequência da produção em cada um dos modelos. Daqui em diante, por questão de espaço, vamos nos referir aos modelos P1S1MTS, P1S1MTS-DL e P1S1MTS-SD como modelos MTZ, DL e SD respectivamente.

### Geração de Exemplos Aleatórios

Para a realização dos testes com dados aleatórios foram gerados 60 exemplos, 30 com a capacidade folgada, usados em Defalque *et al.* (2010) e 30 com a capacidade apertada. Os exemplos foram gerados considerando três classes distintas, denominadas Classe 1, Classe 2 e Classe 3, 20 exemplos em cada. A Tabela 13 resume as diferenças entre as três classes. Os exemplos da Classe 1 foram denominados de a1 - a20, os da Classe 2 de b1 - b20 e os exemplos da Classe 3 de c1 - c20, sendo que os dez primeiros em cada classe possuem capacidade folgada e os dez restantes capacidade apertada.

Classes	Significado
Classe 1	Mais de um item utiliza o mesmo xarope
Classe 2	Custos de trocas são iguais a 10% dos tempos de troca
Classe 3	Itens diferentes utilizam xaropes diferentes.

Tabela 13: Diferenças entre as classes

Nesses exemplos são considerados 4 itens, 2 xaropes e um horizonte de planejamento contendo dois períodos. A capacidade do tanque considerada é de 1000 litros e a quantidade mínima de xarope considerada é de 176,802 litros. Os parâmetros para a geração dos exemplos são mostrados na Tabela 14. Os custos de atraso e estoque, a capacidade necessária para a produção de uma unidade de cada item, o tempo de troca, a demanda, o estoque inicial e a quantidade de xarope necessária para a produção de uma unidade de cada item são gerados aleatoriamente através de uma distribuição uniforme nos respectivos intervalos. A capacidade da máquina considerada nos dez primeiros exemplos de cada classe (a1-a10, b1-b10, c1-c10) é de 867,48 minutos, que é uma capacidade folgada. Supondo que se tenha uma demanda máxima de 12,958 itens e que o tempo de produção de cada bebida seja o tempo máximo de 0,06 minutos, então são necessários 777,48 minutos de tempo disponível para a produção dos itens. Considerando também que o tempo de troca de todos os itens fosse o maior possível, que é de 30 minutos, e que sempre são realizadas três trocas, então são consumidos 90 minutos, totalizando 867,48 minutos. Nos

outros 10 exemplares de cada classe (a11-a20, b11-b20, c11-c20) foi modificada apenas a capacidade da máquina, definida como 650,61 minutos, o que caracteriza uma capacidade apertada. O número de variáveis e restrições de cada modelo é dado na Tabela 15. Todos os exemplares possuem a mesma dimensão.

Parâmetros Variáveis	Valores
Custo de estoque	[0,006; 0,009]
Custo de atraso	[15; 18,9]
Capacidade para produção de uma unidade para o item $j$	[0,03; 0,06]
Tempo de troca	[4; 30]
Custo de troca - Classe 1 e 3	$0,5 \times b_{ij}$
Custo de troca - Classe 2	$0,1 \times b_{ij}$
Demanda	[746; 12.958]
Estoque inicial	[0;0]
Quantidade de xarope por bebida $j$	[0,237; 0,29]

Tabela 14: Parâmetros para a geração dos dados aleatórios (Defalque *et al.* (2010))

		F0		F1	
	MTZ	DL	SD	DL	SD
Número de Variáveis	90	90	130	90	130
Número de Restrições	91	107	197	91	179
Número de Variáveis Binárias	59	51	91	51	91

Tabela 15: Número de Variáveis e de Restrições - Exemplares Aleatórios

### Exemplares Baseados em Dados Reais

Dentre os exemplares baseados em dados reais, usados em Ferreira *et al.* (2010), os exemplares S1 e S6 foram gerados a partir de dois conjuntos de dados coletados na fábrica visitada pelos autores. Os exemplares consideram uma máquina que pode produzir 27 itens de diferentes sabores e tamanhos. Dez xaropes são necessários para produzir este conjunto de itens. A capacidade da xaroparia é de 84000 litros. Foi considerado um horizonte de planejamento de 5 semanas (períodos). O tempo disponível para a produção em cada período é de 6.840 minutos, exceto para o primeiro período, que possui apenas dois dias de produção e, portanto, a capacidade disponível é de apenas 2.280 minutos. Os outros 8 exemplares foram gerados modificando parte dos dados usados nos exemplares reais, 4 exemplares (S2 - S5) modificando S1 e os outros 4 exemplares (S7

- S10) modificando o exemplar S6. Assim, os 10 exemplares representam 10 diferentes cenários. A Tabela 16 resume as diferenças entre os exemplares. A Tabela 17 apresenta o número de variáveis, de restrições e de variáveis binárias dos exemplares baseados em dados reais.

Exemplares	Modificações
S1(S6)	Dados Reais
S2(S7)	Capacidade da Máquina de S1(S6) reduzida em 25%
S3(S8)	Custos de Estoque de S1(S6) foram dobrados
S4(S9)	Custo de troca de S2(S7) reduzidos em 1/3
S5(S10)	Custos de estoque de S4(S9) foram dobrados

Tabela 16: Diferenças entre os exemplares S1-S10 (Ferreira *et al.* (2010))

		F0		F1	
	MTZ	DL	SD	DL	SD
Número de Variáveis	4485	4485	8265	4485	8265
Número de Restrições	4371	4641	15441	4371	15171
Número de Variáveis Binárias	3933	3929	7709	3933	7709

Tabela 17: Número de Variáveis e Restrições - Exemplos Reais

## 4.2 Resultados com Exemplos Aleatórios

A Reformulação F0 considera os modelos DL e SD como descritos no Capítulo 3. Os resultados para os exemplares com a capacidade folgada são descritos nas Tabelas 18 e 19 e os resultados com a capacidade apertada nas Tabelas 20 e 21. Todos os exemplos aleatórios foram resolvidos na otimalidade e a média do tempo computacional não ultrapassa 0,10 segundos.

As Tabelas 18 e 20 apresentam a relaxação linear (RL), o valor da solução ótima (Solução), o número de nós analisados em cada modelo até provar a otimalidade (Número de Nós) e o nó em que foi encontrada a solução (Melhor Nó). A relaxação linear encontrada foi a mesma para os três modelos. Os parâmetros *default* do CPLEX 10.0 permitem a geração de planos de cortes para auxiliar na resolução dos problemas. Os cortes gerados são Clique (Clique), Inequações de Cobertura (Cover), Implied Bound Cuts (Implied), Mixed Integer Rounding (Mixed), Inequações de Gomory (Gomory), Inequações de Cobertura

de Fluxo (Flow Cuts), Inequações de Cobertura de Caminho de Fluxo (Flow Path). As Tabelas 19 e 21 apresentam o número de cada tipo de corte gerado.

Analisando a Tabela 18, notamos que muitos exemplares foram resolvidos no nó raiz para os três modelos. Dentre os outros exemplares notamos que quando usamos os modelos DL e SD o número de nós analisados é menor, porém o modelo MTZ também se destaca em vários casos. Quando comparamos por classes, observamos que a classe em que itens diferentes utilizam xaropes diferentes (Classe 3) foi a classe em que o número de nós analisados foi maior principalmente quando o modelo SD é usado. Mas observamos também na Tabela 19 que o número de planos de cortes gerados na Classe 3 é maior quando comparamos com as outras classes. Se olharmos a quantidade total de cortes gerados em cada exemplar por cada modelo, notamos que a diferença é mínima, mas que na maioria dos exemplares, quando usamos o modelo MTZ mais cortes são gerados. Em particular a quantidade de *implied bounds cuts* gerada quando usamos o modelo MTZ é maior do que quando os outros dois modelos são usados. Para o modelo DL, cortes do tipo *implied bound cut* são gerados para poucos exemplares. Olhando para os outros tipos de cortes percebemos que na maioria dos exemplares o número de planos de cortes é o mesmo para os três modelos.

Os exemplares dos modelos DL e SD com capacidade apertada (Tabela 20) se tornaram mais difíceis dos que os exemplares com capacidade folgada, em particular os exemplares da Classe 1 do modelo DL mais nós foram examinados até a prova de otimalidade. O número de planos de cortes gerados (ver Tabela 21) foi menor para a maioria dos exemplares dos modelos MTZ e DL. Para o modelo SD foram gerados mais cortes.

É interessante analisar o comportamento das reformulações para os seis exemplares do modelo MTZ que se tornaram mais difíceis com o modelo MTZ (a18, a20, b15, b19, c14 e c20) (ver Tabela 21). A reformulação SD se mostrou mais interessante nesses cenários. Dentre esses seis exemplares foi possível provar a otimalidade examinando menos nós para quatro exemplares (a18, b19, c14 e c18) usando o modelo SD. A reformulação DL foi melhor para o exemplar b15. Isto mostra que as reformulações são úteis para cenários em que a formulação MTZ não é eficiente.



			Número de Nós			Melhor Nó		
Ex	RL	Solução	MTZ	RDL	RSD	MTZ	RDL	RSD
a1	250.451	269.211	27	18	19	27	17	19
a2	269.054	278.729	45	30	14	40	27	8
a3	430.373	446.301	10	48	20	9	46	20
a4	391.788	421.772	12	21	38	0	0	0
a5	154.880	187.150	15	10	0	13	7	0
a6	389.497	420.443	0	0	0	0	0	0
a7	301.908	308.982	0	0	0	0	0	0
a8	381.233	385.351	3	3	3	0	0	0
a9	603.609	613.144	0	5	6	0	0	0
a10	301.224	323.464	0	0	0	0	0	0
b1	453.388	471.324	0	4	0	0	4	0
b2	277.278	287.911	45	28	8	37	23	0
b3	329.214	347.523	2	2	2	2	2	0
b4	706.143	719.612	0	0	3	0	0	3
b5	344.598	370.688	1	32	41	0	30	40
b6	389.732	408.012	32	4	30	30	0	30
b7	555.722	561.081	0	0	0	0	0	0
b8	505.677	518.546	0	0	0	0	0	0
b9	160.688	173.432	2	2	2	0	0	0
b10	162.517	189.858	25	13	16	24	13	11
c1	429.335	466.601	23	32	23	20	20	14
c2	330.025	372.326	22	21	29	0	0	26
c3	312.395	339.595	20	20	14	10	14	10
c4	667.990	694.686	0	0	7	0	0	7
c5	353.439	385.602	5	6	8	3	5	6
c6	464.074	474.926	0	19	20	0	0	16
c7	396.431	426.476	0	0	0	0	0	0
c8	137.678	178.670	21	17	9	19	16	6
c9	351.468	387.116	47	48	44	0	0	0
c10	36.444	806.414	2	8	8	0	0	0

Tabela 18: Resultados F0 -Capacidade Folgada

	Implied			Flow Cuts			Mixed			Gomory			Total		
Ex	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
a1	5	0	5	8	11	11	2	2	2	8	8	9	23	21	27
a2	10	0	7	6	6	6	2	2	2	9	9	9	27	17	24
a3	7	4	12	10	12	5	3	4	3	4	8	8	24	28	28
a4	7	0	11	9	9	12	2	1	0	5	7	7	23	17	30
a5	3	0	0	8	7	8	7	7	7	9	9	9	27	23	24
a6	2	7	4	7	7	6	8	8	7	10	8	9	27	30	26
a7	8	0	6	5	7	10	5	5	3	5	8	4	23	20	23
a8	9	2	5	4	6	9	4	4	4	7	7	8	24	19	26
a9	4	3	6	2	7	5	0	1	0	9	8	9	15	19	20
a10	2	4	5	5	5	7	1	1	1	6	6	6	14	16	19
b1	7	2	0	11	7	13	3	1	2	4	5	4	25	15	19
b2	4	2	4	9	7	8	3	3	3	8	8	8	24	20	23
b3	3	0	2	8	6	5	3	3	4	5	5	4	19	14	15
b4	2	1	4	6	5	8	8	8	7	6	7	5	22	21	24
b5	5	3	5	12	9	9	4	4	4	8	10	7	29	26	25
b6	7	2	8	19	17	10	2	1	1	8	6	7	36	26	26
b7	3	1	4	5	6	6	3	3	3	5	5	5	16	15	18
b8	2	7	16	5	5	5	5	5	5	5	4	4	17	21	30
b9	4	1	0	12	8	8	5	5	5	5	5	6	26	19	19
b10	6	3	2	8	6	10	3	4	2	8	7	7	25	20	21
c1	12	6	7	12	10	8	6	6	8	8	8	8	38	30	31
c2	7	4	9	11	11	15	5	5	7	13	13	14	36	33	45
c3	8	7	3	11	9	10	12	11	11	17	14	13	48	41	37
c4	2	0	2	10	9	9	6	6	6	11	11	11	29	26	28
c5	1	0	0	11	10	11	7	7	7	18	16	16	37	33	34
c6	6	10	18	9	10	7	7	5	5	8	8	8	30	33	38
c7	6	3	5	8	7	5	7	7	7	16	16	15	37	33	32
c8	8	4	4	13	13	14	7	7	7	12	12	10	40	36	35
c9	11	0	12	17	14	15	9	9	9	12	11	11	49	34	47
c10	6	0	15	15	15	6	10	6	3	5	8	8	36	29	32

Tabela 19: Planos de Cortes - F0 - Capacidade Folgada

			Número de Nós			Melhor Nó		
Ex	RL	Solução	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
a11	482.394	502.161	8	21	7	6	20	7
a12	496.527	504.718	0	40	11	0	40	0
a13	666.330	681.257	6	18	21	6	10	13
a14	607.964	627.866	0	71	54	0	57	37
a15	386.637	413.038	0	12	5	0	12	5
a16	643.808	672.526	8	15	10	7	9	0
a17	440.141	451.624	0	11	1	0	10	0
a18	464.185	522.725	291	271	220	252	60	10
a19	883.743	894.891	2	14	14	0	8	9
a20	507.404	538.236	11	54	33	0	46	19
b11	699.827	711.197	0	25	35	0	19	35
b12	465.844	482.790	0	8	6	0	7	5
b13	565.312	583.077	0	0	0	0	0	0
b14	953.915	964.032	3	32	18	3	32	10
b15	563.509	591.044	18	11	23	14	7	23
b16	649.937	661.317	10	51	17	8	35	7
b17	700.995	716.469	0	28	15	0	9	8
b18	697.636	709.878	4	3	0	4	2	0
b19	325.865	345.092	20	22	11	17	18	0
b20	336.318	356.713	6	20	15	6	20	15
c11	622.804	653.087	0	1	13	0	0	13
c12	522.182	540.972	0	0	0	0	0	0
c13	524.463	543.069	7	10	8	6	7	6
c14	880.609	900.699	22	21	11	20	20	9
c15	560.508	581.787	0	12	4	0	10	4
c16	691.703	698.838	2	18	16	0	15	16
c17	602.389	617.549	0	0	2	0	0	0
c18	344.324	367.176	55	109	8	55	104	7
c19	585.948	614.171	16	13	41	8	9	40
c20	204.849	227.605	0	0	0	0	0	0

Tabela 20: Resultados F0 - Capacidade Apertada

	Implied			Flow Cuts			Mixed			Gomory			Total		
Ex	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
a11	3	0	4	6	6	6	2	2	2	6	7	5	17	15	17
a12	3	2	8	10	12	7	6	5	4	3	7	6	22	26	25
a13	5	1	15	6	6	7	7	7	1	10	10	6	28	24	29
a14	4	0	11	6	8	8	2	2	1	5	6	7	17	16	27
a15	10	0	2	11	6	7	3	4	6	7	12	14	31	22	29
a16	10	0	4	11	10	12	3	8	5	7	8	8	31	26	29
a17	3	0	7	4	7	11	1	1	0	4	9	10	12	17	28
a18	24	0	12	7	9	11	10	13	9	8	9	10	49	31	42
a19	4	2	8	8	8	6	3	3	1	6	6	5	21	19	20
a20	8	3	8	9	9	11	3	5	2	6	6	6	26	23	27
b11	2	0	0	8	6	10	1	1	1	6	6	7	17	13	18
b12	2	0	5	11	7	7	4	5	4	5	8	9	22	20	25
b13	1	0	0	5	5	5	8	8	8	10	10	9	24	23	22
b14	2	0	6	5	7	6	4	6	5	6	8	3	17	21	20
b15	11	0	7	7	8	7	3	3	2	6	7	10	27	18	26
b16	4	4	7	12	14	14	3	4	0	6	7	6	25	29	27
b17	0	4	8	4	10	8	0	0	0	6	7	9	10	21	25
b18	2	4	7	5	4	5	9	5	8	8	7	7	24	20	27
b19	10	0	5	5	7	8	8	7	7	12	15	15	35	29	35
b20	2	0	2	8	8	9	1	6	4	11	13	13	22	27	28
c11	2	2	1	5	5	5	5	5	5	10	11	10	22	23	21
c12	1	6	3	6	6	6	7	5	5	12	12	11	26	29	25
c13	4	1	2	8	9	7	10	8	10	12	12	12	34	30	31
c14	13	7	4	11	11	8	8	8	3	8	8	5	40	34	20
c15	4	0	0	7	12	13	6	6	5	10	9	8	27	27	26
c16	5	4	9	7	5	3	5	6	5	3	10	9	20	25	26
c17	6	3	10	2	6	5	7	5	8	7	12	8	22	26	31
c18	14	8	9	12	16	8	6	7	10	11	8	4	43	39	31
c19	11	3	17	11	11	14	2	0	5	7	6	8	31	20	44
c20	3	7	19	6	9	12	7	6	6	9	13	10	25	35	47

Tabela 21: Planos de Cortes - F0 - Capacidade Apertada

### Reformulação F1

Os próximos resultados se referem à reformulação F1, ou seja, não estamos considerando as restrições que limitam o valor da variável  $u_{jt}$ . Testamos os modelos para as três classes de exemplos considerando as capacidades folgada (Tabelas 22 e 23) e apertada (Tabelas 24 e 25).

O que mais chama a atenção com a reformulação F1 é que os modelos apresentam comportamentos mais uniforme. Quando comparamos os resultados da Tabela 22 com os da Tabela 18, observamos que os modelos DL e SD melhoram muito com a exclusão das restrições ((3.16) - (3.17)) e ((3.70) - (3.71)) respectivamente. Para os exemplos da reformulação F1, o número de *implied bounds cuts* geradas quando usamos os modelos DL e SD aumenta e fica similar ao número de cortes gerados quando usamos o modelo MTZ. O aumento do número de corte deste tipo se nota principalmente no modelo DL.

Nota-se pela Tabela 24 que os exemplos da reformulação F1, com capacidade apertada são mais fáceis do que com a capacidade folgada (Tabela 22). Em quase 50% dos casos a solução ótima foi obtida no nó raiz. Porém, novamente o exemplo a18 chama a atenção. É um exemplo mais difícil e a reformulação DL foi a que apresentou o melhor comportamento. Para a reformulação DL foi necessário um número de nós levemente menor do que o necessário para a formulação MTZ. Observando as Tabelas 21 e 25 concluímos que com a reformulação F1 a diferença entre o total de planos de cortes gerados pelos modelos é menor do que quando usamos a reformulação F0, ou seja, a reformulação F1, favorece a geração de planos de cortes para os três modelos.

			Número de Nós			Melhor Nó		
Ex	RL	Solução	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
a1	250.451	269.211	27	18	19	27	17	19
a2	269.054	278.729	45	28	28	40	20	20
a3	430.373	446.301	10	10	10	9	9	9
a4	391.788	421.772	12	19	18	0	0	0
a5	154.880	187.150	15	16	15	13	13	13
a6	389.497	420.443	0	0	0	0	0	0
a7	301.908	308.982	0	0	0	0	0	0
a8	381.233	385.351	3	4	3	0	0	0
a9	603.609	613.144	0	0	0	0	0	0
a10	301.224	323.464	0	0	0	0	0	0
b1	453.388	471.324	0	0	0	0	0	0
b2	277.278	287.911	52	46	45	50	38	37
b3	329.214	347.523	1	1	2	0	0	2
b4	706.143	719.612	0	0	0	0	0	0
b5	344.598	370.688	1	1	1	0	0	0
b6	389.732	408.012	29	32	32	28	30	30
b7	555.722	561.081	0	0	0	0	0	0
b8	505.677	518.546	0	0	0	0	0	0
b9	160.688	173.432	2	2	2	0	0	0
b10	162.517	189.858	25	25	25	9	24	24
c1	429.335	466.601	24	23	23	20	20	20
c2	330.025	372.326	16	20	22	0	0	0
c3	312.395	339.595	28	17	20	16	9	10
c4	667.990	694.686	0	0	0	0	0	0
c5	353.439	385.602	6	6	5	4	5	3
c6	464.074	474.926	0	0	0	0	0	0
c7	396.431	426.476	0	0	0	0	0	0
c8	137.678	178.670	23	20	21	22	19	19
c9	351.468	387.116	53	47	47	0	0	0
c10	36.444	806.414	3	2	2	0	0	0

Tabela 22: Resultados - F1 - Capacidade Folgada

	Implied			Flow Cuts			Mixed			Gomory			Total		
Ex	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
a1	5	4	3	8	9	11	2	2	2	8	8	8	23	23	24
a2	10	8	3	6	6	9	2	2	2	9	9	9	27	25	23
a3	7	8	5	10	8	11	3	3	3	4	4	4	24	23	23
a4	7	13	5	9	13	15	2	2	1	5	5	6	23	33	27
a5	3	3	5	8	9	10	7	7	7	9	9	9	27	28	31
a6	2	1	4	7	8	8	8	8	7	10	8	9	27	25	28
a7	8	5	1	5	6	6	5	6	5	5	7	6	23	24	18
a8	9	5	4	4	4	7	4	4	4	7	8	7	24	21	22
a9	4	4	2	2	2	3	0	0	0	9	9	9	15	15	14
a10	2	3	4	5	5	8	1	1	1	6	6	6	14	15	19
b1	5	4	7	9	10	11	3	3	3	4	4	4	21	21	25
b2	13	12	4	8	7	9	3	3	3	8	8	8	32	30	24
b3	3	3	3	5	5	8	4	4	3	4	4	5	16	16	19
b4	2	1	2	4	4	6	8	8	8	6	6	6	20	19	22
b5	7	6	5	9	10	12	4	4	4	7	8	8	27	28	29
b6	13	11	7	17	18	19	2	2	2	9	8	8	41	39	36
b7	3	5	3	5	4	5	3	3	3	5	4	5	16	16	16
b8	0	1	2	3	3	5	5	5	5	5	5	5	13	14	17
b9	2	2	4	8	9	12	6	5	5	10	6	5	26	22	26
b10	11	9	6	6	6	8	3	3	3	9	8	8	29	26	25
c1	13	13	12	11	11	12	6	6	6	8	8	8	38	38	38
c2	11	13	7	15	11	11	8	5	5	13	13	13	47	42	36
c3	12	12	8	9	8	11	10	11	12	20	15	17	51	46	48
c4	3	3	2	9	9	10	6	6	6	11	11	11	29	29	29
c5	7	8	1	10	10	11	7	7	7	18	16	18	42	41	37
c6	6	6	6	6	6	9	7	7	7	8	7	8	27	26	30
c7	2	2	6	6	8	8	6	7	7	14	16	16	28	33	37
c8	11	10	8	13	15	13	7	7	7	12	13	12	43	45	40
c9	12	16	11	14	14	17	11	9	9	10	12	12	47	51	49
c10	9	9	6	13	14	15	10	10	10	5	5	5	37	38	36

Tabela 23: Planos de Cortes - F1 - Capacidade Folgada

			Número de Nós			Melhor Nó		
Ex	RL	Solução	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
a11	482.394	502.161	8	7	7	6	5	5
a12	496.527	504.718	0	0	0	0	0	0
a13	666.330	681.257	6	6	8	6	6	8
a14	607.964	627.866	0	0	0	0	0	0
a15	386.637	413.038	0	0	0	0	0	0
a16	643.808	672.526	8	0	15	7	0	14
a17	440.141	451.624	0	0	0	0	0	0
a18	464.185	522.725	291	289	493	252	146	408
a19	883.743	894.891	2	2	2	0	0	0
a20	507.404	538.236	11	11	6	0	0	0
b11	699.827	711.197	0	0	0	0	0	0
b12	465.844	482.790	0	0	0	0	0	0
b13	565.312	583.077	0	0	0	0	0	0
b14	953.915	964.032	3	3	3	3	3	3
b15	563.509	591.044	18	17	19	14	15	15
b16	649.937	661.317	10	10	10	8	8	8
b17	700.995	716.469	0	0	0	0	0	0
b18	697.636	709.878	4	4	4	4	4	4
b19	325.865	345.092	20	25	25	17	7	7
b20	336.318	356.713	6	6	6	6	6	6
c11	622.804	653.087	0	0	0	0	0	0
c12	522.182	540.972	0	0	0	0	0	0
c13	524.463	543.069	7	7	7	6	6	6
c14	880.609	900.699	22	22	22	20	20	20
c15	560.508	581.787	0	0	0	0	0	0
c16	691.703	698.838	2	2	2	0	0	0
c17	602.389	617.549	0	0	0	0	0	0
c18	344.324	367.176	55	28	35	55	20	29
c19	585.948	614.171	16	15	15	8	7	7
c20	204.849	227.605	0	0	0	0	0	0

Tabela 24: Resultados F1 - Capacidade Apertada



	Implied			Flow Cuts			Mixed			Gomory			Total		
Ex	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
a11	3	5	3	6	6	7	2	2	2	6	6	6	17	19	18
a12	3	3	5	10	10	15	6	6	6	3	3	3	22	22	29
a13	5	5	5	6	6	8	7	7	7	10	10	10	28	28	30
a14	4	3	1	6	5	8	2	5	4	5	5	4	17	18	17
a15	10	2	3	11	6	8	3	6	6	7	12	13	31	26	30
a16	10	4	4	11	11	12	3	7	7	7	7	9	31	29	32
a17	3	1	2	4	5	8	1	1	1	4	5	5	12	12	16
a18	24	21	12	7	7	10	10	14	10	8	11	9	49	53	41
a19	4	4	6	8	8	9	3	3	3	6	6	6	21	21	24
a20	8	8	7	9	10	9	3	3	3	6	6	6	26	27	25
b11	2	2	4	8	9	12	1	1	1	6	7	6	17	19	23
b12	2	5	3	11	11	12	4	4	4	5	6	5	22	26	24
b13	1	1	2	5	5	8	8	8	8	10	9	10	24	23	28
b14	2	2	3	5	5	5	4	4	4	6	7	6	17	18	18
b15	11	9	3	7	8	8	3	4	3	6	6	6	27	27	20
b16	4	4	5	12	12	12	3	3	3	6	6	6	25	25	26
b17	0	0	2	4	4	6	0	0	0	6	6	6	10	10	14
b18	2	2	2	5	5	8	9	9	9	8	8	8	24	24	27
b19	10	8	3	5	8	7	8	7	7	12	15	15	35	38	32
b20	2	5	2	8	8	10	1	1	1	11	12	12	22	26	25
c11	2	0	3	5	3	7	5	4	4	10	7	9	22	14	23
c12	1	1	1	6	6	7	7	5	5	12	12	12	26	24	25
c13	4	4	3	8	9	10	10	10	10	12	12	12	34	35	35
c14	13	13	10	11	11	11	8	8	8	8	8	8	40	40	37
c15	4	5	5	7	7	9	6	7	7	10	11	11	27	30	32
c16	5	5	7	7	7	9	5	5	5	3	3	3	20	20	24
c17	6	6	9	2	3	4	7	7	7	7	7	7	22	23	27
c18	14	5	10	12	14	13	6	5	4	11	9	10	43	33	37
c19	11	13	7	11	11	13	2	2	2	7	7	7	31	33	29
c20	3	3	6	6	7	8	7	7	7	9	9	9	25	26	30

Tabela 25: Planos de Cortes F1 - Capacidade Apertada

A Tabela 26 resume em quais situações os modelos DL e SD se destacam. Como os modelos apresentam a mesma relaxação linear e a mesma solução, usamos como critério de escolha de melhor modelo aquele que apresenta o menor número de nós analisados. No caso de empate, olhamos para o nó em que a solução ótima foi obtida e foi considerado o melhor aquele que obtém a solução primeiro. Se o empate persiste analisamos o número de planos de cortes gerados pelo *solver*, e quanto menor o número, melhor o modelo. Caso

os modelos apresentem as mesmas características em todos os três critérios, consideramos o empate. Concluímos que com a reformulação F1 os modelos DL e SD se destacam mais do que com a reformulação F0.

	F0						F1					
	Folgada			Apertada			Folgada			Apertada		
	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
Classe 1	4	3	3	8	0	2	3	3	4	1	3	2
Classe 2	2	6	2	6	1	3	4	3	3	6	1	0
Classe 3	3	2	5	6	1	3	2	4	4	4	3	2

Tabela 26: MTZ  $\times$  DL  $\times$  SD

Com a intenção de verificar se as restrições de eliminação de subrotas, DL e SD, podem ser usadas não apenas como reformulação, mas sim como um reforço para o modelo MTZ, testamos um terceiro tipo de reformulação, que denominamos de F2. Na reformulação F2, temos três modelos, um com as restrições MTZ + DL, outro com as restrições MTZ + SD e um terceiro com as restrições MTZ + DL + SD. Os resultados para essas formulações mostraram que, quando usamos as restrições mais fortes de eliminação de subrotas como reforço, os modelos tem praticamente o mesmo comportamento que a F0 ou a F1. Por exemplo, no exemplar em que o modelo DL era o melhor (por exemplo c3, na F1), na reformulação F2, o modelo que se destaca para esse é exemplar o modelo MTZ + DL. Diante dessa constatação usamos apenas as reformulações F0 e F1 nos testes descritos da Seção 4.3.

### 4.3 Resultados com Exemplos baseados em Dados Reais

Para os testes baseado em dados reais utilizamos as duas reformulações, F0 e F1. Para cada exemplar consideramos um tempo limite de 3 horas (10800 segundos). A Tabela 27 apresenta o valor da relaxação linear (RL), o valor da melhor solução encontrada no tempo fixado (Melhor Solução) e o GAP, informado pelo *solver*.

		Melhor Solução			GAP (%)		
Ex	RL	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
S1	1792,5	55.695	6.926.200	6.926.200	31,13	99,40	99,40
S2	2114,4	62.404	6.926.200	6.926.200	31,23	99,41	99,43
S3	4228,9	70.472	6.927.992	6.926.200	32,97	99,26	99,35
S4	2114,4	24.148	6.926.200	6.926.200	27,77	99,73	99,73
S5	4228,9	29.148	6.927.992	6.927.992	22,47	99,66	99,66
S6	1209,1	57.212	8.940.700	8.940.700	14,01	99,41	99,49
S7	1255,8	68.768	8.940.700	8.940.700	27,54	99,42	99,40
S8	2418,1	66.593	8.941.854	8.941.854	17,47	99,34	99,35
S9	2511,7	32.637	8.941.854	8.941.854	18,05	99,69	99,70
S10	1255,8	26.417	8.940.700	8.940.700	16,80	99,75	99,74

Tabela 27: RL, Melhor Solução Encontrada e GAP - F0

Quando usamos a reformulação F0 o modelo MTZ é melhor que os modelos DL e SD. O GAP para os exemplos dos modelos MTZ está em torno de 25% enquanto que para os exemplos dos modelos propostos o GAP é em torno de 99%.

A Tabela 28 mostra o número de nós analisados para cada exemplo. Podemos notar, que para os exemplos do modelo MTZ são analisados muito mais nós do que para os exemplos dos modelos propostos. Para os modelos DL e SD a melhor solução foi encontrada no nó raiz para todos os exemplos.

Número de Nós			
Ex	MTZ	DL	SD
S1	2.272.701	2.133.114	882.842
S2	2.430.053	1.763.801	758.001
S3	2.671.452	1.913.801	774.801
S4	2.959.653	1.853.875	756.800
S5	2.980.671	2.318.401	866.001
S6	2.039.220	1.709.701	758.701
S7	2.648.122	1.498.978	742.901
S8	2.736.483	2.024.401	794.701
S9	2.977.021	2.505.701	962.701
S10	2.563.825	1.557.301	794.901

Tabela 28: Número de Nós - F0

A Tabela 29 apresenta o número de planos de cortes gerados para cada modelo. Notemos que agora são gerados mais tipos de cortes do que para os exemplos aleatórios. Para os exemplos do modelo MTZ foram gerados um número muito maior de planos de cortes. O tipo de corte que mais se destaca no modelo MTZ é *implied bounds* que é gerado duas vezes mais no modelo MTZ do que nos modelos DL e SD. Este fato contribui fortemente para que a solução obtida com o modelo MTZ forneça GAP melhores que os obtidos com os modelos DL e SD. É interessante observar que quando usamos os modelos DL e SD nenhum corte do tipo clique é gerado, enquanto que para a média de cortes do tipo cliques para o modelo MTZ é 2,7. Outro tipo de corte que tem muito mais destaque para o modelo MTZ é o corte tipo *Mixed* que é gerado em média seis vezes mais do que com os modelos DL e SD. Como já tinha acontecido nos exemplos aleatórios, na reformulação F0, o modelo MTZ é melhor que os modelos DL e SD.

Ex	Cliques			Cover			Implied			Flow Cuts			Mixed			Flow Path			Gomory			Total		
	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
S1	4	0	0	49	48	33	497	240	237	359	391	385	264	52	50	46	46	50	68	70	59	1287	847	814
S2	1	0	0	108	58	22	531	253	210	395	382	360	374	53	38	44	36	46	65	68	64	1518	850	740
S3	2	0	0	90	48	21	531	243	184	365	363	374	316	49	40	45	42	43	58	72	59	1407	817	721
S4	3	0	0	58	62	18	526	240	241	317	351	374	248	51	44	42	49	41	61	59	58	1255	812	776
S5	4	0	0	74	38	31	462	242	214	311	329	345	393	46	43	46	36	37	56	66	58	1346	757	728
S6	2	0	0	54	47	46	500	173	166	402	413	438	222	39	38	80	78	84	73	75	58	1333	825	830
S7	2	0	0	78	19	13	472	208	221	378	386	413	340	42	35	79	68	68	74	58	74	1423	781	824
S8	3	0	0	77	82	22	471	188	159	391	359	434	295	31	26	71	60	73	76	63	71	1384	783	785
S9	3	0	0	68	86	18	512	177	166	358	318	318	319	39	26	77	58	52	86	91	70	1423	769	650
S10	3	0	0	45	54	30	492	218	204	362	384	395	274	44	30	61	62	62	81	78	72	1318	840	793
Média	2,7	0	0	70,1	54,2	25,4	499,4	218,2	200,2	363,8	367,6	383,6	304,5	44,6	37	59,1	53,5	55,6	69,8	70	64,3	1369,4	808,1	766,1
DP	0,9	-	-	18,6	18,7	9,2	24,2	28,5	28,4	29,0	27,8	36,1	51,9	6,7	7,5	15,4	13,3	14,7	9,4	9,3	6,4	73,4	31,9	53,4

Tabela 29: Planos de Cortes - F0

Nas Tabelas 30, 31 e 32 apresentamos os resultados para a reformulação F1. Claramente, observamos na Tabela 30, o quão boa a reformulação F1 é em comparação com a F0. O GAP para os exemplos dos modelos DL e SD que estavam em torno de 99% caem para uma média de 25%. Observamos na tabela 31, que com a reformulação F1, o número de nós analisados continua menor para os modelos DL e SD, e o nó em que a melhor solução é obtida para os exemplos desses modelos é em geral menor. Podemos observar na Tabela 32, que os cortes do tipo *implied bounds* aparecem em maior número para o modelo DL. Outro tipo de corte que aumenta com a reformulação F1 é o tipo *Cover*, para os exemplos do modelo DL, são gerados 219 cortes em média. Na reformulação F0 foram gerados em média 54,2 (ver Tabela 29).

		Melhor Solução			GAP (%)		
Ex	RL	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
S1	1.793	55.695	54.984	57.377	31,13	27,12	30,83
S2	2.114	62.404	60.236	66.970	31,23	35,09	44,76
S3	4.229	70.472	76.522	67.745	32,97	36,87	27,70
S4	2.114	24.148	23.923	24.196	27,77	25,16	29,21
S5	4.229	29.148	28.977	28.857	22,47	19,82	22,51
S6	1.209	57.212	57.212	58.208	14,01	21,67	23,76
S7	1.256	68.768	67.422	73.344	27,54	23,85	29,64
S8	2.418	66.593	64.302	64.302	17,47	15,36	9,59
S9	2.512	32.637	32.537	33.385	18,05	17,62	24,40
S10	1.256	26.417	27.231	27.117	16,80	18,96	19,53

Tabela 30: RL, Melhor Solução Encontrada e GAP - F1

Ex	Número de Nós			Melhor Nó		
	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
S1	2.572.701	1.992.479	969.974	2.546.300	1.897.500	376.000
S2	2.430.053	1.925.901	1.234.657	2.237.900	1.880.000	1.134.700
S3	2.671.452	2.611.559	1.030.358	2.467.200	1.632.000	330.000
S4	2.959.653	2.032.036	1.003.797	2.869.200	1.979.200	932.700
S5	2.980.671	2.552.008	1.066.604	2.755.700	2.449.600	315.000
S6	2.039.220	1.688.801	1.186.781	681.000	1.450.000	966.000
S7	2.648.122	2.252.726	1.073.145	2.533.400	2.094.500	975.000
S8	2.736.483	2.180.101	398.000	2.508.200	2.168.700	723.701
S9	2.977.021	2.288.662	1.176.938	2.743.700	2.211.300	1.066.200
S10	2.563.825	1.950.434	1.082.842	2.364.000	1.799.100	1.053.500

Tabela 31: Número de Nós analisados e Nó da melhor solução - F1

Ex	Clique			Cover			Implied			Flow Cuts			Mixed			Flow Path			Gomory			Total		
	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD	MTZ	DL	SD
S1	4	0	0	49	174	125	497	1372	325	359	370	343	264	55	43	46	53	49	68	66	69	1287	2090	954
S2	1	0	0	108	193	113	531	1313	302	395	381	349	374	61	44	44	43	47	65	65	57	1518	2056	912
S3	2	0	0	90	323	81	531	1185	312	365	354	338	316	51	57	45	45	42	58	61	70	1407	2019	900
S4	3	0	0	58	250	73	526	1268	314	317	333	306	248	55	45	42	39	36	61	67	52	1255	2012	826
S5	4	0	0	74	297	95	462	1237	277	311	303	311	393	45	38	46	41	38	56	67	60	1346	1990	819
S6	2	0	0	54	132	73	500	1513	308	402	400	427	222	46	31	80	66	75	73	75	62	1333	2232	976
S7	2	0	0	78	194	79	472	1459	291	378	396	387	340	44	44	79	62	73	74	75	78	1423	2230	952
S8	3	0	0	77	217	106	471	1442	301	391	391	370	295	34	37	71	68	72	76	62	68	1384	2214	954
S9	3	0	0	68	226	102	512	1364	299	358	330	322	319	39	32	77	67	55	86	89	73	1423	2115	883
S10	3	0	0	45	184	60	492	1392	311	362	369	358	274	32	27	61	55	62	81	76	75	1318	2108	893
Média	2,7	-	-	70,1	219	90,7	499,4	1.354	304	363,8	362,7	351,1	304,5	46,2	39,8	59,1	53,9	54,9	69,8	70,3	66,4	1.369	2.106	906
DP	0,9	-	-	18,5	54,8	19,6	24,2	98,6	12,6	29	30,5	34,9	51,8	8,9	8,2	15,3	10,8	14	9,4	8	7,9	73,3	86,9	51,3

Tabela 32: Planos de Cortes - F1



A Tabela 33 apresenta um resumo dos melhores resultados para os exemplos baseados em dados reais usando os mesmos critérios da Seção 4.2 (Tabela 26). Observamos que com a reformulação F1 os modelos DL e SD apresentam boas soluções. Uma possível explicação para a diferença entre as formulações F0 e F1 é que as restrições que limitam a variável  $u_{jt}$  limitam o escopo para a geração dos cortes tipo *implied bounds*.

	F0	F1
MTZ	10	3
DL	0	5
SD	0	2

Tabela 33: Melhores Resultados

## Capítulo 5

### Considerações Finais

Neste trabalho propomos reformulações para um modelo integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção aplicado ao setor de bebidas proposto na literatura. As reformulações são obtidas a partir de inequações válidas fortes para o problema do caixeiro viajante assimétrico propostas na literatura.

Foram realizados testes computacionais com exemplares gerados com dados aleatórios e com exemplares da literatura. Nos exemplares aleatórios tivemos bons resultados, e podemos afirmar que as reformulações do tipo F1 produziram melhores resultados que as reformulações do tipo F0. Observamos que quanto tratamos das reformulações F0 o número de planos de cortes gerados para os modelos reformulados é menor que os cortes gerados para o modelo original. Entretanto, quando as reformulações F1 são usadas, o número de planos de cortes gerados para os exemplares dos modelos reformulados aumenta significativamente, melhorando os resultados obtidos. Nos testes com os exemplares da literatura a relação entre as reformulações F0 e F1 se manteve. Para os exemplares das reformulações F0 os GAP dos melhores resultados obtidos estão em torno de 99%, enquanto que para as reformulações F1 o GAP cai para 25% em média. Em relação ao modelo original, as reformulações propostas juntas foram melhores para sete dos dez exemplares testados.

Durante a realização desse trabalho podemos notar o efeito dos cortes tipo *implied bounds*. Percebemos que quando utilizamos as reformulações F0 poucos cortes desse tipo foram gerados. Este número aumentou para as reformulações F1. Analisar o efeito das reformulações propostas sobre o tipo e o número de planos gerados no algoritmo *Branch and Cut* é um tema importante para pesquisas futuras.

Outro tema interessante a ser explorado em pesquisa futura é o estudo de modelos

---

alternativos para o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento explorando diversas estratégias para modelar as decisões associadas ao sequenciamento. O desenvolvimento e implementação de métodos de solução específicos pode resultar em um desempenho computacional melhor em termos de tempo de resolução e/ou qualidade de solução comparativamente a outros modelos existentes na literatura.

## *Referências Bibliográficas*

- [1] ALDOWAISAN, J.N.D.; ALLAHVERDI, T.; GUPTA, A. A review of scheduling research involving setup considerations. *OMEGA - The International Journal of Management Science*. v.27, p. 219-239, 1999.
- [2] ALMADA-LOBO, B.; KLABJAN, D.; OLIVEIRA, J.F. CARRAVILLA, M.A. Single machine multiproduct capacitated lot sizing with sequence-dependent setups. *International Journal of Production Research*. v.45, n.20, p.4873-4894, 2007.
- [3] ALMADA-LOBO, B.; OLIVEIRA, J.F.; CARRAVILLA, M.A. A note on "the capacitated lotsizing and scheduling problem with sequence-dependent setup costs and setup times". *Computers & Operations Research*. v.35, p. 1374-1376, 2008.
- [4] ALMADA-LOBO, B.; OLIVEIRA, J.F.; CARRAVILLA, M.A. Production planning and scheduling in the glass container industry: A VNS approach. *International Journal Production Economics*. v.114, p.363-375, 2008.
- [5] ALMEDER, C.; ALMADA-LOBO, B. *Synchronization of scarce resources for a parallel machine lotsizing problem*. Relatório Técnico. 2009.
- [6] ARAUJO, S. A.; ARENALES, M.N. Problema de Dimensionamento de Lotes Mono-estágio com Restrição de Capacidade. Modelagem, Método de Resolução e Resultados Computacionais, *Pesquisa Operacional*. v. 20, n. 2, p. 287 - 306, dezembro, 2000.
- [7] ARAUJO, S. A.; ARENALES, M.N.; CLARK, A.R. Dimensionamento de lotes e programação do forno numa fundição de pequeno porte. *Gestão & Produção*. vol. 11, 2, p. 165-176, 2004.
- [8] ARAUJO, S.A.; ARENALES, M.N.; CLARK, A.R. Joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing with sequence-dependent setups. *Journal of Heuristics - Springer*. v.13, p.337-358, 2007.
- [9] ARAUJO, S.A.; ARENALES, M.N.; CLARK, A.R. Lot sizing and furnace scheduling in small foundries. *Computers & Operations Research*. v.35, p.916-932, 2008.
- [10] ARENALES, M.N.; ARMENTANO, V.A.; MORABITO, R.; YANASSE, H.H. *Pesquisa Operacional*, 1.ed. Rio de Janeiro: Campus/Elsevier. v.1, p.523, 2007.
- [11] BAGCHI, T. P.; GUPTA, J.N.D.; SRISKANDARAJAH, C. A review of TSP based approaches for flowshop scheduling. *European Journal of Operational Research*. v. 169, p. 816-854, 2006.
- [12] BALAS, E. Projection and Lifting in Combinatorial Optimization. In: *Junger, M., Naddef, D. eds. Computational Combinatorial Optimization, LNCS 2241, Springer, Berlin* p. 26-56, 2001.

- [13] BILLINGTON, P. J.; BLACKBURN, J. D.; MAES, J.; MILLEN, R. A.; VAN WASSENHOVE, L. Multi-Item Lotsizing in Capacitated Multi-stage Serial Systems. *IIE Transactions*, v. 26, n. 2, p. 12-18, 1994.
- [14] BITRAN G.R. e YANASSE H.H. Computational Complexity of the Lot Size Problem. *Management Science*. v.28, n.10, 1174-1186, 1982.
- [15] BRAHIMI, N.; DAUZEREPERES, S.; NAJID, N.M.; NORDLI, A. Single item lot sizing problems, *European Journal of Operational Research*. v.168, p.1-16, 2006.
- [16] CARRETERO, M. M.; RANGEL, S. Formulações Fortes para o Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento da Produção, *In: 42º SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2010, Bento Gonçalves - RS. Anais, 2010.
- [17] CLARK, A. R. Hybrid heuristics for planning lot setups and sizes. *Computers & Industrial Engineering*. v.45, p.545-562, 2003.
- [18] CLARK, A.R. A local search approach to lot sequencing and sizing. *Proceedings of the Third International Workshop of the IFIP WG 5.7 special interest group on "advanced techniques in production planning & control"*. Florença, Itália, Fevereiro, 2000.
- [19] CUNHA, A. S.; CARVALHO, C. R. V.; HENRIQUE, R. S. Um modelo com variáveis indexadas no tempo para a integração do dimensionamento de lotes e sequenciamento em uma máquina com tempos de preparação. *In: XLI SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2010, Bento Gonçalves - RS. Anais, 2010.
- [20] DEFALQUE, C. M.; FERREIRA, D.; RANGEL, S. Estratégia para Incorporação das decisões de sequenciamento em um problema integrado de produção de bebidas, *a ser publicado nos Anais do CNMAC 2010*.
- [21] DESROCHERS, M.; LAPORTE, G. Improvements and extensions to the Miller - Tucker - Zemlin subtour elimination constraints. *Operations Research*. v.10, p.27-36, 1991.
- [22] DREXL A.; HAASE K. Proportional Lotsizing and Scheduling. *International Journal of Production Economics*. v.40, p.73-87, 1995.
- [23] DREXL, A.; KIMMS, A. Lot sizing and scheduling - Survey and extensions. *European Journal of Operational Research*. v.99, p. 221-235, 1997.
- [24] FERREIRA, D. *Abordagens para o Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes da Produção de Bebidas*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Engenharia de Produção, Dezembro, 2006.
- [25] FERREIRA, D. *Um Modelo de Dimensionamento de Lotes Aplicado à Indústria de Bebidas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada, IBILCE , UNESP, Campus de S.J. do Rio Preto, v.111 , 2002.
- [26] FERREIRA, D.; MORABITO, R.;RANGEL, S. Um modelo de otimização inteira mista e heurísticas relax and fix para a programação da produção de fábricas de refrigerantes de pequeno porte. *Produção*. v.18, n.1, p.76-88, 2008.

- [27] FERREIRA, D., MORABITO, R. e RANGEL, S. Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. *European Journal of Operational Research*. v.196, n.2, p.697-706, 2009.
- [28] FERREIRA, D., MORABITO, R. e RANGEL, S. Relax and fix heuristics to solve one-stage one-machine lot-scheduling models for small-scale soft drink plants. *Computers and Operations Research*. v. 37, n.4, p. 684-691, 2010.
- [29] FERREIRA, D.; CLARK, A.R.; ALMADA-LOBO, B.; MORABITO, R. Uma reformulação monoestágio de um modelo de programação da produção de bebidas dois estágios com sincronia. In: *XLI SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2009, Porto Seguro. Anais, 2009.
- [30] FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Relax and fix heuristics to solve one-stage one-machine lot scheduling models for small scale soft drink plants. *Computers and Operations Research*, v.37, n.4, p. 684-691, 2010.
- [31] FLEISCHMANN, B.; MEYER H. The General Lotsizing and Scheduling Problem. *OR Spektrum*. v.19, p.11-21, 1997.
- [32] FLEISCHMANN B. The Discrete Lot-sizing and Scheduling Problem. *European Journal of Operational Research*. v.44, p.337-348, 1990.
- [33] FLEISCHMANN, B. The discrete lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent set-up costs. *European Journal of Operational Research*. v. 75, n. 2, p. 395-404, 1994.
- [34] FLORIAN, M.; LENSTRA, J.K.; RINNOOY KAN, A.H.G. Deterministic production planning and complexity. *Management Science*. v.26, p.669-679, 1980.
- [35] GUPTA, D.; MAGNUSSON, T. The capacitated lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup costs and setup times. *Computers and Operations Research*. v.32, p.727-747, 2005.
- [36] HAASE, K.; KIMMS, A. Lot Sizing and Scheduling With Sequence-dependente Setup Costs and Times and Efficient Rescheduling Opportunities. *International Journal Production Economics*. v.66, p.159-169, 2000.
- [37] KARIMI, B.; FATEMI GHOMI, S.M.T.; WILSON, J.T. The capacitated lot sizing problem:a review of models and algorithms. *Omega International Journal of Management Science*. v.31, p.365-378, 2003.
- [38] KAWAMURA, M. S.; RONCONI, D. P. Aplicação da Heurística Relax and Fix no problema de dimensionamento de lotes de produção em máquinas distintas em paralelo. In: *XLI SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2010, Bento Gonçalves - RS. Anais, 2010.
- [39] KIMMS, A. A genetic algorithm for multi-level, multi-machine lot sizing and scheduling. *Computers & Operations Research*. v. 26, p. 829-848, 1999.
- [40] KUIK, R.; SALOMON, M.; WASSENHOVE, L. Batching Decisions: Structure and Models. *European Journal of Operational Research*. v.75, p.234-263, 1994.

- [41] LAPORTE, G. The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research*. v. 59, p. 231-247, 1992.
- [42] LAWLER, E.L.; LENSTRA, J.K.; KINNOOY KAN A.K.G.; SHMOYS, D.B. *The Traveling Salesman Problem*, John Wiley e Sons Ltd, 1986.
- [43] LUCHE, J. R.; MORABITO, R. Otimização na programação da produção de grãos eletrofundidos: Um estudo de caso. *Gestão & Produção*. v. 12, n. 1, p.135-149, 2005.
- [44] MAES, J., MCCLAIN, J. O., VAN WASSENHOVE, L. N. Multilevel Capacitated Lotsizing Complexity and LP Based Heuristic. *European Journal of Operational Research*. v. 53, p. 131-148, 1991.
- [45] MEYR H. Simultaneous Lotsizing and Scheduling by Combining Local Search with Dual Reoptimization. *European Journal of Operational Research*. v. 120, p. 311-326, 2000.
- [46] MEYR H. Simultaneous lotsizing and scheduling on parallel production line. *European Journal of Operational Research*. v.39, p.277-292, 2002.
- [47] NEMHAUSER, G. L.; WOLSEY, L. A. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience Publication, 1988.
- [48] PINEDO, M. *Scheduling - Theory, Algorithms and Systems*. Prentice Hall, 1995.
- [49] POCHET, Y.; WOLSEY, L.A. *Production planning by mixed integer programming*. New York: Springer Verlag, 2006. (Series in Operations Research and Financial Engineering).
- [50] RANGEL, S.; FERREIRA, D. Um Modelo de Dimensionamento de Lotes Aplicado à Indústria de Bebidas. *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada*, 2003.
- [51] RANGEL, S. *Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira - Notas em Matemática Aplicada*: 18, São Carlos, SP : SBMAC; São Paulo: Plêiade, 2005, p. 82.
- [52] SALOMON, M.; KROON, L.G.; KUIK, R.; WASSENHOVE, L.N.V. Some extensions of the discrete lotsizing and scheduling problem. *Management Science*. v. 37, n. 7, p. 801-812, 1991.
- [53] SALOMON, M.; SALOMON, M.M.; WASSENHOVE, L.N.V.; DUMAS, Y.; DAUZÈRE-PÉRÈS, S. Solving the discrete lotsizing and scheduling problem with sequence dependent setup costs and setup times using the traveling salesman problem with time windows. *European Journal of Operational Research*. v. 100; p. 494-513, 1997.
- [54] SHERALI, D. H.; DRISCOLL, P. J. On Tightening the Relaxations of Miller-Tucker-Zemlin Formulations for Asymmetric Traveling Salesman Problem. *Operations Research*. v.50, p.656-669, 2002.
- [55] SHERALI, D. H.; ADAMS, W. P.; DRISCOLL, P. J. Exploiting special structures in constructing a hierarchy of relaxations for 0-1 mixed integer problems. *Operations Research*. v. 46, n.3, 1998.

- [56] STAGGEMEIER, A. T.; CLARK, A.R. A survey of lot-sizing and scheduling models. *In: XXXIII SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2001, Campos do Jordão. Anais, 2001.
- [57] TOLEDO, C. F. M.; FRANÇA, P. M.; MORABITO, R.; KIMMS, A. Um Modelo de Otimização para o Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Programação da Produção em Fábrica de Refrigerantes. *Pesquisa Operacional*. v.27, p.155-186, 2007.
- [58] TOLEDO, C.F.M.; FILHO, J.E.F.J; SIMEONE, F.; ROSA, G.P. Meta-heurísticas aplicadas ao problema geral de dimensionamento de lotes e programação da produção. *In: XLI SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2009, Porto Seguro. Anais, 2009.
- [59] TOLEDO, C.F.M.; OLIVEIRA, L.; OLIVEIRA, R.R.R.; FERREIRA, D. Algoritmo genético e programação matemática na resolução de um modelo matemático para um problema de programação da produção de bebidas. *In: XLI SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2009, Porto Seguro. Anais, 2009
- [60] TOLEDO, C.F.M; FRANÇA, P.M.; MORABITO, R.; KIMMS, A. Multi-population genetic algorithm to solve synchronized and integrated two-level lot sizing and scheduling problem. *International Journal of Production Research*. v. 47, n.11, p. 3097-3119, 2009.
- [61] TOSO, E.A.V. ; MORABITO, R. Otimização do dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção: Estudo de caso numa fábrica de rações. *Gestão & Produção*. v.12, n.2, 203-217,2005.
- [62] TOSO, E.A.V.; MORABITO, R.; CLARK, A. Combinação de abordagens GLSP e ATSP para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes da produção de suplementos para nutrição animal. *Pesquisa Operacional*. v.28, n.3, p.423-450, 2008.
- [63] TOSO, E.A.V. *Dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção na indústria de suplementos para nutrição animal*. Tese de doutorado. Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Engenharia de Produção, 2008.
- [64] TOSO, E.A.V.; MORABITO, R.; CLARK, A.R. Lotsizing and sequencing optimisation at an animal-feed plant. *Computer & Industrial Engineering*. v.57, p. 813-821, 2009.
- [65] TRIGEIRO, W.W.; THOMAS, L.J.; MCCLAIN, J.O. Capacitated Lotsizing with setup times. *Management Science*. v. 35, n. 3, 1989.
- [66] WOLSEY, L.A. *Integer Programming*. John Wiley & Sons, 1998.



## *Anexo A*

### *O Problema do Caixeiro Viajante*

O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) é um problema clássico em otimização combinatória e tem despertado grande interesse por parte dos pesquisadores da área. Isso se deve ao fato de ser um problema simples de descrever, mas difícil de resolver, além de possuir inúmeras aplicações práticas. O PCV pertence à classe de problemas NP-difíceis, ou seja, o tempo gasto para resolvê-lo pode ser exponencial em relação a quantidade de cidades. As aplicações mais comuns do ATSP estão associadas a problemas de roteamento. No entanto outros problemas podem ser interpretados como ATSP, entre eles o sequenciamento de tarefas. Algumas revisões sobre modelos e métodos para o ATSP podem ser encontrados em Lawler *et al.* (1985), Desrochers e Laporte (1991), Sherali e Driscoll (2002).

#### **A.1 Definição**

A um caixeiro viajante é informado um conjunto de cidades e um custo  $c_{ij}$  associado a cada par de cidades  $i$  e  $j$  deste conjunto, representando a distância de ir da cidade  $i$  à cidade  $j$ . O caixeiro deve partir de uma cidade inicial, passar por todas as demais uma única vez e retornar à cidade inicial. O problema consiste em determinar como fazer esta trajetória pelo menor custo total possível.

Formalmente, o PCV pode ser definido através da Teoria de Grafos. Dado  $G = (V, A)$  um grafo onde  $V$  é um conjunto de  $n$  vértices e  $A$  é o conjunto de  $m$  arcos ou arestas que conectam cada par de cidades  $i, j \in V$ . A cada aresta está associado um custo  $c_{ij}$ . O PCV consiste em encontrar o circuito de menor custo, passando por cada vértice uma única vez. No caso simétrico,  $c_{ij} = c_{ji}$  para todo cidade  $i, j \in V$ , e o caso assimétrico possui pelo menos um caso em que  $c_{ij} \neq c_{ji}$ .

## A.2 Formulação Matemática

Para formular matematicamente o problema consideramos conhecidos o número de cidades a serem visitadas,  $n$ , e o custo de se viajar da cidade  $i$  para a cidade  $j$ ,  $c_{ij}$ . Definimos a variável binária  $x_{ij}$ , como  $x_{ij} = 1$  se o caixeiro viaja da cidade  $i$  para a cidade  $j$  e  $x_{ij} = 0$  caso contrário.

Desejamos minimizar o custo total da viagem, portanto a função objetivo será dada por:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (\text{A.1})$$

Para garantir que cada cidade seja visitada apenas uma vez temos as seguintes restrições:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.3})$$

O problema de programação inteira (A.1)-(A.3), junto com a restrição de integralidade  $x_{ij} = 1$  ou  $0$ , é conhecido como Problema da Designação que pode ser resolvido pelo Método Húngaro. Infelizmente as restrições (A.2) e (A.3) não eliminam a possibilidade de sub rotas. A Figura 13, ilustra uma solução da formulação (A.1)-(A.3), considerando  $n = 6$ . A solução associada é  $x_{12} = x_{23} = x_{31} = 1 = x_{45} = x_{56} = x_{64}$  e  $x_{ij} = 0$  para as demais variáveis.

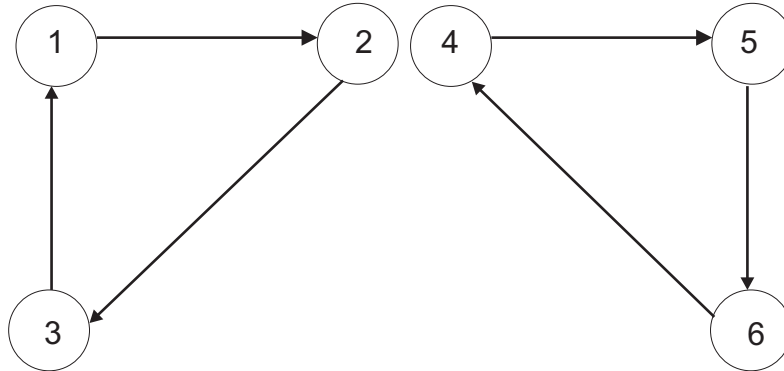


Figura 13: Subrotas

Uma subrota  $Q$  é caracterizada pela propriedade de que não há aresta  $(i, j)$  que

conecta qualquer nó  $i \in Q$  com qualquer nó  $j$  do complementar  $\bar{Q} = V - Q$ , onde  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Nós devemos eliminar a possibilidade de sub rotas adicionado restrições, conhecidas como restrições para eliminação de subrotas. Existem na literatura diversas propostas alternativas para formular esta classe de inequações. Descrevemos a seguir algumas delas.

### A.2.1 Eliminação de Subrotas - Formulação DFJ

Para eliminar uma subrota associada a um subconjunto  $Q \subset V$ , deve haver pelo menos uma aresta  $(i, j)$  na rota tal que  $x_{ij} = 1$ , onde  $i \in Q$  e  $j \in \bar{Q}$ . Na Figura 13, por exemplo, esta regra é violada. A subrota associada a uma subconjunto  $Q$  é eliminada incluindo no modelo (A.1) - (A.3) a restrição (A.4):

$$\sum_{i \in Q} \sum_{j \in \bar{Q}} x_{ij} \geq 1, \quad \forall Q \subset V. \quad (\text{A.4})$$

O Problema do Caixeiro Viajante pode então ser formulado como (PCVA - DFJ):

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (\text{A.5})$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.7})$$

$$\sum_{i \in Q} \sum_{j \in \bar{Q}} x_{ij} \geq 1, \quad \forall Q \subset V \quad (\text{A.8})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{A.9})$$

Uma alternativa proposta por Dantzig, Fulkerson e Johnson para a restrição para eliminação de subrotas é considerar que qualquer subgrafo associado a solução deve ter menos arestas do que nós. Isso é violado na Figura 13 por ambos os subgrafos associados a  $Q = \{1, 2, 3\}$  e  $\bar{Q} = \{4, 5, 6\}$  que tem 3 nós e 3 arestas cada.

Seja  $|Q|$  a cardinalidade de  $Q \subset V$ , queremos então que o subgrafo associado tenha no máximo  $|Q| - 1$  arestas:

$$\sum_{i \in Q} \sum_{j \in Q} x_{ij} \leq |Q| - 1, \quad \forall Q \subset V \quad (\text{A.10})$$

### A.2.2 Eliminação de Subrotas - Formulação MTZ

Uma outra proposta de restrição para eliminação de sub rotas foi apresentada por Miller, Tucker e Zemlin em 1960 que propõem o seguinte conjunto de inequações:

$$u_j \geq (u_i + 1) - (n - 1)(1 - x_{ij}) \quad \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, n \quad (\text{A.11})$$

$$1 \leq u_j \leq (n - 1) \quad (\text{A.12})$$

$$(\text{A.13})$$

As variáveis  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  representam a ordem em que a cidade  $i$  é visitada, com a cidade base, começando com zero ( $u_1 = 0$ ).

Na Figura (13) podemos observar que para  $i = 6$  e  $j = 1$  a restrição (A.11) é violada, pois  $u_1 = 0$  e  $u_6 = 5$ , assim, temos  $u_1 \leq u_6 + 1 - (5)(1 - x_{61})$ .

O Problema do Caixeiro Viajante pode então ser formulado como (PCVA-MTZ):

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (\text{A.14})$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.15})$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.16})$$

$$u_j \geq (u_i + 1) - (n - 1)(1 - x_{ij}) \quad \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, n \quad (\text{A.17})$$

$$1 \leq u_j \leq (n - 1) \quad (\text{A.18})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{A.19})$$

A atração desse modelo é que permite uma representação polinomial da ordem  $O(n^2)$ , que é particularmente útil quando estamos tratando de um contexto com problemas grandes.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 07 de Janeiro de 2011.

---

Michelli Maldonado Carretero