



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Bruno Caldeira Carlotti de Souza

Sobre (H, G) -coincidências de aplicações com domínio em espaços com ações de grupos finitos

São José do Rio Preto

2017

Bruno Caldeira Carlotti de Souza

Sobre (H,G) -coincidências de aplicações com domínio em espaços com ações
de grupos finitos

Dissertação apresentada para obtenção do título de
Mestre em Matemática, área de Topologia Algébrica,
junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática
do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”, Campus São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Profa. Dra. Maria Gorete Carreira
Andrade

São José do Rio Preto
2017

Souza, Bruno Caldeira Carlotti de.

Sobre (H,G) -coincidências de aplicações com domínio em espaços com ações de grupos finitos / Bruno Caldeira Carlotti de Souza. -- São José do Rio Preto, 2017

85 f. : il.

Orientador: Maria Gorete Carreira Andrade

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Topologia algébrica. 3. Teoria de homologia.
4. Espaços fibrados (Matemática) 5. Sequências espectrais (Matemática)
I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 513.831

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Bruno Caldeira Carlotti de Souza

Sobre (H,G) -coincidências de aplicações com domínio em espaços com ações
de grupos finitos

Dissertação apresentada para obtenção do título de
Mestre em Matemática, área de Topologia Algébrica,
junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática
do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”, Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade
Professora Assistente Doutora
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Professora Assistente Doutora
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
Professor Titular
UFSCar

São José do Rio Preto, 23 de fevereiro de 2017.

*Dedico à minha avó,
Maria Delbem Caldeira.*

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Sandra e Jaime por todo o apoio, não somente na realização deste particular projeto, mas com relação a todo o apoio dado ao longos de todas as etapas vividas até aqui e que certamente não poderiam ser devidamente agraciadas nesta pequenina folha de papel A4. Agradeço ainda aos meus familiares, por todo o apoio ao longo destes anos.

À Caroline de Arruda Signorini, por ser companheira, compreensiva e carinhosa comigo, se fazer presente em todas as fases de minha vida desde o momento em que nos conhecemos.

À Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, por estes muitos anos de parceria, seja ao longo de meus três anos no grupo PET-Matemática ou ao longo destes cinco anos sob sua orientação, e por todas as oportunidades oferecidas ao longo de todo este tempo, que certamente foram cruciais para que tudo isso fosse possível.

Aos meus professores da graduação e da pós-graduação, pela capacidade e empenho em fazer com que eu pudesse perceber simplicidade e beleza na Matemática. Em especial, à Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, por conseguir me mostrar o quão bela é a Álgebra.

À banca examinadora, por ter aceitado o convite.

A todos os meus amigos de PET, da graduação e da pós-graduação, em particular, ao Frederick, Wender, Ana Livia, Carlos, Jéssica, Luan, Eliton, Otávio, Jarne, Rafael, Rafaela, Willian, Heloísa, Junior, Laura, entre outros, por compartilhar ideias, experiências e filas no horário de almoço.

Aos meus "irmãos" Lucas e Renan, por todos esses anos de amizade, sinceridade e por serem importantes em momentos memoráveis. Agradeço ainda aos meus amigos Juliana, Guilherme e Daniel, pelos momentos de descontração, de companheirismo e por se fazerem sempre presente.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

“Qual é então o sentimento incalculável que priva o espírito do sono necessário para a vida? Um mundo que se pode explicar, mesmo com raciocínios errôneos, é um mundo familiar. Mas num universo repentinamente privado de ilusões e luzes, pelo contrário, o homem se sente um estrangeiro. É um exílio sem solução, porque está privado das lembranças de uma pátria perdida ou da esperança de uma terra prometida. Esse divórcio entre o homem e sua vida, o ator e seu cenário é propriamente o sentimento do absurdo”.

(Albert Camus)

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é apresentar detalhadamente um estudo sobre um critério, que aparece na referência [11], para a existência de (H, G) -coincidências de aplicações cujo contradomínio é um CW-complexo finito Y de dimensão k e cujo domínio é um espaço X paracompacto, Hausdorff, conexo, localmente conexo por caminhos e munido de uma G -ação livre, de modo que exista um $m \in \mathbb{Z}$ tal que $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ para $0 < i < m$ e $H^{m+1}(G; \mathbb{Z}) \neq 0$. Para a realização deste estudo foram necessários alguns resultados da teoria de cohomologia de grupos finitos, com ênfase em grupos com cohomologia periódica segundo a teoria de cohomologia de Tate, alguns resultados da teoria de fibrados e algumas noções da teoria de sequências espectrais cohomológicas.

Palavras-chave: cohomologia de grupos finitos, fibrados, fibrações, CW-complexo, sequências espectrais, (H, G) -coincidências de aplicações.

Abstract

The main objective of this work is to present in detail a study about a criterion, which appears in the reference [11], for the existence of (H, G) -coincidences of maps into a finite CW-complex Y with dimension k and whose domain is a paracompact, Hausdorff, connect and locally pathconnected space X with a free action of G , in a way that there exists $m \in \mathbb{Z}$ such that $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ for $0 < i < m$ and $H^{m+1}(G; \mathbb{Z}) \neq 0$. For the study of this criterion were needed some results of the theory of cohomology of finite groups, with emphasis on groups with periodic cohomology according to Tate cohomology theory, some results of the theory of fiber bundles and some notions of the theory of cohomological spectral sequences.

Keywords: cohomology of finite groups, fiber bundle, fibration, CW-complex, spectral sequences, (H, G) -coincidences of maps.

Lista de Figuras

1.1	Recobrimento da esfera $\mathbb{S}^1$	11
1.2	Recobrimento do toro T^2	11
1.3	Estrutura de CW-complexo para a reta $\mathbb{R}$	14
1.4	Estrutura de CW-complexo para a esfera $\mathbb{S}^2$	14
4.1	Join $X^{p-1} = \mathbb{S}^{p-2} * \mathbb{Z}_p$	71

Sumário

Sumário	x
Introdução	1
1 Conceitos Preliminares	4
1.1 Anel Grupo e $\mathbb{Z}G$ -módulos	4
1.2 Módulos Projetivos e Resoluções Projetivas	7
1.3 Espaços de Recobrimento e $K(G,1)$ -complexos	10
1.3.1 Espaços de Recobrimento	10
1.3.2 CW-complexos e $K(G,1)$ -complexos	13
1.4 O Grau de uma aplicação $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$	19
1.5 O Número de Lefschetz	20
1.6 Teorema dos Coeficientes Universais e Fórmula de Kunneth	21
2 Cohomologia de Grupos Finitos	23
2.1 (Co)homologia de Grupos	23
2.2 Produtos Cross e Cup em cohomologia de grupos	29
2.3 Deslocamento de Dimensões	30
2.4 Grupos atuando em esferas	31
2.5 Resoluções Periódicas via ações livres em esferas	32
2.6 Cohomologia de Tate	35
2.7 Grupos com cohomologia periódica	38
3 Espaços Classificantes, Sequências Espectrais e Homomorfismos Transfer	41
3.1 Fibrados	41
3.1.1 Fibrados principais e fibrados associados	44
3.1.2 Construção de Borel	45

3.2	Fibrações	47
3.3	Espaços Classificantes	50
3.3.1	O Espaço de Borel	51
3.4	Sequências Espectrais Cohomológicas	53
3.5	Homomorfismos Transfer	57
4	Um critério para a existência de (H,G)-coincidência de aplicações	59
4.1	Sobre (H,G)-coincidência de aplicações	59
4.2	Critério para (H,G)-coincidência de aplicações	60
4.2.1	Demonstração do Teorema 4.2.1	67
4.3	Sobre a desigualdade $m \geq G k$	70
4.4	Comentários Finais	79
	Referências	81
	Índice Remissivo	83

Introdução

Conjeturado por Stanislaw Ulam e demonstrado por Karol Borsuk na década de 1930, o Teorema clássico de Borsuk-Ulam afirma que toda aplicação contínua da esfera $\mathbb{S}^n$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$ carrega um par de pontos antipodais para um mesmo ponto de $\mathbb{R}^k$ desde que $n \geq k$. Desde o momento em que foi enunciado, este Teorema vem sendo extensamente estudado pela comunidade acadêmica, sendo uma das ferramentas mais úteis da Topologia Algébrica.

Dentre as generalizações obtidas, destacamos o trabalho de P. E. Conner e E. E. Floyd da década de 60 (ver [5]), que afirma: desde que $n > k$, toda aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow M^k$ aplica um par de pontos antipodais de $\mathbb{S}^n$ em um único ponto de M^k , onde M^k é um variedade diferenciável de dimensão k . Aumentando a complexidade do contradomínio escolhido e utilizando o conceito de $\mathbb{Z}_2$ -índice de Yang, M. Izydorek e J. Jaworowski mostraram que se Y^k é um CW-complexo finito de dimensão k e $n > 2k$, então $f : \mathbb{S}^n \rightarrow Y^k$ leva um par de pontos antipodais em um mesmo ponto de Y^k ; posteriormente, J. Jaworowski melhorou esta estimativa para $n \geq 2k$ (ver [19]).

Com o passar dos anos e do esforço empenhado por inúmeros pesquisadores, não somente várias generalizações surgiram, mas também várias versões foram enunciadas. Uma das possíveis interpretações é entender o par de pontos antipodais $\{x, -x\}$ como sendo a órbita do ponto $x \in \mathbb{S}^n$ da esfera sob a ação livre de $\mathbb{Z}_2$. Seguindo o raciocínio desta interpretação do Teorema de Borsuk-Ulam, é perceptível um caminho para o estudo de possíveis generalizações, na qual uma das substituições seria a de $\mathbb{Z}_2$ por um grupo finito arbitrário G .

Se considerarmos X e Y dois espaços topológicos e G um grupo finito que atua livremente sobre X , dizemos que $f : X \rightarrow Y$ possui uma G -coincidência se aplica a órbita de algum elemento $x \in X$ em um único ponto, ou seja, existe $x \in X$ tal que $f(gx) = f(x)$ para todo $g \in G$. Agora, se considerarmos ainda um subgrupo H de G , podemos definir o conceito de (H, G) -coincidência da seguinte maneira: podemos definir uma H -ação sobre a G -órbita $G(x)$ de um ponto $x \in X$ por $(gx, h) \mapsto ghx$, de modo que as H -órbitas formadas dividam $G(x)$ em subórbitas; sabendo disso, diremos que a aplicação contínua f terá um ponto de (H, G) -coincidência se f aplicar cada subórbita formada pela ação de H sobre $G(x)$ em um único ponto, ou seja, se $f(ghx) = f(gx)$ para todo $h \in H$. Este conceito surgiu de forma implícita, no ano de 1998, em um trabalho de D. L. Gonçalves e P. L. Q. Pergher que visava

estudar $\mathbb{Z}_p$ -coincidências de aplicações de esferas em CW-complexos (ver [12]).

Partindo disso, destacamos o trabalho de D. L. Gonçalves, J. Jaworowski e P. L. Q. Pergher (ver [10]) que afirma que se um grupo finito G atua livremente sobre uma esfera de homotopia Σ^{2n+1} de dimensão $2n + 1$ e $f : \Sigma^{2n+1} \rightarrow Y^k$ é uma aplicação contínua, onde Y^k é um CW-complexo finito de dimensão k , então se for verdadeira a desigualdade $2n + 1 \geq |G|k$ segue que existe $H \subset G$ um subgrupo não trivial de G e uma (H, G) -coincidência para f .

Nosso objetivo neste trabalho é uma apresentação detalhada de um critério (encontrado em [11]) para a existência de (H, G) -coincidências de aplicações de um espaço X paracompacto, Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminhos, em um CW-complexo finito de dimensão k , onde G é um grupo finito que atua livremente sobre X e H é um subgrupo não trivial de G . Para a abordagem deste assunto, foi necessário o estudo de alguns conceitos da área de Topologia Algébrica, como o estudo da teoria de (co)homologia de grupos, fibrados e fibrações, CW-complexos e teoria de sequências espectrais.

A seguir, relatamos sucintamente os objetos de estudo de cada capítulo.

No primeiro capítulo, colocamos alguns dos conceitos preliminares necessários para a compreensão do trabalho. Alguns resultados topológicos importantes relativos aos conceitos de espaços de recobrimento, CW-complexo e $K(G, 1)$ -complexo são apresentados (com base em [21] e [3]). Depois, apresentamos alguns conceitos de álgebra homológica, o conceito de grau de uma aplicação, algumas fórmulas de coeficientes universais e a fórmula de Kunnet (com base em [14],[15], [6] e [21]).

No segundo capítulo, apresentamos a definição e algumas propriedades de (co)homologia de grupos, bem como sua interpretação topológica. Posteriormente, apresentamos alguns resultados da teoria de (co)homologia de grupos finitos. Para tal, iniciamos com o estudo de grupos finitos atuando em esferas e resoluções projetivas via ação em esferas. Finalmente, iniciamos um breve estudo sobre cohomologia de Tate e de suas propriedades, com o intuito de estudar alguns resultados de grupos com cohomologia periódica, que serão necessários no capítulo 4. A principal referência para este capítulo é [3].

No terceiro capítulo, em um primeiro momento, introduzimos o conceito de fibrado e vimos alguns resultados clássicos com o interesse particular no Teorema de Milnor para fibrados, o qual garante a existência de um G -fibrado principal $G \hookrightarrow E \rightarrow B$ para qualquer grupo G . Depois iniciamos um breve estudo do conceito de fibrações, que será útil no capítulo 4, e através do Teorema de Hurewicz para fibrações, relacionamos com o conceito de fibrados. Em um segundo momento, introduzimos o conceito de sequência espectral cohomológica com o intuito de enunciar a sequência espectral cohomológica de Leray-Serre para fibrações, que será de extrema utilidade no capítulo 4.

No quarto (e último) capítulo, apresentamos um critério (baseado na referência [11]) que garante a existência de uma (H, G) -coincidência para uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y^k$, no qual X é um espaço paracompacto, Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminhos com uma ação livre do grupo finito G sobre X de modo que exista um m tal que $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ para

$0 < i < m$ e $H^{m+1}(G; \mathbb{Z}) \neq 0$, Y^k é um CW-complexo finito de dimensão k , e $H \subset G$ é um subgrupo não trivial de G , desde que valer a desigualdade $m \geq |G|k$. Este critério generaliza os resultados citados anteriormente. Observamos que vários autores continuam a estudar critérios para a existência de G -coincidências de aplicações, sempre procurando estudar sua existência em condições mais gerais do que as que aqui foram apresentadas (ver, por exemplo, o artigo [4]).

Conceitos Preliminares

Neste capítulo veremos alguns conceitos básicos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Algumas demonstrações de resultados deste capítulo serão omitidas, pois o enfoque maior é o detalhamento da referência [11]. Contudo, todos os resultados enunciados podem ser encontrados nas referências.

1.1 Anel Grupo e $\mathbb{Z}G$ -módulos

Definição 1.1.1 *Sejam R um anel comutativo com unidade 1 e G um grupo denotado multiplicativamente. Seja RG o R -módulo livre gerado pelos elementos de G . Daí, um elemento de G é expresso unicamente na forma $\sum_{g \in G} \alpha_g g$, onde $\alpha_g \in R$ e $\alpha_g = 0$ para quase todo g (ou*

seja, $RG = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g; \alpha_g \in R \text{ e } \alpha_g = 0 \text{ para quase todo } g \right\}$).

Em RG definimos a multiplicação e a soma, respectivamente, por

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot \left(\sum_{n \in G} \beta_n h \right) = \sum_{g, h \in G} \alpha_g \beta_h gh \quad \text{e} \quad \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) + \left(\sum_{n \in G} \beta_n g \right) = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

*que fazem de RG um anel com unidade $1e$, onde e é o elemento neutro de G , chamado de **Anel grupo de G sobre R** .*

Estaremos interessados em trabalhar com $\mathbb{Z}G$ -módulos, também denominados de **G -módulos**. Para melhor caracterizá-los, necessitamos do conceito de ação de um grupo em um conjunto.

Definição 1.1.2 *Sejam G um grupo e X um conjunto não vazio. Uma **ação (à esquerda)** de G em X é uma aplicação $\phi : G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto \phi(g, x) = g \cdot x$ satisfazendo, para todo $x \in X$, as condições:*

- (i) $e \cdot x = x$, onde e é o elemento neutro de G ;
- (ii) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$, para todos $g_1, g_2 \in G$.

Equivalentemente, podemos escrever esta definição da seguinte forma: uma ação de G em X é um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \text{Bij}(X)$ dado por $\varphi(g) = \varphi_g : X \rightarrow X$ tal que $\varphi_g(x) = gx$, onde $\text{Bij}(X) = \{f : X \rightarrow X; f \text{ é uma bijeção}\}$ é um grupo com a operação de composição.

Sempre que tivermos um grupo G atuando em um conjunto X , chamaremos este conjunto de **G -conjunto**. Caso X for um espaço topológico munido de uma G -ação, diremos que X é um **G -espaço**.

Definição 1.1.3 *Sejam X e Y dois G -espaços e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Diremos que a aplicação f é **G -equivariante**, ou simplesmente **equivariante**, se $f(gx) = gf(x)$ para todo $x \in X$ e todo $g \in G$.*

Definição 1.1.4 *Dizemos que X é um **G -conjunto livre** se a ação de G em X é livre, isto é, $g \cdot x = x$ para algum $x \in X$ se, e somente se, $g = e$.*

*Dizemos que X é um **G -conjunto trivial** se a ação de G em X é trivial, isto é, $g \cdot x = x$ para todo $x \in X$ e para todo $g \in G$.*

Observação 1.1.1 *Sobre o conceito de G -módulo, temos: A é um G -módulo se, e somente se, A é um grupo abeliano com um homomorfismo de anéis de $\mathbb{Z}G$ ao anel dos endomorfismos $\text{End}(A)$ (para detalhes, ver [3]).*

Proposição 1.1.1 *Sejam G um grupo (multiplicativo) e A um conjunto não vazio. Então A é um $\mathbb{Z}G$ -módulo (à esquerda) se, e somente se, A é um $\mathbb{Z}$ -módulo munido com uma ação de G em A (ou seja, $\mathbb{Z}G$ -módulo $\Leftrightarrow \mathbb{Z}$ -módulo e G -conjunto).*

Demonstração: Ver [[8], Proposição 1.2.1, pg. 9]. □

Observação 1.1.2 *A Proposição anterior continua sendo verdadeira se trocarmos $\mathbb{Z}$ por um anel com unidade R qualquer.*

Observação 1.1.3 *Seja $\varepsilon : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$ a aplicação aumentação usual, definida por $\varepsilon(g) = 1$, para todo $g \in G$, e $\varepsilon\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) = \sum_{g \in G} \alpha_g \varepsilon(g) = \sum_{g \in G} \alpha_g$. Se A é um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial e $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in \mathbb{Z}G$ então,*

$$\alpha m = \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) m = \sum_{g \in G} \alpha_g (gm) = \varepsilon(\alpha) m.$$

Observação 1.1.4 *Todo $\mathbb{Z}$ -módulo M pode ser visto como um $\mathbb{Z}G$ -módulo se considerarmos em M a G -ação trivial. Em particular, o anel $\mathbb{Z}$ pode ser visto como um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial.*

Definição 1.1.5 *Seja X um G -conjunto e $x \in X$. Definimos a **G -órbita de X** como o conjunto $G(x) = \{g \cdot x; g \in G\}$.*

Proposição 1.1.2 *As órbitas de X formam uma partição de X , isto é, existe $E = \{x_i; i \in I\}$ conjunto de representantes para órbitas distintas, tal que $X = \bigsqcup_{x_i \in E} G(x_i)$.*

Demonstração: Ver [[8], Proposição 1.2.2, pg. 10]. □

Definição 1.1.6 *Seja X um G -conjunto e $x \in X$. O conjunto $G_x = \{g \in G; g \cdot x\}$ é chamado **subgrupo de isotropia de G em X** .*

Observação 1.1.5 *Existe uma correspondência 1-1 entre os conjunto G/G_x (das classes laterais à esquerda gG_x) e a órbita $G(x)$ dada pela aplicação*

$$\begin{aligned} \eta : G(x) &\rightarrow G/G_x \\ g \cdot x &\mapsto gG_x \end{aligned}$$

Para detalhes, esta demonstração pode ser encontrada em [8].

Proposição 1.1.3 *Seja X um G -conjunto livre e seja E um conjunto de representantes para as G -órbitas em X . Então $\mathbb{Z}X$ (o $\mathbb{Z}$ -módulo livre gerado por X) é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base E .*

Demonstração: Ver [[8], Proposição 1.2.3, pg. 11]. □

Corolário 1.1.1 *Seja H um subgrupo de G e E um conjunto de representantes para as classes laterais gH de H em G . Então $\mathbb{Z}G = \bigoplus_{g \in E} \mathbb{Z}H$.*

Demonstração: Ver [[8], Corolário 1.2.1, pg. 12]. □

1.2 Módulos Projetivos e Resoluções Projetivas

Definição 1.2.1 Um R -módulo X é dito ser um **módulo projetivo** se para todo homomorfismo $f : X \rightarrow B$ e todo epimorfismo $g : A \rightarrow B$ de R -módulos, existe um homomorfismo $h : X \rightarrow A$ satisfazendo $g \circ h = f$.

Na linguagem de diagramas, esta definição pode ser reestruturada da seguinte forma: um R -módulo X é projetivo se, e somente se, todo diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow f & \\ A & \xrightarrow{g} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

de homomorfismos de R -módulos, onde a sequência horizontal é exata, pode ser encaixado no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ h \swarrow & \downarrow f & \\ A & \xrightarrow{g} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde $h : X \rightarrow A$ é homomorfismo de R -módulos.

Proposição 1.2.1 São equivalentes as seguintes condições para um R -módulo P :

- (i) P é projetivo ;
- (ii) Toda sequência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ cinde;
- (iii) P é somando direto de um módulo livre .

Demonstração: Ver [[3], Proposição 8.2, pg. 27]. □

Proposição 1.2.2 Todo R -módulo livre é projetivo.

Demonstração: De fato, dado um R -módulo livre A temos $A \simeq A \oplus \{0\}$ e então segue que A é projetivo. □

Definição 1.2.2 Seja X um R -módulo arbitrário. Uma **resolução de X sobre R** , ou uma **R -resolução de X** , é um sequência exata de R -módulos

$$C : \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

a qual satisfaz as seguintes condições:

- (1) $C_{-1} = X$;
- (2) $C_n = 0$, para todo $n < -1$.

Equivalentemente, podemos escrever esta definição da seguinte forma: uma resolução de X sobre R é uma sequência exata de R -módulos

$$C : \cdots \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \rightarrow 0.$$

Definição 1.2.3 A aplicação $\varepsilon : C_0 \rightarrow X$ é chamada **aplicação aumentação**. Se cada C_i é livre, dizemos que a resolução é uma **resolução livre**. Se cada C_i é projetivo, dizemos que a resolução é uma **resolução projetiva**.

Denotaremos por $\varepsilon : C \rightarrow X$ uma resolução de X .

Observação 1.2.1 Se considerarmos o complexo de cadeia não negativo $C = (C_i, \partial_i)_{i \geq 0}$, podemos ver $\varepsilon : C \rightarrow X$ como uma aplicação de cadeias, onde X é identificado com o complexo de cadeia tal que $D_0 = X$ e $D_i = 0$ se $i > 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

A hipótese de exatidão, neste ponto de vista, simplesmente diz que ε é uma equivalência fraca.

Proposição 1.2.3 Dado um R -módulo X , sempre podemos construir uma resolução livre de X .

Demonstração: Ver [[15], Proposição 1.1, pg. 124]. □

Lema 1.2.1 Se F é uma resolução projetiva de R sobre RG e H é um subgrupo de G , então F também é uma resolução projetiva de R sobre RH .

Demonstração: Ver [[8], Lema 1.3.1, pg. 14]. □

Exemplo 1.2.1 Seja G um grupo cíclico infinito com gerador s (ou seja, $G \simeq \mathbb{Z}$). Então

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, onde $\partial(\alpha) = (s - 1)\alpha$, para $\alpha \in \mathbb{Z}G$ e ε aplicação aumentação usual.

De fato, precisamos verificar que

(a) ∂ é injetora (ou seja, $\text{Ker}(\partial) = 0$)

(b) $\text{Im}(\partial) = \text{Ker}(\varepsilon)$

(c) $\text{Im}(\varepsilon) = \mathbb{Z}$

O homomorfismo ∂ é injetor, pois dado $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i s^i \in \mathbb{Z}G$ (onde $n_i = 0$ à menos de um número finito de índices) temos

$$\begin{aligned} \alpha \in \text{Ker}(\partial) &\Rightarrow \partial(\alpha) = 0 \Rightarrow (s-1)\alpha = 0 \Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i s^{i+1} - \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i s^i = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i s^{i+1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i s^i \Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_{i-1} s^i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i s^i \\ &\Rightarrow n_{i-1} = n_i, \text{ para todo } i \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow n_i = 0, \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo $\alpha = 0$ e daí $\text{Ker}(\varepsilon) = \{0\}$. Agora, vamos verificar que $\text{Ker}(\varepsilon)$ é o $\mathbb{Z}G$ -módulo à esquerda gerado por $s-1$. De fato, dado $\alpha \in \text{Ker}(\varepsilon)$, com $\alpha = \sum_{i=1}^k n_i s^{r_i}$, temos $\varepsilon(\alpha) = \sum_{i=1}^k n_i = 0$ e logo,

$$\alpha = \sum_{i=1}^k n_i s^{r_i} = \sum_{i=1}^k n_i s^{r_i} - \sum_{i=1}^k n_i = \sum_{i=1}^k n_i (s^{r_i} - 1).$$

Mas como $s^{r_i} - 1 = (1 + s + \dots + s^{r_i-1})(s-1)$, então

$$\alpha = \sum_{i=1}^k n_i (s^{r_i} - 1) = \left(\sum_{i=1}^k n_i (1 + s + \dots + s^{r_i-1}) \right) (s-1)$$

que está no $\mathbb{Z}G$ -módulo gerado por $s-1$ e portanto $\text{Ker}(\varepsilon)$ está contido no $\mathbb{Z}G$ -módulo gerado por $s-1$. Por outro lado, tome β um elemento no $\mathbb{Z}G$ -módulo gerado por $s-1$. Logo, $\beta = \gamma(s-1)$, onde $\gamma = \sum_{i=1}^k n_i s^{r_i}$. Assim, $\beta = \gamma(s-1) = \sum_{i=1}^k n_i s^{r_i+1} - \sum_{i=1}^k n_i s^{r_i}$, e logo

$$\begin{aligned} \varepsilon(\beta) &= \varepsilon \left(\sum_{i=1}^k n_i s^{r_i+1} - \sum_{i=1}^k n_i s^{r_i} \right) = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^k n_i s^{r_i+1} \right) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^k n_i s^{r_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^k n_i = 0 \end{aligned}$$

Disto segue que $\text{Ker}(\varepsilon)$ é o $\mathbb{Z}G$ -módulo gerado por $s-1$. Agora, perceba que $\text{Im}(\partial) = \{\partial(\alpha); \alpha \in \mathbb{Z}G\} = \{(s-1)\alpha; \alpha \in \mathbb{Z}G\}$, ou seja, $\text{Im}(\partial)$ é o $\mathbb{Z}G$ -módulo gerado por $s-1$ e portanto $\text{Im}(\partial) = \text{Ker}(\varepsilon)$. Por último, basta notar que a aplicação aumentação é sobrejetora

(ou seja, $\text{Im}(\varepsilon) = \mathbb{Z}$) pois dado $r \in \mathbb{Z}$ existe $rs \in \mathbb{Z}G$ tal que $\varepsilon(rs) = r$.

Definição 1.2.4 *Sejam C e D complexos de cadeia e $f : C \rightarrow D$ e $g : D \rightarrow C$ aplicações de cadeia tais que $f \circ g$ é homotópica ao endomorfismo idêntico id_D e $g \circ f$ é homotópica ao endomorfismo idêntico id_C . Nestas condições, as aplicações de cadeia f e g são chamadas **equivalência de homotopia** e C e D são ditos complexos de cadeia **homotopicamente equivalentes**. Neste caso, denotamos $C \sim D$.*

Lema 1.2.2 *Se C e D são complexos de cadeia homotopicamente equivalentes, então $H_n(C) \simeq H_n(D)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Ver [[3], Proposição 0.2, pg. 5]. □

Teorema 1.2.1 *Todo R -módulo X admite uma resolução projetiva, e além disso duas resoluções projetivas do mesmo módulo X são homotopicamente equivalentes.*

Demonstração: Ver [[15], Teorema 1.4, pg. 129]. □

1.3 Espaços de Recobrimento e $K(G,1)$ -complexos

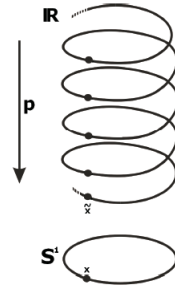
Nesta seção, todos os espaços topológicos tomados serão conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos.

1.3.1 Espaços de Recobrimento

Definição 1.3.1 *Seja X um espaço topológico. Um **recobrimento** de X é um par $(\tilde{X}, p)$ de modo que $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação contínua sobrejetora e de modo que todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U aberta conexa por caminhos tal que a restrição de p a cada componente conexa $\tilde{U}$ de $p^{-1}(U)$ é um homeomorfismo.*

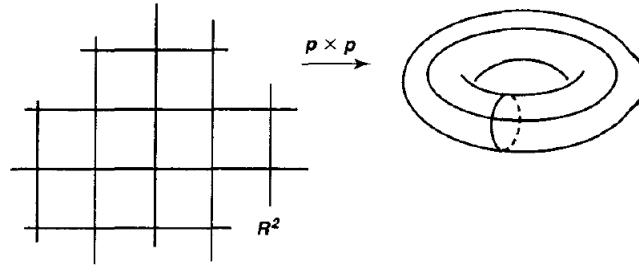
*Denominamos $\tilde{X}$ um **espaço de recobrimento**, p uma **projeção de recobrimento** e a vizinhança U de **vizinhança elementar**.*

Exemplo 1.3.1 *Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $p(t) = (\sin t, \cos t)$. Então $(\mathbb{R}, p)$ é um recobrimento de $\mathbb{S}^1$. Mais ainda, todo subintervalo aberto de $\mathbb{S}^1$ pode ser visto como uma vizinhança elementar.*

Figura 1.1: Recobrimento da esfera S^1

Observação 1.3.1 Sejam $(\tilde{X}, p)$ e $(\tilde{Y}, q)$ recobrimentos de X e Y respectivamente. Então $(\tilde{X} \times \tilde{Y}, p \times q)$ é um recobrimento de $X \times Y$, sendo a aplicação $p \times q$ definida como $(p \times q)(x, y) = (p(x), q(y))$. Agora, se U e V são vizinhanças elementares de $x \in X$ e $y \in Y$ então $U \times V$ é uma vizinhança elementar de $(x, y) \in X \times Y$.

Exemplo 1.3.2 Considere o toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Como, pelo exemplo 1.3.1, $(\mathbb{R}, p)$ é recobrimento de S^1 , onde $p(t) = (\sin t, \cos t)$, então segue da observação 1.3.1 que $(\mathbb{R}^2, p \times p)$ é um recobrimento de T^2 .

Figura 1.2: Recobrimento do toro T^2

Proposição 1.3.1 Se $(\tilde{X}, p)$ é um recobrimento X então $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local.

Demonstração: Ver [[29], Lema 8, pg. 63]. □

Proposição 1.3.2 Seja $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento de X , $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Então o homomorfismo induzido $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é um monomorfismo.

Demonstração: Ver [[29], Teorema 1, pg. 72]. □

Definição 1.3.2 *Seja $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento de X . Um homeomorfismo $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ é dito **transformação de recobrimento** (ou **Deck transformação**) se $p \circ \varphi = p$, ou seja, o triângulo*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X} \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

é verdadeiro. O conjunto de todas as transformações de recobrimento, denotado por $A(\tilde{X}, p)$, é um grupo com a operação de composição.

Proposição 1.3.3 *O grupo $(A(\tilde{X}, p), \circ)$ atua livremente sobre $\tilde{X}$*

Demonstração: Ver [[21], Corolário 6.2, pg. 131]. □

Definição 1.3.3 *Um recobrimento $(\tilde{X}, p)$ de X é dito **recobrimento regular** se $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$. Ainda, esta condição independe da escolha do ponto base $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.*

*Dizemos ainda que um recobrimento $(\tilde{X}, p)$ de X é **recobrimento universal de X** se $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, isto é, se $\tilde{X}$ é conexo por caminhos e $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = 0$ para todo $\tilde{x} \in \tilde{X}$.*

Exemplo 1.3.3 *Todo recobrimento universal é regular.*

De fato, sendo $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = 0$ então $p_(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = 0$ é subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$ para todo $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.*

Definição 1.3.4 *Seja G um grupo e E um conjunto no qual G atua. Dizemos que a G -ação sobre E é uma **ação transitiva**, ou que E é um **G -espaço homogêneo**, se para quaisquer $x, y \in E$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$ (isto é, $G(x) = E$ para todo $x \in E$).*

Definição 1.3.5 *Se $(\tilde{X}, p)$ é um recobrimento de X , o número cardinal comum dos conjuntos $p^{-1}(x)$, com $x \in X$, é chamado de **número de folhas do recobrimento**.*

Proposição 1.3.4 *Se $(\tilde{X}, p)$ é um recobrimento de X , onde $x \in X$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, então:*

- (i) $p^{-1}(x)$ é um $\pi_1(X, x)$ -espaço homogêneo;
- (ii) $\pi_1(X, x)_{\tilde{x}} = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$;
- (iii) O número de folhas do recobrimento $(\tilde{X}, p)$ é o índice do subgrupo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ em $\pi_1(X, x)$.

Demonstração: Ver [[21], Capítul V]. □

Proposição 1.3.5 *Seja $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento regular de X . Então $A(\tilde{X}, p) \simeq \pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$, para todo $x \in X$ e todo $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.*

Em particular, se o recobrimento é universal então $A(\tilde{X}, p) \simeq \pi_1(X, x)$ e o numero de folhas do recobrimento coincide com a ordem do grupo $\pi_1(X, x)$.

Demonstração: Ver [[21], Corolário 7.4, pg. 134]. □

Proposição 1.3.6 *O grupo $A(\tilde{X}, p)$ atua livremente sobre $p^{-1}(x)$ se, e somente se, $(\tilde{X}, p)$ é um recobrimento regular de X .*

Demonstração: Ver [[21], Lema 8.1, pg. 136]. □

Definição 1.3.6 *Um grupo G de homeomorfismos de X é dito **propriamente descontínuo** se todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V tal que, para todo $g \in G$ com $g \neq id_X$, tem-se*

$$gV \cap V = \emptyset.$$

Proposição 1.3.7 *Sejam X um espaço topológico, G um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de X e $q : X \rightarrow X/G$ a aplicação quociente sobre o espaço de órbitas de G . Então (X, q) é um recobrimento regular de X/G , com $G = A(X, q)$.*

Demonstração: Ver [[21], Proposição 8.2, pg. 136]. □

1.3.2 CW-complexos e $K(G,1)$ -complexos

Definição 1.3.7 *Dado um espaço X de Hausdorff, dizemos que X **admite uma estrutura de CW-complexo** se possui uma coleção de subconjuntos fechados σ_j^q (onde q representa a dimensão e $j \in J_q$ (conjunto dos índices)), chamadas **células fechadas**, e uma família de subespaços fechados*

$$X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots \subset X^q \subset \dots$$

com $X^q = \bigcup_{p \leq q, j \in J_p} \sigma_j^p$ (por definição, $X^{-1} = \emptyset$), e fronteira dada por $f_j^q = \sigma_j^q \cap X^{q-1}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $(\sigma_i^p - f_i^p) \cap (\sigma_j^q - f_j^q) \neq \emptyset$ somente quando $p = q$ e $i = j$;

$$(ii) X = \bigcup_q X^q;$$

(iii) Para cada célula σ_j^q , existe uma aplicação (denominada **aplicação característica**) $\phi_j^q : D^q \rightarrow \sigma_j^q$, onde D^q é o disco de dimensão q , que leva $\partial D^q = S^{q-1}$ sobre f_j^q e aplica $D^q - S^{q-1}$ homeomorficamente sobre $\sigma_j^q - f_j^q$;

(iv) f_j^q intercepta somente um número finito de conjuntos $(\sigma_i^q - f_i^q)$, com $i \in J_q$;

(v) Um subconjunto Y de X é fechado se $Y \cap \sigma_j^q$ é fechado em σ_j^q para todo q e todo $j \in J_q$, onde σ_j^q possui uma topologia quociente de D^q via ϕ_j^q .

Em um CW-complexo X , denotaremos e^q denotará a **célula aberta** de dimensão q , ou seja, $e^q = \sigma^q - f^q$.

Denominaremos os subespaços fechados X^q de **q -esqueleto**.

Exemplo 1.3.4 Seja $X = \mathbb{R}$. Podemos dar a $\mathbb{R}$ uma estrutura natural de CW-complexo, onde as 0-células abertas e 1-células abertas são dadas, respectivamente, por $e_n^0 = \{n\}$ e $e_n^1 = (n, n+1)$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

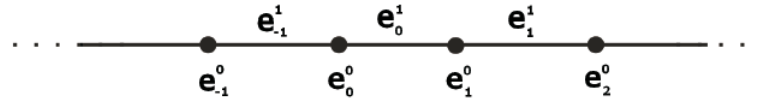


Figura 1.3: Estrutura de CW-complexo para a reta $\mathbb{R}$

Exemplo 1.3.5 Seja $X = \mathbb{S}^n$ a n -esfera. Uma estrutura de CW-complexo sobre $\mathbb{S}^n$ pode ser dada por uma 0-célula aberta e uma n -célula aberta, ou seja, $\mathbb{S}^n = e^0 \cup e^n$.

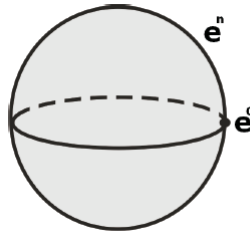


Figura 1.4: Estrutura de CW-complexo para a esfera $\mathbb{S}^2$

Proposição 1.3.8 Seja X um CW-complexo o qual é a união de dois subcomplexos X_1 e X_2 , cuja interseção $Y = X_1 \cap X_2$ é conexa e não-vazia. Se α_1 e α_2 são aplicações injetivas no diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(Y) & \xrightarrow{\alpha_2} & \pi_1(X_2) \\
\alpha_1 \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\
\pi_1(X_1) & \xrightarrow{\beta_1} & \pi_1(X)
\end{array}$$

então β_1 e β_2 também são injetivas, onde todas as aplicações acima são induzidas das respectivas inclusões.

Demonstração: Ver [[3], Lema 7.4, pg. 50]. □

Proposição 1.3.9 *Todo CW-complexo é um espaço paracompacto .*

Demonstração: Ver [[9], Teorema 1.3.5, pg. 29]. □

Definição 1.3.8 *Um G -complexo é um CW-complexo X munido de uma ação de G em X que permuta as células, isto é, se S representa o conjunto das células de X , então $gS = S$ para $g \in G$. Se a ação de G em X permuta livremente as células, dizemos X é um G -complexo.*

Observação 1.3.2 *É importante notar que, pelo fato da ação de G em X induzir um homomorfismo dado por*

$$\begin{aligned}
G &\rightarrow \text{Homeo}(X) \\
g &\mapsto \varphi_g : X \rightarrow X, \quad \varphi_g(x) := gx
\end{aligned}$$

temos que se σ é uma célula de X então $g\sigma$ é também uma célula de X cuja dimensão é a mesma de σ (ou seja, φ_g preserva a dimensão das células).

Seja X um G -complexo . Podemos formar o complexo de cadeias $C_*(X)$, onde $C_n(X)$ é o $\mathbb{Z}$ -gerado pelas n -células de X , ou seja, $C_n(X) = \bigoplus_{j \in J_n} \langle \sigma_j^n \rangle$. A ação de G em X induz uma ação em $C_*(X)$ da seguinte forma:

$$g(a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n) := a_1g\sigma_1 + \dots + a_ng\sigma_n.$$

Assim $C_*(X)$ se torna um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}G$ -módulos (pois são $\mathbb{Z}$ -módulos munidos de uma G -ação). Definimos a aplicação $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ por $\varepsilon(\sigma^0) = 1$ nas 0-células de X e estendemos por linearidade. Temos que ε é uma aplicação de $\mathbb{Z}G$ -módulos .

Teorema 1.3.1 *Se X é um G -complexo livre contrátil então o complexo de cadeias celular aumentado de X*

$$\dots \rightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Demonstração: Seja $X_n = \{\sigma \subset X; \sigma \text{ é uma } n\text{-célula de } X\}$. Temos $C_n(X) = \mathbb{Z}X_n$ (ou seja, o $\mathbb{Z}$ -módulo livre gerado pelas n -células). Agora, como $X_n \subset X$ e X é um G -complexo livre, então X_n é um G -conjunto livre e logo, pela Proposição 1.1.3 segue que $C_n(X) = \mathbb{Z}X_n$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base E , onde E é um conjunto de representantes para as G -órbitas distintas em X_n . Por hipótese X é contrátil, ou seja, tem o mesmo tipo de homotopia de um conjunto unitário e, desta forma,

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Contudo, quando $n \geq 1$ temos

$$0 = H_n(X) = \frac{Ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})} \Rightarrow Ker(\partial_n) = Im(\partial_{n+1}), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Nos resta então verificar que $Ker(\varepsilon) = Im(\partial_1)$. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \partial_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Temos $\mathbb{Z} = H_0(X) = Ker(\partial_0)/Im(\partial_1) = C_0(X)/Im(\partial_1)$ e assim, como ε é sobrejetora por definição, então pelo Teorema do Isomorfismo (e sabendo que $Im(\partial_1) \subset Ker(\varepsilon)$) segue que

$$\frac{C_0(X)}{Ker(\varepsilon)} \simeq \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z} \simeq \frac{C_0(X)}{Ker(\varepsilon)} = \frac{C_0(X)/Im(\partial_1)}{Ker(\varepsilon)/Im(\partial_1)} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{Ker(\varepsilon)/Im(\partial_1)}$$

e logo $Ker(\varepsilon)/Im(\partial_1) = 0$, o que implica que $Ker(\varepsilon) = Im(\partial_1)$. $\square$

Observação 1.3.3 *O Teorema anterior continua válido se considerarmos um espaço topológico X contrátil no qual G atua propriamente descontinuamente. Podemos mostrar então que o complexo de cadeias singular aumentado $C_*(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. (ver [[20], Teorema 11.5, pg. 136])*

Agora, vamos definir um CW-complexo satisfazendo condições especiais. Para tanto, faremos inicialmente algumas considerações.

Sejam X um CW-complexo e $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ um recobrimento de X . Por [[28], Teorema 2, pg. 251], temos que $\tilde{X}$ também é um CW-complexo (as n -células $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{X}$ são as componentes conexas de $p^{-1}(\sigma)$, onde σ é uma n -célula de X , e $p|_{\tilde{\sigma}} : \tilde{\sigma} \rightarrow \sigma$ é homeo). Pela Proposição 1.3.5, $G = A(\tilde{X}, p)$ atua livremente sobre $\tilde{X}$ permutando as células. Assim, $\tilde{X}$ é um G -complexo. Pelo Teorema 1.3.1, se $\tilde{X}$ é contrátil, o complexo celular aumentado de $\tilde{X}$ é uma $\mathbb{Z}G$ -resolução livre de $\mathbb{Z}$ com $C_n(\tilde{X})$ um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com um elemento básico para cada órbita de célula em $\tilde{X}$. Se o recobrimento é regular, então G atua transitivamente em $p^{-1}(\sigma)$, ou seja,

$G(\tilde{\sigma}) = p^{-1}(\sigma)$ para todo $\tilde{\sigma} \subset p^{-1}(\sigma)$ (pela Proposição 1.3.5). Logo, cada célula em X nos fornece uma órbita de células de mesma dimensão em $\tilde{X}$. Se, além disso, o recobrimento é contrátil, temos $C_*(X)$ um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com um elemento básico para cada célula de X .

Será definido a seguir um CW-complexo que satisfaz todas as condições citadas anteriormente. É fato conhecido que, para CW-complexos conexos, sempre existe um recobrimento universal e este é regular (ver [[28], Teorema 1, pg. 250] e [[13], Teorema 6.7, pg. 28]).

Definição 1.3.9 *Seja X um CW-complexo tal que:*

- (i) X é conexo;
- (ii) $\pi_1(X) = G$;
- (iii) O recobrimento universal $\tilde{X}$ de X é contrátil.

Nestas condições, X é dito um **complexo de Eilenberg-MacLane do tipo $(G,1)$** ou simplesmente, **$K(G,1)$ -complexo**.

Observação 1.3.4 *Pode-se verificar que a condição (iii) da definição 1.3.9 anterior pode ser substituída por uma das condições abaixo (por [[3], II.4]):*

- (iii)' $H_i(\tilde{X}) = 0$ para $i \geq 2$;
- (iii)" $\pi_i(X) = 0$ para $i \geq 2$.

Observação 1.3.5 *Se $\tilde{X}$ é recobrimento universal de um CW-complexo X , temos que $\tilde{X}$ é um G -complexo, onde $G = \pi_1(X)$.*

Observação 1.3.6 *Nesta seção, admitiremos o seguinte Teorema: "Dado um grupo G , sempre existe um $K(G,1)$ -complexo." (ver [[3], Teorema 7.1, pg. 205]).*

Exemplo 1.3.6 *Sejam $G = \langle \alpha \rangle \simeq \mathbb{Z}$ e $X = \mathbb{S}^1$. Note que X é um $K(G,1)$ -complexo, pois X é um CW-complexo conexo, $\pi_1(X) = G$ e o recobrimento universal de X é $\tilde{X} = \mathbb{R}$ (com $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $p(t) = (\sin t, \cos t)$) é contrátil.*

Exemplo 1.3.7 *Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (grupo abeliano livre de posto n) e $X = \mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ (toro n -dimensional). Sabemos que X é um CW-complexo conexo tal que $\pi_1(X) = G$ e cujo recobrimento universal (que é $\tilde{X} = \mathbb{R}^n$) é contrátil. Logo, X é um $K(G,1)$ -complexo.*

Observação 1.3.7 *Sejam $G = F(S)$ (grupo livre gerado por um conjunto S) e $Y = \bigvee_{s \in S} \mathbb{S}_s^1$ (bouquet de n -círculos indexados por um conjunto S). Y é um CW-complexo conexo de*

dimensão 1 com exatamente um vértice e uma 1-célula para cada elemento de S , e $\pi_1(Y) = G$ (ver [[21], Exemplo 3.4, pg. 93]). Além disso, se $\tilde{Y}$ é recobrimento universal de Y , temos que $\tilde{Y}$ tem dimensão 1 (pois $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ é homeomorfismo local). Assim, $H_i(\tilde{Y}) = 0$ para $i \geq 2$. Portanto, Y é um $K(G,1)$ -complexo.

Lema 1.3.1 *Se X é um G -complexo livre compacto, então G é finito.*

Demonstração: Como X é um G -complexo livre, então a G -ação é livre e daí, a G -ação é propriamente descontínua. De fato, como a G -ação sobre X é livre, então dado $g \in G$, $g\sigma \neq \sigma$ para todo $\sigma \in X$. Daí, dado $x \in X$, existe σ tal que $x \in \sigma \subset X$. Mais ainda, existe $\sigma \subset X$ tal que $x \in \sigma - f = e$, que é aberto, e $ge \cap e = \emptyset$. Logo, a G -ação é propriamente descontínua. Pela Proposição 1.3.7, temos que (X, p) é um recobrimento regular de X/G , onde X/G é o espaço das órbitas de X , a aplicação p é definida por $p(x) = \bar{x}$ e G atua livremente como o grupo das transformações de recobrimento.

Agora, dado $\bar{x}_0 \in X/G$, temos $p^{-1}(\bar{x}_0) = G(x_0)$. Como a G -ação é livre, $p^{-1}(\bar{x}_0)$ está em correspondência 1-1 com G , pois $G_{x_0} = \{g \in G; gx_0 = x_0\} = \{1\}$ e daí,

$$p^{-1}(\bar{x}_0) = G(x_0) \simeq \frac{G}{G_{x_0}} \simeq \frac{G}{\{1\}} \simeq G$$

e logo, o número de elemento de $p^{-1}(\bar{x}_0)$ coincide com $|G|$. Além disso, a fibra $p^{-1}(\bar{x}_0)$ é discreta e fechada (ver [21]). Suponhamos que $p^{-1}(\bar{x}_0)$ seja infinita. Como X é compacto, pela propriedade de Bolzano-Weierstrass, tal fibra possui um ponto de acumulação, o que é absurdo, pois $p^{-1}(\bar{x}_0)$ é discreta. Deste modo, $p^{-1}(\bar{x}_0)$ é finita e, portanto, G é finito. $\square$

Exemplo 1.3.8 *Sejam $G = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g; \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle$ e g um número inteiro maior ou igual a 1. Temos que G é o conjunto com geradores $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ e $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$ é a única relação, onde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$. Além disso, G é infinito (ver [[26], 6.4.3]). Temos ainda que G é o grupo fundamental da superfície orientada Y de genus g (ou seja, Y é soma conexa de g toros).*

Agora, vamos mostrar que Y é um $K(G,1)$ -complexo. Seja $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ o recobrimento universal de Y . Como G é infinito e $\tilde{Y}$ é um G -complexo livre, então segue do Lema anterior que $\tilde{Y}$ não é compacto. Logo, $\tilde{Y}$ é uma superfície conexa que não é compacta. Daí, por [[13], Corolário 22.25, pg. 166], temos que $H_2(\tilde{Y}) = 0$. Como $H_k(\tilde{Y}) = 0$ para $k > 2$ (já que $\dim \tilde{Y} = 2$), segue que Y é um $K(G,1)$ -complexo.

Exemplo 1.3.9 *Seja $G = \langle c_1, \dots, c_k; \prod_{i=1}^k c_i^2 = 1 \rangle$. Temos que G é o grupo fundamental de uma superfície fechada e não-orientável de genus k , com $k \geq 2$ (ou seja, Y é soma conexa de k planos projetivos). De maneira análoga ao exemplo anterior, temos Y um $K(G,1)$ -complexo.*

1.4 O Grau de uma aplicação $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$

Considere $n \geq 1$ um inteiro e $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ uma aplicação contínua. Sabemos que

$$H_i(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, n \\ \{0\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Escolha α um gerador de $H_n(\mathbb{S}^n)$. Note que o homomorfismo induzido $f_* : H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$ é da forma $f_*(\alpha) = m\alpha$ para algum inteiro m . Mais ainda, como $H_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$ então existem somente duas escolhas possíveis para o gerador (α e $-\alpha$) e disto segue que o inteiro m independe da escolha do gerador, pois

$$f_*(-\alpha) = -f_*(\alpha) = -m\alpha = m(-\alpha).$$

Definição 1.4.1 *O inteiro m definido anteriormente é denominado **grau de f** , denotado por $\deg(f)$.*

Este inteiro também é muitas vezes referido como o **grau de Brouwer** como resultado de seus esforços em desenvolver tal ideia.

Vejamos agora algumas propriedades do grau de uma aplicação f . Tais resultados podem ser encontrados em [[30], pg. 25].

- (a) $\deg(id_{\mathbb{S}^n}) = 1$;
- (b) Se $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ são aplicações contínuas então $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$;
- (c) Se $k_c : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ dada por $k_c(x) = c$ é uma aplicação constante, então $\deg(k_c) = 0$;
- (d) Se $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ são aplicações homotópicas então $\deg(f) = \deg(g)$;
- (e) Se $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma equivalência homotópica então $\deg(f) = \pm 1$;
- (f) Para cada $m \in \mathbb{Z}$ existe $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ contínua tal que $\deg(f) = m$, quando $n > 0$.

Todas estas propriedades são resultados da Teoria de Homologia, e são facilmente obtidas. Uma propriedade bem mais sofisticada é o seguinte resultado da Teoria de Homotopia de Hopf:

Teorema 1.4.1 (Teorema de Hopf) *Se $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ são aplicações contínuas tais que $\deg(f) = \deg(g)$ então f e g são homotópicas.*

Demonstração: Ver [[24], pg. 51]. □

Dessa forma, o grau é um invariante algébrico completo para o estudo de classes de homotopia de aplicações de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{S}^n$.

1.5 O Número de Lefschetz

Definição 1.5.1 *Seja n um inteiro positivo. Uma **variedade n -dimensional** M é um espaço de Hausdorff tal que para cada ponto de M , existe uma vizinhança aberta do ponto em M homeomorfa ao disco n -dimensional do $\mathbb{R}^n$.*

*Uma variedade Y é dita **fechada** se for compacta e sem bordo.*

*Além disso, dizemos que uma variedade Y é **asférica** se for conexa por caminhos e $\pi_i(Y) = \{0\}$ quando $i \geq 2$.*

Observação 1.5.1 *Equivalentemente, podemos dizer que uma variedade Y é asférica se tem o mesmo tipo de homotopia de um $K(G, 1)$ -complexo, onde $G = \pi_1(Y)$.*

Sejam M uma variedade fechada de dimensão M e $f : M \rightarrow M$ uma aplicação contínua. Então, para cada inteiro k , existe o homomorfismo induzido em homologia $f_k : H_k(M) \rightarrow H_k(M)$. Como $H_k(M)$ é um grupo abeliano finitamente gerado, então

$$H_k(M) = (\text{parte livre}(H_k(M)) \oplus (\text{parte de torção}(H_k(M)))$$

e logo, $H_k(M) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus T$. Considere agora a seguinte aplicação:

$$\overline{f}_k : \frac{H_k(M)}{T} \rightarrow \frac{H_k(M)}{T}.$$

Desta forma, teremos $\overline{f}_k : \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ e assim, temos uma matriz associada a $\overline{f}_k$. Seja $tr(f_k)$ o traço desta matriz.

Definição 1.5.2 *Definimos o **número de Lefschetz de f** por*

$$\Lambda_f = \Lambda(f) = \sum_{k=0}^m (-1)^k tr(f_k).$$

Observação 1.5.2 *O número de Lefschetz Λ_f independe das escolhas envolvidas e logo, está bem definido, dependendo somente da classe de homotopia de f .*

Teorema 1.5.1 *(Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz:) Se $\Lambda_f \neq 0$ então f possui um ponto fixo.*

Demonstração: Ver [[30], pg. 187].

□

1.6 Teorema dos Coeficientes Universais e Fórmula de Kunneth

Para esta seção, utilizaremos os conceitos de produto cross e produto cup para cohomologia de espaços topológicos como definidos na referência [[6], Capítulo 3, §3]. Denotaremos os produtos cross e cup, respectivamente, por $\times$ e $\cup$.

Teorema 1.6.1 (*Teorema dos Coeficientes Universais para cohomologia:*) *Sejam C um complexo de cadeia de grupos abelianos com grupo de homologia $H_n(C)$ e $\text{Hom}(C_n, M)$ o complexo de cocadeia com grupos de cohomologia $H^n(C; M)$. Então, para cada nível, a sequência*

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C), M) \rightarrow H^n(C; M) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C), M) \rightarrow 0$$

é exata e cinde.

Demonstração: Ver [[6], Teorema 2.29, pg. 44]. □

Corolário 1.6.1 *Se o grupo $H_{n-1}(C)$ é finitamente gerado e livre, então $H^n(C; M) \simeq \text{Hom}(H_n(C); M)$.*

Demonstração: O resultado segue diretamente do fato de que se $H_{n-1}(C)$ é finitamente gerado e livre, temos $\text{Ext}(H_{n-1}(C), M) = 0$. □

Corolário 1.6.2 *Se os grupos de homologia $H_n(C)$ e $H_{n-1}(C)$ do complexo de cadeias de grupos abelianos C são finitamente gerados, com grupos de torção $T_n \subset H_n(C)$ e $T_{n-1} \subset H_{n-1}(C)$, então*

$$H^n(C; \mathbb{Z}) \simeq \frac{H_n(C)}{T_n} \oplus T_{n-1}.$$

Demonstração: Ver [[14], Corolário 3.3, pg. 196]. □

Teorema 1.6.2 (Fórmula de Kunneth): *Sejam F um corpo e X um espaço topológico tal que $\text{posto}(H_q(X; F)) < \infty$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. Então, para qualquer espaço Y , existe um isomorfismo natural*

$$\sum_{p+q=n} H^p(X; F) \otimes_F H^q(Y; F) \rightarrow H^n(X \times Y; F)$$

$$\sum_{p+q=n} u_p \otimes v_q \mapsto \sum_{p+q=n} u_p \times v_q$$

Demonstração: Ver [[30], Teorema 5.16, pg. 141]. □

Observação 1.6.1 *Se $p_X : X \times Y \rightarrow X$ e $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$ são as projeções canônicas, $u \in H^p(X; F)$ e $v \in H^q(X; F)$, pode-se mostrar que*

$$u \times v = p_X^*(u) \cup p_Y^*(v).$$

onde $\times$ e $\cup$ representam, respectivamente, os produtos cross e cup em cohomologia de espaços topológicos. Em vista da Fórmula de Kunneth, segue que os elementos de $H^n(X \times Y; F)$ são da forma $\sum_{p+q=n} p_X^(u_p) \cup p_Y^*(v_q)$.*

Cohomologia de Grupos Finitos

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados referentes a cohomologia de grupos finitos, que será de grande relevância para o desenvolvimento dos próximos capítulos, particularmente no estudo de (H, G) -coincidências de aplicações. Algumas demonstrações de resultados apresentados neste capítulo foram omitidas, tendo em vista que o enfoque deste maior deste trabalho é o detalhamento de [11]. Contudo, os resultados deste capítulo podem ser encontrados nas referências [1] e [3].

2.1 (Co)homologia de Grupos

Sejam G um grupo e M um RG -módulo (à esquerda).

Definição 2.1.1 *O grupo dos coinvariantes de M , o qual denotaremos por M_G , é dado por $M_G = M/A$, onde A é o subgrupo aditivo tal que $A = \langle gm - m; g \in G \text{ e } m \in M \rangle$.*

Observação 2.1.1 *O nome "coinvariantes" vem do fato de M_G ser o maior quociente de M no qual G atua trivialmente.*

Proposição 2.1.1 *$M_G \simeq R \otimes_{RG} M$, onde R é visto como um RG -módulo (à direita) com G -ação trivial.*

Demonstração: Note que, em $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, temos a identidade

$$1 \otimes gm = g(1 \otimes m) = 1g \otimes m = 1 \otimes m, \text{ para todo } g \in G.$$

Sendo assim, existe uma aplicação $\varphi : M_G \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ de modo que $\varphi(\overline{m}) = 1 \otimes m$. Vejamos que a aplicação φ está bem definida. Considere $m, n \in M$ tais que $\overline{m} = \overline{n}$, ou seja, $n - m \in A$,

de onde segue que $n - m = \sum_{i=1}^r g_i m_i - \sum_{i=1}^r m_i$. Assim, como vimos que $1 \otimes g_i m_i = 1 \otimes m_i$ então concluímos $\varphi(\overline{m}) = \varphi(\overline{n})$ e portanto φ esta bem definida. Além disso, como

$$\varphi(\overline{m} + \overline{n}) = 1 \otimes (m + n) = 1 \otimes m + 1 \otimes n = \varphi(\overline{m}) = \varphi(\overline{n})$$

então φ é também um homomorfismo. Agora, podemos definir a aplicação $\psi : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow M_G$ por $\psi(a \otimes m) = \overline{m} + \dots + \overline{m}$ (a -vezes). A aplicação ψ é homomorfismo de módulos e mais ainda, $\psi = \varphi^{-1}$.

Desta forma, φ é isomorfismo e assim, $M_G \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ e portanto, sabendo que $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq R \otimes_{RG} M$, temos $R \otimes_{RG} M \simeq M_G$. $\square$

Definição 2.1.2 *Seja M um RG -módulo (à esquerda). O **grupo dos invariantes de M** , denotado por M^G , é dado por*

$$M^G = \{m \in M; \quad gm = m, \text{ para todo } g \in G\}.$$

Proposição 2.1.2 *$\text{Hom}_{RG}(R, M) \simeq M^G$, onde R é um RG -módulo com G -ação trivial.*

Demonstração: Primeiro, defina a aplicação $\psi : \text{Hom}_{RG}(R, M) \rightarrow M^G$ por $\psi(f) = f(1)$. A aplicação ψ esta bem definida, pois dado $f \in \text{Hom}_{RG}(R, M)$ e $g \in G$, $g\psi(f) = gf(1) = f(g1) = f(1)$ já que $1 \in R$ e a G -ação sobre R é trivial. Logo $\psi(f) \in M^G$ e portanto ψ esta bem definida. Mais ainda, claramente ψ é um homomorfismo. Agora, considere $\phi : M^G \rightarrow \text{Hom}_{RG}(R, M)$ por $\phi(m) = f : R \rightarrow M$ tal que $f(r) = (re)m$ (ou seja, $f(1) = (1e)m = 1m = m$). A aplicação ϕ também esta bem definida e é homomorfismo grupos. Além disso, $\phi = \psi^{-1}$ e portanto $\text{Hom}_{RG}(R, M) \simeq M^G$. $\square$

Seja R um anel comutativo com unidade e considere o anel grupo RG . Antes de definirmos (co)homologia de grupos, vamos considerar alguns resultados importantes sobre $\otimes_{RG}$ e Hom_{RG} .

Definição 2.1.3 *Sejam M e N RG -módulos. Então M e N são naturalmente R -módulos. A **G -ação diagonal**, definida em $M \otimes_R N$, é dada por $g \cdot (m \otimes n) = gm \otimes gn$, para todo $g \in G$, $m \in M$ e $n \in N$.*

Proposição 2.1.3 *Sejam M e N RG -módulos (à esquerda). Temos*

$$M \otimes_{RG} N = (M \otimes_R N)_G := \frac{M \otimes_R N}{A},$$

onde $A = \langle gm \otimes gn - m \otimes n; \quad m \otimes n \in M \otimes_R N \text{ e } g \in G \rangle$.

Demonstração: Veremos agora como podemos obter $M \otimes_{RG} N$ a partir de $M \otimes_R N$. Consideremos em $M \otimes_R N$ a seguinte relação: $(m * g) \otimes n \sim m \otimes (gn)$, para todo $m \in M$ e para todo $g \in G$. Mas vendo M como um RG -módulo (à direita), temos que $m * g = g^{-1}m$ e assim, $(m * g) \otimes n = (g^{-1}m) \otimes n$. Logo $\overline{(g^{-1}m) \otimes n} = \overline{m \otimes (gn)}$ e portanto

$$M \otimes_{RG} N = \frac{M \otimes_R N}{\sim}.$$

Mais ainda, note que como $\overline{(g^{-1}m) \otimes n} = \overline{m \otimes (gn)}$, então segue que $\overline{m \otimes n} = \overline{(gm) \otimes (gn)}$. Definimos então a G -ação em $M \otimes_R N$ por $g \cdot (m \otimes n) = gm \otimes gn$. Consideremos em $M \otimes_R N$ tal ação e A o subgrupo aditivo gerado pelos elementos da forma $g \cdot (m \otimes n) - m \otimes n$. Assim, em $(M \otimes_R N)_G = M \otimes_R N / A$, estamos identificando elementos da forma $gm \otimes gn$ com $m \otimes n$ para todo $m \in M$, $n \in N$ e $g \in G$. Mas isto equivale a identificar $(g^{-1}m) \otimes n = (m * g) \otimes n$ com $m \otimes gn$ e, deste modo,

$$(M \otimes_R N)_G = \frac{M \otimes_R N}{A} \simeq \frac{M \otimes_R N}{\sim} = M \otimes_{RG} N.$$

□

Corolário 2.1.1 $M \otimes_{RG} N \simeq N \otimes_{RG} M$.

Demonstração: $M \otimes_{RG} N \simeq (M \otimes_R N)_G \simeq (N \otimes_R M)_G \simeq N \otimes_{RG} M$.

□

Sejam M e N RG -módulos (à esquerda) e consideremos $\text{Hom}_R(M, N)$. A ação de G em M e N induz uma ação de G em $\text{Hom}_R(M, N)$ dada por

$$\begin{aligned} G \times \text{Hom}_R(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_R(M, N) \\ (g, f) &\mapsto g \cdot f \end{aligned}$$

tal que $(g \cdot f)(x) = gf(g^{-1}x)$, com $g \in G$, $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ e $x \in M$.

Observação 2.1.2 O uso de g^{-1} para definir a ação é necessário devido à contravariância do funtor Hom na primeira variável. Compensamos esta contravariância, convertendo M a um RG -módulo à direita, considerando $x * g = g^{-1}x$. Deste modo, a ação fica $(g \cdot f)(x) = gf(g^{-1}x) = gf(x * g)$. Assim, $\text{Hom}_R(M, N)$ será um RG -módulo (à esquerda).

Proposição 2.1.4 $\text{Hom}_{RG}(M, N) = (\text{Hom}_R(M, N))^G$.

Demonstração: Seja $\text{Hom}_{RG}(M, N) = \{f \in \text{Hom}_R(M, N); gf(x) = f(gx)\}$, ou seja, f é G -equivariante. Assim,

$$\begin{aligned} f \in \text{Hom}_{RG}(M, N) &\Rightarrow (g \cdot f)(x) = gf(g^{-1}x) = f(gg^{-1}x) = f(x), \text{ para todo } x \in M \\ &\Rightarrow f \in (\text{Hom}_R(M, N))^G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f \in (\text{Hom}_R(M, N))^G &\Rightarrow g \cdot f = f, \text{ para todo } g \in G \\
&\Rightarrow f(gx) = (gg^{-1})f(gx) = g(g^{-1}f(gx)) = g \cdot (g^{-1} \cdot f)(x) = f(x) \\
&\Rightarrow f \in \text{Hom}_{RG}(M, N)
\end{aligned}$$

Logo, $\text{Hom}_{RG}(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)^G$. □

Agora, veremos a definição de (co)homologia de um grupo G , na qual consideraremos o caso em que $R = \mathbb{Z}$.

Definição 2.1.4 *Seja G um grupo e considere $\dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo (à esquerda). Podemos formar os **complexos de cadeia e cocadeia***

$$F \otimes_{\mathbb{Z}G} M : \dots \rightarrow F_n \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{\partial}_n} F_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{\partial}_{n-1}} \dots \rightarrow F_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow 0$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M) : 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_0, M) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_1, M) \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_n, M) \xrightarrow{\delta^n} \dots$$

nos quais o **operador bordo** é dado por $\bar{\partial}_n := \partial_n \otimes \text{id}_M$ e o **operador cobordo** por $\delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1}$.

(a) O n -ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em M é definido por $H_n(G; M) := H_n(F \otimes_{\mathbb{Z}G} M)$.

(b) O n -ésimo grupo de cohomologia de G com coeficientes em M é definido por $H^n(G; M) := H^n(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M))$.

Observação 2.1.3 *As definições de $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$ independem da resolução projetiva $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ escolhida (a menos de um isomorfismo canônico). De fato, se $\varepsilon' : F' \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma outra resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, então pelo Teorema 1.2.1 segue que $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ e $\varepsilon' : F' \rightarrow \mathbb{Z}$ são homotopicamente equivalentes e disto conclui-se a independência da resolução projetiva tomada.*

Perceba que, tomando $M = \mathbb{Z}$ com a G -ação trivial, temos

$$H_*(G; \mathbb{Z}) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) = H_*((F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})_G) \simeq H_*(F_G).$$

Proposição 2.1.5 *Dado um $\mathbb{Z}G$ -módulo M , temos os seguintes isomorfismos:*

$$H_0(G; M) \simeq M_G \text{ e } H^0(G; M) \simeq M^G.$$

Demonstração: Ver [[3], pg. 57 e 58]. □

Exemplo 2.1.1 *Seja G um grupo cíclico infinito com gerador t . Pelo exemplo 1.2.1, sabemos que $\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ (onde $\partial_1(\alpha) = (t-1)\alpha$). Vamos calcular $H_*(G; M)$. Tensorizando a resolução por M sobre $\mathbb{Z}G$, temos*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{\partial}_2} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow 0.$$

Temos o seguinte isomorfismo: $\varphi : M \rightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ tal que $\varphi(m) = 1 \otimes m$. Como $\bar{\partial}_1 = \partial_1 \otimes id$ então, através do isomorfismo φ , obtemos o seguinte complexo: $0 \rightarrow M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} M \xrightarrow{\bar{\partial}_0} 0$, onde $\bar{\bar{\partial}}_1 = \varphi^{-1} \circ \bar{\partial}_1 \circ \varphi$. Assim,

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\partial}}_1(m) &= (\varphi^{-1} \circ \bar{\partial}_1 \circ \varphi)(m) = \varphi^{-1}(\bar{\partial}_1(\varphi(m))) = \varphi^{-1}(\bar{\partial}_1(1 \otimes m)) \\ &= \varphi^{-1}((t-1)1 \otimes m) = (t-1)\varphi^{-1}(1 \otimes m) = (t-1)m \end{aligned}$$

Daí, $H_(G; M)$ é a homologia do complexo $0 \rightarrow M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} M \xrightarrow{\bar{\partial}_0} 0$. Logo,*

$$H_i(G; M) = \begin{cases} M_G, & i = 0 \\ \frac{Ker(t-1)}{\{0\}} = \{m \in M; (t-1)m = 0\} = \{m \in M; tm = m\} = M^G, & i = 1 \\ \{0\}, & i \geq 2 \end{cases}$$

Repare que $H^0(G; M) = M^G = H_1(G; M)$. Agora, vamos calcular $H^(G; M)$. Aplicando $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, M)$ na resolução projetiva tomada, obtemos*

$$0 \rightarrow Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta_0} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \rightarrow 0,$$

onde $\delta_0(f)(x) = (f \circ \partial_1)(x) = f((t-1)x) = (t-1)f(x)$. Temos o seguinte isomorfismo: $\psi : Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \rightarrow M$ tal que $\psi(f) = f(1)$. Usando este isomorfismo, temos o complexo $0 \rightarrow M \xrightarrow{\bar{\delta}_0} M \rightarrow 0$, onde $\bar{\delta}_0(m) = (\psi \circ \delta_0 \circ \psi^{-1})(m) = \psi(\delta_0(\psi^{-1}(m))) = \psi((t-1)\psi^{-1}(m)) = (t-1)(\psi^{-1} \circ \psi)(m) = (t-1)m$. Assim, $H^(G; M)$ é a cohomologia de $0 \rightarrow M \xrightarrow{\bar{\delta}_0} M \rightarrow 0$ e então*

$$H^i(G; M) = \begin{cases} M^G, & i = 0 \\ \frac{\text{Ker}(0)}{\text{Im}(t-1)} = \frac{M}{(t-1)M} = M_G, & i = 1 \\ \{0\}, & i \geq 2 \end{cases}$$

Note que $H^1(G; M) = M_G = H_0(G; M)$.

Lema 2.1.1 (Lema de Shapiro): Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}H$ -módulo. Temos os seguintes isomorfismos:

- (1) $H_*(H; M) \simeq H_*(G; RG \otimes_{RH} M)$;
- (2) $H^*(H; M) \simeq H^*(G; \text{Hom}_{RH}(RG, M))$.

Demonstração: Ver [[3], Proposição 6.2, pg. 73]. □

Proposição 2.1.6 (Interpretação topológica da (co)homologia de um grupo) Sejam G um grupo, Y um $K(G, 1)$ -complexo e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Então

$$H_*(G; M) \simeq H_*(Y; \mathcal{M}) \text{ e } H^*(G; M) \simeq H^*(Y; \mathcal{M}),$$

onde $\mathcal{M}$ é um sistema de coeficientes locais em Y associado ao $\mathbb{Z}G$ -módulo M . Em particular, se a G -ação em M é trivial então $\mathcal{M} = M$.

Demonstração: Ver [[3], pg. 59]. □

Exemplo 2.1.2 Pelo Exemplo 1.3.9, sabemos que $\mathbb{S}^1$ é um $K(\mathbb{Z}, 1)$ -complexo. Logo, temos

$$H_i(\mathbb{Z}) \simeq H_i(\mathbb{S}^1) \simeq H^i(\mathbb{S}^1) \simeq H^i(\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 1 \\ \{0\}, & i \geq 2 \end{cases}$$

Exemplo 2.1.3 Pelo exemplo 1.3.7, temos $\mathbb{T}^2$ um $K(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 1)$ -complexo e desta forma,

$$H_i(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \simeq H_i(\mathbb{T}^2) \simeq H^i(\mathbb{T}^2) \simeq H^i(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & i = 1 \\ \{0\}, & i \geq 3 \end{cases}$$

A seguir, segue dois corolários do Teorema 1.6.1.

Corolário 2.1.2 (Fórmula dos Coeficientes Universais): Seja G um grupo. Então

$$H^{m+1}(G; \mathbb{Z}) = \text{parte livre}(H_{m+1}(G; \mathbb{Z})) \oplus \text{parte de torção}(H_m(G; \mathbb{Z})).$$

Demonstração: Este resultado segue diretamente do Corolário 1.6.2, onde o complexo de cadeias considerado é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. $\square$

2.2 Produtos Cross e Cup em cohomologia de grupos

Sejam M e N dois $\mathbb{Z}G$ -módulos. Se $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, então $\varepsilon \otimes \varepsilon : F \otimes_{\mathbb{Z}G} F \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}(G \times G)$ (para detalhes, ver [[3], Proposição 1.1, pg. 107]).

Agora, considere $f \in \text{Hom}_G(F, M)$ e $g \in \text{Hom}_G(F, N)$. Definimos $f \times g \in \text{Hom}_{G \times G}(F \otimes F, M \otimes N)$ por

$$(f \times g)(x \otimes y) = (-1)^{pq} f(x) \otimes g(y),$$

onde $x \in F_p$ e $y \in F_q$.

Definição 2.2.1 *Em cohomologia temos um produto induzido, chamado **produto cross** dado por:*

$$\begin{aligned} H^p(G; M) \otimes H^q(G; N) &\xrightarrow{\times} H^{p+q}(G \times G; M \otimes N) \\ [f] \otimes [g] &\mapsto [f \times g] \end{aligned}$$

Sejam G um grupo e $d : G \rightarrow G \times G$ a aplicação diagonal dada por $d(g) = (g, g)$.

Definição 2.2.2 *A composta*

$$H^p(G; M) \otimes H^q(G; N) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(G \times G; M \otimes N) \xrightarrow{d^*} H^{p+q}(G; M \otimes N)$$

é denominado **produto cup** e é denotado por $\cup$. Assim, dados $[f] \in H^p(G; M)$ e $[g] \in H^q(G; N)$, temos $[f] \cup [g] := d^*([f \times g])$.

Agora, vejamos algumas propriedades do produto cup (para detalhes, ver [[3], pg. 110 e 111]):

(1) Dimensão 0: O produto cup $H^0(G; M) \otimes H^0(G; N) \rightarrow H^0(G; M \otimes N)$ é a aplicação $M^G \otimes N^G \rightarrow (M \otimes N)^G$ induzida pelas inclusões $M^G \hookrightarrow M$ e $N^G \hookrightarrow N$.

(2) Naturalidade com respeito ao homomorfismo de coeficientes: Dadas aplicações de G -módulos $f : M \rightarrow M'$ e $g : N \rightarrow N'$ e elementos $u \in H^*(G; M)$ e $v \in H^*(G; N)$, temos

$$(f \otimes g)_*(u \cup v) = f_*(u) \cup g_*(v)$$

em $H^*(G; M \otimes N)$, com $f_* = H^*(G, f)$ e $g_* = H^*(G, g)$ (ambos fixam os elementos de G).

(3) Compatibilidade com δ : Sejam $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de G -módulo e seja N um G -módulo tal que a sequência $0 \rightarrow M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0$

é exata. Então temos $\delta(u \cup v) = \delta(u) \cup v$ para todo $u \in H^p(G; M)$ e $v \in H^q(G; N)$. Em outras palavras, o quadrado

$$\begin{array}{ccc} H^p(G; M'') & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}(G; M') \\ \downarrow -\cup v & & \downarrow -\cup v \\ H^{p+q}(G; M'' \otimes N) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+q+1}(G; M' \otimes N) \end{array}$$

comuta.

Similarmente à esta propriedade, pode-se verificar que

(3') Se $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta de forma que a sequência curta $0 \rightarrow M \otimes N' \rightarrow M \otimes N \rightarrow M \otimes N'' \rightarrow 0$ é exata, então $\delta(u \cup v) = (-1)^p u \cup \delta(v)$ em $H^{p+q+1}(G; M \otimes N')$ para todo $u \in H^p(G; M)$ e $v \in H^q(G; N')$.

(4) Existência de identidade: O elemento $1 \in H^0(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ satisfaz $1 \cup u = u = u \cup 1$ para todo $u \in H^*(G; M)$, onde tomamos a identificação $\mathbb{Z} \otimes M = M = M \otimes \mathbb{Z}$ dos módulos de coeficiente.

(5) Associatividade: Dados $u_i \in H^*(G; M_i)$, onde $i = 1, 2, 3$, temos $(u_1 \cup u_2) \cup u_3 = u_1 \cup (u_2 \cup u_3)$ em $H^*(G; M_1 \otimes M_2 \otimes M_3)$.

(6) Comutatividade: Para todo $u \in H^p(G; M)$ e todo $v \in H^q(G; N)$, vale a igualdade $u \cup v = (-1)^{pq} t_*(v \cup u)$, onde $t : N \otimes M \rightarrow M \otimes N$ é o isomorfismo canônico.

Das propriedades anteriores, segue que $H^*(G; \mathbb{Z})$ é um anel graduado anti-comutativo. Mais ainda, segue que $H^*(G; M)$ é um $H^*(G; \mathbb{Z})$ -módulo graduado. De fato, basta definir o produto por escalares

$$\begin{aligned} H^*(G; \mathbb{Z}) \times H^*(G; M) &\rightarrow H^*(G; \mathbb{Z} \otimes M) = H^*(G; M) \\ (\alpha, u) &\mapsto \alpha \cup u \end{aligned}$$

2.3 Deslocamento de Dimensões

Dado um módulo M , considerem $\overline{M} = \mathbb{Z}G \otimes M$ e a aplicação sobrejetora $\varphi : \overline{M} \rightarrow M$ dada por $\varphi(\alpha \otimes m) = \alpha m$. É possível verificar (utilizando a sequência exata longa de homologia) que, sendo $K = \text{Ker} \varphi$,

$$H_n(G; M) \simeq \begin{cases} H_{n-1}(G; K), & n > 1 \\ \text{Ker}\{H_0(G; K) \rightarrow H_0(G; \overline{M})\}, & n = 1 \end{cases}$$

Disto segue que, para calcularmos H_n podemos, em um primeiro momento, nos reduzir a calcular H_{n-1} , desde que estejamos dispostos a mudar o módulo de coeficientes. Se continuarmos este processo, eventualmente reduziremos o problema ao cálculo de H_0 .

De maneira análoga, considerando $\overline{M} = \text{Hom}(\mathbb{Z}G; M)$ e a aplicação injetora $\psi : M \rightarrow \overline{M}$ dada por $\psi(m)(\alpha) = \alpha m$, então é possível obter que, sendo $C = \text{Coker} \psi$,

$$H^n(G; M) \simeq \begin{cases} H^{n-1}(G; C), & n > 1 \\ \text{Coker}\{H^0(G; \overline{M}) \rightarrow H^0(G; C)\}, & n = 1 \end{cases}$$

2.4 Grupos atuando em esferas

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados referentes a ação de um grupo finito em uma esfera.

Vimos anteriormente que se X é um G -complexo livre compacto, então G é finito. Assim, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.4.1 *O grupo com dois elementos $\mathbb{Z}_2$ é o único grupo não trivial que atua livremente em uma esfera de dimensão par $\mathbb{S}^{2k}$.*

Demonstração: Sejam G um grupo atuando livremente em $\mathbb{S}^{2k}$ e $f, g \in G$, com $f \neq id_{\mathbb{S}^{2k}} \neq g$. Como a ação de G sobre $\mathbb{S}^{2k}$ é livre, então $f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathbb{S}^{2k}$, de onde segue que f não possui pontos fixos. Mais ainda, como f é um homeomorfismo, então $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{S}^{2k}}$ e portanto, $deg(f)deg(f^{-1}) = 1$ e assim, $|deg(f)| = 1$. Suponha que $deg(f) = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \Lambda_f &= \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i tr(f_i) = (-1)^0 tr(f_0) + (-1)^{2k} tr(f_{2k}) \\ &= 1 + (-1)^{2k} deg(f) = 2 \end{aligned}$$

e daí, pelo Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz, f tem um ponto fixo, o que é um absurdo pois a G -ação é livre. Portanto, segue disto que $deg(f) = -1$. Desta forma, $deg(f \circ f) = deg(f)^2 = 1$ e assim, $\Lambda_{f^2} \neq 0$ e disto segue que f^2 tem um ponto fixo. Como a G -ação é livre, então temos $f^2 = id_{\mathbb{S}^{2k}}$.

Analogamente, $g^2 = id_{\mathbb{S}^{2k}}$. Assim, como $deg(f) = deg(g) = -1$ então $deg(f \circ g) = 1$ e assim, $\Lambda_{f \circ g} \neq 0$, de onde conclui-se que $f \circ g = id_{\mathbb{S}^{2k}}$. Mas como $f^2 = id_{\mathbb{S}^{2k}} = g^2$, então teremos $f = g$ e portanto, $G \simeq \mathbb{Z}_2$. $\square$

Observação 2.4.1 *Segue da Proposição anterior que se G é um grupo não trivial com pelo menos 3 elementos atuando livremente sobre uma esfera $\mathbb{S}^m$, então m é ímpar.*

Proposição 2.4.2 *Seja X um G -complexo livre homeomorfo a uma esfera de dimensão ímpar $\mathbb{S}^{2k-1}$. Então a ação de G sobre $H_{2k-1}(X)$ é trivial.*

Demonstração: Defina $\varphi_g : X \rightarrow X$ por $\varphi_g(x) = g \cdot x$. Como G atua livremente sobre X , então φ_g é um homeomorfismo não trivial se $g \neq 1$. Seja $\Lambda_{\varphi_g} = \sum_{i=0}^{2k-1} (-1)^i tr((\varphi_g)_i)$ o número de Lefschetz de φ_g . Caso $g \neq 1$, sabemos que φ_g não tem pontos fixos (pois a G -ação é livre)

e então segue do Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz que $\Lambda_{\varphi_g} = 0$. Por outro lado, como $\mathbb{S}^{2k-1} = e^0 \cup e^{2k-1}$ (ou seja, é composta por uma 0-célula e uma $(2k-1)$ -célula) então

$$0 = \Lambda_{\varphi_g} = \sum_{i=0}^{2k-1} (-1)^i \text{tr}((\varphi_g)_i) = \text{tr}(\varphi_g)_0 - \text{tr}(\varphi_g)_{2k-1}.$$

Além disso, como $\mathbb{S}^{2k-1} \simeq X$ então segue que X é conexo por caminhos e assim, temos $(\varphi_g)_0 = \text{id}_{\mathbb{S}^{2k-1}}$. Desta maneira, como $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$, teremos $\text{tr}((\varphi_g)_0) = 1$. Logo $\text{tr}((\varphi_g)_{2k-1}) = 1$ e logo, $(\varphi_g)_{2k-1} = \text{id}_{\mathbb{S}^{2k-1}}$ (pois $H_{2k-1}(X) \simeq \mathbb{Z}$). Portanto, G atua livremente em $H_{2k-1}(X)$. $\square$

2.5 Resoluções Periódicas via ações livres em esferas

Definição 2.5.1 Denominamos **esfera de homotopia de dimensão n** , e denotamos por Σ^n , um CW-complexo que tem o mesmo tipo de homotopia que uma esfera n -dimensional $\mathbb{S}^n$.

Veremos agora que, se um grupo finito G atua livremente em uma esfera de homotopia de dimensão ímpar, então podemos construir, através desta ação, uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e assim obtermos uma ferramenta para calcularmos a (co)homologia desse grupo.

Teorema 2.5.1 Seja G um grupo finito atuando livremente sobre uma esfera de homotopia Σ^m . Considere o complexo de cadeia celular aumentado de Σ^m , $\varepsilon : C_*(X) \rightarrow \mathbb{Z}$. Então a sequência

$$\dots \rightarrow C_m(\Sigma^m) \rightarrow \dots \rightarrow C_1(\Sigma^m) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Sigma^m) \xrightarrow{n \circ \varepsilon} C_m(\Sigma^m) \xrightarrow{\partial_m} \dots \rightarrow C_0(\Sigma^m) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

onde $n : H_m(\Sigma^m) \rightarrow C_m(\Sigma^m)$ é a inclusão, é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ que é periódica de período $m+1$.

Demonstração: De fato, como Σ^m é uma esfera de homotopia, então $\Sigma^m \equiv \mathbb{S}^m$ e logo $H_*(\Sigma^m) \simeq H_*(\mathbb{S}^m)$, ou seja,

$$H_n(\Sigma^m) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, m \\ \{0\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considere o complexo de cadeias celular de Σ^m :

$$0 \rightarrow C_m(\Sigma^m) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}(\Sigma^m) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(\Sigma^m) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Sigma^m) \rightarrow 0$$

onde $C_n(\Sigma^m) = 0$ para $n < 0$ ou $n > m$. Mais ainda, como $H_m(\Sigma^m) = \text{Ker}(\partial_m)/\text{Im}(\partial_{m+1}) \simeq \text{Ker}(\partial_m) \subset C_m(\Sigma^m)$, então temos $H_m(\Sigma^m) \hookrightarrow C_m(\Sigma^m)$ e sendo $H_m(\Sigma^m) \simeq \mathbb{Z}$, podemos considerar a inclusão $n : \mathbb{Z} \rightarrow C_m(\Sigma^m)$. Tome então a aplicação aumentação $\varepsilon : C_*(\Sigma^m) \rightarrow \mathbb{Z}$ e considere a sequência $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} C_m(\Sigma^m) \xrightarrow{\partial_m} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(\Sigma^m) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Sigma^m) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$. Vamos

verificar que esta sequência é exata. De fato, como para $0 < i < m$ temos $H_i(\Sigma^m) = 0$ então $Ker(\partial_i)/Im(\partial_{i+1}) = 0$, de onde segue que $Ker(\partial_i) = Im(\partial_{i+1})$. Além disso, como ε é sobrejora, segue do Teorema do Isomorfismo que $C_0(\Sigma^m)/Ker(\varepsilon) \simeq Im(\varepsilon) = \mathbb{Z}$. Considere agora o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(\Sigma^m) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(\Sigma^m) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \partial_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

e perceba que, como $\mathbb{Z} \simeq H_0(\Sigma^m)$, então temos $C_0(\Sigma^m)/Im(\partial_1) \simeq C_0(\Sigma^m)/Ker(\varepsilon)$ e logo $Ker(\varepsilon) \simeq Im(\partial_1)$. Mais ainda, note que $Im(\partial_1) \subset Ker(\varepsilon)$ pois dada uma 1-célula σ^1 , temos $\partial_1(\sigma^1) = x_1 - x_0$ e assim $\varepsilon(\partial_1(\sigma^1)) = \varepsilon(x_1 - x_0) = 1 - 1 = 0$ e desta maneira,

$$\varepsilon \left(\partial_1 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i^1 \right) \right) = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n \partial_1(\sigma_i^1) \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon(\partial_1(\sigma_i^1)) = 0$$

e portanto $Im(\partial_1) = Ker(\varepsilon)$. Assim, a partir da sequência anterior podemos construir uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ (onde a ação de G sobre $C_n(\Sigma^m)$ é celular, induzida da ação livre de G sobre Σ^m).

Agora, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} C : \dots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(\Sigma^m) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(\Sigma^m) & \xrightarrow{n \circ \varepsilon} & C_m(\Sigma^m) \xrightarrow{\partial_m} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(\Sigma^m) \\ & & & & \searrow \varepsilon & \nearrow n & \downarrow \partial_1 \\ & & & & \mathbb{Z} & & C_0(\Sigma^m) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Já vimos que $Im(\partial_1) = Ker(\varepsilon)$ e, além disso, $Ker(n \circ \varepsilon) = Ker(\varepsilon)$ (pois n é injetora) e $Im(n \circ \varepsilon) = Im(n) = Ker(\partial_m)$ (pois ε é sobrejetora). Desta forma, segue que o diagrama anterior fornece uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ periódica de período $d = m + 1$. $\square$

Exemplo 2.5.1 Consideremos G um grupo cíclico finito com gerador t e $R = \mathbb{Z}G$. Então

$$H_i(G; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ \mathbb{Z}_n, & i \text{ é ímpar} \\ \{0\}, & i \text{ é par} \end{cases} \quad e \quad H^i(G; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ \{0\}, & i \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_n, & i \text{ é par} \end{cases}$$

Consideremos $\mathbb{S}^1$ vista como um CW-complexo com n vértices (que podem ser identificados com as n -raízes da unidade) e n 1-células. Vamos denotar $v_i = e_i^0$ e $e_i = (v_i, v_{i+1})$ as 1-células de $\mathbb{S}^1$. Assim, tendo em vista que $G = \langle t \rangle = \{t^k; 0 \leq k \leq n-1\}$, podemos definir a G -ação em $\mathbb{S}^1$ por $G \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ de modo que $t_k.v_i = v_{k+i}$ e $t_k.e_i = e_{k+i}$, onde $i = 0, \dots, n-1$. Por esta ação, G atua livremente em $\mathbb{S}^1$ como grupo de rotações. Além disso, como $v_i = t^i.v_0$ e $e_i = t^i.e_0$,

então existe uma única órbita de 0-células e uma única órbita de 1-células, de onde segue que $C_0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}G \simeq C_1(\mathbb{S}^1)$. Deste modo, temos a sequência exata $0 \rightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$. Mas

$$\mathbb{Z} \simeq H_1(\mathbb{S}^1) = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} \simeq \text{Ker}(\partial_1).$$

Assim, considerando $n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}G$ como sendo o homomorfismo inclusão, obtemos a sequência exata $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ e daí $\dots \rightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{n \circ \varepsilon} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{n \circ \varepsilon} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Agora, vamos determinar as aplicações ∂_1 e $n \circ \varepsilon$. Temos $\partial_1(e_0) = v_1 - v_0 = t.v_0 - v_0 = (t-1).v_0$ e logo, ∂_1 é a multiplicação por $(t-1)$. Considere $N = 1 + t + \dots + t^{n-1}$. Como $\mathbb{Z} \simeq H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \text{Ker}(\partial_1)$ e

$$\partial_1(N(e_0)) = (1 + t + \dots + t^{n-1})\partial_1(e_0) = (1 + t + \dots + t^{n-1})(t-1)v_0 = 0,$$

temos $N(e_0) \in \text{Ker}(\partial_1)$ e logo, $\langle N(e_0) \rangle \subset \text{Ker}(\partial_1)$. Agora, se $x = \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j e_0 \in \text{Ker}(\partial_1)$, teremos

$$\partial_1(x) = 0 \Rightarrow (a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1})(t-1).v_0 = 0,$$

de onde segue que $(a_{n-1} - a_0).v_0 + \dots + (a_{n-2} - a_{n-1})t^{n-1}.v_0 = 0$. Mas como $C_0(X)$ é um $\mathbb{Z}$ -módulo livre que tem como base as 0-células $\{v_0, t.v_0, \dots, t^{n-1}.v_0\}$, então $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1}$. Assim, $x = a_0(e_0 + t.e_0 + \dots + t^{n-1}.e_0) = a_0 N(e_0)$ e portanto, $\mathbb{Z} \simeq H_1(\mathbb{S}^1) = \text{Ker}(\partial_1) = \langle N(e_0) \rangle$. Como $\text{Im}(n \circ \varepsilon) = \text{Ker}(\partial_1) = \langle N(e_0) \rangle$, temos $(n \circ \varepsilon)(v_0) = N(e_0)$ e, deste modo, $(n \circ \varepsilon)(1) = N$. Logo, $n \circ \varepsilon$ é a multiplicação por N . Temos então os homomorfismos de $\mathbb{Z}G$ -módulos

- $\varepsilon : R \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\varepsilon \left(\sum_{i=0}^{n-1} r_i t^i \right) := \sum_{i=0}^{n-1} r_i$;
- $N : R \rightarrow R$ dada por $N(\alpha) := (1 + t + \dots + t^{n-1})\alpha$;
- $(t-1) : R \rightarrow R$ tal que $\alpha \mapsto (t-1)\alpha$.

É possível verificar que ε é sobrejetor, $\text{Ker}(\varepsilon) = \text{Im}(t-1) = \text{Ker}(N)$ e que $\text{Ker}(t-1) = \text{Im}(N)$. Consequentemente, obtemos a seguinte resolução periódica de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de período 2:

$$\dots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Vamos calcular $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$. Tensorizando a resolução por M , obtemos o complexo

$$\dots \xrightarrow{\bar{N}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{t}-1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{N}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{t}-1} \mathbb{Z}G \otimes M \rightarrow 0.$$

Através dos isomorfismos $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M$ o complexo anterior toma a forma $\dots \rightarrow M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M \rightarrow 0$. Assim, segue que

$$H_i(G; M) = \begin{cases} M_G, & i = 0 \\ \frac{Ker(t-1)}{\frac{ImN}{KerN}}, & i \text{ é ímpar} \\ \frac{Im(t-1)}{ImN}, & i \text{ é par} \end{cases}$$

Agora, aplicando $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, M)$ a resolução tomada, temos

$$0 \rightarrow Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\overline{t-1}} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\overline{N}} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \rightarrow \dots$$

e através dos isomorfismos $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \simeq M$ e $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \simeq M^G$, obtemos a resolução

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} \dots \text{ e desta maneira, temos}$$

$$H^i(G; M) = \begin{cases} M^G, & i = 0 \\ \frac{KerN}{\frac{Im(t-1)}{Ker(t-1)}}, & i \text{ é ímpar} \\ \frac{Ker(t-1)}{ImN}, & i \text{ é par} \end{cases}$$

Em particular, no caso $M = \mathbb{Z}$ (com G -ação trivial), temos $(t-1) = 0$ e $N = n$. Daí, $Ker(t-1) = \mathbb{Z}$, $Im(t-1) = \{0\} = KerN$ e $ImN = n\mathbb{Z}$, de onde segue que

$$H_i(G; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ \mathbb{Z}_n, & i \text{ é ímpar} \\ \{0\}, & i \text{ é par} \end{cases} \quad e \quad H^i(G; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ \{0\}, & i \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_n, & i \text{ é par} \end{cases}$$

2.6 Cohomologia de Tate

Usualmente, homologia e cohomologia de um grupo são vistas como tendo propriedades duais uma da outra. Contudo, quando o grupo é finito, mais do que propriedades duais, homologia e cohomologia tem propriedades bastante similares. Tate descobriu uma maneira de explorar as similaridades entre $H_*(G)$ e $H^*(G)$ para G finito. Ele demonstrou que existem um quociente $\tilde{H}^0$ de H^0 e $\tilde{H}_0$ de H_0 de modo que a sequência $\dots, H_2, H_1, \tilde{H}_0, \tilde{H}^0, H^1, H^2, \dots$ forme uma teoria (unificada) de cohomologia, denotada por $\hat{H}^*$, denominada Cohomologia de Tate. Nesta seção, apresentamos um pequeno resumo dessa teoria e algumas de suas propriedades.

Sejam $G = \{1 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ um grupo finito de ordem n e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Considere a aplicação $N : M \rightarrow M$ dada por $N(m) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} t_i \right) m$ para todo $m \in M$. Considere também

os conjuntos $M^G = \{m \in M; gm = m, \text{ para todo } g \in G\}$ e

$$M_G = \frac{M}{\langle gm - m; g \in G, m \in M \rangle}.$$

Proposição 2.6.1 *Com as notações anteriores, para todo $g \in G$ e $m \in M$ temos $N(gm) = N(m)$. Assim temos induzido um homomorfismo de grupos abelianos $\bar{N} : M_G \rightarrow M^G$ definido por $\bar{N}(\bar{u}) = N(u)$, com $\bar{u} \in M_G$.*

Demonstração: Seja $g \in G$. A aplicação $\varphi_g : G \rightarrow G$ definida por $\varphi_g(t_i) = t_i g$, para $i = 0, \dots, n-1$, é bijetora. Logo, para cada $i = 0, \dots, n-1$, existe um único k de modo que $t_i g = t_k$ e para cada $k = 0, \dots, n-1$, existe um único i tal que $t_i g = t_k$. Assim, para cada $g \in G$ e $m \in M$,

$$N(gm) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} t_i \right) (gm) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_i g) m = \left(\sum_{k=0}^{n-1} t_k \right) m = N(m).$$

Agora, considere $\bar{N} : M_G \rightarrow M^G$ definido por $\bar{N}(\bar{u}) = N(u)$. A aplicação $\bar{N}$ esta bem definida, pois $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ implica que $N(x_1) = N(x_2)$, de onde conclui-se que $\bar{N}(\bar{x}_1) = \bar{N}(\bar{x}_2)$. $\square$

Definição 2.6.1 *A aplicação $\bar{N} : M_G \rightarrow M^G$ dada por $\bar{N}(\bar{u}) = N(u)$ é chamada de **aplicação norma**.*

Definição 2.6.2 *Sejam G um grupo finito e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. A **cohomologia de Tate de G com coeficientes em M** é dada por*

$$\hat{H}^i(G, M) = \begin{cases} H^i(G, M), & \text{para } i > 0 \\ \text{Coker}(\bar{N}), & \text{para } i = 0 \\ \text{Ker}(\bar{N}), & \text{para } i = -1 \\ H_{-i-1}(G, M), & \text{para } i < -1 \end{cases}$$

onde $\bar{N} : M_G \rightarrow M^G$ é a aplicação norma.

Exemplo 2.6.1 *Se G é um grupo finito de ordem n , então $\hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_n$. De fato, como a ação de G sobre $\mathbb{Z}$ é trivial, então para todo $r \in \mathbb{Z}$, temos*

$$\bar{N}(r) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} t_i \right) r = t_0 r + \dots + t_{n-1} r = r + \dots + r = nr.$$

Assim, $\hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) = \text{Coker}(\bar{N}) = \mathbb{Z}/\text{Im}(\bar{N}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$.

A seguir, veremos algumas propriedades da teoria de cohomologia de Tate (que podem ser encontradas na referência [[3], VI.5]):

(1) Descolamento de dimensões: Dado um G -módulo M , é possível encontrar G -módulos K e C de modo que

$$\hat{H}^i(G; M) \simeq \hat{H}^{i+1}(G; K) \text{ e } \hat{H}^i(G; M) \simeq \hat{H}^{i-1}(G; C),$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

(2) Produto Cup: Existe um produto cup na cohomologia de Tate,

$$\begin{aligned} \hat{H}^p(G; M) \otimes \hat{H}^q(G; N) &\rightarrow \hat{H}^{p+q}(G; M \otimes N) \\ u \otimes v &\mapsto u \cup v \end{aligned}$$

com propriedades similares as do produto cup para cohomologia ordinária $H^*(G; \mathbb{Z})$. Por exemplo, o produto cup tem elemento identidade $1 \in \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z} = \hat{H}^0(G; \mathbb{Z})$ e é associativo. Assim, $\hat{H}^*(G; \mathbb{Z})$ é um anel graduado e $\hat{H}^*(G; M)$ é um $\hat{H}^*(G; \mathbb{Z})$ -módulo para todo M .

(3) Para cada $i \in \mathbb{Z}$, é possível obter um isomorfismo

$$\begin{aligned} \rho : \hat{H}^i(G; \mathbb{Z}) &\rightarrow \text{Hom}(\hat{H}^{-i}(G; \mathbb{Z}), \hat{H}^0(G; \mathbb{Z})) \\ u &\mapsto \rho(u) : \hat{H}^{-i}(G; \mathbb{Z}) \rightarrow \hat{H}^0(G; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

de modo que $\rho(u)(v) = u \cup v \in \hat{H}^0(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}$.

Observação 2.6.1 Considere o $\mathbb{Z}$ -módulo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, com $n > 1$, temos que o elemento $1/n + \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gera um subgrupo que é isomorfo a $\mathbb{Z}_n$. Assim, $\mathbb{Z}_n \simeq n^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Além disso, se A é um grupo abeliano tal que $nA = 0$ para algum $n > 0$, então

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(A, n^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(A, \mathbb{Z}_n).$$

Se A é finito, então $\text{Hom}(A, \mathbb{Z}_n) \simeq A$. Segue então da propriedade (3) da cohomologia de Tate que existe um isomorfismo $\bar{\rho} : \hat{H}^i(G; \mathbb{Z}) \rightarrow \hat{H}^{-i}(G; \mathbb{Z})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Proposição 2.6.2 Seja G um grupo finito tal que $H^{m+1}(G; \mathbb{Z}) \neq 0$ para algum $m \geq 1$, e seja p um primo que divide a ordem de $H^{m+1}(G; \mathbb{Z})$. Então a cohomologia $H^m(G; \mathbb{Z}_p)$ contém um somando de $\mathbb{Z}_p$ (e logo, não é trivial).

Demonstração: Sabemos, pela Fórmula dos Coeficientes Universais, que

$$H^{m+1}(G; \mathbb{Z}) = \text{parte livre}(H_{m+1}(G; \mathbb{Z})) \oplus \text{parte de torção}(H_m(G; \mathbb{Z})).$$

Como G é um grupo finito, então sua $\mathbb{Z}$ -homologia é um grupo de torção em dimensões maiores que zero (por [[27], Observação 2.3.1, pg. 30]), de onde segue que $H_m(G; \mathbb{Z}) = \text{parte torção}(H_m(G; \mathbb{Z}))$ e logo, $H^{m+1}(G; \mathbb{Z}) \simeq H_m(G; \mathbb{Z})$. Por outro lado, pelo Teorema dos Coeficientes Universais sabemos que

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{m-1}(G; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^m(G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \text{Hom}(H_m(G; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0$$

é exata e cinde. Assim $H^m(G; \mathbb{Z}_p) \simeq \text{Hom}(H_m(G; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \oplus \text{Ext}(H_{m-1}(G; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p)$. Como p é um primo divisor de $|H^{m+1}(G; \mathbb{Z})|$, então sabemos pelo Teorema de Sylow que existe um subgrupo F de $H^{m+1}(G; \mathbb{Z})$ de modo que $F \simeq \mathbb{Z}_p$. Entretanto, $H_m(G; \mathbb{Z}) \simeq H^{m+1}(G; \mathbb{Z})$ e desta maneira segue que existe H subgrupo de $H_m(G; \mathbb{Z})$ tal que $H \simeq \mathbb{Z}_p$. Considere então $i : \mathbb{Z}_p \rightarrow H_m(G; \mathbb{Z})$ a aplicação inclusão. Então i induz uma aplicação $i_{\#} : \text{Hom}(H_m(G; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ que é sobrejetora. Porém, $\text{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p$ e daí, segue do Teorema do Isomorfismo que $\text{Hom}(H_m(G; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p)$ tem um somando isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Assim, segue pelo Teorema dos Coeficientes Universais que $H^m(G; \mathbb{Z}_p)$ possui um somando isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ e portanto, não é trivial. $\square$

Exemplo 2.6.2 Se $G = \mathbb{Z}_r$ e p é um primo divisor de r então, para todo m ímpar, temos $H^m(G; \mathbb{Z}_p) \neq 0$. De fato, sabemos que $H^{m+1}(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_r$. Como p divide r , então $H^m(G; \mathbb{Z}_p) \neq 0$. Observe, contudo, que $H^m(G; \mathbb{Z})$ é trivial.

2.7 Grupos com cohomologia periódica

Definição 2.7.1 Um grupo finito G tem **cohomologia periódica** se para algum $d \neq 0$ existe um elemento $u \in \hat{H}^d(G; \mathbb{Z})$ que é invertível no anel $\hat{H}^*(G, \mathbb{Z})$.

Assim, o produto cup nos fornece o isomorfismo de periodicidade

$$u \cup - : \hat{H}^n(G; M) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{n+d}(G; M)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo G -módulo M . Em particular, tomando $n = 0$ e $M = \mathbb{Z}$, temos que $\hat{H}^d(G; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}$ e que u gera $\hat{H}^d(G; \mathbb{Z})$.

Se sabemos que um grupo G tem cohomologia periódica, a tarefa de computar $\hat{H}^*(G)$ se torna bem mais simples. Logo, é interessante que tenhamos um critério para decidir quando um grupo G tem cohomologia periódica.

Teorema 2.7.1 *As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *G tem cohomologia periódica;*
- (ii) *Existem inteiros n e d , com $d \neq 0$, tais que $\hat{H}^n(G; M) \simeq \hat{H}^{n+d}(G; M)$ para todo $\mathbb{Z}G$ -módulo M ;*
- (iii) *Para algum $d \neq 0$, $\hat{H}^d(G; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{|G|}$;*
- (iv) *Para algum $d \neq 0$, $\hat{H}^d(G; \mathbb{Z})$ contém um elemento u de ordem $|G|$.*

Demonstração: A demonstração de [(i) $\Rightarrow$ (ii)] segue diretamente da definição de grupo com cohomologia periódica.

[(ii) $\Rightarrow$ (iii)] Agora, suponha que seja válida a afirmação (ii). Logo, pela propriedade de deslocamento de dimensões, sabemos que $\hat{H}^k(G; N) \simeq \hat{H}^{k+d}(G; N)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo G -módulo N . Assim, tomando $k = 0$ e $N = \mathbb{Z}$, obtemos $\hat{H}^d(G; \mathbb{Z}) \simeq \hat{H}^0(G; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}$, como queríamos.

[(iii) $\Rightarrow$ (iv)] Vamos supor verdadeira agora a afirmação (iii). Sabemos então que para algum $d \neq 0$, temos $\hat{H}^d(G; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}$. Considere então $\varphi : \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z} \rightarrow \hat{H}^d(G; \mathbb{Z})$ tal isomorfismo e defina $u := \varphi(\bar{1})$. Temos $o(\bar{1}) = |G|$ e logo, como φ é isomorfismo, $o(u) = |G|$ como queríamos.

[(iv) $\Rightarrow$ (i)] Agora, suponha verdadeira a afirmação (iv). Considere $u \in \hat{H}^d(G; \mathbb{Z})$ de modo que $o(u) = |G|$. Então o subgrupo $\mathbb{Z}u$ de $\hat{H}^d(G; \mathbb{Z})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_{|G|} \simeq |G|^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.

Considere $f : \mathbb{Z}u \rightarrow |G|^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $f(u) = 1/|G| + \mathbb{Z} \equiv \bar{1} \in \mathbb{Z}_{|G|}$. Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}$ -módulo injetivo (ver [3], pg. 65), então por definição existe uma extensão de f , aqui denotada por $\bar{f}$, de modo que $\bar{f} : \hat{H}^d(G; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ e $\bar{f}(u) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_{|G|}$. Mas, pela observação 2.6.1, temos $\bar{\rho} : \hat{H}^d(G; \mathbb{Z}) \rightarrow \hat{H}^{-d}(G; \mathbb{Z})$ um isomorfismo. Assim, existe $v \in \hat{H}^{-d}(G; \mathbb{Z})$, $v = \bar{\rho}(u)$, de modo que $o(v) = |G|$. Considerando a aplicação dada pelo produto cup

$$\hat{H}^d(G; \mathbb{Z}) \xrightarrow{-\cup v} \hat{H}^0(G; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{|G|} \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

segue que $\bar{f}(u) \equiv u \cup v = u.v$. Daí segue que u é invertível e logo, concluímos que G tem cohomologia periódica. $\square$

Corolário 2.7.1 *Se G é um grupo finito que atua livremente sobre uma esfera de homotopia de dimensão m então G tem cohomologia periódica de período $m + 1$. Além disso, $H^{m+1}(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{|G|}$.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.5.1, sabemos que a sequência

$$\dots \rightarrow C_m(\Sigma^m) \rightarrow \dots \rightarrow C_1(\Sigma^m) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Sigma^m) \xrightarrow{\text{no}\varepsilon} C_{2k-1}(X) \xrightarrow{\partial_m} \dots \rightarrow C_0(\Sigma^m) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma resolução periódica de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ com período $m + 1$. Considere agora M um G -módulo qualquer e o complexo de cocadeias

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C, M) : 0 &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_0(\Sigma^m), M) \xrightarrow{\delta^0} \dots \\ \dots &\xrightarrow{\delta^{m-1}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_m(\Sigma^m), M) \xrightarrow{\delta^m} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_0(\Sigma^m), M) \xrightarrow{\delta^{m+1}} \dots \end{aligned}$$

onde $\delta^{n+(m+1)} = \delta^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Note que, para $d = m + 1$ e $n = 1$ e pela definição 2.6.2, $\hat{H}^n(G; M) = H^n(G; M)$ e $\hat{H}^{n+d}(G; M) = H^{n+d}(G; M)$ pois $d, n > 0$, temos

$$\hat{H}^1(G; M) = \frac{\text{Ker}(\delta^1)}{\text{Im}(\delta^0)} = \frac{\text{Ker}(\delta^{(m+1)+1})}{\text{Im}(\delta^{m+1})} = \hat{H}^{(m+1)+1}(G; M),$$

onde M é um G -módulo qualquer. Logo, como existem $d, n \in \mathbb{Z}$ com $d \neq 0$ tais que $\hat{H}^n(G; M) \simeq \hat{H}^{n+d}(G; M)$ para todo G -módulo M , então segue do Teorema 2.7.1 que G tem cohomologia periódica com período $d = m + 1$. Mais ainda, pela definição 2.7.1 para $M = \mathbb{Z}$, temos $\hat{H}^n(G; \mathbb{Z}) \simeq \hat{H}^{n+(m+1)}(G; \mathbb{Z})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, temos $\hat{H}^0(G; \mathbb{Z}) \simeq \hat{H}^{m+1}(G; \mathbb{Z})$. Contudo, pelo exemplo 2.6.1 sabemos que, como G é finito, $\hat{H}^0(G; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{|G|}$. Portanto, concluímos que $H^{m+1}(G; \mathbb{Z}) = \hat{H}^{m+1}(G; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{|G|}$. $\square$

Exemplo 2.7.1 *Seja $G = \mathbb{Z}_p$ e considere a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre $\mathbb{S}^1$ da seguinte maneira: dado $x \in \mathbb{S}^1$, defina $\bar{g}x$ como sendo o ponto de $\mathbb{S}^1$ obtido após rotacionar (no sentido anti-horário) o ponto x por $2g\pi/p$ graus (onde $g = 0, \dots, p-1$). Então a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre $\mathbb{S}^1$ é livre e logo, pelo Teorema 2.7.1 segue que $\mathbb{Z}_p$ tem cohomologia periódica de período $d = 2$. Mais ainda, sabemos que $H^2(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{|\mathbb{Z}_p|} = \mathbb{Z}_p$ e portanto $H^{2n}(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Espaços Classificantes, Sequências Espectrais e Homomorfismos Transfer

Neste capítulo, estudaremos os conceitos de fibrados, fibrações e sequências espectrais, que são de fundamental importância para a demonstração detalhada do resultado principal. Veremos alguns resultados que relacionam os conceitos de fibrados e fibrações e, em um segundo momento, introduziremos a sequência espectral cohomológica de Leray-Serre associada a uma fibração, que terá particular utilidade para o nosso estudo. Algumas demonstrações de resultados presentes neste capítulo foram omitidas pois o enfoque deste trabalho é o detalhamento da referência [11]. Porém, os resultados deste capítulo podem ser encontrados nas referências [6], [13], [17], [29].

3.1 Fibrados

Ao longo desta seção, considere E , F , B e P sendo espaços topológicos.

Definição 3.1.1 *Seja X um G -espaço. Dizemos que a ação de G em X é **efetiva** (ou que G atua efetivamente sobre X se o homomorfismo $G \rightarrow \text{Homeo}(X)$, dado por $g \mapsto \varphi_g$ de modo que $\varphi_g(x) = gx$, é uma aplicação injetora.*

Definição 3.1.2 *Seja G um grupo topológico atuando efetivamente sobre F . Um **fibrado** E sobre B com fibra F e estrutura de grupo G é uma aplicação contínua $p : E \rightarrow B$ junto com uma coleção de homeomorfismos $\{\varphi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)\}$ para abertos U em B (onde φ é denominada uma **carta sobre U**) tais que:*

(1) O diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\varphi} & p^{-1}(U) \\ & \searrow p_U \quad \swarrow p & \\ & U & \end{array}$$

comuta para cada carta φ sobre U , onde $p_U : U \times F \rightarrow U$ é a aplicação projeção sobre U ;

(2) Cada ponto de B admite uma vizinhança aberta sobre a qual existe uma carta;

(3) Se φ é uma carta sobre U e $V \subset U$ é aberto, então $\varphi|_V$ é uma carta sobre V ;

(4) Dadas quaisquer cartas φ, φ' sobre U , existe uma aplicação contínua $\theta_{\varphi, \varphi'} : U \rightarrow G$ de modo que

$$\varphi'(u, f) = \varphi(u, \theta_{\varphi, \varphi'}(u).f)$$

para todo $u \in U$ e para todo $f \in F$. A aplicação $\theta_{\varphi, \varphi'}$ é denominada de **função transição para φ, φ'** ;

(5) A coleção de cartas é maximal dentre as coleções que satisfazem as condições (1), (2), (3) e (4).

Uma aplicação contínua $p : E \rightarrow B$ é chamada de **fibrado localmente trivial** se as três primeiras condições da definição de fibrado são satisfeitas.

A terminologia usual é chamar B de **base**, F de **fibra** e E de **espaço total**. Usualmente denota-se (G, p, E, B, F) por E .

Perceba que na definição de fibrado localmente trivial, não existe a necessidade de assumir a existência de uma ação de um grupo qualquer G sobre F (justamente porque somente a partir da 4ª condição da definição de fibrado é que se faz necessária a estrutura de grupo G).

Trivialidade local é uma importante distinção entre um fibrado e uma aplicação qualquer.

Observação 3.1.1 Observe que um fibrado localmente trivial é um fibrado com estrutura de grupo $G = \text{Homeo}(F)$.

Observação 3.1.2 Dados os espaços B e F e uma ação de um grupo topológico G sobre F , suponha uma coleção de pares $\tau = \{(U_\alpha, \theta_\alpha)\}$, onde cada U_α é um aberto de B e $\theta_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$ é uma aplicação contínua, satisfazendo:

(1) A coleção $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura para B ;

(2) Se $(U_\alpha, \theta_\alpha) \in \tau$ e $W \subset U_\alpha$, então $(W, (\theta_\alpha)|_W) \in \tau$;

(3) Se $(U, \theta_\alpha), (U, \theta_\beta) \in \tau$, então $(U, \theta_\alpha \theta_\beta) \in \tau$, onde a aplicação $\theta_\alpha \theta_\beta : U \rightarrow G$ é da forma $\theta_\alpha \theta_\beta(u) = \theta_\alpha(u) \theta_\beta(u)$;

(4) A coleção τ é maximal com relação às três condições anteriores.

Então existe um fibrado $p : E \rightarrow B$ com estrutura de grupo G , fibra F e funções transição θ_α (ver [[6], Exercício 56, pg. 80]).

Frequentemente, utilizaremos a notação $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ para indicar um fibrado $p : E \rightarrow B$ com a fibra F .

Exemplo 3.1.1 A projeção $p_B : B \times F \rightarrow B$ é um fibrado com espaço total $B \times F$, base B e fibra F , denominado **fibrado trivial**.

Exemplo 3.1.2 Seja F um espaço com a topologia discreta. Então todo fibrado localmente trivial sobre B com fibra F é um espaço de recobrimento. Reciprocamente, se $p : E \rightarrow B$ é um espaço de recobrimento com B conexo, então p é um fibrado localmente trivial com fibra discreta.

Exemplo 3.1.3 O fibrado tangente de uma variedade diferenciável é um fibrado localmente trivial.

Definição 3.1.3 Um **morfismo entre fibrados com estrutura de grupo G e fibra F** de $E \xrightarrow{p} B$ à $E' \xrightarrow{p'} B'$ é um par de aplicações contínuas $\tilde{f} : E \rightarrow E'$ e $f : B \rightarrow B'$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

comuta e de modo que para cada carta $\phi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ com $b \in U$ e $\phi' : U' \times F \rightarrow p'^{-1}(U')$ e cada $b \in U$ com $f(b) \in U'$, a aplicação $((\phi')^{-1} \circ \tilde{f} \circ \phi) : \{b\} \times F \rightarrow \{f(b)\} \times F$ é um homeomorfismo dado pela ação de um elemento $\psi_{\phi, \phi'} \in G$. Mais ainda, $b \mapsto \psi_{\phi, \phi'}(b)$ define uma aplicação contínua de $U \cap f^{-1}(U')$ à G .

Em particular, um **isomorfismo de fibrados** é uma aplicação de fibrados $(\tilde{f}, f)$ que admite uma aplicação $(\tilde{g}, g)$ na direção contrária de modo que ambas composições sejam a identidade.

Definição 3.1.4 *Sejam $p : E \rightarrow B$ um fibrado com fibra F e estrutura de grupo G e $f : B' \rightarrow B$ uma função contínua. Defina o **pullback de $p : E \rightarrow B$ por f** como sendo o espaço*

$$f^!(E) = \{(b', e) \in B' \times E; p(e) = f(b')\}.$$

Considere $p : E \rightarrow B$ um fibrado com fibra F e estrutura de grupo G e $q : f^!(E) \rightarrow B'$ a restrição da aplicação projeção $B' \times E \rightarrow B'$ à $f^!(E)$. O diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^!(E) & \xrightarrow{p_E} & E \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

é comutativo, pois $(f \circ q)(b', e) = f(b')$ e $(p \circ p_E)(b', e) = p(e)$, que coincidem pela definição de $f^!(E)$.

Teorema 3.1.1 *A aplicação $q : f^!(E) \rightarrow B'$ é um fibrado com fibra F e estrutura de grupo G . Além disso, aplicação $(f^!(E), B') \xrightarrow{(p_E, f)} (E, B)$ é uma aplicação entre fibrados.*

Demonstração: Ver [[6], Teorema 4.13, pg. 91]. □

3.1.1 Fibrados principais e fibrados associados

Fibrados principais são casos especiais de fibrados, contudo podem ser utilizados para construir qualquer fibrado. Reciprocamente, todo fibrado determina um fibrado principal.

Seja G um grupo topológico. O grupo G atua sobre si mesmo por **translação à esquerda**

$$G \rightarrow \text{Homeo}(G), \quad g \mapsto (x \mapsto gx).$$

Definição 3.1.5 *Um G -fibrado principal sobre B é um fibrado $p : P \rightarrow B$ com fibra $F = G$ e estrutura de grupo G atuando por translação à esquerda sobre a fibra.*

Proposição 3.1.1 *Se $p : P \rightarrow B$ é um G -fibrado principal, então G atua livremente à direita sobre P , com espaço de órbitas B .*

Demonstração: Primeiro, note que G atua sobre a trivialização local pela direita, com a ação dada pela aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : (U \times G) \times G &\rightarrow U \times G \\ ((u, g), g') &\mapsto (u, g).g' = (u, gg'). \end{aligned}$$

que comuta com a ação de G sobre si mesmo de translação pela esquerda. Logo, é possível definir uma G -ação à direita sobre P usando a identificação dada pela carta $U \times G \xrightarrow{\varphi} p^{-1}(U)$, ou seja, a aplicação

$$\begin{aligned} P \times G &\rightarrow E \\ (\varphi(u, g), g') &\mapsto \varphi(u, g).g' = \varphi(u, gg'). \end{aligned}$$

fornece uma ação à direita de G sobre P . Caso φ' seja outra carta sobre U , então temos $\varphi(u, g) = \varphi'(u, \theta_{\varphi, \varphi'}(u).g)$ e, por outro lado, $\varphi(u, gg') = \varphi'(u, \theta_{\varphi, \varphi'}(u)(gg')) = \varphi'(u, (\theta_{\varphi, \varphi'}(u)g)g')$, ou seja, a ação independe da escolha da carta. Além disso, como a ação é livre localmente e $(U \times G)/G = U \times G/G = U$ e P é localmente da forma $U \times G$ (pela coleção dos homeomorfismos da definição de fibrado) então $P/G = B$. $\square$

Exemplo 3.1.4 *Todo recobrimento regular $p : E \rightarrow B$ é um G -fibrado principal com $G = \pi_1(B)/p_*(\pi_1(E))$ (onde G está com a topologia discreta). Em particular, o recobrimento universal $\tilde{B} \rightarrow B$ de um espaço é um $\pi_1(B)$ -fibrado principal.*

Teorema 3.1.2 *Suponha que X é um espaço paracompacto Hausdorff e G um grupo de Lie compacto atuando livremente sobre X . Então a aplicação de órbitas $X \rightarrow X/G$ é um G -fibrado principal.*

Demonstração: Ver [[2], Teorema 5.8, pg. 88]. $\square$

3.1.2 Construção de Borel

Nesta seção veremos uma importante construção de um fibrado a partir de um fibrado principal. Vimos na Observação 3.1.2 que as funções transição $\theta_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$ e a ação de G sobre F determinam um fibrado sobre B com fibra F e estrutura de grupo G . Usando isto, pode-se mostrar que se um grupo topológico G atua sobre os espaços F e F' e $p : E \rightarrow B$ é um fibrado com fibra F e estrutura de grupo G , então é possível utilizar as funções de transição de p para definir um fibrado $p' : E' \rightarrow B$ com fibra F' e uma estrutura de grupo G com as mesmas funções de transição.

Esse processo é chamado de **mudança de fibra de F à F'** e pode ser útil porque as topologias de E e E' podem ser distintas.

Um caso fundamental de mudança de fibras ocorre quando se considera $F' = G$, com G atuando sobre si mesmo pela ação de translação à esquerda. Então as funções transição do fibrado $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ determinam, pela Observação 3.1.2, um G -fibrado principal $G \hookrightarrow P(E) \rightarrow B$. Denominamos este G -fibrado de **G -fibrado principal subjacente ao fibrado $p : E \rightarrow B$ com estrutura de grupo G** .

Reciprocamente, dado um G -fibrado principal $G \hookrightarrow P \rightarrow B$ e uma ação de G sobre um espaço F , podemos associar um fibrado $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ tal que $P = P(E)$. Uma construção possível é dada pela seguinte definição.

Com essas considerações, veremos a seguir uma importante construção, denominada **construção de Borel**.

Seja $p : P \rightarrow B$ um G -fibrado principal. Suponha que G atua à esquerda sobre F . Defina a $P \times_G F$ por

$$P \times_G F := \frac{P \times F}{\sim},$$

onde $(x, f) \sim (xg, g^{-1}f)$, para todo $x \in P$, $f \in F$ e $g \in G$, é uma relação de equivalência. Denotemos $[x, f] \in P \times_G F$ a classe de equivalência do ponto (x, f) e defina a aplicação

$$q : P \times_G F \rightarrow B \text{ dada por } [x, f] \mapsto q([x, f]) = p(x).$$

A aplicação q esta bem definida, pois dados $x, x' \in P$ e $f, f' \in F$ tais que $[x, f] = [x', f']$, existe $g \in G$ de modo que $x' = xg$ e $f' = g^{-1}f$. Mas como $P/G = B$ pela Proposição 3.1.1, temos $[x] = [x']$ e logo, $p(x) = p(x')$.

Proposição 3.1.2 *Se $p : P \rightarrow B$ é um G -fibrado principal e G atua sobre F , então*

$$F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} B,$$

onde $q([x, f]) = p(x)$, é um fibrado sobre B com fibra F e estrutura de grupo G que tem as mesmas funções transição que $p : E \rightarrow B$.

Demonstração: Primeiro, perceba que dados dois G -espaços à esquerda Y e Y' , um G -espaço à direita X e $f : Y \rightarrow Y'$ uma aplicação equivariante, podemos definir uma aplicação

$$X \times_G f : X \times_G Y \rightarrow X \times_G Y'; [x, y] \mapsto [x, f(y)]$$

Essa aplicação será aberta desde que f seja aberta. Isto segue diretamente do fato de que $q_2 \circ id_X \times f = X \times_G f \circ q_1$, onde $id_X \times f : X \times Y \rightarrow X \times Y'$ é dada por $(id_X \times f)(x, y) = (x, f(y))$, $q_1 : X \times Y \rightarrow X \times_G Y$ e $q_2 : X \times Y' \rightarrow X \times_G Y'$ são as projeções quociente. Agora, considere a aplicação $\varphi : X \times_G G \rightarrow X$ por $\varphi([x, g]) = xg$. Esta aplicação é um homeomorfismo equivariante de G -espaços à direita cuja inversa é dada pela aplicação $\psi : X \rightarrow X \times_G G$ tal que $\psi(x) = [x, e]$. Por outro lado, se considerarmos X um G -espaço à direita, Y um G -espaço à esquerda e um H -espaço à direita, e Z um H -espaço à esquerda, teremos um homeomorfismo

$$\phi : (X \times_G Y) \times_H Z \rightarrow X \times_G (Y \times_H Z); [[x, y], z] \mapsto [x, [y, z]].$$

Com essas considerações iniciais, estamos finalmente em condições de verificar que $q : P \times_G F \rightarrow B$ é um fibrado. Dado um aberto $U \subset B$, a carta $\bar{\varphi}$ sobre U será da forma

$$\bar{\varphi} : U \times F \xrightarrow{\cong} F \times U \xrightarrow{\cong} (F \times_G G) \times U \xrightarrow{\cong} F \times_G (G \times U) \xrightarrow{F \times_G \varphi} F \times_G p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} q^{-1}(U).$$

As quatro primeiras aplicações são homeomorfismos (pelas considerações iniciais). A última aplicação é induzida pela inclusão $p^{-1}(U) \rightarrow X$ e é um mergulho em $F \times_G X$ e sua imagem é $q^{-1}(U)$. Além disso, se φ e ψ são cartas sobre U do G -fibrado principal e se $\theta : U \rightarrow G$ é a transição de φ, ψ , então

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u, g) &= [g, \psi(u, e)] = [g, \varphi(u, \theta(u)e)] \\ &= [g, \theta(u)\varphi(u, e)] = [g\theta(u), \varphi(u, e)] \\ &= \bar{\varphi}(u, \theta(u)g) \end{aligned}$$

e logo θ é a transição de $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$. Segue disto que $q : P \times_G F \rightarrow B$ é um fibrado sobre B com fibra F e estrutura de grupo G . $\square$

Dizemos que $q : E \times_G F \rightarrow B$ é o **fibrado associado ao fibrado principal** $p : E \rightarrow B$ **via a ação de G sobre F** e é chamado de construção de Borel. O espaço total $E \times_G B$ é chamado de **espaço de Borel**.

Conclui-se disto que os fibrados principais são mais básicos do que fibrados quaisquer, no sentido de que a fibra de sua G -ação é explícita.

3.2 Fibrações

Existem dois tipos de aplicações de fundamental importância em topologia algébrica: fibrações e cofibrações. Apesar de serem geometricamente mais complicadas do que as cofibrações, uma grande variedade de fibrações são também fibrados e, por outro lado, todo fibrado sobre um espaço paracompacto é também uma fibração (como veremos à seguir), de modo que já conhecemos alguns exemplos de fibrações.

Definição 3.2.1 *Sejam E e B espaços topológicos. Uma aplicação contínua $p : E \rightarrow B$ é uma **fibração** se, dado o espaço topológico Y e as aplicações contínuas $g : Y \times \{0\} \rightarrow E$ e $G : Y \times I \rightarrow B$ tais que $(p \circ g)(y, 0) = G(y, 0)$ para todo $y \in Y$, existe uma aplicação contínua $\tilde{G} : Y \times I \rightarrow E$ de modo que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{g} & E \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

seja comutativo, ou seja, $g(y, 0) = \tilde{G}(y, 0)$ e $(p \circ \tilde{G})(y, t) = G(y, t)$, para todo $y \in Y$ e $t \in I$. A aplicação $\tilde{G}$ é chamada de **levantamento de G por p** .

Exemplo 3.2.1 *Sejam B e F espaços topológicos. A projeção no primeiro fator $p_B : B \times F \rightarrow B$ é uma fibração. De fato, sejam $g : Y \times \{0\} \rightarrow B \times F$ e $G : Y \times I \rightarrow B$ aplicações contínuas de modo que $(p_B \circ g)(y, 0) = G(y, 0)$ para todo $y \in Y$. Para verificar que p é uma fibração, basta definir $\tilde{G}(y, t) = (G(y, t), p_F(g(y, 0)))$. Temos $\tilde{G}$ contínua e, mais ainda,*

$$\begin{aligned}\tilde{G}(y, 0) &= (G(y, 0), p_F(g(y, 0))) = (p_B(g(y, 0)), p_F(g(y, 0))) = g(y, 0) \\ p_B(\tilde{G}(y, t)) &= G(y, t)\end{aligned}$$

e disto segue que p_B é uma fibração.

Proposição 3.2.1 *Toda aplicação de recobrimento é uma fibração.*

Demonstração: Ver [[29], Teorema 3, pg. 67]. □

Observação 3.2.1 *O levantamento $\tilde{G}$ de uma aplicação G por uma fibração p não é necessariamente único.*

Teorema 3.2.1 (Teorema de Hurewicz para fibrações): *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Suponha que B é um espaço paracompacto e suponha que existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de B de modo que $p|_{p^{-1}(U_\alpha)} : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ é uma fibração para cada U_α . Então $p : E \rightarrow B$ é uma fibração.*

Demonstração: Ver [[29], Teorema 12, pg. 95]. □

Corolário 3.2.1 *Se $p : E \rightarrow B$ é um fibrado sobre um espaço paracompacto e Hausdorff, então p é uma fibração.*

Demonstração: Ver [[29], Corolário 14, pg. 96]. □

Definição 3.2.2 *Se $p : E \rightarrow B$ e $p' : E' \rightarrow B'$ são fibrações, então uma **aplicação de fibrações** é um par de aplicações $f : B \rightarrow B'$ e $\tilde{f} : E \rightarrow E'$ de modo que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

comute, ou seja, $f \circ p = p' \circ \tilde{f}$.

Perceba que, da definição de aplicação entre fibrações, que dada uma aplicação $G : Y \times I \rightarrow B$ com levantamento $\tilde{G} : Y \times I \rightarrow E$, a aplicação $f \circ G : Y \times I \rightarrow B'$ terá levantamento $\tilde{f} \circ \tilde{G} : Y \times I \rightarrow E'$.

Definição 3.2.3 Se $p : E \rightarrow B$ é uma fibração e $f : X \rightarrow B$ uma aplicação contínua, definimos o **pullback de $p : E \rightarrow B$ por f** como sendo a aplicação $f^!(E) \xrightarrow{q} X$ onde

$$f^!(E) = \{(x, e) \in X \times E; f(x) = p(e)\} \subset X \times E$$

e a aplicação $f^!(E) \xrightarrow{q} X$ é a restrição da projeção $X \times E \rightarrow X$.

Observação 3.2.2 A aplicação $f^!(E) \xrightarrow{q} X$ é uma fibração. De fato, sejam $g : Y \times \{0\} \rightarrow f^!(E)$ e $G : Y \times I \rightarrow X$ aplicações contínuas tais que $G \circ i = q \circ g$, onde $q = (p_X)|_{f^!(E)}$ e $i : Y \times \{0\} \rightarrow Y \times I$ é a aplicação inclusão. Considere $p_E : f^!(E) \rightarrow E$ a projeção na segunda coordenada. Note que, sendo $f : X \rightarrow B$ a aplicação dada pela definição de pullback e $p : E \rightarrow B$ fibração, temos

$$(f \circ p_X)(x, e) = f(x) = p(e) = (p \circ p_E)(x, e), \text{ para todo } (x, e) \in f^!(E).$$

Assim, como $q \circ g = G \circ i$ e $p \circ p_E = f \circ q$ então segue que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{g} & f^!(E) & \xrightarrow{p_E} & E \\ \downarrow i & & \downarrow q & & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{G} & X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

é comutativo. Assim, como $f \circ G : Y \times I \rightarrow B$ e $p_E \circ g : Y \times \{0\} \rightarrow E$ são contínuas e $(f \circ G) \circ i = p \circ (p_E \circ g)$, segue do fato de $p : E \rightarrow B$ ser uma fibração que existe uma aplicação $\tilde{G} : Y \times I \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{G} = f \circ G$ e $\tilde{G} \circ i = p_E \circ g$. Defina $G' : Y \times I \rightarrow f^!(E)$ por $G'(y, t) = (G(y, t), \tilde{G}(y, t))$. Como sabemos que $f(G(y, t)) = p(\tilde{G}(y, t))$ então $G'(y, t) \in f^!(E)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} G'(y, 0) &= (G(y, 0), \tilde{G}(y, 0)) = (p_X(g(y, 0)), p_E(g(y, 0))) = g(y, 0), \text{ para todo } y \in Y \\ q(G'(y, t)) &= p_X(G'(y, t)) = G(y, t), \text{ para todo } (y, t) \in Y \times I \end{aligned}$$

de onde concluímos que $q : f^!(E) \rightarrow X$ é uma fibração.

Teorema 3.2.2 (Sequência Exata de Homotopia de uma fibração): Seja $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ uma fibração. Então existe uma sequência exata longa

$$\dots \rightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{j\#} \pi_n(E) \xrightarrow{p\#} \pi_n(B) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(F) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(B) \xrightarrow{\Delta} \pi_0(F) \xrightarrow{j\#} \pi_0(E) \xrightarrow{p\#} \pi_0(B).$$

Demonstração: Ver [[29], Teorema 10, pg. 377]. □

3.3 Espaços Classificantes

Teorema 3.3.1 (Teorema de Milnor): *Dado um grupo topológico G , existe um espaço BG e um G -fibrado principal $G \hookrightarrow EG \rightarrow BG$ com espaço total EG , de modo que se $G \hookrightarrow E \rightarrow X$ é um G -fibrado principal sobre um espaço topológico X qualquer, então existe uma única classe de homotopia de aplicações $f : X \rightarrow BG$ tal que $f^!(EG) = E$, isto é, se existe uma outra aplicação $g : X \rightarrow BG$ de modo que $g^!(EG) = E$ então g é homotópica à f .*

Demonstração: Ver [[1], Teorema 1.1, pg. 47]. □

Definição 3.3.1 *O espaço BG é chamado de **espaço classificante de G** .*

A seguir, segue uma condição necessária e suficiente para que um espaço seja o espaço classificante (como definido pelo Teorema de Milnor).

Teorema 3.3.2 *Seja $G \hookrightarrow E \rightarrow B$ um G -fibrado principal. Então B é um espaço classificante para G se, e somente se, E é contrátil.*

Demonstração: Ver [[1], Teorema 1.2, pg. 47]. □

Observação 3.3.1 *Se G é discreto, então teremos*

$$\pi_n(BG) = \begin{cases} G, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

e portanto BG é um $K(G, 1)$ -complexo. De fato, pois G discreto implica que $\pi_0(G) = G$ e $\pi_n(G) = 0$ para $n \geq 1$. Logo, pela sequência exata longa de homotopia, temos $\pi_n(BG) \simeq \pi_n(EG)$ para $n > 1$. Mas como EG é contrátil (pelo Teorema 3.3.2) segue que $\pi_n(BG) = 0$ para $n \geq 2$. Além disso, teremos a sequência $0 \rightarrow \pi_1(BG) \rightarrow \pi_0(G) \rightarrow 0$ exata, de onde conclui-se $\pi_1(BG) = G$.

Denotemos o G -fibrado principal $G \hookrightarrow EG \rightarrow BG$ por ω_G .

Teorema 3.3.3 *Para qualquer G -fibrado principal $\eta = (G, p, E, B, G)$ sobre um espaço paracompacto Hausdorff B , existe uma aplicação $f : B \rightarrow BG$ tal que η e o fibrado pullback $f^!(\omega_G)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre B . A aplicação $f : B \rightarrow BG$ é chamada uma **aplicação classificante para o G -fibrado principal $E \xrightarrow{p} B$** .*

Demonstração: Ver [[17], Teorema 12.2, pg. 57]. $\square$

Teorema 3.3.4 *Sejam $f_0, f_1 : B \rightarrow BG$ duas funções contínuas tais que $f_0^!(\omega_G)$ e $f_1^!(\omega_G)$ são fibrados isomorfos sobre B . Então f_0 é homotópica à f_1 .*

Demonstração: Ver [[17], Teorema 12.4, pg. 58]. $\square$

Observação 3.3.2 *Sejam X e Y espaços paracompactos e Hausdorff com ação livre de um grupo compacto de Lie G e denotemos $\eta_X = (G, p_X, X, X/G, G)$ e $\eta_Y = (G, p_Y, Y, Y/G, G)$, respectivamente, e seja $h : X/G \rightarrow BG$ uma aplicação classificante para η_X . Então, pelo Teorema 3.3.3 segue que η_X e $h^!(\omega_G)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre X/G .*

Suponhamos que $f : X \rightarrow Y$ seja uma aplicação G -equivariante. Se $g : Y/G \rightarrow BG$ é uma aplicação classificante para η_Y e $\bar{f} : X/G \rightarrow Y/G$, então $g \circ \bar{f} : X/G \rightarrow BG$ também classifica o G -fibrado principal η_X e $g \circ \bar{f} \sim h$. De fato, considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X/G & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/G & \xrightarrow{g} & BG \end{array}$$

Segue do Teorema 3.3.3 que η_Y e o fibrado pullback $g^!(\omega_G)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre Y/G . Como $f : X \rightarrow Y$ é G -equivariante, segue de [[17], Teorema 4.2, pg. 44] que η_X e $\bar{f}^!(\omega_G)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre X/G . Por outro lado, como η_Y é isomorfo à $g^!(\omega_G)$, de [[17], § 10, cap. 4] concluímos que $f^!(\eta_Y)$ e $f^!(g^!(\omega_G))$ são isomorfos. Além disso, de [[17], Proposição 5.7, pg. 19] temos $f^!(g^!(\omega_G))$ e $(g \circ \bar{f})^!(\omega_G)$ G -fibrados principais isomorfos sobre X/G e portanto η_X e $(g \circ \bar{f})^!(\omega_G)$ são isomorfos. Logo, pelo Teorema 3.3.4 temos $g \circ \bar{f} \sim h$.

3.3.1 O Espaço de Borel

Suponhamos que G seja um grupo compacto de Lie atuando livremente em um espaço topológico X paracompacto Hausdorff. Então podemos tomar

$$c : X/G \rightarrow BG$$

uma aplicação classificante para o G -fibrado principal $X \rightarrow X/G$, onde $EG \rightarrow BG$ é o G -fibrado principal para G .

Denotemos por X_G o **espaço de Borel** $EG \times_G X = (EG \times X)/G$ de X , obtido a partir da ação livre de G sobre $EG \times X$ dada por $g(x, e) = (gx, ge)$.

Para o caso em que G é um grupo finito, claramente teremos G um grupo compacto de Lie. Além disso, pelo exemplo 3.3.1 sabemos que BG é um $K(G, 1)$ -complexo e logo, é também paracompacto. Mais ainda, como $EG \rightarrow BG$ é um G -fibrado principal, segue da Proposição 3.1.2 que

$$\rho : X_G \rightarrow \frac{EG}{G} = BG,$$

induzida pela projeção na primeira coordenada $EG \times X \rightarrow EG$, é um fibrado com fibra X , estrutura de grupo G e espaço base BG sendo o espaço classificante de G . Como BG é paracompacto, pelo Corolário 3.2.1 segue que ρ é uma fibração com fibra X e espaço base BG , chamada **fibração de Borel associada ao G -espaço X** .

Observação 3.3.3 *Se G atua livremente sobre X , então a aplicação $s : X_G \rightarrow X/G$, induzida pela projeção na segunda coordenada $EG \times X \rightarrow X$, é uma fibração com fibra contrátil EG e portanto, é uma equivalência de homotopia (para detalhes, ver [[7], Proposição 8.18, pg. 62]).*

Observação 3.3.4 *Sejam $p : X_G \rightarrow BG$ a fibração de Borel associada ao G -espaço livre X , onde G é um grupo compacto de Lie e denotaremos por $h : X/G \rightarrow X_G$ a inversa homotópica de $s : X_G \rightarrow X/G$. Então $\rho \circ h : X/G \rightarrow BG$ classifica o G -fibrado principal $X \rightarrow X/G$.*

De fato, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & EG \times X & \longrightarrow & EG \\ \eta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \downarrow \omega_G \\ X/G & \xrightarrow{h} & X_G & \xrightarrow{\rho} & BG \end{array}$$

Denotemos por η o G -fibrado principal $X \rightarrow X/G$ e por α o G -fibrado principal $EG \times X \rightarrow X_G$. Como ρ é uma aplicação G -equivariante, temos que o fibrado pullback $\rho^!(\omega_G)$ e α são G -fibrados principais isomorfos. Assim, basta verificar que o fibrado pullback $h^!(\alpha)$ e η são G -fibrados principais isomorfos. Para isto, consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & EG \times X & \longrightarrow & X \\ \eta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X/G & \xrightarrow{h} & X_G & \xrightarrow{s} & X/G \end{array}$$

e observemos que s é G -equivariante. Assim o fibrado pullback $s^!(\eta)$ e α são G -fibrados

principais isomorfos e deste modo $h^!(s^!(\eta))$ é isomorfo a $h^!(\alpha)$. Por outro lado, desde que $s \circ h$ é homotópica à identidade, temos que $(s \circ h)^!(\eta) = h^!(s^!(\eta))$ é isomorfo ao fibrado pullback $id_{X/G}^!(\eta) = \eta$. Assim, $h^!(\alpha)$ e η são G -fibrados principais isomorfos. Portanto

$$\eta = h^!(\alpha) = h^!(\rho^!(\omega_G)) = (\rho \circ h)^!(\omega_G),$$

o que implica que $\rho \circ h$ classifica o G -fibrado principal η .

3.4 Sequências Espectrais Cohomológicas

Introduzida originalmente para o estudo de propriedades da homologia e da cohomologia de fibrações arbitrárias, o conceito de sequência espectral tem um grande número de aplicações na teoria de Topologia Algébrica. Nesta seção, apresentaremos o conceito de sequência espectral cohomológica, bem como a Sequência Espectral Cohomológica de Leray-Serre associada à uma fibração. Estes resultados serão de fundamental importância para o capítulo 4. As principais referências para esta seção são [6], [23] e [29].

Nesta seção, consideraremos R um domínio de ideias principais.

Definição 3.4.1 *Um **módulo diferencial bigraduado** E sobre R é uma coleção de R -módulos $\{E^{p,q}\}$, para todo par de inteiros p e q , junto com uma coleção de R -homomorfismos $d : E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$ de bigrau $(r, 1-r)$ satisfazendo $d \circ d = 0$ (ou seja, uma coleção de R -homomorfismos $d^{p,q} : E^{p,q} \rightarrow E^{p+r, q+1-r}$ de modo que $d^{p+r, q+1-r} \circ d^{p,q} = 0$).*

Definição 3.4.2 *O **módulo de cohomologia**, denotado por $H(E)$, é o módulo bigraduado*

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \frac{\text{Ker}(d^{p,q} : E^{p,q} \rightarrow E^{p+r, q+1-r})}{\text{Im}(d^{p-r, q+r-1} : E^{p-r, q+r-1} \rightarrow E^{p,q})}.$$

Definição 3.4.3 *Uma E_k -**sequência espectral cohomológica** é uma coleção de R -módulos diferenciais bigraduados $\{E_r, d_r\}$, onde $r \in \mathbb{Z}$ e $r \geq k$, de modo que $E_{r+1} \simeq H(E_r)$.*

Observação 3.4.1 *Perceba que, dada uma E_k -sequência espectral cohomológica, é possível definir uma $E_{k'}$ -sequência espectral cohomológica para qualquer $k' \geq k$.*

A fim de definir o termo limite de uma sequência espectral, para qualquer $k \geq r$, denotaremos

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &= \text{Ker}(d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q+1-r}) \\ B_r^{p,q} &= \text{Im}(d_r^{p-r, q+r-1} : E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q}). \end{aligned}$$

Pela definição de módulo diferencial bigraduado, temos a condição $d_r \circ d_r = 0$, de onde segue que $B_r \subset Z_r \subset E_r$. Assim, pela definição 3.4.3 temos $E_{r+1} \simeq Z_r/B_r$. Agora, denote

$$\begin{aligned} Z(E_{r+1})^{p,q} &= \text{Ker}(d_{r+1}^{p,q} : E_{r+1}^{p,q} \rightarrow E_{r+1}^{p+r,q+1-r}) \\ B(E_{r+1})^{p,q} &= \text{Im}(d_{r+1}^{p-r,q+r-1} : E_{r+1}^{p-r,q+r-1} \rightarrow E_{r+1}^{p,q}). \end{aligned}$$

Como $B(E_{r+1}) \subset Z(E_{r+1}) \subset E_{r+1} \simeq Z_r/B_r$, segue de [[16], Teorema 1.10, pg. 173] que existem submódulos Z_{r+1} e B_{r+1} de Z_r contendo B_r de modo que $Z(E_{r+1})^{p,q} \simeq Z_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q}$ e $B(E_{r+1})^{p,q} \simeq B_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q}$ para todo par p, q . Assim, teremos $B_r \subset B_{r+1} \subset Z_{r+1} \subset Z_r$. Além disso, temos $E_{r+2} \simeq H(E_{r+1}) = Z(E_{r+1})/B(E_{r+1}) \simeq Z_{r+1}/B_{r+1}$. Continuando este processo, obteremos uma sequência de submódulos, para todo $n \geq r$,

$$B_r \subset B_{r+1} \subset \dots \subset B_n \subset \dots \subset Z_n \subset \dots \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r,$$

com a propriedade que $E_{n+1} \simeq Z_n/B_n$. Definimos então os módulos bigraduados

$$Z_\infty = \bigcap_n Z_n \text{ e } B_\infty = \bigcup_n B_n.$$

O módulo bigraduado $E_\infty = Z_\infty/B_\infty$ é chamado **termo limite da sequência espectral** $\{E_r, d_r\}$.

Definição 3.4.4 Dizemos que uma E_k -sequência espectral cohomológica $\{E_r, d_r\}$ **colapsa no N -ésimo termo** se $d_r = 0$ para todo $r \geq N$.

Observação 3.4.2 Se uma E_k -sequência espectral cohomológica colapsa no N -ésimo termo, então $E_N^{*,*} \simeq E_{N+1}^{*,*} \simeq E_{N+2}^{*,*} \simeq \dots \simeq E_\infty^{*,*}$. De fato, como sabemos que a sequência espectral colapsa no N -ésimo termo, sabemos que $d_N = 0$. Assim, temos $\text{Ker}(d_N^{p,q}) = E_N^{p,q}$ e $\text{Im}(d_N^{p-r,q+r-1}) = \{0\}$ para todo par de inteiros p, q . Assim, pela definição 3.4.3, temos

$$E_{N+1}^{p,q} \simeq H(E_N^{p,q}) = \frac{\text{Ker}(d_N^{p,q})}{\text{Im}(d_N^{p-r,q+r-1})} = \frac{E_N^{p,q}}{\{0\}} \simeq E_N^{p,q}$$

e portanto $E_{N+1}^{*,*} \simeq E_N^{*,*}$. Repetindo o raciocínio, conclui-se que $E_N^{*,*} \simeq E_{N+1}^{*,*} \simeq E_{N+2}^{*,*} \simeq \dots \simeq E_\infty^{*,*}$, como queríamos.

Definição 3.4.5 Uma **filtração decrescente F sobre um R -módulo A** é uma família de submódulos $\{F^p(A)\}$ de A , com $p \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$0 \subset \dots \subset F^{p+1}(A) \subset F^p(A) \subset F^{p-1}(A) \subset \dots \subset A.$$

Diremos que a filtração F é **convergente** se $\bigcup_p F^p(A) = A$ e $\bigcap_p F^p(A) = \{0\}$. Diremos ainda que a filtração é **limitada** se existe N tal que $F^N(A) = 0$ e $F^0(A) = A$. Mais ainda, dada uma filtração decrescente F sobre um R -módulo A , o **módulo graduado associado** $E_0^*(A)$ é dado por $E_0^p = F^p(A)/F^{p+1}(A)$.

Observação 3.4.3 Da mesma forma que definimos os conceitos de filtração decrescente e módulo graduado associado para um R -módulo, também é possível definir estas noções para um R -módulo graduado H^* . Neste caso, uma filtração decrescente para H^* é uma coleção de submódulos $\{F^p(H^*)\}$ de modo que $\{(F^p(H^*))^r\}_p$ seja uma filtração decrescente para H^r . Assim, $F^p(H^n) = F^p(H^*) \cap H^n \subset F^{p-1}(H^*) \cap H^n = F^{p-1}(H^n)$ e o módulo bigraduado associado é dado por $E_0^{p,q}(H^*, F) = F^p(H^{p+q})/F^{p+1}(H^{p+q})$.

Definição 3.4.6 Dizemos que uma E_k -sequência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ **converge para um R -módulo graduado H^*** , e denotamos $E_r \Rightarrow H^*$, se existe uma filtração decrescente F convergente e limitada sobre H^* de modo que

$$E_\infty^{p,q} \simeq E_0^{p,q}(H^*, F) = \frac{F^p(H^{p+q})}{F^{p+1}(H^{p+q})}$$

onde $E_\infty^{*,*}$ é o termo limite da sequência espectral. Diremos que uma sequência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ é **de primeiro quadrante** se existir algum N tal que $E_N^{p,q} = 0$ para $p < 0$ ou $q < 0$.

Perceba que se isto ocorre, então $E_{N+1}^{p,q} = 0$ quando $p < 0$ ou $q < 0$ pois $E_{N+1} \simeq H(E_N)$. Assim, segue deste raciocínio que $E_M^{p,q} = 0$ quando $p < 0$ ou $q < 0$.

Teorema 3.4.1 (Sequência Espectral Cohomológica de Leray-Serre): Seja R um domínio de ideias principais. Dada uma fibração $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$, onde B é um CW-complexo conexo por caminhos, existe uma E_2 -sequência espectral cohomológica do primeiro quadrante $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, com $E_2^{p,q} \simeq H^p(B; H^q(F; R))$ de modo que $E_r \Rightarrow H^*(E; R)$, ou seja, existe uma filtração limitada

$$\begin{aligned} \{0\} = F^{n+1}(H^n(E; R)) &\subset \dots \subset F^{p+1}(H^n(E; R)) \subset F^p(H^n(E; R)) \subset \dots \\ &\dots \subset F^0(H^n(E; R)) = H^n(E; R) \end{aligned}$$

sobre $H^n(E; R)$ satisfazendo $E_\infty^{p,q} \simeq F^p(H^n(E; R))/F^{p+1}(H^n(E; R))$, onde $p + q = n$.

Demonstração: Ver [[22], Teorema 1.4.15, pg. 11] e [[22], Lema 3.1.9, pg. 45]. □

Lema 3.4.1 *Considere G um grupo finito e X um espaço paracompacto Hausdorff de modo que G atua livremente sobre X e tal que $H^i(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ quando $0 < i < m$. Tome a fibração de Borel $X \hookrightarrow X_G \xrightarrow{p} BG$ associada a X . Então existe uma sequência exata curta*

$$0 \rightarrow E_{\infty}^{m,0} \xrightarrow{\bar{i}} H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\pi} E_{\infty}^{0,m} \rightarrow 0,$$

onde $\bar{i} : E_{\infty}^{m,0} \rightarrow H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)$ é o homomorfismo induzido pela inclusão $F^m(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)) \subset H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)$ e $\pi : H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow E_{\infty}^{0,m}$ é o homomorfismo quociente.

Demonstração: Pelo Teorema 3.4.1, existe uma E_2 -sequência espectral cohomológica de primeiro quadrante de modo que $E_2^{p,q} = H^p(BG; H^q(X; \mathbb{Z}_p))$ e $E_r \Rightarrow H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$. Como $H^i(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ caso $0 < i < m$ e a sequência espectral é de primeiro quadrante, então segue que $E_2^{p,q} = 0$ desde que $0 < q < m$ ou $p < 0$ ou $q < 0$. Além disso, pelo Teorema de Leray-Serre sabemos que existe uma filtração

$$0 = F^{n+1}(H^n(X_G; \mathbb{Z}_p)) \subset \dots \subset F^1(H^n(X_G; \mathbb{Z}_p)) \subset F^0(H^n(X_G; \mathbb{Z}_p)) = H^n(X_G; \mathbb{Z}_p)$$

de modo que $E_{\infty}^{p,q} = F^p(H^n(X_G; \mathbb{Z}_p)) / F^{p+1}(H^n(X_G; \mathbb{Z}_p))$. Repare que

$$E_2^{1,m-1} = 0 \Rightarrow E_3^{1,m-1} = H(E_2^{1,m-1}) = \frac{\text{Ker}(d_2^{1,m-1} : E_2^{1,m-1} \rightarrow E_2^{3,m-2})}{\text{Im}(d_2^{-1,m} : E_2^{-1,m} \rightarrow E_2^{1,m-1})} = 0.$$

De maneira análoga, pode-se concluir que $E_4^{1,m-1} = E_5^{1,m-1} = \dots = E_{\infty}^{1,m-1} = 0$. Mas como $E_{\infty}^{1,m-1} = F^1(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)) / F^2(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p))$, então podemos concluir que $F^1(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)) = F^2(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p))$. Como $E_2^{p,q} = 0$ sempre que $0 < q < m$, então $E_2^{2,m-2} = \dots = E_2^{m-1,1} = 0$, de onde segue (de forma análoga ao argumento anterior) que $E_{\infty}^{2,m-2} = \dots = E_{\infty}^{m-1,1} = 0$. Assim, conclui-se que $F^1(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)) = F^2(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)) = \dots = F^{m-1}(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)) = F^m(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p))$. Por outro lado, sabemos que

$$E_{\infty}^{0,m} = \frac{F^0(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p))}{F^1(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p))} = \frac{H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)}{F^1(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p))},$$

de onde segue que podemos considerar o homomorfismo quociente $\pi : H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow E_{\infty}^{0,m}$. Como π é sobrejetora, então $\text{Im}(\pi) = E_{\infty}^{0,m}$. Sabemos ainda que, pela filtração, $F^m(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)) \subset H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)$ e portanto, consideremos o homomorfismo $i : F^m(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)) \rightarrow H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)$ inclusão. Como i é injetor, temos $\text{Ker}(i) = \{0\}$. Considere então a sequência curta $0 \rightarrow F^m(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)) \xrightarrow{i} H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\pi} E_{\infty}^{0,m} \rightarrow 0$. Como i é injetora e π é sobrejetora, para que esta sequência seja exata basta verificar que $\text{Im}(i) = \text{Ker}(\pi)$. Mas como $\text{Im}(i) = F^m(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p))$ e $\text{Ker}(\pi) = F^1(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p))$, então segue que $\text{Im}(i) = \text{Ker}(\pi)$ e logo, a sequência curta é exata. Agora, sabendo que $E_{\infty}^{m,0} = F^m(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)) / F^{m+1}(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)) = F^m(H^m(X_G; \mathbb{Z}_p))$, e denotando $\bar{i} : E_{\infty}^{m,0} \rightarrow H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)$ a aplicação induzida pela inclusão i , temos que a sequência curta

$$0 \rightarrow E_{\infty}^{m,0} \xrightarrow{\bar{i}} H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\pi} E_{\infty}^{0,m} \rightarrow 0$$

é exata, como queríamos. $\square$

3.5 Homomorfismos Transfer

Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um espaço de recobrimento de n -folhas (ou seja, para todo $x \in X$, $\#\pi^{-1}(x) = n$, isto é, a fibra de π sobre todo ponto tem n elementos), para algum n finito. Considere então o homomorfismo induzido de cadeias singulares $\pi_{\#} : S_k(\tilde{X}) \rightarrow S_k(X)$ e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \tilde{\sigma} \nearrow & \downarrow \pi & \\ \Delta_k & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

Como π é uma aplicação de recobrimento, então para cada k -simplexo singular σ existe um levantamento $\tilde{\sigma} : \Delta_k \rightarrow \tilde{X}$. Mais ainda, como é um recobrimento de n -folhas, então σ admite exatamente n levantamentos distintos $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n$.

De fato, como $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é um recobrimento (e logo, uma fibração por 3.2.1) e Δ_k é contrátil, com $\sigma(\Delta_k) \subset \text{Im}(\pi)$, então existe um levantamento $\sigma : \Delta_k \rightarrow \tilde{X}$ (por [[29], Lema 1, pg. 74]), ou seja, $\pi \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.

Além disso, dado outro levantamento de σ , digamos $\bar{\sigma} : \Delta_k \rightarrow \tilde{X}$, segue do fato de Δ_k ser conexo e de [[29], Teorema 2, pg. 67] que se existe algum $x \in \Delta_k$ de modo que $\tilde{\sigma}(x) = \bar{\sigma}(x)$, então $\sigma = \bar{\sigma}$. Mas como $\pi \circ \tilde{\sigma} = \sigma = \pi \circ \bar{\sigma}$, então $(\pi \circ \tilde{\sigma})(z) = \sigma(z) = (\pi \circ \bar{\sigma})(z)$ e assim, sabendo que $\pi^{-1}(x) = \{a_i, \dots, a_n\}$ onde $\sigma(z) = \pi(x)$, então $\tilde{\sigma}(z) = a_i$ e $\bar{\sigma}(z) = a_j$ com $1 \leq i, j \leq n$. Caso $i = j$, teremos $\tilde{\sigma} = \bar{\sigma}$ e disto segue que σ terá exatamente n levantamentos distintos, digamos $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n$.

Podemos então definir

$$\begin{aligned} \Phi : S_k(X) &\rightarrow S_k(\tilde{X}) \\ \sigma &\mapsto \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i \end{aligned}$$

A aplicação Φ é um homomorfismo de complexos de cadeias e logo, induz os homomorfismos

$$\Phi_* : H_k(X; A) \rightarrow H_k(\tilde{X}; A) \text{ e } \Phi^* : H^k(\tilde{X}; A) \rightarrow H^k(X; A)$$

com A um grupo de coeficientes qualquer.

Definição 3.5.1 *Os homomorfismos Φ_* e Φ^* (que aqui denotaremos por τ_X) são chamados de homomorfismos transfer.*

Proposição 3.5.1 *Se X é um CW-complexo k -dimensional, G um grupo finito atuando em X e R um anel com unidade. Então o homomorfismo transfer $\tau^* : H^k(X; R) \rightarrow H^k(X/G; R)$ é sobrejetor.*

Demonstração: A ideia da demonstração é considerar o complexo de cocadeias $S^j(-, R) = \text{Hom}(S_j(-, R), R)$, onde $S_j(-, R)$ é o módulo livre gerado pelas j -células abertas. Como X é um G -complexo, então X/G tem a CW-estrutura reduzida; em particular, sendo $|G| = r$, se $\{e_\alpha\}$ são as k -células de X/G , então para cada α existem exatamente r k -células $e_\alpha^1, \dots, e_\alpha^r$ de X levadas pela projeção π em e_α (pois a G -ação, com $|G| = r$, implica em um recobrimento de r -folhas, com aplicação característica $\tilde{\phi}_\alpha^i$ tal que $\pi \circ \tilde{\phi}_\alpha^i = \phi_\alpha$). Neste caso o homomorfismo transfer $\tau^* : H^k(X; R) \rightarrow H^k(X/G; R)$ é o homomorfismo induzido pela aplicação de cocadeia $\Phi : S^k(X, R) \rightarrow S^k(X/G, R)$ dada por

$$\Phi(\mu)(e_\alpha) = \mu(e_\alpha^1) + \dots + \mu(e_\alpha^r),$$

onde $\mu \in \text{Hom}(S_k(X, R), R)$. Considere o k -cociclo $\eta \in S^k(X/G, R)$. Definimos uma k -cocadeia $\eta' \in S^k(X, R)$ por $\eta'(e_\alpha^j) = \eta(e_\alpha)$ se $j = 1$ e $\eta'(e_\alpha^j) = 0$ se $j \neq 1$ para todo α . Logo,

$$\Phi(\eta')(e_\alpha) = \eta'(e_\alpha^1) + \dots + \eta'(e_\alpha^r) = \eta'(e_\alpha^1) = \eta(e_\alpha),$$

ou seja, $\Phi(\eta') = \eta$. Mais ainda, como $\dim X = k$, então $S^{k+1}(X, R) = 0$ e então toda k -cocadeia de X é um k -cociclo. Assim, η' representa uma classe de cohomologia de $H^k(X, R)$ que é levada em $[\eta]$ por τ_X , de onde segue que τ_X é sobrejetor. $\square$

Um critério para a existência de (H,G)-coincidência de aplicações

Este capítulo tem como objetivo o estudo detalhado de um critério para a existência de (H, G) -coincidências de aplicações de um espaço paracompacto, Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminhos em um CW-complexo finito (apresentado na referência [11]). As principais referências para este capítulo são [10] e [11].

4.1 Sobre (H, G) -coincidência de aplicações

Definição 4.1.1 *Considere X um G -espaço e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que f **possui uma G -coincidência** se aplica uma órbita de algum elemento $x \in X$ em um único ponto, ou seja, se*

$$f(G(x)) = \{f(x)\}$$

onde $G(x) = \{gx; g \in G\}$.

Perceba que isto é equivalente a afirmar que $f(gx) = f(x)$ para todo $g \in G$.

Agora, considere X um G -espaço e H um subgrupo de G . Para cada $x \in X$, considere $G(x)$ a órbita do elemento x de X . Então H atua à direita em cada órbita $G(x)$ de G da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} G(x) \times H &\rightarrow G(x) \\ (gx, h) &\mapsto ghx \end{aligned}$$

De fato, temos

$$(i) \quad (gx) \cdot e = gex = gx,$$

$$(ii) \quad (gx) \cdot (h_1 h_2) = g(h_1 h_2)x = gh_1 h_2 x = (gh_1 x) \cdot h_2 = ((gx) \cdot h_1) \cdot h_2,$$

para todo $gx \in G(x)$ e $h_1, h_2 \in H$

Para cada $y \in G(x)$, temos $yH = \{yh; h \in H\}$ a órbita da ação de H em $y \in G(x)$. Assim, o conceito de G -coincidência pode ser generalizado da seguinte forma:

Definição 4.1.2 *Suponha que X é um G -espaço e H um subgrupo de G . Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ **possui uma (H, G) -coincidência** se existe um ponto $x \in X$ tal que f aplica cada órbita da ação de H na G -órbita de x em um único ponto, isto é,*

$$f(ghx) = f(gx), \text{ para todo } h \in H.$$

Observação 4.1.1 *Seja X um G -espaço, H um subgrupo de G e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Então*

(a) se H é o subgrupo trivial de G , então é claro que todo ponto de X é um ponto de (H, G) -coincidência;

(b) se $H = G$ então um ponto de (H, G) -coincidência é um ponto de G -coincidência. De fato, considere $x \in X$ um ponto de (H, G) -coincidência para f , com $H = G$. Agora, tome $x = ex \in G(x)$, onde e é o elemento neutro de G . Como x é um ponto de (H, G) -coincidência, então $f(ehx) = f(ex)$ para todo $h \in H$, isto é, $f(hx) = f(x)$ para todo $h \in H$. Mas como $G = H$, então $f(gx) = f(x)$ para todo $g \in G$ e logo x é um ponto de G -coincidência para f .

4.2 Critério para (H,G) -coincidência de aplicações

Esta seção tem como principal objetivo um estudo detalhado do critério apresentado em [11], que visa o estudo da existência de (H, G) -coincidências para uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, bem como comparar este critério com o resultado apresentado em [10].

Em [10], D. L. Gonçalves, J. Jaworowski e P. L. Q. Pergher demonstraram o seguinte resultado:

Proposição 4.2.1 *Seja G um grupo finito atuando livremente sobre um CW-complexo X que tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{S}^m$ e seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, onde Y é um CW-complexo finito de dimensão k . Então, se $m \geq |G|k$, existe um subgrupo não trivial H de G e um ponto de (H, G) -coincidência para f .*

Por outro lado, em [11], A. Volovikov, D. L. Gonçalves, J. Jaworowski e P. L. Q. Pergher provaram o seguinte Teorema:

Teorema 4.2.1 *Seja X um espaço paracompacto, Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminhos e G um grupo finito atuando livremente sobre X . Suponha que existe $m \in \mathbb{Z}$, com $m \geq 1$, de modo que $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ para $0 < i < m$ e $H^{m+1}(G; \mathbb{Z}) \neq 0$. Se Y é um CW-complexo finito de dimensão k com $m \geq |G|k$ e $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, então existe um subgrupo $H \subset G$ não trivial e um ponto de (H, G) -coincidência para f .*

Perceba que dados um grupo G e um espaço X satisfazendo as condições da Proposição 4.2.1, sabemos que G atua livremente sobre uma esfera de homotopia de dimensão m e assim, pelo Corolário 2.7.1 sabemos que $H^{m+1}(G; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{|G|}$, de onde segue que $H^{m+1}(G; \mathbb{Z}) \neq 0$ com $m \geq 1$. Além disso, como X é uma esfera de homotopia, temos $H_i(X; \mathbb{Z}) = H_i(\mathbb{S}^m; \mathbb{Z}) = 0$ para $0 < i < m$. Mais ainda, por ser um CW-complexo, sabemos que X é ainda um espaço paracompacto, Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminhos. Assim, conclui-se que o Teorema 4.2.1 é uma generalização para a Proposição 4.2.1.

Para os resultados a seguir, vamos supor que o grupo G e o espaço X satisfaçam as condições do Teorema 4.2.1 (a menos que seja dito o contrário).

Considere o G -fibrado principal $\pi : X \rightarrow X/G$ e $c : X/G \rightarrow BG$ a aplicação classificante para o G -fibrado principal π .

Lema 4.2.1 *Seja p um primo divisor de $|H^{m+1}(G; \mathbb{Z})|$. Então o homomorfismo*

$$c^* : H^m(BG; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^m(X/G; \mathbb{Z}_p)$$

é injetor (e não é trivial pela Proposição 2.6.2).

Demonstração: Primeiro, vamos considerar a fibração de Borel associada ao G -espaço X , ou seja, a fibração dada por $X \hookrightarrow X_G \xrightarrow{p} BG$. Como G é um grupo finito que atua livremente sobre X , então segue da Observação 3.3.3 que X_G é homotopicamente equivalente a X/G . Se $h : X/G \rightarrow X_G$ é uma equivalência de homotopia, então pela Observação 3.3.4 sabemos que $\rho \circ h : X/G \rightarrow BG$ também classifica o G -fibrado principal $\pi : X \rightarrow X/G$, ou seja, $(\rho \circ h)^!(EG) = X$, e logo $\rho \circ h \sim c$. Disto conclui-se que $h^* \circ \rho^* = (\rho \circ h)^* = c^*$. Perceba que, se ρ^* é injetora, então dados $\alpha, \beta \in H^m(BG; \mathbb{Z}_p)$ e sabendo que h é equivalência de homotopia, temos

$$c^*(\alpha) = c^*(\beta) \Rightarrow h^*(\rho^*(\alpha)) = h^*(\rho^*(\beta)) \Rightarrow \rho^*(\alpha) = \rho^*(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$$

e logo, teremos c^* injetora (pois h^* é isomorfismo). Assim, para concluir o que desejamos, basta verificar que o homomorfismo $\rho^* : H^m(BG; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)$ é injetor. Considere a sequência

espectral cohomológica $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ associada à fibração $\rho : X_G \rightarrow BG$ (como no Teorema 3.4.1) na qual $E_2^{p,q} \simeq H^p(BG; H^q(X; \mathbb{Z}_p))$. Por hipótese do Teorema 4.2.1, sabemos que $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ para $0 < i < m$. Daí, pelo Teorema dos Coeficientes Universais para cohomologia segue que $H^i(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ quando $0 < i < m$. Desta forma,

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &\simeq H^p(BG; H^q(X; \mathbb{Z}_p)) \\ &\simeq \text{Hom}(H_p(BG; \mathbb{Z}), H^q(X; \mathbb{Z}_p)) \oplus \text{Ext}(H_{p-1}(BG; \mathbb{Z}_p), H^q(X; \mathbb{Z}_p)) \\ &= \text{Hom}(H_p(BG; \mathbb{Z}_p), 0) \oplus \text{Ext}(H_{p-1}(BG; \mathbb{Z}_p), 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

sempre que $0 < q < m$. Além disso, como a E_2 -sequência espectral do Teorema de Leray-Serre é de primeiro quadrante, então $E_N^{p,q} = 0$ para todo $N \geq 2$ quando $p < 0$ ou $q < 0$. Assim, como $E_{r+1}^{p,q} = H(E_r^{p,q})$ segue que $E_N^{p,q} = 0$ quando $0 < q < m$. Logo,

$$E_{r+1}^{m,0} = \frac{\text{Ker}(d_r^{m,0} : E_r^{m,0} \rightarrow E_r^{m+r,1-r})}{\text{Im}(d_r^{m-r,r-1} : E_r^{m-r,r-1} \rightarrow E_r^{m,0})} = E_r^{m,0}$$

pois $E_r^{m+r,1-r} = E_r^{m-r,r-1} = 0$ já que acontecerá $1-r < 0$ e $0 < r-1 < m$ ou $1-r < 0$ e $m-r < 0$. Disto conclui-se que $E_2^{m,0} = E_3^{m,0} = \dots = E_\infty^{m,0}$. Pela observação 3.4.1, sabemos que a sequência curta

$$0 \rightarrow E_\infty^{m,0} \rightarrow H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow E_\infty^{0,m} \rightarrow 0$$

é exata. Daí, como $E_\infty^{m,0} = E_2^{m,0} = H^m(BG; \mathbb{Z}_p)$, então por [[22], Lema 3.1.9, pg. 45] temos que a sequência curta

$$0 \rightarrow H^m(BG; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\rho^*} H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow E_\infty^{0,m} \rightarrow 0$$

é exata e logo, $\text{Ker}(\rho^*) = \{0\}$, de onde segue que ρ^* é injetora. Portanto c^* é injetora, como queríamos. $\square$

Lema 4.2.2 *Seja X um espaço de Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminhos, e seja G um grupo finito com r elementos atuando livremente sobre X . Então para todo $i \geq 0$ e qualquer anel comutativo com unidade R , existe um homomorfismo transfer*

$$\tau_X : H^i(X; R) \rightarrow H^i(X/G; R)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Se X é um G -complexo k -dimensional (não necessariamente finito), então $\tau_X : H^k(X; R) \rightarrow H^k(X/G; R)$ é sobrejetor;

(ii) Se Y é outro espaço que satisfaz as hipóteses do lema, $h : X \rightarrow Y$ é uma aplicação

G -equivariante qualquer e $\bar{h} : X/G \rightarrow Y/G$ é a aplicação induzida por h , então

$$\tau_X \circ h^* = \bar{h}^* \circ \tau_Y$$

com $h^* : H^i(Y; R) \rightarrow H^i(X; R)$ e $\bar{h}^* : H^i(Y/G; R) \rightarrow H^i(X/G; R)$.

Demonstração: Primeiro, vamos definir τ_X no nível das cocadeias. Seja $\mu \in S^i(X; R)$ uma i -cocadeia, ou seja, μ é um R -homomorfismo do R -módulo das i -cadeias $S_i(X; R)$ em R . Considere um i -simplexo padrão $\Delta_i \subset \mathbb{R}^{i+1}$ e fixe um ponto $z \in \Delta_i$. Mais ainda, tome $\phi : \Delta_i \rightarrow X/G$ um i -simplexo singular e seja $\pi : X \rightarrow X/G$ a projeção quociente. Note que como G atua livremente sobre X , então $gx \neq x$ para todo $x \in X$ e logo $G(x) = \{x, g_1x, \dots, g_{r-1}x\}$. Além disso, como X é Hausdorff, G é finito e atua livremente sobre X , então por [[29], pg. 87] segue que G é propriamente descontínuo. Logo, pela Proposição 1.3.7 temos $\pi : X \rightarrow X/G$ uma projeção de recobrimento, com $\pi^{-1}(\bar{x}) = G(x)$ (onde $\pi(x) = \bar{x}$), de onde segue que π é um recobrimento de r -folhas. Assim, sabemos que o i -simplexo singular $\phi \in S_i(X; R)$ terá exatamente r levantamentos distintos $\phi_1, \dots, \phi_r$, com $\phi_j : \Delta_i \rightarrow X$ e $1 \leq j \leq r$. Defina então a i -cocadeia $\bar{\mu} \in S^i(X/G; R)$ por

$$\bar{\mu}(\phi) = \mu(\phi_1) + \dots + \mu(\phi_r) = \sum_{i=1}^r \mu(\phi_i)$$

e tome $\Phi_i : S^i(X; R) \rightarrow S^i(X/G; R)$ por $\Phi_i(\mu) = \bar{\mu}$. Perceba que Φ_i é R -linear, pois

$$\begin{aligned} \Phi_i(r\mu + \nu)(\phi) &= (\overline{r\mu + \nu})(\phi) \\ &= \sum_{i=1}^r (r\mu + \nu)(\phi_i) \\ &= \sum_{i=1}^r (r\mu)(\phi_i) + \sum_{i=1}^r \nu(\phi_i) \\ &= r \sum_{i=1}^r \mu(\phi_i) + \sum_{i=1}^r \nu(\phi_i) \\ &= r \Phi_i(\mu)(\phi) + \Phi_i(\nu)(\phi) \end{aligned}$$

Agora, vamos verificar que Φ_i leva cociclos em cociclos e cobordos em cobordos (isto é, se μ for um cociclo ou um cobordo, $\bar{\mu}$ também o será). Primeiro, vamos demonstrar que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^i(X; R) & \xrightarrow{\delta^i} & S^{i+1}(X; R) \\ \Phi_i \downarrow & & \downarrow \Phi_{i+1} \\ S^i(X/G; R) & \xrightarrow{\bar{\delta}^i} & S^{i+1}(X/G; R) \end{array}$$

ou seja, para todo $\mu \in S^i(X; R)$ vale a igualdade $(\Phi_{i+1} \circ \delta^i)(\mu) = (\bar{\delta}^i \circ \Phi_i)(\mu)$. Seja $\phi \in$

$S_{i+1}(X/G; R)$, isto é, $\phi : \Delta_{i+1} \rightarrow X/G$. Denotemos por $\phi(k)$ a k -ésima face do simplexo singular ϕ . Sabemos que $\phi(k)$ é um i -simplexo singular, e logo, $\phi(k) = \phi \circ i$ onde $i : \Delta_i \hookrightarrow \Delta_{i+1}$. Daí, como Δ_i é conexo por caminhos, então $\phi(k)$ terá exatamente r levantamentos. Além disso, note que como $\phi(k) = \phi \circ i = \phi|_{i(\Delta_i)}$ então, sendo ϕ_j um levantamento de ϕ ,

$$\phi(k) = \phi|_{i(\Delta_i)} = (\pi \circ \phi_j)|_{i(\Delta_i)} = \pi \circ (\phi_j)|_{i(\Delta_i)} = \pi \circ \phi_j(k),$$

de onde concluímos que a k -ésima face do levantamento ϕ_j é justamente um levantamento da k -ésima face de ϕ , ou seja, $\phi_j(k) = (\phi(k))_l$ para algum $1 \leq l \leq r$. Assim, denotando ∂_* e $\bar{\partial}_*$ os operadores bordo dos complexos de cadeia $S_*(X; R)$ e $S_*(X/G; R)$ respectivamente, e sabendo

que $\partial_{i+1}(\phi) = \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \phi(k)$ e que $\delta^i(\mu) = \mu \circ \partial_{i+1}$, temos

$$\begin{aligned} (\Phi_{i+1} \circ \delta^i)(\mu)(\phi) &= \overline{\delta^i(\mu)}(\phi) = \sum_{i=1}^r \delta^i(\mu)(\phi_j) \\ &= \sum_{i=1}^r (\mu \circ \partial_{i+1})(\phi_j) = \sum_{i=1}^r \mu(\partial_{i+1}(\phi_j)) \\ &= \sum_{i=1}^r \mu \left(\sum_{j=1}^{i+1} (-1)^k \phi_j(k) \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\bar{\delta}^i \circ \Phi_i)(\mu)(\Phi) &= (\Phi_i(\mu) \circ \bar{\partial}_{i+1})(\phi) = (\bar{\mu} \circ \bar{\partial}_{i+1})(\phi) \\ &= \bar{\mu}(\bar{\partial}_{i+1}(\phi)) = \bar{\mu} \left(\sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \phi(k) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \bar{\mu}(\phi(k)) = \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \left(\sum_{l=1}^r \mu((\phi(k))_l) \right) \\ &= \sum_{l=1}^r \mu \left(\sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k (\phi(k))_l \right). \end{aligned}$$

Como os r levantamentos de ϕ e de $\phi(k)$ são distintos, então para que ϕ_i e ϕ_j correspondessem com o mesmo $(\phi(k))_l$, teríamos $\phi_i(k) = \phi_j(k)$ e assim, existiria algum $x \in \Delta_{i+1}$ de modo que $\phi_i(x) = \phi_j(x)$, o que não pode ocorrer. Assim, concluímos que $\Phi_{i+1} \circ \delta^i = \bar{\delta}^i \circ \Phi_i$. Neste caso, Φ_i leva cociclos em cociclos e cobordos em cobordos, pois:

• Dado $\phi \in S_{i+1}(X; R)$, caso μ for um cociclo, teremos $\delta^i(\mu)(\phi) = 0$. Assim, para $\phi' \in S_{i+1}(X/G; R)$ e $\phi'_1, \dots, \phi'_r \in S_{i+1}(X; R)$ seus r levantamentos, temos $\delta^i(\mu)(\phi'_j) = 0$ para $1 \leq j \leq r$, de onde segue que

$$\bar{\delta}^i(\bar{\mu})(\phi') = (\bar{\delta}^i \circ \Phi_i)(\mu)(\phi') = (\Phi_{i+1} \circ \delta^i)(\mu)(\phi') = (\overline{\delta^i \circ \mu})(\phi') = \sum_{i=1}^r \delta^i(\mu)(\phi'_i) = 0$$

e logo, $\bar{\mu}$ é um cociclo.

• Caso μ for um cobordo, sabemos que existe algum $\nu \in S^{i-1}(X; R)$ tal que $\delta^{i-1}(\nu) = \mu$. Logo, como $\Phi_i \circ \delta^{i-1} = \bar{\delta}^{i-1} \circ \Phi_{i-1}$, então

$$\bar{\delta}^{i-1}(\bar{\nu}) = \bar{\delta}^{i-1}(\Phi_{i-1}(\nu)) = (\Phi_i(\delta^{i-1}(\nu))) = \Phi_i(\mu) = \bar{\mu}$$

e logo, $\bar{\mu}$ é um cobordo. Portanto, concluímos que $\Phi = \{\Phi_i\}$ é uma aplicação de cocadeia e assim podemos definir o homomorfismo transfer $\tau_X : H^i(X; R) \rightarrow H^i(X/G; R)$ por $\tau_X[\mu] = [\bar{\mu}]$.

Agora, seja $h : X \rightarrow Y$ uma aplicação G -equivariante e considere a aplicação induzida nos espaços de órbitas $\bar{h} : X/G \rightarrow Y/G$. Sendo $\pi_X : X \rightarrow X/G$ e $\pi_Y : Y \rightarrow Y/G$ as projeções quocientes, perceba que $\bar{h} \circ \pi_X = \pi_Y \circ h$, pois dado $x \in X$, temos

$$(\bar{h} \circ \pi_X)(x) = \bar{h}(\pi_X(x)) = \bar{h}(\bar{x}) = \overline{h(x)} = \pi_Y(h(x)) = (\pi_Y \circ h)(x)$$

e assim, segue que as aplicações induzidas para complexos de cadeias $(\pi_Y)_\# \circ h_\# = \bar{h}_\# \circ (\pi_X)_\#$. Vamos verificar que o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} H^i(Y; R) & \xrightarrow{h^*} & H^i(X; R) \\ \tau_Y \downarrow & & \downarrow \tau_X \\ H^i(Y/G; R) & \xrightarrow{\bar{h}^*} & H^i(X/G; R) \end{array}$$

comuta, ou seja, que $\bar{h}^* \circ \tau_Y = \tau_X \circ h^*$. Vamos denotar por Φ_X e Φ_Y as aplicações de modo que $\Phi_X^* = \tau_X$ e $\Phi_Y^* = \tau_Y$. Perceba que esta igualdade vale se para todo $[\mu] \in H^i(Y; R)$, tivermos $[\Phi_Y(\mu) \circ \bar{h}_\#] = [\Phi_X(\mu \circ h_\#)]$, onde $\Phi_X^* = \tau_X$ e $\Phi_Y^* = \tau_Y$. Para tal, vamos verificar a igualdade em nível de cadeia. Seja $\phi \in S_i(X/G; R)$ um simplexo singular e $\phi_j \in S_i(X; R)$, com $1 \leq j \leq r$, os r levantamentos distintos de ϕ . Temos

$$\begin{aligned} \Phi_X(\mu \circ h_\#)(\phi) &= (\overline{\mu \circ h_\#})(\phi) = (\mu \circ h_\#)(\phi_1) + \dots + (\mu \circ h_\#)(\phi_r) \\ &= \mu(h \circ \phi_1) + \dots + \mu(h \circ \phi_r) \end{aligned}$$

e por outro lado, sabendo que $\pi_X \circ \phi_j = \phi$, temos

$$\begin{aligned} (\Phi_Y(\mu) \circ \bar{h}_\#)(\phi) &= (\Phi_Y(\mu) \circ \bar{h}_\#)(\pi_X \circ \phi_j) = (\Phi_Y(\mu) \circ \bar{h}_\#)(\pi_X)_\#(\phi_j) \\ &= (\Phi_Y(\mu) \circ \bar{h}_\# \circ (\pi_X)_\#)(\phi_j) = (\Phi_Y(\mu) \circ (\pi_Y)_\# \circ h_\#)(\phi_j) \\ &= (\Phi_Y(\mu) \circ (\pi_Y)_\#)(h \circ \phi_j) = (\Phi_Y(\mu))(\pi_Y \circ h \circ \phi_j) \\ &= \bar{\mu}(\pi_Y \circ h \circ \phi_j) \end{aligned}$$

Mas note que para cada i , com $1 \leq i \leq r$, os r levantamentos para $\pi_Y \circ h \circ \phi_i$ são justamente $h \circ \phi_j$ com $1 \leq j \leq r$, e disto segue que $\bar{\mu}(\pi_Y \circ h \circ \phi_j) = \mu(h \circ \phi_1) + \dots + \mu(h \circ \phi_r)$ e portanto, $\bar{h}^* \circ \tau_Y = \tau_X \circ h^*$. Para concluir a prova do lema resta apenas mostrar que τ_X é sobrejetora, mas isso verifica-se de modo análogo à Proposição 3.5.1. $\square$.

Agora, considere $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ uma enumeração fixa dos elementos de G (onde $|G| = r$).

Sendo $Y^r = Y \times \dots \times Y$, definimos

$$\begin{aligned} G \times Y^r &\rightarrow Y^r \\ (g, (y_1, \dots, y_r)) &\mapsto (y_{\sigma_g(1)}, \dots, y_{\sigma_g(r)}) \end{aligned}$$

onde σ_g é definida por $g_i g = g_{\sigma_g(i)}$. Esta aplicação é uma G -ação sobre Y^r , pois

(i) Como $g_i e = g_i$ para todo $1 \leq i \leq r$, então $\sigma_e(i) = i$ para todo i e logo,

$$e \cdot (y_1, \dots, y_r) = (y_{\sigma_e(1)}, \dots, y_{\sigma_e(r)}) = (y_1, \dots, y_r).$$

(ii) Dados $g, h \in G$, temos

$$\begin{cases} (gh) \cdot (y_1, \dots, y_r) = (y_{\sigma_{gh}(1)}, \dots, y_{\sigma_{gh}(r)}), \text{ onde } g_i(gh) = g_{\sigma_{gh}(i)}, \\ g \cdot (h \cdot (y_1, \dots, y_r)) = g \cdot (y_{\sigma_h(1)}, \dots, y_{\sigma_h(r)}) = g \cdot (x_1, \dots, x_r), \text{ onde } x_i = y_{\sigma_h(i)}. \end{cases}$$

Daí, como $g \cdot (x_1, \dots, x_r) = (x_{\sigma_g(1)}, \dots, x_{\sigma_g(r)}) = (y_{\sigma_h(\sigma_g(1))}, \dots, y_{\sigma_h(\sigma_g(r))})$ e sabendo que

$$g_{\sigma_h(\sigma_g(i))} = g_{\sigma_g(i)} h = (g_i g) h = g_i(gh) = g_{\sigma_{gh}(i)},$$

conclui-se que $\sigma_h(\sigma_g(i)) = \sigma_{gh}(i)$.

Disto segue que a aplicação definida anteriormente é uma G -ação sobre Y^r .

Exemplo 4.2.1 Seja $G = \{1 = g_1, t = g_2, t^2 = g_3\}$. Assim, temos as permutações $g_1 t^2 = g_3$, $g_2 t^2 = g_1$, $g_3 t^2 = g_2$, $g_1 t = g_2$, $g_2 t = g_3$, $g_3 t = g_1$, $g_1 1 = g_1$, $g_2 1 = g_2$ e $g_3 1 = g_3$. Portanto, teremos

$$\begin{cases} 1 \cdot (y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3), \\ t \cdot (y_1, y_2, y_3) = (y_2, y_3, y_1), \\ t^2 \cdot (y_1, y_2, y_3) = (y_3, y_1, y_2). \end{cases}$$

Nos resultados seguintes, as ações de grupos utilizadas são exatamente a ação definida anteriormente.

Lema 4.2.3 Seja H um subgrupo de G e $(Y^r)^H = \{x \in Y^r; h \cdot x = x \text{ para todo } h \in H\}$ o conjunto dos pontos fixos pela ação de H e $F = \bigcup_H (Y^r)^H$ com H percorrendo todos os subgrupos não triviais de G . Então a ação de G em $Y_0^{(r)} = Y^r - F$ é livre.

Demonstração: Seja $x_0 \in F$. Então existe algum H subgrupo de G de modo que $x_0 \in (Y^r)^H$, ou seja, para todo elemento $h \in H$ temos $h \cdot x_0 = x_0$. Como H é um subgrupo não trivial de G , existe algum h diferente do elemento neutro tal que $h \cdot x_0 = x_0$, de onde concluímos que a ação de G em F não é livre. Agora, seja $x \in Y^r$ de modo que exista algum $g \in G$ tal que

$g \cdot x = x$, onde g não é o elemento neutro de G . Tome $H = \langle g \rangle$. Como g não é o elemento trivial, temos H um subgrupo não trivial de G de modo que $g^j \cdot x = g \cdot (g \dots (g \cdot x)) = x$ e assim, $x \in (Y^r)^H \subset F$. Disto segue que se G não atua livremente sobre x , então $x \in F$. Portanto, G atua livremente sobre $Y_0^{(r)}$. $\square$

Lema 4.2.4 *Seja X um G -espaço e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. A aplicação $\phi : X \rightarrow Y^r$ dada por $\phi(x) = (f(g_1 \cdot x), \dots, f(g_r \cdot x))$ é G -equivariante.*

Demonstração: De fato, como

$$\begin{cases} \phi(g \cdot x) = (f(g_1 \cdot (g \cdot x)), \dots, f(g_r \cdot (g \cdot x))) = (f(g_{\sigma_g(1)} \cdot x), \dots, f(g_{\sigma_g(r)} \cdot x)), \\ g \cdot \phi(x) = g \cdot (f(g_1 \cdot x), \dots, f(g_r \cdot x)) = g \cdot (y_1, \dots, y_r), \text{ onde } y_i = f(g_i \cdot x) \end{cases}$$

Desta maneira, sabendo que $g \cdot (y_1, \dots, y_r) = (y_{\sigma_g(1)}, \dots, y_{\sigma_g(r)}) = (f(g_{\sigma_g(1)} \cdot x), \dots, f(g_{\sigma_g(r)} \cdot x))$, concluímos que $\phi(g \cdot x) = g \cdot \phi(x)$ e portanto, ϕ é uma aplicação G -equivariante. $\square$

Lema 4.2.5 *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se f não possui (H, G) -coincidências para todo subgrupo não trivial $H \subset G$, então $\phi(X) \subset Y_0^{(r)}$, onde ϕ é como definida como no Lema 4.2.4.*

Demonstração: Note que se ação de G sobre $\phi(X)$ for livre, então teremos $\phi(X) \subset Y_0^{(r)}$. Suponha então que a ação de G sobre $\phi(X)$ não seja livre. Então existe um elemento $t \in G$, onde t não é o elemento neutro, de modo que $t \cdot \phi(x) = \phi(x)$ para algum $x \in X$. Logo, pelo Lema 4.2.3, sabemos que $\phi(x) \in F$ e portanto $\phi(x) \in (Y^r)^H$ para algum subgrupo não trivial H de G , de onde segue que $h \cdot \phi(x) = \phi(x)$ para todo $h \in H$. Por outro lado, sabemos que a aplicação ϕ é G -equivariante (pelo Lema 4.2.4) e portanto, como $h \cdot \phi(x) = \phi(x)$, temos $\phi(h \cdot x) = \phi(x)$ para todo $h \in H$. Daí, $(f((g_1 h) \cdot x), \dots, f((g_r h) \cdot x)) = (f(g_1 \cdot x), \dots, f(g_r \cdot x))$ para todo $h \in H$, ou seja, $f((g_i h) \cdot x) = f(g_i \cdot x)$ para todo $1 \leq i \leq r$. Mas como $G = \{g_1, \dots, g_r\}$, então segue que $f(gh \cdot x) = f(g \cdot x)$ para todo $h \in H$ e todo $g \in G$. Desta forma, concluímos que f tem um ponto de (H, G) -coincidência, o que é um absurdo. Logo, a G -ação sobre $\phi(X)$ é livre e portanto, $\phi(X) \subset Y_0^{(r)}$. $\square$

4.2.1 Demonstração do Teorema 4.2.1

Seja $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ um grupo finito (com enumeração fixada de seus elementos), Y um CW-complexo finito de dimensão k e considere a G -ação sobre $Y^r = Y \times \dots \times Y$ por

$$\begin{aligned} G \times Y^r &\rightarrow Y^r \\ (g, (y_1, \dots, y_r)) &\mapsto (y_{\sigma_g(1)}, \dots, y_{\sigma_g(r)}) \end{aligned}$$

onde σ_g é definida por $g_i g = g_{\sigma_g(i)}$.

Dado H um subgrupo de G , vamos considerar o conjunto $(Y^r)^H$ dos elementos de Y^r que são fixados pela ação dos elementos de H (como definido no Lema 4.2.3) e, considerando somente

os subgrupos não triviais de G , tome os conjuntos $F = \bigcup_H (Y^r)^H$ e $Y_0^{(r)} = Y^r - F$ (também como definido no Lema 4.2.3). A ação de G sobre os elementos de $Y_0^{(r)}$ é livre (pelo Lema 4.2.3). Com esta G -ação sobre Y^r , é possível induzir uma estrutura de G -complexo sobre $Y_0^{(r)}$ pela estrutura de CW-complexo para o espaço Y : de fato, considere sobre Y^r a estrutura de CW-complexo produto usual. Caso e^j seja uma j -célula aberta de Y^r de modo que $e^j \cap F \neq \emptyset$, então $e^j - F$ será união disjunta de s -células abertas $e_1^s, \dots, e_{t_s}^s$, onde $0 \leq s \leq j$, e então cada e_i^s pode ser subdividida em células abertas de modo que elas sejam livremente permutadas pelos elementos de G . A G -estrutura sobre $Y_0^{(r)}$ é então dada pela união destas células com as células abertas e^j de Y^r tais que $e^j \cap F = \emptyset$.

Agora, considere X um G -espaço satisfazendo as condições do Teorema 4.2.1 e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Assim, sabemos pelo Lema 4.2.4 que $\phi : X \rightarrow Y^r$ dada por $\phi(x) = (f(g_1 \cdot x), \dots, f(g_r \cdot x))$ é G -equivariante. Suponha que a aplicação f não tem pontos de (H, G) -coincidência para qualquer subgrupo não trivial H de G . Então, pelo Lema 4.2.5 temos $\phi(X) \subset Y_0^{(r)}$ e logo, podemos fatorar a aplicação ϕ através de $Y_0^{(r)}$, $\phi : X \xrightarrow{\phi_0} Y_0^{(r)} \hookrightarrow Y^r$. Disto segue que a aplicação ϕ_0 é G -equivariante e assim, induz a aplicação dos espaços de órbitas $\overline{\phi_0} : X/G \rightarrow Y_0^{(r)}/G$. Agora, considere a projeção quociente $\pi_{Y_0^{(r)}} : Y_0^{(r)} \rightarrow Y_0^{(r)}/G$. Como $Y_0^{(r)}$ é um CW-complexo, então é paracompacto e Hausdorff e daí, segue do Teorema 3.1.2 que $\pi_{Y_0^{(r)}} : Y_0^{(r)} \rightarrow Y_0^{(r)}/G$ é um G -fibrado principal. Por outro lado, considere $c_Y : Y_0^{(r)}/G \rightarrow BG$ uma aplicação classificante para tal fibrado principal (que existe pelo Teorema 3.3.3). Então, segue da Observação 3.3.2 que a aplicação $c = c_Y \circ \overline{\phi_0} : X/G \rightarrow BG$ é uma aplicação classificante para o G -fibrado principal $\pi_X : X \rightarrow X/G$.

Considere agora p um primo divisor de $|H^{m+1}(G; \mathbb{Z})|$. Vamos analisar os casos da desigualdade $m \geq rk$.

- Primeiro, vamos considerar o caso $m > rk$.

Como Y é um CW-complexo de dimensão k , então $\dim Y^r = rk$. Além disso, como sabemos que $Y_0^{(r)} \subset Y^r$, então temos $\dim Y_0^{(r)}/G \leq \dim Y^r$, de onde segue que a dimensão topológica de $Y_0^{(r)}/G$ é menor do que m . Logo $H^m(Y_0^{(r)}/G; \mathbb{Z}_p) = 0$ e daí $c_Y^* : H^m(BG; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^m(Y_0^{(r)}/G; \mathbb{Z}_p)$ é o homomorfismo nulo. Desta maneira, o homomorfismo

$$c^* = (c_Y \circ \overline{\phi_0})^* = \overline{\phi_0}^* \circ c_Y^* : H^m(BG; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^m(X/G; \mathbb{Z}_p)$$

é nulo, o que contradiz o Lema 4.2.1.

- Agora, vamos considerar o caso $m = rk$.

Primeiro, vamos tomar a sequência cohomológica do par $(Y^r, Y_0^{(r)})$:

$$\dots \rightarrow H^m(Y^r; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{i^*} H^m(Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{m+1}(Y^r, Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \dots$$

onde $i^* : H^m(Y^r; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^m(Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p)$ é a induzida pela inclusão $Y_0^{(r)} \hookrightarrow Y^r$. Sabendo que

$\dim Y^r = rk < m + 1$, segue que $H_{m+1}(Y^r, Y_0^{(r)}) = 0$ e assim, pelo Teorema dos Coeficientes Universais, temos

$$\begin{aligned} H^{m+1}(Y^r, Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p) &\simeq Hom(H_{m+1}(Y^r, Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p) \oplus Ext(H_m(Y^r, Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois $H_m(Y^r, Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p)$ é abeliano livre. Assim, como a sequência é exata, temos que $Im(i^*)$ coincide com $Ker(H^m(Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{m+1}(Y^r, Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p))$, e portanto $Im(i^*) = H^m(Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p)$, isto é, i^* é sobrejetor.

Por outro lado, sabemos por hipótese que $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ para $0 < i < m$. Daí, segue novamente pelo Teorema dos Coeficiente Universais que $H^i(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ quando $0 < i < m$, pois

$$\begin{cases} H^i(X; \mathbb{Z}_p) \simeq Hom(H_i(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \oplus Ext(H_{i-1}(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) = 0, & \text{quando } 1 < i < m; \\ H^1(X; \mathbb{Z}_p) \simeq Hom(H_1(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \oplus Ext(H_0(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) = 0 \end{cases}$$

pois X é conexo por caminhos, de onde segue que $H_0(X; \mathbb{Z}) = 0$.

Observe que podemos escrever a aplicação ϕ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\psi} X \times \dots \times X && \xrightarrow{f^r} Y \times \dots \times Y \\ x &\mapsto (g_1 \cdot x, \dots, g_r \cdot x) && \mapsto (f(g_1 \cdot x), \dots, f(g_r \cdot x)) \end{aligned}$$

ou seja, $\phi = f^r \circ \psi$, o que implica que $\phi^* = \psi^* \circ (f^r)^*$. Assim, aplicando a Fórmula de Kunneth, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^m(Y^r; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\alpha_1} & \sum_{p_1 + \dots + p_r = m} H^{p_1}(Y; \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \dots \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^{p_r}(Y; \mathbb{Z}_p) \\ \downarrow (f^r)^* & & \downarrow f^* \otimes \dots \otimes f^* \\ H^m(X^r; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\alpha_2} & \sum_{p_1 + \dots + p_r = m} H^{p_1}(X; \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \dots \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^{p_r}(X; \mathbb{Z}_p) \\ \downarrow \psi^* & & \\ H^m(X; \mathbb{Z}_p) & & \end{array}$$

comutativo, onde denotamos por α_1 e α_2 os isomorfismos da Fórmula de Kunneth para Y^r e X^r respectivamente. De fato, pois dado $u_1^{k_1} \times \dots \times u_r^{k_r} \in H^m(Y^r; \mathbb{Z}_p)$, temos

$$\begin{aligned} ((f^* \otimes \dots \otimes f^*) \circ \alpha_1)(u_1^{k_1} \times \dots \times u_r^{k_r}) &= f^* \otimes \dots \otimes f^*(u_1^{k_1} \otimes \dots \otimes u_r^{k_r}) \\ &= f^*(u_1^{k_1}) \otimes \dots \otimes f^*(u_r^{k_r}) \\ &= (\alpha_2 \circ (f^r)^*)(u_1^{k_1} \times \dots \times u_r^{k_r}). \end{aligned}$$

Desta forma, sabendo que $\alpha_2 \circ (f^r)^* = (f^* \otimes \dots \otimes f^*) \circ \alpha_1$ e que α_2 é um isomorfismo, segue que $(f^r)^* = \alpha_2^{-1} \circ (f^* \otimes \dots \otimes f^*) \circ \alpha_1$. Assim, como $\dim Y < m$ e $H^i(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ para $0 < i < m$,

temos $f^* = 0$ e portanto, $(f^* \otimes \dots \otimes f^*) = 0$, o que implica que $(f^r)^* = 0$. Desta forma, como $\phi^* = \psi^* \circ (f^r)^*$, segue que $\phi^* = 0$. Como $\phi = i \circ \phi_0$, então $\phi^* = \phi_0^* \circ i^*$ e assim, do fato de i^* ser sobrejetora, conclui-se que $Im(\phi_0^*) = Im(\phi^*)$ e portanto $\phi_0^* = 0$.

Agora, vamos considerar os homomorfismos transfer $\tau_X : H^m(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^m(X/G; \mathbb{Z}_p)$ e $\tau_{Y_0^{(r)}} : H^m(Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^m(Y_0^{(r)}/G; \mathbb{Z}_p)$. Pelo Lema 4.2.5, item (ii), temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^m(Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\tau_{Y_0^{(r)}}} & H^m(Y_0^{(r)}/G; \mathbb{Z}_p) \\ \phi_0^* \downarrow & & \downarrow \overline{\phi_0^*} \\ H^m(X; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\tau_X} & H^m(X/G; \mathbb{Z}_p) \end{array}$$

isto é, $\tau_X \circ \phi_0^* = \overline{\phi_0^*} \circ \tau_{Y_0^{(r)}}$. Como $\phi_0^* = 0$, temos $\tau_X \circ \phi_0^* = 0$ e portanto $\overline{\phi_0^*} \circ \tau_{Y_0^{(r)}} = 0$. Mais ainda, como $Y_0^{(r)}$ é um G -complexo de dimensão finita m , então pelo item (i) do Lema 4.2.5, temos $\tau_{Y_0^{(r)}} : H^m(Y_0^{(r)}; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^m(Y_0^{(r)}/G; \mathbb{Z}_p)$ sobrejetor e desta maneira, $Im(\overline{\phi_0^*}) = Im(\overline{\phi_0^*} \circ \tau_{Y_0^{(r)}})$ e portanto, $\overline{\phi_0^*} = 0$. Por fim, como $c^* = \overline{\phi_0^*} \circ c_Y^*$, concluímos que $c^* = 0$, o que contradiz o Lema 4.2.1.

Portanto, segue destas duas contradições que a suposição de que f não tem pontos de (H, G) -coincidências esta equivocada e logo, deve existir um subgrupo não trivial H de G e um ponto de (H, G) -coincidência para f , como queríamos. $\square$

4.3 Sobre a desigualdade $m \geq |G|k$

Sendo uma das condições impostas pelo Teorema 4.2.1, a desigualdade $m \geq |G|k$ é de fundamental importância para que a conclusão seja verdadeira. Para verificar isso, veremos a seguir um exemplo que prova que a desigualdade enunciada no Teorema 4.2.1 é a melhor possível. Os conceitos utilizados nesta seção foram retirados das referências [14],[24] e [25] e o exemplo apresentado se encontra em [11].

Definição 4.3.1 *Sejam X e Y dois espaços topológicos. Definimos o **join de X e Y** , e denotamos por $X * Y$, como sendo o espaço quociente*

$$X * Y := \frac{X \times Y \times I}{\sim},$$

onde $\sim$ é uma relação sobre $X \times Y \times I$ dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0), \text{ onde } x \in X \text{ e } y_1, y_2 \in Y; \\ (x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1), \text{ onde } x_1, x_2 \in X \text{ e } y \in Y. \end{array} \right.$$

Geometricamente, o join de dois espaços topológicos X e Y é entendido como o espaço formado por todos os segmentos de reta que ligam pontos de X a pontos de Y .

Uma maneira interessante de escrever os pontos de $X * Y$ é como uma combinação linear forma $t_1x + t_2y$, com $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ e $t_1 + t_2 = 1$, onde usamos as identificações $1x + 0y = x$ e $0x + 1y = y$. De forma análoga, o join iterado $X_1 * \dots * X_n$ pode ser construído como o espaço das combinações lineares formais $t_1x_1 + \dots + t_nx_n$ com $0 \leq t_i \leq 1$ para $1 \leq i \leq n$ e $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, com a convenção de que os termos $0x_i$ possam ser omitidos.

Observação 4.3.1 *Se X e Y são ambos CW-complexos, então existe uma estrutura de CW-complexo natural sobre $X * Y$ tendo os subespaços X e Y como subcomplexos e cujas células restantes são as células do CW produto $X \times Y \times (0, 1)$. Logo, temos*

$$\dim(X * Y) = \dim X + \dim Y + \dim(0, 1) = \dim X + \dim Y + 1.$$

Os resultados à seguir foram retirados da referência [24].

Lema 4.3.1 (Fórmula de Kunneth não relativa para join): *Os grupos de homologia singular reduzidos de $X * Y$ são dados por*

$$\tilde{H}_{r+1}(X * Y) \simeq \sum_{i+j=r} \tilde{H}_i(X) \otimes \tilde{H}_j(Y) \oplus \sum_{i+j=r-1} \text{Tor}(\tilde{H}_i(X), \tilde{H}_j(Y)).$$

□

Lema 4.3.2 *Se Y é um espaço conexo por caminhos e X é um espaço não vazio, então $X * Y$ é simplesmente conexo.*

□

Exemplo 4.3.1 *Seja p um número primo e considere o espaço $X^{p-1} = \mathbb{S}^{p-2} * \mathbb{Z}_p$.*

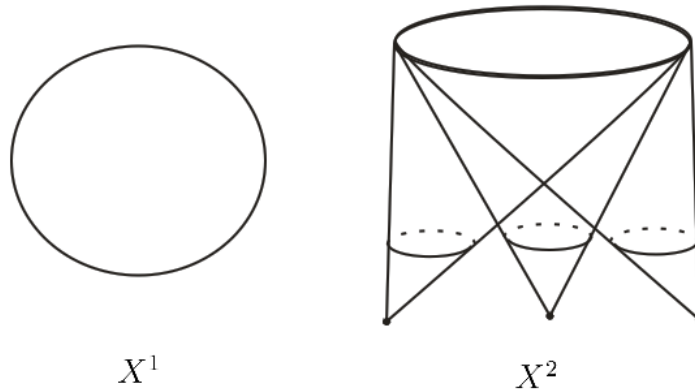


Figura 4.1: Join $X^{p-1} = \mathbb{S}^{p-2} * \mathbb{Z}_p$

Vamos mostrar que

$$H_n(X^{p-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0; \\ \mathbb{Z}^{p-1}, & \text{se } n = p-1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Primeiro, recorde que dado um espaço topológico X qualquer, temos $H_0(X) \simeq \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ e $H_n(X) = \tilde{H}_n(X)$ para $n > 0$ (por [25]). Sendo assim,

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^{p-2}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = p-2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad e \quad \tilde{H}_j(\mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{p-1}, & j = 0 \\ 0, & j \geq 1 \end{cases}$$

Desta forma, aplicando o Lema 4.3.1 segue que

$$\tilde{H}_{r+1}(X^{p-1}) \simeq \sum_{i+j=r} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^{p-2}) \otimes \tilde{H}_j(\mathbb{Z}_p) \oplus \sum_{i+j=r-1} \text{Tor}(\tilde{H}_i(\mathbb{S}^{p-2}), \tilde{H}_j(\mathbb{Z}_p)).$$

Mais ainda, como $\tilde{H}_j(\mathbb{Z}_p)$ é um grupo abeliano livre para todo j e $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^{p-2})$ é abeliano, sabemos que $\text{Tor}(\tilde{H}_i(\mathbb{S}^{p-2}), \tilde{H}_j(\mathbb{Z}_p)) = 0$, de onde concluímos que $\tilde{H}_{r+1}(X^{p-1}) \simeq \sum_{i+j=r} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^{p-2}) \otimes \tilde{H}_j(\mathbb{Z}_p)$.

Vamos agora calcular $\tilde{H}_{r+1}(X^{p-1})$. Para tal, dividiremos os cálculos em casos.

- Caso $r = 0$.

Neste caso, sabemos que $i + j = -1$ implica que tanto $i = j = 0$ e portanto, teremos $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^{p-2}) = 0$ e $\tilde{H}_j(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}^{p-1}$. Desta forma, claramente teremos $\tilde{H}_1(X^{p-1}) = 0 \otimes \mathbb{Z}^{p-1} = 0$.

- Caso $0 < r < p-2$.

Nesta situação, percebe-se que devemos ter $i < p-2$, de onde segue que $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^{p-2}) = 0$ e assim, conclui-se que $\tilde{H}_{r+1}(X^{p-1}) = 0$. Portanto, $\tilde{H}_n(X^{p-1}) = 0$ quando $2 \leq n \leq p-2$.

- Caso $r = p-2$.

Quando $r = p-2$, devemos ter $i = p-2$ e $j = 0$ ou $i < p-2$ e $j > 0$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{p-1}(X^{p-1}) &\simeq \tilde{H}_{p-2}(\mathbb{S}^{p-2}) \otimes \tilde{H}_0(\mathbb{Z}_p) \oplus \left(\sum_{i+j=p-2, i < p-2} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^{p-2}) \otimes \tilde{H}_j(\mathbb{Z}_p) \right) \\ &\simeq \tilde{H}_{p-2}(\mathbb{S}^{p-2}) \otimes \tilde{H}_0(\mathbb{Z}_p) \\ &\simeq \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}^{p-1} \\ &= \mathbb{Z}^{p-1}. \end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{H}_{p-1}(X^{p-1}) = \mathbb{Z}^{p-1}$.

- *Caso $r > p - 2$.*

Neste caso, devemos ter $i = p - 2$ e $j > 0$ ou $i = r$ e $j = 0$ ou $0 < i, j < r$. Desta maneira, em todas as situações ocorre $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^{p-2}) = 0$ ou $\tilde{H}_j(\mathbb{Z}_p) = 0$ e portanto, concluímos que $\tilde{H}_{r+1}(X^{p-1}) = 0$. Disto segue que $\tilde{H}_n(X^{p-1}) = 0$ sempre que $n > p - 1$.

Além disso, o espaço X^{p-1} é conexo por caminhos e portanto, temos $H_0(X^{p-1}) = \mathbb{Z}$ e logo, $\tilde{H}_0(X^{p-1}) = 0$. Desta forma, temos

$$H_n(X^{p-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ \mathbb{Z}^{p-1}, & n = p - 1, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad e \quad \tilde{H}_n(\mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{p-1}, & n = p - 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 4.3.2 Vamos considerar o espaço $X = X^{p-1} * \dots * X^{p-1}$ (o join de m cópias de X^{p-1}), onde X^{p-1} é o espaço definido no Exemplo 4.3.1. Sabemos que $\dim X^{p-1} = p - 1$, de onde segue que $\dim X = mp - 1$. Vamos mostrar que $H_i(X) = 0$ quando acontecer $0 < i < mp - 1$.

Para concluir o que desejamos, faremos a demonstração por indução sobre m . Iniciaremos o raciocínio pelo caso $m = 2$ pois o caso $m = 1$ segue diretamente do Exemplo 4.3.1.

- *Caso $m = 2$.* Neste caso, temos $X = X^{p-1} * X^{p-1}$. Como $\tilde{H}_j(X^{p-1})$ é grupo abeliano livre para todo $j \in \mathbb{Z}$, vale $\text{Tor}(\tilde{H}_i(X^{p-1}), \tilde{H}_j(X^{p-1})) = 0$ e logo, pela Fórmula de Kunneth para joins segue que $\tilde{H}_{n+1}(X) \simeq \sum_{i+j=n} \tilde{H}_i(X^{p-1}) \otimes \tilde{H}_j(X^{p-1})$. Mais ainda, sempre que $0 \leq n \leq 2p - 3$, sempre teremos $i < p - 1$ ou $j < p - 1$, de onde segue que $\tilde{H}_i(X^{p-1}) = 0$ ou $\tilde{H}_j(X^{p-1}) = 0$ e portanto $\tilde{H}_{n+1}(X) = 0$ sempre que $0 \leq n \leq 2p - 3$, isto é, $H_k(X) = 0$ caso $0 < k < 2p - 1$.

- *Suponhamos que $\tilde{X} = X^{p-1} * \dots * X^{p-1}$ (join de $m - 1$ cópias de X^{p-1}), vale $H_n(\tilde{X}) = 0$ quando $0 < n < (m - 1)p - 1$. Vamos verificar que $H_n(\tilde{X} * X^{p-1}) = H_n(X) = 0$ para $0 < n < mp - 1$. Primeiro, recorde que X^{p-1} é um espaço conexo por caminhos e não vazio, de onde segue (aplicando o Lema 4.3.2) que $\tilde{X}$ é simplesmente conexo e portanto, conexo por caminhos. Assim, teremos $H_0(\tilde{X}) = \mathbb{Z}$ e logo, $\tilde{H}_0(\tilde{X}) = 0$. Desta maneira, concluímos que $\tilde{H}_i(\tilde{X}) = 0$ para $0 \leq i < (m - 1)p - 1$. Assim, como $\tilde{H}_i(\tilde{X})$ é grupo abeliano livre para todo i , segue pela Fórmula de Kunneth para joins que $\tilde{H}_{n+1}(X) \simeq \sum_{i+j=n} \tilde{H}_i(\tilde{X}) \otimes \tilde{H}_j(X^{p-1})$. Agora, quando $0 \leq n \leq mp - 3$ teremos $i + j < mp - 2$, de onde segue que $i < (m - 1)p - 1$ ou $j < p - 1$ e portanto $\tilde{H}_i(\tilde{X}) = 0$ ou $\tilde{H}_j(X^{p-1}) = 0$. Desta forma, conclui-se que $\tilde{H}_{n+1}(X) = 0$, isto é, $H_k(X) = 0$ quando $0 < k < mp - 1$.*

Portanto, sendo X o resultado do join de m cópias de X^{p-1} , concluímos que $H_n(X) = 0$

quando $0 < n < mp - 1$, como gostaríamos.

O exemplo a seguir verifica que a desigualdade exigida pelo Teorema 4.2.1 é a melhor possível e portanto, é a desigualdade mais abrangente.

Exemplo 4.3.3 *Suponha $G = \mathbb{Z}_p$, onde p é um número primo e considere a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre $\mathbb{R}^p$ pela permutação cíclica de coordenadas. Note que a esfera $\mathbb{S}^{p-1} \subset \mathbb{R}^p$ é invariante sob esta ação, pois ela não altera o comprimento dos vetores de $\mathbb{R}^p$. Se considerarmos a identificação $\mathbb{R}^p = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é função}\}$, então a ação é da forma $(g \cdot \lambda)(h) := \lambda(g^{-1}h)$.*

Seja $\Delta \subset \mathbb{R}^p$ a reta diagonal, isto é, $\Delta = \{(x_1, \dots, x_p); x_i = x_j \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq p\}$. A $\mathbb{Z}_p$ -ação é livre sobre $\mathbb{R}^p - \Delta$, pois dado $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p - \Delta$, sabemos que existem $i < j$ tais que $x_i \neq x_j$. Assim, basta considerar $g_i, g_j \in \mathbb{Z}_p$ de modo que $g_i(x_1, \dots, x_p) = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i-1})$ e $g_j(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j-1})$ e logo,

$$g_i(x_1, \dots, x_p) = g_j(x_1, \dots, x_p) \Rightarrow x_i = x_j,$$

o que não pode acontecer, e portanto a $\mathbb{Z}_p$ -ação restrita à $\mathbb{R}^p - \Delta$ é livre. Particularmente, $\mathbb{Z}_p$ atua livremente sobre $\Delta^\perp - \{0\}$, pois $\Delta \cap \Delta^\perp = \{0\}$ e logo $\Delta^\perp - \{0\} \subset \mathbb{R}^p - \Delta$; além disso, como $\dim \Delta = 1$, sabemos que $\dim \Delta^\perp = p - 1$. Daí, podemos considerar $\mathbb{S}^{p-2} \hookrightarrow \Delta^\perp$. Como $0 \notin \mathbb{S}^{p-2}$, então $\mathbb{S}^{p-2} \subset \Delta^\perp - \{0\} \subset \mathbb{R}^p - \Delta$, isto é, a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre $\mathbb{S}^{p-2}$ é livre.

Agora, seja $\varphi : \mathbb{S}^{p-2} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x_1, \dots, x_p) = x_1$. Vamos verificar que a aplicação φ não tem pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência. Se existisse algum $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{S}^{p-2}$ que fosse ponto de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, então teríamos

$$\varphi(x_1, \dots, x_p) = \varphi(g_1(x_1, \dots, x_p)) = \dots = \varphi(g_p(x_1, \dots, x_p)),$$

de onde concluiríamos que $x_1 = x_2 = \dots = x_p$, o que não ocorre pois $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{S}^{p-2} \subset \mathbb{R}^p - \Delta$. Além disso, como $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{S}^{p-2}$, então $\|(x_1, \dots, x_p)\| = 1$ e logo, $-1 \leq x_i \leq 1$ para todo i , de onde segue que $\varphi(\mathbb{S}^{p-2}) \subset [-1, 1]$.

Vamos considerar agora T o CW-complexo 1-dimensional no 2-plano que é a união do segmento $I_1 = [-1, 1]$ no eixo x e do segmento $I_2 = [0, 1]$ no eixo y . Logo, $\varphi(\mathbb{S}^{p-2}) \subset I_1$.

*Agora, tome o join $X^{p-1} = \mathbb{S}^{p-2} * \mathbb{Z}_p$ (definido no Exemplo 4.3.1). Perceba que podemos escrever os pontos de X^{p-1} da forma $[\lambda, g, t]$, onde $\lambda \in \mathbb{S}^{p-2}$, $g \in \mathbb{Z}_p$ e $t \in I$; mais ainda, vale ressaltar que $\dim X^{p-1} = p - 1$. Vamos definir sobre X^{p-1} a seguinte $\mathbb{Z}_p$ -ação:*

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_p \times X^{p-1} &\rightarrow X^{p-1} \\ (h, [\lambda, g, t]) &\mapsto h \cdot [\lambda, g, t] := [h\lambda, hg, t].\end{aligned}$$

Vamos verificar que esta aplicação é de fato uma $\mathbb{Z}_p$ -ação. Primeiro, note que não é preciso verificar que a aplicação está bem definida pois o parâmetro t , que determina a relação para definir X^{p-1} , não sofre alteração alguma após a ação. Sendo assim, basta verificar as condições da definição de ação de grupos. Temos:

(i) Sendo e o elemento neutro de $\mathbb{Z}_p$, segue que $e \cdot [\lambda, g, t] = [e\lambda, eg, t] = [\lambda, g, t]$;

(ii) Dados $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}_p$,

$$\begin{aligned}(h_1 h_2) \cdot [\lambda, g, t] &= (h_1 h_2)\lambda, (h_1 h_2)g, t] \\ &= [h_1(h_2\lambda), h_1(h_2g), t] \\ &= h_1 \cdot [h_2\lambda, h_2g, t] \\ &= h_1 \cdot (h_2 \cdot [\lambda, g, t]).\end{aligned}$$

Logo, a aplicação é uma $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre X^{p-1} . Além disso, a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre X^{p-1} é livre, pois $h \cdot [\lambda, g, t] = [\lambda, g, t]$ se, e somente se, $[h\lambda, hg, t] = [\lambda, g, t]$. Temos então 3 possibilidades para analisar:

• Caso $t = 0$.

Neste caso, $[\lambda, g, t] = \{(\lambda, g, 0); g \in \mathbb{Z}_p\}$ e logo, se $h \cdot [\lambda, g, t] = [\lambda, g, t]$ então $h\lambda = \lambda$. Mas como a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre $\mathbb{S}^{p-2}$ é livre, segue que $h = e$.

• Caso $0 < t < 1$.

Nesta situação, temos $[\lambda, g, t] = \{(\lambda, g, t)\}$ e daí, a igualdade $h \cdot [\lambda, g, t] = [\lambda, g, t]$ implica que $h\lambda = \lambda$ e novamente, como $\mathbb{Z}_p$ atua livremente sobre $\mathbb{S}^{p-2}$, segue que $h = e$.

• Caso $t = 1$.

Neste caso, temos $[\lambda, g, t] = \{(\lambda, g, 1); \lambda \in \mathbb{S}^{p-2}\}$ e logo, se $h \cdot [\lambda, g, t] = [\lambda, g, t]$ então $hg = g$, de onde concluímos que $h = e$.

Portanto, a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre X^{p-1} é livre. Defina agora a aplicação $\psi : X^{p-1} \rightarrow T$, onde

$$\psi[\lambda, g, t] = \begin{cases} (t\lambda(e), 0), & g \neq e \\ ((2t-1)\lambda(e), 0), & g = e \text{ e } 1/2 \leq t \leq 1 \\ (0, 1-2t), & g = e \text{ e } 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$$

Vamos verificar que ψ não tem pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência. Para tal, dividiremos a demonstração

por casos para possíveis valores para t .

- Caso $t = 0$.

Neste caso, temos as seguintes possibilidades:

$$\psi[\lambda, g, 0] = \begin{cases} (0, 0), & g \neq e \\ (0, 1), & g = e \end{cases}$$

Se $g \neq e$, basta notar que $g^{-1} \cdot [\lambda, g, 0] = [g^{-1}\lambda, e, 0] \in \mathbb{Z}_p[\lambda, g, 0]$, de onde concluímos que $\psi[\lambda, g, 0] = (0, 0) \neq (0, 1) = \psi(g^{-1} \cdot [\lambda, g, 0])$. Se $g = e$, basta tomar algum $a \in \mathbb{Z}_p - \{e\}$ e perceber que $a \cdot [\lambda, e, 0] \in \mathbb{Z}_p[\lambda, e, 0]$, onde $ae \neq e$ e logo, $\psi(a \cdot [\lambda, e, 0]) = (0, 0) \neq (0, 1) = \psi[\lambda, e, 0]$.

Portanto, pontos da forma $[\lambda, g, 0]$ não são pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência para ψ .

- Caso $t = 1$.

Nesta situação, temos $\psi[\lambda, g, 1] = (\lambda(e), 0)$. Como $\lambda \in \mathbb{S}^{p-2} \hookrightarrow \mathbb{R}^p - \Delta$, então existem elementos $g_i, g_j \in \mathbb{Z}_p$ tais que $\lambda(g_i^{-1}) \neq \lambda(g_j^{-1})$. Daí, como $g_i \cdot [\lambda, g, 1], g_j \cdot [\lambda, g, 1] \in \mathbb{Z}_p[\lambda, g, 1]$ e

$$\psi(g_i \cdot [\lambda, g, 1]) = \psi[g_i\lambda, g_i g, 1] = (\lambda(g_i^{-1}), 0) \neq (\lambda(g_j^{-1}), 0) = \psi[g_j\lambda, g_j g, 1] = \psi(g_j \cdot [\lambda, g, 1]),$$

de onde concluímos que ψ não pode ser ponto de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência para ψ .

- Caso $t = 1/2$.

Neste caso, temos as seguintes possibilidades:

$$\psi[\lambda, g, 1/2] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\lambda(e), 0 \right), & g \neq e \\ (0, 0), & g = e \end{cases}$$

Como $\lambda \in \mathbb{S}^{p-2} \hookrightarrow \mathbb{S}^{p-1}$, então $\|(\lambda(g_1), \dots, \lambda(g_p))\| = 1$ e logo, existir algum $g_i \in \mathbb{Z}_p$ de modo que $\lambda(g_i^{-1}) \neq 0$. Por outro lado, como $\mathbb{S}^{p-2} \in \Delta^\perp$, então $(\lambda(g_1^{-1}), \dots, \lambda(g_p^{-1})) \in \Delta^\perp$ e assim, sabendo que $(1, \dots, 1) \in \Delta$, segue que $\langle (\lambda(g_1^{-1}), \dots, \lambda(g_p^{-1})), (1, \dots, 1) \rangle = \sum_{j=1}^p \lambda(g_j^{-1}) = 0$. Como existe $g_i \in \mathbb{Z}_p$ tal que $\lambda(g_i^{-1}) \neq 0$, então deve existir pelo menos mais algum $g_j \in \mathbb{Z}_p$, com $g_j \neq g_i$, de modo que $\lambda(g_j^{-1}) \neq 0$ (para que a soma possa se anular) e $\lambda(g_j^{-1}) \neq \lambda(g_i^{-1})$. Caso $g_i \neq g^{-1}$ e $g_j \neq g^{-1}$, teremos

$$\begin{cases} \psi(g_i \cdot [\lambda, g, 1/2]) = \psi[g_i \lambda, g_i g, 1/2] = \left(\frac{1}{2} \lambda(g_i^{-1}), 0 \right), \\ \psi(g_j \cdot [\lambda, g, 1/2]) = \psi[g_j \lambda, g_j g, 1/2] = \left(\frac{1}{2} \lambda(g_j^{-1}), 0 \right) \end{cases}$$

e logo, $\psi(g_i \cdot [\lambda, g, 1/2]) \neq \psi(g_j \cdot [\lambda, g, 1/2])$. Caso $g_i = g^{-1}$ (e claramente $g_j \neq g^{-1}$), teremos

$$\begin{cases} \psi(g_i \cdot [\lambda, g, 1/2]) = \psi[g_i \lambda, e, 1/2] = (0, 0), \\ \psi(g_j \cdot [\lambda, g, 1/2]) = \psi[g_j \lambda, g_j g, 1/2] = \left(\frac{1}{2} \lambda(g_j^{-1}), 0 \right) \end{cases}$$

e assim, $\psi(g_i \cdot [\lambda, g, 1/2]) \neq \psi(g_j \cdot [\lambda, g, 1/2])$.

Portanto, concluímos que os pontos da forma $[\lambda, g, 1/2]$ não podem ser pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência para ψ .

- Caso $0 < t < 1/2$.

Neste caso, temos as seguintes possibilidades:

$$\psi[\lambda, g, t] = \begin{cases} (t\lambda(e), 0), & g \neq e \\ (0, 0), & g = e \end{cases}$$

Se tivermos $g = e$, basta considerar $a \in \mathbb{Z}_p$ de modo que $a \neq e$, pois $a \cdot [\lambda, e, t] \in \mathbb{Z}_p[\lambda, e, t]$ e $\psi(a \cdot [\lambda, e, t]) = (t\lambda(a^{-1}), 0) \neq (0, 1 - 2t) = \psi[\lambda, e, t]$, pois $t \neq 1$. Por outro lado, se $g \neq e$, tome $g^{-1} \in \mathbb{Z}_p$ e assim, $\psi(g^{-1} \cdot [\lambda, g, t]) = (0, 1 - 2t) \neq (t\lambda(e), 0) = \psi[\lambda, g, t]$.

Portanto $[\lambda, g, t]$ não pode ser um ponto de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência para ψ .

- Caso $1/2 < t < 1$.

Nesta situação, temos as seguintes possibilidades:

$$\psi[\lambda, g, t] = \begin{cases} (t\lambda(e), 0), & g \neq e, \\ ((2t - 1)\lambda(e), 0), & g = e. \end{cases}$$

Como argumentado no caso $t = 1/2$, sabemos que existem $g_i, g_j \in \mathbb{Z}_p$ de modo que $\lambda(g_i^{-1}) > 0$ e $\lambda(g_j^{-1}) < 0$ (sem perda de generalidade). Logo, como $1/2 < t < 1$, percebe-se que $2t - 1 > 0$ e disto segue-se que $t\lambda(g_i), (2t - 1)\lambda(g_i) > 0$ e $t\lambda(g_j^{-1}) < 0$.

Se $g_i \neq g^{-1}$ e $g_j \neq g^{-1}$, teremos $\psi(g_i \cdot [\lambda, g, t]) = (t\lambda(g_i^{-1}), 0) \neq (t\lambda(g_j^{-1}), 0) = \psi(g_j \cdot [\lambda, g, t])$. Por outro lado, se $g_i = g^{-1}$ e $g_j \neq g^{-1}$, teremos $((2t - 1)\lambda(g_i^{-1}), 0) \neq (t\lambda(g_j^{-1}), 0)$ e logo,

$$\psi(g_i \cdot [\lambda, g, t]) \neq \psi(g_j \cdot [\lambda, g, t]).$$

Finalmente, conclui-se assim que a aplicação ψ não possui pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência.

Agora, vamos considerar o espaço $X = X^{p-1} * \dots * X^{p-1}$ constituído como o join de m cópias de X^{p-1} (como construído no Exemplo 4.3.2). Sabemos que X é um CW-complexo de dimensão $mp - 1$, e logo é um espaço paracompacto, Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminhos; mais ainda, como demonstrado no Exemplo 4.3.2, temos $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ quando $0 < i < mp - 1$. Como foi comentado anteriormente, os pontos de X podem ser escritos da forma $[t_1x_1 + \dots + t_mx_m]$, onde $x_i \in X^{p-1}$, $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^m t_i = 1$. O grupo $\mathbb{Z}_p$ atua livremente sobre X através da ação diagonal

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p \times X &\rightarrow X \\ (g, [t_1x_1 + \dots + t_mx_m]) &\mapsto [t_1gx_1 + \dots + t_mgx_m]. \end{aligned}$$

De fato, dado $g \in \mathbb{Z}_p$ e $[t_1x_1 + \dots + t_mx_m] \in X$, a igualdade

$$g[t_1x_1 + \dots + t_mx_m] = [t_1x_1 + \dots + t_mx_m]$$

implica que existe algum i , com $t_i \geq 0$, de modo que $t_igx_i = t_ix_i$, de onde concluímos que $gx_i = x_i$. Mas como a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre X^{p-1} é livre, segue que $g = e$ e portanto a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre X deve ser livre.

Defina a aplicação $F : X \rightarrow T^m$ por $F([t_1x_1 + \dots + t_mx_m]) = (t_1\psi(x_1), \dots, t_m\psi(x_m))$. A aplicação F não tem pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidências, pois se existisse algum ponto $[t_1x_1 + \dots + t_mx_m]$ de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência para F , teríamos a igualdade

$$F(g_1[t_1x_1 + \dots + t_mx_m]) = \dots = F(g_p[t_1x_1 + \dots + t_mx_m]),$$

de onde obtemos a igualdade

$$(t_1\psi(g_1x_1), \dots, t_m\psi(g_1x_m)) = \dots = (t_1\psi(g_px_1), \dots, t_m\psi(g_px_m)).$$

Mas como $\sum_{i=1}^m t_i = 1$, então deve existir algum i de modo que $t_i > 0$ e assim, sabendo que $t_i\psi(g_1x_i) = \dots = t_i\psi(g_px_i)$, concluímos que $\psi(g_1x_i) = \dots = \psi(g_px_i)$ e portanto, x_i é um ponto de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência para a aplicação ψ , o que é uma contradição.

Portanto, a aplicação F não tem pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidências.

Logo, $\mathbb{Z}_p$ é um grupo finito que atua livremente sobre o espaço paracompacto, Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminhos X de modo que $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ quando $0 < i < mp - 1$ e $H^{mp}(G; \mathbb{Z}) \neq 0$ (pelo Exemplo 2.7.1), T^m é um CW-complexo finito de dimensão m e $F : X \rightarrow T^m$ é uma aplicação que não possui pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, onde $mp - 1 < |\mathbb{Z}_p|m = mp$.

Concluimos disto que a condição $m \geq |G|k$

- (a) é a melhor condição para existência de (H, G) -coincidência para todo grupo finito G ;
- (b) é a melhor condição para existência de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, com p primo.

4.4 Comentários Finais

Finalizando este trabalho, observamos que diversos autores continuaram os estudos de (H, G) -coincidências para aplicações $f : X \rightarrow Y$, generalizando tanto o espaço X quanto o espaço Y . Destacaremos brevemente aqui o trabalho de E. L. dos Santos e F. R. C. Coelho em [4]. Para tal, definiremos rapidamente alguns conceitos.

Seja G um grupo finito atuando sobre um espaço paracompacto Hausdorff X e denote $G^* = G - \{e\}$. Dizemos que o subconjunto U de X é uma **cor** se $U \cap gU = \emptyset$ para todo $g \in G^*$ e dizemos que uma cobertura $\mathcal{U}$ de X por cores é uma **coloração**. Se (X, G) admite uma coloração finita, então o **número de cores** $col(X, G)$ é a cardinalidade mínima de uma coloração. Se U é uma cor, então o conjunto $G \cdot U = \bigcup_{g \in G} gU$ é chamada um **conjunto de primeiro tipo** e dizemos que $G \cdot U$ é **gerado por** U .

Definimos o **gênero** $gen(X, G)$ como sendo a cardinalidade mínima de uma cobertura de X por conjuntos de primeiro tipo.

A seguir, enunciaremos o principal resultado de [4].

Teorema 4.4.1 *Seja G um grupo finito que atua livremente sobre um espaço paracompacto Hausdorff X , com $gen(X, G) \geq n + 1$ e k um número natural.*

(a) *Se $n > |G|k$ e Y é um espaço metrizável de dimensão k , então toda aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ possui um ponto de (H, G) -coincidência para algum subgrupo não trivial H de G .*

(b) *Se $n = |G|k$ e Y um cone CW-complexo de dimensão k , então toda aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ possui um ponto de (H, G) -coincidência para algum subgrupo não trivial H de G .*

(c) *Se $n < |G|k$ e $gen(X, G) = n + 1$, então existe um cone CW-complexo Y de dimensão k e uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ tal que f não possui pontos de G -coincidência. Em particular, se $G = H = \mathbb{Z}_p$, então f não tem pontos de (H, G) -coincidência.*

Comentário Final: Para finalizar este trabalho, ressaltamos o quão interessante são as relações citadas entre noções topológicas e algébricas, pois para o desenvolvimento deste projeto, foi necessário o estudo de diversos pré-requisitos em Topologia Algébrica bem como alguns conceitos de Álgebra, particularmente a teoria de cohomologia de grupos finitos.

Referências

- [1] Adem, A., Milgram, R. J.; *Cohomology of Finite Groups*, Springer-Verlag (1994).
- [2] Bredon, G. E.; *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press (1972).
- [3] Brown, K.S.; *Cohomology of Groups*, Springer (1982).
- [4] Santos, E. L., Coelho F. R. C.; *(H,G)-theorems for free G-spaces*, Topology and Applications 206, pp. 158-165 (2016).
- [5] Conner, P. E., Floyd, E. E.; *Differentiable Periodic Maps*, Ergebnisse der Math. Springer-Verlag Berlin (1964).
- [6] Davis, J. F., Kirk, P.; *Lecture Notes in Algebraic Topology*, American Mathematical Society (2001).
- [7] Dieck, T.; *Transformation Groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York (1987).
- [8] Femina, L. L.; *Cohomologia Relativa de Grupos e Dualidade de Poincaré*, Dissertação de Mestrado, Ibilce - UNESP (2008).
- [9] Fritsch, R., Piccinini, R. A.; *Cellular structures in topology*, Cambridge University Press (1990).
- [10] Gonçalves, D. L., Jaworowski, J., Pergher, P. L. Q.; *G-coincidence for maps of homotopy spheres into CW-complexes*, Proc. Amer. Math. Soc. 130, pp. 3111-3115 (2002).
- [11] Gonçalves, D. L., Jaworowski, J., Pergher, P. L. Q., Volovikov, A. Y.; *Coincidence for maps of spaces with finite group actions*, Topology and Applications 145, pp. 61-68 (2004).
- [12] Gonçalves, D. L., Pergher, P. L. Q.; $\mathbb{Z}_p$ -coincidence for maps of spheres into CW-complexes, Kobe Journal of Math, Vol. 15, pp. 191-195, (1998).
- [13] Greenberg, M. J.; *Algebraic Topology - An Introduction*, New York (1966)
- [14] Hatcher, A.; *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).

-
- [15] Hu, S.T.; *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day, San Francisco (1968).
 - [16] Hungerford, T. W.; *Algebra*, Springer-Verlag (1971).
 - [17] Husemoller, D.; *Fibre Bundles*, Springer-Verlag (1994).
 - [18] Izydorek, M., Jaworowski, J.; *Antipodal Coincidence for Maps of Spheres into Complexes*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 123, (1995).
 - [19] Jaworowski, J.; *Periodic Coincidence for Maps of Spheres*, Kobe Journal of Math, Vol. 17, pp. 21-26 (2000).
 - [20] MacLane, S.; *Homology*, Springer-Verlag (1963).
 - [21] Massey, W. S.; *A basic course in Algebraic topology*, Springer-Verlag (1991).
 - [22] Mattos, D.; *Sobre Teoremas do tipo Borsuk-Ulam*, Tese de Doutorado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo (2005).
 - [23] McCleary, J.; *A User's Guide to Spectral Sequences*, Cambridge University Press (2001).
 - [24] Milnor, J. W.; *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press (1997).
 - [25] Munkres, J. R.; *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Inc. (1984).
 - [26] Robinson, D. J. S.; *A Course in the Theory of Groups*, Springer (1982).
 - [27] Santos, M. V.; *Cohomologia de Grupos Finitos e G-coincidências de Aplicações*, Dissertação de Mestrado, Ibilce - UNESP (2010).
 - [28] Schubert, H.; *Topology*, MacDonalds Co. (Publishers) LTD (1968)
 - [29] Spanier, E. H.; *Algebraic Topology*, Springer (1966).
 - [30] Vick, J.W; *Homology Theory*, Springer (1973).

Índice Remissivo

- (H, G) -coincidência, 23, 60, 61, 67, 68, 70, 79
- G -órbita de x , 6, 16, 17, 59
- G -ação, 5, 12, 15, 24, 25, 31, 44, 45, 47, 66, 67
 - efetiva, 41
 - livre, 13, 16, 18, 31–33, 39, 44, 45, 51, 52, 56, 61, 62, 66, 68, 74, 79
 - propriamente descontínua, 18
 - transitiva, 12, 16
 - trivial, 6, 23, 24, 26, 28, 31, 35
- G -coincidência, 59, 60, 74, 79
- G -complexo, 15–17, 58, 62, 68, 70
 - livre, 15, 16, 18, 31
- G -conjunto, 5, 6
 - livre, 5
 - trivial, 5
 - livre, 6, 16
- G -espaço, 5, 41, 59, 60, 67, 68
 - homogêneo, 12
- $K(G, 1)$ -complexo, 17–20, 28, 50
- $\mathbb{Z}G$ -módulo, 4–6, 9, 15, 26–29, 34–37, 39
 - livre, 6, 16, 17
 - trivial, 6
- Anel grupo
 - de G sobre R , 4
- Anel grupo de G sobre R , 24
- Aplicação
 - G -equivariante, 5, 25, 46, 51, 52, 63, 65, 67, 68
 - aumentação, 6, 8, 9, 32
 - característica, 14, 58
 - classificante, 51, 68
 - diagonal, 29
 - induzida, 45
 - norma, 36
- Célula, 15–18, 71
 - aberta, 14, 32, 58, 68
 - fechada, 13
- Carta, 41–43, 45, 47
- Cohomologia, 35, 37
 - de grupo finito, 23
 - de Tate, 35–37
 - periódica, 38–40
- Coloração, 79
- Complexo
 - de Eilenberg-MacLane do tipo $(G, 1)$, 17
- Conjunto de primeiro tipo, 79
- Construção de Borel, 46
- Cor, 79
- CW-complexo, 13–17, 33, 55, 58, 68, 71, 74, 78, 79
 - finito, 61, 67, 79
- Deck transformação, 12, 18
- Dimensão topológica, 68
- Equivalência de homotopia, 10, 19, 26, 52, 61
- Esfera de homotopia, 32, 39, 60
- Espaço
 - base, 42, 50

-
- classificante, 50, 52
 - de órbitas, 13, 18, 44, 65, 68
 - de Borel, 47, 52
 - de recobrimento, 10
 - total, 42, 50
 - Fórmula
 - de Kunneth, 21, 69
 - de Kunneth não relativa para join, 71–73
 - dos Coeficientes Universais, 28, 37
 - Fibra, 18, 42, 44, 45, 52
 - Fibração, 41, 47–49, 52, 53
 - de Borel, 52, 56, 61
 - Fibrado, 41, 44, 45, 47, 52
 - localmente trivial, 42, 43
 - principal, 44–47, 50–52, 61, 68
 - trivial, 43
 - Filtração decrescente, 54–56
 - convergente, 55
 - limitada, 55
 - Função transição, 42, 45, 46
 - Gênero, 79
 - Grau de uma aplicação, 19, 31
 - Grupo
 - com cohomologia periódica, 38
 - de cohomologia de G com coeficientes em M , 26, 27, 29, 30, 37
 - de homologia de G com coeficientes em M , 26, 27
 - dos coinvariantes, 23
 - dos homomorfismos, 26, 27
 - dos invariantes, 24
 - propriamente descontínuo, 13, 63
 - Homeomorfismo, 20
 - Homomorfismo Transfer, 57, 58, 62, 65, 70
 - Isomorfismo, 27, 37
 - Isomorfismo entre fibrados, 43, 51, 52
 - Join, 70, 73, 74, 78
 - Lema de Shapiro, 28
 - Módulo
 - projetivo, 7
 - de cohomologia de E , 53
 - diferencial bigraduado, 53
 - graduado associado, 55
 - projetivo, 7
 - Morfismo
 - de fibras, 48
 - entre fibrados, 43
 - Número
 - de cores, 79
 - de folhas do recobrimento, 12, 13, 57, 58, 63
 - de Lefschetz, 20, 31
 - Operador
 - bordo, 26, 64
 - cobordo, 26
 - Produto
 - cross, 21, 29
 - cup, 21, 29, 30, 37, 38
 - Projeção de recobrimento, 10
 - Protudo
 - tensorial, 30
 - Pullback
 - de um fibrado, 44, 51, 52
 - de uma fibração, 49
 - Recobrimento, 10–12, 16, 43, 48, 57, 58, 63
 - regular, 12, 13, 16–18, 45
 - universal, 12, 13, 17, 18, 45
 - Resolução, 7, 8
 - livre, 8, 15, 16, 27, 32–34
 - periódica, 39
 - projetiva, 8, 10, 26, 27, 29, 32
 - Sequência

exata de homotopia de uma fibração, 49,
50

Sequência Espectral, 41, 53

cohomológica, 41, 53–55, 62

de primeiro quadrante, 55, 62

Subgrupo

de isotropia, 6

Teorema

de Hopf, 19

de Hurewicz para fibrações, 48

de Leray-Serre, 41, 53, 55, 56, 62

de Milnor, 50

do Ponto Fixo de Lefschetz, 20, 31, 32

dos Coeficientes Universais, 28, 38, 62, 69

dos Coeficientes Universais para cohomol-
gia, 21

Termo limite da sequência espectral, 54

Variedade, 20

asférica, 20

Vizinhança elementar, 10, 11