UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

COMPREENSÕES DE CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL NO PRIMEIRO ANO DE MATEMÁTICA — UMA ABORDAGEM INTEGRANDO ORALIDADE, ESCRITA E INFORMÁTICA

Antonio Olimpio Junior

Orientador: Prof. Dr. Marcelo De Carvalho Borba

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-científicos para obtenção do Título de Doutor em Educação Matemática

RIO CLARO
2006

517.2 Olimpio Junior, Antonio
O46c Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática / Antonio Olimpio Junior. – Rio Claro : [s.n.], 2006
264 f. : il., gráfs., quadros

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Marcelo de Carvalho Borba

1. Escrita. 2. Cálculo - Compreensão conceitual. 3. Oralidade. 4. Limite. 5. Derivada. 6. Maple. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba - Orientador (IGCE/UNESP – Rio Claro, SP)

Arthur Belford Powell, PhD (Rutgers – The State University of New Jersey, EUA)

Prof. Dr. Nilson José Machado (FE/USP – São Paulo, SP)

Profa. Dra. Edna Maura Zuffi (ICMC/USP – São Carlos, SP)

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira (IGCE/UNESP – Rio Claro, SP)

Antonio Olimpio Junior (aluno)

Rio Claro, 13 de março de 2006

Resultado: APROVADO

D E D I C A T Ó R I A

A meus pais,
Antonio e Vicentina,
pelo apoio amoroso e incondicional
em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, pela orientação, confiança, apoio e amizade demonstrados ao longo de toda esta jornada. E, também, por ter iniciado-me na pesquisa em Educação Matemática e estendido meus horizontes acadêmicos para “além-mar”.

Ao Prof. Dr. Arthur Belford Powell, da Rutgers, The State University of New Jersey, EUA, pelas orientações, conversas, correspondências, sugestões e interesse em contribuir sempre da melhor maneira possível.

Aos professores e professoras do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e dos departamentos de Matemática e de Educação da UNESP de Rio Claro com o(a)s quais eu tive o privilégio de compartilhar idéias e de aprender.

Ao Prof. Dr. Nilson José Machado, da USP de São Paulo, à Profª Dra. Edna Maura Zuffi, da USP de São Carlos, e à Profª Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira, da UNESP de Rio Claro, pelas críticas, sugestões e generosidade nos elogios por ocasião do meu Exame de Qualificação.

Aos amigos e amigas do GPIMEM — Grupo de Pesquisa em Informática, Outras Mídias e Educação Matemática, da UNESP de Rio Claro, pelas inúmeras demonstrações de carinho, pelas sugestões e pelas discussões sempre enriquecedoras.

Aos participantes da pesquisa, jovens dedicado(a)s e brilhantes, parceiros e parceiras desta caminhada, sem os quais este trabalho não teria sido realizado.

Aos colegas pós-graduando(a)s do Programa em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro com o(a)s quais eu tive o prazer de conviver e que muito contribuíram para tornar mais feliz esta jornada.

Aos funcionários e funcionárias da UNESP de Rio Claro, pela gentileza e presteza com que me atenderam em todas as oportunidades.

À CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro ao longo desses anos.

RESUMO

A partir da integração oralidade-escrita-CAS/MAPLE, eu investiguei compreensões emergentes sobre os conceitos de função, limite, continuidade e derivada, produzidas por ingressantes em um curso de Matemática oferecido por uma universidade pública do estado de São Paulo. A investigação, sob o balizamento do paradigma interpretativo e caracterizado pela metodologia qualitativa, desenvolveu-se com a realização de experimentos com oito voluntário(a)s. Os dados para a análise inicial constituíram-se de respostas individuais escritas em linguagem natural e de videotapes das interações entre duplas de participantes e o MAPLE. Esta análise produziu quatro episódios tematizando conflitos emergentes sobre o conceito de derivabilidade, a definição de derivada, o conceito de limite e a comparação entre os gráficos de uma função e de sua derivada. Cinco categorias de interação entre duplas de participantes e o MAPLE foram descritas. Três níveis de compatibilidade entre compreensões materializadas *a priori* pela escrita e as emergentes da interação participantes-MAPLE foram identificados. A análise inicial sugere que abordagem é apropriada à materialização de tais compreensões. A análise final sugere que os conflitos emergentes poderiam ter suas raízes numa limitada compreensão do conceito de função. A pesquisa também sugere uma maior e mais intensiva exploração da natureza dinâmica do Cálculo Diferencial.

Palavras-chaves: escrita, oralidade, Maple, compreensão conceitual, cálculo

ABSTRACT

From the integration of orality, writing and the CAS-MAPLE, I investigated understandings that emerge about the concepts of function, limit, continuity and derivative produced by full-time first-year students of mathematics from a public university in the state of São Paulo, Brazil. The research, implemented under the guidelines of the interpretive paradigm and of the qualitative methodology, was characterized by experiments, which were conducted with eight volunteer participants. The data consisted of individual written answers in natural language and videotapes of the interactions between pairs of participants and the MAPLE. The initial analysis is on four episodes focusing on emerging conflicts on the concept of differentiability, the definition of derivative, the concept of limit, and the comparison between the graph of a function f and the graph of its derivative. Five interaction categories between pairs of participants and the MAPLE were described. In addition, three levels of compatibilities between *a priori* participants' writings and the mentioned interactions were identified. The initial analysis suggests that the chosen approach is appropriate to the materialization of such understandings. The final analysis suggests that the conflicts that emerged from the experiments could have their roots in a limited understanding of the concept of function. The research also suggests a more intensive exploration of the dynamical nature of the differential calculus.

Keywords: writing, orality, Maple, conceptual understanding, calculus

S U M Á R I O

ÍNDICE

CAPÍTULO I

Justificativa, Objetivo e Questões de Pesquisa

1. Introdução

Os processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral têm se constituído em objetos de investigação por toda uma classe de pesquisadores em Educação Matemática no Ensino Superior, no Brasil e no exterior, principalmente a partir da década de 1980. Sintomas das dificuldades emergentes em tais processos — e que continuam desafiando aluno(a)s, educadore(a)s e pesquisadore(a)s atuantes neste nível de ensino — materializam-se de maneira bastante preocupante, por exemplo, pelos elevados índices de reprovação e de desistência na disciplina, os quais, possivelmente, num efeito colateral perturbador, têm contribuído para a manutenção dos singulares índices de evasão dos cursos de Licenciatura / Bacharelado em Matemática no cenário brasileiro, em particular naqueles vinculados às universidades públicas.

Barufi (1999), em sua tese de doutorado, ilustra esta situação com alguns dados. Ao analisar os índices de aproveitamento dos cursos de graduação da área de Exatas da Universidade de São Paulo, no período de 1990 a 1995, em relação aos dados específicos do IME – Instituto de Matemática e Estatística, desta universidade, ela afirma:

> [...] verificamos que no ano de 1995, a taxa de não aprovação – isto é, reprovação por nota ou por falta, ou desistência em MAT 135 (Cálculo para Funções de uma Variável Real) foi de 66,9 %, e, em MAT 131 (Cálculo Diferencial e Integral), de 43,8%. (p. 3)

Uma reação natural a esses dados por um educador ou educadora que não transite com freqüência pelos contextos do ensino universitário de Matemática, seria inferir que tais números se referem a uma singularidade localizada num determinado período, e gerada, talvez por acidente, no interior de uma das mais prestigiosas universidades brasileiras. Entretanto, caso este educador ou educadora continue a pesquisar um pouco mais sobre o assunto, começará a perceber que sua conjectura terá cada vez menos chances de ser verdadeira. Tomemos, por exemplo, os dados da UFF - Universidade Federal Fluminense, coletados por Rezende (2003) em sua pesquisa de doutorado:

> No que diz respeito à UFF, instituição onde leciono, os índices de não-aprovação são bem mais catastróficos do que os levantados por Barufi, na USP [...] Na UFF, a variação do índice de não-aprovação se encontra na faixa de 45% a 95%, sendo que, para o curso de Matemática, este não é inferior a 65%. (pp. 1-2)

Como se pode constatar, o "acidente" da USP também ocorreu na UFF. Se continuarmos investigando a questão, não tardará muito para percebermos que os índices acima têm se mantido com uma preocupante regularidade. Este é o caso do curso do qual foram selecionados os participantes para a presente pesquisa: Matemática[1], oferecido em período integral por uma universidade pública do Estado de São Paulo, onde o índice de reprovação médio no caso do Cálculo I localiza-se na faixa de 40 a 50 %.

Uma pergunta natural que poderia surgir é a seguinte: Seria este fenômeno encontrado apenas nos domínios das universidades brasileiras? A resposta é não e, pelo menos no que se refere ao ensino e à aprendizagem de Cálculo, o fenômeno transcende os limites nacionais e tem motivado as mais variadas reações na comunidade acadêmica.

O movimento da chamada Reforma no Ensino de Cálculo, por exemplo, iniciado no ano de 1986, nos Estados Unidos, foi motivado por vários fatores (TUCKER; LEITZEL, 1993), dentre os quais se destacam a compreensão conceitual dos temas inerentes à disciplina, as questões pragmáticas ligadas à sua aplicabilidade em outros campos profissionais e aos baixos índices de aproveitamento constatado em sua aprendizagem. No entanto, mesmo após essa iniciativa, Keith (1991, p. 6) continuava apontando que apenas 40% dos estudantes eram aprovados em Cálculo com conceito igual ou superior a D[2]. Da mesma forma, Confrey e Costa (1996), cinco anos depois, surpreenderam-se com o índice de

[1] Nas séries iniciais não há separação entre Licenciatura e Bacharelado.
[2] Aproximadamente igual a 4 numa escala de 0 a 10.

reprovação na disciplina variando de 17 a 22%, neste caso sem considerar os que desistiam da disciplina até quatro semanas antes do seu término, índices esses que têm permanecido estáveis ao longo dos últimos anos. Em resumo, mesmo com as novas orientações implementadas a partir da Reforma do Cálculo, as dificuldades na disciplina, principalmente no caso do(a)s aluno(a)s ingressantes nas universidades, continuaram se caracterizando naquele país como mais um persistente elemento no já complexo quadro do ensino e da aprendizagem Matemática.

Para evitar que nos afastemos demais dos objetivos desta introdução e poupar o(a) leitor(a) do aborrecimento de ter que digerir mais dados sobre outros cursos, tomemos como verdadeira a seguinte proposição: a situação de uma parte significativa dos cursos de Matemática brasileiros, no que se refere aos índices de reprovação ou de desistência, é, de fato, bastante preocupante.

A esta altura, o leitor ou leitora deve estar se perguntando: mas, afinal, o que tem a presente pesquisa a dizer sobre isso? Antes de responder a esta pergunta, apresentarei algumas visões sobre os contextos onde tais fenômenos ocorrem. A partir daí, procurarei situar a presente investigação no panorama da pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior.

Buerk (1990, p. 78, tradução nossa), solicitando a seus jovens alunos universitários de Matemática que escrevessem livremente sobre o que pensavam da Matemática, obteve, dentre outras, as seguintes respostas:

- Uma linha de montagem onde um grande número de pessoas faz exatamente a mesma tarefa, dia após dia, ano após ano.
- Uma sala de aula gigante com milhões de homens recitando o Teorema de Pitágoras.
- Uma porta fechada: toda informação está lá, somente eu não tenho a chave.
- O deserto do Saara: Fico vagando sem objetivo tentando encontrar a direção correta, mas estou sempre sendo enganado pelas miragens.
- Areia Movediça: Acho-me afogando numa massa de equações e variáveis, descobrindo que quanto mais eu luto mais me afogo.

Para um educador ou educadora que atue em áreas distintas da Matemática, poderia parecer que as percepções desses alunos caracterizariam fatos isolados e que, portanto, podem ser lidos até com um sorriso irônico, por representarem exceções que confirmariam uma regra de exuberância de novos significados, emergentes do pensamento do(a) estudante que ingressa num curso universitário de Matemática. Infelizmente, as metáforas acima são sinalizadoras de uma situação problemática e que tem sido constatada nos mais variados cenários de ensino de Matemática no mundo. Dentre estes, um é particularmente penalizado: trata-se da primeira série dos cursos afins às ciências exatas, todos eles trazendo a presença ubíqua do Cálculo. Em sua imensa maioria, os conteúdos clássicos do Cálculo Diferencial e Integral são similares, ainda que agregados em disciplinas ostentando os mais variados nomes, tais como, Fundamentos de Matemática, Matemática I, Elementos de Matemática, Tópicos de Matemática e aqueles mais próximos à tradição, a saber, Cálculo I, Cálculo A, Cálculo Diferencial e Integral I, etc.

No caso do Brasil, uma justificativa para a situação acima ilustrada, e que tem sido freqüentemente apresentada por professores da área, é que grande parte dos ingressantes nesses cursos carece de uma melhor formação matemática pré-universitária, e que somente a partir desta melhor formação é que seus desenvolvimentos na disciplina poderiam se dar de maneira menos problemática. Sobre esta posição, Roberto Baldino, um dos pesquisadores brasileiros que há mais tempo tem se dedicado a investigar o ensino e a aprendizagem de Cálculo, afirmou recentemente na lista eletrônica de discussões da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática):

> Colocar o aluno “hiposuficiente” na universidade é um bom começo; a universidade destina 50% das vagas para eles. O perigo é acharmos que assim o problema está resolvido. Esse é só um começo de solução (correta); exige investimento e pesquisa. Por exemplo, como organizar um curso de Cálculo para alunos que:
>
> - Não fazem 347 vezes 347 divididos por 347 sem usar a calculadora, mesmo quando instados pelos colegas;
> - Não conseguem pronunciar a frase "o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos"; nas várias tentativas truncam o início ou o fim da frase ou falam outra coisa no meio;
> - Não conseguem substituir 8 por 2 ao cubo em uma expressão aritmética;
> - Ao copiar uma expressão com 13 símbolos, depois de conferir duas vezes não notam que cometeram 3 erros;
> - Não distinguem área de perímetro;
> - Têm muita dificuldade em marcar pontos no plano coordenado;
> - Precisam da calculadora para dividir 1 por 0,1;

> - acham que o prolongamento da diagonal de um quadrinho de um tabuleiro de xadrez suposto perfeito se afasta dos vértices;
> - acham que a=b e b=c não implica a=c;
> - Quando perguntados se, afinal, o que estão dizendo é que 40 é igual a 2, respondem que sim e prosseguem sua justificativa.
>
> Enfim... E na mesma sala há alunos que resolvem todos os exercícios propostos e pedem outros. É preciso, primeiro, mostrar que esse problema existe e que boa parte dos alunos que o vestibular nos dá são assim (de 10 a 15% no nosso curso); segundo, é preciso que a Educação Matemática se ponha a resolver esse problema.

Além dos reconhecidos problemas de formação pré-universitária do(a) estudante, uma outra característica, tradicional, freqüente, e que está presente em quase todos os cenários universitários brasileiros, é o grande número de aluno(a)s das turmas de Cálculo oferecidas no primeiro ano dos diversos cursos afins à área. Dificilmente se poderia contra-argumentar que este fator dificulta sensivelmente a interação aluno-professor, que se supõe importante e necessária nesta delicada fase de transição do aluno para a Matemática do Ensino Superior. Como conseqüência, a interação individual baseada na oralidade é quase inviabilizada. Assim, na prática, não ocorre uma interação, mas apenas comunicação (e, numa metáfora com a eletrônica, provavelmente com uma baixa relação sinal/ruído...) e, pior, apenas num sentido: do professor para o aluno.

Uma vez que em tais contextos é praticamente inviável a interação aluno-professor com base na oralidade para todos os alunos numa turma típica de Cálculo, a forma de comunicação individual clássica, no sentido do aluno para o professor, continua sendo via a escrita. O problema é que, em geral, nestes escritos a linguagem simbólica matemática é a predominante e, pior, quando ocorre, em muitos casos, já é tarde demais, como, a propósito, os dados supra-referidos ilustram: a hora da prova. Pelo menos alguns indícios do que o(a) estudante pensa, quais são suas dúvidas, idéias e dificuldades, que visão ele ou ela tem sobre determinado conceito ou procedimento, tudo isso fica mais ou menos encoberto, guardado, compondo, juntamente com as de mais sessenta colegas (em média) um limbo de compreensões que permanecem em suspensão até serem, de forma anêmica — e até mesmo equivocada —, materializadas, direta ou indiretamente, nos quatro ou cinco momentos de avaliação formal de um curso clássico anual de Cálculo.

Ainda neste mesmo contexto educacional, mas sobre um outro eixo, encontra-se a questão dos chamados sistemas computacionais de manipulação simbólica — Computer Algebra System (CAS) — e a posição que já deveriam estar sistematicamente ocupando nos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo (e na Matemática, em geral). Na verdade, não se trata propriamente de como "utilizar esta ferramenta" numa aula tradicional, mas de integrá-la a outras mídias de maneira que a própria construção matemática produzida pelo(a) estudante reflita uma tal integração. Neste sentido, não há como deixar que as próprias dimensões conceitual e procedimental que tecem a urdidura de qualquer curso de Cálculo não sejam reconfiguradas. Em suma, novas formas de construção matemática no contexto de cursos de graduação devem começar a se consolidar, ainda que sem o otimismo de Stacey (2001, p. 9, tradução nossa):

> Com os CAS, estudantes têm a oportunidade de realizar seus potenciais matemáticos utilizando menos habilidades computacionais manipulativas. Usando materiais de ensino apropriados, professores competentes focalizarão a atenção do estudante em atividades matemáticas que requeiram explorar o significado da matemática sob consideração. O estudante terá a oportunidade de construir ativamente seu conhecimento, adquirir habilidades intuitivas de resolução de problemas, desenvolver compreensão conceitual em profundidade, desenvolver níveis superiores de pensamento e obter compreensão de como validar e interpretar soluções. A tecnologia dos CAS deve provar ser uma poderosa parceira matemática.

Considerando este panorama, a pergunta a seguir torna-se imediata e inevitável: que novas abordagens ou novas possibilidades poderiam ser integradas às existentes no sentido de que os educadores matemáticos pudessem contribuir para a reversão do quadro acima esboçado?

Certamente, dada a complexidade dos problemas, as dificuldades subjacentes aos contextos e as especificidades envolvidas, seria uma temeridade pretender oferecer uma resposta geral e definitiva a esta pergunta. No entanto, dado que os problemas existentes são graves e que uma atitude passiva somente contribuiria para agravá-los, o caminho natural é a pesquisa. É esta uma das principais razões que têm motivado estudiosos das mais variadas nacionalidades a se dedicarem a investigar essas questões. Ainda que o ideal platônico caracterize os objetos matemáticos como atemporais, existentes *a priori* e, portanto, independentes de eventuais idiossincrasias sócio-culturais ou contextos históricos, é bastante razoável supor que os "objetos matemáticos pedagógicos", isto é, os objetos do educador ou da educadora matemática, alem de não se distinguirem por uma tal estabilidade, caracterizam-se por singularidades e complexidades que variam em largo espectro.

Sob esta perspectiva, não é à toa que, apesar das variadas iniciativas, as dificuldades têm persistido. Assim, numa analogia com a área de Medicina, esta resistência às mais diversas "terapias" ou aos mais variados "coquetéis de medicamentos" é um indicador de que se deve continuar pesquisando, que se deve ampliar o leque de abordagens e que se devem aprofundar as já existentes na área de Educação Matemática no Ensino Superior. Além disso, é óbvio que a implementação e a resposta das comunidades envolvidas com a Prática às propostas emergentes das academias depende de fatores políticos, sócio-econômicos e somente será "visível" em médio prazo. Isto, no entanto, já era de se esperar: problemas complexos e imediatismo raramente se harmonizam. Assim sendo, considerando que o desconforto nas comunidades que atuam na área tem se generalizado e a vontade de atacar o problema com todos os recursos possíveis tem aumentado, a nós, pesquisadores e pesquisadoras, resta-nos dois movimentos: escolher um caminho e arregaçar as mangas.

2. A Pesquisa na Área: Uma Breve Visão

As pesquisas dedicadas ao ensino e aprendizagem de Cálculo têm seguido várias orientações e abordagens. Vale a pena destacar aqui que o número de pesquisas (qualitativamente similares ao de uma pós-graduação stricto sensu) em Educação Matemática no Ensino Superior ainda é pequeno, se comparado aos outros níveis de ensino, mesmo no exterior. Dentre as mais citadas estão: uso de tecnologias informáticas, resolução de problemas, modelagem, suplementação de instrução, estudos de currículo e desenvolvimento e compreensão conceitual.

Especificamente explorando, de forma simultânea, compreensões sobre vários conceitos fundamentais, o número se torna significativamente menor, uma vez que a maioria deste grupo opta por destacar apenas um conceito (p.ex., função, limite, continuidade, derivada) na investigação (a revisão bibliográfica, contida no capítulo seguinte, apresentará um panorama sobre tais abordagens).

A motivação para se investigar a compreensão conceitual pode se originar de várias fontes, destacando-se as orientações da chamada Reforma do Ensino de Cálculo, referida no início deste capítulo. Segundo Kendall (2001), um dos temas centrais da referida Reforma abordou os aspectos conceituais do Cálculo. Procurou-se, deste modo, estimular a exploração de um determinado conceito pelos estudantes sob diversos pontos de vista, no sentido de que essas múltiplas abordagens pudessem induzi-los a uma conceituação significativa previamente ao formalismo matemático, invertendo-se, assim, a seqüência tradicional. Em resumo, priorizou-se a compreensão conceitual.

No contexto brasileiro, além do número absoluto de trabalhos ser pequeno, a maior produção ainda é também muito recente. Embora os primeiros trabalhos especificamente abordando temas deste nível de ensino tenham sido produzidos antes da década de 1980, num artigo sobre a pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior no Brasil, Pinto (2002, p. 224), afirma que o primeiro Grupo de Trabalho na área foi constituído somente no ano de 2000, durante a realização do I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), em Serra Negra, SP, organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Segundo a autora, neste encontro as pesquisas na área puderam ser agrupadas em quatro sub-áreas: a) a que investiga a prática docente, as representações sociais dos professores e a produção de saberes sobre o ensinar/aprender pelos professores; b) a que focaliza a conceitualização, a reconstrução e a produção dos significados pelos alunos; c) a que trata da conceitualização, da definição e da argumentação em Matemática; d) a que elege como objeto a matemática-instrumento e os usuários da Matemática.

Conforme já referido, boa parte dos estudos que investigam a compreensão produzida por aluno(a)s universitário(a)s sobre conceitos do Cálculo tem optado por focar exclusivamente um determinado conceito. Assim, por exemplo, Cornu (1991), na França, com um estudo publicado no clássico *Advanced Mathematical Thinking,* organizado por David Tall, e Saraiva (2000), no Brasil, investigaram compreensões sobre o conceito de *Limite*, enquanto Artigue (1991), na França, e Villarreal (1999) e Dall'anese (2000), no Brasil, tomaram como foco o conceito de *derivada*.

Em geral, elementos como contexto, metodologia e objetivos são sempre naturalmente explicitados nas pesquisas em Educação Matemática. Nos estudos envolvendo compreensões de conceitos matemáticos, as características e a articulação desses três elementos são especialmente importantes na composição do desenho da pesquisa, pois são elas que balizarão o tratamento do conceito específico abordado. Assim, num exemplo óbvio, a investigação de compreensões de *número natural* no Ensino Fundamental não poderia tomar este conceito de maneira similar ao que seria tomado se o estudo fosse dirigido a alunos de bacharelado em Matemática. Menos óbvio, no entanto, seria caracterizar essas diferenças quando se investiga compreensões sobre conceitos como o de *função* no Ensino Médio e no Ensino Superior. Ainda que restringíssemos os estudos a este último nível, é possível que, dada a importância crucial do conceito de *função*, seu tratamento num curso de Matemática tenderia a ser mais amplo e aprofundado do que o dirigido aos demais cursos. De maneira análoga, cabe destacar que embora o Cálculo seja disciplina comum a todos os cursos afins à área de Ciências Exatas e a alguns das áreas de Ciências Biológicas e Ciências Sociais, o mesmo não pode, evidentemente, ser dito em relação à sua abordagem, à sua metodologia de ensino, aos seus objetivos e ao nível de profundidade que os conceitos envolvidos poderiam (ou deveriam) ser tratados em cada um desses cursos.

Permeando as grandes linhas de pesquisa na área de Educação Matemática no Ensino Superior, a informática tem ocupado um espaço crescente nas investigações, particularmente a partir da década de 1990, entre outras razões pelo crescimento exponencial das potencialidades e da disponibilidade da microinformática. Neste sentido, os CAS (Computer Algebra System), têm, embora timidamente no Brasil, começado a aparecer nas pesquisas neste nível de ensino.

Uma outra abordagem em Educação Matemática que tem se desenvolvido, ainda que lentamente, desde o final dos anos 1980 no EUA, é a que investiga o uso da Escrita em Linguagem Natural na Aprendizagem Matemática.

Pesquisas nesta linha e especificamente voltadas para o Ensino Superior são raras e, no Brasil, de acordo com a revisão de literatura, que será apresentada no capítulo seguinte, apenas a de Santos (2001) foi encontrada. Este ambiente rarefeito é, de certa forma, surpreendente no Brasil, se considerarmos que Machado (1990), já no início da década de 1990, alertava que (p. 157):

> [...] a superação das dificuldades com o ensino passa pelo reconhecimento da essencialidade da impregnação mútua entre a Língua Materna e a Matemática e, em conseqüência, da absoluta necessidade da utilização inicial de noções intuitivas, aproximadas, imprecisas, mas fecundas e significativas, descortinadas através do recurso à Língua.

Finalmente, visões mais modernas sobre a natureza do conhecimento e sobre a própria cognição têm procurado caminhos alternativos à dicotomia entre seres e coisas que tem permeado o pensamento ocidental por séculos. Neste sentido, a visão de Lèvy (1993) sobre tecnologias da inteligência e a de Borba e Villarreal (2005), com o construto seres-humanos-com-mídias, defendem a possibilidade de integração entre humanos e as mais variadas mídias, no sentido de que tais metáforas estimulem novos *insights* sobre a complexidade da produção de conhecimento.

É sob este panorama que a presente pesquisa explorou algumas das possibilidades da integração da escrita em linguagem natural, da informática e da oralidade na investigação de compreensões que estudantes de graduação em Matemática ingressantes à universidade demonstram em relação aos seguintes conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial: *função*, *limite*, *continuidade* e *derivada*. Mais especificamente, a pesquisa "ouviu" aluno(a)s de primeiro ano de um curso de Licenciatura/Bacharelado em Matemática de uma universidade pública do Estado de São Paulo, escrevendo e discutindo, com apoio do CAS MAPLE (Sistema de Computação Algébrica MAPLE), sobre tais conceitos, em momentos específicos de seu desenvolvimento regular na disciplina Cálculo Diferencial e Integral na qual estavam matriculados. Os conceitos abordados foram justamente os primeiros com os quais o(a)s aluno(a)s ingressantes têm contato — e que ocupam todo o primeiro semestre e parte do segundo, na execução do conteúdo programático da disciplina

— e que, infelizmente, são também os que constituem suas primeiras fontes acadêmicas de preocupações e de angústias.

Embora compartilhando de uma visão dialética entre trabalho conceitual e trabalho técnico em Matemática — uma vez que a técnica pode transcender seu valor pragmático para ocupar também uma posição epistemológica na construção do conhecimento matemático — este estudo, por questões de foco e objetivos, definiu seu recorte na investigação de fenômenos emergentes das compreensões de alguns dos mais importantes conceitos do Cálculo Diferencial, de uma maneira que privilegia menos os movimentos procedimentais — que, a propósito, devem ser repensados, dado o exponencial crescimento das tecnologias informáticas — que os utilizam, do que as próprias representações de suas compreensões.

Assim, a escolha acima referida foi motivada, em primeiro lugar, pela percepção de que os fenômenos que ocorrem na aprendizagem, no ensino e no processo ensino-aprendizagem no Cálculo, continuam — como os dados acima demonstram — ainda a demandar novos estudos e novas compreensões (urgentes!) pelo(a)s pesquisadore(a)s em Educação Matemática. Em segundo, porque os conceitos investigados representam alguns dos pilares da estrutura que o aluno ou aluna de Matemática ingressante na universidade necessariamente deverá construir, sob pena de dificultar ou mesmo comprometer seu entendimento, não apenas em relação ao Cálculo, como em todos os conteúdos matemáticos subseqüentes. Finalmente, mas não menos importante, pela curiosidade intelectual do pesquisador, fruto da atuação docente no contexto das primeiras séries dos cursos universitários de Matemática e, mais recentemente, da Engenharia, por mais de quinze anos, vivendo as alegrias e os dilemas típicos do magistério neste nível de ensino.

3. Objetivo e Questões de Pesquisa

O objetivo da pesquisa é investigar as compreensões, emergentes da integração entre oralidade, escrita (em linguagem natural) e informática (representada pelo CAS MAPLE), sobre conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial, produzidas por alunos de primeiro ano de Matemática de uma universidade pública do Estado de São Paulo.

Com base neste objetivo, propus as seguintes questões de pesquisa:

No contexto de um grupo de alunos de Matemática de uma universidade pública do Estado de São Paulo, em seu primeiro curso de Cálculo e em relação aos conceitos de *função, limite, continuidade* e *derivada*:

1. Que compreensões são produzidas sobre tais conceitos a partir da integração entre oralidade, escrita (em linguagem natural) e informática (representada pelo CAS MAPLE[3]) ?

2. O que sugerem tais compreensões sob o ponto de vista da Educação Matemática no Ensino Superior ?

A investigação buscou, portanto, a partir dessas compreensões produzir novas visões acerca de alguns dos fenômenos e processos subjacentes que ocorrem com alunos de Matemática ingressantes numa universidade pública, no que se refere às suas compreensões sobre conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial.

---

[3] A partir do próximo capítulo, o CAS MAPLE será referenciado apenas como MAPLE.

CAPÍTULO II

Tecnologias Intelectuais e Compreensões de Conceitos em Matemática

O objetivo deste capítulo é apresentar os principais elementos que fundamentaram e orientaram a constituição do objeto da presente pesquisa. Para isso, o capítulo foi estruturado segundo as seguintes seções:

- Introdução
- Escrita e Educação Matemática
- Sistemas de Computação Algébrica (CAS) e Educação Matemática
- Compreensão Conceitual
- Tecnologias Intelectuais: Oralidade, Escrita e Informática — Uma visão integradora

A constituição de um objeto de pesquisa depende, dentre outros fatores, dos interesses do pesquisador, das lacunas encontradas na respectiva área de conhecimento, dos recursos disponíveis e da visão de conhecimento que impregna as reflexões e movimentos deste pesquisador.

Neste sentido, no primeiro capítulo, procurei apresentar alguns dos elementos que têm contribuído para moldar meus interesses de pesquisa; o capítulo III situará o presente estudo no panorama de pesquisas da área, ao passo que o capítulo IV permitirá ao leitor ou leitora conhecer os recursos disponíveis, a abordagem e a visão de conhecimento que subjaz a presente investigação.

1. Introdução

A adoção de um referencial teórico *a priori* numa pesquisa concebida com o objetivo de investigar compreensões de um determinado grupo social sobre algum tema é questionada por vários pesquisadores (p. ex. GLASER; STRAUSS, 1967). Segundo esses autores, a fixação antecipada de um quadro teórico pode constranger os movimentos do pesquisador por focalizar prematuramente determinados elementos, em detrimento de outros que possivelmente poderiam oferecer uma maior riqueza interpretativa. Embora compartilhando desta visão, em nome da clarificação do objeto de pesquisa e da própria legibilidade deste trabalho, eu optei, já neste segundo capítulo, por oferecer ao leitor ou leitora os principais elementos teóricos sobre os quais foi construído o objeto deste estudo.

A análise dos dados, que será apresentada nos capítulo V e VI, tomará, entretanto, vários outros elementos teóricos para a sua fundamentação. Optei por este caminho pelas seguintes razões: primeiramente porque o paradigma de pesquisa adotado (cap. IV) autoriza que elementos teóricos presentes na análise sejam explicitados simultaneamente aos dados; em segundo, porque esta abordagem é a que melhor reflete a realidade do desenvolvimento da pesquisa e os encaminhamentos nela ocorridos; e, finalmente, numa tentativa de me aproximar da elegância na apresentação dos dados e nas respectivas análises sugerida por Alves-Mazotti e Gewandsnajder (2001), no sentido de que elementos teóricos deixam de ser explicitados previamente para serem trazidos à cena somente quando puderem ser articulados e integrados aos dados descritos.

É evidente que, mesmo tendo optado por essa abordagem, não há como — em nome de uma melhor legibilidade — deixar de se construir alguma linearidade no processo de redação final de uma tese. De todo modo, tal linearidade não deve ser entendida como um reflexo ou uma imagem direta dos movimentos da prática investigativa, nem tampouco dos movimentos da urdidura teórica desenvolvida ao longo da pesquisa. Assim, este desenvolvimento foi sendo produzido desde a elaboração do projeto até a redação final, num processo que procurou agregar novos elementos e resultados recentes de outras pesquisas aos elementos teóricos iniciais sempre que oferecessem potencial enriquecedor para a abordagem analítica.

Para que os objetivos da investigação fossem alcançados, a saber, identificar e analisar as compreensões de estudantes de Matemática — e sugerir contribuições para a Educação Matemática no Ensino Superior a partir delas — no que se referem aos conceitos de *função*, *limite, continuidade* e *derivada*, o desenho metodológico da investigação, que será detalhado no capítulo IV, foi planejado de modo a gerar dados que integrassem elementos de escrita, informática e oralidade no propósito de contribuir para a construção de um *corpus* com maior nitidez e densidade de dados para a análise. Neste processo, à escrita coube um papel especial e que já lhe era assegurado desde a concepção do projeto de pesquisa: induzir as primeiras reflexões e representar as compreensões iniciais do(a)s estudantes sobre cada um dos conceitos em pauta, desencadeando-se, assim, o referido processo. O movimento seguinte foi integrar a este a informática e a oralidade visando não apenas robustecer, mas definir e completar o *corpus* acima referido.

Mais do que uma simples agregação de novos elementos, esta abordagem é balizada segundo a visão integradora de Pierre Lévy (1993) — sobre a oralidade, a escrita e a informática, unificadas por este autor sob a denominação de *tecnologias intelectuais* ou *tecnologias da inteligência* — e de seres-humanos-com-mídias, de Villarreal e Borba (2005). Deste modo, as possibilidades de compreensão sobre o pensamento dos estudantes foram potencializadas e aprofundadas.

2. Escrita e Educação Matemática

Nesta seção, eu apresentarei uma visão geral dos pressupostos teóricos que subsidiam a utilização da escrita em linguagem natural na Educação Matemática, de como ela tem sido abordada e como suas potencialidades têm sido exploradas. Alguns autores utilizam a expressão *escrita em linguagem materna* ou *escrita em linguagem corrente*. Para evitar a repetição de tais expressões, eu utilizarei, freqüentemente, a partir deste ponto, apenas a expressão *escrita*.

O papel da escrita na Educação Matemática tem sido objeto de investigação nos Estados Unidos desde o final da década de 1980. Em vários cenários educacionais, níveis de ensino e com diferentes propósitos ela tem sido chamada à cena para ser observada e estudada quanto às suas possibilidades pedagógicas. Assim, uma nova sigla foi cunhada em 1992 nos EUA — WAC - Writing Across the Curriculum (Escrita através do Currículo) — para facilitar a identificação desta abordagem pelos educadores e pesquisadores na área.

Se supusermos que a produção de um texto claro, coerente e objetivo pressupõe a capacidade de articular idéias e de organizar o pensamento, então sua importância na Educação Matemática já estaria assegurada, já que o desenvolvimento da capacidade de articulação das idéias — neste caso, de idéias matemáticas — é justamente um dos objetivos fundamentais do ensino desta ciência.

Num estudo considerado inovador, Rose (1990, p. 63, tradução nossa) propôs que o potencial pedagógico da escrita na Matemática poderia ser classificado, numa primeira clivagem, em três categorias de benefícios:

- Benefícios para o(a) estudante como escritor(a);
- Benefícios para o(a) professor(a) como leitor(a);
- Benefícios para a interação professor(a) / estudante

Seguem abaixo uma breve exposição sobre tais benefícios.

2.1 A Escrita e os benefícios para o(a) estudante

Dificilmente se poderiam subestimar as possibilidades da característica indutora de reflexão gerada pela escrita, ou seja, o ato de escrever demandando o pensar reflexivo sobre o que se pretende comunicar e de que forma este pensamento poderia ser materializado. Esta característica tem sido constatada e reforçada por pesquisas como a de Powell e Ramnauth (1992) que, utilizando os *multiple entry logs (relatório de múltiplas entradas)* mostrou como este instrumento desencadeia processos de reflexão que se retroalimentam à medida que o(a) estudante prossegue em seu esforço para produzir resultados que, em primeiro lugar, o(a) satisfaça em termos de significado e, em segundo, que satisfaça o(a) destinatário(a) de sua mensagem, ou seja, o(a) leitor(a)/professor(a) que está interessado(a) em apreender as compreensões do estudante. Com base nesta perspectiva e em seus resultados de pesquisa, Powell e Ramnauth (1992, p. 17) perguntam: “Que outros instrumentos estimulariam os estudantes a desenvolver, como um ‘*habito da mente’,* seus poderes de reflexão nas práticas discursivas envolvendo a Matemática?”

É óbvio que o ponto crucial do argumento de Powell não é a virtude específica de seu instrumento particular, mas, sim, o potencial educacional das reflexões desencadeadas pelo seu uso, o que, de resto, ele já sustentava em Hoffman e Powell (1989, p.55, tradução nossa):

> *[A escrita]* permite aos instrutores “ouvirem” cada estudante e permite aos estudantes saberem que suas preocupações e idéias serão “ouvidas”. Além disso, seus escritos revelam o que entendem e o que ainda não entendem. Por meio da escrita, mal-entendidos, conceituações variantes, crenças e padrões de pensamento são revelados.

No que tange à língua, em geral, esta posição de Hoffman e Powell encontra suporte também em Saussure (1987, p. 24), uma vez que para este autor, “A língua é um sistema de signos que exprimem idéias.”

É possivelmente com base nestas e em outras visões similares que outros instrumentos têm sido construídos com o propósito de enriquecer o conjunto de opções possíveis para o exercício dessa abordagem. A fim de que o(a) leitor(a) possa ter uma idéia dos tipos de instrumentos que têm sido utilizados segundo esta perspectiva, eu apresentarei os sugeridos por Sipka (1990).

Em sua proposta, o autor classifica as tarefas escritas em duas categorias: informais e formais. Na primeira, o foco está centrado no conteúdo, ou seja, privilegia-se a substância do que é escrito, ainda que esteja imersa num texto pobre em estilo, em organização ou em eventuais erros de ortografia e de concordância. Na segunda, agrega-se forma ao conteúdo. Na categoria das tarefas informais este autor propõe (SIPKA,1990, p. 11, tradução nossa):

a) Escrita em sala de aula: O professor solicita aos alunos a elaboração de um texto qualquer, que poderá ser sobre um tema livre ou não. Claro que a fixação prévia de um tema terá a vantagem de direcionar o esforço para um foco bem definido. Assim, o professor poderia, por exemplo, solicitar a descrição dos passos para a resolução de um problema, a explicação dos métodos empregados em sua resolução e uma síntese das principais dificuldades encontradas no processo.

b) Autobiografias em matemática: Nesta tarefa os alunos são solicitados a escreverem sua autobiografia em matemática, detalhando um episódio de sucesso e um de fracasso. Esta tarefa, além de estimular a escrita, proporciona ao professor um melhor conhecimento de sua turma e pode estimular a motivação do aluno no processo de aprendizagem.

c) Listas de Questões: A leitura de algum tópico em matemática é, em geral, um trabalho árduo para a maioria dos alunos. Assim, nesta tarefa, os alunos são instados a compilar uma lista de questões ou dúvidas associadas a um determinado tópico. Tais questões devem ser analisadas e respondidas pelo professor também em forma escrita.

d) Diários: Como uma coleção de escritos em matemática, variando desde um mero diário até a sínteses de discussões focadas em algum tópico específico, esta tarefa talvez seja uma das mais citadas na literatura em escrita atual.

e) Cartas: Solicitar a um aluno para que este escreva uma carta ao professor, a um colega ou ao autor de um texto é também uma das formas de atividade em escrita que podem ser desenvolvidas. Como exemplo, um aluno poderia escrever uma carta a seu professor, identificando suas dúvidas no livro-texto ou explicando as razões de seu desempenho nos exames.

No caso das tarefas formais em escrita, estas são classificadas por Sipka em: demonstrações, justificação de processos, notas de aula, resumos de artigos de revistas, soluções de problemas propostos em periódicos e artigos de pesquisa. Mais especificamente dirigido à justificação de proposições matemáticas, o processo de desenvolvimento de uma demonstração formal, quando em seu estágio de criação (ou recriação significativa), pode variar substancialmente no que tange ao grau de complexidade e nas estratégias utilizadas. Como todo o processo de criação, sua dinâmica não é linear, mas sua apresentação final possui a característica linear que é destacada por Zinsser (1983 apud Sipka, 1990, p.12, tradução nossa), quando afirma: “A escrita é linear e seqüencial. A sentença B deve seguir uma sentença A e uma sentença C deve seguir B. Cada sentença deve ser uma seqüência lógica daquela que a precedeu.”

Assim, como a Matemática exige que esta característica esteja presente, por exemplo, numa demonstração, o estudante pode ser beneficiado com um tipo de exercício que é comum, senão inerente, ao próprio ato de escrever, isto é, o reescrever, sempre visando a ordenação que caracteriza o texto final. É este processo de revisão, de aproximação, de convergência para o texto definitivo o que talvez melhor caracterize a essência do desenvolvimento de uma boa escrita. Abaixo segue um resumo das propostas de Sipka (1990, p. 12, tradução nossa) para as tarefas formais:

> a) A *justificação de processos* é uma exposição argumentada sobre os processos encontrados num tópico específico em matemática. Neste instrumento, o estudante é instado a escrever, por exemplo, as razões pelas quais a divisão por zero não é definida ou porque determinado algoritmo possui aqueles passos.
>
> b) As *notas de aula* talvez sejam a mais tradicional forma de trabalho escrito de um estudante. Em seu artigo, entretanto, o autor dá um passo a mais no sentido de formalizar o processo ao escolher um aluno da turma para tomar as notas relativas a uma determinada aula. Após submeter seu texto ao professor a fim de que sejam feitas as devidas correções e polimento, este poderá ficar disponível na biblioteca para consulta restrita.
>
> c) O resumo de um artigo científico, apesar de não ser uma tarefa muito comum nas disciplinas tradicionais dos cursos de graduação em matemática, pode ser outra fonte para se investigar a compreensão dos alunos relativamente a um determinado tópico.
>
> d) A solução de problemas propostos em revistas científicas é uma outra forma de estímulo à escrita, desde, claro, que sejam acessíveis ao nível acadêmico dos leitores. Estimula-se, assim, que os estudantes, ao abordarem revistas com conteúdo compatível, resolvam eventuais problemas propostos e, mais do que isso, ao fazerem-no, utilizem uma redação científica tradicional.
>
> e) A escrita de artigos de pesquisa é o último e mais refinado modelo proposto pelo autor em seu artigo. Em última análise este é uma das tarefas que mais se aproximam do trabalho cotidiano do matemático profissional.

Sobre as potencialidades e benefícios da escrita para o estudante, Connoly (1992, apud Sipka, 1990, p. 11, tradução nossa) é bastante otimista: “Os alunos tomam a posse conceitual de um tópico em sua própria língua através da articulação dos conceitos matemáticos nele contidos”.

2.2 A Escrita do(a)s Estudantes como benefício para o Professor

O potencial de representação de compreensões e de manipulação de significados (a ser detalhado na última seção deste capítulo) sobre conceitos matemáticos possibilitados pela escrita foi um dos elementos principais que permitiram que a presente pesquisa fosse concebida. Neste caso, a visão de Rose (1990), referida acima, foi explorada, embora com o mesmo objetivo, não no sentido de benefícios para *o professor*, mas sim de benefícios para *o pesquisador* em sua prática investigativa.

Pugalee (2004) vai mais longe ao analisar os benefícios da escrita, ao afirmar que esta, mais do que um instrumento de comunicação tem o potencial de promover a compreensão matemática, opinião esta que é avalizada, segundo Pugalee, por vários pesquisadores, dentre os quais Morgan (1998, apud Pugalee, 2004, p. 27, tradução nossa), que ressalta:

> Apesar do interesse, o relacionamento entre escrita e Matemática tem sido largamente negligenciado na pesquisa educacional, com a maioria da literatura descrevendo a escrita em Matemática em termos gerais e com pouca análise dos textos em si.

Ainda que se restringisse ao papel de representar as compreensões do(a)s estudantes, permitindo que as materializem e as comuniquem ao professor ou professora, a escrita já poderia ocupar, portanto, um papel que postulo crucial para a Educação Matemática em cenários e contextos similares aos do ensino de Cálculo na primeira série de cursos de graduação em Matemática brasileiros, onde uma das características mais comuns é a grande quantidade de alunos em suas turmas. Afinal, uma tal característica certamente dificulta, e muito, a comunicação personalizada com base na oralidade, no sentido do aluno para o professor.

É óbvio que a implementação de um processo de escrita nas aulas de Cálculo, em especial nos cenários de turmas grandes, também não seria fácil e nem parece ser factível de forma generalizada. De todo modo, não há dúvidas de que as possibilidades de “ouvir” o(a) cada estudante pela sua escrita é bem maior do que fazê-lo pela oralidade. Este foi um dos motivos que me levou a procurar “ouvir” o(a) aluno(a) por meio desta tecnologia.

Por uma questão de foco na investigação, a presente pesquisa não teve a intenção de demonstrar eventuais virtudes ou fraquezas da escrita nos processos de aprendizagem dos conceitos discutidos, uma vez que se este fosse o objetivo, a metodologia da pesquisa teria que ser redesenhada. O que se buscou foi justamente “ouvir” o(a) estudante que segue seu curso normal assistindo às aulas regulares de Cálculo e que se dispôs a materializar nesta investigação suas compreensões sobre alguns dos conceitos tratados em sua sala de aula.

No contexto da investigação ora relatada, uma das principais razões que me motivou, desde os primeiros esboços de projeto de pesquisa, a incorporar esta “velha” tecnologia na investigação, foi a constatação, decorrente da minha prática educacional, de que, em geral, a mera manipulação algébrica e algorítmica dos exercícios clássicos da disciplina, além de ocupar a maior parte do tempo de trabalho em sala de aula, parece contribuir sistematicamente para deslocar a apreensão — e a apreciação — de seus significados conceituais para uma posição subalterna, ou mesmo, em casos extremos, para fora do escopo dos objetivos educacionais que deveriam ser perseguidos. Neste sentido, incorporar a escrita à investigação é sustentar, sob o ponto de vista dos objetivos aqui definidos, particularmente que:

- Ela é o principal instrumento de comunicação, no sentido do(a) estudante para o professor, na sala de aula universitária típica de primeiro ano de Cálculo, onde as usuais turmas grandes e heterogêneas praticamente inviabilizam a interação individual generalizada com base na oralidade;

- Ela é um meio não usual no ensino tradicional de representação de compreensões dos alunos sobre conceitos matemáticos;

- Nas condições usuais de desenvolvimento tradicional do Cálculo, em apenas cinco ou seis momentos no ano o aluno tem a possibilidade de expressar na forma escrita (e, quase sempre, na escrita simbólica matemática) suas compreensões sobre os conceitos abordados no curso: estes momentos são os das provas, freqüentemente inadequados, dada a pressão emocional, à materialização de compreensões.

Ao longo da minha vivência no Ensino Superior tenho percebido que o caráter predominantemente simbólico da Matemática neste nível introduz nos processos de ensino e de aprendizagem, em primeira instância, obstáculos pedagógicos decorrentes deste simbolismo para, em seguida, induzir o(a)s estudantes a adotarem estratégias que privilegiam a mera manipulação mecânica dos símbolos e a abordagem estritamente algorítmica, minimizando, assim, o valor da compreensão dos conceitos envolvidos e dificultando a apreensão dos significados reconhecidos como válidos pela instituição acadêmica. Cabe aqui salientar que identificar e assumir os significados da comunidade acadêmica como sendo aqueles oriundos da comunidade matemática profissional é questão controversa, em especial para a formação de licenciandos. Por outro lado, não há, em geral, nos currículos atuais brasileiros, diferenças fundamentais entre Cálculo para licenciandos e Cálculo para bacharelandos em Matemática, até porque, como disciplina de primeiro ano, ela se localiza no estágio denominado de *básico*, previamente, portanto, à futura clivagem bacharelando / licenciando. Em razão disto, entendo que a convergência para o conteúdo clássico tem sido uma opção praticamente inevitável neste estágio de formação matemática, não só pelo fato de ser o Cálculo no primeiro ano tratado indistintamente, como também pelas restrições impostas pelo pragmatismo que emerge das atividades conexas à formação profissional desses graduandos desenvolvidas em outras disciplinas.

Especificamente sobre as dificuldades encontradas por professore(a)s de Cálculo em suas aulas, em particular no que tange às características freqüentemente detectadas em seus alunos e alunas, Beidleman et al (1995, p. 298, tradução nossa), destaca que:

- Carecem de profundidade na compreensão da natureza e da substância do Cálculo, incluindo-se aí seus conceitos fundamentais.
- Usualmente privilegiam a manipulação de símbolos e a memorização de fórmulas em detrimento da compreensão da linguagem e dos significados dos conceitos matemáticos, idéias e expressões.
- São freqüentemente incapazes de comunicar suas idéias matemáticas pela escrita ou verbalmente. Em conseqüência, não desenvolvem fluência e compreensão da linguagem matemática.
- Em geral, não apreciam o Cálculo como atividade humana que requer descoberta e pensamento criativo.

Lembrando que muito dos problemas acima apontados são reforçados pelas questões procedurais típicas (resolver, calcular, etc.), propostas nos exames, Beidleman et al (1995, p. 298, tradução nossa) complementa:

> Embora tais questões requeiram que o estudante faça algo, elas, em geral, priorizam os procedimentos em detrimento dos aspectos conceituais e não induzem o estudante a colocar foco na comunicação das idéias matemáticas. Visando melhor desenvolver sua compreensão e apreciação da matéria, os estudantes devem ter a oportunidade de comunicar suas idéias verbalmente e pela escrita, obtendo "feedback" e refletindo sobre suas experiências.

Esta visão é reforçada por Hoffman, M e Powell, A. (1989, p. 55, tradução nossa) quando expõem sua visão sobre o papel da escrita em Matemática:

> Escrita é uma externalização do pensamento, menos transiente que a memória e menos efêmera do que a fala. Devido a tais características, é um veículo visível para os estudantes examinarem suas conceituações e revisá-las à luz de evidências adicionais ou contraditórias.

Falar sobre o pensamento matemático implica em tratar de questões de abstração, ou seja, de lidar, no caso, com representações mentais sobre conceitos matemáticos. Estes conceitos podem ser considerados mais sofisticados e específicos — no que tange ao grau de abstração e ao artificialismo de sua linguagem — do que aqueles que naturalmente são considerados na relação ordinária do ser humano com o mundo. Reconheço, entretanto, a existência de complicadores adicionais a essa sofisticação e que usualmente dificultam as compreensões pretendidas no cenário de ensino e aprendizagem em pauta. Refiro-me, em particular, a uma certa impermeabilidade do grupo social responsável pela fixação dos significados "válidos" da Matemática: a classe dos matemáticos e matemáticas profissionais. A princípio, tal impermeabilidade poderia ser passível de crítica e, talvez, o seja. No entanto, considerando-se como atenuante o contexto característico de uma ciência formal, constituída por uma linguagem artificial e cujas proposições são validadas por grupos especializados de matemático(a)s profissionais, a partir de noções de rigor estritamente particulares em cada uma de suas subáreas, esta impermeabilidade talvez seja compreensível.

De todo modo, a questão da compreensão nas práticas educacionais da Matemática é crucial, pois como consubstanciar esta negociação entre os três principais grupos atuantes no cenário educacional: matemáticos profissionais, estudantes de matemática e professore(a)s de matemática, com este(a)s — justamente por estarem intermediando e filtrando as concepções que deslizam para a sala de aula — ocupando um lugar de destaque no palco escolar tradicional de negociações? Nestas condições, portanto, as compreensões pretendidas dependerão de negociações que dificilmente poderão prescindir de uma linguagem compartilhada e comum aos grupos envolvidos, sob pena de tornar-se impraticável à medida que se restrinja aos procedimentos simbólicos formais.

Esta é mais uma das razões que me levaram a propor que uma das maneiras de se abordar as dificuldades da linguagem simbólica pode ser, num primeiro momento, tentar traduzi-la — ainda que carregando todos os problemas típicos de qualquer tradução — para uma linguagem mais amigável ou, idealmente, traduzi-la para a linguagem natural, mesmo que seja sem o otimismo de Paul Connoly, acima referido.

Obviamente, não se trata de abolir a linguagem simbólica matemática da prática educacional — pretensão esta que tornaria inexeqüível o próprio exercício da Matemática atual —, mas sim de estabelecer, durante o processo de aprendizagem, um movimento contínuo, bidirecional e consistente de tradução e de interpretação entre a linguagem simbólica formal e a linguagem escrita corrente, buscando, a partir desta tecnologia, facilitar a comunicação e, provavelmente, a compreensão de novos conceitos e permitir um trânsito menos acidentado pela primeira. É claro, também, que não se pretende enfraquecer o valor do simbolismo em Matemática. Ainda que, curiosamente, esta ciência tenha se desenvolvido durante pelo menos três milênios com quase nenhum símbolo (KLEINER, 2001, p. 148), o simbolismo foi e é crucial, como, a propósito, destaca este mesmo autor ao citar o historiador K. Pederson:

> Uma importante razão pela qual os matemáticos [do começo do século XVII] não tiveram sucesso em perceber as perspectivas gerais inerentes a seus vários métodos [para a resolução de problemas de cálculo], foi provavelmente que eles se expressavam, em grande medida, na linguagem ordinária, sem qualquer notação especial e, assim, achavam difícil formular as conexões entre os problemas com os quais lidavam. (KLEINER, 2001, p. 148, tradução nossa).

Um exemplo clássico do valor de um bom simbolismo está no próprio Cálculo de Leibniz, com sua sugestiva notação dy/dx. Neste sentido, observa Kleiner (2001, p. 147, tradução nossa) sobre Leibniz: “sua notação simbólica serviu não apenas para *provar* resultados; ela facilitou enormemente suas descobertas”. Não restam dúvidas, portanto, quanto à importância do simbolismo nos processos de *criação* e de *justificação* matemáticas. A questão em pauta, no entanto, é menos de Matemática e mais de Educação Matemática, isto é, menos de produzir Matemática e mais de produzir significados para uma simbologia já existente e que, para o(a) iniciante, em geral, se traduz em sérias dificuldades.

Embora as questões metodológicas da pesquisa sejam tratadas no capítulo respectivo, eu gostaria de salientar que a especificidade da forma de abordagem escolhida para iniciar a investigação das compreensões matemáticas do(a)s participantes, a saber, olhar primeiramente para a escrita produzida por este(a)s, implicou em alguns cuidados. Em primeiro lugar, em selecionar os momentos em que essas radiografias seriam tomadas e, em segundo, em definir, de acordo com as recomendações metodológicas, outras formas de coleta de dados que contribuíssem para a triangulação e, em conseqüência, com a profundidade da análise das informações coletadas.

Considerando que a informática está cada vez mais presente nos cenários educacionais, foi uma decisão natural trazer este elemento para o cenário de pesquisa. No caso específico do ensino e aprendizagem de Cálculo, a informática tem sido, com bastante freqüência, representada pelos chamados CAS. Assim, esta tecnologia, juntamente com a oralidade, foram chamadas a participar do estudo de forma integrada, num processo que será fundamentado na seção 3 deste capítulo. Cabe aqui destacar que o papel da oralidade, ao longo do desenvolvimento dos experimentos, foi estimulado, desde que emergisse dos estudantes, mas propositalmente limitado no caso do pesquisador, sempre com o objetivo de que a investigação se mantivesse fiel a seu princípio básico: ouvir o(a) estudante em suas compreensões sobre conceitos fundamentais do Cálculo numa posição similar àquela que ele ou ela encontra em seu cotidiano como aluno(a) universitário(a) de primeiro ano.

3. Sistemas de Computação Algébrica (CAS): O MAPLE

As possibilidades e as potencialidades das interações humanas com as tecnologias informáticas têm, de forma inquestionável, ganhado espaço no conjunto das práticas da sociedade. Imersa neste conjunto, a área educacional, em sentido amplo, exerce e recebe, de forma mais ou menos ostensiva, as mais variadas formas de influência neste mesmo conjunto de práticas.

Não obstante esta constatação, é curioso notar que quando recortamos os cenários especificamente desenhados para as práticas educacionais e os comparamos com outros cenários sociais, surjam diferenças significativas de visões, percepções, atitudes, objetivos e resultados no que concernem às relações seres humanos e tecnologias informáticas. A princípio poder-se-ia conjecturar que tais diferenças somente são perceptíveis em países periféricos, onde os substanciais desníveis sociais e econômicos da população inviabilizam a emergência de uma visão mais homogênea e articulada sobre o papel das tecnologias informáticas no contexto social geral e nos contextos educacionais específicos. Isto não é verdade, de acordo com Artigue (2001), quando esta autora enfoca a questão da complexidade inerente aos ambientes informatizados. Assim, ao discutir a integração das tecnologias informáticas aos sistemas educacionais, ela reconhece que, mesmo depois de 20 anos, na França tal complexidade tem sido subestimada. Ainda segundo ela, a relação estabelecida com a informática no contexto social geral é fundada no pragmatismo, no reconhecimento de que o acesso à tecnologia não é imediato e no reconhecimento do fato de que a tecnologia molda fortemente nossas práticas e perspectivas. Já no lado educacional predomina, ainda segundo ela, uma visão de tecnologia centrada em seu papel pedagógico, servindo a valores definidos independentemente dessa tecnologia, numa atitude que induz uma visão de tecnologia como algo transparente em relação a conhecimento e valores. É natural, portanto, que tais posturas se reflitam nas práticas educacionais e, conseqüentemente, nos resultados do processo educacional.

Em minha opinião é, portanto, necessário que o crescimento dos espaços ocupados por essas tecnologias e a velocidade com que tais processos se institucionalizam nos cenários educacionais, sejam acompanhados pelos educadore(a)s e, em especial, pelos pesquisadore(a)s em Educação, de uma reflexão acerca dos resultados que se têm obtido, dos objetivos a serem alcançados e das implicações que essas práticas podem trazer para a Educação e, em conseqüência, para a sociedade em geral.

Apesar do maior volume de pesquisas que tem sido detectado na integração da informática com a Educação Matemática, ainda não é possível a inferência de conclusões definitivas no que se refere ao seu papel em cenários educacionais específicos (SMITH, 2002). Sobre a integração das tecnologias informáticas nos processos de ensino e aprendizagem, várias possibilidades têm freqüentemente sido citadas na literatura. Por exemplo, as múltiplas representações, a exploração da variação de parâmetros, o processamento e a manipulação da linguagem simbólica. Associadas ao rápido *feedback* geralmente proporcionado por essas mídias, vários pesquisadores têm defendido a idéia de que o suporte computacional apropriado pode contribuir para a aprendizagem matemática.

É certo, no entanto, que os recursos e a potencialidade que caracterizam os chamados CAS (Computer Algebra System) — Sistemas de Álgebra por Computador — agrega ainda mais complexidade aos ambientes de ensino e aprendizagem. Esta é a visão de autores como Cuoco (2002, p. 293, tradução nossa):

> […] ao contrário de outros softwares matemáticos, a maioria dos ambientes CAS *incorporam* várias mídias computacionais desenvolvidas previamente, incluindo-se:
>
> - Rotinas numéricas de alta precisão e funções matemáticas embutidas;
> - Uma linguagem completa de programação que suporta estilos de trabalho orientados a objeto, funções e procedimentos;
> - Capacidades gráficas que incluem plotagem de funções de todos os tipos definidas em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{C}$;
> - Capacidades de tabulação e de tratamento de dados que permitem aos usuários construírem e manipularem tabelas e matrizes de objetos admissíveis.
>
> Assim, em termos de software educacional, a maioria dos CAS reúne num só pacote uma calculadora científica sofisticada, uma linguagem de programação, um ambiente gráfico e uma planilha.[...] Mas um CAS é mais do que uma coleção de mídias previamente desenvolvidas: ele inclui — pelo menos até certo ponto — expressões algébricas e funções algébricas (assim como combinações algébricas de funções transcendentais clássicas ou definidas pelo usuário) como *objetos de primeira classe*, e seus sub-ambientes contêm comandos que permitem realizar cálculos típicos com estes objetos. Isto abre um conjunto completamente novo de possibilidades para os estudantes e um conjunto totalmente novo de questões para os educadores.

Particularmente na aprendizagem do Cálculo, só muito recentemente é que os CAS começaram a ocupar, ainda que de forma tímida, algum espaço nos laboratórios das universidades, nas preocupações de educadores e educadoras envolvidos em seu ensino e nos temas de interesse dos pesquisadore(a)s em Educação Matemática. Apesar da timidez de sua emergência no Brasil, as tendências apontam para um rápido crescimento em sua utilização, o que pode ser constatado pela queda nos preços desses sistemas e pelos lançamentos de novos livros-textos, oferecendo desde exercícios especialmente desenhados para a abordagem computacional, até suporte via WEB para professores e alunos.

Entre os mais importantes CAS comerciais disponíveis no mercado, o MAPLE e o MATHEMATICA têm ocupado uma posição de destaque nas preferências de usuário(a)s e pesquisadore(a)s em trabalhos no contexto da Matemática pura. Sistemas como o MATHCAD e o MATLAB, embora também presentes neste contexto, apresentam um projeto que os direcionam mais especificamente para aplicações em engenharia. Além disso, os três primeiros competem diretamente entre si nos aspectos de preço e de características gerais. A decisão final pelo MAPLE baseou-se em minha experiência anterior com o sistema e na opinião informal de colegas da área, segundo os quais a filosofia do projeto MAPLE — concebido na Universidade de Waterloo — Canadá, estaria mais próxima da filosofia acadêmica. No entanto, é importante lembrar que os programas acima referidos não foram, a princípio, projetados para servirem à Educação Matemática. É ilustrativo, para nós educadores, observarmos que a diretriz fundamental do Grupo de Computação Simbólica – GCS, da Waterloo, é viabilizar a “mecanização da Matemática”.

De todo modo, os recursos do CAS-MAPLE são flexíveis, permitem várias configurações, possuem uma sintaxe bastante intuitiva e uma potencialidade bastante acima das necessidades computacionais de um curso de Cálculo. A interface poderia ser melhorada, assim como a qualidade das imagens geradas, mas um movimento neste sentido certamente cobraria seu preço em termos de redução da velocidade de processamento. Em suma, o equilíbrio interface x desempenho é bastante satisfatório e o sistema “entregou o que prometeu” durante a operação nos experimentos. A máquina utilizada nos experimentos foi um *notebook* Toshiba, processador Celeron de 2,4 Mhz, 256 Mb de memória RAM e tela LCD de 15”.

Mais do que nunca, portanto, cabe aos pesquisadores em Educação Matemática o papel crucial de sugerir e investigar os espaços que essas tecnologias possivelmente poderiam ter, explícita ou implicitamente, nos cenários de ensino e aprendizagem da matemática, considerando suas peculiaridades e objetivos educacionais subjacentes.

4. Compreensão Conceitual em Matemática

Uma investigação sobre compreensões de conceitos matemáticos obviamente demanda esclarecimentos quanto à visão assumida sobre *compreensão* e sobre a *natureza de um conceito matemático*.

Segundo Sierpinska (1990), noções de *compreensão* têm sido propostas por filósofos como Locke, Hume, Dilthey, Husserl, Bergson, Dewey, Gadamer, Heidegger, Ricoeur, Schütz e Cicourel, as quais configuram, em seu conjunto, um amplo espectro de contextos e de visões. Obviamente, no escopo da presente investigação, o que nos interessa é a compreensão de conceitos matemáticos específicos. A Matemática é entendida aqui como um sistema de conceitos ou idéias que tem emergido da interação humanos-mídias desde os primórdios da civilização e se desenvolvido no processo de construção de redes de representações que se articulam, se inter-relacionam e ainda que em suas gêneses tenham substituído de forma idealizada objetos e relações do "mundo real", a este retornam oferecendo possibilidades de novas compreensões e se alimentando de novas idéias. Neste sentido, talvez o Cálculo seja um das instâncias mais fecundas e uma das expressões mais "vivas" e estruturadas deste sistema de conceitos. Mas, antes de continuarmos, ouçamos, por um momento, Dewey (1959, p. 180):

> Cada ramo da ciência, geologia, zoologia, química, física, astronomia, bem como diversos ramos da matemática, aritmética, álgebra, cálculo, etc. tem em mira estabelecer seu próprio grupo especializado de conceitos, que constituem a chave para a compreensão dos fenômenos em cada campo classificados. Destarte, existe, como provisão de cada ramo típico de disciplina, um jogo de significados e princípios, tão intimamente entrelaçados que qualquer um deles, sob determinadas condições, encerra algum outro, e assim por diante. Isso torna possíveis as substituições de significados por outros equivalentes, e permite que o raciocínio, sem recorrer a observações específicas, formule conseqüências, muito remotas de qualquer princípio sugerido. A definição, as fórmulas gerais, a classificação, são os artifícios que fixam uma significação e a desdobram em suas ramificações; não são fins em si mesmas — como muitas vezes os considera a educação elementar — mas instrumentos para facilitar a compreensão, auxílios para interpretar o obscuro e decifrar o problemático.

A compreensão de conceitos matemáticos específicos caracteriza-se, portanto, pela compreensão de subgrupos especializados deste sistema. Mas, afinal, o que é compreender? "Compreender é apreender a significação" (DEWEY, 1959 p. 135). E mais:

> Apreender a significação de uma coisa, de um acontecimento ou situação é ver a coisa em suas relações com outras coisas: notar como opera ou funciona, que conseqüências traz, qual a sua causa e possíveis aplicações. Contrariamente, aquilo a que chamamos coisa bruta, a coisa sem sentido para nós, é algo cujas relações não foram apreendidas. (DEWEY, 1959, p. 136)

Sob esta perspectiva, a noção de significado matemático e a de compreensão matemática se tornam, por conseguinte, indissociáveis. No entanto, neste contexto, o próprio conceito de significado não é livre de controvérsias. Tomemos, por exemplo, o caso dos gráficos, onipresentes nas redes conceituais abordadas nesta pesquisa, e ouçamos Roth (2004, p. 75, tradução nossa):

> Uma pressuposição disseminada [...] parece ser que o significado de um gráfico é algo *no* gráfico, ou na 'informação que ele contem de algum modo significativo' (Preece e Janvier, 1992, p. 299), de uma maneira que pode ser dele derivada ou extraída ou a ele conduzida. Um tal tratamento de "significado" e a noção associada de "compreensão" contrasta visivelmente com a que filósofos pragmáticos têm tido sobre o tópico: significado não é algo atado à coisa ou que flutua entre ou atrás das coisas e que podem desfilar à mente de alguém, mas é algo que se conecta com algo profundamente incorporado em nosso ser (Wittgenstein, 1973/1958).

Mas, talvez, nem seja preciso contrapor estas duas noções para destacar as dificuldades que emergem quando tratamos dos significados. Falar em significado é tocar no objeto da Semântica e, sobre isto, Fodor e Katz, citados em Marques (2001, p. 8), afirmam:

> Ao contrário de áreas lingüísticas relativamente mais amadurecidas, como a fonologia e a sintaxe, a semântica não existe ainda como um campo definido de investigação científica e sim como um conjunto de propostas para a sua criação... Assim, a única maneira que se tem de descrever de modo preciso a atual situação da semântica é mostrar parte de sua heterogeneidade.

Sobre esta complexidade e heterogeneidade, Marques (2001, p. 8), citando Leech, complementa:

> [...] é tal a diversidade de enfoques, que é possível ler dois livros de semântica e praticamente nada encontrar em comum entre eles. Nenhum autor tem condições de fazer um levantamento global do campo de conhecimento da semântica – ou, pelo menos, se o fizer, vai terminar com um levantamento superficial sobre 'o que os outros pensaram' acerca de *significado.*

Considerando, portanto, que o objetivo do presente estudo é investigar compreensões, que *compreender* é *apreender o significado,* e que pensar o *significado* — como os autores acima sustentam — é mergulhar na complexidade de posições heterogêneas, como tratar a questão da compreensão conceitual ? E mais: O que é que se aprende quando se aprende um "conceito"? É esta última pergunta a que abre o capítulo II de Bruner, Goodnow e Austin (1967, p. 25, tradução nossa). Antes de apresentar a visão destes autores, vejamos, primeiramente, o que diz uma filósofa (CHAUÍ, 2004, p. 161) sobre *conceito*:

> Um **conceito** ou uma **idéia** é uma rede de significações que nos oferece: o sentido interno e essencial daquilo a que se refere; os nexos causais ou as relações necessárias entre seus elementos, de sorte que por eles conhecemos a origem, os princípios, as conseqüências, as causas e os efeitos daquilo a que se refere. O conceito ou idéia nos oferece a essência-significação necessária de alguma coisa, sua origem ou causa, suas conseqüências ou seus efeitos, seu modo de ser e de agir.

E complementando sua visão (CHAUÍ, 2004, p. 166):

> Um conceito ou uma idéia não é uma imagem nem um símbolo, mas uma descrição e uma explicação da essência ou natureza própria de um ser, referindo-se a esse ser e somente a ele; um conceito ou uma idéia não são substitutos para as coisas, mas a compreensão intelectual delas; um conceito ou uma idéia não são formas de participação ou de relação de nosso espírito em outra realidade, mas são o resultado de uma análise ou de uma síntese dos dados da realidade ou do próprio pensamento.

Assim, ao investigar a compreensão de conceitos como função, limite ou derivada, o estudo visa, num primeiro momento, descrever as idéias e as relações emergentes materializadas pelo(a)s participantes da pesquisa no processo de interação com as mídias escolhidas sobre os referidos conceitos e, num segundo, oferecer sugestões que se harmonizem com tais compreensões e estejam a serviço da Educação Matemática no Ensino Superior.

Compreensão conceitual é, portanto, compreensão rica em relacionamentos, visão corroborada por Noss e Hoyles (1996) quando argumentam sobre a importância de se produzir conexões, uma vez que, segundo esses autores, os significados matemáticos *derivam* de conexões matemáticas.

Sob as perspectivas supra-referidas, eu investiguei as compreensões do(a)s participantes sobre os conceitos em pauta de uma maneira mais do que descritiva, e busquei identificar possíveis relações produzidas pelos estudantes — materializadas nos vários tipos de dados coletados nos experimentos — a fim de que, posteriormente, eu pudesse estabelecer minhas próprias compreensões e sugestões sobre esta produção. Assim, por exemplo, compreensões sobre os conceitos em pauta não foram tratadas como elementos independentes, mas, sim, com potencial para que fossem articulados no propósito de gerarem compreensões sobre alguns dos fenômenos — que reputo como essenciais para a Educação — que ocorrem durante o desenvolvimento da disciplina Cálculo Diferencial, quando abordada na forma tradicional nos mais variados cenários de ensino superior no Brasil.

Sob o ponto de vista teórico da Educação Matemática no Ensino Superior, as compreensões investigadas podem ser entendidas como instâncias do *Pensamento Matemático Avançado* (TALL, 1991) pensamento este qualificado como um conjunto de competências complexas que se pretende que o(a)s aluno(a)s universitários demonstrem, dentre as quais se incluem desde a capacidade de representar objetos e situações matemáticas, relacionando essas representações e efetuando generalizações, até a de fazer conjecturas e de demonstrar teoremas.

Sobre a questão, freqüentemente trazida à tona, do concreto versus o abstrato, entendo que esta não deva ser abordada de maneira dicotômica, e, portanto, suas relatividades são, de forma inequívoca, aqui assumida. Afinal, para um(a) ingressante à universidade, o conjunto de simetrias de uma figura geométrica pode ser um conceito fortemente abstrato, ao passo que para um algebrista um grupo de automorfismos representando as simetrias de uma estrutura é bastante concreto. A visão de Levy (1993) sobre a abstração é esclarecedora e pode ser aqui evocada, mas, para isso, eu precisarei antecipar uma pequena parte da citação que será apresentada na próxima seção. Segundo este autor, “o sistema cognitivo humano é caracterizado por três grandes faculdades: a de *perceber*, a de *imaginar* e a de *manipular*”, onde “esta última seria muito mais específica da espécie humana do que as anteriores”. Assim, segundo Levy (1993, p. 159):

> “É abstrato todo o problema fora de nossas capacidades de manipulação e de reconhecimento imediatos. Graças a sistemas de representações externas, problemas abstratos podem ser traduzidos ou reformulados de tal forma que possamos resolvê-los através da execução de uma série de operações simples e concretas, que façam uso de nossas faculdades operativas e perceptivas. Para serem corretamente efetuadas, estas manipulações de representações devem ser objeto de um aprendizado e treinamento, como qualquer outra atividade. Um problema que *permanecesse [grifo do autor]* abstrato seria simplesmente insolúvel.”

Num questionamento de óbvio interesse para a Educação Matemática, Bruner, Goodnow e Austin (1967) sustentam que uma certa confusão é alimentada pela controvérsia filosófica sobre a natureza dos conceitos como universais: um universal é algo que reside nos objetos e pode ser diretamente conhecido, ou é algo que habita um reino platônico de universais e que somente pode ser “apreendido” numa forma corrompida, ou, ainda, é algo que é imposto sobre as regularidades na natureza por uma mente que conceitua? Assim, há os que entendem que um *conceito*, psicologicamente, é definido pelos elementos comuns compartilhados por um feixe de objetos, enquanto que uma outra escola de pensamento sustenta que um *conceito* não são os elementos comuns de um feixe, mas, sim, algo relacional, uma relação entre processos de suas partes constituintes. De todo modo, Bruner, Goodnow e Austin (1967) também sustentam que uma tal controvérsia é infrutífera e propõem a seguinte “definição de trabalho” de *conceito*: “uma rede de inferências que estão ou podem ser postas em ação por um ato de categorização.”

Em boa parte desta pesquisa, *conceitos* matemáticos específicos e respectivas *redes de inferência* evocadas nos atos de categorização (compreensão) produzidos pelo(a)s seus participantes serão representados via linguagem natural — oral e escrita. Mas, seria isto factível? A princípio e pelo que venho anunciando neste capítulo, sim, se supusermos a existência de uma “impregnação mútua entre a Matemática e a Língua Materna” (MACHADO, 1990, p. 126). Como? Que compreensões ou possibilidades poderiam emergir do contexto e escopo escolhidos? Respostas ou, pelo menos, sugestões de respostas para tais perguntas é o que pretendo oferecer ao final desta tese. De todo modo, se estivermos de acordo que falar em *linguagem natural* implica em falar previamente sobre *linguagem*, então devemos estar também cientes de que assim como as noções de *compreensão* e de *conceito* dependem das respectivas visões adotadas, Brown (2001, p. 194, tradução nossa) sustenta que as noções de *linguagem* também não são menos ricas em possibilidades, quando associadas às realidades em que se encontram, bastando que se tomem, segundo ele, por exemplo:

- A linguagem condiciona toda a experiência de realidade. (e.g, Gadamer)
- A linguagem distorce a experiência de realidade. (e.g, Habermas)
- Não há realidade fora da análise textual. (e.g, Derrida)

Para o presente trabalho, a visão de Chauí (2004, p. 151) sobre linguagem pode ser esclarecedora:

> "A linguagem é um sistema de *sinais* ou de *signos*, isto é, os elementos que formam a totalidade lingüística, são um tipo especial de objetos, os signos, ou objetos que indicam outros ou representam outros.[...] No caso da linguagem, os signos são palavras e os componentes das palavras (sons ou letras); a linguagem *indica coisas*, isto é, os signos lingüísticos têm uma função **indicativa** ou **denotativa,** pois como que apontam para as coisas que significam; a linguagem estabelece a *comunicação* entre os seres humanos, isto é, tem uma **função comunicativa**; [...] a linguagem *exprime pensamentos, sentimentos e valores*, isto é, possui uma função de conhecimento e de expressão, ou **função conotativa**; uma mesma palavra pode exprimir sentidos ou significados diferentes, dependendo do sujeito que a emprega, do sujeito que a ouve ou lê, das condições ou circunstâncias em que foi empregada ou do contexto em que é usada."

Considerando que uma tal discussão poderia se estender além do razoável, dados os objetivos deste estudo, entendo que a identificação entre conceito e idéia, assim como o entendimento dessas entidades como nós de uma rede de significações detendo as qualidades supra-referidas, parecem-me apropriadas ao presente contexto e, destarte, à guisa de uma síntese que oriente o nosso caminhar, ouçamos Machado (1995, p. 138):

- compreender é apreender o significado;
- apreender o significado de um objeto ou de um acontecimento é vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos;
- os significados constituem, pois, feixes de relações;
- as relações entretecem-se, articulam-se em teias, em redes, construídas social e individualmente, e em perfeito estado de atualização;
- em ambos os níveis — individual e social — a idéia de conhecer assemelha-se à de enredar.

5. Tecnologias Intelectuais e Seres-humanos-com-mídias — Visões Integradoras

Segundo Pierre Lévy (1993) a oralidade, a escrita e a informática, denominadas por este autor de tecnologias intelectuais ou tecnologias da inteligência, sucederam-se historicamente (a partir da oralidade pré-escrita) articulando-se com o sistema cognitivo humano — caracterizado por três grandes faculdades: a de *perceber*, a de *imaginar* e a de *manipular* — construindo uma rede representando o conhecimento. Temos, portanto, (LÉVY, p. 157):

> “A faculdade de *percepção* ou de reconhecimento de formas ou do reconhecimento de formas é caracterizada por sua grande rapidez. O sistema cognitivo se estabiliza em uma fração de segundo na interpretação de uma determinada distribuição de excitação dos captadores sensoriais. Reconhecemos imediatamente uma situação ou um objeto, encontramos a solução de um problema simples, sem que para isto tenhamos que recorrer a uma cadeia de deduções conscientes. Nisto somos exatamente como os outros animais. A percepção imediata é a habilidade cognitiva básica.
>
> A faculdade de *imaginar*, ou de fazer simulações mentais do mundo exterior, é um tipo particular de percepção, desencadeada por estímulos internos. Ela nos permite antecipar as conseqüências de nossos atos. A imaginação é a condição da escolha ou da decisão deliberada: o que aconteceria se fizéssemos isto ou aquilo? Graças a esta faculdade, nós tiramos partido de nossas experiências anteriores. A capacidade de simular o ambiente e suas reações tem,

> certamente, um papel fundamental para todos os organismos capazes de aprendizagem.
>
> Finalmente, dispomos de uma faculdade operativa ou manipulativa que seria muito mais específica da espécie humana que as anteriores. A aptidão para a *bricolagem* é a marca distintiva do *homo faber* (ainda que haja apenas uma diferença de grau em relação às performances dos animais, em particular daqueles que servem-se de seus membros anteriores para outros fins que não a locomoção.) Este poder de manejar e de remanejar o ambiente irá mostrar-se crucial para a construção da cultura, o pensamento lógico ou abstrato sendo apenas um dos aspectos, variável e historicamente datado, desta cultura. Na verdade, é que possuímos grandes aptidões para a manipulação e bricolagem que podemos trafegar, reordenar e dispor parcelas do mundo que nos cerca de tal forma que elas acabem por *representar* alguma coisa. Agenciamos sistemas semióticos da mesma forma como talhamos o sílex, como construímos cabanas de madeira ou barcos. As cabanas sevem para abrigar-nos, os barcos para navegar, os sistemas semióticos para representar."

A visão de Levy destaca esta última faculdade — manipulativa — como a mais específica da espécie humana, o que é compatível com a posição de Kerckhove (1997, p. 256):

> "Ao serem fixadas pela escrita, as práticas orais pertinentes e seletivas, obtiveram a consistência e a confiabilidade que permitiram ao código lingüístico adquirir a oportunidade de desenvolver-se para além do uso comum. Em termos evolutivos, um dos principais efeitos da escrita, qualquer que seja o código utilizado, foi destacar os enunciados humanos da situação da sua enunciação e permitir a sua manipulação."

É, portanto, esta potencialidade a que a presente pesquisa explora ao procurar identificar compreensões sobre conceitos de Cálculo e a *manipulação* sobre estas produzidas no cenário especialmente desenhado para capturá-las.

Assim, sob as perspectivas teóricas adotadas nesta pesquisa, a informática, assim como a escrita e a oralidade, são tecnologias que se integram ao ser humano no processo de produção de conhecimento, ou seja, pressupõe-se uma unidade epistêmica no coletivo seres-humanos-com-mídias. Esta é a direção proposta por (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 46) quando afirmam:

“A perspectiva histórica, a qual abraçamos, sugere que os seres humanos são constituídos por técnicas que estendem e modificam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses mesmo seres humanos estão constantemente transformando essas técnicas. Assim, não faz sentido uma visão dicotômica. Mais ainda, entendemos que conhecimento só é produzido com uma determinada mídia, ou com uma tecnologia da inteligência. É por isso que adotamos uma perspectiva teórica que se apóia na noção de que o conhecimento é produzido por um coletivo formado por seres-humanos com mídia, ou seres-humanos com tecnologia e não, como sugerem outras teorias, por seres humanos solitários ou coletivos formados apenas por seres humanos.”

CAPÍTULO III

Revisão da Literatura: Situando a pesquisa

1. Introdução

As pesquisas com temas sobre a aprendizagem e/ou ensino de Cálculo têm, em sua maioria, analisado questões quanto ao uso de tecnologias informáticas, resolução de problemas, modelagem, desenvolvimento conceitual, suplementação de instrução e estudos de currículo. Na maioria desses trabalhos, um ponto comum tem sido a ênfase na importância da compreensão de conceitos e na valorização de suas aplicações, ao mesmo tempo em que sugerem um enfraquecimento do papel das habilidades manipulativas e algorítmicas que tradicionalmente têm sido priorizadas.

As compreensões e visões sobre conceitos fundamentais clássicos do Cálculo têm sido investigadas, sob as mais variadas abordagens e de maneira mais freqüente, a partir da criação, em 1985, do Grupo de Trabalho sobre *o Pensamento Matemático Avançado* no PME (Psychology of Mathematics Education) daquele ano. Em 1991, David Tall, um dos líderes do grupo, lançou o livro clássico *Advanced Mathematical Thinking*, composto de artigos de vários pesquisadores relatando seus estudos sobre o tema. Dentre estes, estão o próprio Tall, que escreve todo o primeiro capítulo sobre *a Psicologia do pensamento matemático avançado,* Guershon Harel e James Kaput sobre *a compreensão de operadores uniformes e ponto-a-ponto*, Theodore Eisenberg sobre *dificuldades com o conceito de função* e de Bernard Cornu sobre *concepções e modelos mentais de limites.*

Além desses, outros pesquisadores estrangeiros produziram e têm, como os anteriores, produzido trabalhos na área. Este é o caso dos americano Ed

Dubinski e seu grupo — com uma abordagem declaradamente piagetiana — e da francesa Michèle Artigue, na perspectiva da engenharia didática.

Em termos do presente estudo, esta revisão de literatura apresenta um levantamento dos trabalhos de pesquisa representativos mais recentes em Educação Matemática no Ensino Superior, no Brasil e no exterior, envolvendo o uso da escrita em linguagem natural e/ou o uso dos CAS – Computer Algebra System na investigação de compreensões sobre conceitos de Cálculo no primeiro ano de cursos de graduação. Em todos os casos analisados, este estudo se localiza como um diferencial em pelo menos duas das seguintes características: objetivo da pesquisa, contexto pesquisado, conceitos investigados e metodologia utilizada. Particularmente sobre o contexto pesquisado, é importante que sejam destacados, desde já, dois pontos: a) as características específicas dos cenários nacionais e internacionais do ensino superior de Cálculo; b) as características específicas do ensino superior de Cálculo nos cursos de Licenciatura / Bacharelado em Matemática, dentro do cenário nacional.

Até a criação do *Advanced Mathematical Thinking*, as pesquisas na área eram esparsas e seu número era proporcionalmente insignificante em relação à produção total de pesquisa em Educação Matemática nos demais níveis de Ensino (TALL, 1991). A partir da criação deste grupo, o número de trabalhos aumentou consideravelmente, embora a relação com a produção nos outros níveis de ensino tenha se mantido aproximadamente inalterada. No caso do Brasil, conforme já referido no capítulo I, ainda que tenha havido anteriormente alguma produção na área, somente a partir de 2000, no I SIPEM – I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, é que se organizou o primeiro grupo de pesquisadores com interesses claramente dirigidos ao Ensino Superior (PINTO, 2002).

Além das diferenças numéricas, os contextos nacional e internacional trazem consigo, como é de se esperar, diferenças que dificultam as comparações entre trabalhos produzidos fora e dentro do Brasil, em especial quando se trata de investigar os cenários do Ensino Superior. Embora sob o ponto de vista do ensino, o conteúdo programático dos cursos iniciais de Cálculo seja semelhante em todo o mundo, o mesmo não se pode dizer dos principais fatores que interferem na aprendizagem desses conteúdos, tais como a infra-estrutura física e humana das escolas, o número de alunos por turma, os projetos pedagógicos e, em especial, a formação pré-universitária desses alunos. Esta formação é resultante de um processo educativo institucionalizado de educação básica — no caso brasileiro, num período de onze anos — processo este que será chamado a comparecer, com todas as suas características e peculiaridades, no momento em que o(a) estudante "vê" e interpreta os novos conceitos que lhe são apresentados e sobre os quais deverá construir significados. Neste sentido, os conceitos matemáticos, sob o ponto de vista institucional, podem ser os mesmos aqui ou em qualquer outro país, mas o olhar de quem pretende compreendê-los dificilmente terá sido moldado da mesma maneira.

O segundo ponto refere-se, também, ao caráter contextual, embora, neste caso, restrito aos cenários nacionais. Trata-se das diferenças de foco e objetivos do Cálculo para as licenciaturas / bacharelados em Matemática e no Cálculo para os demais cursos. Sou da opinião de que tais diferenças deveriam já estar explicitadas entre as licenciaturas e os bacharelados dos próprios cursos de Matemática. Desnecessário dizer em relação aos demais cursos. Assim, quando se investiga compreensão conceitual do Cálculo, mais do que uma exigência metodológica, é necessário que a "visão" de compreensão adotada na pesquisa seja compatível com os objetivos emergentes do respectivo contexto. Assim, por exemplo, é difícil se pretender que a abordagem e o tratamento dispensado aos conceitos de limite, continuidade e derivada — e suas respectivas compreensões — por um aluno de Engenharia ou Administração tenha o mesmo aprofundamento teórico de um futuro bacharel em Matemática. Os objetivos são diferentes e, portanto, uma pesquisa que pretenda investigar tais compreensões deve levar em conta essas diferenças. Com ênfase semelhante, o raciocínio se aplica analogamente entre os contextos do Ensino Médio e do Ensino Superior. Por esta razão, o(a) leitor(a) não verá nesta revisão de literatura referências a estudos que investigaram compreensões do conceito de *função* por alunos do Ensino Médio.

Em termos organizacionais, o presente capítulo, além desta introdução, foi subdividido em seções enfocando a literatura afim ao presente estudo e que a ele se articulam. Embora tenham sido priorizados trabalhos dos últimos cinco anos, em alguns casos trabalhos anteriores serão chamados à cena com o objetivo de melhor situar a pesquisa.

2. Sobre a Escrita na Aprendizagem do Cálculo

A literatura sobre o tema *Escrita na Educação Matemática no Ensino Superior*, em comparação a outros temas de interesse da pesquisa nesta área, é quantitativamente bastante modesta, tornando-se, como é de se esperar, ainda mais restrita à medida que formos refinando os conceitos abordados e o contexto pesquisado. Quando se investiga as possibilidades da escrita, metodologicamente complementada por um Sistema de Computação Algébrica, para investigar conceitos específicos de Cálculo, encontramos uma lacuna evidente na literatura da área. Assim sendo, procurei entrelaçar a presente pesquisa com os trabalhos mais recentes e relevantes abordando questões afins à compreensão conceitual de função, limite, continuidade e derivada, estritamente no contexto do Ensino Superior. Esta contextualização é fundamental, pois compartilho da posição de que cada um dos níveis de ensino tem seus objetivos educacionais, seus valores e até suas peculiaridades, ainda que tratem de um mesmo conceito, como é o caso do conceito de função no Ensino Médio e no Ensino Superior. Além do recorte contextual, eu gostaria de relembrar que o objetivo da presente pesquisa não se resume a coletar concepções sobre os conceitos em pauta. Mais do que isso, ela visou investigar possíveis articulações entre essas concepções, com objetivo de construir *compreensões sobre as compreensões* do estudante de Cálculo ingressante em um curso de Matemática. Além disso, sob o ponto de vista metodológico, a pesquisa, ao integrar as tecnologias da oralidade, da escrita e da informática, buscou configurar um cenário que pudesse ser reproduzido nas salas de aula de Matemática no Ensino Superior atuais, a saber:

- Interação com base na oralidade estimulada entre alunos, mas limitada entre estes e o pesquisador (supõe-se que dificilmente as turmas de Cálculo I terão seu tamanho reduzido a ponto de permitir uma interação oral generalizada entre aluno e professor);
- Interação entre aluno e professor com base na linguagem escrita (e não apenas com base na linguagem simbólica matemática);

- Interação entre alunos e entre alunos e computador (supõe-se que os sistemas de computação algébrica tenderão a ocupar mais rapidamente seus espaços no referido contextos).

Tendo reavivado acima os objetivos e características da presente investigação, passemos à discussão da literatura pesquisada.

Uma das questões que sempre são postas ao pesquisador que anuncia os resultados de uma pesquisa em Educação Matemática envolvendo a utilização de alguma (ou algumas) tecnologia intelectual num espaço escolar é a seguinte: A investigação é para analisar se a tecnologia usada melhora a aprendizagem? Parto desta pergunta para começar a situar este estudo dentre os trabalhos já existentes na área.

Para que se possa discutir sobre o(a) melhor em qualquer situação, é necessário que se defina uma escala que autorize comparações, o que talvez seja possível somente se a metodologia da pesquisa comportar a integração de elementos quantitativos em seu escopo. Quando se aborda questões relativas às compreensões de estudantes sobre conceitos matemáticos, a situação adquire um *status* se não maior, pelo menos diferente em termos de complexidade, uma vez que se trata de investigar a chamada compreensão conceitual.

Não é sem razão, portanto, que Porter e Masingila (2001) afirmam que para examinar os efeitos de um determinado fator sobre o conhecimento conceitual e procedimental do estudante, primeiramente há necessidade de se conceber um método sistemático para tal. Segundo essas autoras, até 2000 não existia estudos comparativos entre estes tipos de conhecimento. Ao constatarem essa lacuna, Porter e Masingila abordaram os efeitos da Escrita no conhecimento procedimental e conceitual de estudantes de Cálculo de uma universidade americana. Num dos estudos, as notas dos exames foram usadas para 'medir' o conhecimento procedimental e conceitual, enquanto que em outro se utilizou entrevistas com os estudantes e análise de padrões de erro. As autoras investigaram duas turmas de Introdução ao Cálculo. Numa delas, os estudantes utilizavam a Escrita nas atividades e as discutiam após a redação. Na outra faziam atividades similares sem envolver a escrita, mas engajados em pensar e discutir sobre as idéias matemáticas imersas nos problemas propostos. Os erros detectados nas provas e nos exames finais foram categorizados e analisados em termos de compreensão procedimental e conceitual. As conclusões da pesquisa apontaram para diferenças pouco significativas entre os dois grupos, sugerindo que os benefícios reais das atividades de escrita para o(a)s estudantes podem não ter sido conseqüência direta das atividades em si, mas, possivelmente, decorreram do esforço para entender as idéias matemáticas num nível suficiente para que pudessem comunicá-las aos demais. Sem me ater às peculiaridades contextuais, o propósito da investigação foi estritamente comparativo, ou seja, dada uma certa tecnologia e um certo cenário educacional, a questão era saber se valeria a pena utilizar ou não a referida tecnologia.

Em termos de pesquisas recentes produzidas em contextos do ensino de Cálculo na realidade brasileira, há apenas uma referência de trabalho formal – uma dissertação de mestrado (SANTOS, 2000) – investigando as possibilidades da Escrita na aprendizagem de conceitos do Cálculo. Entre as características principais de seu estudo está o fato da autora ter utilizado uma abordagem metodológica caracterizada como pesquisa-ação, uma vez que desenvolveu o trabalho em suas próprias aulas de Cálculo num curso de Agronomia, tendo utilizado Vygotsky como referencial teórico. Ao contrário de Porter e Masingila, Santos conclui que os resultados da investigação foram francamente favoráveis à utilização da escrita. Um ponto a se destacar aqui é o envolvimento da pesquisadora-professora no processo, o que, aliás, caracteriza os trabalhos sob o balizamento da pesquisa-ação. Este envolvimento, provavelmente contribuiu para que os bons resultados fossem obtidos.

Se supusermos que o nível de interação oral entre pesquisador e pesquisados durante a coleta de dados de certa forma ajuda a moldar a investigação, cabe salientar que aqui esta interação foi intencionalmente reduzida ao estritamente necessário, mas não por uma questão de assepsia — que, obviamente, seria contraditória ao paradigma de pesquisa adotado — mas por ser tributária do interesse maior em “ouvir” estudantes de uma turma típica de Cálculo de primeiro ano de Matemática de uma universidade pública, sobre a qual eu não possuía influência direta ou indireta.

Num dos estudos mais recentes em contextos similares, Cooley (2002), assumindo uma visão declaradamente piagetiana, investigou as possibilidades da Escrita na promoção ou estímulo da abstração reflexiva. Ela desenvolveu sua análise a partir das respostas obtidas de um instrumento de sete questões escritas sobre assuntos específicos do Cálculo — Limites e Derivadas — propostas a uma turma de 25 alunos — 80 % dos quais caracterizando-se por não possuírem o Inglês como língua materna. Conforme destaca a autora, embora o foco principal da pesquisa tenha sido a investigação da escrita como meio de comunicação entre professor e estudantes visando estimular o processo reflexivo, subsidiariamente houve o interesse premeditado de promover o uso da língua inglesa. Como conclusão, o estudo mostrou que o processo provou se constituir num importante condutor para a informação entre professor e aluno, assim como uma potente ferramenta para dissuadir concepções equivocadas e promover a reflexão no pensamento dos alunos.

Uma característica presente na pesquisa de Cooley, e também percebida em outros trabalhos no exterior, notadamente dos EUA, refere-se ao número de alunos (25) das turmas padrão de Cálculo. De sua descrição do contexto da pesquisa, depreende-se que a instituição pública em pauta tinha como clientela uma população de classe média-baixa, com imensa maioria de imigrantes, dado que, por si só, já induziria a pensar numa instituição sem grandes reservas de recursos orçamentários. Em cenários similares no Brasil, no entanto, no que se refere especificamente ao número de alunos por turma de Cálculo I, este valor é substancialmente superior, fato que representa uma dificuldade adicional para a ação educacional e, particularmente, para a comunicação oral no sentido do aluno para o professor, o que reforça o papel do contexto das turmas de Cálculo brasileiras sobre as quais eu tenho me referido.

A fim de munir o(a) leitor(a) de mais referências, caso seja de seu interesse ampliar o conhecimento do leque de estudos que tematizam a escrita na aprendizagem do Cálculo, seguem abaixo mais alguns autores e uma breve descrição dos resultados de seus trabalhos. Longe de significar uma menor valorização a esses estudos, a principal razão para sintetizar a apresentação de seus resultados é que quase todas têm como objetivo final a comparação da utilização ou não da escrita para determinados fins. Conforme já discutido acima, não é este o objetivo da presente pesquisa e, portanto, a inclusão desses trabalhos na presente revisão tem apenas caráter informativo.

O trabalho de Pugalee (1997) sobre a compreensão de conceitos matemáticos concluiu que a escrita pode melhorar a compreensão conceitual do estudante, embora Morgan (1998), reforçando a posição de Porter e Masingila (2000), afirma que há falta de pesquisas comparativas que produzam evidências dos supostos benefícios da escrita no processo de aprendizagem.

A idéia de comunicação de entendimentos ou compreensões em sala de aula, referida acima por Porter e Masingila, é defendida também por Driscoll e Powell (1992) num artigo que reporta um experimento conduzido na Rutgers University com objetivo de analisar as habilidades de comunicação — leitura, escrita, audição, fala — em sala de aula. Embora os autores não tematizem especificamente o Cálculo neste estudo, suas questões já revelam o interesse que o assunto despertava já no começo da década de 1990. Neste sentido, Driscoll e Powell (1992, p. 249, tradução nossa) perguntam:

- em que medida a escrita dos estudantes sobre suas aprendizagens em Matemática melhoram suas capacidades reflexivas ?
- que tipo de avaliações escritas funcionam melhor a este respeito ?
- quanto pode ser melhorada a compreensão de conceitos matemáticos por meio de problemas propostos como uma redação representando conceitos em cenários reais ?

Em cenários similares, aparece também Hackett (1998), em sua tese de doutorado, onde ela explorou a escrita na investigação da performance e erros de alunos em um curso de Cálculo Aplicado. Sua abordagem, no entanto, além de ser implementada sob os paradigmas da metodologia quantitativa, não focaliza explicitamente questões conceituais da Matemática.

3. Sobre Informática na Aprendizagem do Cálculo

Ao contrário dos estudos envolvendo a escrita, a quantidade de pesquisas envolvendo a informática na aprendizagem do Cálculo é substancialmente maior. No entanto, elas têm obedecido a orientações próprias em boa parte de suas características, tais como referencial teórico, objetivos, metodologia, perfil da população pesquisada, conteúdos específicos abordados e tipo de tecnologia informática utilizada.

Ainda assim, se restringirmos os resultados de pesquisas aos contextos nacionais, constataremos, novamente, grandes lacunas a serem exploradas. Isto, no entanto, deve ser encarado com naturalidade: a utilização sistemática de sistemas de computação algébrica nas aulas de Cálculo é fenômeno recente mesmo em países ricos, tendo ganhado impulso apenas a partir da década de 90, com o início da popularização da plataforma Windows para as mais variadas aplicações em Educação e em outros setores da sociedade em geral.

Uma abordagem típica nessas pesquisas tem sido a utilização de um determinado software na exploração de determinados conteúdos. Entretanto, os trabalhos que elegem especificamente os CAS comerciais mais importantes (dentre estes o MAPLE, o MATHEMATICA e o DERIVE) como uma das tecnologias a serem investigadas, são bem mais restritos. A razão para isso é óbvia: as licenças ainda são relativamente caras para a aquisição individual. Assim sendo, o pesquisador depende de que a instituição onde ele fará o trabalho de campo disponibilize os sistemas. Embora pareça paradoxal, há um número crescente de novos livros-textos de Cálculo concebidos de maneira a integrar a informática a seu conteúdo justamente por meio desses sistemas comerciais, particularmente do MAPLE e do MATHEMATICA. A boa notícia é que seus preços têm caído e as instituições de ensino têm cada vez mais se sensibilizado para a necessidade de integrarem essas novas tecnologias a seus projetos pedagógicos.

Considerando que os três sistemas acima são os que majoritariamente têm ocupado os espaços educacionais da matemática universitária, a presente revisão da literatura, destacará apenas as pesquisas em informática na aprendizagem do Cálculo que os utilizaram.

Em pesquisas com objetivos comparativos, isto é, estudos com o propósito de comparar os resultados da utilização ou não de determinados CAS temos, no contexto brasileiro, Saraiva (2000), sob o quadro teórico da transposição didática de Balacheff, investigando o conceito de limite, ainda que sob o aspecto metodológico, sua abordagem permitisse tanto o uso de computadores quanto o de calculadoras eletrônicas. No contexto da pesquisa realizada no exterior, Kendall (2001) analisou o impacto do uso do MAPLE no estudo de derivadas e Roddick

(2001) apresentou um estudo investigando a produção entre um grupo de estudantes de Cálculo trabalhando sob a forma tradicional e um outro grupo trabalhando em ambientes munidos de um SCA. Em todos os casos acima, a abordagem foi comparativa.

No desenho metodológico e nos objetivos não comparativos, similares ao da presente pesquisa, destaca-se o estudo de Villarreal (1999), tratando, em sua tese de doutorado, das concepções de alunos de Biologia sobre o conceito de *derivada*, emergente das interações entre pesquisador, estudantes e o sistema de computação algébrica Derive. Em seu estudo, Villarreal explora profundamente o tema visualização de gráficos a partir deste sistema computacional, numa abordagem que, articulada com a oralidade, produz resultados que contribuem no sentido de oferecer descrições do pensamento matemático, das dificuldades dos estudantes e, também das possibilidades do trabalho coletivo onde se interagem humanos e computador. Deve-se, no entanto, destacar algumas diferenças fundamentais do trabalho da autora em relação ao presente estudo. Primeiramente, sob o ponto de vista contextual, os participantes eram alunos do primeiro ano do curso de Biologia. A disciplina Introdução ao Cálculo, na qual os alunos estavam matriculados, é tratada de maneira inovadora — e, justamente por isso, atípica — com uma abordagem centrada na modelagem como estratégia pedagógica e tem seu foco orientado para aplicações escolhidas pelos próprios estudantes. Em consonância com este contexto, as funções utilizadas nos experimentos da pesquisa foram similares àquelas usualmente utilizadas nos processos de modelagem emergentes naquele cenário. Assim sendo, a já tradicional importância das funções elementares, em particular das polinomiais e exponenciais, são ali potencializadas, pois são justamente elas as principais funções modeladoras nas aplicações usuais abordadas naquele curso de Biologia.

No caso de um curso tradicional de Cálculo para a Matemática, a situação é bastante diferente: em geral, as aplicações são sacrificadas em favor da teoria. A questão da propriedade ou não de um tal sacrifício não me cabe aqui discutir, mas é inegável que a demanda teórica matemática subseqüente exigida do(a)s aluno(a)s será substancialmente maior do que a de outras áreas. Neste sentido, o presente estudo procurou tratar os conceitos investigados de maneira mais generalizada — mais próxima, portanto, das demandas matemáticas a que os alunos serão submetidos — sem privilegiar, por exemplo, o trabalho com classes específicas de funções. Um outro diferencial a ser observado entre este estudo e o de Villarreal está na metodologia. Embora similares, duas diferenças são fundamentais: o privilégio à escrita dos estudantes e a restrita interação oral do pesquisador com estes. A primeira, obviamente, deve-se à proposta da pesquisa de “ouvir” os estudantes escrevendo sob conceitos do Cálculo. A segunda que, longe de caracterizar uma assepsia incompatível com o paradigma de pesquisa adotado, visou “simular” a dificuldade de comunicação, no sentido do aluno para o professor, facilmente constatada nas turmas tradicionais da disciplina.

A discussão acima pode ser aplicada em sua quase totalidade também à pesquisa de Araújo (2002), apresentada em sua tese de doutorado. Assim, em ambos os casos, os alunos eram de cursos — Biologia, no primeiro, e Engenharia Química neste último — distintos da Matemática. Como o ensino de Cálculo tem as aplicações práticas da área como um dos principais objetivos, este contexto moldou, como era de se esperar, ambas as pesquisas. Uma característica importante no trabalho de Araújo é que ela investigou o pensamento matemático de alunos modelando uma situação real escolhida por eles, o que os levou a gerar uma função contínua por partes (de funções quadráticas), diferente, portanto, daquelas analisadas por Villarreal. Este fato, auxiliado pela motivação natural dos estudantes por estarem trabalhando com uma aplicação “real”, permitiu, entre outros resultados importantes, que o conceito de continuidade da função fosse explorado de maneira contextualizada e significativa. Em termos comparativos com o presente estudo, ambas as pesquisas, por estarem focadas nas aplicações, não se detiveram no aprofundamento teórico do conceito de *função* que poderiam estar subjacentes às demais compreensões sobre os conceitos de limite, continuidade e derivabilidade dos estudantes. Naturalmente, em ambos os casos, a decisão de não se aprofundar na exploração teórica do conceito de função foi totalmente compatível com os objetivos das referidas pesquisas e da posição — da qual também sou signatário — que o Ensino de Cálculo deve assumir nesses cursos.

Ao priorizar e explorar as potencialidades das tecnologias — oralidade, escrita e informática — na investigação de compreensões de alunos de Matemática sobre os conceitos de função, limite, continuidade e derivada, a pesquisa em pauta busca compreensões sobre uma região de inquérito atual, sob uma abordagem que se localiza, portanto, numa posição de originalidade a partir do levantamento efetuado.

CAPITULO IV

Paradigma de Pesquisa: Metodologia e Epistemologia

4.1. Introdução

O projeto e o desenvolvimento de uma pesquisa acadêmica implica na explicitação prévia do conjunto de crenças ou pressupostos sobre os quais o(a) pesquisador(a) se pautou para criar seu projeto e sobre os quais desenvolverá sua investigação. Embora uma tal asserção seja óbvia e esteja subjacente a qualquer atividade científica, está longe de ser improvável que uma parte da comunidade que as desenvolvem ou que delas se utilizam tenha dificuldades para alcançar o potencial que tais implicações implicitamente carregam consigo. Ora, supor que haja necessidade de especificar um conjunto de pressupostos é também supor que se admite a possibilidade de escolhas para o(a) pesquisador(a) e que, portanto, se concebe como válida uma pesquisa científica estruturada sob diferentes paradigmas, incluindo-se, naturalmente, os que sustentam uma abordagem distinta daquela prescrita pela visão tradicional de Ciência. Claro que da admissão de possibilidades de escolha até o efetivo reconhecimento da validade da opção escolhida há um longo caminho, e este será tanto mais tortuoso e complexo quanto maiores forem as dificuldades para se desestabilizar convicções cristalizadas pelos setores mais tradicionalistas e impermeáveis da comunidade científica.

Embora os pilares do positivismo (ÁLVES-MAZOTTI; GEWANDSNAJDER, 2001) — objetividade da observação e legitimidade da indução — tenham sido questionados fortemente pela chamada Escola de Frankfurt e, mais modernamente, por Popper, Kuhn, Lakatos e Feyerabend, tais pressupostos continuam impregnando as concepções que subjazem as posturas da maioria de pesquisadores das chamadas Ciências Físicas e, surpreendentemente, de alguns vinculados às Ciências Humanas.

No contexto da pesquisa em Educação, considerando suas necessárias e constantes articulações com outras áreas do conhecimento, as dificuldades geradas por essas múltiplas interfaces e a contínua necessidade de se construir novos canais de comunicação, bem como o de explorar os já existentes, parece claro que ainda há falta de um amplo reconhecimento de suas crenças, pressupostos e métodos, não só para que seus resultados sejam também amplamente reconhecidos, como para que sua identidade seja mais nitidamente demarcada. Em particular no caso da Educação Matemática, as tensões explícitas e implícitas entre os setores mais ortodoxos das comunidades de Educação e de Matemática acabam, às vezes, em algumas regiões de baixa resiliência desta interseção, gerando fissuras quase irreversíveis. Assim, é necessário que os trabalhos de pesquisa formal da área argumentem em favor da validade de seus métodos. Certamente, por atuarem numa região das Ciências Humanas, mas com presença também na área de Ciências Exatas, os pesquisadores em Educação Matemática sabem de antemão que este trabalho não é tarefa fácil. Além dos elementos tradicionalmente presentes e que permeiam as atividades acadêmicas, como movimentos de poder e formas sutis ou ostensivas de vaidade, há a delicada — mas inegavelmente presente — questão do desconhecimento recíproco sobre muitas das peculiaridades e dos objetivos que caracterizam cada uma dessas áreas.

Esta é uma das razões pelas quais pretendo explicitar mais detalhadamente as concepções de conhecimento e de metodologia que subjazem esta pesquisa e que caracterizam o paradigma que a sustenta. Uma outra razão tem um foco mais definido e decorre do tema escolhido para a pesquisa, a saber, compreensões sobre conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial. Aos membros atuantes da comunidade acadêmica — pesquisadores ou não — nos cenários de ensino e/ou pesquisa em Matemática em nível superior, parece claro que os matemáticos chamados “puros” tendem a orientar as decisões mais importantes no que se refere aos caminhos que o ensino ou mesmo a Educação Matemática devem seguir nestes cenários. Percebe-se tais tendências nas mais variadas orientações: por exemplo, quando se escalam o(a)s educadore(a)s matemático(a)s para atuarem reiterada e exclusivamente na chamada “região pedagógica” do currículo (didática, psicologia, prática de ensino, etc.). É claro que não se pode descartar a possibilidade de que decisões como essa sejam tomadas estritamente devido às circunstâncias de restrições materiais e humanas que têm se tornado recorrentes no

Brasil há muitos anos. Contra esta hipótese, no entanto, pode-se argumentar que este fenômeno não parece restrito ao Brasil, ocorrendo também em países onde não se suporia existir carências materiais e humanas significativas na academia. Por outro lado, é perceptível que boa parte da visão prevalecente sobre pesquisa em Educação Matemática nos departamentos de matemática ainda é aquela que reserva para esta área — quando o faz — apenas os cenários de investigação oriundos dos ensinos fundamental ou médio, quase sempre associados aos estágios supervisionados obrigatórios nas licenciaturas mantidas por estes departamentos. Desta maneira, entende-se o valor ou pelo menos se aceita uma investigação sobre a aprendizagem de operações com frações no ensino fundamental ou sobre o ensino de geometria no ensino médio, mas não se reconhece como importante, ou sequer passível de implementação, os resultados de uma pesquisa tematizando, por exemplo, a compreensão de conceitos de Cálculo, da Álgebra Linear ou da Geometria Diferencial. Uma tal orientação certamente cria dificuldades para que a pesquisa produzida em Educação Matemática no ensino superior encontre ressonância em seu próprio cenário educacional.

O que pretendo destacar aqui é que, a meu ver, uma parte das razões para essa resistência não é oriunda, como defendem alguns membros da comunidade de educadores matemáticos, exclusivamente dos movimentos usuais das teias de poder que orientam os rumos do ensino de Matemática em nível superior. Entendo que uma boa parte dessa resistência decorre da incompreensão dos pressupostos que estruturam os paradigmas *interpretativos* ou até mesmo da pura e simples ignorância sobre suas existências. Reforçando essa visão, não é incomum que mesmo pesquisadores iniciantes em Educação Matemática, ao serem expostos aos critérios das metodologias qualitativas pela primeira vez, os vejam com estranheza e até mesmo desconfiança, pois esperavam encontrar a segurança dos métodos quantitativos, as certezas características das visões dicotômicas e a autoridade materializada e credenciada pelas referências numéricas.

Sob esta perspectiva, segue abaixo um breve resumo dos elementos que compõem a visão epistemológica e metodológica da presente pesquisa.

4.2. Uma Breve Revisão sobre Paradigmas de Pesquisa

Ao conjunto básico de crenças e pressupostos que orientam a ação de um pesquisador chamamos de *paradigma* (LINCOLN; GUBA, 1985, tradução nossa). Um paradigma circunscreve-se de quatro conceitos: ética (axiologia), epistemologia, ontologia e metodologia. A *ética* pergunta *como eu serei como pessoa moral no mundo?* A *epistemologia* pergunta *como eu conheço o mundo*? *Qual é a relação entre o ser cognoscente e o conhecido?* A *ontologia* levanta questões sobre *a natureza da realidade e a natureza do ser humano no mundo* e a *metodologia* trata dos meios para se obter conhecimento sobre o mundo (DENZIN; LINCOLN, 2000, p. 157, tradução nossa).

As pesquisas em educação distinguem usualmente três paradigmas principais (ERNEST, 1998, p. 77, tradução nossa): o paradigma científico, o teórico-crítico e o interpretativo. Ainda segundo este autor, o primeiro, originado do racionalismo e dos métodos utilizados nas ciências físicas, preocupa-se com a objetividade, a predição, a replicabilidade, e a descoberta de generalizações científicas de leis que possam descrever o fenômeno investigado. Central, neste paradigma, é a busca por leis gerais que possam predizer futuros resultados, incluindo-se aí aqueles associados aos fenômenos educacionais. Assim, sob esta perspectiva, são examinadas, por exemplo, variáveis como a sala-de-aula, o aprendiz, etc. ao mesmo tempo em que se procura correlacioná-las com os resultados do aprendizado observado. Em outras palavras, ao prescrever (ÁLVES-MAZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 2001, p. 111) que todos os enunciados e conceitos referentes a um dado fenômeno deveriam ser traduzidos em termos observáveis (objetivos) e testados empiricamente para verificar se são falsos ou verdadeiros, os pressupostos do chamado *empirismo lógico*, caracterizado no positivismo, são claramente assumidos.

O segundo paradigma, chamado *teórico-crítico,* orienta a abordagem de não apenas descobrir, mas também de se engajar na crítica social e nas mudanças institucionais para melhorar ou reformar aspectos da vida social (ERNEST, 1998, p. 78, tradução nossa). Na Educação, freqüentemente preocupa-se com questões de justiça associadas a questões de gênero ou de desigualdades sociais.

O terceiro paradigma é o chamado *interpretativo (ou naturalístico)*, desenvolvido a partir dos métodos usados nas pesquisas em Ciências Sociais. Este, por sua vez, se preocupa com a compreensão humana, a interpretação, a intersubjetividade, etc. (ERNEST, 1998, p. 77, tradução nossa). Assim, sua ontologia é fundada no relativismo das realidades locais e específicas construídas, sua epistemologia é transacional/subjetiva com resultados construídos e sua metodologia é hermenêutica/dialética. Na pesquisa em Educação Matemática este paradigma, que teve sua origem nos anos 70 do século passado e representa o conjunto de crenças que sustenta a chamada *pesquisa qualitativa*, tem sido bastante utilizada em grande parte do trabalho experimental a partir da última década.

Considerando que a presente pesquisa tem seus fundamentos neste último paradigma, apresentarei a visão de Schwandt (p. 189, 2000, tradução nossa) sobre três das filosofias que orientam os trabalhos na pesquisa qualitativa: Interpretivismo, hermenêutica e o construtivismo social.

O interpretivismo e a hermenêutica, originadas no final do século XIX, surgiram como reação à visão predominante positivista e, posteriormente, à positivista lógica. É este contexto de reação a um paradigma predominante de conhecimento que começa a induzir a emergência de visões por vezes antagônicas, por vezes compatíveis, mas que, de maneira geral, tem alimentado as discussões que, ao longo de décadas, canalizam as posições quanto aos objetivos da Ciência para duas avenidas: a da explicação (*Erklären*) e a da compreensão (*Verstehen*).

Neste sentido, a própria concepção de Ciência passa a ser definidora. Para aqueles que advogam apenas o estrito papel explanador causal de fenômenos — quer sejam físicos ou sociais — da Ciência, qualquer objetivo visando a compreensão não pode ser vista como uma justificativa científica. Por outro lado, há a posição dos interpretivistas sustentando que a Ciência deve incluir a compreensão das ações humanas. A visão atual do que é Ciência, no entanto, como afirma Schwandt, continua indefinida.

Considerando os propósitos da presente investigação, a epistemologia interpretivista, dado seu caráter hermenêutico, é a que melhor poderia responder às demandas inerentes a tal objetivo. Assim:

> Epistemologias interpretivistas podem, em um sentido, ser caracterizadas como hermenêuticas porque enfatizam que se deve apreender a situação por meio da qual as ações humanas produzem (ou adquirem) significado, de maneira a dizer que se obteve compreensão da ação particular” (DENZIN; LINCOLN, p. 193, 2000, tradução nossa).

Não menos importante do que a visão epistemológica do pesquisador, está a compatibilidade dos métodos de investigação por ele adotados à essa visão. Assim, a investigação formal de um fenômeno social ou natural implica na adoção, por parte do investigador, de uma linha metodológica que se harmonize com o objetivo geral da investigação proposta. É neste sentido que Lincoln e Guba (1985) apontam quando propõem que a consistência e o significado de uma pesquisa dependem de suas ressonâncias com a metodologia utilizada e com a visão epistemológica subjacente.

Sob esta perspectiva, é natural, portanto, que em cenários educacionais de pesquisa similares à da presente investigação, a metodologia qualitativa tem ganhado espaço na preferência dos pesquisadores, justamente por pressupor uma abordagem investigativa mais atenta em perceber e considerar as complexidades inerentes aos fenômenos sociais ou, em outras palavras, em construir o *verstehen.* Os pesquisadores qualitativos, segundo Denzin e Lincoln (2000, p. 8, tradução nossa), “enfatizam a natureza socialmente construída da realidade, o íntimo relacionamento entre o pesquisador e o que é estudado, e as restrições circunstanciais que moldam a investigação”.

Especificamente no campo da pesquisa em Educação Matemática, a materialização dessas idéias em *designs* reais e efetivos de investigação ganhou espaço à medida que esta região de inquérito entrava no período pós-moderno (von Glasersfeld, 1987), com seus pesquisadores “começando a mudar seus conceitos de “ciência normal” e os experimentos de ensino preenchendo o vazio nas metodologias disponíveis para investigar a aprendizagem e o desenvolvimento matemático.” (STEFFE; THOMPSON, p. 272, 2000, tradução nossa). Sob esta perspectiva, Thompson (1982 apud Steffe e Thompson, 2000, p. 272, tradução nossa), afirma:

> Eles tentavam levar em conta as atividades matemáticas dos estudantes no contexto do ensino como manifestações de suas imagens mentais, raciocínios e compreensões. Também tentavam construir explicações sobre como estudantes aprendiam conceitos matemáticos específicos. Em vez de se interessarem por essas questões de uma maneira pura, os pesquisadores explicitamente reconheceram que as atividades na escola ocorrem como resultado da participação dos estudantes no ensino. As metodologias experimentais utilizadas nos anos 1970 eram inadequadas para lidar com tais questões. Em particular, os pressupostos que fundamentavam a psicometria conflitavam profundamente com os pressupostos que deram significado para a idéia de compreender a experiência matemática de outrem sem assumir o olhar-de-Deus sobre essas experiências,

3. O(a)s Participantes da Pesquisa

Para a implementação e desenvolvimento da pesquisa foram selecionados quatro voluntários e quatro voluntárias, totalizando oito participantes, alunos e alunas regulares da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, ingressantes no curso de Matemática de uma universidade pública do Estado de São Paulo, oferecido em período integral.

Observando afinidades pessoais e compatibilidade de horários, os participantes livremente se organizaram de maneira a constituir as seguintes duplas:

- Daniel e Juliano
- Edson e Teresa
- Gisele e Vera
- Pedro e Talita

4. A Coleta de Dados

A coleta de dados foi conduzida em três fases que acompanharam, de maneira aproximadamente sincronizada, durante o período de seis meses, o desenvolvimento dos conteúdos respectivos na disciplina regular de Cálculo I do curso de Matemática, do qual os participantes da pesquisa eram oriundos:

Fase 1: Investigação de compreensões sobre o conceito de *função*;
Fase 2: Investigação de compreensões sobre os conceitos de *limite* e De *continuidade*;
Fase 3: Investigação de compreensões sobre o conceito de derivada.

Em cada uma das fases acima foram utilizados dois modos de abordagem aos participantes, a saber:

Atividade Individual:
Cada participante respondeu, individualmente e em linguagem escrita, a um questionário com questões sobre o conceito investigado.

Atividade em Dupla:
Nesta modalidade o cenário de coleta dos dados foi totalmente reconfigurado para caracterizar um experimento no qual cada dupla de participantes, em horários exclusivos, interagiam entre si e com o MAPLE. Tais interações foram induzidas por um questionário com novas questões escritas relativas ao mesmo conceito tratado na atividade individual do encontro anterior.

Desta maneira, os episódios, que serão apresentados no capítulo seguinte, foram construídos a partir da interpretação e da análise inicial de dados materializados pelos seguintes meios:

- Respostas escritas fornecidas por cada participante às questões propostas no questionário inicial relativo a cada etapa da pesquisa;
- Respostas escritas fornecidas por cada dupla às questões propostas nas atividades em dupla;
- Transcrições das gravações em vídeo do diálogo produzido entre os membros de cada dupla e, eventualmente, entre o pesquisador e estes;
- Gravações das imagens do datashow onde se projetava as ações executadas por cada dupla no MAPLE — e respectivas respostas do Sistema — num processo de registro síncrono aos diálogos desenvolvidos;

- Arquivo em formato mws do MAPLE produzidos por cada dupla durante cada experimento.

Embora a elaboração dos questionários tenha sido precedida por uma discussão com os membros do grupo de pesquisa do qual faço parte – GPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática), a versão final foi elaborada por mim, à luz da literatura da área, das sugestões apresentadas pelo grupo e, naturalmente, da minha própria curiosidade como pesquisador.

Visando preservar a fidelidade aos dados coletados, toda a produção escrita dos participantes foi transcrita *ipsis litteris*, incluindo-se eventuais erros ortográficos ou gramaticais.

5. Experimento de Ensino

Os procedimentos foram conduzidos segundo o conceito de *Experimento de Ensino* (STEFFE, THOMPSON, 2000), metodologia especialmente desenhada e dirigida para a investigação do raciocínio e das compreensões matemáticas produzidas por estudantes. Um experimento de ensino envolve uma seqüência de episódios de ensino Steffe (1983, apud Steffe; Thompson, 2000, tradução nossa). Um episódio de ensino inclui um pesquisador/professor, um ou mais estudantes, uma testemunha dos episódios e um método para se gravar o que se transpira durante tais episódios (STEFFE; THOMPSON, 2000, p. 273, tradução nossa). Cabe aqui destacar as especificidades decorrentes dos objetivos da presente pesquisa.

Experimentos de ensino visando investigar o pensamento emergente de estudantes de matemática interagindo com mídias diversas — caracterizado por Borba e Villarreal (2005) no construto seres-humanos-com-mídias — têm sido implementados nas pesquisas produzidas no âmbito do GPIMEM — Grupo de Pesquisa em Informática, Outras Mídias e Educação Matemática da UNESP — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, com algum grau de variação em relação à maneira prescrita por Steffe e Thompson. Este grau de variação é função dos objetivos subjacentes à pesquisa, das circunstâncias materiais de sua implementação e da própria orientação do pesquisador. Longe de se configurar uma falha metodológica, estes pequenos ajustes visam tão somente equilibrar a complexa equação envolvendo os elementos referidos acima com a efetiva realização da pesquisa no tempo determinado pelas regras institucionais e pelas agências governamentais de fomento à pesquisa.

No caso da presente investigação, alguns fatores de ajuste também foram necessariamente trazidos ao cenário de pesquisa. Tais fatores, entretanto, não decorreram de quaisquer restrições institucionais, mas tão somente dos objetivos e do desenho de pesquisa preconizados pelo pesquisador. Assim sendo, o próprio título "*Experimento de Ensino*" talvez não fosse o mais apropriado, caso a concepção de *ensino* do(a) leitor(a) pressuponha uma interação ostensiva por parte do pesquisador na condução do processo desenvolvido no experimento. Certamente esta não foi a visão adotada na presente pesquisa e a razão para isso localiza-se nos objetivos da investigação.

De acordo com esses objetivos, a prioridade foi investigar compreensões de estudantes de Matemática ingressantes à universidade sobre conceitos fundamentais do Cálculo, em momentos específicos do desenvolvimento regular da disciplina na qual estavam matriculados. Entretanto, a forma de investigação prescrita na pesquisa tinha algumas especificidades, pois se baseava na exploração da integração oralidade-escrita-informática como indutora de reflexões e materializadora de compreensões dos estudantes — o coletivo pensante, segundo Levy (2003) — porém com limitada interação oral entre o pesquisador e estes.

Dadas as características de personalidade de cada participante, o grau de atuação do pesquisador teve que variar de maneira inversamente proporcional ao nível de desenvoltura da comunicação oral entre deles. Quero esclarecer, no entanto, que minha atuação, mesmo no caso das duplas que demonstraram maior timidez na exposição de suas idéias, pode ser considerada mínima, caso se tenha como referência a atuação típica de um professor em cenários de ensino semelhantes. Este, certamente, foi um cuidado deliberado e para o qual estive consciente, mesmo nos momentos em que os reflexos condicionados pelos longos anos de exercício do magistério induziam alguma ação explicativa ou esclarecedora que em alguns momentos, inapelavelmente, aconteceram.

6. O cenário para a realização dos experimentos

Conforme o desenho previsto no projeto de pesquisa, os experimentos com cada dupla deveriam ser gravados em vídeo para que a interação estudantes-computador e a exploração do Sistema de Computação Algébrica pudesse ser analisada. Isto implicava num planejamento prévio, tanto na definição do local das gravações como do *layout* do ambiente dos experimentos.

Assim sendo, a solução proposta pelo técnico consultado foi a seguinte:

- utilizar o anfiteatro da universidade como espaço para o desenvolvimento dos experimentos.
- utilizar o próprio telão do anfiteatro para monitorar a interação do(a)s participantes com o CAS.

Nesta proposta, apenas uma câmera seria suficiente para captar todas as ações dos participantes, quer seja entre si, ou entre eles e o computador (no caso, um notebook [4]). Nesta configuração, apenas um detalhe ainda precisaria ser solucionado: como capturar os gestos produzidos no movimento de apontar para um ponto específico da tela do notebook? A solução foi encontrada no próprio sistema operacional Windows que equipava o computador e num treinamento prévio dado aos participantes. Este sistema operacional possui um recurso de acessibilidade para pessoas com déficit visual que permite alterar a dimensão e a cor do cursor que, na tela, responde às ações do mouse. Utilizando-se a maior dimensão permitida e a cor preta, o cursor aparecia no telão com destaque suficiente para ser captado com nitidez pela única câmera que registrava todas as ações.

Restava, portanto, apenas aguardar a realização de uma gravação piloto para confirmar se, uma vez orientados a fazê-lo, o(a)s participantes utilizariam, exclusivamente e de forma natural, o mouse (em vez das mãos) para apontar um ponto específico na tela do notebook de, por exemplo, um gráfico durante as discussões. Realizado o piloto, verifiquei que os participantes se adaptaram rapidamente ao esquema planejado.

---

[4] Equipamento adquirido com verbas do CNPq alocadas para o projeto “Velhas e Novas Tecnologias da Informação em Educação Matemática” do GPIMEM, processo nº 471697/2003.

7. Uma investigação transversal

O momento da realização de cada experimento ficou na dependência do desenvolvimento regular dos conteúdos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, de cuja turma o(a)s participantes da pesquisa eram oriundos. A idéia era que tanto o(a)s aluno(a)s quanto o pesquisador, ao participarem do experimento, já tivessem assistido às aulas regulares onde tais conceito seriam tratados. Em outras palavras, à medida que os conteúdos relacionados a cada conceito em pauta na pesquisa eram concluídos no desenvolvimento regular da disciplina, os participantes eram convidados à, primeiramente, responderem individualmente ao questionário proposto e, posteriormente, a participarem, em dupla e horários específicos para cada uma, do experimento.

8. Por que esse curso e essa turma?

Antes de explicitar as razões que me levaram a escolher este curso e esta turma, gostaria de fazer uma breve digressão com o objetivo de situar tais escolhas.

O primeiro ano universitário dos cursos de Matemática, bem como os da maioria dos cursos afins, tem o Cálculo de Funções Reais de uma Variável Real como disciplina obrigatória em seus currículos. Conforme exposto no capítulo I, embora o nome formal da disciplina possa variar, é certo que a maioria absoluta das ementas respectivas contemplam os conteúdos clássicos de Funções, Limites, Derivada e Integral. Outra característica comum neste caso, obviamente não sendo uma exclusividade dos cursos das áreas de Exatas, é o fato que os contextos em que usualmente se dá o primeiro contato do estudante com a disciplina é aquele do início de uma transição, não só no nível acadêmico como em vários outros aspectos da vida pessoal de cada estudante. Basta uma conversa informal com calouros de qualquer curso universitário, depois de um ou dois meses do início das aulas, para que sejamos informados de que estão preocupados com seus desempenhos em algumas disciplinas, particularmente com a disciplina A ou B, pois é esta ou aquela que "segura o aluno". No caso dos cursos de Matemática, praticamente não há novidade: o Cálculo sempre (ou quase sempre) é uma das "eleitas". No caso brasileiro, em particular, além dessas há também uma outra característica quase sempre comum nesses cenários: o elevado número de alunos em cada turma.

Quais seriam, então, os diferenciais entre os cursos de Matemática no contexto de seus primeiros períodos? Grosso modo, seriam o perfil dos seus corpos docente e discente e os turnos em que tais cursos são oferecidos. Teríamos, assim, de um lado, aqueles oferecidos pelas instituições públicas, com um corpo docente mais qualificado e com condições de trabalho mais adequadas em termos de “ambiência” acadêmica e de tempo disponível dedicado ao ensino. Tais características, aliadas à gratuidade, atrai, como se espera, um contingente de alunos mais bem formados e com mais disponibilidade para se dedicar ao referido curso.

Por outro lado, há aqueles oferecidos pelas instituições privadas, com condições de oferta raramente comparáveis às anteriores. Assim, a qualidade de seus corpos docentes, majoritariamente remunerados por hora-aula, oscila com freqüências e amplitudes consideráveis, basicamente em resposta às condições do mercado ou a exigências circunstanciais (nos momentos das avaliações para a obtenção de reconhecimento, por exemplo) dos órgãos oficiais. Nesta perspectiva, o perfil do corpo docente de um curso pode variar sensivelmente, passando, por exemplo, de uma maioria de doutores em um ano para uma maioria de especialistas no seguinte. Tais características vão configurando um cenário que praticamente exclui a possibilidade de que a interação aluno-professor possa ocorrer em horários diferentes daqueles designados para as aulas. É possível, no entanto, que algumas escolas particulares apresentem condições de infraestrutura superiores àquelas oferecidas pelas instituições públicas, como é o caso dos laboratórios de informática, da disponibilidade de insumos e de uma maior organização e eficiência de respostas nas atividades meio. Até que ponto esses elementos estariam atuando mais a serviço do marketing do que propriamente a serviço da Educação é uma questão em aberto.

Em suma, a “ambiência” acadêmica é restrita, além do que é possível que o movimento acima apontado gere turbulências com intensidade suficiente para comprometer a execução de qualquer projeto pedagógico, ainda que formalmente bem elaborado. Tais características, aliadas à profusão de vagas disponíveis nessas instituições, que se traduz como acesso quase imediato ao Ensino Superior, certamente contribuem para atrair o aluno menos preparado, que trabalha durante o dia e que tem, portanto, seu tempo de estudo extraclasse bastante reduzido.

Antes de continuar, gostaria de esclarecer ao leitor ou leitora que interpretar as informações acima como uma crítica à atuação das instituições privadas de ensino superior, seria um equívoco, pois, definitivamente, este não é meu objetivo. Embora o ensino universitário dos cursos da área de Exatas, em geral, e os fenômenos da aprendizagem que ocorrem nos primeiros anos desses cursos, em particular, sejam claros objetos de interesse deste autor como educador e pesquisador, acredito que seria extremamente simplista dicotomizar os problemas do ensino superior brasileiro em termos de público versus privado. Isto posto, esclareço que o objetivo aqui é situar as razões que me levaram a escolher o curso de Matemática do qual foram selecionado(a)s o(a)s participantes para a presente pesquisa.

Desde os primeiros esboços do projeto de pesquisa, sempre esteve presente que o tema trataria de fenômenos de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral no contexto do primeiro ano de algum curso universitário de Matemática. É claro que nem esta disciplina, nem as dificuldades em sua aprendizagem são exclusividades da graduação em Matemática. Ocorre que o professor de Cálculo interessado em estratégias pedagógicas, quando ministrando a disciplina em cursos como Biologia, Economia, Engenharia, etc., procura, em geral, moldá-la e dirigi-la para aplicações clássicas em cada um desses contextos, atitude que, a meu ver, é louvável e desejável.

Embora se possa argumentar, com razão, que, independentemente da área, os modelos teóricos oriundos dessas aplicações são construídos articulando-se os mesmos conceitos – no caso, os de função, limite, continuidade, derivada e integral – uma característica possivelmente comum a todos eles é que o tempo dedicado às aplicações será consideravelmente maior, gerando, em conseqüência, maior foco nas questões relativas à modelagem matemática. Não era meu interesse, entretanto, investigar especificamente eventuais capacidades do(a) estudante no que tange à modelagem matemática. Embora reconhecendo sua importância, minha curiosidade como pesquisador concentrava-se em outro ponto: nas compreensões teóricas emergentes da integração estudantes-oralidade-escrita-informática sobre os conceitos em pauta em momentos específicos do desenvolvimento regular da disciplina.

Uma outra decisão a ser tomada se referia à escolha de um curso oferecido por uma universidade pública ou por uma universidade particular. Desde a concepção do projeto de pesquisa, eu tinha em mente que a relevância da investigação proposta deveria ser associada às suas possibilidades de ser “lida” significativamente não apenas pelos membros da comunidade de pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior, mas, também, pelo maior número possível de colegas envolvidos na prática cotidiana do Ensino de Cálculo. Obviamente eu não visava a replicabilidade de seus resultados, mas, sim, como é típico dos que adotam a metodologia qualitativa em suas pesquisas, que o(a)s colegas pudessem interpretar e apreender o trabalho e que, de alguma forma, isto lhes pudesse ser útil. Embora pareça pretensioso, minha intenção foi tão somente de procurar contribuir, ainda que modestamente, para o quadro de compreensões sobre os fenômenos da aprendizagem neste contexto.

Estando, portanto, a relevância da pesquisa, no sentido acima apontado, entre as minhas preocupações como pesquisador, as peculiaridades destacadas dos cursos de Matemática das escolas particulares desaconselhavam a opção por uma de suas turmas, notadamente por dois fatores:

- as turbulências: conforme apontado num dos parágrafos anteriores – que freqüentemente assolam seus corpos docentes;
- a volatilidade e a problemática formação prévia de seu corpo discente.

Assim, em relação ao primeiro fator, seria extremamente problemático para a pesquisa ter estabelecido contato e negociações prévias com o(a) provável professor(a) da turma em sondagem e ser informado, na última hora, que o(a) referido(a) professor(a) pedira demissão ou que fora deslocado(a) para outro curso ou disciplina devido a conflitos emergenciais de horários. De maneira similar, seria problemático para a pesquisa que, por alguma razão, o(a)s participantes selecionado(a)s abandonassem o curso (e a pesquisa) durante seu desenvolvimento. A probabilidade de ocorrência deste fato com um(a) aluno(a) numa universidade particular é bem maior do que numa pública, por razões que vão desde dificuldades econômicas até a absoluta incompatibilidade com a área escolhida. Como o acesso aos cursos universitários particulares é, na prática, quase imediato, só depois de começar a freqüentar as aulas é que o(a) estudante pode começar a perceber que não era aquilo o que ele esperava. Isto é particularmente verdadeiro no caso dos cursos da área de Exatas.

Em resumo, eu procurava um curso de Cálculo Diferencial clássico, de preferência anual para que houvesse flexibilidade na execução de seu programa sem a pressão dos cursos semestrais e que fosse oferecido por um curso de Matemática tradicional, com um corpo docente estável e qualificado. Além disso, seu corpo discente deveria ter uma formação razoável, baixa tendência a abandonar o curso ao longo do primeiro ano e disponibilidade de tempo para participar das coletas de dados programadas na pesquisa.

8.1 Contextualizando: Sobre o Curso Escolhido

No final do ano letivo de 2002, entrei em contato com a professora escalada para ministrar a disciplina anual Cálculo Diferencial e Integral, com 6 horas-aula semanais, no período letivo subseqüente – 2003, no curso de graduação em Matemática de uma tradicional universidade pública do Estado de São Paulo. Começava aí a busca de candidatos a participantes para a pesquisa em pauta. Além dos argumentos expostos acima, a escolha desse curso, da turma – e da respectiva professora – deveu-se, também, aos seguintes fatores:

- O curso é considerado um dos melhores do país há várias décadas, tendo, em anos recentes, sido agraciado com o conceito A em todos Exames Nacionais de Cursos realizados (de 1996 a 2003) pelo Ministério de Educação;

- O curso é oferecido em período integral, o que significa que seus alunos possuem, em geral, uma maior disponibilidade de tempo para os estudos e, possivelmente, para participarem de alguma pesquisa de caráter educacional proposta;

- O número total de estudantes da turma observa o padrão usual da disciplina, situando-se na faixa dos 60 a 70 alunos, sendo que 20 a 30 destes alunos já haviam cursado a disciplina anteriormente.

- Embora as condições materiais — com ótima infraestrutura — as condições humanas — com ótima qualificação do Corpo Docente — e um corpo discente constituído por alunos já submetidos a um considerável crivo no vestibular, os índices de reprovação na disciplina têm se mantido na faixa dos 30 a 50 %, também considerado dentro dos padrões.

- A professora da disciplina é doutora na área de Matemática Aplicada, adota uma abordagem tradicional e utiliza um livro-texto considerado clássico dentre os autores brasileiros (GUIDORIZZI, 2000).

Em suma, o curso clássico que eu procurava havia sido encontrado. Faltava a abordagem à professora da disciplina, sua concordância e, finalmente, caso fosse obtida, a seleção dos participantes.

A abordagem à professora visava investigar a receptividade a uma proposta de pesquisa envolvendo alunos de sua turma. Tal receptividade era necessária, uma vez que o design metodológico incluía minha presença em sala-de-aula, especialmente nos dias em que os conceitos destacados pela pesquisa fossem tratados teoricamente. Além disso, havia a necessidade de que a aproximação com os potenciais participantes fosse desenvolvida de maneira gradual, visando a construção de uma confiança recíproca e a busca de uma relativa naturalidade de convivência no espaço acadêmico.

Felizmente, conforme se esperava, a reação da professora foi amplamente favorável à proposta, tendo inclusive se colocado à disposição para eventuais necessidades da pesquisa.

Tendo recebido o aval e o apoio da docente responsável, elaborei dois questionários para serem respondidos em sala de aula pelo(a)s aluno(a)s ao final da segunda e da terceira semana de aulas. Pelo primeiro, busquei efetivar uma primeira sondagem de potenciais candidato(a)s. O objetivo era selecionar o(a)s que apresentassem:

- Gosto pela Matemática – Considerando que a proposta implicava em dispêndio voluntário de tempo com atividades que embora tratando de temas comuns aos estudados na disciplina regular, não ofereceria qualquer benefício em termos de atribuição de notas ou conceitos complementares às avaliações regulares, entendi que dificilmente um(a) aluno(a) que não tivesse gosto pela área, estaria disposto(a) a participar dos experimentos até o final.

- Afinidade Prioritária com o Curso de Matemática – Não é incomum que candidato(a)s sejam aprovado(a)s no vestibular para um curso sem que a ele estejam interessados como primeira opção. Assim sendo, esses aluno(a)s são fortes candidato(a)s à desistência do curso antes mesmo de completarem o primeiro semestre.

- Inexperiência como alunos regulares de Cálculo em nível de graduação – Em consonância com o objetivo proposto na pesquisa, a idéia era selecionar somente calouros na disciplina, ou seja, aluno(a)s que estivessem começando a viver sua primeira experiência no contexto da transição para a Matemática Universitária.

- Disponibilidade de tempo – Como as aulas regulares são oferecidas em período integral, havia a necessidade de que o(a)s possíveis candidato(a)s dispusessem de tempo em pelo menos um dos períodos.

8.2 A Aproximação com a Turma

No primeiro dia de aula, fui apresentado à turma pela professora como um doutorando em Educação Matemática interessado em assistir às aulas da disciplina. Neste primeiro momento, a questão da pesquisa não foi colocada em pauta, já que a idéia era produzir uma aproximação natural com a turma, de maneira que minha presença não configurasse uma perturbação considerável no ambiente (objetivo difícil de ser atingido, dada a idade do pesquisador...).

Assim sendo, assisti às aulas nas duas primeiras semanas do semestre letivo e comecei a observar o comportamento do(a)s estudantes, sua atenção (ou desatenção), suas perguntas e manifestações que indicassem interesse pelos temas tratados. Ao final da segunda semana, solicitei e a professora me concedeu quinze minutos para falar à turma sobre minha pesquisa e, em seguida, distribuir o primeiro questionário visando à seleção. Alguns poucos alunos se retiraram, mas a maioria absoluta (61) o recebeu e o respondeu.

A primeira análise dos resultados produziu uma seleção prévia de trinta e sete candidato(a)s que contemplavam todas as condições acima referidas, resultado que considerei acima das expectativas.

Um novo e final refinamento desta listagem, deveria, ao final do processo, reduzir esse número para oito participantes. De acordo com várias experiências prévias de grupos de pesquisa, inclusive daquele do qual faço parte (GPIMEM), este número é compatível com o *design* proposto, considerando-se os objetivos, o volume de dados gerado e o cronograma definido para a execução do projeto. Este número também já prevê a eventualidade de faltas ou desistência de dois participantes, de forma que sua redução para seis, ou seja, três duplas, não configuraria um problema sério para a pesquisa.

Embora a qualidade dos dados coletados (definida aqui como sua potencialidade em alimentar uma análise que atinja os objetivos fixados) seja sempre o fator mais importante para um pesquisador, seu volume também é fonte de preocupação em pesquisas qualitativas, particularmente naquelas desenvolvidas sob um rígido limite de tempo, como é o caso da presente investigação. Assim sendo, um novo questionário foi pensado com a finalidade de sondar o(a)s candidato(a)s em relação aos seguintes temas:

- formação matemática pré-universitária;
- dificuldades e/ou facilidades em Matemática;
- dificuldades e/ou facilidades em escrita em linguagem natural;
- dificuldades e/ou facilidades em informática;
- razões para a decisão de participar da pesquisa.

Cabe salientar aqui que o objetivo deste questionário não foi o de selecionar aqueles ou aquelas que afirmassem ter mais facilidade no tratamento com cada um dos elementos supra-referidos. A finalidade principal foi trazer subsídios complementares que contribuíssem com a contextualização da pesquisa e que, residualmente, constituísse uma razoável “biodiversidade” no grupo, caracterizada por participantes que se reconhecessem como detentores de variados níveis de facilidades e/ou dificuldades no trabalho com tais mídias.

Cruzando-se os resultados deste questionário com as informações sobre horários disponíveis, de maneira a encontrar compatibilidades, a listagem final foi reduzida a oito participantes cujos pseudônimos seguem abaixo:

1. **Daniel**
2. **Edson**
3. **Gisele**
4. **Juliano**
5. **Talita**
6. **Pedro**
7. **Teresa**
8. **Vera**

CAPÍTULO V

Abordagem aos Dados: Construindo Episódios e Desenvolvendo uma Análise Inicial

Visando iniciar o encaminhamento de respostas às questões de pesquisa:

No contexto de um grupo de alunos de Matemática de uma universidade pública do Estado de São Paulo, em seu primeiro curso de Cálculo e em relação aos conceitos de *função, limite, continuidade* e *derivada*:

- Que compreensões são produzidas sobre tais conceitos a partir da integração entre oralidade, escrita (em linguagem natural) e informática (representada pelo MAPLE) ?
- O que sugerem tais compreensões sob o ponto de vista da Educação Matemática no Ensino Superior ?

este capítulo tem cinco objetivos principais:

- Estabelecer o referencial teórico para a abordagem e análise dos dados.
- Apresentar os episódios construídos para materializar as compreensões emergentes das interações com base na oralidade e na informática.
- Categorizar as formas de interação humanos-CAS.
- Articular as compreensões materializadas pela escrita com aquelas emergentes nos episódios, sugerindo e categorizando possíveis compatibilidades.
- Construir um diálogo entre as compreensões emergentes e elementos da literatura respectiva, visando sugerir possibilidades no interesse da Educação Matemática em contextos similares ao investigado.

É característica de uma parcela substancial das pesquisas qualitativas o grande volume de dados de diversas modalidades. Assim sendo, faz-se necessária uma seleção e organização criteriosa do material coletado, a fim de que o(a) leitor(a) possa acompanhar a descrição, a interpretação e a linha de argumentação do pesquisador, sem que para isso tenha que ser tributário(a) de um grande volume de transcrições de diálogos ou de dados que a rigor pudessem participar da referida argumentação, poderiam também contribuir para tornar sua leitura monótona e cansativa. Ciente da quase impossibilidade de atingir um equilíbrio entre consistência argumentativa e volume de dados que satisfizesse a todos os leitores ou leitoras, procurei, mesmo assim, conduzir a exposição tendo em mente este objetivo.

5.1 Abordagem aos Dados: a Análise de Conteúdo (AC)

Sob o ponto de vista específico da abordagem aos dados, optei por utilizar elementos da *Análise de Conteúdo* (AC) (p.ex. BARDIN, 2002 ou BAUER; GASKELL, 2003), por entender que este instrumento é compatível com o método de investigação em pauta, e, por se tratar de uma hermenêutica baseada na inferência, adequada ao processo de proposição de respostas às perguntas de pesquisa. Neste sentido, Bardin (2002, p. 9) afirma (e adverte):

> Enquanto esforço de interpretação, a análise de conteúdo oscila entre os dois pólos do rigor da objetividade e da fecundidade da subjetividade. Absolve e cauciona o investigador por esta atração pelo escondido, o latente, o não-aparente, o potencial de inédito (do não-dito), retido por qualquer mensagem. Tarefa paciente de ‘desocultação’, responde a esta atitude de *voyeur* de que o analista não ousa confessar-se e justifica a sua preocupação, honesta, de rigor científico. Analisar mensagens por esta dupla leitura, onde uma segunda leitura se substitui à leitura ‘normal’ do leigo, é ser agente duplo, detetive, espião... Daí a investir-se o instrumento técnico enquanto tal e a adorá-lo como um ídolo capaz de todas as magias, fazer-se dele o pretexto ou o álibi que caucione vãos procedimentos, a transformá-lo em *gadget* inexpugnável do seu pedestal, vai um passo... que é preferível não transpor.

Dois pontos, no entanto, continuam a demandar esclarecimentos: primeiramente, considerando que grande parte das compreensões emergentes foram materializadas em linguagem natural, não caberia à Lingüística orientar a abordagem analítica? Em consonância com os objetivos deste estudo e baseado em Bardin (2003, p. 43), a resposta é não, pois:

> Aparentemente, a lingüística e a análise de conteúdo tem o mesmo objecto: a linguagem. Na verdade, não é nada assim: a distinção fundamental proposta por F. de Saussure entre *língua* e *palavra* e que fundou a lingüística, marca a diferença. O objecto da lingüística é a língua, quer dizer, o aspecto colectivo e virtual da linguagem, enquanto que o da análise de conteúdo é a palavra, isto é, o aspecto individual e actual (em acto) da linguagem. A lingüística trabalha numa língua teórica, encarada como um 'conjunto de sistemas que autorizam combinações e substituições regulamentadas em elementos definidos...'[1]. O seu papel resume-se, independentemente do sentido deixado à semântica, à descrição das regras de funcionamento da língua, para além das variações individuais ou sociais tratadas pela psicolingüística e pela sociolingüística. Pelo contrário, a análise de conteúdo trabalha a palavra, quer dizer a prática da língua realizada por emissores identificáveis. Retomando a metáfora do jogo de xadrez utilizada por F. de Saussure, a lingüística não procura saber o que significa uma parte, antes tentando descrever quais as regras que tornam possível qualquer parte. A lingüística estabelece o manual do jogo da língua**; a análise de conteúdo tenta compreender os jogadores ou o ambiente do jogo num momento determinado, com o contributo das partes observáveis** *[grifo meu]*. Contrariamente à lingüística, que apenas se ocupa das formas e da sua distribuição, a análise de conteúdo toma em consideração as significações (conteúdo), eventualmente a sua forma e a distribuição destes conteúdos e formas (índices formais e análise de co-ocorrência).

O segundo ponto refere-se à análise dos dados de vídeo. Seria a Análise de Conteúdo aplicável, também, a estes dados? Bauer e Gaskell (2003, p. 195) afirmam que "tradicionalmente a AC trabalha com materiais textuais escritos, mas procedimento semelhante pode ser aplicado a imagens ou sons". Neste sentido, recentemente, Powell (2004, p. 98) apresentou um modelo para a análise de dados de vídeo, que foi especialmente construído para a investigação do pensamento matemático de estudantes. Sua proposta é constituída de sete fases interativas e não lineares:

---

[1] M. Pêcheux, *Analyse automatique du discours*, Dunod, 1966.

1. Observar atentamente aos dados do vídeo;
2. Descrever os dados do vídeo;
3. Identificar eventos críticos;
4. Transcrever;
5. Codificar;
6. Construir o enredo;
7. Compor a narrativa.

No presente estudo, a análise dos dados de vídeo obedeceu, de maneira bastante aproximada, a seqüência proposta por Powell. A principal diferença é que à esta seqüência — caracterizada principalmente pela integração oralidade-informática — foram também articulados dados oriundos de respostas às atividades escritas produzidas pelos estudantes, inclusive nas fases anteriores àquela a que a respectiva gravação em vídeo se referia. Procurei, assim, construir uma urdidura que refletisse minha interpretação dos dados provenientes das diferentes fontes, articulando-os na composição da narrativa prescrita no modelo de Powell.

Segundo Bauer e Gaskell (2003, p. 194):

> existem seis delineamentos em AC, que vão desde o mais simples e menos interessante. caracterizado no estudo de freqüências de características codificadas em um determinado texto, até aos mais ambiciosos, envolvendo análises longitudinais em combinação com outros dados longitudinais.

Neste trabalho, eu assumi, em consonância com a visão de conhecimento explicitada no capítulo IV, que:

> A AC pode reconstruir 'mapas de conhecimento' à medida que eles estão corporificados em textos. As pessoas usam a linguagem para representar o mundo como conhecimento e autoconhecimento. Para reconstruir esse conhecimento, a AC pode necessitar ir além da classificação de redes de unidades de análise para representar o conhecimento não apenas por elementos, mas também em suas relações." (BAUER; GASKELL, 2003, p. 194)

Especificamente sobre as unidades de análise a serem destacadas, utilizarei uma variante da chamada "unidade proposicional" de Krippendorf, citada em Bauer e Gaskell (2003, p. 198): "Unidades proposicionais: são núcleos lógicos de frases. Proposições complexas são desconstruídas em núcleos na forma sujeito/verbo/objeto.” Nesta variante, tal desconstrução não é um movimento necessário, sendo, portanto, produzido apenas quando demandado por especificidades da análise.

Sob esta perspectiva, as respostas à primeira pergunta de pesquisa terão um caráter essencialmente descritivo das compreensões dos participantes sobre os conceitos abordados. Já as respostas à segunda, certamente demandarão uma interpretação com maior densidade de análise. Sob o ponto de vista do(a) leitor(a), acredito que esta última, dadas suas características articuladoras de elementos da totalidade dos dados coletados, sejam mais interessantes. Neste sentido, a estrutura do capítulo foi elaborada com o objetivo de iniciar a proposição de respostas às questões de pesquisa, como também de fazê-la, sempre que possível, de maneira integrada e articulada.

O capítulo será subdividido a seguir em seções abordando cada episódio. Em cada um desses episódios — onde foram destacados um tema e uma dupla de participantes — o(a) leitor(a) terá inicialmente uma justificativa para a construção do episódio e um perfil dos membros da dupla respectiva. Elementos da escrita de ambos — produzidos em qualquer das fases da pesquisa — serão entrelaçados às transcrições das interações orais e com o CAS sempre que se articularem de maneira significativa na interpretação do pesquisador. Além disso, visando à integração das respostas, elementos da escrita do(a)s demais participantes serão trazidos à cena sempre que puderem contribuir com a linha de argumentação.

Eu gostaria também de chamar a atenção do(a) leitor(a) para a ordem de apresentação dos quatro episódios que se seguem. Embora tal ordem não se configure como condição necessária para a exposição, e pudesse, sem perda de consistência na argumentação, ser sacrificada, acredito que a opção adotada será benéfica por razões que procurarei sintetizar a seguir:

Ainda que tenha havido uma mera coincidência, as quatro duplas de participantes, em termos dos resultados das avaliações formais promovidas ao longo do desenvolvimento da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, tiveram um desempenho bastante representativo do espectro de desempenho global da turma. Embora a questão do desempenho formal não esteja em pauta nesta tese — nem tampouco a busca por representatividade das amostras — acredito que esta informação possa ser útil no sentido de uma melhor contextualização e, em conseqüência, no enriquecimento de possibilidades interpretativas dos resultados pelo(a) leitor(a).

Ainda relacionado à ordem de apresentação dos episódios, mas agora em caráter menos facultativo, eu gostaria de destacar seus "conteúdos" e suas conexões. Neste sentido, o primeiro deles tematiza a noção de *derivabilidade*. Um olhar "de matemático" sobre as discussões ali emergentes poderia rapidamente inferir que "a dupla não invocou a principal definição aplicável ao caso." Como se espera, tanto eu, quanto — possivelmente — o(a) leitor(a) que ora se dá ao trabalho de ler esta tese, temos aqui nosso olhar configurado como o de um(a) educador(a) matemático(a), especialmente se este(a) trabalha e/ou tem interesse nas questões educacionais da Matemática no Ensino Superior. Nesta perspectiva, as compreensões que a dupla protagonista do primeiro episódio trouxe à luz, inspiraram-me a interpretar a "ausência" da definição de derivabilidade não como "causa" de determinados movimentos destes estudantes, mas sim como indutora de um ajuste de foco sobre compreensões de uma outra definição importante: a definição de derivada. Para a consecução deste propósito, a dupla Édson e Teresa foi chamada a contribuir com a construção do segundo episódio, que tematizou justamente esta definição. As discussões emergentes neste segundo episódio sugeriram focalizar o conceito de limite, o que foi feito com a contribuição da dupla Vera e Gisele. Finalmente, colaborando para a construção do quarto episódio, foram chamados Daniel e Juliano, oferecendo um conjunto de compreensões que puderam simultaneamente ilustrar a potência das interferências induzidas pelo CAS sobre estas e, mais uma vez, o papel que concepções prévias sobre o conceito de função exerceu sobre os movimentos da referida dupla.

À parte as identidades específicas de cada episódio, há, obviamente, os objetivos analíticos comuns, que eu gostaria de destacar e que foram particularmente observados, a saber:

i) as múltiplas compreensões dos conceitos em pauta, emergentes nestes processos.

ii) as compatibilidades entre as compreensões materializadas pela escrita de cada membro da dupla e aquelas emergentes das interações com base na oralidade e no CAS;

iii) as diferentes formas de interação das duplas com este sistema de computação algébrica.

Um outro ponto importante a destacar refere-se à extensão dos episódios construídos. O primeiro deles, protagonizado por Pedro e Talita, é bem mais extenso do que os demais. A razão para isso é que grande parte das discussões ali emergentes e praticamente toda a análise posterior balizaram a linha geral de argumentação que se estendeu até o final da tese. Além disso, há a questão da legibilidade, que, obviamente, desaconselharia quatro episódios com a extensão e o detalhamento do primeiro. Neste sentido, eu optei por oferecer a(o) leitora(o) episódios subseqüentes menores em extensão — mas não menos significativos — de maneira que, em sua totalidade, pudessem melhor representar o universo das compreensões do(a)s participantes e, simultaneamente, robustecer as linhas de argumentação principais ao longo do trabalho.

Ao final da tese, o(a) leitor(a) poderá encontrar os anexos com as atividades propostas nas diversas fases.

Finalmente, a seqüência de episódios será associada às seguintes duplas:

1º - Pedro e Talita
2º - Édson e Teresa
3º - Gisele e Vera
4º - Daniel e Juliano

5.2 PRIMEIRO EPISÓDIO

Compreensões sobre o Conceito de Derivabilidade: Conflitos no Trânsito Local x Global

Este episódio foi construído com o objetivo de destacar as compreensões emergentes das interações orais entre **Pedro** e **Talita** e entre estes e o CAS na discussão da derivabilidade de uma função específica. Conforme o estabelecido, procurei, ao longo da construção, articular e integrar estas compreensões àquelas materializadas pelos escritos de cada um, produzidas em fases anteriores da investigação.

A questão geradora do episódio induziu todas as duplas de participantes da pesquisa a conflitos e dilemas similares aos de Pedro e Talita. A escolha da referida dupla para representar a situação foi baseada no fato de eles terem sido especialmente profícuos em seus argumentos e por terem exposto suas compreensões de maneira fluente, com raríssimas intervenções do pesquisador.

5.2.1 Um Perfil da Dupla PEDRO e TALITA

Pedro e Talita têm 18 e 23 anos, respectivamente, mostram-se bastante interessados no curso que escolheram, participando de atividades extraclasse sempre que possível e apresentam ótima fluência na comunicação oral. Estritamente sob o ponto de vista de notas nas avaliações formais da disciplina, Pedro está situado entre os 10% melhores e Talita entre os 30% melhores de sua turma.

O questionário abaixo foi respondido no início das prospecções para a seleção dos participantes da pesquisa. As transcrições abaixo são *ipsis-litteris.*

- **A Matemática que você estudou no ensino médio (2º grau):**

Pedro: Foi uma Matemática dinâmica, criativa e cheia de experimentações. Devo grande parte da minha paixão pela matéria (e da decisão de cursá-la em nível superior) aos meus bons professores.

Talita: Considero que tive um bom ensino no 2º grau de matemática, porém, atribuo minha facilidade em Matemática a bons professores do ensino fundamental, pois no ensino médio, os professores não privilegiavam o aprender mas sim o passar no vestibular. Entretanto, se o aluno quisesse tinha a possibilidade de ir além disso que os professores auxiliavam, foi o meu caso.

- **Facilidades e dificuldades que você sentiu e/ou sente em relação à Matemática.**

Pedro: Facilidade de criar modelos, fórmulas e criação de métodos para problemas repetitivos. Altas dificuldades em trigonometria.

Talita: Sinto facilidade em me expressar matematicamente, a partir de números, fórmulas e gráficos, porém, minha maior frustração no colégio era que eu queria saber o porquê da Matemática, onde aquilo iria ser aplicado e, isso certas vezes me desestimulava. Minha dificuldade, hoje, é demonstrar coisas que parecem óbvias.

- **Facilidades e dificuldades que você sentiu e/ou sente em relação à escrita (cartas, redações, etc.)**

Pedro: Facilidade de expressão e criação de argumentos. Apresento dificuldades em acentuação (a auto-correção no PC me fez esquecer o que acentuar). É mole?

Talita: Já tive mais dificuldade, porém estou melhorando a cada dia, meu maior problema é expressar corretamente o que quero com palavras. Às vezes me enrolo nas redações, pois não tenho muito controle em me fixar a um único assunto, geralmente uma coisa leva a outra e eu, querendo escrever tudo, me disperso do assunto central.

- **Facilidades e dificuldades que você sentiu e/ou sente em relação à informática:**

Pedro: Facilidades com internet e com softwares padrão → editores de texto, etc. Entendo de programação para DOS. Dificuldades em hardware.

Talita: Tenho facilidade e gosto muito de informática. Fiz até alguns cursos, mas quando entra na parte de design tenho dificuldades em criar logotipos e páginas em geral, tenho maior facilidade para programar e desenvolver estes. Porém minha digitação não é boa pois não tenho paciência de manter um curso que é muito mecânico.

- **Razões para a participação na pesquisa:**

Pedro: Resolvi participar deste grupo porque a área de informática/matemática me parece um casamento bem sucedido e "explosivo". Portanto, por compatibilidade de idéias, resolvi participar.

Talita: Tenho muito interesse em participar de uma pesquisa e aprender a trabalhar em uma área voltada para Matemática e informática.

5.2.2 Construindo o Episódio

A questão abaixo foi proposta no experimento com duplas na fase de investigação de compreensões sobre o conceito de *derivada*:

Considerem a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{para todo } x \neq 0 \\ 0 \text{ para } & x = 0 \end{cases}$$

Pergunta-se:

i) Sem utilizar o CAS, o que vocês diriam sobre a derivabilidade de f?
ii) Utilizando o CAS, o que vocês diriam sobre a derivabilidade de f?
iii) Se f for derivável, como será definida a função f '? Expliquem.

Em consonância com o referencial analítico e com o propósito de facilitar a legibilidade dos episódios, utilizei recursos de cor e de codificação, além de ícones, que serão utilizados na apresentação deste e dos demais episódios. Desta forma, cada unidade de análise destacada dos escritos e da transcrição das discussões foi codificada de maneira a criar uma associação a seu autor (ou autora) e ao conceito respectivo, em relação ao qual eu atribuí uma conexão primária. Obviamente, todos os conceitos estão inter-relacionados, mas uma tal vinculação foi estabelecida tendo em vista o propósito analítico de destacar aquela relação específica. Ao longo de cada episódio, as compreensões materializadas pelos documentos escritos de cada membro da dupla, ou, em alguns casos, dos demais participantes, foram articuladas e integradas à análise local em desenvolvimento sempre que contribuíssem para a consistência da argumentação. Neste caso, as transcrições apresentadas preservaram *ipsis-litteris* o material escrito, o que significa que eventuais erros gramaticais, ortográficos, de pontuação, etc. não foram submetidos à correção. Para a análise das interações de cada dupla com o CAS, assim como de possíveis compatibilidades atribuídas entre as compreensões escritas e aquelas emergentes dos experimentos em duplas, além da utilização das cores padronizadas, utilizei ícones específicos para simbolizar cada categoria de interação ou de compatibilidade. Temos, portanto, a seguinte legenda:

Conceitos e cores respectivas:

Função **Continuidade**

Limite **Derivada**

Oralidade:

Fn_{PED}, Ln_{PED}, Cn_{PED}, Dn_{PED}: n-ésima unidade de análise da **<u>fala de Pedro</u>** associada à Função, Limite, Continuidade e Derivada, respectivamente.

Fn_{TAL}, Ln_{TAL}, Cn_{TAL}, Dn_{TAL}: n-ésima unidade de análise da **<u>fala de Talita</u>** associada à Função, Limite, Continuidade e Derivada, respectivamente.

Escrita:

FEn_{PED}, LEn_{PED}, CEn_{PED}, DEn_{PED}: n-ésima unidade de análise da **<u>escrita de Pedro</u>** associada à Função, Limite, Continuidade e Derivada, respectivamente**.**

FEn_{TAL}, LEn_{TAL}, CEn_{TAL}, DEn_{TAL}: n-ésima unidade de análise da **<u>escrita de Talita</u>** associada à Função, Limite, Continuidade e Derivada, respectivamente.


Sugestão analítica categorizando uma ou mais unidades de análise da escrita como **compreensão compatível com a discussão emergente e com o(s) objetivo(s) da questão em pauta.** A cor de fundo do ícone é associada à cor (segundo o padrão já estabelecido) do conceito respectivo.


Sugestão analítica categorizando uma ou mais unidades de análise da escrita como **compreensão parcialmente compatível com a discussão emergente e com o(s) objetivo(s) da questão em pauta.** A cor de fundo do ícone é associada à cor (segundo o padrão já estabelecido) do conceito respectivo.


Sugestão analítica categorizando uma ou mais unidades de análise da escrita como **compreensão incompatível com a discussão emergente e/ou com o(s) objetivo(s) da questão em pauta**. A cor de fundo do ícone é associada à cor (segundo o padrão já estabelecido) do conceito respectivo.

Informática - CAS

	Sugestão analítica categorizando a utilização do CAS como se este fosse uma “**calculadora sofisticada**” que opera simbolicamente.
	Sugestão analítica categorizando a utilização do CAS como **exploração para testar conjecturas.**
	Sugestão analítica categorizando o *feedback* do CAS como provável **interferência nas compreensões** do(a) participante sobre o conceito de **derivada.** Caso a interferência seja interpretada como sendo em relação a outro conceito, a cor de fundo do ícone é alterada para a cor respectiva (segundo o padrão já estabelecido).
	Sugestão analítica categorizando a exploração ou idéia de **exploração do CAS** como **criativa e não convencional.**
	Sugestão analítica categorizando o *feedback* gráfico do CAS como “**aberração**” ou como **representação insatisfatória.**

Uma vez definida a legenda acima, eu gostaria de adiantar que as “paternidades” (ou “maternidades”) atribuídas às unidades de significado codificadas tiveram como objetivo facilitar a urdidura das articulações na argumentação, e não a construção de eventuais categorias para estilos de raciocínio, preferências de abordagem ou dominância de algum membro da dupla em relação ao outro.

O(a) leitor(a) notará também algumas observações em itálico, entre colchetes, ao longo dos episódios. Nestes casos, os contextos respectivos contribuirão para elucidar seus significados. Na maioria dos casos, tratou-se de referências a pausas promovidas pelo(a)s participantes e que ocorreram em decorrência de dois motivos: o primeiro, denotado por *[pausa]*, sinaliza uma interrupção no fluxo natural da interação oral motivada por alguma dúvida, indecisão ou reação à um dado *feedback* do CAS. A duração dessas pausas variou, em geral, de aproximadamente quinze segundos a dois minutos. Outro tipo de pausa ocorreu em momentos em que uma determinada dupla decidia escrever algo durante o fluxo natural da discussão. Este tipo de interrupção foi menos comum, pois, em geral, elas adotaram o procedimento de só escrever depois que a interação oralidade-infomática as tinha induzido a concluir algo sobre um item específico das questões. Neste caso, a interrupção será denotada por *[pausa – escrita]*.

Voltemos à questão geradora:

Considerem a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

Pergunta-se:

i) Sem utilizar o CAS, o que vocês diriam sobre a derivabilidade de f?
ii) Utilizando o CAS, o que vocês diriam sobre a derivabilidade de f ?
iii) Se f for derivável, como será definida a função f '? Expliquem.

Pedro: O que você quer fazer?

Talita: Eu quero verificar se ($C1_{TAL}$) no ponto onde tende a zero se ele vai para zero. ($D1_{TAL}$) Se já não for para zero, neste ponto, com certeza já não é derivável, ela não é contínua.

Pedro: Então, você quer verificar se ela é contínua primeiro?

Talita: Primeiro verificar se é contínua. Se for contínua nós ($D2_{TAL}$) temos que verificar se não faz uma ponta, para ver se é derivável.

Pedro: Tá.

Talita compreende a continuidade no ponto x = 0 como um determinado comportamento de f, que ela descreve numa linguagem informal sobre limites. Parece natural a ela tal compreensão, assim como o fato da continuidade ser uma condição necessária para a derivabilidade. Vejamos algumas das compreensões da dupla sobre limite e continuidade apresentadas nas respostas às atividades individuais escritas de fases anteriores:

($LE1_{TAL}$) Limite em um certo ponto de uma função é quando o x se aproxima de certo ponto, qual ponto y se aproxima, não importando o ponto em si, somente suas laterais.

(CE1$_{TAL}$) Continuidade é o fato de em todos os pontos desta função os limites correspondem a função em si, de outra forma, não há saltos no gráfico da função.

Se analisarmos um gráfico de meia vida de alguma substância esta **(CE2$_{TAL}$) será contínua pois o gráfico decresce gradualmente, sem saltos**, **(CE3$_{TAL}$) todos os seus pontos tem limite que são iguais a f(x**), porém em um gráfico representando a quantidade de determinada substância no organismo de uma pessoa sendo que esta substância se reduz com o tempo, porém esta pessoa consome sempre esta substância teremos um gráfico descontínuo pois em certo ponto, quando a pessoa tem menos substância que antes e consome-a novamente, **(CE4$_{TAL}$) o gráfico dá um salto e então teremos pontos em que não existirá limite, portanto não será contínua.**

Vejamos, agora, as de Pedro:

(LE1$_{PED}$) Limite nos permite averiguar o que acontece nas proximidades de um ponto. Exemplo: o que acontece com a pressão de um gás quando seu volume se aproxima de um valor?

(CE1$_{PED}$): *[a continuidade]* nos permite verificar se **não há "lacunas" entre os pontos da função**. Exemplo: será que **(CE2$_{PED}$) o gráfico** da pressão x volume **apresenta alguma "não suavidade" pulando de um valor para outro**?

LE1$_{TAL}$ e LE1$_{PED}$ sugerem uma noção dinâmica (baseada no processo de *aproximação* a um ponto definido) do conceito de limite, provavelmente construída a partir de esboços de gráficos de funções no plano cartesiano. A princípio, estes significados não diferem de maneira substancial daqueles que se depreendem da própria idéia de limite num dado ponto de uma função real de uma variável real. É claro que a passagem desta idéia (ou conceito) para a própria definição de limite (de caráter estático) não é, em geral, imediata.

Duas compreensões de continuidade emergem da escrita de Talita. A primeira, CE1$_{TAL}$, envolvendo o conceito de limite, está muito próxima da própria definição de continuidade de uma função f num ponto *a* do domínio de f. A segunda, envolvendo gráficos, e também apresentada por Pedro, se apóia em determinadas características que **não** devem ser neles encontradas, a saber, *saltos*, *furos*, etc. Esta última noção é freqüentemente exercitada nos cursos de Cálculo. No entanto, uma questão poderia ser aqui interposta:

A função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, é contínua? Sem dúvida, a resposta seria sim. No entanto, $\{(0, y);\ y \in \mathbb{R}\}$ define um assíntota vertical no gráfico de f que gera uma contradição com esta última noção de continuidade.

Outra questão desta atividade perguntava: *nos livros de Cálculo aparece freqüentemente uma seqüência de símbolos da forma* $\lim_{x \to a} f(x) = L$. *Como você traduziria essa forma simbólica para a linguagem natural?*

(LE2$_{TAL}$) Limite de f(x) (função) com x tendendo a "a", ou seja, pontos próximos de "a", é igual a L que é o ponto para onde f(x) tenderia.

(LE2$_{PED}$) Ao explicar tal simbologia a uma pessoa que não conhecesse seu significado, diria: "por exemplo: o que vai acontecendo com sua idade a medida que o dia de hoje se aproxima do seu aniversário?"

Ainda na mesma atividade, foi perguntado se a existência ou não do limite num dado ponto de uma função f dependia do domínio e do contradomínio de f. As respostas foram:

(LE3$_{TAL}$) Do domínio não pois quando o ponto a for um ponto em que não esteja definida a função, isso não a impede de ter limite pois o que importa não é o ponto em si mas suas laterais. Do contradomínio também não mas não sei explicar porque penso assim.

(LE3$_{PED}$) Depende. Veja os exemplos. *[Paulo esboça um gráfico de uma função f, que não está definida no ponto 2 e possui limites laterais diferentes neste ponto]* Não existe $\lim_{x \to 2} f(x)$ pois 2 não pertence ao domínio de f. Já o contradomínio também influi, pois caracteriza a definição de ϵ e δ (por intervalo).

Consideremos, por um momento, apenas o aspecto comunicativo das compreensões dos estudantes materializado nas respostas acima. Note-se que o tipo de atividade escrita que induziu a emergência de tais compreensões não pode ser considerado comum nas aulas de Cálculo. O que quero sugerir aqui é que ainda que à escrita coubesse apenas um papel comunicativo de compreensões matemáticas no sentido aluno(a) $\to$ professor(a), sua importância já poderia ser assegurada no contexto educacional destacado na presente pesquisa.

Na seqüência do episódio, o(a) leitor(a) notará a “proximidade” entre as compreensões materializadas previamente na forma escrita e aquelas emergentes das interações com base na oralidade e na informática durante a discussão da derivabilidade da função supra-referida. Considerando que o conceito de derivabilidade de uma função f é o foco da questão proposta, seguem abaixo as respostas escritas dadas por Pedro e Talita à seguinte pergunta:

> Como você compararia os conceitos de continuidade e derivabilidade? Explique.
>
> **(DE1$_{PED}$):** Uma função para ser derivável precisa ser contínua. Portanto o fato dela ñ ser contínua automaticamente implica em ñ ser derivável. Portanto:
> Diferenciável $\rightarrow$ contínua
> Ñ contínua $\rightarrow$ ñ derivável
> Contínua $\rightarrow$ diferenciável (falso)
>
> **(DE1$_{TAL}$)**: Para uma função ser derivável ela deve ser contínua, porém isso não significa que se ela é contínua ela é derivável. Ela pode ser contínua porém não derivável. Geometricamente para se obter a reta tangente a um ponto temos que ter uma curva contínua pois senão teríamos várias derivadas em um certo ponto. Ex.

As compreensões destacadas anteriormente sobre os conceitos de limite e continuidade são compatíveis com suas compreensões sobre derivabilidade e reforçam uma tendência de construírem uma associação expressiva entre os conceitos em pauta e algumas características de determinadas representações gráficas destes conceitos. Conforme já anotado, a descontinuidade é associada a *saltos ou lacunas* e, de maneira análoga, limite é associado à *proximidade, pontos próximos ou laterais de um ponto*.

Especificamente quanto à derivabilidade de f, D2$_{TAL}$ é explícita em associar o conceito à ausência de uma característica peculiar no gráfico da função, a saber, “*fazer uma ponta”*, reforçando-se, portanto, a identificação já sugerida entre uma **função** e seu **gráfico**, isto é, entre uma função e uma possível representação pictórica desta função num sistema de eixos cartesianos.

Continuemos, agora, com a discussão sobre a derivabilidade da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases} .$$

Talita: *[escrevendo numa folha]* Sabe resolver isso?

Pedro: ($F1_{PED}$) Porque aqui o problema...

Talita: ($F1_{TAL}$) Posso falar que zero multiplicando qualquer coisa dá zero?

Esta pergunta ($F1_{TAL}$), ainda que pareça descontextualizada, sugere que Talita poderia ter pensado em fazer x = 0 em $x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)$. Embora a impossibilidade de uma tal substituição fosse evidente, é possível que ela a tenha considerado visando "contornar" a singularidade f(0) = 0. Ademais, em outro contexto, dificilmente ela teria dúvida de que a multiplicação de zero por qualquer número resulta em zero.

O mesmo aconteceu com Pedro: f(0) = 0 parece ser entendida como uma "perturbação" ($F1_{PED}$: Porque aqui o problema...) na definição da função.

Pedro: Hum...Essa função aqui, ó... Porque a seno, ela é uma função que ela, ($D1_{PED}$) a sen(1/x) ela tem um movimento muito meio que caótico. Então, isso vai atrapalhar na hora da derivada. Porque ela, ($L1_{PED}$) no limite, ela não vai tender para um ponto só... Ela vai fazer *[Pedro movimenta o dedo indicador para expressar um movimento ondulatório]*

Talita: Ah, é aquela que... É aquele assim, e assim, *[**Talita** repete o movimento ondulatório com o dedo]* faz tudo junto, faz assim, tudo pintado.

Pedro: Isso. Então, não, ($D2_{PED}$) ela não é derivável, né? Justamente porque neste interv... o x^2sen (1/x) deixa ela caótica perto do zero.

Talita: (D3$_{TAL}$) Ela não fica certinho perto do zero. Então ela pode ser zero porque tá falando que é zero, mas, na verdade, ela fica *[faz um movimento ondulatório com o dedo].*

Parece claro a ambos que a derivabilidade será comprometida se o gráfico tiver "bicos", "pontas", se tiver um "comportamento caótico" ou "não ficar certinho". Ambos parecem continuar se apoiando em imagens gráficas para construírem seus argumentos, ainda que Talita pareça um pouco mais "dependente" dessas imagens (cf. D3$_{TAL}$). De todo modo, a associação entre *função* e sua *representação gráfica* num sistema de eixos cartesianos é evidente. Como a função dada parece ter este *comportamento caótico*, a conclusão, a princípio, é que f não é derivável. Além disso, o silêncio sobre derivabilidade local versus derivabilidade global se mantém.

Na seqüência Pedro pede que Talita conclua escrevendo: **"Ah, coloca que, ah..., a função apresenta um movimento caótico perto do zero, o que impossibilita a derivada".**

A conclusão a que chegaram foi coerente com as compreensões que ambos já tinham materializado em seus escritos. É bastante provável que a mesma conclusão seria inferida a qualquer outra função cuja representação gráfica caracterizasse algum "movimento caótico" em uma ou em mais regiões deste gráfico. O que quero destacar aqui, no entanto, não é uma dada compreensão de um conceito específico, mas sim a compatibilidade entre compreensões representadas na escrita e aquelas que efetivamente emergiram "na prática".

Na continuação do episódio, agora com o CAS à disposição, a compatibilidade sugerida será reforçada com novos dados destacados dos escritos de ambos. Vejamos como se desenvolveram estas interações:

Talita: (D4$_{TAL}$) Deriva ela.

Este imperativo de Talita, logo no início, sugere que a derivação poderia ser efetuada num ato único, globalmente sobre a função, ou seja, embora suas falas anteriores apontem o caráter local da continuidade (CE1$_{TAL}$, C2$_{TAL}$), a continuidade como condição necessária para a derivabilidade (C1$_{TAL}$), e a noção de que um *mau comportamento* do gráfico da função poderia prejudicar sua derivabilidade (D3$_{TAL}$), a derivação não parece ser naturalmente entendida também como uma operação local (D4$_{TAL}$).

Neste ponto, vejamos o que ela escreveu sobre os conceitos de *derivada* e de *função derivada* em seu questionário individual:

> **DE2**$_{TAL}$: “Derivada é o coeficiente de inclinação da reta tangente.”
>
> **DE3**$_{TAL}$: “A função derivada é a função que me resta depois de eu fazer a derivação de uma outra função. Na verdade, para mim, derivada e função derivada se confundem e eu não consigo distinguí-las ainda...”

Há aqui claramente uma dificuldade de Talita em relacionar a noção de **derivada** e a de **função derivada**. Antes de analisar esta dificuldade, notemos que pode ser sintomático o fato de ela ter escrito de maneira genérica em DE2$_{TAL}$, sem se preocupar em detalhar melhor sua compreensão. Seria, entretanto, uma imprudência inferir que ela não tivesse ciência do caráter local do conceito de reta tangente a um dado ponto de uma curva, pois:

> **DE4**$_{TAL}$: “Reta tangente a uma curva é a reta que cruza apenas uma vez, em apenas um ponto, uma curva.

O verbo “cruzar” pode, a princípio, sugerir retas secantes e não tangentes. Isso, no entanto, parece improvável. Na mesma atividade escrita, quando solicitada a comparar continuidade e derivabilidade, ela escreve “a” reta tangente. Além disso, como complemento à sua resposta, ela esboça um contra-exemplo gráfico que praticamente descarta a possibilidade de ela estar confundindo secantes com tangentes.

> **DE5**$_{TAL}$: “Geometricamente para se obter a reta tangente a um ponto temos que ter uma curva contínua pois senão teríamos várias derivadas em um certo ponto.”

Para efeito de comparação, Pedro escreveu:

> **DE2**$_{PED}$: “Reta tangente é uma reta de inclinação f ’(p) que toca a curva f no ponto (p, f(p)).

Especificamente sobre o conceito de derivada, a interpretação como coeficiente angular de uma reta tangente a um ponto de uma curva predominou fortemente na investigação até o final e será objeto de uma análise independente deste episódio. Dentre os oito participantes, apenas Pedro, respondendo a seu questionário individual, apresentou uma compreensão dinâmica do conceito. Segundo ele:

> **DE3$_{PED}$**: "Derivada é uma maneira de se comparar a taxa de variação entre 2 grandezas em uma função, quando a diferença entre essas grandezas se aproxima de zero."

E sobre função derivada:

> **DE4$_{PED}$**: "Nos é útil conhecer uma fórmula que nos dê a derivada de qualquer ponto de uma função. A esta fórmula chamamos de função derivada."

Voltando à questão local x global, a preocupação de Talita, descrita acima, em verificar que o gráfico de f "não tivesse ponta" (D1$_{TAL}$) para que a função fosse derivável sugere uma clara percepção do caráter local da derivada, **embora apenas sob o ponto de vista gráfico.** Vejamos sua resposta à seguinte questão da atividade escrita sobre Derivadas:

> Caso você tenha alguma dúvida sobre o conceito de derivada, descreva essa dúvida.

> **DE6$_{TAL}$**: Se no cálculo da derivada eu obtenho o coeficiente angular da reta tangente, quando eu derivo uma função cúbica, eu tenho uma função quadrada, como isso é o coeficiente angular?

DE6$_{TAL}$ é um exemplo da escrita sendo como veículo de comunicação de uma dúvida. No entanto, mais do que uma dúvida, a pergunta carrega um conflito sobre o próprio conceito de derivada.

Aqui eu proponho a seguinte questão: as compreensões de derivabilidade de uma função f estariam condicionadas e/ou dependentes apenas de eventuais informações gráficas de f? Os movimentos e as compreensões emergentes até aqui sugerem que sim e, neste caso, já sinalizam a emergência de conflitos, dada a singularidade da função em pauta.

Ao contrário de Talita, Pedro não parece estar em conflito no que se refere aos conceitos de derivada e de função derivada. Sobre esta última, ele é bem claro: é uma ***fórmula*** (DE4$_{\text{PED}}$), ou seja, uma fórmula que fornece a derivada, segundo ele, "**em qualquer ponto de uma função**".

Para ambos, a interpretação de derivada como um limite apareceu apenas em algumas respostas. Por exemplo, na seguinte questão proposta no questionário individual sobre o conceito de derivada:

Considere a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por **f(x) = x$^{1/3}$**. Esta função é derivável? Explique. Em caso positivo, qual seria a **função derivada** de f ?

DE5$_{\text{PED}}$: Sim, pois os limites laterais $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x+h)-f(p)}{h}$ e $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x+h)-f(p)}{h}$ dão os mesmos valores.

No caso, a derivada de f(x) = x $^{1/3}$ é $\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

DE7$_{\text{TAL}}$: $f'(x)=\lim\limits_{x\to p}\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}$ = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(p+h)-f(p)}{h}$ = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(p+h)^{\frac{1}{3}}-p^{\frac{1}{3}}}{h}$ = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{p+h}-\sqrt[3]{p}}{h}\cdots$ *[não conclui]*

A derivada de f é:

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} \;=\; \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \;=\; \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$$

O fato de ambos terem trazido a definição de derivada à cena não pareceu sugerir mais do que uma mera formalidade, uma vez que esta definição não foi utilizada para analisar a derivabilidade de f no ponto crítico x = 0, um dos objetivos centrais da questão. Assim, o movimento seguinte parece ter sido “mecânico”: aplicar uma regra de derivação globalmente sobre f ($DE5_{PED}$ e $DE7_{TAL}$).

Vale a pena aqui destacar que todos o(a)s demais participantes abordaram o problema de maneira similar a Pedro e Talita e, com exceção de Edson, que afirmou não ter chegado a uma conclusão, todos igualmente apontaram a derivabilidade de f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por **$f(x) = x^{1/3}$**, sem maiores comentários, restrições ou observações.

Quanto à impossibilidade de x ser igual a zero na “fórmula” da derivada, isto sequer foi cogitado por Pedro e Talita (nem tampouco pelo(a)s demais participantes). Isto sugere que o trânsito entre os aspectos locais e globais da derivabilidade não fazia parte do escopo de seus movimentos naturais na abordagem ao conceito. De todo modo, se considerarmos que Talita se dizia confusa ao comparar os conceitos de Derivada e Função Derivada, e que Pedro entendia a Função Derivada como uma fórmula, os desenvolvimentos e os resultados apresentados parecem bastante coerentes.

Até agora, neste episódio, foram explicitadas, diretamente, algumas compreensões de *Continuidade,* de *Limite,* de *Retas Tangentes,* de *Derivada,* de *Função Derivada* e de *Derivabilidade*. O conceito de *Função* apareceu apenas implicitamente. A discussão dos alunos, a seguir, permitirá a(o) leitor(a) acompanhar seus raciocínios e suas dificuldades no trato com este conceito. Ao final da discussão, as compreensões escritas de *função* serão explicitadas e chamadas a integrar o episódio.

Relembremos a questão original: investigar a derivabilidade de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ para } x \neq 0 \\ 0 \text{ para } x = 0 \end{cases} .$$

Talita: ($D5_{TAL}$) Será interessante antes de derivar a gente plotar o gráfico?

Pedro: Tá.

Talita: Acho que ($D6_{TAL}$) fica mais prático de visualizar, né?

Talita revela, mais uma vez, sua preferência (ou necessidade) de se apoiar nas informações gráficas relativas à função para argumentar sobre a derivabilidade da função ($D5_{TAL}$, $D6_{TAL}$)

 Neste sentido, os recursos do CAS permitem testar uma conjectura e obter *feedback* praticamente imediato. Particularmente no caso da função dada, suas peculiaridades tornariam qualquer outra abordagem que adotassem para o esboço de seu gráfico um exercício demorado e bastante suscetível a erros. Além disso, a questão em pauta não solicitou especificamente uma representação gráfica da função, mas sim uma investigação sobre a derivabilidade de f.

Pedro: ($F2_{PED}$) Opa. *[...]* Qual é a função? *[Pedro começa a digitar no computador].* Hum... Mas o duro é que tem isto aqui, né? *[Referindo-se às duas sentenças que definem a função].*

Talita: ($F2_{TAL}$) Mas a gente faz isso aqui. *[Referindo-se à primeira sentença que define a função].*

Pedro: ($F3_{PED}$) Tá.

Talita sugere esboçar o gráfico só da primeira sentença e Pedro concorda.

Talita: ($F3_{TAL}$) O zero não está definido nesta função porque senão seria sen(1/0); não existe.

$F2_{PED}$, $F3_{PED}$, $F2_{TAL}$ e $F3_{TAL}$ reforçam a sugestão de que há dificuldade de ambos para lidar com a função dada.

 É possível também que, neste caso, a dificuldade tenha sido induzida pelo Sistema, pois como entrar com f no CAS? Ainda assim, é visível o desconforto com a função dada. A questão agora é visualizar o gráfico de $x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)$. O objetivo parece que continua o mesmo: analisar a derivabilidade de f <u>pelo seu gráfico</u>.

Pedro: Com o x indo de que valor a que valor? *[referindo-se à amplitude do gráfico no eixo x, atributo opcional do MAPLE.]*

Talita: Coloca de – 4 a 4.

Pedro: - 4 a 4? A sintaxe tá correta, né Antonio?

Pesq: Perfeita.

[Pedro continua a digitação e gera o gráfico abaixo]

```
plot(sin(1/x)*x^2,x=-4..4);
```

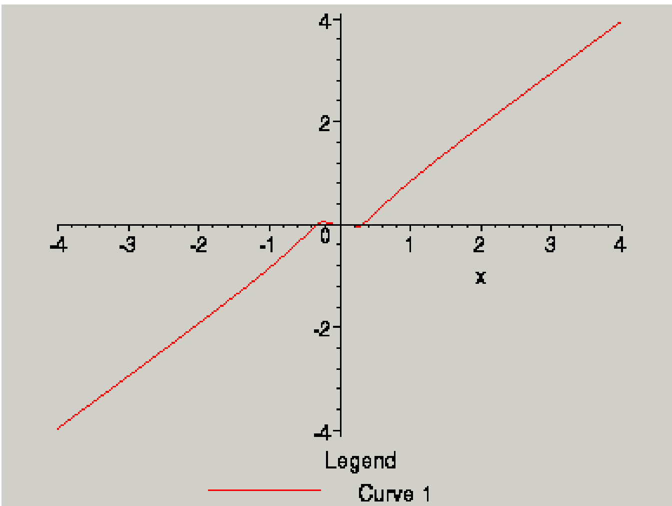


Gráfico 1

Pedro: Vamos tentar diminuir o intervalo.

Talita: Hã, hã. De –1 a 1?

Pedro: Não, menos. Tá vendo o que acontece, ó...

Talita: De - 0,2 a 0,2.

*[**Pedro** faz rapidamente a edição com o novo intervalo e obtém o gráfico abaixo]*

```
plot(sin(1/x)*x^2,x=-0.2..0.2);
```

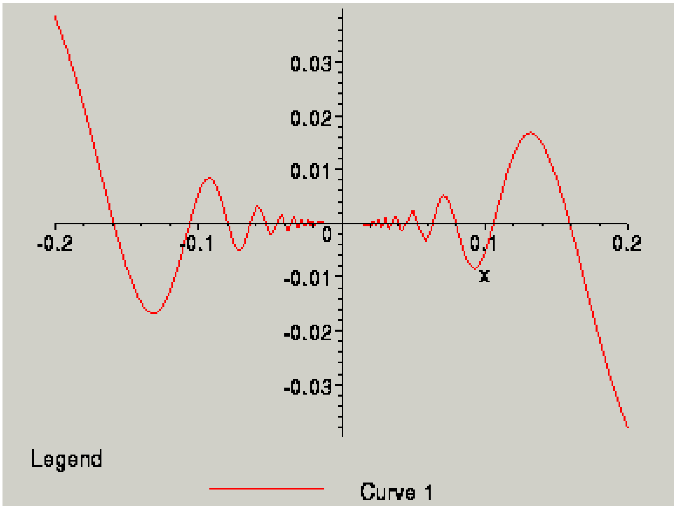


Gráfico 2

Pedro: Viu, ó? É aquilo que a gente suspeitou mesmo.

 Com a geração do gráfico 2, o CAS confirma a conjectura — contida em $D1_{PED}$ — proposta por Pedro ainda durante a análise do item i) da questão, sobre o comportamento da função proposta.

Talita: Hã, hã.

Pedro: Ela não vai ter... Vamos tentar um intervalo menor.

Talita: ($F4_{TAL}$) Ela fica muito próxima do zero, né, mas ela vai diminuindo, na verdade ela vai ficando cada vez mais caótica.

Talita: Diminui mais. Coloca 0,005.

[Pedro acata a sugestão e gera novo gráfico]

```
plot(sin(1/x)*x^2,x=-0.005..0.005);
```

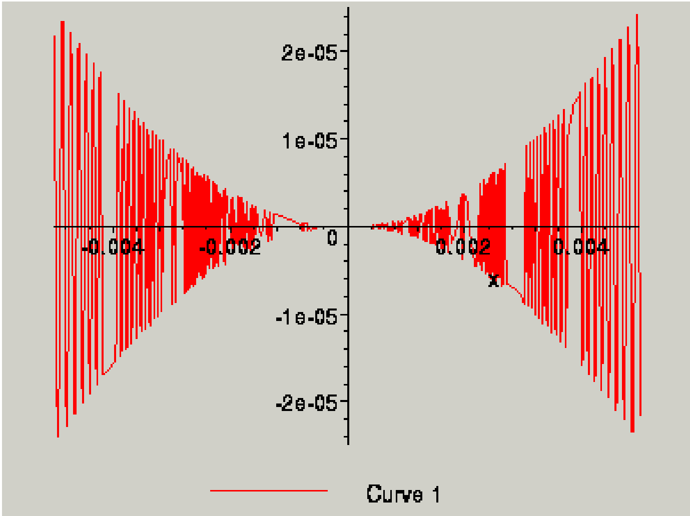


Gráfico 3

Pedro: Agora ficou muito pequeno.

 O gráfico 3 ilustra um tipo de "aberração" que pode ocorrer na representação gráfica de determinadas funções por meio de um CAS. Neste caso particular, o problema foi gerado devido aos valores muito pequenos atribuídos a argumentos opcionais específicos da função *plot* — no caso, o intervalo [-0,005; 0,005]. Dependendo do contexto, o impacto dessas imagens pode interferir de maneira mais ou menos ostensiva nas compreensões do(a) estudante. No caso do gráfico 3, a impressão é que a imagem levou a dupla a concluir que a abordagem computacional tinha chegado a um limite em termos de investigação do comportamento de f numa vizinhança da origem.

Talita: (D_{TAL}) Então, tenta fazer a derivada.

Talita, novamente, sugere um "ataque" global à função via derivação.

Pedro: A derivada? Faz assim... ($D3_{PED}$) Estranho, porque parece que se você usar as técnicas de derivação parece que sai.

*[**Pedro** entra com a primeira sentença da definição de f no CAS para calcular sua derivada]*

```
diff(sin(1/x)*x^2,x);
```

$$-\cos\left(\frac{1}{x}\right)+2\sin\left(\frac{1}{x}\right)x$$

O procedimento ilustra uma das aplicações possíveis mais imediatas do CAS num curso de Cálculo Diferencial: A aplicação do operador **diff** (diferenciação) sobre uma dada "função". O(a) leitor(a) poderia aqui objetar que uma tal abordagem é puramente mecânica. Mas, estritamente em termos de compreensões sobre o conceito de derivada, em que sentido, uma abordagem via lápis e papel no cálculo de uma derivada deixaria também de ser mecânica?

Talita: ($D7_{TAL}$) Ele sai com a derivada!

A surpresa de ambos ($D7_{TAL}$), ($D3_{PED}$) é justificável. Ora, se o gráfico de f apresenta um "mau comportamento", como é possível existir a derivada de f ? Note-se, também, que em ($D7_{TAL}$) Talita não parece estar consciente da dualidade Derivada X Função Derivada, ou seja, a derivada é uma "fórmula" como, aliás, Pedro já havia afirmado.

Parece claro que a "moldagem" do conflito gráfico x algébrico emergente — particularmente no caso de Talita, com sua demonstração de surpresa — recebeu uma substancial contribuição dos *feedbacks* do CAS, isto é, estes elementos parecem ter interferido nas compreensões prévias dos estudantes de uma maneira não apenas ostensiva como também qualitativamente diferente do que se esperaria das mídias tradicionais.

A resposta do sistema provavelmente induziu Pedro a concluir que o CAS apenas fez o que ele faria: aplicar as regras de derivação sobre $x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pedro: Entendeu? Mas, ..., não, ($D4_{PED}$) se você usar a Regra do Produto aqui em cima, ele sai, ó. Entendeu? Mas, tudo bem, isso não quer dizer nada.

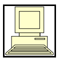
Talita: (D8$_{TAL}$) Mas se usar só conta, você vai achar que existe.

Pedro: Oi ?

Talita: Se você usar só conta algébrica, assim, só prá..., você vai achar que existe a derivada.

Talita claramente demonstra continuar em conflito, ou seja, a "conta algébrica" não parece compatível com a "imagem gráfica" gerada pelo CAS.

Pedro: O quê que eu vou fazer? Eu vou plotar essa função.

 Pedro decide plotar a "função derivada" obtida acima. O movimento sugere uma exploração do CAS para verificar se o gráfico respectivo pode oferecer alguma pista sobre a derivabilidade de f. Note-se que dificilmente uma tal iniciativa seria tomada se o Sistema não disponibilizasse os recursos e a facilidade para a exploração pretendida. Afinal, o esboço tradicional de gráficos de funções como $-\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2\sin\left(\frac{1}{x}\right)x$ não pode ser considerada uma atividade rotineira no contexto de um curso tradicional de Cálculo inicial.

```
plot(-cos(1/x)+2*sin(1/x)*x,x=-4..4);
```

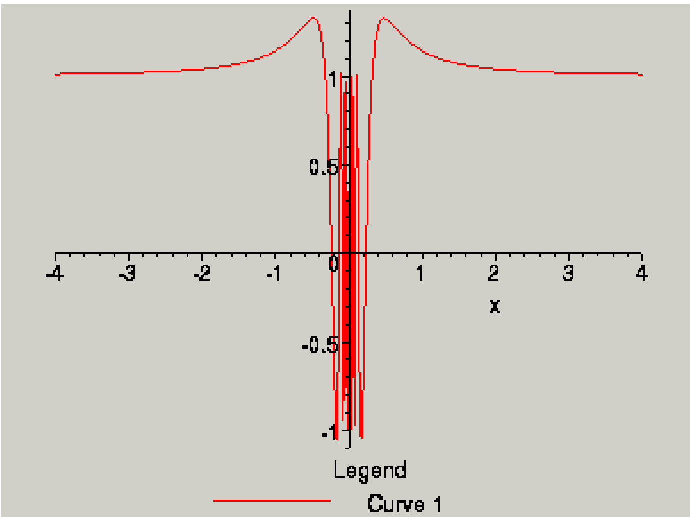


Gráfico 4

Pedro: (D5$_{PED}$) Viu? Continua estranho, aí, ó...

O fato de o Sistema ter não apenas calculado a "Função Derivada" de f como esboçado o seu gráfico (de uma "forma estranha") parece continuar interferindo nas compreensões de Pedro sobre o conceito em pauta. (D5$_{PED}$)

Talita: (D9$_{TAL}$) Mas ele dá a derivada! Isso é que estranho!

Pedro: Só se eu colocar o seguinte, ó... Não, Tali, isso aqui, ele não deve ter um valor muito bem definido aqui. Ah, não sei... Pera aí... Porque, por exemplo, (D6$_{PED}$) se isto aqui é a derivada, é a inclinação da reta tangente. A gente pode tentar traçar a reta tan... Quer ver? ó. Eu vou traçar o gráfico, ó.

Pedro parte para uma nova abordagem, mas a idéia de valer-se das imagens gráficas geradas pelo CAS para tirar conclusões sobre a derivabilidade permanece.

Pedro: Vai ter que dar uma reta aqui.

```
plot([sin(1/x)*x^2,sin(1/0.1)*(0.1)^2+(-cos(1/0.1)+
2*sin(1/0.1)*0.1)*(x-0.1)],x=-0.2..0.2);
```

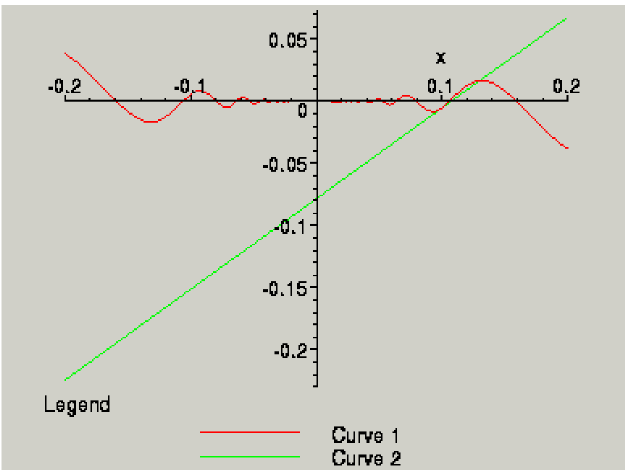


Gráfico 5

Utilizando o CAS, ele digita a equação da reta tangente no ponto x = 0,1 do gráfico de f e plota, no mesmo plano cartesiano, os gráficos de f e desta tangente. Este é um exemplo do Sistema sendo utilizado para testar (ou confirmar) uma conjectura.

Talita: (D10$_{TAL}$) Deu certo, ó! *[risos]*

Pedro: (D7$_{PED}$) Está me deixando intrigado... *[pausa]*

Certamente o(a) leitor(a) já deve ter notado o quanto a interação com o CAS induz movimentos exploratórios, esclarecimentos, conflitos, sugerindo, assim, que a interação entre a interface humana da consciência e a tela do monitor parece interferir em compreensões prévias. É o que sugerem D10$_{TAL}$ e D7$_{PED}$.

Pedro: Vamos fazer diferente. Quer ver, ó?

Talita: (D11$_{TAL}$) A deriv..., a derivada existe , agora....

(D6$_{PED}$), (D10$_{TAL}$), (D7$_{PED}$) e (D11$_{TAL}$) reforçam a sugestão de que o conflito sobre a derivabilidade de f continua. A associação de derivadas com retas tangentes e seus coeficientes angulares, no entanto, é clara, como, de resto, já fora detectado em seus escritos anteriores (D5$_{TAL}$) e (D3$_{PED}$).

Talita: (D12$_{TAL}$) Tenta fazer essa reta no ponto zero.

A abordagem sugerida por Pedro (de verificar a existência de tangentes no gráfico de f) parece ter induzido Talita a focalizar seu olhar no “local do problema” e sugerir D12$_{TAL}$. Como para ambos não há dúvida de que o coeficiente angular da reta tangente a um ponto do gráfico de uma função f representa a derivada de f e a informação gráfica tinha sido particularmente problemática numa vizinhança do ponto zero, (D12$_{TAL}$) era esperada.

Pedro: É o que eu estou tentando. (F4$_{PED}$) Estou substituindo o zero nas funções.

Pedro: ($F5_{PED}$) Mas aí no ponto zero não pode por causa do seno que é de 1/x.

Pedro: ($D8_{PED}$) É..., no zero ela não pode ter derivada. Claro que não vai ter derivada por causa disso aqui, ó *[referindo-se à impossibilidade de denominadores iguais a zero].*

Novamente, a forma da regra de f causa um embaraço. Em seus escritos, Pedro tinha afirmado que a função derivada é uma *fórmula* que fornece a derivada num dado ponto ($D5_{PED}$). É possível que esta visão possa ter contribuído para reforçar a dificuldade. ($D8_{PED}$).

Talita: ($F6_{TAL}$) É, essa função diz que é zero para x igual a zero. *[pausa]* Entendeu?

É razoável a hipótese de que somente a esta altura é que Talita (e, provavelmente, Pedro) tenha focado sua atenção designadamente sobre a condição f(0) = 0. A abordagem por tangentes talvez tenha contribuído para isso. Mas, por pouco tempo. Isto, no entanto, não se configurará numa surpresa se supusermos, como defenderei mais abaixo, que esses “acidentes” na definição de uma função, não estão “na pauta” de um(a) estudante que está se iniciando no Cálculo.

Talvez motivado pela lembrança ($F6_{TAL}$) de Talita, Pedro aborda a questão da continuidade:

Pedro: Então, se o limite dessa função aqui, ó, x^2sen(1/x) ...

Talita: For zero...

Pedro: ($C1_{PED}$) For zero no ponto zero, então essa função é contínua, ($D9_{PED}$) ela..., normalmente, ela é derivável normalmente.

É claro que Pedro sabe que continuidade não é condição suficiente para derivabilidade, mas, provavelmente, a ansiedade em resolver o problema o induz a fazer essa afirmação ($D9_{PED}$).

Talita, neste momento, recorre à sua tradicional compreensão associada aos gráficos e faz o alerta:

Talita: (D13$_{TAL}$) A não ser se der ponta.

Pedro: É, vamos fazer esse limite.

Pedro: É assim que faz limite, né, Antonio?

Pesq: Isso. Limit.

Pedro: Se der zero, quer dizer que a função é derivável. Concorda?

 Pedro repete a afirmação feita em (D9$_{PED}$) e o recurso de cálculo de limites de funções pelo *Sistema* permite investigar se $x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)$ possui limite em x = 0 (e, em caso positivo, o seu valor). Este é um outro exemplo que ilustra claramente a idéia de "pensar com a mídia". A partir deste momento, a rede de significados que estava sendo acionada pelos estudantes possivelmente "receberá" novas interferências isto é, a certeza da existência e o valor do limite de f em x = 0. O(a) leitor(a) já deve ter notado que dificilmente eles teriam chegado à tais conclusões sem a participação do CAS, uma vez que a abordagem clássica à questão seria indireta, ou seja, por meio de um teorema (Se g é limitada e lim k = 0 num ponto *a* então lim g.k = 0 no mesmo ponto.), que, provavelmente, ainda não estaria participando da rede de significados que está sendo exercitada.

```
limit(sin(1/x)*x^2, x=0);
```

$$0$$

Pedro: Humm... E agora, hein? *[risos]*

Talita: (C2$_{TAL}$) Ela, pelo menos, é continua. (D14$_{TAL}$) É uma coisa daquelas pontas que eu falei àquela hora, que não pode. Precisa representar pontas em várias exatamente. A função seno, ela é assim *[faz um movimento ondulatório com o braço],* então como vai representar ponta?

É a certeza da existência do limite e o conhecimento do seu valor — elementos obtidos do CAS — que permite à Talita inferir $C2_{TAL}$, trazendo, portanto, mais um elemento para sua rede de significados.

Recorrendo, mais uma vez, à sua interpretação gráfica da derivabilidade, ela revela, também, uma compreensão de "suavidade" da função seno que é incompatível com a imagem de "pontas" ou "bicos" em seu gráfico. A compreensão de Pedro, no entanto, é diferente:

Pedro: Ah, é. ($D10_{PED}$) Aquela função, ela vai representar pontas, ó. Por isso que ela não vai ser derivável.

Talita: Será? *[apontando para o gráfico da função]* ($F7_{TAL}$) Sempre não são curvas que estando próximas parecem pontas?

A qualidade das representações gráficas geradas por sistemas computacionais depende de vários fatores. Dentre estes estão o *design* do software, as características do *hardware* gráfico, a capacidade do processador, a capacidade de memória volátil e a resolução e qualidade do monitor. Em geral, o(a)s engenheiro(a)s projetam os *softwares* de maneira a compatibilizá-los com as potencialidades de um *hardware* padrão. É inevitável, portanto, que a relação custo/benefício na produção desses sistemas pese mais do que eventuais considerações educacionais. Além disso, não devemos nos esquecer que os CAS são, a princípio, projetados para servirem à Matemática e não propriamente à Educação Matemática. De todo modo, a pergunta $F7_{TAL}$ acima ilustra um tipo de questionamento que dificilmente emergiria em um ambiente que não dispusesse dos recursos do presente experimento.

Pedro: Não é, quer ver, ó? ($F6_{PED}$) Quanto mais a gente aproxima, mais caótico fica. Viu?

Talita: Sim, mas está muito pequenininho. ($D15_{TAL}$) Será que chega a ser ponta?

Pedro: (D11$_{PED}$) Você pergunta se chegam a ser bicos, né?

Talita: Depois, vamos tentar pegar um que não seja muito pequeno?

[Pedro retorna ao gráfico]

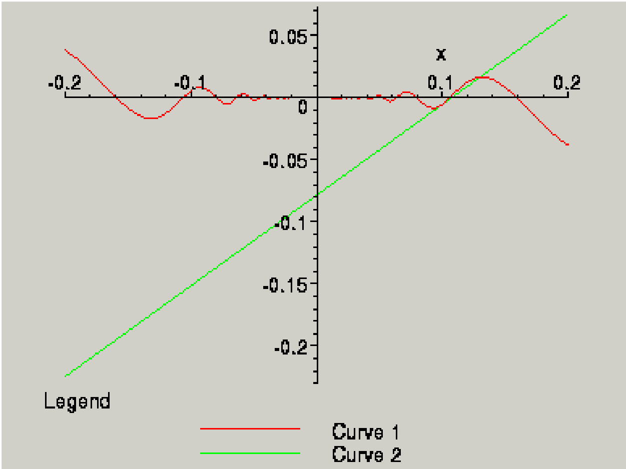


Gráfico 5

Talita: (D16$_{TAL}$) Mas ele faz existir esta reta tangente! Agora se você tem um ponto em que é infinito...

A interferência dos *feedbacks* gráficos (e algébricos) do CAS sobre as compreensões de ambos são cada vez mais evidentes. D16$_{TAL}$ é emblemático: o sistema "materializa" uma tangente.

Talita: (D17$_{TAL}$) Como que era aquele negócio prá achar a derivada no ponto tal? Você acha a derivada normal e depois coloca no ponto, ou você...

Pedro: (D12$_{PED}$) Não, você acha a derivada normal e põe no ponto.

Talita e Pedro parecem ter se lembrado do caráter local da derivada, mas agora, com um "olhar algébrico", continuam vinculando o cálculo da derivada de uma função f num dado ponto p à existência de uma "derivada normal" representada por uma fórmula sobre a qual se pode substituir o valor x = p.

Talita: É o que a gente está fazendo?

Pedro: É. Que foi isso aqui, ó. *[Pedro volta à expressão da derivada e confere]*

$$-\cos\left(\frac{1}{x}\right)+2\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)x$$

Talita: (D18$_{TAL}$) *A gente teria que achar um ponto desses aqui, uma pontinha.*

D18$_{TAL}$ é um outro exemplo de como o Sistema poderia interferir nas compreensões de Talita. Se o gráfico gerado tivesse exibido "uma pontinha" suficientemente convincente, a conclusão seria pela não derivabilidade de f em zero.

Pedro: *[voltando à questão proposta]* Então, utilizando o computador, o que você diria?

Talita: *[risos]* (D19$_{TAL}$) *E* agora eu não sei se é derivável ou não.

Pedro: (D13$_{PED}$) Eu também não sei agora.

Pedro: Porque fala assim, ó: (*C*2$_{PED}$) pelo limite a gente percebe que a função é contínua. Porque a gente fez limite da função e a função deu o valor que ela assumiu no ponto; que f(x) é 0 para x = 0. Então f(x) é contínua. (D14$_{PED}$) Agora a gente não sabe se ela apresenta pontas. Se ela apresentar pontas ela não é derivável, né ?

[pausa - escrita]

Pedro traz à cena o fato de que f(0) = 0, desviando, um pouco, a atenção que estava totalmente dedicada à $x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)$. É possível, no entanto, que isto tenha acontecido apenas porque ele quis argumentar sobre a continuidade de f em x = 0, decorrente da existência e do valor do limite, respectivamente garantida e calculada pelo CAS.

Pedro: Então, (D15$_{PED}$) me parece que esta função tem pontas. Então não é derivável. Porque, ó, vamos fazer um teste. Vamos ver se ele consegue derivar |x|.

[Ele entra com a função valor absoluto e solicita sua derivada]

```
abs(x);
```

$$|x|$$

```
diff(abs(x),x);
```

$$\mathrm{abs}(1, x)$$

Pedro: Que reposta foi essa Antonio?

Este resultado também me pegou de surpresa. O manual do Maple diz que a derivada de abs(x) é denotada por abs(1, x), isto é, signum(x) – a função que associa (sinal de x)1 para todos os números reais diferentes de 0 e é indefinida para x = 0. Sem discutir o significado de abs(1,x), eu questiono:

Pesq: Por que vocês estão querendo diferenciar essa função?

Pedro: A gente está dependendo deste resultado porque (D16$_{PED}$) a gente colocou uma função que a gente sabe que não é diferenciável. Se ele diferenciar, quer dizer que ele tem algum algoritmo que não verifica se a função é diferenciável ou não, simplesmente usa uma técnica que ele tem, <u>joga na função</u> e sai o resultado. Isto não implica — apesar dele ter achado a suposta derivada — que a função é derivável. Agora, se ele desse algum erro aqui então: olha, eu sei que a função não é derivável então não vou te dar nenhum resultado. Aí a gente poderia afirmar que aquela função seria derivável porque ela soltou a derivada daquilo.

Pedro faz uma abordagem bastante criativa à questão, entrando no Sistema com uma função que ele sabe de antemão ser contínua, mas não derivável (no ponto zero). A função modular é um dos exemplos mais citados para ilustrar este fenômeno. Note-se que esta iniciativa foi claramente induzida pela disponibilidade do CAS e pela vontade de Pedro de colocar o sistema à prova. A idéia foi explorar o CAS de uma maneira não prevista "no manual", isto é, a partir de uma função que ele já sabia não possuir a propriedade desejada, submetê-la a uma operação disponível no sistema e verificar se algum erro seria materializado na interface do monitor.

> **Talita**: Ou, então, desconfiar, bem desconfiado, que ela é derivável. Só que, no caso, ele apresentou uma derivada; só que a gente não está conseguindo provar que ela é derivável. ($D20_{TAL}$) A gente não está conseguindo nem visualizar ela prá falar se ela é ou não. E, aí ele deu o resultado. Talvez ele deu o resultado só como uma continha que ele tá fazendo. Ele não verifica se é contínua..., essas coisas que a gente verifica quando a gente faz.

Por $D20_{TAL}$, Talita reforça a sugestão de que, para ela, uma determinada característica visual do gráfico de uma função g é condição suficiente para garantir a derivabilidade ou não de g.

> **Pedro** *[apontando o cursor para o resultado]* Aqui me parece que ele deu o resultado de |x|, me parece... Então quer dizer que ($D17_{PED}$) ele usa algum procedimento interno e simplesmente calcula uma primeira derivada, né? Prá função dada. Então isso não implica necessariamente em ser derivável. Então é por isso que a gente prefere dizer na pergunta que ela não é derivável. Pelo gráfico, aparentemente, ela apresenta pontas, igual ao caso do |x|. Ela é contínua mas...

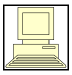
> **Talita**: ($F5_{TAL}$) Assim, eu não acho que ela apresenta pontas.

> **Pedro**: Cê não acha?

> **Talita**: ($D21_{TAL}$) ela não é derivável porque ela não encosta no zero. Ela nunca vai encostar no zero. Ela sempre vai ficar fazendo isso *[faz um movimento oscilatório rápido com o dedo]*. Nunca vai encostar no ponto zero. Então, mesmo quando eu tenho o ponto zero ali, ela fica fazendo assim *[repete o movimento anterior]*. Pode ser que ela seja contínua. Porque eu acho, eu acho que esse ponto é tão pequenininho. A gente sabe que o seno faz assim *[faz um movimento suave com o dedo, representando uma curva]*. A gente sabe que o seno não faz isso *[faz um movimento vertical com o dedo]*.

> **Pedro**: Repara aqui *[apontando para uma vizinhança do ponto zero]*. ($F6_{PED}$) Realmente seu raciocínio é pertinente. Olha esse eixo aqui *[x]*. Parece que ela não toca o eixo. Ela faz isso *[faz um movimento*

> *ondulatório com o cursor do mouse]* e sobe de novo. E quanto mais a gente vai se aproximando *[de 0]*, isso aqui vai se distanciando mais.

 A fala de Pedro em F6 sugere uma outra interferência direta do CAS em seu raciocínio: ele a utiliza como uma possível materialização gráfica de uma compreensão de Talita.

> **Talita**: Exatamente. Essa é a impressão que eu tenho. $F(6_{TAL})$ Mas em relação à pontas, eu acho que não tem pontas. Por que eu sei que o seno faz curvas. Por mais que sejam curvas muito próximas fazendo isso, eu sei que não chega a ser uma ponta. Eu sei que é curva.

A imagem que Talita construiu sobre a função seno parece bem sedimentada no que tange à suavidade de seu gráfico. Isto contribuiu, claro, para alimentar o conflito sobre a derivabilidade de f.

> **Pedro**: Coloca o raciocínio então *[para que Talita escreva].* Porque por ser ou não pontas, que a gente não sabe que seja, ou...
>
> **Talita**: Não, isso eu já coloquei.
>
> **Pedro**: Você colocou tudo isso?
>
> **Talita**: Coloquei. Por pontas ou pela continuidade.
>
> **Pedro**: Então vamos para a outra.

Pedro e Talita nem chegaram a abordar o item iii) pois havendo dúvidas na própria derivabilidade da função, eles provavelmente entenderam que não haveria porque começar a discutir como seria a função derivada de f.

5.2.3 Uma Análise Inicial do Episódio

Uma análise inicial do episódio sugere que os estudantes transitaram entre os conceitos envolvidos na questão e os articularam com razoável desenvoltura. Apesar disso, Pedro e Talita demonstraram dúvidas e conflitos na discussão. Uma questão, portanto, se põe:

Por que a derivabilidade da função dada não ficou esclarecida?

Embora este estudo não pretenda oferecer uma resposta definitiva à pergunta, ele visa sugerir algumas possibilidades, contribuindo, assim, para as respostas à segunda questão da investigação:

O que sugerem tais compreensões sob o ponto de vista da Educação Matemática no Ensino Superior ?

Uma resposta direta e imediata à questão acima formulada poderia simplesmente se fundamentar no fato da dupla de estudantes não ter trazido a *definição* de derivada (ou de derivada lateral) à discussão e, em particular, aplicá-la em $x = 0$. A partir desta constatação, o passo subseqüente natural à uma tal resposta seria advogar pela importância das definições em Matemática.

A meu ver, no entanto, a raiz do problema se localiza em outro ponto. Como pretender que o(a)s estudantes tragam a definição de derivada à cena se suas compreensões sobre o conceito de derivabilidade ainda não incorporaram flexibilidade suficiente para permitir a necessária fluidez no trânsito local x global ?

O trânsito entre aspectos locais e globais de um determinado conceito matemático dificilmente é feito sem acidentes e constitui uma das maiores dificuldades na aprendizagem do Cálculo. Esta opinião é corroborada por Rezende (2003, p. 325), que, em sua tese de doutoramento sobre as dificuldades de natureza epistemológica do Cálculo, a destacou dentre as cinco dualidades essenciais identificadas por ele na disciplina:

- Discreto/Contínuo
- Finito/Infinito
- Variabilidade/Permanência
- **Local/Global**
- Sistematização/Construção

O autor cita Petitot (1985a apud Rezende, 2003, p. 375) para localizar as raízes históricas da dualidade local/global:

> Até o fim do século XIX, a Geometria reduz-se essencialmente ao estudo de objetos geométricos imersos num espaço bi ou tridimensional. Os métodos utilizados são, por um lado, os métodos sintéticos herdados da tradição euclidiana e, por outro lado, os métodos analíticos e algébricos fundados no uso de coordenadas. Com a introdução do Cálculo Infinitesimal, as coordenadas permitem a análise das propriedades diferenciais dos objetos (equação das tangentes, das normais, estrutura dos pontos singulares, etc.). Assim aparecem os primeiros teoremas gerais sobre as curvas algébricas e a 'solidariedade' que existe entre sua estrutura local e global.

Continuando, apresenta duas justificativas para a ausência de considerações locais X globais nas versões iniciais do Cálculo, afirmando (REZENDE, 2003, p. 376, grifos nossos):

> - Uma primeira relacionada ao "bom" comportamento das curvas freqüentemente utilizadas nos cálculos de Newton e Leibniz; tais curvas eram, em geral, "bem comportadas" (no mínimo diferenciáveis) e, por causa disso, tal comportamento não suscitava questões de natureza local. Para a determinação local da tangente (da derivada) a propriedade da diferenciabilidade era assumida implicitamente pela característica global da curva.
>
> - Faltavam aos matemáticos dois conceitos fundamentais para que pudessem vislumbrar a íntima relação da dualidade local/global com o Cálculo que acabavam de "inventar"**: a noção de limite e o conceito de função**. De fato, **o conceito de função**, introduzido no núcleo semântico do Cálculo por Euler e Lagrange, **vai constituir junto com a noção de limite, a urdidura da nova estrutura do Cálculo**. O Cálculo começa, a partir de então, a se preocupar com questões essenciais da dualidade local/global, tornando-se, por sua vez, e cada vez mais, uma rede de significações e correlações entre os pólos dessa dualidade. Esta nova versão, impregnada de conceitos e resultados que estabelecem correlações entre os níveis locais e globais, constitui e representa parte substancial do conteúdo programático de um curso inicial de Cálculo normalmente ensinado em nossas universidades.

A gênese do Cálculo — de onde Rezende destaca alguns pontos de seu argumento — é freqüentemente alegada para sugerir inversões na execução do programa da disciplina. Assim, por exemplo, sugere-se que o conceito de *limite* seja explorado posteriormente ao de *derivada*, refletindo, portanto, a evolução histórica do Cálculo. Além disso, há posições defendendo que ele só apareça no momento da definição da derivada ou mesmo de que seja abolido, substituindo-o pelos infinitesimais da Análise Não-Standard, formalizada por Abraham Robinson no começo da década de 1960.

O problema é que qualquer que seja a visão adotada, sua implementação é sempre problemática dada à brutal compressão que a escala histórica da evolução dos conceitos tem que sofrer para que possa ser razoavelmente refletida na escala pedagógica. É óbvio que este não é um problema exclusivo da Matemática, mas o início da transição para a matemática superior, que ocorre no primeiro ano do curso, tendo o Cálculo como sua maior representante, é particularmente delicada, exigindo profundidade nas resignificações conceituais e rapidez no amadurecimento matemático. Não deve ser surpresa, portanto, a reação do(a) aluno(a) que busca uma defesa na estabilidade dos exercícios procedurais, ainda que, para ele ou ela, vazios de significado.

No que se refere aos aspectos pedagógicos do tema, Rezende (2003, p. 383) observa que, para os alunos, o conceito de derivada é:

> [...] identificado com a sua 'técnica' de derivação: primeiro deriva-se a função 'globalmente' – isto é, nos pontos em que ela está definida por alguma expressão analítica – depois verifica-se a existência de restrições." [...] Assim, pode-se dizer que, através da aplicação indiscriminada da 'técnica' de derivação, a derivada passa a ter para o aluno uma natureza 'global'. [...] Surge, assim, de forma camuflada, o seguinte dilema do curso normal de Cálculo: a derivada é um conceito local ou global? Em verdade, o grande dilema não é esse. Acreditamos que o aluno compreende a natureza local do conceito de derivada, bem como o de sua extensão 'natural' para o domínio global. A dificuldade se encontra na passagem de um para o outro.

O autor utiliza também a questão que originou este episódio, estabelecendo uma correlação entre a dificuldade de trânsito global x local e aquela caracterizada no estudo do crescimento/decrescimento de funções reais ao destacar:

> "Alguns estudantes, por exemplo, ignoram o fato de que apesar de o estudo do crescimento/decrescimento de funções reais diferenciáveis ser realizado no nível local, ele não é pontual. Não são raros os casos em que o aluno, por exemplo, afirma que a derivada de uma função num ponto x_0 é zero porque 'para x_0 o valor da função é constante'. Segundo tal raciocínio, se f(1) = 3, então teríamos f '(1) = 0, pois f(1) é constante. O aluno descobre deste modo o óbvio e ululante: que em cada ponto do domínio, a função assume um único valor. É evidente que o aluno já sabia disso, o que ele ainda não percebeu é que para se concluir o estado de permanência (constância) de uma função é necessário que se compare, assim como no caso do crescimento/decrescimento, os valores de f numa vizinhança de x_0."

Embora concordando com a visão deste autor sobre a existência desta dificuldade epistemológica do Cálculo, as questões, sob o ponto de vista pedagógico, permanecem. Se, como diz Rubem Alves, *"ensinar é ensinar a ver"*: Como contribuir para desenvolver o "olhar" do(a) estudante a fim de que comece a perceber o que não está percebendo? Como contribuir para que o desenvolvimento da percepção seja acompanhado do desenvolvimento da capacidade de significação e de resignificação? E, por fim, como fazer tudo isso sem que implique necessariamente em sacrifícios para sua espontaneidade e criatividade?

São perguntas desafiadoras. Educadores, educadoras, pesquisadores e pesquisadoras têm se dedicado a investigá-las. É possível que não haja respostas prontas, mas certamente deve haver a busca. Este é o caminho.

5.3 UMA PROPOSTA DE ENCAMINHAMENTO

Esta seção tem o objetivo de começar um encaminhamento no intuito de contribuir para o esforço de compreensão das questões propostas. A maior parte da literatura que subsidiará a análise dos temas tratados será integrada à discussão no próximo capítulo.

De acordo com uma das citações acima, “o **conceito de função**, introduzido no núcleo semântico do Cálculo por Euler e Lagrange, **vai constituir junto com a noção de limite, a urdidura da nova estrutura do Cálculo**.” Considerando, portanto, os papéis fundamentais dos conceitos de *função* e *limite* na estrutura dos cursos atuais de Cálculo, passarei, neste e nos demais episódios, a apresentar e discutir outras compreensões coletadas ao longo da pesquisa sobre tais conceitos.

Embora o episódio acima tenha sido construído com base em elementos de oralidade, escrita e informática produzidos por Pedro e Talita, a questão geradora do episódio conduziu também o(a)s demais participantes da pesquisa a conflitos similares. Assim sendo, optei por apresentar a seguir alguns dados produzidos por todo o conjunto, sempre que pudessem agregar consistência e se integrar naturalmente à argumentação.

A fim de que o(a) leitor(a) possa, de antemão, perceber a linha de raciocínio ao longo dessa apresentação e análise inicial de dados, eu gostaria de antecipar algumas conjecturas subjacentes a esse desenvolvimento, no que se refere ao conceito de *função*:

1. As compreensões sobre *função* coletadas não evidenciaram uma associação entre o conceito e suas três componentes (domínio, regra, contradomínio), satisfazendo as propriedades usuais.

2. O exercício sistemático de *função* como um conceito constituído de **três componentes (uma terna)**, poderia contribuir de maneira importante para um trânsito menos acidentado pela dualidade global/local de determinados conceitos, já destacada acima como fundamental no Cálculo. Ou seja, se o trânsito entre aspectos locais e globais são problemáticos para a compreensão do conceito de derivabilidade, a exploração e o exercício deste movimento, já no próprio conceito de *função*, no início do curso de Cálculo, poderia representar um caminho promissor para licenciando(a)s e bacharelando(a)s em Matemática.

A fim de justificar essas posições e reforçar minhas interpretações, começarei identificando as compreensões sobre o conceito de **Função,** produzidas na forma escrita pelos participantes da pesquisa, ao mesmo tempo em que uma análise inicial desses dados vai sendo produzida. Tais elementos foram coletados a partir de um questionário abordando o tema de maneira ampla, sem focalizar aspectos específicos, nem direcioná-lo propositalmente ao contexto das funções reais de uma variável real, objeto de estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Buscou-se assim, obter uma visão inicial das compreensões de cada participante, em relação ao conceito tratado.

Seguem abaixo as respostas escritas produzidas individualmente por cada participante da pesquisa – Daniel, Edson, Gisele, Juliano, Pedro, Talita, Teresa e Vera – sobre questões relativas ao conceito de **Função.** Visando preservar a fidelidade aos dados coletados, todas as transcrições observaram *ipsis litteris* os escritos originais, incluindo-se eventuais erros ortográficos ou gramaticais. Foram destacados e sublinhados alguns trechos para subsidiar a argumentação.

Em relação ao conceito de *Função*:

a) Explique o que você entende sobre esse conceito.

Daniel: (FE1$_{DAN}$) É uma relação de determinados elementos pertencentes a um grupo onde, o qual me dá, elemento de outro grupo seguindo uma regra.

Edson: (FE1$_{EDS}$) É uma expressão que consta duas variáveis, x e y, por exemplo, que o valor de uma delas depende do valor da outra, ou seja, o valor de uma variável está em função da outra.

Gisele: (FE1$_{GIS}$) É uma relação de dependência entre “objetos”.

Juliano: (FE1$_{JUL}$) Uma lei que pode ser natural ou não, que estabelece uma relação entre certos elementos.

Pedro: (FE1$_{PED}$) É uma ferramenta que nos permite associar elementos de conjuntos distintos.

Talita: (FE1$_{TAL}$) Entendo como uma inter-relação de conjuntos de forma que posso definir uma relação matemática entre eles.

Teresa: (FE1$_{TER}$) É uma relação entre dois conjuntos, dada por uma lei que associa um elemento do primeiro conjunto a um elemento do segundo conjunto.

Vera: (FE1$_{VER}$) É uma relação entre duas variáveis, ou seja, para eu saber o valor de uma variável eu preciso da outra.

As compreensões prevalecentes nas repostas é a de *função* como **relação.** Além desta, há a de Edson (expressão), Juliano (lei) e Pedro (ferramenta). Não há qualquer referência à condição de unicidade, ou seja, de que cada elemento de um conjunto seja relacionado a um único elemento do outro conjunto. Não há tampouco referência à necessidade de que todos os elementos do primeiro conjunto tenham um correspondente no segundo conjunto. Finalmente, não há referência explícita a elementos como domínio e contradomínio.

O que eu gostaria de ressaltar, no entanto, é outro fato: o foco do(a)s participantes está na **relação**. A palavra *função* (no contexto matemático) parece evocar **relação**, quer seja entre conjuntos ou entre variáveis.

Vejamos, agora, a definição formal de *função*, contida no livro-texto[2] (p. 26) utilizado pelos participantes em seu curso regular:

> Entendemos por uma **função f uma terna (A, B, a → b**), onde A e B são dois conjuntos e **a → b** uma regra que nos permite associar a *cada* elemento **a** de A um *único* **b** de B. O conjunto A é o ***domínio*** de f e indica-se por D_f, assim A = D_f. O conjunto B é o ***contradomínio*** de f. O único b de B associado ao elemento a de A é indicado por f(a); diremos que f(a) é o *valor* que f *assume* em a ou que *f(a)* é o *valor que f associa a a*. Uma função f de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por f : A → B.
>
> *Uma função de uma variável real a valores reais* é uma função f : A → B , onde A e B são subconjuntos de **R**. Até menção em contrário, só trataremos com funções de uma variável real a valores reais.
>
> Seja f: A → B uma função. O conjunto G_f = { (x, f(x)) | x pertence a A} denomina-se ***gráfico* de f;** assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais. Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto (x, f(x)) quando x percorre o domínio de f (Fig 1):

[2] Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo*, Vol.1. Ed. São Paulo: LTC, 2000

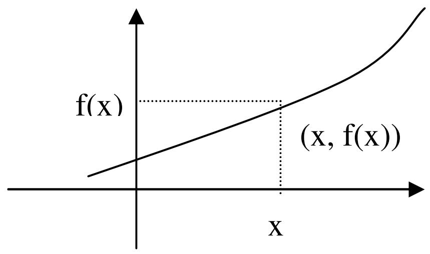


Fig.1

Observação: Por simplificação, deixaremos muitas vezes de explicitar o domínio e o contradomínio de uma função; quando tal ocorrer, **ficará implícito que o contradomínio é $\mathbb{R}$ e o domínio é o "maior" subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual faz sentido a regra em questão.** É usual representar uma função f de uma variável real a valores reais e com domínio A, simplesmente por $y = f(x)$, $x \in A$. Neste caso, diremos que x é a *variável independente,* e y, a *variável dependente.* É usual, ainda, dizer que y é função de x.

O autor é explícito em definir uma função como uma **terna**. Nenhum dos participantes, entretanto, citou este termo ou fez referência ao fato de que o conceito de função envolve, necessariamente, três componentes. Ora, mas quando o(a)s aluno(a)s falam em função como relação (ou lei, ou inter-relação), pode-se argumentar que estariam implicitamente admitindo que tal relação é entre elementos de dois conjuntos**.** Ainda que esta hipótese fosse verdadeira, o problema permaneceria intacto: os componentes **domínio** e **contradomínio** não terem o mesmo *status* da **regra** na composição do conceito e, em conseqüência, não poderem constituir a unidade que é carregada pela noção de **terna.**

Neste sentido, quando Guidorizzi acrescenta a observação acima logo após sua definição de função, ele está enfraquecendo sumariamente a potência da concepção subjacente à definição recém enunciada. Ora, se o domínio depende da regra e o contradomínio já está dado, a regra retorna ao *status* de liderança no conceito, mantendo-se, portanto, na posição que, compreensivelmente, já desfrutava ao longo do Ensino Médio.

É óbvio que o objetivo do autor ao acrescentar a observação é tão somente o de "economizar" nos enunciados dos exemplos e exercícios posteriores, deixando para explicitar domínios e contradomínios "específicos" apenas quando as exceções demandarem tais especificidades. Este "atalho" é encontrado também em outros livros de Cálculo e é tradicionalmente usado na disciplina. O problema é que esta opção pela “economia” pode trazer, na escala pedagógica, um efeito colateral indesejável neste estágio de transição do(a) estudante, a saber: contribuir para que, ao falar de *função*, o(a) aluno(a) continue fixando seu olhar na componente *regra* e a relegar os componentes *domínio* e *contradomínio* do conceito a posições meramente formais, preservando-se, portanto, a tradição herdada do Ensino Médio que, naquele contexto, pode ser justificável.

Neste sentido, observemos, novamente, a definição. Ela afirma que uma função é uma <u>terna</u> (A, B, $a \to b$). O que isto implica? Implica que definir uma função é explicitar esses três elementos: domínio, contradomínio e regra. Há liberdade não apenas para a escolha de uma regra, mas, também, dos outros elementos, desde, claro, que haja compatibilidade entre os três e a condição de existência e unicidade de imagem para cada elemento do domínio seja preservada.

O problema aqui é que o formalismo da linguagem tende a obscurecer para o(a) estudante a liberdade que lhe é assegurada toda vez que este pretende definir uma função. Agravando esta tendência, a observação apresentada logo depois da definição (que, a propósito, dificilmente atrairá atenção suficiente do estudante) toma como *default* o contradomínio $\mathbb{R}$, além de vincular fortemente o domínio da função à sua regra. Assim, esta observação está, implicitamente, induzindo o estudante a trazer aos holofotes a componente *regra* da terna que define uma função, num movimento que, dada as usuais experiências com o conceito no Ensino Médio, somente contribuirá para preservar o enrijecimento desta concepção. Em outras palavras, esta componente continuará “identificando” a função. Ora, mas é <u>óbvio</u> e está <u>implícito</u> que uma regra não “opera” sozinha, pois sempre depende <u>do quê</u> transforma e <u>no quê</u> transforma. A questão está justamente aí: é óbvio e está implícito para quem?

O papel das definições na construção e na compreensão de conceitos matemáticos tem sido objeto de pesquisa (p. ex. ALCOCK; SIMPSON, 2002) e será utilizado no capítulo seguinte nesta tese. Minha intenção nesta análise inicial, ao trazer à cena a definição de função como *terna*, não foi o de explicitar o caráter formal desta definição — movimento, aliás, que raramente é deixado de ser feito nas aulas de Cálculo — mas apenas o de explorar as potencialidades pedagógicas da explicitação e da equalização do status das três componentes que compõem o conceito.

Mas, afinal, em que sentido uma compreensão "limitada" do conceito de *função* estaria associada às dificuldades de trânsito local/global no conceito de derivabilidade?

Antes de apresentar os argumentos, vamos percorrer um pouco mais o conjunto de dados coletados, a fim de continuar mostrando ao leitor ou leitora as compreensões dos participantes sobre os conceitos tratados, reforçando assim a interpretação pretendida.

O fato dos participantes não terem utilizado a expressão **terna** em suas concepções já era esperado. Afinal, a expressão não é usualmente associada ao conceito de função. Além disso, deve-se considerar que na sala de aula regular, a definição adotada tinha sido a seguinte:

> Sejam A e B dois conjuntos não vazios. **Uma função é uma regra** que a cada elemento de A associa um único elemento de B.
>
> Notação:
>
> $f : A \to B$ — A: domínio (D_f) — $x \in A \to$ variável independente
>
> $\quad x \to f(x)$ — B: contradomínio — $y = f(x) \to$ variável dependente
>
> Imagem de função:
>
> $Im(f) = \{ y \in B \ / \ y = f(x), x \in A\}$
>
> $\qquad = \{ y \in B \ / \ \exists \ x \in A, f(x) = y \}$
>
> **Quando não mencionarmos o domínio e o contradomínio de uma função, fica subentendido que o contradomínio é $\mathbb{R}$ e o domínio é o subconjunto de $\mathbb{R}$ onde faça sentido a regra em questão.**

Antes dos participantes responderem à 2ª questão do questionário individual escrito, foi entregue a cada um deles, numa folha separada, a definição de função, segundo Guidorizzi (exatamente na forma apresentada acima). A questão era a seguinte:

> **Comparando o que você escreveu ao responder a questão anterior com a Definição de Função apresentada na Folha de Definições:**
>
> **a) Você mudaria algo na sua resposta?**
>
> **b) Você mudaria algo na Definição do livro?**

Daniel ($FE2_{DAN}$) a) Sim. Definiria melhor a idéia de grupos (domínio e contradomínio) e ainda colocaria que cada elemento do primeiro tem que necessariamente ter uma única relação com o segundo grupo. Não bastando apenas uma relação entre os elementos do primeiro grupo com o segundo, pois esta relação tem que seguir uma regra para todos os elementos do primeiro grupo.
b) Não

Edson ($FE2_{EDS}$) a) Não. Pela Definição de Função, a cada valor que eu atribuir a x, terei um único correspondente em y, o mesmo ocorre com a resposta da questão anterior.
b) Não

Gisele ($FE2_{GIS}$) a) Não, pois é o que eu entendi sobre a Definição de Função (de maneira simples e informal)
b) Não mudaria mas a definição poderia ser escrita de maneira mais simples.

Juliano ($FE2_{JUL}$) a) Não
b) Não. Apesar de achar a definição apresentada, um tanto complexa para os mais leigos.

Pedro ($FE2_{PED}$) a) Talvez teria dado um exemplo mais matemático
b) Não

Talita ($FE2_{TAL}$) a) Deixaria ela um pouco mais formal, utilizando, talvez, linguagem matemática e acrescentando conceitos que não foram discutidos.
b) Daria mais exemplos do dia a dia para facilitar a compreensão, achei a linguagem bem pesada...

Teresa ($FE2_{TER}$) a) Sim. É uma relação que associa um elemento do primeiro conjunto a um único do segundo.
b) Não

Vera ($FE2_{VER}$) a) Não
b) Não. Pois a definição está em uma linguagem diferente e contém mais detalhes, o que não precisaria se estivéssemos explicando o que é função para uma pessoa que acha que nunca teve contato com função.

Novamente, a expressão **terna** não parece ter atraído a atenção do(a)s aluno(a)s. A questão da unicidade parece ter chamado a atenção apenas de Daniel, Edson e Teresa, embora apenas Daniel e Teresa afirmem que mudariam suas concepções apresentadas na questão anterior. A impressão é que, para Edson, a unicidade fica automaticamente garantida quando diz *'uma variável está em função da outra".* A maioria absoluta, entretanto, não mudaria suas compreensões iniciais. Quanto à proposta contrária, de sugerir mudanças na definição do livro, a reação foi unânime: ninguém a mudaria. Ainda que Gisele, Juliano, Talita e Vera tenham-na achado complexa, suas respostas sugerem que o que estava incomodando era o formalismo e não o conteúdo da definição, ou seja, o autor a havia "complicado" desnecessariamente.

A questão seguinte, visando continuar explorando as visões dos participantes em relação ao conceito de função, perguntava:

Na sua opinião:

a) Que condições duas funções devem satisfazer para serem consideradas iguais?

b) Seria possível a construção de funções diferentes, mas com a mesma regra de associação? Explique.

c) Seria possível a construção de funções diferentes, mas com o mesmo gráfico? Explique.

Daniel: ($FE3_{DAN}$) a) Para que duas funções sejam iguais é necessário que o <u>mesmo domínio me dê o mesmo y (contradomínio) não importando a regra de associação.</u>

b) Sim, depende do domínio se tiver a mesma regra e domínio diferente. Exemplo: F(x) = x + 1 . Se o domínio for os $\mathbb{N}$ isto dá uma função. Se o domínio for os $\mathbb{R}$ isto dá outra função.

c) Sim, basta ter regra de associação diferente e mesmo domínio, claro que a regra de associação diferentes ,tem me dá para o mesmo x o mesmo y.

Edson: ($FE3_{EDS}$) a) As duas funções deverão <u>ter a mesma lei de formação</u>, logo, mesma imagem.

b) <u>Acredito que não</u>, porque o resultado será uma imagem diferente.

c) Acredito que não, porque se mudarmos a regra de associação de uma função seu gráfico se comportará de outra maneira.

Gisele: ($FE3_{GIS}$) a) As funções devem ter a mesma lei de formação e o mesmo domínio para serem iguais.

b) Sim, se o domínio não for igual elas podem ser diferentes.

c) Não sei

Juliano: ($FE3_{JUL}$) a) Elas devem possuir a mesma regra que permite fazer a associação de elementos do domínio ao contradomínio.

b) Estou em dúvida.

c) Sim, pode-se ter 2 eventos diferentes mas que correspondem a um gráfico

Pedro:	($FE3_{PED}$) a) Mesma lei de formação e domínio. b) sim, caso o domínio seja diferente. c) sim. Exemplos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $f(x) = x$ e $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ $f(x) = \|x\|$

Talita	($FE3_{TAL}$) a) Devem ter o mesmo domínio e a mesma imagem. b) Sim, sendo o domínio diferente, talvez restringindo ele... c) Acredito que sim, porém as funções devem ser equivalentes;

Teresa ($FE3_{TER}$) a) Terem o mesmo domínio e regras iguais.

b) Sim, se tiverem domínio diferentes.

c) Não. Porque se o gráfico for igual, o domínio é igual e a lei é igual.

Vera ($FE3_{VER}$) a) Para duas funções serem consideradas iguais, elas devem ter a mesma lei de formação, o mesmo domínio e o mesmo contradomínio.

b) Sim. Se elas tivessem domínios diferentes.

Ex: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x + 2$

$f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x + 2$

c) Sim. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

$f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

Nota-se que apenas para Vera a igualdade de funções deve implicar numa igualdade de todos os três componentes que compõe o conceito. Isto continua a sugerir que nem todo os componentes são suficientemente atraentes para chamar a atenção do(a)s participantes. É possível notar também que, para Daniel, o conceito parece estar menos nítido do que para os demais. Para Edson e Juliano, o que caracteriza uma função parece ser a componente *regra,* enquanto que os demais observam o *domínio* e a *regra*.

Uma questão simples, mas que também pode sinalizar alguma restrição na compreensão de função foi a seguinte:

É possível se definir alguma função com domínio A = {1, 2, 3} e contradomínio B = {2, 4, 7, 8}? Se sua resposta for positiva, dê um exemplo e esboce o gráfico.

Daniel	($FE4_{DAN}$) Não há uma única regra que defina a correspondência de A com B.
Edson	($FE4_{EDS}$) Aparentemente não.
Gisele	($FE4_{GIS}$) *[Esboça o produto cartesiano e diz que não sabe se seria possível]*
Juliano	($FE4_{JUL}$) Sim. $F(x) = 2^x$. *[desenha um gráfico contínuo ligando o ponto (1,2) ao ponto (3,8)].*
Pedro	($FE4_{PED}$) Sim. $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde $f(x) = 2$. A imagem é {2}.
Talita	($FE4_{TAL}$) Sim. $Y = 2^x$ *[desenha o gráfico com três pontos]*
Teresa	($FE4_{TER}$) Sim. $Y = 2x$ *[o gráfico tem os pontos (1,2) (2, 4).)]*
Vera	($FE4_{VER}$) $f(x) = x + 1$ se $x <= 1$ e $x + 5$ se $x > 1$

A característica de liberdade decorrente da definição de função, mencionada em parágrafos anteriores, retorna, aqui, à cena. Os dados acima sugerem que apenas Pedro parece estar consciente do grau de arbitrariedade que se pode ter no momento de se definir uma função: ao estabelecer a regra de sua função como f(x) = 2, para todo x, ele parece estar certo de que não há necessidade de se procurar uma função elementar cuja regra "se encaixe" no domínio e contradomínio fixados pela questão. Claro que ele usou a regra de uma função elementar (da função constante f(x) = 2) mas julgo que seria bastante improvável que ele não estivesse consciente da liberdade que poderia explorar.

Como curiosidade — que também não deixa de ser reveladora — o leitor ou leitora poderá notar que Pedro, como num ato falho, simplesmente ignorou o domínio A e o contradomínio B no momento de usar o simbolismo indicativo de função $f : A \to B$ substituindo-o por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. É possível que se trate mesmo de uma ligeira desatenção, mas também pode indicar uma associação automática de domínio e contradomínio de funções com o conjunto dos reais, bastante comum no contexto do Cálculo I. Tal desatenção, entretanto, não constitui exatamente uma surpresa: o olhar do(a) estudante, como venho argumentando, não foi educado para focar simultaneamente os três elementos. No caso de Pedro, embora ele tenha percebido o contradomínio (seria uma coincidência improvável que tivesse escolhido como imagem o primeiro elemento deste conjunto ao acaso) seu olhar estava claramente direcionado para a regra da função.

Numa abordagem diferente e reveladora de sua experiência com os algoritmos de programação de computadores, Vera utiliza a operação lógica de condicional e separa em duas sentenças a sua definição, de maneira a conciliar as exigências da questão proposta com os exemplares de função a que parece estar acostumada, a saber, as funções elementares. O simples fato de ela ter preferido buscar em sua bagagem de programadora uma solução para o problema, sugere, mais uma vez, que a percepção da possibilidade de se definir, arbitraria e facilmente, uma função de A em B — como a demonstrada por Pedro — não esteve presente em sua reação inicial, levando-a a procurar uma solução "standard", ainda que criativa, certamente mais complexa.

De maneira similar à Vera, Talita e Juliano buscam uma solução dentro dos "padrões", ou seja, que caiba no catálogo de funções elementares tradicionais, e encontram a resposta na função exponencial $y = 2^x$, que, de fato, satisfaz as exigências da questão. Juliano, no entanto, esboça seu gráfico com uma linha contínua ligando os três pontos, num procedimento que é bastante comum e que comportaria uma análise diferente da que está sendo desenvolvida.

Teresa parece, inicialmente, raciocinar como Talita e Vera, ou seja, buscar uma solução que "se encaixe" no catálogo acima referido. Percebendo a possibilidade de os elementos 1 e 2 de A poderem ser associados aos seus múltiplos 2 e 4 em B, ela simplesmente define y = 2x, sem, no entanto, notar que, neste caso, o 3 deveria ser associado ao 6, que não é um elemento de B.

Gisele afirma não saber se seria possível definir uma função com as condições exigidas pela questão, enquanto Edson conclui que, aparentemente, não é possível tal definição. Em ambos os casos, no entanto, suas respostas indicam que a arbitrariedade subjacente à definição de função não é suficientemente forte para que a solução proposta por Pedro, por exemplo, seja considerada. Por último, Daniel, responde a questão de uma maneira oblíqua: parece consciente de que há várias possibilidades de se definir uma função com o domínio e o contradomínio exigidos, mas sua convicção não parece suficientemente forte para que apresente pelo menos um exemplo.

Em suma, as respostas dadas à questão sugerem que a percepção do caráter arbitrário decorrente da definição de função ainda não é suficientemente desenvolvida.

5.3.1 COMPREENSÕES DO CONCEITO DE FUNÇÃO E AS DIFICULDADES NO TRÂNSITO GLOBAL / LOCAL NO CONCEITO DE FUNÇÃO DERIVÁVEL

As compreensões do conceito de função que os dados acima sugerem não são, a meu ver, surpreendentes. Ao contrário, podem ser consideradas naturais se supusermos que a visão do(a) aluno(a) está impregnada da práxis do Ensino Médio no tratamento do conceito. Neste cenário, praticamente não há demandas suficientes para o exercício do trânsito global/local, uma vez que, na maioria dos casos, as funções abordadas são — compreensivelmente — aquelas definidas em sentenças únicas por funções elementares. Além disso, as abordagens nos capítulos introdutórios dos livros de Cálculo mantêm uma certa tonalidade de tratamento do conceito a qual o(a) aluno(a) já estava, digamos, condicionado(a).

Assim, por exemplo, a regra f(x) = x^2 é automaticamente associada à uma função que não é injetora, não é sobrejetora e seu gráfico é uma parábola. Ora, mas $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, com a mesma regra g(x) = x^2, é injetora, sobrejetora e seu gráfico não é uma parábola no aspecto usual, enquanto que $h : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, também com h(x) = x^2, é injetora, não é sobrejetora e seu gráfico é constituído apenas pelos pontos (0, 0) e (1, 1). A regra de todas as funções é a mesma e, portanto, não é surpresa quando os estudantes afirmam que as três funções, olhadas pela suas regras, são iguais.

Uma outra classe de exemplos seria a dos exercícios onde é solicitado que o(a) aluno(a) "determine" o domínio da função, muito comum nos livros. Assim, o exercício a seguir é típico: dada f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ determine "**o**" domínio da função. Ora, mas o domínio não é um componente de uma função tanto quanto sua regra e, neste caso, quando já se tem uma regra, não se poderia "inventar" um domínio e um contradomínio, observando apenas que os três elementos fossem compatíveis? É óbvio que não há problema (matemático) algum com a questão: o domínio suposto é o maior (sob a relação de ordem usual de inclusão) subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual a regra da função faz sentido, e o contradomínio é o próprio $\mathbb{R}$, como, de resto, já estava <u>subentendido.</u> O problema está em como o(a) estudante vai "administrando" conceitualmente essas questões: se for para "determinar **'o'** domínio" então não há porque ficar "inventando" novos domínios. Assim, o que quero argumentar é que exercícios desse tipo podem dificultar o rompimento do condicionamento — crucial nesta transição para a matemática do Ensino Superior — que o(a) estudante traz consigo.

Saiamos um pouco do elemento *domínio* e analisemos, agora, a posição do componente *contradomínio* no conceito de função. Dos três componentes que constituem o conceito, o *contradomínio* é seguramente o que tem o menor *status*. Seu papel é relegado ao segundo plano e tomado — até as raras menções em contrário — tacitamente como o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Uma das conseqüências do enfraquecimento deste elemento pode ser ilustrada pelo seguinte exemplo, retirado de uma das questões do experimento sobre o conceito de função e que segue abaixo:

> Suponhamos que **f : A → B** seja uma função.
>
> a) É possível se definir a **função inversa** de f ? Expliquem suas concepções.
> b) Se a resposta acima for afirmativa, expliquem, passo a passo, o processo para se obter a inversa de f.
> c) Utilizem o CAS para explorar o conceito de função inversa.

Do(a)s participantes, apenas Pedro e Talita concluíram que a possibilidade de definição da função inversa de f dependeria de que a função fosse injetora e sobrejetora, isto é, bijetora. O fato do(a)s demais participantes não terem explicitado esta condição sugere que tais conceitos não estão naturalmente "na pauta" do(a)s estudantes. É possível também que o silêncio sobre injeções e sobrejeções seja uma conseqüência natural do fato desses elementos não ocuparem no Cálculo a mesma posição desfrutada na Álgebra e na Análise. Mais uma vez, o pragmatismo no trato das "<u>coisas de interesse do Cálculo</u>" desloca tais elementos para posições marginais e, em conseqüência, levam, "no vácuo", elementos importantes do processo de transição para a matemática universitária e para o próprio amadurecimento matemático do(a) estudante. Senão, vejamos:

O conceito de função inversa aparece em momentos importantes ao longo do curso de Cálculo, em particular durante a exploração das funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, ou mesmo antes, durante o próprio tratamento do conceito de derivada. Isto é suficiente para tornar desnecessária qualquer argumentação em favor de um olhar mais cuidadoso para o conceito. Ocorre que a existência da inversa de uma função f depende de que f seja bijetora, logo sobrejetora que, por sua vez, é uma propriedade que está diretamente vinculada ao contradomínio C_f de f. Assim, basta uma restrição de C_f ao conjunto-imagem de f, Im(f), para que f seja transformada numa nova função $f_S : D_f \to Im(f)$, com $f_s(x) = f(x)$ para todo x, que preserva todas as características de f — incluindo, obviamente, seu gráfico — só que agora detendo o "opcional" da sobrejetividade. A meu ver, este tipo de manipulação é mais um dos exercícios que ajudariam a configurar um "espaço de descondicionamento" que deveria fazer parte do ambiente de aprendizagem contextualizado no primeiro ano de um curso de Matemática. Neste sentido, o leitor ou leitora há de convir que a omissão ou até mesmo o mero enfraquecimento da posição desses conceitos no referido contexto pode induzir a proposição de questões como a seguinte:

Tomemos a onipresente função f(x) = x^2, apresentada, como de costume, na forma tradicional. Como um(a) aluno(a) deveria responder à seguinte pergunta: f(x) tem inversa? Como argumentar significativamente sobre os condicionantes implícitos a possíveis respostas à questão sem que os conceitos supra-referidos sejam trazidos à cena?

Mantendo ainda a mesma linha argumentativa, ampliemos ligeiramente o foco para abarcar não apenas o contradomínio, mas também a estrutura que o suporta (na verdade, para este propósito, nem precisaremos especificamente da estrutura de corpo de $\mathbb{R}$, apenas de sua estrutura topológica) e consideremos o seguinte exemplo, comum no estudo de limites:

Mostre que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (a demonstração também não é necessária aqui; basta que se esteja convecido(a) de sua “validade”, fato que é tido, em geral, como ponto pacífico.)

Com qual função estamos trabalhando? Vamos supor, como de costume, que a estrutura subjacente seja $\mathbb{R}$. Caso a função seja, por exemplo, $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, com f(x) = $\frac{1}{x}$ para todo x, teríamos, de fato, 0 como limite. Sacrifiquemos, agora, por um momento, a estrutura de corpo de $\mathbb{R}$ (e sua completude), retirando o elemento 0 e passemos a trabalhar sobre o universo $\mathbb{R} - \{0\}$. Tomemos, em seguida, a função $g : \mathbb{R}- \{0\} \to \mathbb{R}- \{0\}$, com g(x) = $\frac{1}{x}$ para todo x. Neste caso, <u>o limite deixará de existir</u>, ou seja, bastou uma leve “mexida” na estrutura subjacente ao contradomínio para que se desestabilizasse um resultado que possivelmente já estaria impregnado no(a) estudante. Além disso, os domínios são iguais e f(x) = g(x) para todo x. Não seria tentador dizer que f = g? Claro, para o(a) estudante seria óbvio...

O problema aqui não é a desestabilização, aliás, componente quase sempre imprescindível no processo de aprendizagem. O problema está justamente no enfraquecimento das condições e das possibilidades de emergência desta desestabilização.

Muitos outros exemplos poderiam ser aqui citados para sustentar a posição de que o(a) estudante que está iniciando seu curso universitário de Cálculo poderia se beneficiar de um exercício sistemático de manipulação dos componentes e de exploração da liberdade subjacente ao conceito de *função*. O objetivo de tal exercício não seria — volto a salientar — o de explorar a definição em seu aspecto formal, mas, sim, o de ampliar sua percepção sobre o conceito e romper eventuais condicionamentos. Ao favorecer a percepção da liberdade sobre a qual, em última análise, o conceito se sustenta, este exercício poderia contribuir para "desengarrafar" o trânsito entre aspectos locais e globais, não apenas no conceito de função, mas, possivelmente, em todos os subseqüentes, como é o caso da derivabilidade.

Para finalizar, caso o leitor ou leitora seja detentor(a) de um "olhar estritamente matemático" sobre as compreensões dos estudantes, é possível que ele ou ela argumente que os conflitos materializados na construção deste episódio somente emergiram porque os alunos "simplesmente" não utilizaram a definição de derivabilidade. Pois é justamente uma outra definição que estará em pauta no episódio seguinte.

5.4 SEGUNDO EPISÓDIO

Definições Matemáticas — A Derivada

Este episódio foi construído com o objetivo de destacar conflitos emergentes de uma abordagem à definição de derivada a partir da questão abaixo, proposta no experimento com duplas sobre o referido tema:

> A derivada de uma função $f : D_f \to C_f$, num ponto x do intervalo aberto D_f, é dada por $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, se este limite existir. Suponhamos, então, que este limite exista e seja igual a L. Em outras palavras, L é o limite de alguma função g(h) quando $h \to 0$. Neste caso, pergunta-se:
>
> i) Qual é essa função g?
> ii) g é uma função contínua? Expliquem.
> iii) g tem alguma relação com a função derivada de f ? Expliquem.

A questão acima gerou conflitos para todos os participantes, em particular para a dupla Edson e Teresa, razão pela qual foi chamada a contribuir com a construção do presente episódio. Embora o CAS estivesse, como de costume, disponível, a dupla não o utilizou. Assim sendo, a respectiva interação não será mencionada na análise que se segue. Cabe aqui esclarecer que este será o único caso em que a informática não participou da construção de um episódio.

A idéia básica subjacente à elaboração da questão foi “provocar” a emergência das compreensões dos estudantes sobre os conceitos em pauta nesta pesquisa — função, limite, continuidade e derivada — a partir da própria *definição de derivada*.

5.4.1 Um Perfil da Dupla EDSON e TERESA

Edson e Teresa estão ambos na faixa dos 18 anos, mostram-se bastante interessados no curso que escolheram, participam de atividades extraclasse sempre que possível, embora sejam mais reservados do que a dupla Pedro e Talita. Em termos de fluência na comunicação oral, também se mostraram menos exuberantes do que a dupla anterior. Estritamente sob o ponto de vista de notas nas avaliações formais da disciplina, Edson e Teresa estão ambos situados na faixa mediana da turma, o que os posicionariam entre os 40 % detentores de melhores notas em sua turma.

O questionário abaixo foi respondido no início das prospecções para a seleção dos participantes da pesquisa.

- **A Matemática que você estudou no ensino médio (2º grau):**

  Edson: Bastante defasada, pelo fato de eu ter feito todo o ensino médio, inclusive o ensino fundamental e primário, em escolas pertencentes ao Estado (escolas públicas). Mas consegui aprimorar muito meu conhecimento em Matemática, devido o curso pré-vestibular que tive oportunidade de fazer e de ter me empenhado muito.

  Teresa: Penso que a matemática que estudei no ensino médio, é inferior à matemática de muitos alunos que conheci aqui. Pois venho de escola pública, onde a matemática estudada é bem superficial, para que dê tempo de dar todo o conteúdo do ano.

- **Facilidades e dificuldades que você sentiu e/ou sente em relação à Matemática.**

  Edson: Tenho um pouco de dificuldade em interpretar instantaneamente enunciados mais elaborados ("difíceis") de exercícios de matemática.

Porém, tenho um pouco mais de facilidade no desenvolvimento de cálculos algébricos.

Teresa: São raras as dificuldades, pois tudo que me proponho à fazer direito, não encontro obstáculos. Na verdade, acho que tenho uma certa facilidade para o aprendizado de matemática. Porque em comparação aos meus antigos colegas de classe, percebia muitas dificuldades da parte deles e eu já não tinha nenhum problema. Aprendo (matemática) muitas vezes sozinha com auxílio de livros, no caso de dúvidas, uma explicação me basta.

- **Facilidades e dificuldades que você sentiu e/ou sente em relação à escrita (cartas, redações, etc.)**

Edson: No início do curso de redação que realizei no "curso pré-vestibular" sentia dificuldade em desenvolver um tema de redação. Mas com o passar do tempo, consegui assimilar algumas técnicas de escrita e hoje consigo escrever com mais facilidade.

Teresa: Em relação à escrita, tenho dificuldade para expor minha opinião, por isso não gosto de redações dissertativas. Já narrações, tenho mais facilidade, porque gosto de inventar historias e usar a imaginação. Na matéria de redação, sempre fui uma aluna mediana, nunca abaixo da média, nem à cima!

- **Facilidades e dificuldades que você sentiu e/ou sente em relação à informática:**

Edson: Meu contato com o computador começou há 3 anos aproximadamente. Confesso que, antes desse período, não sabia ao menos ligá-lo! Antes de ingressar na universidade (2003) fiz um curso técnico "Processamento de Dados". No início do curso sentia uma grande dificuldade é claro, mas no decorrer fui me habituando e passei a gostar muito dos softwares os quais trabalhei.

Teresa: As minhas dificuldades em relação à informática se baseiam no fato de que eu não consigo memorizar muito bem as coisas, assim acabo esquecendo alguns comandos de determinados programas. Tenho facilidade em programação, que é o que mais gosto. Quando fiz um curso técnico, foi com esta matéria (linguagem e programação) que me identifiquei.

- **Razões para a participação na pesquisa:**

Edson: Tenho grande interesse em participar desse projeto de pesquisa, principalmente depois de saber que, a computação tem uma relação muito íntima com a matemática. Pelo fato de gostar muito de matemática e até agora só trabalhei com ela na teoria, tenho uma enorme curiosidade em saber como e onde poderei usá-la, afim de começar a pensar em que área de trabalho me identifico mais, seja no bacharelado, licenciatura e outros.

Teresa: *[não respondeu]*

5.4.2 Construindo o Episódio

A questão geradora do episódio foi proposta no experimento com duplas na fase de investigação de compreensões do conceito de *derivada*. Vamos reenunciá-la:

A derivada de uma função $f : D_f \rightarrow C_f$, num ponto x do intervalo aberto D_f, é dada por $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, se este limite existir. Suponhamos, então, que este limite exista e seja igual a L. Em outras palavras, L é o limite de alguma função g(h) quando $h \rightarrow 0$. Neste caso, pergunta-se:

i) Qual é essa função g?
ii) g é uma função contínua? Expliquem.
iii) g tem alguma relação com a função derivada de f ? Expliquem.

Legenda:

Função **Continuidade**
Limite **Derivada**

Oralidade:

Fn_{EDS}, Ln_{ESD}, Cn_{EDS}, Dn_{EDS}: n-ésima unidade de análise da **fala de Edson** associada à Função, Limite, Continuidade e Derivada, respectivamente.

Fn_{TER}, Ln_{TER}, Cn_{TER}, Dn_{TER}: n-ésima unidade de análise da **fala de Teresa** associada à Função, Limite, Continuidade e Derivada, respectivamente.

Escrita:

FEn_{EDS}, LEn_{EDS}, CEn_{EDS}, DEn_{EDS}: n-ésima unidade de análise da **escrita de Edson** associada à Função, Limite, Continuidade e Derivada, respectivamente.

FEn_{TER}, LEn_{TER}, CEn_{TER}, DEn_{TER}: n-ésima unidade de análise da **escrita de Teresa** associada à Função, Limite, Continuidade e Derivada, respectivamente.

 Sugestão analítica categorizando uma ou mais unidades de análise da escrita como **compreensão compatível com a discussão emergente e com o(s) objetivo(s) da questão em pauta.** A cor de fundo do ícone é associada à cor (segundo o padrão já estabelecido) do conceito respectivo.

Sugestão analítica categorizando uma ou mais unidades de análise da escrita como **compreensão parcialmente compatível com a discussão emergente e com o(s) objetivo(s) da questão em pauta**. A cor de fundo do ícone é associada à cor (segundo o padrão já estabelecido) do conceito respectivo.

Sugestão analítica categorizando uma ou mais unidades de análise da escrita como **compreensão incompatível com a discussão emergente e/ou com o(s) objetivo(s) da questão em pauta**. A cor de fundo do ícone é associada à cor (segundo o padrão já estabelecido) do conceito respectivo.

Teresa: **($F1_{TER}$)** A g é essa...

Edson: **($F1_{EDS}$)** A função g é... <u>tudo isso</u> ?

Teresa: É. Eu acho que é...

Edson: **($F2_{EDS}$)** f(x + h) menos f(x) sobre h . Tem certeza?

Teresa: Sim... *[risos]*

A insegurança de Edson ($F1_{EDS}$ e $F2_{EDS}$) e a relativa falta de convicção de Teresa são procedentes. Afinal, a "forma" da possível candidata à função g parece "estranha". Seus escritos (abaixo) sobre o conceito de função, em especial os de Edson, sinalizam uma visão apenas parcialmente compatível com os objetivos da questão:

($FE1_{EDS}$) Uma **função** é uma <u>expressão</u> que consta duas variáveis, x e y, por exemplo, que o valor de uma delas depende do valor da outra, ou seja, o valor de uma variável está em função da outra.

E para duas funções serem iguais**:**

($FE2_{EDS}$) Deverão ter a mesma lei de formação, logo, mesma imagem.

Enquanto que, para Teresa:

($FE1_{TER}$) Uma **função** é uma <u>relação</u> entre dois conjuntos, dada por uma lei que associa um elemento do primeiro conjunto a um elemento do segundo conjunto.

E para duas funções serem iguais:

($FE2_{TER}$) Deverão ter regra e domínio iguais.

Edson: g é uma função contínua? Explique.

Teresa: Não.

Edson: Por que?

Teresa: ($C1_{TER}$) Porque h embaixo não pode ser zero.

Edson: É... O que você falou?

Teresa: Que o h não pode ser zero.

As compreensões sobre **continuidade** foram anotadas por Edson e Teresa em suas respectivas atividades escritas da seguinte maneira:

($CE1_{EDS}$) Uma função é dita **contínua**, se conseguimos fixar um intervalo qualquer em torno de um ponto pertencente a imagem e que posteriormente seja possível encontrar um intervalo em torno do ponto do domínio (correspondente a essa imagem) tal que todos as imagens pertencentes aos pontos desse intervalo (do domínio) esteja contida no intervalo fixado na imagem.

($CE1_{TER}$) **Continuidade**: análise de um ponto dado ou genérico e o comportamento deste ponto e os que estão ao seu redor. Continuidade diferencia de limite, pois em continuidade é interessante o ponto, já em limite este não faz diferença.

Apesar de $CE1_{EDS}$ estar muito próxima da definição formal de continuidade de uma função em um ponto, isto não parece render a seu autor uma maior segurança na abordagem à questão. Por outro lado, Teresa — para a qual continuidade é algo associado a um *processo* de análise do comportamento local de uma função — parece segura ao afirmar a descontinuidade de g. Por quê? Talvez porque ela tenha incorporado uma idéia comum e que freqüentemente aparece em livros de Cálculo, segundo a qual é *descontínua no ponto a* qualquer função f que *não esteja definida em a.* Ora, mas se *a* não pertence ao domínio de f, investigar a continuidade ou a descontinuidade de f neste ponto *a* parece um exercício, no mínimo, discutível.

É claro que o(a) leitor(a) poderia argumentar que essa discussão pode não ser relevante, já que se trata de mera conseqüência da definição escolhida para a continuidade. Poderia também lembrar que um número razoável de exercícios propostos nesses livros é desenhado com o propósito de que o(a) estudante faça exatamente o que Teresa fez: tomar o quociente $\frac{g(x)}{h(x)}$ que estaria definindo a regra de uma função f, fixar a condição h(x) = 0 e estabelecer a solução desta equação como o conjunto de pontos onde, sumariamente, "f é descontínua". No entanto, o que pretendo com essas observações é reforçar uma das sugestões que tenho defendido desde a análise do episódio anterior: O aluno ou aluna de primeiro ano de Matemática precisar ser estimulado a romper com eventuais "condicionamentos" e a explorar a liberdade implícita aos novos conceitos matemáticos que começam a ser experimentados.

Continuemos com a discussão da dupla:

Edson: **($C1_{EDS}$)** Não pode ser contínua... Em x = 0 também...?

Teresa: *[Acena positivamente com a cabeça]*

Edson parece continuar desconfortável com a questão. Teresa, que até este ponto vinha demonstrando uma relativa segurança, parece vacilar quando é questionada sobre a continuidade em x = 0. O aceno positivo com a cabeça parece mais mecânico do que convicto. A entrada em cena de x parece tê-la perturbado, já que, até este momento, a variável independente em pauta era h. Note-se que apesar da questão solicitar explicitamente uma função g, nenhum dos dois levantou ainda a questão de possíveis candidatos a domínios e contradomínios que, necessariamente, deveriam participar da composição da referida função. O foco permanece numa possível regra para g. Mesmo aparentando insegurança, eles passam ao item seguinte da questão:

Edson: g teria alguma relação com a função derivada de f ?

Teresa: Relação...?

[pausa]

Edson: Existe alguma relação com a função derivada de f... Explique...

Teresa: g...

[pausa]

Edson: Não... Por que teria?

[pausa]

Teresa: Não...

Edson: Então tem que explicar...

Teresa: Fácil, né? *[risos]* Tá bom...

Edson: Se a gente chamar isso aqui tudo de g então tem que ter.

Teresa: Tem. Quando x = 0, é igual... Não! Se tem um... Se g é isso...

[pausa]

É perceptível o desconforto de ambos com a questão proposta. A sucessão de pausas contribui para sinalizar este desconforto. Mas, antes de continuarmos, vejamos o que eles escreveram sobre *derivada* e *função derivada*:

($DE1_{EDS}$) Derivada é o coeficiente angular de uma reta tangente a um ponto dado em uma função**.**

($DE1_{TER}$) Derivada é o coeficiente angular da reta tangente à curva, no ponto escolhido.

($DE2_{EDS}$) Entendo que função derivada é um valor que é calculado envolvendo limite, reta e coeficiente angular. Mas onde é que iremos utilizar, para que serve realmente, ainda não sei.

($DE2_{TER}$) Função derivada: derivada de uma determinada função transformada em função. Ex. $f(x) = x^2$, $f\,'(x) = 2x$ $g(x) = 2x$, $g\,'(x) = 2$

Ambas as compreensões sobre o conceito de *função derivada*, embora compatíveis com o desenvolvimento da dupla até aqui demonstrado, não parecem compatíveis com os objetivos da questão proposta. $DE2_{EDS}$ sugere uma rede semântica envolvendo os conceitos mencionados ainda frágil, ao passo que

$DE2_{TER}$ alude a algum "automatismo procedural", talvez um dos mais comuns no trato com o referido conceito, mas restrito em termos de significado.

Para ilustrar uma comparação, o(a)s demais participantes anotaram as seguintes compreensões sobre esses conceitos:

Derivada:

($DE1_{DAN}$) O conceito de derivada nos mostra a possibilidade de achar o coeficiente angular da reta tangente em um ponto de uma função.

($DE1_{GIS}$) Derivada é o coeficiente angular de uma reta que tangencia o gráfico de uma certa função em um ponto p da abcissa.

($DE1_{JUL}$) Entendo que derivada nada mais é do que um processo de limite, ou seja, é um caso particular de limite. Em geral o objetivo é achar retas tangentes a outros gráficos.

($DE3_{PED}$) Derivada é uma maneira de se comparar a taxa de variação entre 2 grandezas em uma função, quando a diferença entre essas grandezas se aproxima de zero.

($DE2_{TAL}$) Derivada é o coeficiente de inclinação da reta tangente.

($DE1_{VER}$) Quando calculamos a derivada de uma função estamos encontrando o coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico da função em um determinado ponto.

Função Derivada:

($DE2_{DAN}$) O conceito de função derivada é aquela função onde se pode calcular o $\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a $\lim \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$.

($DE2_{GIS}$) Função derivada não consigo definir.

($DE2_{JUL}$) É uma função que é derivável ou seja apresenta retas tangentes em todos os pontos de um domínio.

($DE4_{PED}$) Nos é útil conhecer uma fórmula que nos dê a derivada de qualquer ponto de uma função. A esta fórmula chamamos de função derivada.

(DE3$_{TAL}$) A função derivada é a função que me resta depois de eu fazer a derivação de uma outra função. Na verdade, para mim, derivada e função derivada se confundem e eu não consigo distingui-las ainda...

(DE2$_{VER}$) Função derivada é a função em que é só substituirmos o ponto desejado e calculamos a derivada. Já está calculado o $\lim \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ em função de p.

Continuemos com a discussão:

Edson: (L1$_{EDS}$) Se o L é o limite de uma função g, o limite da função f e o limite da função g é o mesmo, entendeu? (L2$_{EDS}$) Ó, ele tá dizendo que o limite de uma função f é dado por isso: L, da função f. O limite existe, tá? Como era então que o limite existe, você tirou o L. Em outras palavras, L é o limite de alguma função g.

Em L1$_{EDS}$, Edson invoca o limite da função f quando, provavelmente, parece interessado em invocar o limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quando h tende a zero, pois é $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ que é igual a L. Note-se que, em L2$_{EDS}$, ele reafirma que o limite de f é L. Esta insistência em se referir ao limite de f quando, na verdade, pretende falar do limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pode ser mera desatenção, mas o mais provável é que se trate de uma dificuldade real em se lidar com uma função cuja regra seja dada por $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Teresa: De h.

Edson: De h. Quando h tende a zero, também! Neste caso, pergunta-se: **(L3$_{EDS}$)** g tem alguma relação com f? Sim! Ah..., para... h tendendo a zero, o limite é o mesmo. Pronto!

[Teresa aparenta estar em dúvida, mas acaba concordando, com um aceno de cabeça.]

Em L3$_{EDS}$, Edson pergunta se g tem alguma relação com f, quando, na verdade, a questão em pauta é se há alguma relação entre g e a *função derivada de* *f*. Novamente, este detalhe pode significar um mero descuido. Porém, o mais provável é que ele esteja com dificuldades para transitar entre as funções envolvidas. Neste sentido, não é surpresa sua conclusão de que os limites de f e g, para h tendendo a zero, são iguais.

Em relação ao conceito de limite**,** vejamos o que escreveram quando solicitados à responderem à seguinte questão (as compreensões sobre continuidade já foram citadas acima):

Explique o que você entende sobre os conceitos de ***Limite*** **e** ***Continuidade*****.**

(LE1$_{EDS}$) É um valor que a função tende a assumir a medida que aproximamos de um único valor (um ponto) que pertence ao domínio dessa função.

(LE1$_{TER}$) Este conceito serve para analisar gráficos. Limite: análise do gráfico, tendo em vista um ponto e o comportamento de pontos ao redor deste.

LE1$_{EDS}$ sugere que, para Edson, a idéia imediata de limite é a de um objeto bem definido, ou seja, um valor, ao passo que, para Teresa, limite evoca, primeiramente, um processo de análise de comportamentos.

Edson: **(F1$_{EDS}$)** Ah,... assim... espere aí... o domínio é o mesmo, a imagem é a mesma para x, e o h é igual a zero.

A derradeira fala de Edson (F1$_{EDS}$) sugere que ele, finalmente, se dá conta da necessidade de explicitar outros elementos componentes da definição de uma função. No entanto, embora *domínio* e *imagem* sejam citados, estes elementos parecem ter emergido de maneira pouco significativa. Além disso, como tem se tornado padrão, o *contradomínio* sequer foi mencionado.

Assim, parece natural que respostas para os itens abaixo tenham permanecido em suspensão:

- A definição de *g*;
- A definição da *função derivada de f;*

- A relação entre *g* e a *função derivada de f.*

Em relação ao **simbolismo** normalmente utilizado no tratamento desses conceitos, vale a pena apresentar as respostas escritas apresentadas para a seguinte questão:

Considere uma função derivável f : A → B, definida por y = f(x). Explique os significados que você atribui aos seguintes símbolos: f ’ e f ’(x).

(DE3$_{EDS}$) f ‘ → Derivada da função em um “x” qualquer pertencente ao domínio da f.
f ‘(x) → Derivada da função num ponto dado.

(DE3$_{TER}$) Significam a mesma coisa: derivada. São maneiras diferentes de escrever.

Para fins de comparação:

(DE3$_{DAN}$) F ‘ e F ‘(x) são derivadas da função em relação a x.

(DE3$_{GIS}$) f ‘ : função derivada.
f ‘(x) : função derivada de f(x)

(DE3$_{JUL}$) f ‘ (notação para derivada de f, sendo f uma função).
f ‘(x) (notação para derivada de f em x)

(DE6$_{PED}$) f ‘ → derivada
f ‘(x) → função derivada

(DE8$_{TAL}$) f ’ derivada de f (função)
f ‘(x) derivada de fx)
para mim é a mesma coisa

(DE$_{VER}$) f ’(x) → derivada de f no ponto x. O outro símbolo não sei o significado.

Em relação ao conceito de derivada, a idéia absolutamente prevalecente — e que será objeto de uma seção no final dessa série de episódios — é a que emerge da interpretação geométrica, ou seja, a de derivada como coeficiente angular de uma reta tangente num ponto do gráfico de uma função. Já em relação à função derivada, a situação não parece tão clara, particularmente para Edson ($DE2_{EDS}$). Mesmo no caso de Teresa, é difícil asseverar que o conceito tenha sido abordado com segurança, até porque os exemplos dados por ela poderiam refletir apenas uma mera mecânica de derivação, largamente utilizada por qualquer pessoa minimamente iniciada no conceito.

5.4.3 Uma Análise Inicial do Episódio

Uma análise inicial do episódio permite sugerir que os estudantes transitaram com algum desconforto entre os conceitos envolvidos na questão. É natural, portanto, que respostas para os itens solicitados permanecessem em suspensão. Em outras palavras, por que

- A definição de *g*;
- A definição da *função derivada de f;*
- A relação entre *g* e a *função derivada de f.*

não ficaram esclarecidas? E, por fim, o que sugerem tais compreensões sob o ponto de vista da Educação Matemática no Ensino Superior?

Em relação ao papel das definições em Matemática, ele não parece gerar grandes controvérsias no meio matemático. Como diz Bicudo (2002, p. 80):

> De fato, parece um fato notório que o matemático, quando expõe uma teoria, em sua área de interesse, a seus pares, preocupa-se, formalmente, com duas operações fundamentais: DEFINIR seus conceitos e DEMONSTRAR as propriedades desses conceitos.

Em Educação Matemática, no entanto, seu papel está longe de ser tão claro. Por se ocupar menos com os aspectos formais da Matemática, e mais com elementos como compreensão, significado ou imagens dos conceitos, na Educação

Matemática as perspectivas sobre as definições matemáticas mudam de foco. Um dos estudos mais tradicionais sobre o papel das definições em Educação Matemática pode ser encontrado num artigo de Vinner (1991, p. 65, tradução nossa). Segundo este autor, a apresentação e a organização da Matemática em livros-texto ou salas de aula são parcialmente baseadas nos seguintes pressupostos:

- Conceitos são adquiridos principalmente por meio de suas definições;
- Estudantes usarão as definições para resolver problemas e provar teoremas quando necessário segundo o ponto de vista matemático;
- Definições devem ser minimalistas;
- É desejável que as definições sejam elegantes;.
- Definições são arbitrárias.

A proposta de Vinner, em termos de *definição do conceito* e *imagem do conceito*, embora tenha o mérito de "provocar" e induzir uma mudança de perspectiva em relação ao formalismo da visão tradicional, não leva em conta a crescente influência das novas mídias no processo de construção conceitual. Embora o presente episódio não tenha explorado as influências do CAS neste processo (o(a) leitor(a) poderá recorrer aos três outros episódios para isto), eu gostaria de destacar que, segundo este autor (VINNER, 1991, p. 68):

"A imagem do conceito é algo não-verbal associado em nossa mente com o nome do conceito."

Ocorre que com os recursos dos novos sistemas computacionais simbólicos, a rapidez e a volatilidade com que imagens, resultados de cálculos, gráficos, etc. surgem na tela de um computador tende a desestabilizar quaisquer eventuais "imagens bem definidas" sobre um dado conceito que eventualmente já tenhamos construído em nossas mentes. As conseqüências dessas interações podem ser, por assim dizer, brutais em termos de "interferências" nas imagens do conceito.

Outros pontos também merecem ser destacados em relação à posição de Vinner. O autor fala explicitamente em *adquirir um conceito*, conforme apresentado, neste mesmo artigo, na seção sobre *Formação de Conceito* (p. 69):

"Nós assumimos que adquirir um conceito significa formar uma imagem do conceito para ele".

Neste contexto, a*dquirir* me parece muito menos apropriado do que *construir*. A construção de um conceito é um processo complexo e, como tal, dificilmente ocorre num ato único, como sugere o verbo *adquirir.* Além disso, nesta mesma citação, o autor reduz ainda mais a "aquisição" de um conceito à formação de "uma" imagem deste conceito. Na verdade, as imagens que o(a)s estudantes constroem sobre conceitos matemáticos são inúmeras — não raramente gerando conflitos entre si — e, apesar disso, tais "configurações" de imagens não parecem, em geral, garantir segurança na "lida" com os conceitos, o que seria de se esperar de alguém que os tivessem "adquirido".

Um outro ponto importante e que fundamentou a construção do episódio acima, refere-se à dependência entre os conceitos. O conceito de derivada ou de função derivada — no contexto de um curso padrão de Cálculo — dependem direta e intimamente dos conceitos de função e de limite. Neste sentido, quaisquer imagens, construídas ou "adquiridas", sobre o conceito de derivada ou de função derivada serão dependentes daquelas construídas sobre os outros conceitos supra-referidos.

Para finalizar, o episódio sugere que a manipulação dos elementos da definição de derivada, de sua relação com a chamada razão incremental, ou taxa média de variação de f, e, finalmente, da relação com a própria definição de função derivada, parecem se desenvolver numa rede semântica que apresenta uma razoável fragilidade em vários de seus nós e em várias de suas inter-relações.

5.5 TERCEIRO EPISÓDIO

Limites – Conflitos com o Conceito

Este episódio foi construído com o objetivo de evidenciar os conflitos emergentes da investigação do comportamento e da existência de limite em x = 0 para duas funções particulares *g* e *k*. Ambas as funções foram deliberadamente apresentadas no enunciado da questão geradora do episódio na forma em que usualmente aparecem em livros de Cálculo, isto é, domínio e contradomínio ficaram, como de costume, “subentendidos”:

$$\textit{Considerem } g(x) = x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ e } k(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

As peculiaridades dessas funções, particularmente numa vizinhança da origem, provocaram a emergência de boas discussões e também de conflitos irreconciliáveis para todas as duplas participantes do experimento. A fim de ilustrar o tipo de discussão e de conflitos que permearam os experimentos, Vera e Gisele foram chamadas a contribuir para a construção deste episódio.

5.5.1 **Um perfil da dupla Vera e Gisele**

Vera e Gisele estão ambas na faixa dos 18 anos, não tinham tido qualquer contato anterior com os conceitos de Cálculo e, em termos de notas nas avaliações formais na disciplina, se mantiveram na faixa dos 60% melhores resultados em sua turma. Vera e Gisele aparentam ser bastante reservadas e não exibem a loquacidade e a exuberância da oralidade da dupla Pedro e Talita.

O questionário abaixo foi respondido no início das prospecções para a seleção dos participantes da pesquisa:

- **A Matemática que você estudou no ensino médio (2º grau):**

Gisele: Acho que aprendi toda a matéria prevista para o 2º grau (álgebra e geometria)

Vera: Tive pouca Matemática no ensino médio, pois fiz magistério e técnico em informática. No magistério tive só nos dois primeiros anos e em informática eram só matérias técnicas. A maior parte da Matemática do ensino médio aprendi no cursinho

- **Facilidades e dificuldades que você sentiu e/ou sente em relação à Matemática.**

Gisele: Sempre tive facilidade em aprender Matemática (a matéria do 2º grau).

Vera: Tenho facilidade para aprender Matemática.

- **Facilidades e dificuldades que você sentiu e/ou sente em relação à escrita (cartas, redações, etc.)**

Gisele: Nunca gostei muito de escrever redações. Para mim é difícil "colocar no papel" as minhas idéias.

Vera: Tenho facilidade para fazer narrativas e um pouco de dificuldade em cartas e dissertações.

- **Facilidades e dificuldades que você sentiu e/ou sente em relação à informática:**

Gisele: Nunca procurei "mexer" muito no computador, por isso não sei falar das minhas dificuldades (apenas faço os trabalhos escolares)

Vera: Tenho facilidade em informática, pois fiz o curso técnico e trabalhei 7 anos como programadora, só parei este ano por causa da faculdade.

- **Razões para a participação na pesquisa:**

Gisele: Gostaria de participar de algo sobre informática porque quero aprender tudo relacionado à Matemática.

Vera: Gostaria de participar pois tenho interesse na área de informática e gostaria de no futuro “casar” o meu curso de Matemática com a informática.

5.5.2 Construindo o Episódio

A questão abaixo foi proposta no experimento com duplas na fase de investigação de compreensões do conceito de *limite*. Para facilitar a legibilidade, o esquema de cores adotado para destacar as falas e escritos dos estudantes será o mesmo utilizado em outros episódios, exceto que, no presente episódio apenas os conceitos de função e limite apareceram na discussão. Assim sendo, teremos a seguintes legenda:

Função

Limite

Oralidade:

Fn_{VER}, Ln_{VER}: n-ésima unidade de análise da **<u>fala de Vera</u>** associada à Função e Limite, respectivamente.

Fn_{GIS}, Ln_{GIS},: n-ésima unidade de análise da **<u>fala de Gisele</u>** associada à Função e Limite, respectivamente.

Escrita:

FEn_{VER}, LEn_{VER}: n-ésima unidade de análise da **<u>escrita de Vera</u>** associada à Função e Limite, respectivamente**.**

FEn_{GIS}, LEn_{GIS},: n-ésima unidade de análise da **<u>escrita de Gisele</u>** associada à Função e Limite, respectivamente.

 Sugestão analítica categorizando uma ou mais unidades de análise da escrita como **compreensão compatível com a discussão emergente e com o(s) objetivo(s) da questão em pauta.** A cor de fundo do ícone é associada à cor (segundo o padrão já estabelecido) do conceito respectivo.

 Sugestão analítica categorizando uma ou mais unidades de análise da escrita como **compreensão parcialmente compatível com a discussão emergente e com o(s) objetivo(s) da questão em pauta**. A cor de fundo do ícone é associada à cor (segundo o padrão já estabelecido) do conceito respectivo.

 Sugestão analítica categorizando uma ou mais unidades de análise da escrita como **compreensão incompatível com a discussão emergente e/ou com o(s) objetivo(s) da questão em pauta**. A cor de fundo do ícone é associada à cor (segundo o padrão já estabelecido) do conceito respectivo.

Informática – CAS:

	Sugestão analítica categorizando a utilização do CAS como se este fosse uma “**calculadora sofisticada**” que opera simbolicamente.
	Sugestão analítica categorizando a utilização do CAS como **exploração para testar conjecturas.**
	Sugestão analítica categorizando o *Feedback* do CAS como **interferência substancial na compreensão** do(a) participante sobre o conceito de **derivada.** Caso a interferência seja interpretada como sendo em relação a outro conceito, a cor de fundo do ícone é alterada para a cor respectiva (segundo o padrão já estabelecido).
	Sugestão analítica categorizando o *Feedback* gráfico do Sistema como “**aberração**” ou como **representação insatisfatória.**

Conforme já afirmado, o tratamento dado às funções que aparecem no enunciado da questão foi deliberadamente similar aquele encontrado em livros ou em listas de exercícios tradicionais de Cálculo, ou seja, fixam-se as regras das funções e deixam-se subentendidos seus respectivos domínios e contradomínios. Assim, o contradomínio é $\mathbb{R}$ e o domínio é o “maior” subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que a regra da função respectiva faça sentido.

O objetivo da questão foi explorar as compreensões do(a)s estudantes sobre os conceitos de *função* e *limite* enquanto este(a)s investigavam — num ambiente de integração com as outras mídias em pauta — a existência e seus respectivos valores para duas funções g e k.

A questão proposta foi a seguinte:

Considerem $g(x) = x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e $k(x) = \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

i) Comparem e expliquem o comportamento de g e k próximo da origem.

ii) O que se pode dizer em relação a $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} k(x)$

Vejamos, então, o episódio:

[Vera começa a gerar os gráficos das funções dadas no MAPLE]

```
plot(x*sin(1/x),x);
```

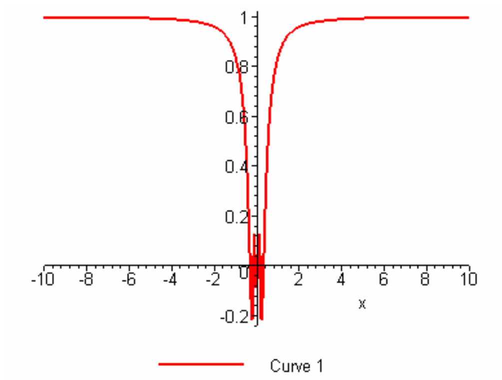


Gráfico 6

```
plot(sin(1/x),x);
```

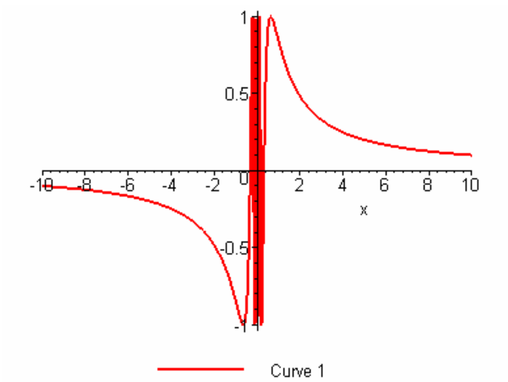
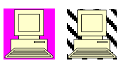


Gráfico 7

Gisele: **($F1_{GIS}$)** Acho que as funções passam pela origem...

 Não é de se estranhar a afirmação $F1_{GIS}$. Se, por um lado, o gráfico gerado pelo CAS permite uma visão global razoável do comportamento da função, o mesmo não pode ser dito sobre seu comportamento local, particularmente

em x = 0 da função $k(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. De todo modo, é razoável a sugestão de uma interferência da imagem gerada no pensamento de Gisele. Em caso contrário, seria improvável a emergência de uma afirmação como a de $F1_{GIS}$.

> **Vera**: **($F1_{VER}$)** Mas elas não estão definidas no zero. Então não pode passar...
>
> *[pausa]*
>
> **Gisele**: **($F2_{GIS}$)** Não sei...

$F1_{VER}$ sugere que o olhar de Vera já está “treinado” para identificar e descartar imediatamente quaisquer possibilidades de denominadores nulos em quocientes que eventualmente apareçam em cena. Assim, tanto o gráfico de g quanto o de k não podem passar pela origem, já que, neste caso, ter-se-ia um denominador zero quando x = 0 fosse submetido à regra de cada uma das funções.

 Gisele, no entanto, sugerindo não possuir o mesmo olhar clínico de Vera no que tange à “observação de denominadores”, não parece, por $F1_{GIS}$ e $F2_{GIS}$, estar convencida, mesmo depois da observação de Vera. Isto reforça a possibilidade de que as representações gráficas geradas pelo CAS tenham, de fato, contribuído para induzi-la a considerar a origem como ponto dos gráficos das respectivas funções. Por outro lado, é possível também que se tais funções fossem explicitadas no enunciado da questão de maneira completa, por exemplo, $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, esta dúvida não aparecesse. Mas, vamos rever o que ambas escreveram sobre o conceito de função:

> **($FE1_{VER}$)** <u>É uma relação</u> entre duas variáveis, ou seja, para eu saber o valor de uma variável eu preciso da outra.
>
> **($FE1_{GIS}$)** <u>É uma relação</u> de dependência entre "objetos".

Esta visão de função como relação já foi discutida nos episódios anteriores. De todo modo, apesar de compatíveis com o desenvolvimento até aqui, não parecem ser totalmente compatíveis com os objetivos da questão.

Pesq: A função *g* passa pela origem?

Vera: Ela tá falando que passa... e eu que não *[risos]*

Vera: Porque... é... é 1/x, né? Não está definida no zero..., mesmo sendo no zero.

Pesq: E a função k ? O gráfico passa pela origem?

Vera: Não.

[pausa]

Vera: É... **($L1_{VER}$)** o limite eu acho que seria zero, porque, que nem *a* no zero. Então, o limite seria zero.

Pesq: De qual função?

Gisele: **($L1_{GIS}$)** Da g(x). Da outra não dá...

Vera: **($L2_{VER}$)** Não! Da k(x).

[risos]

Vera: **($L3_{VER}$)** Cada uma diz uma coisa...

A impressão aqui é que o “olhar clínico” de Vera sobre quocientes predomina — ao contrário de Gisele — sobre as imagens geradas pelo sistema. É possível que, tendo sido atraída pelo quociente $\frac{1}{x}$ da regra da função composta k(x) = sen$\frac{1}{x}$, Vera tenha associado este quociente a zero e, em conseqüência, o limite da própria função k com zero. A associação ente $\frac{1}{x}$ e convergência a zero não é incomum quando o conceito de limite está sendo estudado pela primeira vez.

Talvez a ocorrência desta associação se deva à presença razoavelmente freqüente de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ em várias situações no tratamento de limites no infinito. Por outro lado, por que ela não fez a mesma associação no caso da função g, já que esta também possui o quociente $\frac{1}{x}$? Difícil dizer, mas a questão em pauta não é $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$, mas sim $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$. De todo modo, $L1_{GIS}$, $L2_{VER}$ e $L3_{VER}$ ilustram o conflito de visões na discussão de eventuais convergências de g e k em x = 0.

Sobre compreensões o conceito de limite materializados nos escritos, segue abaixo, como ilustração das "nebulosidades" freqüentes sobre o conceito:

> **($LE1_{GIS}$)** Limite são os valores próximos de um ponto p que uma função assume (f(p)).

Vera: A gente pode fazer aqui *[no CAS]*, não pode?

Pesq: Claro. Tem também limite à esquerda e à direita.
[Vera calcula o limite de g em zero e limite à esquerda de k em zero]:

```
limit(x*sin(1/x),x=0);
```

$$0$$

```
limit(sin(1/x),x=0,left);
```

$$-1 \,..\, 1$$

A sugestão aqui é que houve dois tipos de interação: um teste de uma conjectura (Vera acha que o limite de $k(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ na origem é zero) e, posteriormente, a exploração da potencialidade do CAS de calcular limites (quando existem, obviamente) de funções num dado ponto ou no infinito, ou seja, o Sistema foi explorado também como uma calculadora sofisticada. Vale destacar aqui que calcular limites "eletronicamente" era uma possibilidade remota numa aula de Cálculo há apenas algumas décadas.

Vera: Mas por quê?!

[pausa]

 Os *outputs* do CAS parecem causar surpresa a ambas, mas principalmente à Vera. Como não existe limite de k em zero, o sistema gera como resposta os extremos entre os quais k(x) fica oscilando. Por ter tido sua conjectura contestada pelo CAS, Vera procura agora na representação gráfica alguma razão que justifique o fato de $\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ não ser igual a zero. Para isso, ela fixa o olhar por alguns minutos no monitor enquanto Gisele escreve.

Vera *[falando baixo, enquanto olha para o monitor]* : Ah..., já entendi....

Pesq: Você entendeu o comportamento de qual?

Vera: Não... É que eu falei que ia dá zero, mas, é e não é... porque **($F2_{VER}$)** estou vendo que 1/x vai cada vez mais para zero. Só que **($F3_{VER}$)** sen(1/x) é seno de quase zero. **($F4_{VER}$)** Seno de zero é 1 e -1 então... Eu estava pensando só no 1/x. Mas, na verdade, é sen(1/x). Como 1/x está cada vez mais indo para zero, o seno disso vai ser 1 e -1.

[pausa]

Uma interpretação apressada de $F2_{VER}$ e $F3_{VER}$ poderia concluir que Vera não soube avaliar corretamente os limites de $\frac{1}{x}$ e de $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para x tendendo a zero. Houve, de fato, um equívoco, mas que dificilmente poderia ser creditado ao desconhecimento da estudante sobre o comportamento de $\frac{1}{x}$. O mais provável é que, como sugeri acima, Vera tenha "olhado" para o limite de $\frac{1}{x}$, com x tendendo a zero (limite que não existe) e, ansiosa para encontrar alguma justificativa para os resultados apresentados pelo sistema, o tenha associado "automaticamente" ao "clássico" $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$, que é zero. Esse tipo de "automatismo" de associações em atividades matemáticas não é incomum e, sem dúvida, mereceria um estudo à parte. De todo modo, o raciocínio da estudante sugere uma busca por referências que representem alguma segurança no trânsito por este "terreno escorregadio" em que se situa o conceito de limite.

Com objetivo de continuar a "provocação", eu pergunto:

Pesq: Isso quer dizer que pela esquerda dá um valor e pela direita dá outro?

Vera entra novamente com a função sen$\left(\frac{1}{x}\right)$ no sistema para obter o limite à esquerda de zero:

```
limit(sin(1/x),x=0,left);
```

$$-1 \,..\, 1$$

O resultado parece continuar desapontador... Mas, ainda assim, induz Gisele a fazer a próxima pergunta sobre funções:

[risos]

[pausa]

Gisele: ($F3_{GIS}$) Mas daí então quando o x é zero, o y pode ser -1 e 1 ?

$F3_{GIS}$ sugere que Gisele está plenamente consciente de uma das condições necessárias da definição de uma função, a saber, a impossibilidade de que um elemento tenha duas imagens distintas. Por outro lado, sugere também que a possibilidade de x assumir o valor zero continua intacta em suas conjecturas, o que me induz a provocá-la:

Pesq: Mas o x pode ser zero aí?

Vera: Não.

Gisele: **(F3$_{GIS}$)** Mas e se fosse traçar o gráfico?

Mesmo com minha pergunta praticamente induzindo uma resposta negativa, a representação gráfica de sen$\left(\frac{1}{x}\right)$gerada pelo sistema parece continuar impressionando Gisele, a ponto de levá-la a continuar considerando que um suposto (0, k(0)) seria um ponto do gráfico de k. É evidente aqui a interferência da mídia no raciocínio da estudante.

Vera: Então, aí ia ficar isso aqui, ó...

```
plot(sin(1/x),x);
```

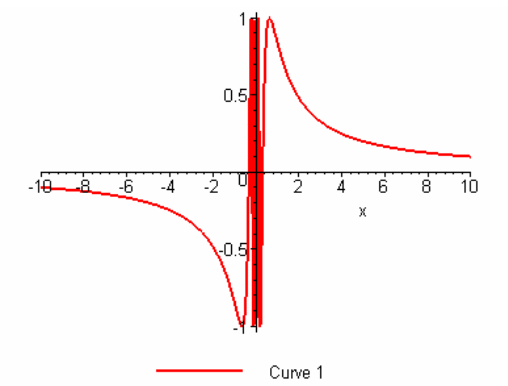


Gráfico 8

Vera: É que quando..., vamos pegar, por exemplo, ao invés de zero, como a gente está falando, tivesse seno de 30. A gente tem 30 e -30, ou..., 120... Seria o mesmo, alguma coisa assim...

Gisele: É, não sei explicar também...
[risos]

 Vera se esforça para encontrar uma justificativa que compatibilize as imagens gráficas com os limites calculados pelo sistema. Nenhuma das duas, no entanto, parece estar convencida dos resultados obtidos.

5.5.3 Uma Análise Inicial do Episódio

O episódio acima ilustra uma pequena — mas crucial — parte das dificuldades por que passam o(a)s estudantes que estão se iniciando no processo de transição do estático para o dinâmico, experenciando os movimentos inerentes à dualidade local/global — já referida no episódio anterior — e, grosso modo, vivendo a primeira fase da transição para a matemática universitária. Não é, portanto, surpresa que as compreensões das estudantes sugiram um desconforto razoável no trato com os conceitos envolvidos na questão.

As dificuldades epistemológicas do Cálculo, já abordada nas análises iniciais dos episódios anteriores, são aqui, novamente, chamadas a ocupar suas posições na urdidura da rede de possíveis compreensões sobre os conflitos emergentes neste 3º episódio. Neste sentido, a dualidade local X global e o conceito de função continuam a ocupar uma posição destacada nesta análise.

Estudos em Educação Matemática com foco na aprendizagem do conceito de *Limite* têm sido produzidas principalmente a partir da década de 1980, com trabalhos como os de Tall, Cornu, Sierpinska e Vinner, para citar os mais conhecidos. A construção de uma compreensão profunda, densa e abrangente dos processos inerentes a esta aprendizagem, no entanto, ainda está em curso, dada a complexidade da matéria e a quantidade de fatores intervenientes nestes processos. Não é sem razão, portanto, que novas pesquisas sobre o tema continuam a ser produzidas.

Neste sentido e a fim de estabelecer um diálogo inicial com a literatura, eu destacarei um dos trabalhos mais recentes — Przenioslo (2004) —, que desenvolveu um estudo extensivo sobre a compreensão do conceito de limite por alunos universitários de Matemática na Polônia. Neste trabalho, a autora categorizou as seguintes idéias destes alunos sobre limite de uma função f num ponto x_0:

I. vizinhança
II. aproximação via gráfico
III. aproximação via valores
IV. f definida em x_0
V. limite de f em x_0 igual a $f(x_0)$
VI. algoritmo

Comparando estas categorias com os resultados das interações emergentes no episódio protagonizado por Vera e Gisele, é razoável a sugestão de que as compreensões destas alunas estavam impregnadas das idéias II, IV e V. O impacto dos gráficos gerados pelo CAS sobre suas compreensões é notável e permeou todo o experimento. A idéia IV, de f ser ou não definida em $x_0 = 0$, foi prontamente descartada por Vera, mas continuou gerando conflito para Gisele até o final do experimento. As idéias I e III, de *vizinhança,* no sentido topológico, e de aproximação via valores, respectivamente, não foram explicitamente evocadas, mas sugerir que as alunas não tenham pensado sobre elas durante o experimento é discutível. Finalmente, a idéia VI, de *algoritmo*, não emergiu, possivelmente porque a questão não demandava, explicitamente, as manipulações algébricas usuais.

De todo modo, é quase certo que a definição formal de limite de f em x_0, uma vez trazida explicitamente à cena, pouco contribuiria para desembaraçar os conflitos emergentes. Isto porque o principal papel desta definição é *justificar* que, de fato, um certo candidato L é — ou não — o limite de uma dada função f num ponto x_0. Ora, não há o que justificar, quando não se tem sequer um bom candidato (ou quando tantos parecem razoáveis...) a assumir a posição. A idéia e) (limite de f em x_0 igual a $f(x_0)$), em geral, é a primeira que surge na abordagem a uma questão de cálculo de limite de uma função num ponto x_0. O problema é que “limites interessantes” ocorrem apenas em pontos onde f *não* é contínua, até porque, caso contrário, o próprio conceito de limite perderia sua razão de ser. Surge aí um primeiro conflito, já levantado acima, ao longo do episódio:

Se tomarmos a posição de alguns livros de Cálculo de que uma função f não estar definida em x_0 é condição suficiente para que f não seja contínua neste ponto, chegaremos à conclusão que a função $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/x$, para todo x, é descontínua... E, novamente, faz sentido investigar descontinuidades em pontos fora do domínio de f? É claro que isto não é um conflito "real" para alguém já iniciado(a) nas sutilezas da disciplina, mas, provavelmente, é um gerador de conflitos para quem está se iniciando.

Mas como este último ponto já foi abordado em episódios anteriores, vamos deixá-lo de lado por um momento para discutir o encaminhamento usual que o(a) estudante é induzido(a) a seguir quando aborda um problema típico de *calcular* o limite de uma função *f(x)* num ponto x_0. Os itálicos em *calcular* e *f(x)* se devem ao seguinte:

Primeiramente, se a questão solicita *calcular* o limite, então ela já está implicitamente (ou explicitamente ?) assegurando que o limite <u>existe</u>. Em segundo lugar, não há, como de costume, qualquer menção ao domínio e ao contradomínio da função (estão subentendidos...). A função, apresentada como f(x) em grande parte das questões, normalmente é definida por um quociente na forma $\frac{m(x)}{n(x)}$ e o limite é propositalmente solicitado num ponto x_0 onde $n(x_0) = 0$. Uma vez constatado este "defeito" de f se anular justamente no ponto onde o limite é solicitado, o passo seguinte é "descobrir" um jeito de fatorar, racionalizar, simplificar ou o que mais for necessário para maquinar o "desaparecimento" do incômodo denominador nulo. Na verdade, um problema algébrico procedural, típico do Ensino Médio, estava "disfarçado" como um problema de limite. Consideremos, agora, que os procedimentos algébricos supra-referidos estão, em geral, disponíveis nos sistemas de computação algébrica e que, além disso, o próprio cálculo de limites, limites laterais, limites no infinito, etc, são recursos facilmente utilizáveis e que já poderiam estar à disposição do(a) estudante de forma generalizada, e não será difícil chegarmos à conclusão de que a integração desses sistemas à vida estudantil do(a) aluno(a) de Cálculo tem que ser pelo menos discutida.

As dificuldades e conflitos que emergiram ao longo deste episódio podem ser considerados naturais nesta fase de iniciação ao Cálculo, se os entendermos como reflexo do atrito gerado no processo de transição da matemática do Ensino Médio para a matemática do Ensino Superior. Esta transição, da relativa estabilidade e do caráter notadamente estático dos conceitos e procedimentos para a dinâmica que caracteriza o Cálculo, encontra no conceito de limite uma de suas maiores fontes de atrito. Obviamente, como qualquer processo de aprendizagem de novos conceitos, o nível de atrito gerado no processo é função de vários fatores. Porém, no presente contexto, restringir-me-ei ao item ii) da questão geradora do episódio:

O que se pode dizer em relação a $\lim_{x \to 0} g(x)$ e $\lim_{x \to 0} k(x)$?

Para um(a) aluno(a) que está se iniciando no Cálculo, a manipulação simbólica de $\lim_{x \to 0} g(x)$ está longe de ser natural e confortável. Junte-se a isso as peculiaridades das duas funções em pauta e veremos o potencial de emergência de conflitos ser consideravelmente elevado, como, de resto, o episódio ilustra.

A fim de que o(a) leitor(a) possa munir-se de mais elementos a respeito das compreensões, não apenas da dupla ora referida (e que estarão em destaque), mas, também, das compreensões do(a)s demais participantes, eu apresentarei, logo abaixo, vários de seus escritos sobre os conceitos de limite e continuidade, produzidos a partir de questões propostas nos experimentos. Vale a pena lembrar que todos os textos são *ipsis-litteris*.

A primeira questão solicitava:

Explique o que você entende sobre os conceitos de **Limite** e de **Continuidade.**

(LE1$_{GIS}$) Limite são os valores próximos de um ponto p que uma função assume (f(p)).

(CE1$_{GIS}$) Continuidade: “É quando o gráfico de uma função não possui saltos”. Se você pegar um intervalo em torno de f(p) e pegar um intervalo em torno de p → qualquer ponto (pertencente ao intervalo) terá imagem no intervalo em volta de f(p) → se isso acontecer é fç contínua.

(CE1$_{VER}$) Continuidade → algo sem interrupção. Esses dois conceitos ainda não estão muito claros para mim *[Vera nada escreve sobre limites, na resposta à esta questão]*

(LE1$_{DAN}$) Limite nos dá a idéia, que você quer saber, qual o ponto máximo para atigir *[sic]* algo sem ultrapa-lo *[sic]* de vários lados aonde está definida a função. Ou seja quanto posso alcançar em um determinado ponto no caso de uma função com um variável tenho que verificar do lado esquerdo do ponto e do lado direito do ponto, lembrado que este ponto não tem que necessariamente tem que esta definida na função e que em ambos os lados tem que aproximar da mesma forma.

(CE1$_{DAN}$) Continuidade, nos remete, a dizer que nenhum elemento do domínio de uma função não pode ficar sem nenhum correspondente em y.

(LE1$_{EDS}$) Conceito de Limite → É o valor que uma função tende a assumir a medida que aproximamos de um único valor (um ponto) que pertence ao domínio dessa função.
(CE1$_{EDS}$) Conceito de Continuidade → Uma função é dita contínua, se conseguirmos fixar um intervalo qualquer em torno de um ponto pertencente à imagem e que posteriormente seja possível encontrar um intervalo em torno do ponto do domínio (correspondente a essa imagem) tal que todas as imagens pertencentes aos pontos desse intervalo (do domínio) esteja contida no intervalo fixado na imagem.

(LE1$_{JUL}$) Limite: dizemos limite quando queremos indicar o que acontece próximo a um outro ponto do domínio da função x, e o que acontece com as proximidades do ponto.

(CE $_{JUL}$) Continuidade: dizer se uma função é ou não contínua, é dizer se existem ou não "interrupções" ou "buracos" no traçado do gráfico de tal função.

(LE1$_{PED}$) Algumas vezes precisamos de ferramentas que nos possibilitem o trabalho com funções, e limite e continuidade são duas delas. Limite nos permite averiguar o que acontece nas proximidades de um ponto. Exemplo: o que acontece com a pressão de um gás quando seu volume se aproxima de um valor?
(CE1$_{PED}$) Continuidade: nos permite verificar se não há "lacunas" entre os pontos da função. Exemplo: será que o gráfico da pressão x volume apresenta alguma "não-suavidade" pulando de um valor para outro.

(LE1$_{TAL}$) Limite em um certo ponto de uma função é quando o x se aproxima de certo ponto, qual ponto y se aproxima, não importando o ponto x em si, somente suas laterais.

(CE1$_{TAL}$) Continuidade é o fato de em todos os pontos desta função os limites correspondem a função em si, de outra forma, não há saltos no gráfico da função.

(LE1$_{TER}$) Este conceito serve para analisar gráficos. Limite: análise do gráfico, tendo em vista um ponto e o comportamento de pontos ao redor deste.

(CE $_{TER}$) Continuidade: análise de um ponto dado ou genérico e o comportamento deste ponto e o que estão ao seu redor. Continuidade diferencia de limite, pois em continuidade é interessante o ponto, já em limite este não faz diferença.

As compreensões acima sugerem algum desconforto no trato com os conceitos em pauta. Assim, dado o contexto de um primeiro curso de Cálculo, dificilmente se poderia qualificar de "erro" (em inglês, *misconception*) algumas dessas afirmações. Pelo contrário, tais compreensões são bastante compatíveis com o referido contexto e com a "nebulosidade" que tais conceitos sugerem, quando explorados pela primeira vez.

Apesar disso, as respostas escritas dadas pelo(a)s participantes à outras questões no mesmo experimento sugerem, também, que ele(a)s conseguem "navegar" no meio dessa "nebulosidade" com um senso de orientação razoável, desde que se apóiem em "instrumentos de navegação" significativos para ele(a)s. Alguns destes instrumentos são os gráficos e as imagens por eles evocados. Como todo instrumento, eles podem também induzir interpretações mais ou menos problemáticas para quem os maneja. Apoiados nestes instrumentos, a compreensão do conceito de limite como um *processo* — no qual a idéia de *aproximação* se destaca — e como um *ponto* ou *número*, tomado como referência para se avaliar esta aproximação apareceram nos escritos, como se pode ver nas respostas ao experimento. Neste sentido, tomemos, por exemplo, a seguinte questão:

Suponhamos que o enunciado de um problema seja dado na forma "C*alcule o limite de uma função f num ponto* a". Explique o que está sendo solicitado.

(LE2$_{GIS}$) Está pedindo que ache os valores que a função assume <u>próximo</u> *[grifo de Gisele]* do ponto a → ou seja, valores próximos de f(a).

(LE2$_{VER}$) Vamos supor f(x) = 4x – 1 e a = 2. Temos o seguinte gráfico p/ esta função *[Vera esboça o gráfico da reta y = 4x – 1]*. Sabemos que quando x = 2 → f(x) = 7. Quando calculamos o $\lim_{x \to 2} f(x)$ queremos saber p/ qual valor f(x) vai quando x se aproxima de 2, no exemplo, $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$. Podemos calcular o limite de uma função quando <u>ela se aproxima de um número</u> onde a função ñ está definida, pois o que interessa são os valores próximos ao número.

($LE2_{DAN}$) O que está sendo solicitado é o valor y quando x se aproxima de a.

($LE2_{EDS}$) Está sendo pedido que valor essa função f irá assumir à medida que aproximarmos do ponto a do domínio, tanto pela esquerda quando pela direita.

($LE2_{JUL}$) Está sendo solicitado para que observe o que acontece com a função, ou seja, qual o comportamento dela, que ela assume, quando x se aproxima de a, ou quando x aproxima do ponto a o que acontece.

($LE2_{PED}$) A questão está perguntando, em outras palavras, "quais os valores que f(x) assume quando x fica cada vez mais próximo do ponto a". Por isso, descartaremos f(a) e usaremos apenas a informação ao redor.

($LE2_{TER}$) Está sendo pedido: Quando se pega pontos ao redor de a: pontos à direita e à esquerda, e vem analisando, se aproximando de a por ambos os lados, estes valores estão tendendo à a e pede-se á medida que isso ocorre, á que valor a f se aproxima.

($LE2_{TAL}$) Está sendo solicitado que quer o f(x) para pontos próximos de a e ver para que ponto f(x) está tendendo, tanto pela direita como pela esquerda de a.

Estas compreensões sugerem que, apesar das dificuldades naturais, inerentes ao tratamento dos conceitos de limite e continuidade, o(a)s participantes possuem uma visão razoável dos principais elementos constituintes dos referidos conceitos.

No caso do episódio em pauta, é provável que os conflitos tenham emergido principalmente em razão das peculiaridades das funções envolvidas. Com características que as diferem consideravelmente das referências tradicionais de funções a que o(a)s aluno(a)s, nesta fase introdutória, estão acostumado(a)s — onde regularidade e "bom comportamento" estão presentes ao longo de todo o domínio e, em geral, podem ser visualizados diretamente nos gráficos respectivos —, as funções g e k certamente contribuíram para produzir embaraços na análise da dupla Vera e Gisele. Mais uma vez, portanto, reforça-se a sugestão de que a cristalização e o condicionamento construídos em estágios anteriores — em geral, com base numa visão estática da Matemática — precisam ser desconstruídos, a fim de que novos espaços sejam abertos e sobre os quais novas construções possam ser fundadas na dinâmica e na liberdade inerentes aos conceitos em pauta.

É razoável, no entanto, sugerir que os conflitos emergentes no presente episódio não podem ser creditados exclusivamente às peculiaridades das funções envolvidas. Afinal, um dos dilemas freqüentes pode ser caracterizado na seguinte questão: existe ou não cada um dos limites investigados? Os recursos gráficos do CAS, por um lado, contribuíram para a emergência dos conflitos, já que os gráficos gerados, embora tenham interferido nas manipulações conceituais, não foram suficientes para induzirem conjecturas razoáveis sobre a convergência ou não das funções nos pontos investigados. Por outro lado, os recursos algébricos não só garantiam a convergência de k e a divergência de g, como apresentavam o valor do limite da primeira e o intervalo de oscilação desta última à medida que x tendia a zero. Com base nestes elementos, o que se pode sugerir sob o ponto de vista da Educação Matemática no Ensino Superior para este caso?

A visão de limite como *processo* e *conceito*, encontrada na literatura (Tall et all, 2001) será analisada no capítulo seguinte. Ali, o(a) leitor(a) encontrará uma discussão e uma proposta de *algebrização* cujo objetivo é agregar alguma estabilidade ao conceito, sem, no entanto, sacrificar a riqueza de sua dinâmica. As respostas do(a)s participantes às questões acima sobre limite e continuidade, sugerem compreensões compatíveis com à referida proposta. Além disso, dado o contexto de um curso de Matemática, o exercício de uma visão teórica mais algébrica não se configuraria como uma excentricidade. Pelo contrário, explorar uma tal visão poderia se constituir em um elemento de integração entre Cálculo e Álgebra, disciplinas que tradicionalmente têm se mantido juntas no tempo, mas percorrendo linhas praticamente paralelas em termos conceituais.

Quanto ao conceito de função, que naturalmente subjaz ao de limite, algumas das sugestões já têm sido apresentadas e discutidas ao longo deste capítulo. Este episódio, no entanto, ilustra e sugere, mais uma vez, que a exploração de recursos gráficos e algébricos dos CAS pode contribuir para o amadurecimento matemático do(a) estudante, no sentido de que o potencial de exploração de funções peculiares — uma das sugestões desta pesquisa — é consideravelmente elevado dada a rapidez com que gráficos de funções complexas são gerados, resultados operacionais são prontamente obtidos e conjecturas exploradas.

5.6. QUARTO EPISÓDIO

A Função f e a Função Derivada de f:
Conflitos na Comparação de Seus Gráficos

Este episódio foi construído com o objetivo de evidenciar conflitos emergentes no processo de comparação entre o gráfico de uma função f — derivável em $\mathbb{R}$, mas não polinomial — e o gráfico de sua função derivada f ’, produzido pela dupla Daniel e Juliano. Diferentemente das questões geradoras dos episódios anteriores, o desenho das perguntas e o tipo de função escolhida podem ser considerados comuns em exercícios procedurais de cálculo de derivadas e de esboço de gráficos em cursos de Cálculo. A questão proposta foi a seguinte:

> Considerem a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$
>
> i) Esbocem o gráfico de f;
> ii) Calculem, pela definição, a derivada de f num ponto x;
> iii) Esbocem o gráfico de f ’;
> iv) Façam uma comparação entre os gráficos de f e f ’. Que interpretação vocês dariam para os valores de f ’(x) negativos, nulos ou positivos ?

O objetivo desta questão foi provocar a emergência de compreensões sobre o comportamento de funções cujas representações gráficas fossem “suaves” na totalidade de seus respectivos domínios, tivessem representações algébricas mais ou menos familiares e não apresentassem as singularidades das outras apresentadas nos experimentos anteriores. Suavidade ao longo de todo o gráfico de uma função é em geral associada ou identificada com derivabilidade global desta função. Assim, a idéia foi trabalhar com funções “bem comportadas”, mas não “tacitamente bem comportadas”, como é o caso das funções polinomiais, uma vez que, a essa altura do curso regular de Cálculo, tais funções, em geral, já são “automaticamente” identificadas pelo(a)s estudantes como deriváveis.

Uma função racional ímpar cujo numerador é um polinômio de 1º grau e o denominador um polinômio de 2º foi a escolhida. Dessa forma, busquei ampliar o foco da observação das compreensões emergentes do trânsito local/global — que esteve em pauta nos episódios anteriores — para priorizar compreensões que pudessem emergir em decorrência da interação e do "olhar" do(a)s estudantes para aspectos e características globais das representações algébricas e gráficas de uma função f "bem comportada" e de sua derivada f '.

Apesar das intenções iniciais, o desenvolvimento das interações da dupla Daniel e Juliano com o CAS acabou tomando um encaminhamento que, de certa forma, me surpreendeu e, como conseqüência, reforçou minha decisão de construir o episódio. De todo modo, o(a) leitor(a) terá a oportunidade de estabelecer seu próprio juízo e avaliar a pertinência — ou não — de que o referido encaminhamento fosse qualificado como singular. Paralelamente às razões supra-referidas, uma casualidade adicional contribuiu para que este episódio fosse construído e, portanto, merece ser destacada:

A dupla Daniel e Juliano foi a única dentre as duplas de participantes da pesquisa, cujos membros, à época da realização do experimento, já tinham desistido da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, na qual estavam regularmente matriculados. A desistência de ambos, que me fora comunicada pouco antes da realização do experimento não causou, no entanto, qualquer prejuízo à pesquisa, uma vez que a dupla manteve um vivo interesse em continuar com o trabalho até o seu final.

5.6.1 Um perfil da dupla Daniel e Juliano

Daniel e Juliano estão ambos na faixa dos 18 anos, não tinham tido qualquer contato anterior com os conceitos de Cálculo e, ao contrário das demais duplas, tiveram, desde o começo da disciplina resultados abaixo da média nas avaliações regulares da disciplina. Apesar de reservados, possuem um nível regular de fluência verbal e escrita, o que poderá ser constatado ao longo do episódio a seguir.

O questionário abaixo foi respondido no início das prospecções para a seleção dos participantes da pesquisa. Segue sua transcrição *ipsis-litteris*:

- **A Matemática que você estudou no ensino médio (2º grau)**

  Daniel: A Matemática que estudei no ensino médio não passou todo o conteúdo programado para o ensino médio. Quando estava fazendo o cursinho percebi que havia muitos temas não tinha sido discutido. Como, por exemplo: Binômio de Newton, Análise Combinatória, Sistemas Lineares, Estudo da Circunferência (equação), Estudo das Cônicas (equações).

  Juliano: Foi uma Matemática mais técnica, voltada para o vestibular, sem muita preocupação com as idéias conceituais por trás de cada tema estudado.

- **Facilidades e dificuldades que você sentiu e/ou sente em relação à Matemática.**

  Daniel: Uma facilidade que me mostra mais importante sempre perguntar "o porque" das coisas e sempre buscar chegar a uma conclusão lógica. Agora dificuldade não conseguir perceber que às vezes o caminho mais simples é o caminho certo e também buscar ferramentas certas para combater o problema.

  Juliano: Facilidades: habilidade para lidar com os números, exatidão, raciocínio abstrato, concentração, vontade para resolver problemas difíceis. Dificuldades: dificuldade de aprender sem saber o conceito e sem ter em mãos livros e apostilas que tratem de um assunto.

- **Facilidades e dificuldades que você sentiu e/ou sente em relação à escrita (cartas, redações, etc.)**

  Daniel: Facilidade usar bastante a imaginação. Dificuldades ortográficas como acentuação.

  Juliano: Facilidades: Capacidade de imaginação, vontade de escrever bem, muita leitura. Dificuldades: pouca atividade escrita, dificuldades com as normas e regras gramaticais, habituação pela linguagem falada.

- **Facilidades e dificuldades que você sentiu e/ou sente em relação à informática.**

  Daniel: Facilidade gosto muito de informática e sempre tento descobrir as coisa mechendo nos programas por mim mesmo.

  Juliano: Facilidades: computador em casa, curso de computação, grande tempo despendido com o computador. Dificuldades: pouca paciência para lidar com problemas de informática.

- **Razões para a participação na pesquisa:**

  Daniel: Gostaria de participar deste trabalho pois acredito que irei aprender muito com isto e ter idéia do que um matemático trabalha.

  Juliano: Porque vejo que o curso pode ser, uma oportunidade de transferir conhecimento e aumentar minha habilidade com a Matemática, melhorando assim o meu desempenho acadêmico e minha formação profissional.

5.6.2 Construindo o Episódio

A questão abaixo foi proposta no experimento com duplas na fase de investigação de compreensões do conceito de *derivada*. Assim como nos episódios anteriores, eu adotei a seguinte legenda:

Função **Continuidade**

Limite **Derivada**

Oralidade:

Fn_{DAN}, Ln_{DAN}, Cn_{DAN}, Dn_{DAN}: n-ésima unidade de análise da **fala de Daniel** associada à Função, Limite, Continuidade e Derivada, respectivamente.

Fn_{JUL}, Ln_{JUL}, Cn_{JUL}, Dn_{JUL}: n-ésima unidade de análise da **fala de Juliano** associada à Função, Limite, Continuidade e Derivada, respectivamente.

Escrita:

FEn_{DAN}, LEn_{DAN}, CEn_{DAN}, DEn_{DAN}: n-ésima unidade de análise da **escrita de Daniel** associada à Função, Limite, Continuidade e Derivada, respectivamente.

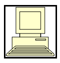
FEn_{JUL}, LEn_{JUL}, CEn_{JUL}, DEn_{JUL}: n-ésima unidade de análise da **escrita de Juliano** associada à Função, Limite, Continuidade e Derivada, respectivamente.

Sugestão analítica categorizando uma ou mais unidades de análise da escrita como **compreensão compatível com a discussão emergente e com o(s) objetivo(s) da questão em pauta.** A cor de fundo do ícone é associada à cor (segundo o padrão já estabelecido) do conceito respectivo.

Sugestão analítica categorizando uma ou mais unidades de análise da escrita como **compreensão parcialmente compatível com a discussão emergente e com o(s) objetivo(s) da questão em pauta**. A cor de fundo do ícone é associada à cor (segundo o padrão já estabelecido) do conceito respectivo.

Sugestão analítica categorizando uma ou mais unidades de análise da escrita como **compreensão incompatível com a discussão emergente e/ou com o(s) objetivo(s) da questão em pauta**. A cor de fundo do ícone é associada à cor (segundo o padrão já estabelecido) do conceito respectivo.

Informática - CAS

	Sugestão analítica categorizando a utilização do CAS como se este fosse uma **“calculadora sofisticada”** que opera simbolicamente.
	Sugestão analítica categorizando a utilização do CAS como **exploração para testar conjecturas.**
	Sugestão analítica categorizando o *Feedback* do CAS como **interferência substancial na compreensão** do(a) participante sobre o conceito de **derivada.** Caso a interferência seja interpretada como sendo em relação a outro conceito, a cor de fundo do ícone é alterada para a cor respectiva (segundo o padrão já estabelecido).
	Sugestão analítica categorizando o *Feedback* gráfico do Sistema como **“aberração”** ou como **representação insatisfatória.**

Relembremos a questão proposta:

Considerem a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

i) Esbocem o gráfico de f.
ii) Calculem, pela definição, a derivada de f num ponto x.
iii) Esbocem o gráfico de f ’.
iv) Façam uma comparação entre os gráficos de f e f’. Que interpretação vocês dariam para os valores de f ’(x) negativos, nulos ou positivos ?

Juliano: Bom... o gráfico..., vamos usar o Sistema. *[depois de experimentar alguns valores para a amplitude do gráfico no eixo x, eles ficam satisfeitos com o gráfico abaixo]*

```
plot(4*x/(x^2+1),x=-10..10);
```

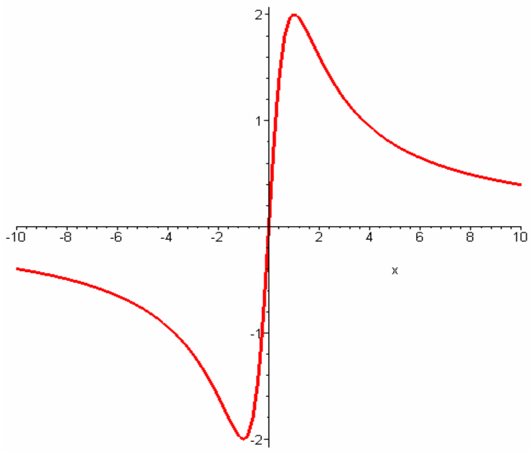


Gráfico 8 – Função f

Juliano: Calcular D de f num ponto x, ponto qualquer, né? Ah, mas ele quer pela definição ! Então, pode usar o Sistema?

Pesq: Claro...

Juliano utiliza a função *limit,* do MAPLE, que permite o cálculo do limite de uma função num dado ponto, e a aplica na definição de derivada de f em x:

```
limit((4*(x+h)/((x+h)^2+1)-4*x/(x^2+1))/h,h=0);
```

$$-\frac{4\,(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

O resultado parece não convencê-los. Juliano pega uma folha e começa a calcular a derivada manualmente.

Juliano: Feita a mão, a derivada é isso aqui:

$$4\,\frac{1}{x^2+1}-\frac{8\,x^2}{(x^2+1)^2}$$

O resultado obtido com a utilização de lápis e papel parece reforçar a desconfiança inicial.

Juliano: Vamos escrever esse limite...

Daniel: Não, espera aí ! Como era aquele negócio de reduzir... ?

Juliano: o Simplify?

Daniel: É. Usa então isso. Não vai dar isso?

Daniel se refere ao recurso de simplificação de funções racionais, também oferecido pelo MAPLE. Para testar sua conjectura de que o resultado obtido à mão seria equivalente ao gerado anteriormente pelo CAS, ele explora o Sistema como uma calculadora sofisticada:

```
simplify(4/(x^2+1)-8*x^2/(x^2+1)^2);
```

$$-\frac{4\,(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

Daniel: É isso aí mesmo. Está certo!

Como o resultado, finalmente, parece tê-los deixados convencidos, eles abordam o item seguinte da questão.

Juliano: Esboce o gráfico de f '.

```
plot(-4*(x^2-1)/(x^2+1)^2,x=-2..2);
```

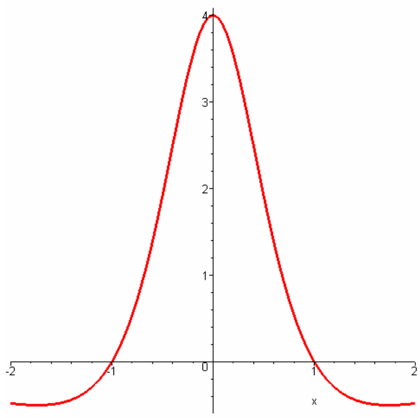


Gráfico 9 - Função f ’

 Ao aparecer o gráfico acima no monitor, a dupla parece se surpreender. Daniel pega o mouse, sobe e desce a tela várias vezes para comparar os gráficos de f e f ’. Parece inconformado. Após pensar por alguns instantes, com uma expressão um tanto desolada, ele se manifesta:

Daniel: Uma das coisas que me incomodava muito em Cálculo era mais ou menos isso que tá acontecendo agora. Você começa a fazer uma coisa e... tudo indica que está certo... Aí você começa a comparar uma coisa com a outra e você percebe que... talvez esteja errado... Aí você fica assim... perdido... aí...

O desconforto de Daniel, ostensivo e intrigante, foi claramente induzido pelas imagens gráficas geradas. Isto me surpreende e me faz questioná-lo:

Pesq: Mas nesse caso aí, você acha que tem alguma coisa errada?

Juliano: Se tiver alguma coisa errada aqui... foi na digitação das funções aqui, né? No mexer com o software...

Vejamos o que Daniel e Juliano haviam escrito sobre *função derivada*:

($DE3_{DAN}$) O conceito de função derivada é aquela função onde se pode calcular o

$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a $\lim \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$

(DE3$_{JUL}$) É uma função que é derivável ou seja apresenta retas tangentes em todos os pontos de um domínio.

Ambas as compreensões acima sugerem estar muito mais próximas do conceito de derivabilidade de uma função f do que o de função derivada de f. Assim, é razoável a sugestão de uma incompatibilidade entre tais compreensões e os objetivos da questão proposta.

Daniel: Não, porque...quando..., tipo, uma parábola. (D1$_{DAN}$) A derivada de uma parábola é uma reta, né? (F1$_{DAN}$) E... aquilo lá *[o gráfico de f]* não parece..., aquele gráfico não parece ser isso, né?

O argumento de Daniel me pega de surpresa e, procurando entender suas razões, eu solicito uma confirmação:

Pesq: Então, é esse gráfico aí *[o gráfico de f]* que você tá dizendo que é, no caso, a parábola?

Daniel: **(F2$_{DAN}$)** Não, isso aqui não é uma parábola. Esse é um... *[pausa]* **(F3$_{DAN}$)** Então..., uma reta assim, seria algo contínuo, né? *[pausa]* **(F4$_{DAN}$)** Se isso aqui for uma reta do -2 ao 2, lá no eixo y, isso era para dar uma reta contínua... ou não?

Embora Daniel tenha tentado encontrar um nome para o gráfico da função dada, é possível, a partir da primeira sentença de F2$_{DAN}$, sugerir que ele está plenamente consciente de que o gráfico de f não é uma parábola. Mas, então, por qual ou quais razões ele se valeu do argumento D1$_{DAN}$ (A derivada de uma parábola é uma reta) para justificar o conflito induzido pelos gráficos ? F4$_{DAN}$ poderia dar uma pista. Vamos rever, por um instante, os esboços dos gráficos de f e de f ' :

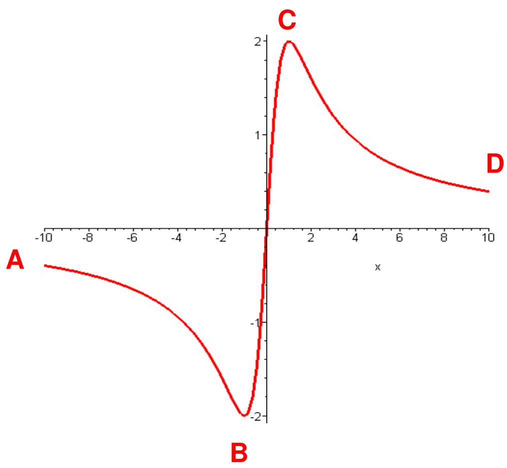


Gráfico 8 – Função f

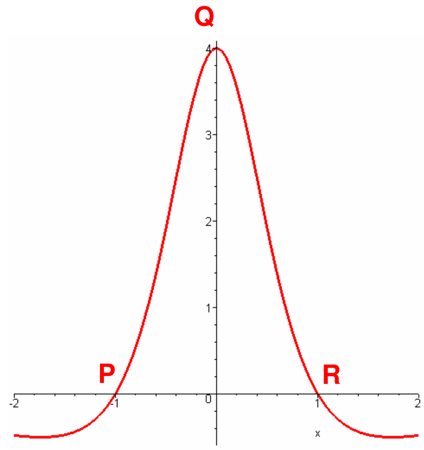


Gráfico 9 – Função f '

A melhor sugestão aqui, a partir de $F4_{DAN}$, é que a "reta" a que Daniel se refere poderia ser a porção do gráfico ligando os pontos B e C. Mas, e a referência a uma parábola? Uma resposta plausível é que ele tenha identificado as partes do gráfico não pertencentes à "reta" BC, como porções de parábolas, ou seja, AB e CD. Uma outra resposta plausível poderia estar relacionada à "forma" da regra que definiu a função racional f, ou seja, $\frac{4x}{x^2+1}$, tendo como denominador um polinômio de grau 2. E, finalmente, não pode ser descartada a hipótese de ele ter simplesmente pensado nos dois gráficos de maneira inversa, isto é, no gráfico de f ' como o gráfico de f e vice-versa. Afinal, como o gráfico de f ' sugere uma "parábola" e como "a derivada de uma parábola é uma reta" conforme $D1_{DAN}$, haveria, de fato, uma incompatibilidade entre os dois gráficos. Mas, continuemos, com a observação de Juliano:

Juliano: **($F4_{JUL}$)** Não. Não exatamente uma reta, né? Nesse tipo de função aqui.

Parece claro a Juliano que a porção BC do gráfico não se trata de uma reta (ou de um segmento de reta). Tentando compreender melhor o argumento de Daniel, eu faço a seguinte provocação:

Pesq: Se eu entendi, Daniel, você está achando então que a derivada daquela função seria uma reta aí. É isso?

Daniel: Não, **(D2$_{DAN}$)** em algum ponto eu acho que ia ser uma reta, aí depois ia ter outro ponto que ia fazer um negócio assim *[faz um movimento em curva com o dedo].*

Juliano: Não, porque **(D1$_{JUL}$)** a derivada é a reta tangente no ponto...*[falando bem baixo]* no ponto de f.

Embora Juliano aparente uma certa insegurança, sua fala, em D1$_{JUL}$, deixa clara a associação entre a derivada de uma função num ponto x e a reta tangente ao gráfico de f no ponto (x, f(x)). Por outro lado, Daniel, em D2$_{DAN}$, não sugere a mesma associação evocada por Juliano, mas, sim, que seu conflito continua intacto e é de outra natureza, isto é, para ele, os gráficos de f e de f ' parecem incompatíveis em particular "porque a derivada de uma parábola é uma reta".

Evitando invocar a expressão "função derivada", expressão esta que, talvez, pudesse chamar a atenção dos estudantes, eu continuo falando apenas em "derivada", embora na expectativa de que a expressão pudesse aparecer espontaneamente na discussão.

Pesq: A derivada seria o quê?

Juliano: A reta tangente ao ponto que você está querendo derivar. Vamos supor, **(D2$_{JUL}$)** se você pega um ponto aqui, *[no gráfico de f]*, derivada é uma reta tangente que passa por esse ponto. Essa derivada... essa reta tem uma equação. **(D3$_{JUL}$)** Quando você pega toda a função assim... é o limite lá... **(D4$_{JUL}$)** Prá mim é aquela função mesmo a derivada.

 DE4$_{JUL}$ abaixo é totalmente compatível com sua fala.

(DE4$_{JUL}$) Entendo que derivada nada mais é do que um processo de limite, ou seja, é um caso particular de limite. Em geral o objetivo é achar retas tangentes a outros gráficos

Daniel: Não, calculando tudo, mostra que é... mas... Depois você pega prá tentar fazer uma relação assim que... Que eu lembro..., (F5$_{DAN}$) eu fiz um exercício que tinha uma função, aí era para, não... Como que era? Era um exercício que dava os pedaços do gráfico. Aí você tinha que montar o gráfico original. Dava os pedaços do gráfico da f '. Aí tinha que saber. **($D3_{DAN}$)** Aí, tipo, onde era uma reta, eu sabia que era uma parábola..., essas coisas. Aí, tentando fazer isso aí nesse gráfico, eu fiquei com dúvida.

$F5_{DAN}$ e $D3_{DAN}$ ajudam a reforçar uma sugestão que o(a) leitor(a) possivelmente há de avalizar: As raízes do conflito de Daniel (e, em menor escala, do de Juliano) possivelmente estão no seu condicionamento a modelos "clássicos" de funções e de seus respectivos gráficos. Neste sentido, $D3_{DAN}$ é claramente ilustrativo: Dada a "semelhança" entre os gráficos em pauta e as referências anteriores (parábolas, retas, etc.), já razoavelmente cristalizadas, sua estratégia foi tentar "encaixar" estas referências no objetivo de construir uma compreensão análoga sobre as "novas" funções. No entanto, nada há nesses procedimentos que possa ser imediatamente qualificado como "erro" ou como "concepção equivocada" (*misconception*). O que eu quero destacar aqui é o silêncio sobre o conceito de função derivada. Por que a noção de *rapidez* de crescimento ou de decrescimento da função f não é sequer mencionada, quando, a rigor, este é o foco do problema ? Por que a noção de derivada como coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico de f é trazida à cena por Juliano, mas apenas em caráter burocrático, sem sugerir uma presença ativa na discussão?

Pesq: Ah, tá... Então, pelo que eu estou entendendo, você..., não sei se só o Daniel ou o Juliano também, vocês não estão achando compatíveis os dois gráficos. É isso, pelo que eu entendi?

Daniel: Eu não tô! *[com convicção]*

Pesq: Você não está achando compatível, né? Que não..., não poderia ser isso...?

Daniel: É, eu não tô achando.

Juliano: Eu também não vejo assim: Ah, realmente é esse aqui. Não dá pra verificar isso não. Sempre fica uma dúvida.

Pesq: Vocês estão achando que a derivada então não seria esse gráfico aí?

Daniel: Aí é que tá... Tudo indica que é, né? Porque a gente calculou a derivada, aí deu aquele valor, a gente mandou fazer o gráfico e o gráfico foi esse. Segundo isso, é isso, né? ($D4_{DAN}$) Mas fazendo..., tentando fazer a associação dos dois gráficos, prá mim, tá furado.

Independentemente das compreensões que Daniel (e Juliano) construiu (construíram) sobre o conceito de derivada, sobre as relações entre os gráficos de uma função derivável f e de sua função derivada f ', é bastante clara aqui a interferência da mídia informática sobre suas compreensões prévias. Visando explorar um pouco mais essas interferências, eu insisto na função derivada, mas, agora, sugerindo diretamente a utilização do operador *diferenciação* do CAS:

Pesq: Ah, entendi. Agora, o sistema oferece a possibilidade de você calcular a derivada também usando o *diff*, né?

Juliano: Vamos tentar, então!

```
diff(4*x/(x^2+1),x);
```

$$\frac{4}{x^2+1}-\frac{8\,x^2}{(x^2+1)^2}$$

```
simplify(%);
```

$$-\frac{4\,(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

Juliano: É aquela mesmo... A dúvida desaparece agora *[risos]*

Pesq: Bom, eu não sei se desaparece. A derivada é essa função e o gráfico é aquele lá. Mas ainda há um problema de compatibilidade entre os dois. É isso, né, Daniel?

Daniel: É. Prá mim, pelo que eu andei fazendo, prá mim não tá...

Pesq: Porque você acha que... O que incomodou você assim nesses...?

Daniel: Então, aqui eu acho que deve ser uma...

Daniel pega o mouse e aponta diretamente sobre o trecho CD do gráfico de f localizado no primeiro quadrante e diz:

Daniel: Aqui, ó. Isso aqui é uma...

A impressão é que ele ia dizer *parábola*, mas Juliano o interrompe:

Juliano: Hipérbole.

Daniel: *[falando baixo, parecendo sem convicção]* É...

Pesq: É uma?

Juliano: Algo próximo de uma hipérbole.

Daniel: Então, isso aqui *[o trecho CD]* era para dar uma... tipo uma coisa para cima. Aí, ó, tá dando para baixo *[o trecho QR]*.

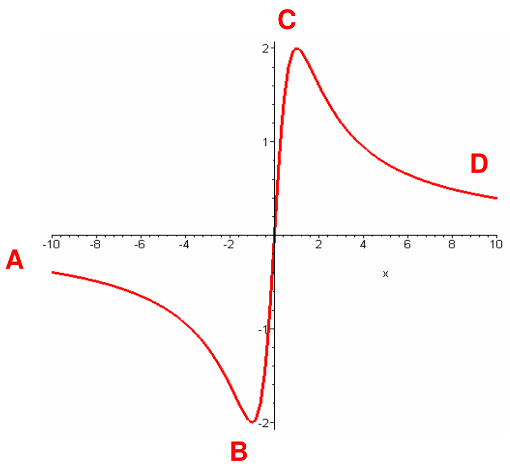


Gráfico 8 – Função f

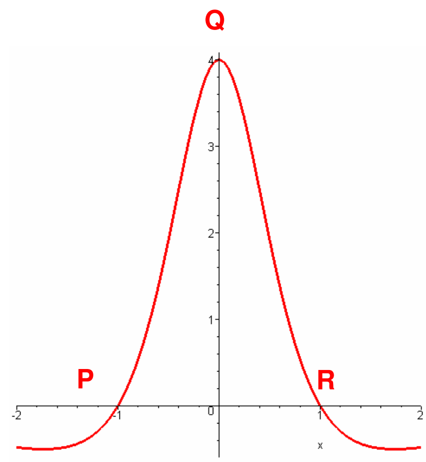


Gráfico 9 – Função f '

Daniel: Aí esse pedacinho aqui que tá aqui embaixo *[o trecho AB]* está cres... Então, aqui tá... *[falando bem baixo]* Ah, não! Os dois estão iguais. Aqui tá decrescendo e aqui também tá...

Quando Daniel vai falar *crescendo*, ele faz um movimento de B para A com o ponteiro do mouse e só aí eu entendo que ele está observando o crescimento em sentido contrário ao usual, isto é, f estaria crescendo de D para C e de B para A.

Juliano: Os dois decrescem.

Daniel sobe e desce a tela várias vezes comparando os gráficos. Alguns instantes depois, ele pergunta:

Daniel: Que ponto que é esse aqui *[o ponto B]* ? Será que dá prá saber? Esse ponto e esse ? *[os pontos B e C]*

Juliano: Máximo e mínimo?

Daniel: *[olhando para o gráfico de f ']* Porque eu acho que deve ser esse valor aqui, ó: -1 e 1 *[os pontos P e R]*.

Em seguida, ele retorna ao CAS e altera em *plot* de f os valores que determinam a amplitude do eixo x.

```
plot(4*x/(x^2+1),x=-1..1);
```

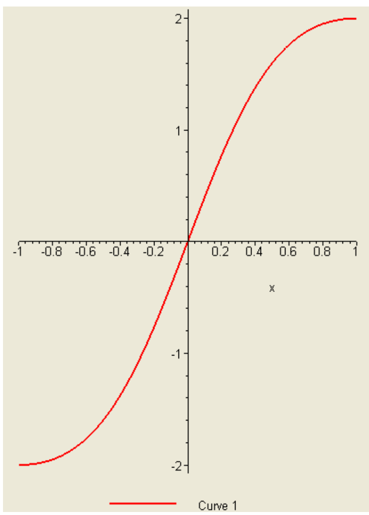


Gráfico 10 – Função f

Daniel: Ah, tá. Então tá certo. *[pausa]* Então tá certo. Aqui agora eu entendi, ó: Do -1 ao 1 é esse aqui *[gráfico 2 de f]*. Esse aqui vai me dar um gráfico *[o trecho PQR do gráfico de f '].* Do 1 prá frente vai me dar aquele pedaço que eu tirei.

 Novamente, o *feedback* gráfico parece interferir no raciocínio e induzir uma conclusão. O Gráfico 2 de f nada mais é do que um *zoom* do Gráfico de f, mas suas curvaturas, agora mais bem definidas, parecem ter sido suficientes para satisfazer Daniel.

O item iv)

> Façam uma comparação entre os gráficos de f e f '. Que interpretação vocês dariam para os valores de f '(x) negativos, nulos ou positivos ?

da questão não é discutido. Como resposta, eles escrevem apenas:

> A comparação entre os gráficos de f(x) e f '(x) são coerentes, pois se pegamos o intervalo (-1, 1), as funções f(x) e f '(x) se assemelham no intervalo dado.

5.6.3 Uma Análise Inicial do Episódio

Uma análise inicial do episódio sugere que Daniel e Juliano transitaram com uma notável insegurança entre os conceitos envolvidos na questão e não conseguiram superar os conflitos emergentes na comparação entre os gráficos de f e f '.

A característica que mais se destaca neste episódio foi o "desvio" ocorrido ao longo do seu desenvolvimento. O objetivo da questão quando fora desenhada era tão somente o de "ouvir" o(a)s estudantes discutindo e interagindo com o CAS no propósito de comparar uma função "bem comportada" e sua função derivada. Neste sentido, considerando o "desenho padrão" da questão e de suas solicitações, eu esperava que expressões como "derivada positiva", "função crescente", "ponto de máximo", "coeficiente angular negativo", etc. emergissem com bastante naturalidade. Na verdade, isto ocorreu, ainda que em níveis variados de freqüência, com as outras duplas. No caso de Juliano e Daniel, no entanto, tais expressões não foram sequer mencionadas. Uma tal peculiaridade é, sem dúvida, de interesse para a Educação Matemática. A discussão “desviou-se” para um conflito cujas raízes podem estar em possíveis “condicionamentos”, que já têm sido alegados nas análises dos episódios anteriores. Supondo que esta sugestão seja razoável, vejamos o que diz uma parte literatura sobre esta questão.

Os conflitos emergentes na comparação entre os gráficos de f e f ’, produzida por Daniel e Juliano, sugerem que as experiências prévias destes estudantes, particularmente no caso de Daniel, com gráficos de funções afins e quadráticas, parecem ter produzido algum condicionamento no sentido de associar estas funções a outras cujos gráficos apresentam “formas” similares. Esse tipo de reação dos estudantes não é incomum e parece ocorrer também em outros contextos. Roth e Lee (2004, p. 266, tradução nossa), por exemplo, afirmam:

> [...] trabalhos recentes mostraram que na prática cotidiana, gráficos não se situam na relação indicada com as coisas que se pretende que eles representem; em vez disso, gráficos familiares no trabalho tornam-se parte da situação, são como ferramentas usadas sem atrair atenção para si mesmas, da mesma forma que as lentes de contato, que não são mais notadas por seus usuários (ROTH, 2003a). Há evidências adicionais pelas quais indivíduos interpretando gráficos não fazem inferências sobre seu conteúdo, ainda que tais gráficos constituam instâncias onde estes indivíduos articulam suas compreensões existentes sobre como algum aspecto do mundo funciona.

Especificamente sobre funções quadráticas, Villarreal (1999, p. 122) faz a seguinte observação: “Este tipo de função é com freqüência utilizado pelos estudantes para referir-se a fatos familiares e inclusive, para aplicar em funções com gráficos similares à parábola, propriedades só válidas para as funções quadráticas."

Estas observações vão ao encontro da linha interpretativa que eu tenho procurado desenvolver até aqui: em alguns casos, as dificuldades dos participantes sugerem estar mais associadas ao processo de “cristalização” de compreensões desenvolvidas ao longo dos anos do que propriamente de eventuais idiossincrasias dos conceitos em si. A surpreendente reação de Daniel ao visualizar os gráficos de f e f ‘, sugere que suas referências continuam estáveis e fortemente associadas às funções quadráticas e afins. É possível também que a forma da função racional dada, na qual o numerador é um polinômio de grau 1 e o denominador um polinômio de grau 2, possa ter reforçado esta conexão. Em todo caso, essas associações sugerem evidentes dificuldades no tratamento de funções que, mesmo preservando toda uma gama de características associadas à regularidade e suavidade dos modelos polinomiais mais utilizados, não reproduzem, como se espera, todos os comportamentos destas últimas. Creio que não seja difícil para o(a) próprio(a) leitor (por ex, a partir de $D3_{DAN}$) sugerir o quanto as imagens prévias de Daniel sobre gráficos de funções usuais contribuíram para que o conflito emergisse.

5.7. Uma pergunta final: O que é derivada ?

Esta última seção de apresentação dos dados é baseada apenas na oralidade. A decisão de apresentá-la foi induzida pela regularidade e absoluta persistência da interpretação geométrica da derivada nas compreensões do(a)s participantes. A rigor, ela se manteve durante todo o período investigado. Ela traz uma transcrição das respostas do(a)s participantes quando estimulados a falarem espontaneamente sobre o conceito de *derivada*. Tais respostas foram obtidas na última fase da coleta de dados, isto é ao final do experimento com duplas onde foi explorado o referido conceito. Lembro a(o) leitora(o) que, a esta altura, o conteúdo programático da disciplina Cálculo Diferencial e Integral referente à *derivada*, já havia sido integralmente cumprido.

Daniel e Juliano

Pesq: O que primeiramente vem à cabeça de vocês quando se fala em derivadas?

[pausa]

Daniel: Ah, o que eu acho que vem primeiro à minha cabeça é sobre, é..., reta tangente, assim...

Juliano: Na minha também. É sobre reta tangente. E vem também como conseqüência também que a derivada é um processo de limite.

Pesq: Mais alguma interpretação?

[pausa]

Daniel: Então..., aí que tá. Na hora do exercício lá que eu peguei o exemplo da Física lá, isso que é interessante, a derivada da função espaço pelo tempo me dá velocidade pelo tempo. Então quer dizer que a função velocidade pelo tempo são retas tangentes da função espaço pelo tempo.

Pesq: Sobre o conceito de derivabilidade, ao longo deste período do curso, ficou alguma dúvida? Algo que não ficou muito bom, não ficou esclarecido, não entendi direito...?

Juliano: O problema, sabe, quem lê alguns textos matemáticos ou algumas outras publicações, quando uma função é derivável parece que é uma maravilha! Nossa! A função é derivável; dá para fazer um monte de coisas. Quando a função não é derivável, já parece que é um problema, parece que é algo complicado de se mexer. Eu não tenho essa visão..., sabe? Para mim, uma função ser derivável ou não, não faz diferença alguma.

Daniel: Eu fiquei com dúvida depois que ela passou a Regra da Cadeia, lá, que a gente usava aquele dt sobre dx pra usar a derivada. Aí eu já fiquei com dúvida. E até aquela demonstração lá da Regra da Cadeia, aquilo lá eu também não entendi. E até no comecinho, quando ele diz o que é derivada, pra mim parece assim meio com dúvida, porque eu não sei direito prá que que eu vou usar a derivada, então eu fico meio sem entender.

Pesq: Você tem essa parte conceitual, que eu perguntei, e a parte..., vamos dizer assim, da mecânica, de você calcular uma derivada, os cálculos em geral, achar uma reta tangente, calcular uma regra da cadeia...

Daniel: Não vou falar que... é simples, né? Se eu falasse isso, eu acho que eu teria ido bem nas provas. Só que... não é tão complicado... de você fazer do que você entender o que está por trás... Só que tem muitas coisas prá fazer...

Pesq: A questão conceitual, você acha que precisa...

Daniel: Então, eu acho que... isso me atrapalhou para eu conseguir fazer a mecânica do funcionamento.

Pesq: Imaginem que vocês agora fossem professores de Cálculo, que vocês fossem no ano que vem começar a dar um curso de Cálculo. Então, prá mim, só está interessando, claro, até a parte de Derivadas. Que sugestões vocês dariam, ou que vocês colocariam num futuro plano de vocês ?

Daniel: É, eu acho que... aquela idéia de você mostrar o conceito e dar os exemplos e tal, eu acho que isso aí é legal..., na maioria das vezes funciona. Só que eu acho que, às vezes, você perde... Igualzinho eu; eu tinha dúvida de derivadas. Não sei prá que realmente eu preciso de derivada. Eu acho que talvez eu ia trabalhar primeiro com isso: prá que se utiliza a derivada. Ou talvez ir um pouquinho até mais longe: quem foi o cara que desenvolveu a derivada? Ele desenvolveu por causa de tal problema... Eu acho que... isso aí ia me deixar um pouco mais claro, tipo o conceito de derivada, de limite...

Pesq: Iria ajudar então...

Daniel: Eu acho que sim... Pelo menos prá mim, eu acho que iria ajudar muito.

Pesq: E você, o que você acha Juliano?

Juliano: Então..., foi o que o Daniel disse. Eu ia começar o curso de Cálculo, mostrando de onde veio realmente o Cálculo, né? Que veio de Newton, que veio basicamente da Mecânica, ou da necessidade de uma matemática que descrevesse a continuidade. Então... eu ia começar..., sempre tentar... ligar as coisas, né? Porque eu acho que também o aluno, às vezes, ele sente falta... Muitas vezes o professor dá uma aula e tal..., aí, só depois de dois dias, o professor volta na outra aula; daí ele volta, o professor volta e coloca lá um teorema na lousa e demonstra o teorema. Talvez o aluno..., ele começa a sentir a necessidade, sabe...? De amarrar mais..., de ter uma visão universal do que está acontecendo. Porque, muitas vezes, o aluno sabe, muitas vezes tem um monte de alunos que sabe usar a derivada, mas o quê que é a derivada ? Você pergunta para o aluno e ele não sabe o que é. Tem um monte de profissionais aí que sabe calcular uma integral, mas o quê que é uma integral? Ele não sabe o que é, né? Então, tem que ter uma visão universal primeiro do que está acontecendo, e depois eu iria me preocupar, é lógico, com a parte aplicada, você saber mesmo calcular uma integral, saber calcular uma derivada, essa parte também é importante, não digo que não seja importante, mas eu creio que primeiro ter uma visão é uma parte principal.

Vera e Gisele

Pesq: Se vocês tivessem que dar uma aula sobre derivadas, vocês chegariam dizendo que derivada é o quê?

Gisele: A professora chegou pra gente, eu achei que foi legal: chegou, fez o gráfico, daí passou a reta tangente ao gráfico e falou que era o coeficiente angular da reta.

Vera: É, ela explicou, a gente faz f(t) – f(a), fez igual a reta..., para achar o coeficiente angular. Aí depois ela fez uma mudança de variável para chegar nesse limite...

Gisele: O coeficiente é igual à derivada.

Pesq: Mais alguma interpretação?

Vera: *[Falando bem baixo]* Tem a ver com... variação também, não é?

Pesq: Como? Pode falar...

Vera: Não..., eu tô....

Gisele: Tem os exemplos da física também, da velocidade...

Vera: Eu acho..., prá mim, né? Eu entendi bem, assim, esse negócio da reta tangente, do tipo de exercício para achar a... perpendicular. Aí, agora, eu já..., que nem, a primeira derivada é a velocidade... Isso eu já não consigo ver... assim... Eu sei meio que... porque é... *[risos].* Que nem a do coeficiente, lá. Ela fez. Se eu parar, tentar, eu sei chegar na fórmula, tudo. Agora, na velocidade eu não sei porquê. E nem o negócio da derivada também ser crescimento, decrescimento, assim...

Pesq: Não ficou claro... ?

Vera: Claro que é..., tudo bem. Eu faço, tudo. Mas, o porquê disso, eu não sei...

Pesq: Eu entendi o que você está dizendo. Você saberia fazer, mas se você tivesse que explicar para alguma pessoa....

Vera: Eu poderia falar assim: a primeira derivada me dá a velocidade.

Pesq: E porque que é isso você não saberia explicar... É isso também Gisele?

Gisele: Também.

Pesq: Também é dito, logo na seqüência, que se você tiver a função velocidade, se você derivar a velocidade você obtém...

Vera e **Gisele:** A aceleração!

Pesq: Por que, né? Não está claro isso...

Vera: E nem sobre crescimento, decrescimento da função, concavidade... O porquê disso eu não sei...

Pesq: A partir da derivada, você consegue dizer se a função é crescente ou decrescente... É isso que não ficou claro?

Vera: Eu sei quando ela vai crescer ou decrescer, mas porque que tem essa relação... Porque é uma coisa que a gente pega e usa...

Edson e Teresa

Pesq: O que vem a cabeça de vocês quando se fala em derivada?

Edson: A primeira coisa é o coeficiente angular da reta.

Teresa: É um número.

Pesq: Coeficiente angular da reta...

Edson: Da reta tangente num um ponto do gráfico da função.

Teresa: Derivada da função. Já não sei se é a mesma coisa. Quando fala em derivada eu penso num número...

Pesq: Teria mais alguma coisa que vocês pensariam sobre o conceito de derivada?

Edson: Aplicações você aprende mais que coeficiente angular...

Teresa: Ajuda a traçar o gráfico de uma função.

Pesq: Alguma outra interpretação ?

[pausa]

Pedro e Talita

Pesq: Quais são as interpretações de derivada que vocês conhecem?

Pedro: Aproximação por reta. O caminho que está indo.

Pesq: Ah, a interpretação geométrica ? O que mais?

Pedro: Ah, a interpretação geométrica: inclinação da reta tangente.

Pesq: A inclinação da reta tangente...

Pedro: Essa é a primeira coisa ?

Talita: É!

Pedro: Desde o terceiro colegial saber que derivada é a inclinação da reta tangente *[risos]*

Pesq: Tá certo... Mais alguma ?

Talita: Ah, depois a gente falou que se a derivada for zero, é ponto de máximo ou mínimo local.

Pedro: Ah, a derivada, ela..., ela serve também para dar informações das funções. Que mais... que a gente sabe sobre derivadas...?

Pesq: Porque derivada a gente usa... para uma série de aplicações, né? Que você tem... E tem um conceito que tá sempre.... Toda vez que você está mexendo com essas aplicações aí, vai aparecendo isso. Quando você fala em... derivada...

[pausa]

Pedro: Um conceito que sempre aparece?

Pesq: É. Quando você fala no conceito de derivada,,,

Pedro: Tem a ver com máximos e mínimos, não, né ?

Pesq: Não necessariamente.

Talita: Diferencial...

[pausa]

Pesq: Mas é que se eu falar...

Talita: Reta tangente!

Pesq: Essa é uma interpretação geométrica... A inclinação...

Pedro: Da reta tangente.

Pesq: Coeficiente angular, né?

Talita: É.

Pesq: Tem mais um que a gente sempre fala... Ah, calcula a derivada que você obtém isso...

Pedro: Calcula derivada que você obtém isso ! ?

[risos]

Talita: Parece charadinha... *[risos]*

Pedro: Ah! que em polinômios normais, ele cai o grau. Que mais...? Fora essa, calcula a derivada que você acha isso!? Que você obtém isso !?

Pesq: Assim, imaginem que vocês estão saindo daqui e vocês fossem dar uma aula sobre derivadas, tá? Aí, vocês vão ter que falar a primeira vez para os alunos lá sobre derivadas, ok? Bom, vocês não iriam che..., quer dizer, poderiam até chegar, colocar a definição: a derivada é isso, limite... Poderiam até fazer isso. Mas, em geral, vocês não fariam isso. Fariam uma digressão, assim, né? Qual o significado...

Pedro: Ah, é..., é.... Hum, pera aí, eu sei..., pera aí, calma...

Pesq: Você tem que falar para os alunos...

Pedro: É... Como é que chama aí...? Variação de grandezas?

Pesq: Opa.

Pedro: Não era isso ?

Pedro: Taxa de variação! Ah...., taxa de variação...

5.8 A transição do estático para o dinâmico

Mais uma vez, eu evoco a questão da dinâmica para sustentar meus argumentos. A compreensão do conceito de *derivada* que predominou ao longo da pesquisa, e que provavelmente contribuiu para moldar as falas acima, sugere uma forte associação à idéia de reta tangente e de seu respectivo coeficiente angular, ou seja, remete a uma visão predominantemente geométrica. Neste caso, é, ainda, sintomático, que não emirja naturalmente o adendo "no ponto do gráfico..." quando o(a)s participantes se referem à reta tangente. Esta "omissão" sugere não uma dificuldade com o conceito de reta tangente a um ponto de uma curva, mas, sim, a existência de alguma fonte de atrito que dificulta o trânsito entre o conceito de *derivada* e o de *função derivada*, isto é, entre a predominância do aspecto local na primeira e do aspecto global nesta última.

Parece sintomático também que a idéia de velocidade ou de taxa de variação (instantânea) não tenha emergido com a naturalidade que seria de esperar à simples menção da palavra *derivada* no contexto objeto do presente estudo. Uma justificativa plausível poderia se basear num eventual "reforço" ou priorização da interpretação geométrica durante o curso regular. Por outro lado, é fato que pelo menos durante duas semanas de aulas, o tópico que esteve em pauta foi o tradicional "taxas relacionadas", conteúdo em que se explora com vigor — até pelo nome do tópico — a idéia de variação, de taxa de variação, de variação em função do tempo, de otimização, etc. Além disso, este conteúdo, como de costume, foi estudado na última etapa do programa sobre *derivadas*, mais próximo, portanto, da realização do experimento. Assim, seria difícil creditar a um eventual esquecimento a dificuldade de emergência (ou mesmo a ausência) da idéia de taxa de variação ou de velocidade nas falas do(a)s participantes, justamente num momento em que deveriam estar "impregnando" suas compreensões. Por que, então, o conceito de taxa de variação não "apareceu" nos experimentos nem nas entrevistas transcritas na seção anterior ?

Esta é uma questão que mereceria um estudo a parte, mas uma sugestão poderia ser proposta: "capturar" um coeficiente angular para calcular a equação de uma reta tangente (ou de uma perpendicular) em um ponto do gráfico de uma função real de uma variável real parece ser um procedimento mais "bem definido" e estável do que "capturar" uma medida de rapidez ou uma taxa de variação instantânea. Note-se que, sob o ponto de vista sintático, não há qualquer diferença entre uma e outra, mas sob o semântico as diferenças são consideráveis.

Neste sentido, ouçamos, para finalizar este capítulo, a voz de Rezende (2003, p. 350, grifo nosso):

> Interpretá-la *[a derivada]* tão somente como "coeficiente angular da reta tangente" significa ignorar o problema histórico essencial da "medida" instantânea da variabilidade de uma grandeza — esse foi, inclusive, o grande problema perseguido inicialmente pelos filósofos escolásticos. Com efeito, derivada, na sua relação com as diversas áreas do conhecimento, é, sobretudo, taxa de variação instantânea. A interpretação geométrica não esgota completamente a idéia essencial de derivada; existe todo um campo de significações importante para a tecedura da noção de derivada: pensar velocidade instantânea como coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $s = s(t)$ é conseqüência, e não causa, da ação de interpretá-la como limite de velocidades médias, quando fazemos Δt cada vez mais próximo de zero. Na verdade, ambas as interpretações se complementam e contribuem para a significação do conceito de derivada. Eximir a **interpretação dinâmica** do conceito de derivada é, além de um contra-senso histórico, um atentado ao seu próprio significado.

CAPÍTULO VI

Compreensões em Cálculo Diferencial e a Integração Humanos-mídias — Aprofundando a Análise

Os episódios e a análise inicial, construídos no capítulo anterior, serão discutidos mais profundamente a seguir com o objetivo de responder às questões de pesquisa:

> No contexto de um grupo de alunos de Matemática de uma universidade pública do Estado de São Paulo, em seu primeiro curso de Cálculo e em relação aos conceitos de *função, limite, continuidade* e *derivada*:
>
> - Que compreensões são produzidas sobre tais conceitos a partir da integração entre oralidade, escrita (em linguagem natural) e informática (representada pelo MAPLE) ?
> - O que sugerem tais compreensões sob o ponto de vista da Educação Matemática no Ensino Superior ?

6.1 O Conceito de Função — Contextos e Compreensões

Dentre os conceitos matemáticos referidos nesta pesquisa, *função* é, seguramente, o único apresentado e discutido na maioria absoluta dos cenários de Ensino Médio brasileiros. A rigor, os demais conceitos abordados também não deveriam ser estranhos a este nível de ensino, mas a prática tem revelado que, com raras exceções, este não é o caso. Por ser de presença ubíqua na matemática do Ensino Médio, supõe-se que o conceito de *função* deva fazer parte da formação básica de todo ser humano educado e que, portanto, neste contexto, sua construção pelo(a)s estudantes seja um dos fins a serem perseguidos pelos educadores ou educadoras que ali atuam. Grosso modo, este fim pode, em geral, ser considerado atingido, desde que concebamos construção do conceito de *função* como construção de alguma *compreensão* razoável sobre o referido conceito. Neste sentido, é certo que praticamente todo(a) aluno(a) que conclui o Ensino Médio traz consigo pelo menos alguma compreensão sobre o que é uma *função* sob o ponto de vista matemático.

O que quero destacar aqui, no entanto, não é o possível conjunto de significados apreendidos pelo estudante naquele nível de ensino, mas o fato de que qualquer que tenha sido este conjunto, ele, como se espera, foi apreendido segundo os objetivos, visões e valores que caracterizam aquele contexto. Nesta perspectiva, a abordagem tradicional ocorre na primeira série, em geral da seguinte maneira: uma introdução sobre o que é uma *função* — com ou sem motivação baseada na "realidade concreta" — incluindo-se uma visão de elementos como domínio, contradomínio, imagem e pré-imagem (ou imagem inversa), bem como práticas de esboços de gráficos e de operações usuais sobre funções. É freqüente também que seja concedido algum destaque às diferenças entre *relação* e *função*. O conceito de *relação* é "visto" previamente ao de *função*, mas, sem ter o *status* deste último, aparece mais como uma formalidade, cujo papel principal é o de "abrir o show" para a estrela principal. No entanto, apesar da posição subalterna no contexto, este "show" de abertura contribui inegavelmente para "marcar a audiência". Afinal, "*uma função é uma relação tal que...*" faz parte de uma compreensão (corroborada pelos dados da presente pesquisa) bastante popular sobre o referido conceito. O mote “toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função” é outro dos campeões de popularidade que impregnam as visões do(a)s egresso(a)s daquele nível de ensino. A partir daí, o conteúdo programático passa a ser dominado pela exploração algébrica e gráfica de alguns *tipos especiais* de função, a saber, as chamadas *funções elementares* (afim, linear, quadrática, exponencial, logarítmica, trigonométricas, etc.).

Não é meu objetivo aqui discutir a pertinência ou o nível de tratamento desses conteúdos no conjunto de saberes matemáticos que devem constituir a formação matemática de um(a) egresso(a) do Ensino Médio. Dificilmente, no entanto, se poderia negar que caso o objetivo ali seja proporcionar condições para que este(a) aluno(a) construa alguma compreensão sobre o conceito de função e que conheça o comportamento das funções mais comuns, o programa acima caracteriza, de fato, o conteúdo a ser abordado, e, uma vez atingidos os objetivos pré-definidos, o processo terá se completado. A partir daí, a seqüência padrão será de mais dois anos tratando com matrizes, sistemas lineares, determinantes, progressões, funções polinomiais, etc. e ter-se-á concluído, segundo a estrutura tradicional, a apresentação dos elementos que caracterizam a chamada formação matemática básica do(a) estudante, encerrada formalmente com a conclusão do Ensino Médio.

Embora pareça haver uma uniformidade nos programas das escolas no que se refere aos conteúdos que são (ou deveriam ser) abordados, o mesmo não pode ser afirmado em relação à amplitude das abordagens, aos níveis de profundidade perseguidos e às metodologias de ensino adotadas. Sem pretender, aqui, fazer uma generalização, Zuffi (2002), por exemplo, destacou várias características em sua pesquisa de doutorado tematizando o conceito de *função* e suas concepções por professores de Ensino Médio. Assim, observa ela (ZUFFI, 2002, pp 5-6):

> Nas salas de aula, embora as definições gerais de função [...] incorporassem as idéias formais de ‘conjunto’, ‘relação’, ‘domínio’, ‘contradomínio’ e ‘imagem’ [...], as funções eram sempre dadas por expressões algébricas simples, em conjuntos numéricos reais, e com modelos de cálculos sempre sobre *números inteiros* . As funções eram apresentadas primeiro na sua notação analítica (expressão algébrica), mesmo que o domínio se tratasse de um conjunto discreto e pequeno de pontos, para somente depois se caracterizarem os gráficos , tabelas e manipulações das funções.

> [...] As funções que determinaram as imagens conceituais transmitidas através da expressão dos professores, na sala de aula, também tiveram seus modelos todos em expressões analíticas simples e 'bem comportadas'. Os raros casos que trouxeram funções descontínuas ofereceram dificuldades de tratamento pelo professor e de compreensão, por parte dos alunos. Isso corrobora o fato de que as imagens conceituais evidenciadas nas concepções dos professores, através das respostas ao questionário, ficavam realmente restritas aos casos 'bem comportados' e mostra que tais imagens conceituais ou os modelos e formas visuais evocados em suas memórias para o conceito de função, não correspondem, em grau de profundidade, às definições formais que os professores apresentaram anteriormente aos seus alunos.
>
> [...] A grande ênfase dos professores era colocada na atribuição de valores específicos para a variável independente, calculando-se os respectivos valores das imagens, para só então colocá-los nos gráficos. Por outro lado estes gráficos eram observados através de poucos pontos esparsos, sem se caracterizar explicitamente as transformações globais que representavam entre dois conjuntos. A idéia de variação, fortalecida na concepção de processo, fica prejudicada no enfoque dado pelos professores, deixando lacunas quanto a este aspecto essencial à conceituação de função.
>
> [...] Embora a definição formal fosse apresentada aos alunos imediatamente, já na introdução do conceito, na sala de aula houve pouca discussão das condições para o domínio e a unicidade das imagens, contidas na definição geral de função. Casos de não-funcionalidade apareceram muito raramente no tratamento do assunto. Os casos de funções mais gerais, definidas em conjuntos distintos de $\mathbb{R}$, ou em conjuntos não numéricos, não foram explorados pelos professores, em sala.
>
> [...] A relação discreto/contínuo é confusa. Os detalhes sobre a passagem do discreto ao contínuo não eram explicitados pelos professores. [...] Algumas funções de domínio discreto eram representadas por expressões analíticas usadas para domínios tipicamente contínuos, enquanto que os gráficos contínuos eram sempre determinados por um conjunto muito pequeno de pontos discretizados, sem se discutir o que acontecia com as imagens nos intervalos entre esses pontos.

Embora sob o ponto de vista matemático a argumentação seja consistente, a autora não pretendeu prescrever um eventual modelo de abordagem do conteúdo no ensino sobre funções no Ensino Médio. No entanto, caso o fizesse, sempre se poderia questionar se a apreensão de todas as possibilidades, limitações, alcances, nuances e formalismos do conceito de função não seria um objetivo demasiadamente ambicioso naquele contexto, uma vez que do(a)s egresso(a)s daquele nível de ensino, apenas uma ínfima minoria optará por fazer um curso superior de Matemática — ambiente onde haveria, de fato, demandas ostensivas por uma sólida compreensão do conceito de função.

De todo modo, as observações de Zuffi são ilustrativas e sugerem várias características do ensino naquele nível que não parecem estar longe da realidade geral e que, muito provavelmente, tem contribuído para configurar "o olhar" do aluno ingressante à universidade, pelo menos no que tange ao tema em pauta. É importante ressaltar aqui, novamente, que, a meu ver, as características acima elencadas devem ser entendidas exatamente assim: como características, e não, necessariamente, como eventuais "falhas" do ensino naquele contexto.

Vejamos, a seguir, porque, dada a complexidade do conceito, estas "falhas" podem ser entendidas como características.

6.2 A Complexidade do Conceito de *Função*

Embora a presente pesquisa não assuma tacitamente um compromisso de exclusividade com alguma das visões predominantes sobre o conceito de *função,* talvez seja conveniente que sejam aqui mencionadas, a fim de que o(a) leitor(a) possa avaliar o encaminhamento da questão.

A complexidade do conceito de função tem sido investigada em duas linhas predominantes: uma abordando sua natureza como processo e objeto mental (p. ex., SFARD, 1992; DUBINSKY et al, 1992), e outra abordando as múltiplas representações (p. ex., CONFREY, 1994; KAPUT, 1992). No contexto brasileiro, Borba (1999), há vários anos, tem produzido estudos sobre *funções* adotando esta última linha. Outros autores (p. ex, David Tall) afirmam que há ainda uma "terceira via" (BEINEKE et al., 1992; SCHOENFELD et al, 1993) combinando as duas numa abordagem que observa simultaneamente o *desenvolvimento horizontal* (entre representações) e o *desenvolvimento vertical* (processo e objeto).

Trabalhando basicamente no contexto do Ensino Superior, a abordagem *processo e objeto*, adotada pelos membros do grupo americano RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), estende o *construtivismo* da teoria piagetiana para o contexto universitário quando pretende produzir, entre outras similaridades, decomposições genéticas de conceitos matemáticos trabalhados neste contexto. A visão, por exemplo, de Dubinsky (1992), membro do

RUMEC, sobre o processo de construção do conhecimento pode ser representada por um movimento em espiral entre níveis cognitivos que vão se aprofundando no grau de abstração. Numa abordagem similar, Sfard transpôs o conceito filosófico de *reificação* (grosso modo, o *processo de transformar uma idéia numa coisa*) para a Educação Matemática, visando, também, abordar as questões de compreensão conceitual nesta área. Thompson (1994, p. 23, tradução nossa), por sua vez, selecionou seis temas que, segundo ele, sintetizam um consenso razoavelmente estável no que tange ao desenvolvimento de compreensões sobre o conceito de função:

- Imagem do conceito e definição do conceito;
- Função como ação, como processo e como objeto;
- Função como covariação de quantidades e função como correspondência;
- Compreensão de fenômenos e representação de fenômenos;
- Operações sobre números e operações sobre funções.

Não obstante a linha de abordagem, o conceito de função transcenderia seu princípio organizacional para posicioná-lo também como *raiz cognitiva*, ou seja, como um conceito que serve de base para o desenvolvimento cognitivo? DeMarois e Tall (1999) propuseram esta questão no contexto de aprendizagem da álgebra básica, mas não chegaram a uma conclusão definitiva. No âmbito da matemática universitária, as pesquisas também não chegaram a uma posição clara sobre esta questão. É praticamente unânime, no entanto, a percepção da complexidade do conceito.

Além das questões próprias às abordagens supra-referidas, situa-se imbricada a todo conceito matemático e, portanto, permeando as relações entre a Matemática e a Educação Matemática, a sua *definição*, em particular o papel que lhe deve ser atribuído em cada um dos níveis de formação matemática. A próxima seção traz um maior aprofundamento para esta questão.

6.3 As Definições Matemáticas

As definições de conceitos matemáticos, assim como suas interações com as compreensões produzidas pelo(a) estudante de Matemática, parece ser objeto de preocupação de educadore(a)s interessados nos fenômenos da aprendizagem matemática desde que esta ciência se encaminhou decisivamente para a formalização no final do século XIX. Neste sentido, Poincaré, em 1908, já afirmava:

> O que é uma boa definição? Para o filósofo ou cientista, é uma definição que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e somente a eles: é isso que satisfaz as regras da lógica. Mas em Educação não é isso, é aquela que pode ser compreendida pelos alunos. (POINCARÉ, 1908, apud TALL, 1992, p. 495, tradução nossa).

Definir conceitos e demonstrar teoremas certamente constituem parte importante da espinha dorsal do trabalho do matemático profissional. No entanto, por trás da formulação de um conceito ou da demonstração de um teorema há muito esforço criativo, muitos movimentos não lineares e muita intuição. Apesar disso, há uma visão bastante comum de que a Matemática é desenvolvida exclusivamente sob o balizamento da Lógica. Se sob o ponto de vista dos próprios matemáticos, esta visão já é bastante discutível, sob o ponto de vista educacional, ela certamente é indutora de uma série de problemas. Sobre este ponto, o psicólogo Skemp afirma:

> A apresentação da Matemática como um desenvolvimento lógico é louvável quando visa mostrar que a Matemática é sensível e não arbitrária, mas tal apresentação é equivocada em dois sentidos. Primeiro, ela confunde a abordagem lógica e a psicológica. O propósito principal da abordagem lógica é convencer os incrédulos; da abordagem psicológica é produzir compreensão. Segundo, ela oferece apenas o produto final da descoberta matemática (‘isto é, assim, tudo que você tem a fazer é aprender), e falha em produzir no aprendiz os processos pelos quais as descobertas matemáticas são feitas. Ela ensina o produto do pensamento e não o pensamento matemático. (SKEMP, 1971, apud TALL, 1992, p. 499, tradução nossa)

Como constituinte inextricável do método matemático formal, uma definição é precisamente um conjunto de condições necessárias e suficientes exigidas para algo ser membro de uma categoria. Segundo vários autores, o processo de escolha de tais propriedades é institucionalizado dentro da comunidade matemática com objetivo de capturar o que é comum nesses objetos na categoria sob discussão e de facilitar a comunicação em larga escala de maneira sistemática.

É certo, no entanto, que nem na matemática “pura” nem na matemática aplicada profissional, o trabalho é desenvolvido estritamente com base em definições. Qualquer ser humano seria capaz não só de produzir protótipos representando seus objetos de interesse, como de construir argumentos que os articulem de maneira coerente segundo alguma lógica subjacente, ainda que peculiar. A questão aqui, crucial na minha visão, para a Educação Matemática, particularmente para o(a)s ingressantes num curso superior de Matemática, é que, como se espera, estes estão apenas no início do processo de amadurecimento de suas capacidades de manipulação de objetos matemáticos, num exercício que, possivelmente, exceto pelos níveis de abstração pretendidos, é similar ao trabalho do(a) matemático(a) profissional. É este contínuo exercício um dos fatores que permitem a este(a)s último(a)s transitarem com desenvoltura e flexibilidade, tanto internamente a cada campo, com suas definições, teoremas e exemplos, como externamente, movimentando-se entre um campo e outro, sem que isso implique necessariamente em algum sacrifício de significados ou de obscurecimento de seus raciocínios. Na verdade, muitos até vêem este movimento como um antídoto para eventuais “esterilidades” em seus próprios trabalhos acadêmicos.

De todo modo, quando se fala nas práxis do trabalho matemático, seria uma temeridade confiná-las numa mesma classe de equivalência. Assim, por exemplo, embora, na visão formalista da matemática, “significado” não é algo com que se deva preocupar, uma tal posição está longe de ser unânime. Neste sentido, contrapondo o caráter estéril das definições quando olhadas exclusivamente para a sua forma, Cornu (1981 apud Tall, 1992, 498) argumenta:

> Dentro da atividade matemática, noções matemáticas não são apenas usadas de acordo com sua definição formal, mas também através de representações mentais que podem diferir de uma pessoa para outra. Esses ‘modelos individuais’ são elaborados a partir de ‘modelos espontâneos’ (modelos que pré-existem, antes da aprendizagem da noção matemática e que é originada, por exemplo, da experiência cotidiana) interferindo com a definição matemática [...]

É certo, no entanto, que se esta “ausência de significados” é uma característica que pode não preocupar uma determinada classe de profissionais, dificilmente o mesmo ocorreria para um(a) estudante de primeiro ano de Matemática: uma tal ausência de significados é fonte certa de problemas — para dizer o mínimo — nos processos construtivos de compreensão.

Ao traduzir “modelos espontâneos” de noções matemáticas como modelos existentes previamente à aprendizagem matemática, originados, dentre outras formas, pela experiência cotidiana, Cornu refere-se ao primeiro contato do(a) estudante com um novo conceito ou com uma nova definição matemática. No caso do conceito e da definição de *função*, quando acionados pelas demandas do primeiro ano de Matemática, estes certamente emergem moldados não apenas pelas experiências prévias cotidianas do(a)s estudantes, mas, muito provavelmente, por aquelas construídas durante o Ensino Médio ou, em muitos casos, durante os cursos preparatórios para vestibulares. Nestes casos, naturalmente, segundo os paradigmas e objetivos subjacentes aos respectivos contextos.

A meu ver, o exercício deste processo ao longo dos anos pré-universitários tende a gerar um enrijecimento progressivo das compreensões que estruturam esses “modelos espontâneos”, numa dimensão suficiente para representar mais um importante elemento na composição do já problemático quadro da transição do(a) estudante para a matemática universitária. Assim, novamente, o que quero destacar não é a eventual aprendizagem de concepções “corretas” ou “errôneas” de determinados conceitos ou definições matemáticas durante as fases pré-universitárias, mas, sim, uma provável inflexibilidade em relação a estes, e que é construída, ao longo dos anos, em decorrência das mais variadas experiências educacionais, formais ou não, do(a) futuro(a) aluno(a) de Matemática.

6.4 Compreensões obre o Conceito de Função na Literatura em Educação Matemática no Ensino Superior

Em relação a compreensões pré-universitários de estudantes sobre o conceito de função, estas podem ser sumarizadas, num primeiro refinamento, por aquelas citadas por Tall e Bakar (1992, p. 42, tradução nossa) e categorizadas em:

- Uma função é como uma equação com várias entradas que processa o número que entrou e dá um resultado;
- Uma "máquina" que fornece um número a partir de outro que foi inserido;
- Uma expressão que dá uma gama de respostas para diferentes valores de x;
- Uma forma de equação descrevendo uma curva/caminho em um gráfico;
- Uma maneira de descrever uma curva num gráfico cartesiano em termos de coordenadas x e y;
- Uma ordem que manda plotar uma curva ou uma reta em um gráfico;
- Um comando matemático que pode transformar uma variável em um valor diferente;
- Um conjunto de instruções que se pode substituir por números;
- Um processo que pode ser executado sobre qualquer número e é representado na forma algébrica usando x como variável;
- Uma série de cálculos para determinar uma resposta final para a qual você submeteu um dígito;
- Um termo que produzirá uma seqüência de números quando um conjunto aleatório de números é colocado neste termo;

É da opinião de vários autores que as compreensões acima listadas parecem incorporadas, em graus variáveis de profundidade, nos estudantes ingressantes à universidade. O grau de rigidez com que uma ou outra (ou todas) dessas compreensões encontra-se incorporada depende, obviamente, das preferências, contextos particulares e objetivos específicos aos quais o(a) aluno(a) foi submetido(a) em seus estudos prévios de Matemática. De todo modo, é certo que um conjunto de "modelos espontâneos" do conceito de *função* é trazido (ou arrastado) pelo aluno ingressante à universidade.

Em relação a concepções preferenciais sobre este conceito, Sierpinska (1988, apud Tall, 1992, p. 502) escreve:

> A concepção mais importante de uma função é aquela de um relacionamento entre magnitudes variáveis. Se esta não é desenvolvida, representações como equações e gráficos perdem seus significados e tornam-se isoladas umas das outras... Introduzir funções para jovens estudantes pela elaborada definição moderna é um erro didático – uma inversão antididática.

A virtude que Sierpinska atribui à concepção de função como relacionamento entre magnitudes variáveis em contraposição àquelas caracterizadas na definição moderna de *função* precisa ser examinada com cuidado. É claro que em termos de sua evolução histórica, a gênese do conceito localiza-se neste relacionamento. O problema, sob o ponto de vista da Educação Matemática no Ensino Superior, é que a compreensão prevalecente de função como relacionamento entre variáveis aparece imbricada, implícita ou explicitamente, com elementos como continuidade, suavidade (diferenciabilidade) e previsibilidade de comportamentos que, possivelmente, teriam sua gênese nas aulas de matemática da 8ª série com os primeiros esboços de retas e parábolas no plano cartesiano. Mas por que um tal imbricamento se constituiria num problema para a Educação Matemática em nível superior? Uma resposta razoável seria porque ele é parte do cimento que enrijece as concepções e, como conseqüência, pode dificultar a percepção da liberdade inerente ao conceito, intensamente demandada no contexto universitário.

Embora concordando com a visão de que uma definição matemática pode ser estéril para o(a) aprendiz, a questão da rigidez que é construída nos processos de aprendizagem, encontra respaldo nas palavras de Even (1988, apud Tall, 1992. p. 503), quando esta autora estudou o conceito de função de futuros professores de matemática:

> [...] Muitos deles ignoraram a natureza arbitrária da relação entre os dois conjuntos sobre os quais a função é definida... Alguns esperavam que funções fossem sempre representadas por uma expressão. Outros esperavam que todas as funções fossem contínuas. Outros ainda, aceitavam somente gráficos “razoáveis”.

A posição de Sierpinska e a observação de Even, na verdade, refletem concepções que fazem parte da própria evolução do conceito de função. Seria razoável dizer que, sob o ponto de vista histórico, a observação de Even reflete uma definição “mais moderna” do que aquela defendida por Sierpinska. O que eu quero destacar aqui, entretanto, é que mais importante do que priorizar uma eventual precedência histórica ou um maior ou menor formalismo, é discutir a *adequação* da concepção ou das concepções ao contexto educacional em que o conceito é tratado.

A visão moderna sobre o conceito de função — como relação entre conjuntos — certamente foi moldada sob a influência crucial do grupo Bourbaki, num ambiente onde toda uma nova maquinaria, materializada principalmente pela Álgebra Abstrata, criava, recriava, ou mesmo ocupava, rapidamente, muitos espaços na Matemática. Este impacto trouxe consideráveis conseqüências para o ensino de Matemática e energia suficiente até para configurar uma “nova matemática” ou uma “Matemática moderna” que deveria ser “introduzida” desde mesmo o ensino fundamental. Ocorre que a *celula mater* desta “nova Matemática” — a noção de conjunto —, originariamente criada por Cantor para lidar com o conceito de infinito, foi literalmente “despejada” sobre o ensino básico de Matemática, sob a justificativa de que uma tal noção, na qualidade de base de toda a Matemática, deveria, naturalmente, ocupar o espaço que lhe seria devido.

O resultado — inevitável — foi um vazio de significados para estudantes (e para muitos professores e professoras) naquele contexto. É claro que diante deste quadro, uma reação não tardaria a ser esboçada. E, de fato, ela veio décadas depois, por boa parte da comunidade que atuava no contexto do ensino básico, na forma de uma rejeição à própria idéia de conjunto. Visto como uma espécie de *persona non grata* pela comunidade de educadores matemáticos, o conceito de conjunto foi, de certa forma, estigmatizado, identificado como gerador de vazios de significados, quando, na verdade, a noção tinha sido vítima de um equívoco de contextualização.

Em suma, o problema não estava no ensino do conceito de conjunto, mas no ensino do conceito de conjunto em contextos incompatíveis com um exercício significativo de seu potencial. Com alguns passos a mais, esta discussão pode naturalmente ser transposta do conceito de conjunto para o conceito de função. Neste sentido, embora a definição prevalecente de função no Ensino Médio destaque a idéia de relação entre conjuntos, a práxis neste contexto demanda — como é natural — não mais do que alguns movimentos anêmicos de exploração das potencialidades que o caracteriza.

A situação, no entanto, se transforma completa e rapidamente num curso de graduação (ou de pós-graduação) em Matemática. Nestes contextos, fazer *lobby* em favor dos conjuntos é, como se diz, chover no molhado. Ainda assim, há um ponto aparentemente paradoxal, já levemente tangenciado acima, mas que eu gostaria de trazer para a cena principal. Trata-se da posição do conceito de função no contexto da disciplina Cálculo Diferencial e Integral de funções reais de uma variável real. Conforme já observado por Rezende (2003), não se deriva conjuntos – muito menos, ternas. Como, então, argumentar em favor do conceito de função como uma terna neste contexto?

É verdade que, grosso modo, o que se deriva (e se integra) são “regras de correspondência razoáveis”. No entanto, o conceito fundamental do Cálculo Diferencial — a derivada —, na abordagem padrão, é fundada no conceito de limite, um conceito local e que depende, dentre outros fatores, *do ponto* onde se investiga o limite. Ora, mas este argumento se enfraquece com um simples olhar para a história do Cálculo: o conceito de limite apareceu por volta de dois séculos depois do conceito de derivada, o que, naturalmente, o desqualifica como “caminho necessário” para este último.

Se não resta dúvida de que um “Cálculo sem limites” é plenamente possível, também é certo que “algo” tem que aparecer para representar a própria razão de ser do conceito de derivada: a idéia de taxa de variação instantânea. Se “algo” é instantâneo, não há como dissociá-lo de um caráter “local”. Assim, como o conceito local de derivada (e de continuidade), não é suficiente para dar conta das demandas teóricas e aplicadas, o passo seguinte e imediato é a constituição do conceito de *função derivada*, cujo papel é o de generalizar — até onde possível — o caráter local do conceito, fato que vai estabelecer, irremediavelmente, demandas de flexibilidade nos movimentos local x global indissociáveis do próprio exercício da Matemática no Ensino Superior.

Nesta perspectiva, admitindo que elementos como continuidade e suavidade no esboço de linhas no plano cartesiano — assim como outros que vão condicionando a visão e contribuindo para enrijecer as compreensões — podem, a princípio, estar a serviço da Educação Matemática no Ensino Médio, tais características podem também, paradoxalmente, dificultar a apreensão dos novos conceitos no contexto do Ensino Superior, como, de resto, os dados do capítulo anterior ilustram.

É certo, no entanto, que:

> [...] o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral se deu através de uma relação de simbiose deste, principalmente, com a Geometria, a Física e a Filosofia. A álgebra participa do processo com a sua forma abstrata de pensar, com o seu simbolismo, tendo uma fundamental participação no desenvolvimento da noção de variável, que possibilitará a construção daquele que é, sem dúvida, um dos conceitos básicos do Cálculo e da própria Matemática: o conceito de função. É exatamente nesse contexto histórico que “nasce ” o conceito de função, isto é, a noção se estabelece a partir de uma relação funcional implícita entre as quantidades variáveis. O cumprimento de certas exigências por parte dessa relação funcional é conseqüência de um processo de depuração histórica e matemática. Mas **<u>o que interessa para o Cálculo</u>** é, essencialmente, essa relação de interdependência entre as quantidades variáveis. É exatamente a partir dela que resolveremos o problema da variabilidade, isto é, da “medida” da taxa de variação de uma das variáveis em relação à outra.” (REZENDE, p. 342, grifo nosso).

Não resta dúvida que o que interessa <u>para o Cálculo</u> é essa interdependência entre quantidades variáveis. Os objetos de interesse são as variabilidades “razoáveis”, isto é, que possam ser medidas com a precisão desejada. É importante descobrir “como” uma grandeza varia em relação à outra e, mais, sabendo-se “como” variou pode-se investigar “quanto” variou, fato que, novamente, se configura como informação relevante e que vai constituir, com toda sua potência, um outro conceito fundamental: a integral definida. A meu ver, no entanto, as questões educacionais em pauta devem transcender os fenômenos de <u>interesse do Cálculo</u>, para focalizar também aqueles de <u>interesse do ensino e da aprendizagem da referida disciplina</u>, e estas, como é óbvio, não se resolvem com uma mera substituição de definições.

É verdade que a definição de um conceito matemático, assim como seu uso e a demonstração de suas propriedades, são componentes essenciais da práxis de um(a) matemático(a) profissional, uma vez que este(a) trabalha construindo novos objetos e articulando-os com os já existentes, num processo de criação que, para muito(a)s representantes da área, configura-se como uma forma de arte. Além disso, o contínuo exercício dessas atividades torna automática a reação de olhar clinicamente para uma definição e perceber a importância de cada elemento que a compõe. Por outro lado, este tipo de reação ou de movimento dificilmente poderia ocorrer de maneira espontânea e imediata a(o) estudante ingressante num curso superior de Matemática, uma vez que este(a) ainda carrega algum tipo de "moldagem" similar ao de uma pessoa que observa uma pintura sem que seus olhos estejam acostumados a perceber os detalhes que a tornam diferente e especial em relação a uma gravura qualquer.

A falta de desenvolvimento dessas habilidades não implica, em geral, no contexto da escola pré-universitária, em maiores dificuldades para que o(a) estudante obtenha bons resultados em suas avaliações e tampouco impede sua progressão nas séries respectivas. Isto se deve ao fato de que ali os objetivos são outros. Assim, ao ascender à universidade o(a) estudante carrega consigo uma visão em relação à própria Matemática e espera que o novo contexto decerto traga novidades, mas tão somente no que tange ao surgimento de novos procedimentos, novos algoritmos e novas manipulações algébricas. Ocorre que neste novo estágio, há não apenas uma ampliação horizontal no catálogo de procedimentos, como também — e principalmente — uma mudança qualitativa de valores que se caracteriza por uma especial deferência aos "significados" pretendidos pelas definições, pelos teoremas, pelo simbolismo e pela lógica que fundamenta os argumentos, ou seja, o método matemático clássico começa a entrar em cena.

É natural, portanto, que ocorra neste período um enorme atrito entre as expectativas do(a) estudante e a realidade das aulas típicas do curso de Matemática na universidade. Assim, caso o(a) professor(a) opte por exercitar mais o aspecto procedimental, ele(a) terá a vantagem de obter uma resposta mais imediata e natural do(a) estudante, uma vez que tais aspectos, em tese, vão ao encontro de suas expectativas. Caso a opção seja privilegiar a teoria no estilo clássico — definições, teoremas, exemplos —, tal abordagem pode induzir o(a) professor(a) a concluir que o nível do seu curso é "mais alto", por este se aproximar, pelo menos sob o ponto de vista sintático, da práxis do(a) matemático(a) profissional. Ocorre que a simples capacidade de enunciação de uma definição, de um teorema ou de uma demonstração não é um indicador confiável de maturidade matemática e de compreensão conceitual, já que todos esses elementos podem ser memorizados e reproduzidos sem que nestes atos se configurem qualquer significação consistente para aquele(a)s que as produzem. Por outro lado, a opção pelas aplicações como fonte de significados também não está livre de problemas, como bem ilustram as falas de Vera e Gisele sobre velocidade e aceleração — onde ocorre uma articulação coerente dos elementos envolvidos sem, contudo, que soubessem justificar *porque a velocidade é a derivada primeira e porque a aceleração é a derivada segunda.* Em outras palavras, o vazio de significado pode sobreviver também a esta abordagem.

O que quero sustentar aqui é que há necessidade de se exercitar de maneira mais sistemática e mais detalhada as questões emergentes dos conceitos tratados no Cálculo, começando, como se espera, pelo conceito de *função*. É claro que o exercício desses conceitos demanda tempo e este é sempre um fator crucial nos contextos educacionais. Trata-se, portanto, de uma escolha. Mas, afinal, seria justificável, com os atuais recursos computacionais disponíveis, despender várias semanas de aulas para se calcular derivadas e limites de um sem número de funções? Seria justificável despender uma aula inteira para repetir a demonstração de algum teorema — que pode ser encontrada em qualquer bom livro-texto — sem que os alunos já estejam com seu olhar razoavelmente educados para perceber pelo menos os detalhes mais importantes no processo e conscientes do seu significado?

6.5 O Conceito de Função e o Trânsito Local x Global

As compreensões apresentadas no capítulo anterior sugerem que a dualidade local x global contribui para a geração de atritos e conflitos na abordagem do conceito de derivabilidade pelo(a)s estudantes. Mas, por que esta dualidade dificultaria esta abordagem? Na verdade, como argumenta Rezende(2003), o problema não é a dicotomia entre local e global mas, sim, o *trânsito* que o(a) estudante deve desenvolver entre os dois. Ora, este trânsito tornar-se-á muito mais problemático se a própria compreensão do conceito de função não comportar as dimensões local e global que a ele estão subjacentes. Neste sentido, a dimensão local da definição de função possivelmente só será percebida se o aluno estiver consciente da *arbitrariedade* inerente a esta própria definição. Em outras palavras, a imagem de um particular elemento do domínio de uma função f — e seu próprio domínio e contradomínio — só dependem, desde que compatíveis e que satisfaçam as condições usuais, da vontade de quem a define. No entanto, dado que o foco principal nas aplicações está nas qualidades *preditivas* que uma função possa ter, em geral, busca-se regularidade, continuidade e suavidade para que esta “fale” o que se está precisando. O problema é que também os fenômenos estudados nas aplicações estão muito longe de estarem livres de “acidentes”. Aliás, esta é uma das razões para a existência dos conceitos de continuidade e de derivabilidade. Ora, se todas as funções fossem contínuas ou deriváveis, tais conceitos seriam inúteis.

Quanto aos aspectos pedagógicos, a meu ver, deve ser objetivo do processo educacional contribuir para que o(a)s estudantes estejam preparados para “enfrentar” esses “acidentes”. E, neste ponto, reaparece a questão do contexto em que o conceito de função é ensinado e/ou aprendido. Falar em continuidade e derivabilidade só faz sentido se pudermos e tivermos interesse em *exercitar* tais conceitos. Como, por exemplo, o conceito de derivabilidade não está, como já argumentei, na pauta do Ensino Médio, não há razão para que seja gasto tempo ali discutindo esta questão. Ora, se questões como a derivabilidade de uma função não serão discutidas, não há, de fato, razão para o(a) professor(a) insistir em reforçar ou chamar a atenção para os possíveis “acidentes” que uma função possa ter.

Considerando a afirmação de que “a definição formal de função é tão abstrata, quanto estéril, uma vez que pouco contribuiu para o desenvolvimento do conhecimento matemático de um modo geral” (REZENDE, 2003, p. 343), eu pergunto: será que a abstração e a esterilidade da definição formal de função, percebida no contexto da construção histórica do conceito, são características automaticamente transpostas para o contexto educacional e, neste caso, seu uso seria pedagogicamente desaconselhável ?

A meu ver, quando se trata do papel, nas práticas educacionais, de uma definição formal em Matemática, independentemente de qual seja, os níveis de abstração e esterilidade percebidos pelo(a) educando(a) dependerão sempre da existência e da articulação de, pelo menos, dois fatores cruciais: contexto e exercício sistemático de suas potencialidades. Assim, por exemplo, no contexto do Ensino Médio, o foco está localizado na exploração global das chamadas *funções elementares*. Como são inexistentes (ou são poucas) as singularidades nessas funções e o foco é global, uma exploração mais atenta aos componentes da definição de função não seria recomendável, até porque o tempo sequer é suficiente para que as próprias funções elementares sejam completamente exploradas. Além disso, questões de limite, continuidade e diferenciabilidade não são usualmente tratadas neste contexto. Alguns livros-textos dedicados ao Ensino Médio trazem esses conteúdos, mas é razoável se supor que poucas escolas os desenvolvam. Em resumo, se o foco sobre o conceito de função no Ensino Médio é global e os conceitos locais de limite, continuidade e diferenciabilidade não são ali estudados, qualquer exploração local do conceito tornar-se-á, de fato, estéril.

Nosso foco, no entanto, está no Ensino Superior. Ali, os conceitos locais mencionados — e a quase totalidade de suas idiossincrasias — devem ser trabalhadas, sob pena de se dificultar o próprio desenvolvimento posterior do(a) estudante. Não resta dúvida de que há, portanto, contexto para que a definição formal seja inserida, desde que tal inserção ocorra somente depois da exploração e da percepção pelo(a)s aluno(a)s da liberdade e das possibilidades que ela carrega. Só a partir daí, esta definição formal de função, por estar subjazendo a maior parte dos conceitos subseqüentes (não apenas no Cálculo), poderá ser explorada em toda sua potencialidade.

6.6 Funções no 1º Ano de Matemática: No Cálculo e na Álgebra Linear

Cálculo de Funções de uma Variável e Álgebra Linear são duas disciplinas típicas do primeiro ano de qualquer curso de Matemática. Seguem praticamente juntas no tempo, mas suas intersecções são raras. É certo, por exemplo, que a derivada é uma transformação linear entre espaços de dimensão finita, logo, uma matriz, e as matrizes são objetos por excelência da Álgebra Linear nestes espaços. Ocorre que, no primeiro ano, o Cálculo se ocupa apenas de $\mathbb{R}$, um espaço vetorial de dimensão 1 quando tomado sobre o próprio corpo $\mathbb{R}$. Transformações lineares nestes espaços seriam representadas por matrizes 1 x 1 que, convenhamos, não seriam de muita utilidade. Entretanto, no segundo ano, as funções, agora já no Cálculo II, são de várias variáveis, com seus domínios (e contradomínios) naturalmente se generalizando para dimensões maiores do que 1. Como conseqüência, as intuições sobre funções, gráficos, limites, continuidade, derivadas, derivabilidade, diferenciabilidade etc, são obrigadas a sofrer uma considerável inflexão. Mais uma etapa da transição para a Matemática universitária tem início. As funções, antes associadas imediatamente à uma certa curva no plano cartesiano, são agora "difíceis de se ver". Na melhor das hipóteses, trabalhando com uma função muito bem comportada, em geral de algum subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, é possível a visualização de um esboço de seu gráfico em 3D. Caso o(a) aluno(a) tenha à disposição mídias com os recursos do MAPLE por exemplo, esta visualização ficará consideravelmente mais fácil de ser produzida e a interação se tornará enriquecida. Um grau de liberdade a mais nas dimensões do domínio ou do contradomínio de f será, no entanto, suficiente para que sua representação gráfica clássica deixe de ser factível. Como ficarão, então, neste contexto, os conceitos de diferenciabilidade, de derivada parcial, de limite, de continuidade, etc., sem falar nas generalizações do próprio conceito de integral ?

Ainda com propósitos comparativos e ilustrativos, situemos o tema *função* no cenário de uma aula típica de Álgebra Linear. Embora o formalismo das definições apresentadas neste contexto seja talvez até mais ostensivo do que do Cálculo, vejamos o que lá, em geral, ocorre:

Ao discorrer sobre uma dada transformação linear, o(a) professor(a) explicita o domínio e o contradomínio desta transformação. Assim, por exemplo, ele(a) escreve:

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por T(x, y, z) = (2x, 2y), para todo (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$. Dificilmente ele(a) escreveria apenas: seja T(x, y, z) = (2x, 2y). No caso do Cálculo, é provável que escrevesse apenas: considere a função linear f(x) = 2x. Além disso, na Álgebra Linear, é constante o destaque dispensado às imagens dos elementos de uma base do espaço vetorial do domínio de T, ou seja, se [u, v, w] representa uma base deste espaço, T(u), T(v) e T(w) sempre são trazidos à cena (até porque geram a imagem de T, um subespaço importante do contradomínio de T). Em outras palavras, é freqüente a presença de elementos pontuais (locais) na “ação” de uma função (transformação) numa aula de Álgebra Linear. É natural, portanto, que o exercício desse “movimento” vá induzindo o(a) estudante a olhar mais cuidadosamente para uma transformação, atentando-se não apenas para “regra” que define uma dada transformação linear, mas também para as características dos espaços que servem de domínio e contradomínio, assim como para eventuais singularidades locais.

Contribuindo para a formação de uma visão mais aberta do conceito de transformação, ao ser solicitado(a) a dar um exemplo de transformação linear, o(a) estudante percebe, imediatamente, que suas primeiras escolhas deverão ser a respeito do domínio e do contradomínio de T. Só a partir daí é que ele(a) pensará numa regra de associação entre os elementos. É claro que no início da aprendizagem suas escolhas são bem limitadas, mas não há, de todo modo, um contradomínio *default* ou um domínio restrito fazendo o papel do onipresente intervalo de números reais. A meu ver, o exercício desta flexibilidade é pedagogicamente desejável e certamente traz dividendos em termos de maturidade matemática e de amplitude de visão do(a) estudante em relação à Matemática. Infelizmente, este exercício não tem, em geral, seu correspondente no âmbito do Cálculo. Ali, os problemas usualmente propostos parecem não ter potencial suficiente para gerar e manter a voltagem necessária para descristalizar alguns dos canais que facilitariam a(o) estudante a percepção da liberdade inerente à definição formal de função. Na realidade, ele “vê” a definição, mas, como é natural, não consegue perceber seu alcance. Assim como um pesquisador precisa constantemente educar e exercitar seu “olhar”, um(a) estudante também precisa ser solicitado(a) na direção dessa educação e desse exercício.

6.7 Limites — Dinâmica (com estabilidade) no Cálculo

Do capítulo anterior, o(a) leitor(a) provavelmente deverá se lembrar dos conflitos de Vera e Gisele no episódio (o terceiro) tematizando o conceito de limite. Para aprofundar a análise de parte da natureza desses conflitos e para melhor ilustrar o ponto de vista que pretendo defender, tomemos a noção de *limite* de uma *seqüência* (x_n) *de números reais,* representada por $\lim_{n\to\infty} x_n$.

O símbolo lim representa uma operação no mesmo sentido que, por exemplo, + representa a operação de adição usual, porém com diferenças importantes. Assim, + representa uma operação de *aridade finita* (no caso, *binária*) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, enquanto que *lim* é uma operação de *aridade infinita* de $S_C \to R$, onde $S_C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \ldots$ é o conjunto de todas as seqüências convergentes de números reais. Caso o(a) leitor(a) não seja muito afeito(a) às "tecnicalidades", peço que atente apenas para as duas proposições abaixo e para a argumentação que virá logo em seguida:

- Como qualquer operação matemática, o cálculo de um *limite* (em S_C) implica num *processo*;
- O resultado desta operação *lim* é, como se espera, algo bem definido; no presente contexto, um número real.

Alguns dos dilemas típicos que ocorrem a(o) estudante na "lida" com o conceito de limite pode ser ilustrado pela seguinte proposição escrita por Gisele:

($LE1_{GIS}$) <u>Limite são os valores próximos de um ponto p</u> que uma função assume (f(p)).

Se não, entre outros, tomemos os seguintes:

1. O limite (se existe) é um valor ou o limite são valores...?
2. Se forem valores próximos, como saber se estão “suficientemente próximos” (expressão esta, por sinal, largamente utilizada quando se discute sobre o tema) ?
3. Afinal, o limite (se existe) “é atingido” ou não ?

Acredito que seja desnecessário argumentar em favor da importância dessas questões, em particular sob o ponto de vista do(a) das compreensões do(a) estudante que está se iniciando no Cálculo. Apenas para ilustrar, estão implícitos na questão 3 dilemas relacionados à, por exemplo, retas secantes que “atingem” ou não uma reta tangente, velocidades médias que “atingem” uma velocidade instantânea, coeficientes angulares que “atingem” ou não a derivada e, se tomarmos emprestado, por um instante, o conceito de integral definida, se as somas de Riemann sob uma curva “atingirão” a área sob ela.

Dilemas como estes são obviamente naturais e seria surpreendente se não emergissem no processo de aprendizagem de um conceito complexo como o de limite. Mas, vejamos, por um instante, o que diz Cornu (1991, p. 156, tradução nossa):

> [...] o ensino introdutório tende a enfatizar o *processo* de aproximação a um limite, em vez do próprio *conceito* de limite. As imagens mentais do conceito associadas a este processo [...] contém muitos fatores que conflitam com a definição formal (“aproxima-se mas não alcança”, “não passa”, “tende a”, etc.). Assim é que os estudantes desenvolvem imagens de limites e do infinito que remetem a concepções equivocadas relacionadas ao processo de “se aproximar”, de “crescer muito” ou de “continuar indefinidamente.

Sobre esta posição de Cornu, eu gostaria de argumentar em relação a três pontos :

a) Enfatizar o próprio *conceito* de limite e enfraquecer — como parece estar implícito na proposta — a ênfase no *processo* de aproximação, soa como uma proposta bastante discutível. Na verdade, os processos de aproximação — que, no contexto do Cálculo de funções de uma variável, são freqüentemente passíveis de serem “mostrados” gráfica e dinamicamente com relativa facilidade (mas nem sempre, como ilustrado pelo terceiro episódio) — parecem ser um dos poucos que fazem sentido (além, claro, dos procedimentos de manipulação algébrica) na fase inicial de aprendizagem do conceito, como, a propósito, o(a) leitor(a) pode constatar a partir dos escritos do(a)s estudantes. Além disso, eles podem representar agentes desestabilizadores importantes da visão predominantemente estática da Matemática que o(a) estudante, em geral, carrega consigo ao chegar à universidade.

b) Potenciais conflitos com a definição formal de limite não parecem provocar grandes efeitos colaterais indesejáveis a(o) neófito(a), uma vez que, para este(a), o caráter inicial prevalecente das definições quase sempre parece ser o sintático, isto é, "poucos (quando ocorrem) significados" decorrem diretamente das definições. No caso do limite, isto é particularmente verdadeiro, pois, a rigor, a definição nada informa sobre "como achar" o limite, ou mesmo, como investigar sua existência, estando, portanto, restrita ao papel de *justificar* que um determinado "bom candidato", previamente sondado, é (ou não) o limite de uma dada função num determinado ponto.

c) É discutível se falar em concepções equivocadas (*misconceptions*) sobre um conceito que envolve sutilezas e idiossincrasias que apenas estão começando a ser exploradas nesta fase de transição. Entre estas, por exemplo, situam-se aquelas associadas aos vários tipos de infinito e que quase sempre só serão abordadas com algum rigor significativo dois anos depois, num primeiro curso de Análise na Reta.

Mas *processo* e *conceito* não aparecem apenas na visão de Cornu. Eles também são destaques da visão de Tall e Gray, que até criaram a expressão *procept* (proceito), como contração de *process* (processo) e *concept* (conceito). Assim, nas palavras de Tall *et al* (2001, p. 85):

> Tem sido atribuído à noção de proceito um significado cada vez mais sutil desde sua primeira formulação (GREY; TALL, 1991). Ele é visto agora principalmente como um construto *cognitivo*, no qual o símbolo pode agir como um *pivô*, mudando de um foco no processo de calcular ou manipular para um conceito que pode ser *pensado* como uma entidade manipulável. Acreditamos que os proceitos estão na raiz da habilidade humana para manipular idéias em aritmética, álgebra e outras teorias envolvendo símbolos manipuláveis; eles permitem ao cérebro biológico mudar facilmente do *fazer* um processo para *pensar* sobre um conceito de uma forma simples.

O quadro abaixo, adaptado de um quadro maior do mesmo artigo ilustra a idéia:

	PROCEITO	
SÍMBOLO	**PROCESSO**	**CONCEITO**
3 + 2	Adição	Soma
3/4	Divisão	Fração
dy/dx	Diferenciação	Derivada
$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} \end{array}\right\}$	Tendendo ao limite	Valor do Limite

Apesar do otimismo desses autores, *a manipulação* de símbolos ou *o pensar* sobre o conceito de limite dificilmente serão procedimentos corriqueiros para o(a)s estudantes que estão começando a “lidar” com o conceito. Além disso, suas visões sugerem que estes pesquisadores continuam preservando a “cortina de ferro ontológica” — nas palavras de Pierre Lèvy — entre seres e coisas, posição da qual este autor, decididamente, se afasta:

> Graças à simulação de modelos mentais, o sistema cognitivo introjeta parcialmente os sistemas de representação e os algoritmos operativos cujo uso foi adquirido por ele. As tecnologias intelectuais, ainda que pertençam ao mundo sensível “exterior”, também participam de forma fundamental no processo cognitivo. Encarnam uma das dimensões objetais da subjetividade cognoscente. Os processos intelectuais não envolvem apenas a mente, colocam em jogo coisas e objetos técnicos complexos de função representativa e os automatismos operatórios que os acompanham.” (LEVY, 1993, p. 160).

Foi o que aconteceu várias vezes ao longo dos experimentos produzidos na presente pesquisa. Como resposta quase instantânea ao pressionar de uma tecla, “explodem” no monitor do computador objetos complexos que “interferem” nas manipulações mentais que estão sendo produzidas na interface da consciência do(a) estudante, não só naquele momento, mas, possivelmente, ainda que de forma residual, nas próximas ocasiões em que se configurarem condições similares. De maneira recíproca, ações como um movimento no *mouse* ou um *clicar* num botão podem “interferir” nos objetos já criados a ponto de gerar novos *feedbacks*, novos processos, novos objetos e novas compreensões.

O cálculo de limites e derivadas — apenas para me restringir ao contexto — é emblemático. Há pouco mais de uma década, a disponibilidade de sistemas de computação simbólica era restrito a pouquíssimas instituições de pesquisa ou universidades. Hoje em dia, qualquer aluno(a) com acesso à internet, poderá encontrar sítios na rede disponibilizando ferramentas para cálculos numa vasta gama de complexidade. Nos episódios, é notável a surpresa do(a)s participantes ao visualizarem os resultados apresentados pelo MAPLE quando solicitado a calcular os limites das funções dadas.

Voltando à dualidade processo / conceito, proposta por Grey e Tall, um dos problemas para a compreensão do conceito de limite, acima levantado, se localiza justamente na componente *conceito* da referida dualidade, em relação ao qual a pergunta seguinte se torna imediata: conceito de quê? Na verdade, um olhar sobre esta questão já aparecia no trabalho pioneiro de Fischbein em 1978. Segundo (TALL; TIROSH, 2001, p. 130, tradução nossa):

> O trabalho inicial pioneiro de Efraim Fischbein (1978) revelou a natureza conflitante das intuições sobre o infinito, comuns em nossos estudantes. Sua pesquisa empírica se estendia sobre o infinito potencial dos processos de limite e o infinito real da teoria dos números cardinais. Ele descobriu que as concepções intuitivas dos estudantes sobre os processos de limite tendiam a focalizar mais a infinitude do processo do que o valor finito do limite.

Esta citação estende a pauta da discussão sobre limites para a delicada questão da abordagem ao conceito de infinito em Educação Matemática. Na verdade, a posição deste conceito é problemática até mesmo dentro da Matemática. Basta que tomemos o Axioma da Escolha — ou o seu equivalente Lema de Zorn —, para que emirjam controvérsias filosóficas inclusive sobre a legitimidade da utilização de maquinarias tão poderosas. Afinal, são elas que sustentam teoremas aparentemente “óbvios”, como o que afirma que todo espaço vetorial não nulo tem uma base ou aquele que assevera a existência de uma função inversa à direita para qualquer função sobrejetora. Além disso, tomemos o próprio corpo ordenado completo dos números reais. Como trabalhar com as questões emergentes da sua ontologia sem que conflitos emirjam simultaneamente à essas questões. Aliás, sobre isto, Carnap (1983) já afirmava que nem o logicismo, nem o intuicionismo, nem o formalismo conseguiram dar conta dos reais.

Consideremos, agora, o fato de que é justamente esta estrutura sobre a qual os conceitos do Cálculo de funções de uma variável se sustentam e teremos uma noção das dificuldades que um(a) estudante, ingressante em seu primeiro ano universitário tem pela frente. Como tratar do infinito de maneira significativa, explorando seus tipos, num tal curso de Cálculo se o primeiro contato formal com infinitos numeráveis e não enumeráveis somente se dará em seu primeiro curso de Análise? O caminho é se apoiar nas intuições e na exploração sistemática de conceitos já conhecidos e compatíveis com o estágio de maturidade em que um(a) tal aluno(a) se encontra. É neste sentido que minha proposta é encetada.

O Cálculo é a representação matemática da dinâmica. Derivada é taxa de variação instantânea, é velocidade. Quando tomamos a derivada como um limite, estamos necessariamente "inoculando" movimento à noção de limite, uma vez que, estritamente sob o ponto de vista topológico, o limite não "precisa sair" de sua posição estática. Aliás, é o que ocorre em sua própria definição. O problema é que a estabilidade oferecida pela definição é uma estabilidade "artificial" ou "estéril" demais para aqueles ou aquelas que estão se iniciando no assunto. Neste caso, como trazer alguma estabilidade significativa a um conceito tão "escorregadio", sem que este perca sua essência e — mais importante — que seja reconhecida como legítima pelo(a)s o(a)s maiores interessado(a)s neste contexto de primeiro ano de um curso de Matemática?

Minha resposta, não muito criativa, é buscar o auxílio da Álgebra. Álgebra e estabilidade são companheiras de longa data. Além disso, aluno(a)s de Matemática devem se exercitar em Álgebra (assim como em Análise e Geometria) — obviamente com graus variáveis de profundidade, em função de suas escolhas futuras — como parte indissociável de sua formação. Para tanto, a única condição é que seja antecipado e agregado ao programa de Cálculo o conceito básico da Álgebra — o de *operação* —, usualmente trabalhado no segundo ano, como parte de um curso de Estruturas Algébricas. A rigor, dependendo da orientação implementada à disciplina, este conceito é "visto" já no início do próprio curso de Cálculo, porém numa forma, na prática, *en passant*, quando são enunciados os axiomas de corpo (ordenado completo). Aliás, sobre isso, a expressão vazia do(a)s aluno(a)s ao visualizarem, por exemplo, o axioma que diz que, para todo x não nulo, 1.x = x, é reveladora....

A bem da verdade, o conceito de operação (além das usuais) começa a ser explorado de maneira mais abstrata numa outra disciplina de primeiro ano — a Álgebra Linear —, mas, exceto por uma ou outra atividade, as operações de adição de vetores e de multiplicação de escalar por vetor, verdadeiramente exercitadas, são aquelas herdadas da Geometria Analítica, ali generalizadas para o espaço $\mathbb{R}^n$. Neste sentido, elas parecem não dispor de "voltagem" suficiente para induzir novas percepções no que diz respeito às potencialidades do referido conceito.

É inegável, no entanto, que entre os conceitos matemáticos campeões de popularidade, o conceito de operação (restrito às operações usuais) está sempre nas primeiras posições. "Saber ler, escrever e fazer as quatro operações" era o mote de nossos antepassados para toda pessoa "educada". Não há, portanto, como deixar de qualificar essas operações como conceitos estáveis para a maioria absoluta do(a)s aluno(a)s que ingressam em um curso de Matemática. O problema é que a estabilidade de significados, reconhecida e conferida às operações usuais traz como contrapartida, em geral, um considerável potencial de resistência à abstração de suas essências. A cristalização construída e que trouxe conforto ao longo dos anos cobra agora um preço para ser "reformada". A boa notícia é que este preço é bastante razoável, é passível de ser pago por qualquer estudante de Matemática e, melhor, seus dividendos são inúmeros.

Retomemos, agora, um pouco das "tecnicalidades" para falarmos em *operação* (e, portanto, em função) em sentido "abstrato":

Uma **operação binária** sobre um conjunto E é uma função $f : E \times E \to E$. Uma função $f : E \to E$ também pode ser chamada de operação e, neste caso, diremos que se trata de uma operação *singular.* De maneira geral, se tomarmos como domínio da função f o produto cartesiano E x E x ... x E, onde E é tomado n vezes, podemos chamar f de *operação n-ária*. Se estendermos este domínio para o produto cartesiano $\prod_{i \in I} E_i$, onde i é um conjunto infinito e E_i = E_j = E para todo i e j, teremos uma operação de *aridade* infinita sobre E. O tipo de infinito de I definirá, naturalmente, o tipo de aridade a que a operação está se referindo. É possível, ainda, generalizar a definição de operação acima pela introdução do conceito de *operação em sentido amplo*. Neste caso, nem os fatores E_i acima precisam ser os mesmos, nem tampouco iguais ao contradomínio E de f.

É claro que o conceito de operação como definido acima está longe de ser imediato para o(a)s estudantes, particularmente o(a)s iniciantes, em cursos de Matemática. Não é incomum que haja alguma dificuldade inicial até mesmo para o reconhecimento de símbolos como *2 + 3* ou, genericamente, *x + y,* como *um* (e único) número real. É natural, portanto, que, no caso da operação de limite, as dificuldades de manipulação sejam substancialmente maiores. Mas, por outro lado, há vantagens inegáveis nesta abordagem. A principal delas, a meu ver, é a possibilidade que o(a) aluno(a) tem de se apoiar no *conceito de operação,* um velho conhecido, para ajudá-lo a construir o novo conceito de limite. Desta forma, este "novo" conceito é "reduzido" ao conceito de operação, para, em seguida, ser "reduzido" ao conceito de função, que, não menos complexo que o de limite, tem a vantagem de não apresentar, pelo menos na maioria dos casos tratados neste contexto, a aparente "nebulosidade" ou a "indefinição" do que seja, afinal, o conceito de limite. Por outro lado, existe a possibilidade de que ocorra um fenômeno similar ao que ocorre com o conceito de função, isto é, uma coisa é se falar nas quatro operações usuais, outra é falar em operação em sentido geral. De todo modo, quer seja no Cálculo ou na Álgebra, todo(a) aluno(a) de Matemática terá que se familiarizar com esta visão mais geral. O que eu estou propondo é apenas que se antecipe este tratamento.

Sob a perspectiva acima, o clássico teorema "*Se o limite existe, ele é único"*, geralmente visto (ou até mesmo demonstrado) nos livros de Cálculo logo depois da definição de limite — e sob o mesma expressão geral de vazio d(o)as estudantes produzida por 1.x = x — passa a ter uma boa razão para ser enunciado.

Ora, se a idéia é definir limite como uma função (operação) *lim*, há de se garantir que não existe "perigo" de que algum elemento do domínio de *lim* seja associado a duas imagens distintas (claro que no presente contexto não estão em pauta as chamadas *funções multivalentes*).

A título de ilustração, segue abaixo um quadro comparativo da operação de limite de seqüências convergentes com algumas operações usuais:

Operação	**Símbolo da Operação**	**Tipo de Operação**	**Resultado da Operação**	**Símbolo Usual da Imagem Genérica da Operação**
Adição	**+**	Binária em $\mathbb{R}$	**Um número real** chamado **Soma** **(**de x com y)	x + y
Oposto	**-**	Singular em $\mathbb{R}$	**Um número real** chamado **Oposto** (de x)	- x
Divisão	÷	Em sentido amplo, de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{0\}$ em $\mathbb{R}$	**Um número real** chamado **Quociente** (de x por y)	$\frac{x}{y}$
Limite	lim	De aridade infinita em S_C	**Um número real** chamado **limite** da seqüência (x_n)	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

O(a) leitor(a) obviamente notou que a operação de limite, referida na tabela acima, ficou restrita às seqüências convergentes de números reais. Assim, a operação limite não está definida, por exemplo, para a seqüência $(-1)^n$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ não existe. A rigor, a impossibilidade de definição da operação em certos (ou em muitos) casos não se constitui numa grande novidade: a operação binária ÷ (divisão usual) também não está definida para o par (x, 0), qualquer que seja x real, assim como a operação singular raiz quadrada não está definida para x negativo.

Uma seqüência de números reais é um tipo particular de função, caracterizada pelo domínio fixo $\mathbb{N}$. Além disso, limites de seqüências de números reais são sempre investigados em + ∞ (infinito enumerável). Já quando se fala em limite de funções, em geral, novos elementos aparecem para contribuir com a complexidade do conceito. Neste caso, os domínios não estão mais restritos à $\mathbb{N}$. Os limites de uma função f podem ser calculados (ou investigados) não apenas no infinito (+ ou -), como também — e principalmente — em qualquer ponto de acumulação *a* do domínio de f. Além disso, neste último caso, ainda podemos investigar os chamados limites laterais. Em suma, a complexa manipulação do limite de uma função f num ponto *a* envolve, no mínimo, a articulação de três movimentos: o primeiro, na estrutura de suporte do domínio D_f de f, vai gerar, simultaneamente, outro na estrutura de suporte do contradomínio C_f de f e outro no produto cartesiano $D_f \times C_f$. Assim, caso a estrutura de suporte do domínio D_f não disponibilize *a* como ponto de acumulação de D_f, não há sequer sentido em investigar limite de f em a. Por sua vez, a estrutura de suporte do contradomínio C_f — por sinal, freqüentemente tratada com alguma displicência nos cursos de Cálculo — é fundamental, pois, por exemplo, basta que sacrifiquemos a estrutura de corpo de $\mathbb{R}$ pela simples retirada do elemento 0, para que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$ não exista, ou seja, não haverá a "quem" associar a função 1/x, sob a operação lim, com x tendendo ao infinito. Finalmente, resta $D_f \times C_f$. Ora, o *gráfico* de f — talvez a mais importante representação visual de uma função real de uma variável real — é representado "abstratamente" justamente por este produto cartesiano.

A esta altura, o(a) leitor(a) poderia protestar alegando que tais "tecnicalidades" ou "formalismos" seriam mais apropriados a um curso de Análise do que a um primeiro curso de Cálculo. Caso me fosse dado o direito à réplica, eu diria o seguinte: O Cálculo ocupa boa parte da fase inicial da transição para a matemática universitária. Novas significações e, principalmente, novas re-significações são inerentes a qualquer processo de transição. Re-significar pode, em certos casos, implicar em desconstruir significações prévias. Por exemplo, quando Daniel afirma que "limite é o ponto máximo...", ele possivelmente está sugerindo uma compreensão de que qualquer conjunto (limitado) de números reais possui um elemento máximo. Dificilmente será imediato para um(a) iniciante pressupor que antes de qualquer candidato poder assumir um possível posto de máximo (ou mínimo) de um conjunto qualquer, este conjunto deverá estar previamente equipado com uma relação de ordem. Mais improvável é pensar que um(a) egresso(a) do Ensino Médio possa conceber alguma relação de ordem por meio da qual 0 (zero) não seja menor do que 1 ou alguma operação com a propriedade de que $xy = 0$ não implique $x = 0$ ou $y = 0$.

Não pretendo continuar me estendendo ainda mais discutindo eventuais idiossincrasias de $\mathbb{R}$ ou de relações de ordem não usuais. Meu objetivo é tão somente o de levar o(a) leitor(a) a refletir sobre a esterilidade de se enunciar, logo no início, em livros ou em cursos de Cálculo, os axiomas de corpo ordenado completo, sem que o conceito de operação seja sequer discutido e explorado. Afinal, o que significa para um(a) iniciante no Cálculo os termos: corpo, ordenado, completo ? A construção de significados para esses elementos é um processo que leva tempo e, muito provavelmente, dependerá da desconstrução de outros significados já impregnados. É fato, no entanto, que nenhum(a) estudante de Matemática exercitará esses conceitos sem antes compreender a idéia de operação, em sentido geral.

6.8 Derivada — Da estática para a dinâmica

Ao longo do capítulo anterior, a compreensão de derivada como coeficiente angular de tangentes emergiu de maneira persistente. Em particular, a última seção do capítulo anterior reforçou ainda mais a minha — e, provavelmente, a d(o)a leitor(a) — percepção de que termo derivada induz o(a)s participantes a evocar esta interpretação geométrica. Assim, esta noção prevaleceu fortemente sobre o conceito dinâmico de velocidade ou de taxa de variação instantânea. Ora, mas num sistema cartesiano espaço (s) por tempo (t), a velocidade no instante t_0 não é justamente o coeficiente angular da reta tangente — desde que exista — ao gráfico de $s(t)$ em $(t_0, s(t_0))$?

Sim, mas, como os dados sugerem, a identificação entre coeficientes angulares de tangentes e taxas de variação instantâneas não parece ser imediata nem, muito menos, significativa. Afinal, se assim não fosse, por que a associação entre derivada e coeficiente angular predominou de maneira tão ostensiva — independentemente da mídia utilizada — que chegou a gerar um “silêncio ensurdecedor” sobre a idéia de taxa de variação ? Mesmo quando, por alguma razão — um problema de Física, por exemplo —, as idéias de derivada e de velocidade eram evocadas simultaneamente, a associação entre as duas pareceu mais mecânica do que significativa conceitualmente. Não é à toa, portanto, que embora Vera e Gisele saibam que a derivada — quando existe — de uma função espaço pelo tempo é a velocidade, elas não compreendem o porquê deste fato.

O que eu quero sugerir aqui é que para um(a) estudante de primeiro ano, pensar a derivada como um coeficiente angular parece ser “mais seguro” ou “menos escorregadio” do que pensá-la como uma taxa de variação. Na verdade, há boas chances desta “busca por segurança” configurar-se como um movimento natural, uma reação induzida pelo “instinto de sobrevivência” no ambiente hostil e com alta taxa de “mortalidade” tradicionalmente caracterizado num primeiro curso de Cálculo na universidade. Neste contexto, qualquer detalhe aparentemente sem importância sob o ponto de vista do ensino pode gerar grandes repercussões sob o ponto de vista da aprendizagem, quer seja no sentido de dificultar ou no de facilitar compreensões atuais ou futuras.

Em suma, a aparência importa, e muito. Assim, por exemplo, se uma função é “algo” usualmente representado por y(x) e que é associado a um gráfico “bem comportado” no plano cartesiano — como era, em geral, no Ensino Médio — não há porque se surpreender que a interpretação imediata e “segura” para a derivada seja um coeficiente angular de uma reta tangente. Não é à toa que Daniel, no quarto episódio, ao fixar o olhar nos gráficos de f e f ’, procurou imediatamente suas referências de parábolas e retas. Também não é à toa que Pedro, com um sorriso, responde que “desde o segundo grau a gente sabe que derivada é o coeficiente angular da reta tangente”.

A esta altura, o(a) leitor(a) pode questionar se as visões defendidas até aqui (por ex, uma função como uma terna) não estariam, na verdade, reforçando uma visão estática da Matemática, e do Cálculo em particular. Penso que não. A chave para a compreensão dos conceitos em pauta na presente pesquisa é moldada pelo conceito de função. Ora, exercitar seus componentes significa exercitar também componentes dos conceitos subseqüentes. Como falar de funções neste contexto, destacando apenas suas regras, como x^2, $x^{1/3}$, sen(x), 1/x, se limite, continuidade e derivabilidade são conceitos locais e que dependem, portanto, das estruturas sobre as quais estas regras vão “interferir”, sendo, portanto, pelo menos tão importantes quanto “a personalidade” de cada uma dessas regras. Aliás, sobre “personalidades” das regras usuais de funções, eu proponho um pequeno parênteses:

É curioso, sintomático e vai ao encontro da discussão sobre a derivada como taxa de variação, que a família de uma das “personalidades” mais importantes da classe das funções elementares — a família das funções $f(x) = ke^{ax}$ — não parece ser “valorizada” tanto quanto deveria num curso de Cálculo de primeiro ano (pelo menos, não antes de uma introdução às equações diferenciais) justamente pela propriedade que a faz tão especial: sua taxa de variação num ponto é proporcional ao seu valor neste ponto. Ora, mas o “silêncio” sobre uma propriedade tão importante também não surpreende: como vimos no capítulo anterior, derivada como taxa de variação não pareceu estar impregnada nas compreensões do(a)s participantes sobre o conceito.

É óbvio que há uma infinidade de circunstâncias matemáticas em que tais regras podem e devem ser vistas *per se*, gozando de autonomia e do “status” de função. Isto ocorre, por exemplo, ao se lidar com operadores. Assim, por exemplo, num espaço $\mathcal{F}$ de funções diferenciáveis, é natural que o operador derivação D “atue” sobre funções dadas apenas pelas suas regras (na verdade, os outros elementos estão implícitos). O contexto em que são discutidos problemas deste tipo me parece, contudo, que estaria mais bem situado em algum ponto à frente do que aqueles sobre os quais temos trabalhado nesta pesquisa. Na verdade, questões similares são vistas na Álgebra Linear. Dada a linearidade do operador derivação (ou do operador integração), ele é freqüentemente citado como exemplo para ilustrar transformações em espaços de funções. Ainda assim, neste caso, sua posição pode ser considerada marginal neste contexto.

De todo modo, é certo que a questão contextual ocupa uma posição central nesta discussão, como, aliás, destaca Nardi (2000, p. 44, tradução nossa):

> Nos primeiros encontros com o Cálculo Diferencial e Integral (Orton 1983a, b), uma função é simultaneamente um objeto para integrar e diferenciar e um meio para se encontrar áreas sob gráficos e gradientes de tangentes. Em equações diferenciais, a noção implícita de função é a de um objeto, uma solução para uma equação, não uma equação em si. Esta interação continua no estudo das séries de Fourier ou da expansão de Taylor de uma função (sobre as quais pelo menos uma breve visão foi oferecida aos estudantes em suas primeiras semanas nos curso): Séries de Fourier ou expansões de Taylor são objetos que nós geramos manipulando certos valores da função e isto dá a todo o empreendimento um aura orientada-por-processo.

E a autora complementa (NARDI, 2000, p. 45, tradução nossa):

> Entretanto, nós falamos sobre *as* séries de Fourier ou sobre *a* expansão de Taylor de f como características de f, assim como suas propriedades, de uma maneira orientada-por-objeto. Os problemas aparecem, por exemplo, com a expansão de Taylor de uma função (ela mesma uma função), quando os estudantes tentam escrever a expansão sem se preocupar com o intervalo ou o ponto ao redor do qual a expansão é produzida.

6.9 As Compreensões Emergentes

Independentemente de eventuais ou preferenciais interpretações atribuídas ao conceito de derivada, o que nos interessa aqui é a questão da compreensão e, mais do que isso, de propor caminhos no sentido de se contribuir para a desconstrução de eventuais condicionamentos e a ampliação do espectro de compreensões sobre um dado conceito. Segundo Dewey (1959) *compreensão* é entendida como "apreensão de significados". Significação, por sua vez, é entendida por este autor em pelo menos três aspectos (DEWEY, 1959, p. 151):

I. Como possibilidade duvidosa, hipotética enfim, como idéia;
II. Como qualidade de coisas e acontecimentos;
III. Como o processo de fusão das idéias com *padrões de referência*, isto é, com significações padronizadas que adquiriram o *status* de conceito.

Além disso, sua visão de compreensão é fortemente associada às inter-relações:

> Apreender a significação de uma coisa, de um acontecimento ou situação é ver a coisa em suas relações com outras coisas: notar como opera ou funciona, que conseqüências traz, qual a sua causa e possíveis aplicações. Contrariamente, aquilo a que chamamos coisa bruta, a coisa sem sentido para nós, é algo cujas relações não foram apreendidas. (DEWEY, 1959, p. 136)

Quando trazemos esta visão de compreensão ao contexto da Matemática em nível universitário, talvez seja até desnecessário advogar a importância da apreensão das relações entre os vários nós que compõem as redes de significados que são construídas (e desconstruídas) ao longo do processo de aprendizagem. No entanto, quando Dewey propõe uma apreensão de significados, que significados deveriam ser apreendidos no caso do conceito de derivada? Algumas respostas possíveis seriam que a derivada:

i) É um número;

ii) É o coeficiente angular de uma reta;

iii) É uma taxa de variação;

iv) É um limite;

v) É $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

vi) É a melhor aproximação linear local de f.

Mas também poderia ser:

vii) Uma transformação linear;

viii) Uma matriz

ix) A derivada de uma função a valores reais f em um domínio **D** é a seção Lagrangiana do fibrado cotangente T*(**D**) que dá a forma de conexão para a única conexão plana (ou chata) sobre o fibrado vetorial trivial **D** x $\mathbb{R}$ para o qual o gráfico de f é paralelo.[5]

---

[5] "The derivative of a real-valued function f in a domain D is the Lagrangian section of the cotangent bundle T*(D) that gives the connection form for the unique flat connection on the trivial **R**-bundle D x **R** for which the graph of f is parallel". Agradeço à Profª Dra. Alice K. M. Libardi, especialista em Topologia Algébrica e Diferencial do Deptº de Matemática da UNESP – Rio Claro, pela tradução desta definição para o português

Seria razoável, entretanto, sustentar que um(a) estudante cuja rede de significados sobre o conceito de derivada não possui os nós respectivos a cada um dos elementos do item ix) acima, não compreende o que é a derivada? A menos que este(a) estudante seja um(a) especialista em Topologia Diferencial, acredito que não. Mas nem é preciso ir tão longe. Os itens vii) ou viii) também ilustram significados que dificilmente são acionados por um(a) aluno(a) de primeiro ano, já que a associação entre derivadas e matrizes somente se torna "natural" no Cálculo de várias variáveis. Mesmo que nos restringíssemos apenas aos itens de i) a vi), já será suficiente para percebermos que — como mostram os dados da pesquisa — que a maioria deles não parece compor as respectivas redes de significados do(a)s participantes sobre o conceito em pauta. Isto quer dizer que compreensão de conceitos matemáticos é uma noção relativa, relatividade esta que está intimamente associada ao contexto particular em que estes conceitos são tratados.

Sob esta perspectiva, tomemos, por exemplo, a questão geradora do primeiro episódio. Mas o que é uma função derivável ? Naquele contexto seria suficiente afirmar o seguinte: *uma função f é derivável quando existe* $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ *para todo x do domínio de f* = $\mathbb{R}$. Ora, mas, neste caso, analisar a derivabilidade de f vai implicar, portanto, em ativar uma rede de significados cujo conjunto de nós deve incluir pelo menos <u>todos</u> os conceitos tratados nesta pesquisa, o que, convenhamos, já não seria pouca coisa. No entanto, para que um(a) estudante possa ativar esta rede, torná-la "viva", não lhe basta um ato de vontade, o que, aliás, pelo menos no caso investigado, pareceu não faltar. É necessário antes que a eles sejam dadas oportunidades de exercitar os movimentos de "vivificação", de exploração, de estabelecimento de relações, em suma, de construção de compreensões conceituais, ainda que, para isto, tenham que pagar o preço do desconforto inicial, da desorientação e da desestabilização de convicções previamente construídas. É neste sentido que eu defendo a integração da linguagem natural e dos sistemas de computação algébrica à práxis do(a) estudante de primeiro ano de Matemática.

Se sob o ponto de vista do(a) aluno(a), uma tal integração já seria um notável exercício de construção e de "vivificação" de sua rede de significados, não menos importante seriam os dividendos para o(a) professor(a), como, de resto, Rose

(1989) já afirmara no capítulo II. Afinal, o(a) leitor(a) possivelmente concordará que grande parte das compreensões emergentes nesta pesquisa, caso não fossem materializadas nos experimentos e na escrita do(a)s participantes, continuariam “submersas” ou habitando o “limbo de compreensões” a que me referi na introdução desta tese. Induzi-las a virem à tona é uma tarefa certamente necessária ao processo educacional.

6.10 Oralidade-escrita-CAS e Compreensões de Conceitos de Cálculo Diferencial — Possibilidades

O capítulo anterior apresentou algumas das possibilidades de representação de compreensões sobre conceitos do Cálculo Diferencial por meio da integração estudantes-oralidade-escrita-CAS. Cada uma das mídias, com suas características, peculiaridades e limitações, contribuiu para que, da interação humanos-coisas, pudessem emergir representações de conceitos matemáticos específicos que foram materializadas como compreensões no processo de interpretação. Assim, a oralidade, com suas características de comunicação baseada na flexibilidade, na rapidez e na capacidade de expressão foi a tecnologia que predominou na “ocupação dos espaços” desta interação. Tal predominância não deve, no entanto, ser entendida como sinônimo de superioridade qualitativa em relação às demais, mas apenas como fonte geradora — circunstancialmente — de “maior volume de material” passível de ser submetido à interpretação e análise.

6.10.1 A Escrita

Particularmente em relação à escrita, eu tomarei, por um instante, emprestada de Brown (2001, p. 21, tradução nossa), a seguinte pergunta:

> Até que ponto pode a Matemática ser arrastada para dentro de um domínio lingüístico e até onde um tal movimento permite-nos clarificar a maneira pela qual estudantes compartilham seus pensamentos matemáticos com seus pares e com seus professores?

No contexto da presente pesquisa, esta pergunta poderia ser refeita da seguinte forma: Até que ponto pôde os conceitos de função, limite, continuidade e derivada (e suas relações) serem arrastados para dentro da linguagem escrita natural e até onde um tal movimento permitiu clarificar a maneira pela qual o(a)s participantes compartilharam seus pensamentos matemáticos com o pesquisador?

No que se refere à primeira parte da pergunta, vamos admitir, como exercício, que este movimento fosse possível, que o atrito gerado neste trabalho fosse ínfimo — a fim de que não houvesse perdas significativas — e que, finalmente, a tradução tivesse sido concluída. Para um(a) matemático(a), o resultado provavelmente seria percebido de maneira mais ou menos similar a(o) de um(a) maestro(ina) que trocasse a audição de uma sinfonia de Beethoven pela leitura da partitura desta mesma peça musical. Neste sentido, mas numa perspectiva mais abrangente e não limitada à escrita, Lévy (1993, p. 70) reflete, de maneira brilhante, uma visão similar:

> A escrita em geral, os diversos sistemas de representação e notação inventados pelo homem ao longo dos séculos têm por função semiotizar, reduzir a uns poucos símbolos ou a alguns poucos traços os grandes novelos confusos de linguagem, sensação e memória que formam o nosso real. As experiências que temos sobre as coisas misturam-se com imagens em demasia, ligam-se por um número excessivo de fios ao inextricável emaranhado das vivências ou à indizível qualidade do instante: não nos é possível ordená-las, compará-las, dominá-las. Uma vez que as entidades singulares e móveis do concreto tenham sido descoloridas e aplainadas, quando a lava espessa do futuro tiver sido projetado sobre os poucos estados possíveis de uma sistema simples e maleável, então nossa consciência míope e débil, em vez de perder-se nas coisas, poderá finalmente dominar, mas apenas através destas sombras minúsculas que são os signos.

A questão aqui, no entanto, não deve ser colocada sob o ponto de vista do(a) matemático(a), mas sim do(a) estudante de Matemática. Assim, a “tradução”, produzida pelo(a)s participantes, dos conceitos em pauta para a linguagem escrita sugeriu compreensões que puderam, de fato, contribuir para clarificá-las sob o olhar do investigador — e, muito possivelmente, também sob o olhar de seus professores ou professoras — permitindo, assim, um encaminhamento de uma resposta para a segunda parte da pergunta supra-referida.

Ilustrada pelos vários exemplos do capítulo anterior e independentemente da “correção” de tais compreensões, chama à atenção a compatibilidade entre as compreensões conceituais materializadas pela escrita do(a)s participantes e aquelas emergentes nos experimentos. Assim, o uso sistemático de determinadas metáforas (ex: a derivabilidade como “ausência de bicos ou pontas no gráfico respectivo), a preferência por interpretações específicas (ex: a derivada como coeficiente angular) e o relativo “silêncio” sobre as três componentes que compõem o conceito de função, sinalizaram compreensões que efetivamente transpareceram nos episódios.

Ainda sobre a escrita, seria possível sugerir que além da função representativa ela teria também um papel de “amplificador da cognição humana” como propõe Kerkchove (1997, p. 256) ? É claro que a presente pesquisa não pretendeu investigar uma tal proposição. No entanto, vale a pena lembrar que grande parte deste “pensar em voz alta” materializado nos experimentos foi induzida pela necessidade de escrever sobre os conceitos e suas inter-relações. É o que se depreende da fala do(a)s participantes. Assim, quando solicitados a opinarem sobre o tipo de questões propostas nos experimentos, ouve-se, por exemplo:

Sobre as questões solicitando respostas escritas em linguagem natural:

Édson: São questões que <u>fazem você pensar em coisas que você nunca parou para pensar</u>, né?

Talita: É, porque a <u>gente está acostumada a mexer com a parte de conta e não de pensar na parte teórica</u> e tentar definir isso para alguém, entendeu?

Talita: Porque, vamos supor, tem um colega, alguém tem alguma dúvida num exercício, você vai lá e explica o exercício. Você não explica o que significa a função, o que significa aquilo. Você simplesmente coloca matematicamente igual ao professor. Eu nunca tinha feito antes.

Sobre escrita e oralidade:

Édson: *[a oralidade]* É mais fácil para se expressar. Falar é mais fácil. Dizer isso, isso e isso. Escrever é bem mais...

Pedro: Porque várias vezes você pensa em muitas idéias, mas quando você fala, você expressa todas elas. Mas na hora de escrever, às vezes vem aquela angústia: nossa, será que não estou sendo muito enfadonho? Será que a resposta não tá crescendo demasiadamente? Você dá uma enxugada. Aí você tira pontos que você estava pensando e que eram importantes.

Talita: Só que eu também acho assim: Quando você fala na hora — eu concordo com tudo que vocês falaram — você fala o que está pensando e vai falando e falando. <u>Quando você pensa para escrever, você também chega a uma conclusão final e essa conclusão você escreve</u>. Às vezes, você pode deixar escapar algumas idéias importantes porque você concluiu e resumiu. Mas, ao mesmo tempo, você conclui. Então, por exemplo, que nem, ah ..., teve uma vez na aula de Aritmética que eu fui comentar alguma coisa e: não, não, não é, tá errado. Porque na hora que eu falei eu já vi que eu tava errada. Se eu fosse escrever, eu ia pensar: não, eu não vou escrever isso, porque isso tá errado, entendeu? Então, nesse caso, você reflete um pouco.

Pedro: Na fala não existe uma censura...

Talita: É, você vai falando e vai pensando ao mesmo tempo.

Pedro: Às vezes você não reflete sobre aquilo que você já falou, o que não acontece na escrita.

Pesq: Então vocês estão concordando que escrever, quando você é induzido a escrever você também é induzido a refletir sobre aquilo ?

Talita: <u>Reflete bem mais do que se estivesse falando</u>. Por isso é mais difícil também *[risos]*

Assim, há indícios de que — como propõe Powell (1991), no capítulo II — a escrita é indutora de reflexões. É curioso, no entanto, que lingüistas como Saussure sustentem que "a única razão da palavra escrita é representar a palavra falada." Na verdade, parece-me que em relação à Matemática as visões de Lèvy (1993) e Borba e Villarreal (2005), ao proporem que humanos e mídias constituem uma ecologia cognitiva, com cada um desses atores "interferindo" de maneira própria no pensamento (coletivo) matemático, parecem mais próximas da realidade. Neste sentido, as compreensões, quando emergentes da interação oral, caracterizam-se pela expressividade, rapidez e fluência; e qualquer alteração num desses elementos (uma pausa, por exemplo) pode ser um sinalizador de dificuldades no trânsito na rede semântica que está sendo acionada.

Ainda sobre a escrita, nesta tese, basta que ouçamos Hoffman e Powell (1989, p. 55, tradução nossa):

> [A escrita] permite aos instrutores "ouvirem" cada estudante e permite aos estudantes saberem que suas preocupações e idéias serão "ouvidas". Além disso, seus escritos revelam o que entendem e o que ainda não entendem. Por meio da escrita, mal-entendidos, conceituações variantes, crenças e padrões de pensamento são revelados.

E sobre este aspecto comunicativo, Driscoll e Powell (1992, p. 251) ainda afirmam:

> A qualidade do pensamento matemático dos estudantes e a riqueza de seus significados estão correlacionados à ênfase e à extensão que é conferida à comunicação no currículo. Para aumentar as oportunidades de comunicação apropriada, nós devemos aprofundar nosso entendimento da natureza e do papel da comunicação na aprendizagem matemática.

Sob as perspectivas supra-referida, a escrita (e as outras mídias) materializou compreensões que pareceram ser significativas para o(a) estudante sobre os conceitos em pauta e não, necessariamente, compreensões “corretas”. É claro que o ato de escrever (ou de ouvir ou falar) pode ser mais, ou menos, significativo para o agente que o produz, dependendo, dentre outros fatores, de sua disposição, interesse e postura ativa no processo. De todo modo, os dados sugerem que a escrita em linguagem natural, quando materializa compreensões sobre os conceitos tratados:

a) Pôde permitir ao aluno expressar suas compreensões de maneira conceitualmente mais significativa para ele (e, portanto, para o educador que está interessado em conhecer estas compreensões).
b) Revelou uma notável compatibilidade com as compreensões emergentes nos experimentos desenvolvidos posteriormente. Exemplos de tais compatibilidades foram encontrados em relação a todos os conceitos investigados.

6.10.2 A interação humanos-CAS

Os dados emergentes da interação com o CAS sugerem um papel importante desta mídia no sentido de “impactar” o pensamento coletivo com resultados e imagens que contribuíram para realimentá-lo, possivelmente induzindo *insights* aos atores humanos, aludindo a proposição de conjecturas e, em conseqüência, gerando novas compreensões e certamente configurando novos conflitos. Foi o que ocorreu em cada um dos episódios (primeiro, terceiro e quarto) em que o CAS participou como ator.

Na análise inicial das interações entre as duplas e o CAS, cinco categorias foram identificadas, a saber:

I) Como uma calculadora sofisticada
II) A serviço da proposição de conjecturas
III) Interferindo nas compreensões
IV) Induzindo movimentos criativos de interação
V) Gerando imagens insatisfatórias

Os exemplos de cada uma dessas categorias, apresentados nos episódios, ilustram a idéia do “pensar com as mídias”, proposto por Villarreal (1999) e exemplificado por Borba e Villarreal (2005, p. 134), que, ao discorrerem sobre conjecturas produzidas por estudantes em ambientes similares ao da presente pesquisa, afirmam:

> As conjecturas não ocorreram dentro das mentes dos estudantes, nem fora delas, na tela do computador, mas, de alguma forma, foram geradas com o computador; e mesmo se uma particular conjectura for atribuída a um único estudante, o coletivo, como um todo, condicionou sua emergência.

Ao longo dos experimentos desenvolvidos na presente pesquisa, a interação das duplas com o CAS possibilitou que o(a)s participantes pudessem integrar *a* interface do Sistema às compreensões conceituais que configuravam as redes de significados acionadas (e/ou construídas) num dado momento dos experimentos. Assim, cada uma das categorias supra-referidas de interação são compostas por elementos qualitativamente diferentes, porém com o mesmo papel ativo nessas redes. Neste sentido, “tudo que for capaz de produzir uma diferença em uma rede será considerado como um ator, e todo ator definirá a si mesmo pela diferença que ele produz” (LÉVY, 1993 p. 137).

Na verdade, um dos conceitos mais apropriados para representar este processo é o de *moldagem recíproca* (*intershaping relationship*), proposto por Borba em 1993, com o objetivo de trazer à luz uma maior simetria entre o ser cognoscente e as tecnologias, característica que, em geral, tende a ser obscurecida nas visões mais tradicionais de conhecimento.

Sob esta perspectiva, que diferenças poderiam ser produzidas por um CAS num curso de Cálculo inicial para aluno(a)s de Matemática, quando integrados em condições similares às da presente pesquisa ? Antes de apresentar uma sugestão, eu gostaria de chamar a atenção do(a) leitor(a) para a importância dos contextos e cenários específicos que configuram o palco de atuação destes atores informáticos:

A meu ver, a integração de um CAS ou de qualquer outra mídia no Cálculo para a um curso de Matemática deve se harmonizar com os objetivos, especificidades e peculiaridades que o caracterizam, como, de resto, suponho que deva ocorrer em qualquer outro curso que tenha a referida disciplina em seu currículo. Isto, a rigor, não se constitui numa novidade: não é apenas a informática que é diferente nas matemáticas dos diversos cursos, mas é a própria Matemática, entendida como um conjunto de práticas, que é "moldada" — preservando-se, claro, as similaridades óbvias — para servir aos objetivos, às problemáticas, aos modelos, aos modos de pensamento e aos valores de cada curso (profissão) específico(a).

A situação do Cálculo num curso de Matemática é peculiar já nos dois primeiros anos: afinal, a disciplina tem como horizonte servir à formação de futuros matemático(a)s ou de futuros professore(a)s de matemática para a educação básica? Basta uma análise rápida do currículo padrão usual destes cursos e a resposta para uma tal pergunta já estará implicitamente dada: deverá servir aos dois, pois a bifurcação licenciatura / bacharelado somente ocorre a partir do terceiro ou quarto ano. Neste caso, como equilibrar os objetivos do Cálculo com os objetivos do(a) futuro(a) bacharel e do(a) futuro(a) licenciado(a)? Ou ainda, os objetivos do Cálculo na formação de cada um desses profissionais deveriam ser diferentes ?

Note-se que tais dilemas não ocorrem, por exemplo, nos contextos da Engenharia ou da Economia. Ali está claro (ou pelo menos deveria estar) para todos os envolvidos no processo educacional que ao Cálculo cabe o papel de servir à construção de modelos teóricos de fenômenos da Engenharia ou da Economia, respectivamente. Assim, ainda que tais modelos variem em termos de complexidade e de refinamento representativo dos fenômenos de interesse de cada área, quando a construção de um modelo depende de um determinado teorema, a(o) engenheira(o) ou economista, em geral, pouco importa se a demonstração deste teorema consumiu uma centena de páginas ou se foi "elegantemente" reduzida para uma lauda. Para um(a) matemático(a) a diferença é crucial e caracteriza um valor estético que é cuidadosamente perseguido pelos membros desta comunidade.

Apesar da importância e da urgência em se chegar a uma conclusão sobre os dilemas supra-referidos, a discussão sobre "que matemática deve ser trabalhada num curso de licenciatura" continua aberta, segundo pesquisadore(a)s que têm como objeto a formação de professores. Como o escopo da pesquisa ora relatada não comportaria mais digressões sobre esta questão, sou obrigado aqui, antes que nos estendamos demais, a definir uma posição em relação a ela.

Como o(a) leitor(a) certamente deve ter percebido, a própria seqüência de conceitos cujas compreensões por estudantes foram escolhidas para a investigação, traduz uma visão pragmática sobre a realidade do Cálculo (Diferencial) de funções reais de uma variável real nos cursos de Matemática atuais. Aproximando-me mais deste pragmatismo, entendo que fixar objetivos diferentes para o Cálculo para licenciatura e o Cálculo para o bacharelado, na atual conjuntura, ainda que pudesse ser desejável, seria impraticável. Isto posto, a meu ver, a referida disciplina deve assumir seu papel fundamental — em parceria com as álgebras e as geometrias — de estimular o exercício da liberdade matemática pelo(a)s aluno(a)s, tanto no sentido de flexibilizar significados que eventualmente possam ter se cristalizado ao longo de seus anos pré-universitários, como no de explorar novas possibilidades.

É sob esta perspectiva que eu tendo a avalizar a integração não apenas dos CAS, mas de outras mídias em cenários similares ao investigado nesta pesquisa. Acredito que depois da leitura dos episódios anteriores, em particular do primeiro, onde se procurou, explicitamente, expor a dupla respectiva à duas abordagens — com e sem o CAS — a um mesmo problema, o(a) leitor(a) deverá ter se convencido(a) das várias possibilidades de exercício procedimental e conceitual que podem ser exploradas a partir da integração da mídia informática. As diferenças quantitativas e qualitativas nas discussões de cada item do referido problema (sem e com o CAS) falam por si. Não é à toa, portanto, que Levy (1993, p. 112) afirma:

> Um modelo digital não é *lido* ou *interpretado* como um texto clássico, ele geralmente é *explorado* de forma interativa, Contrariamente à maioria das descrições funcionais sobre papel ou aos modelos reduzidos analógicos, o modelo informático é essencialmente plástico, dinâmico, dotado de uma certa autonomia de ação e reação [...] O *conhecimento por simulação* é sem dúvida um dos novos gêneros de saber que a ecologia cognitiva informatizada transporta.

Em suma, seres humanos e mídias se integram para a produção de conhecimento e essa visão não é apenas um exercício teórico. Borba e Villarreal (2005) oferecem exemplos que ilustram uma gama de possibilidades dessa abordagem na Educação Matemática, procurando romper a tradicional separação entre seres e coisas que Levy entende como característica do pensamento ocidental desde os gregos. Exemplos de experimentação, visualização, modelagem e de educação on-line são oferecidos ao leitor ou leitora do livro supra-referido no propósito de sugerir, na teoria e na prática, novos e possíveis horizontes a serem explorados por educadore(a)s interessados em ampliar suas perspectivas. Aliás, não é impossível que somente agora, com a crescente presença da informática na sociedade e, em conseqüência, na Educação, é que o olhar dos epistemólogos comece a perceber a artificialidade de se continuar preservando a barreira ontológica entre sujeito do conhecimento e objeto do conhecimento. As características das mídias informáticas são ostensivas demais para se continuar preservando uma tal separação.

Conclusões

Sintetizar em alguns parágrafos as conclusões de uma investigação como a que foi relatada nesta tese é como tentar comprimir uma experiência de anos em poucos minutos sem sacrificar a sua essência — uma tarefa praticamente impossível. Além disso, qualquer possível síntese ou conclusão sobre um trabalho fundado no paradigma que orientou esta pesquisa sempre ficará sujeita ao crivo e às lentes que "moldam" a visão de quem a lê e a interpreta. Ciente destas dificuldades, procurarei aqui destacar alguns dos pontos principais que, neste final, se apresentam ao meu olhar e sobre os quais faço minha leitura.

Esta pesquisa teve várias motivações, situando-se com uma das mais importantes o desejo de "ouvir" estudantes de uma classe especial: aqueles ou aquelas que, dentre tantas possibilidades, optam pela Matemática como caminho inicial num curso superior. Como na maioria absoluta dos casos, uma tal escolha não é feita ao acaso, é razoável supor que este(a)s estudantes estão não apenas cientes dos desafios que têm pela frente, como os estão aceitando de bom grado. Talvez, dentre estes, um dos maiores seja a própria "sobrevivência" no curso, já que, como ilustra o capítulo I, a "taxa de mortalidade", pelo menos no âmbito das universidades públicas, é altíssima. Quando ajustamos o foco para detectar os principais fatores desencadeadores desta singularidade, não é necessário um *zoom* muito elevado para que o Cálculo, ministrado no primeiro ano do curso, apareça com nitidez.

Mais do que "ouvir" estudantes de uma classe especial, a pesquisa visou "ouvir" suas compreensões sobre conceitos específicos do Cálculo Diferencial e sob condições especiais: discutindo, escrevendo e interagindo com um sistema computacional de manipulação simbólica. Isto posto, os resultados e respectivas análises apresentadas neste capítulo e no anterior sugerem:

Sobre o Conceito de Função

A compreensão que predominou nos documentos escritos é a de relação. No entanto, as interações orais e com o CAS sugerem um certo “condicionamento” a exemplares cujas características de regularidade podem não estimular as percepções e o exercício dos movimentos necessários a uma exploração significativa da dualidade local x global, intensamente demandada nos conceitos posteriores de continuidade e de derivabilidade. Reforçando esta tese, os episódios destacam, em vários momentos, uma certa “anemia” e até mesmo algum “silêncio” sobre os componentes *domínio* e *contradomínio* nas compreensões sobre o conceito de função. Assim sendo, a pesquisa sugere uma exploração mais intensa do conceito a partir de sua definição como uma terna ⟨Domínio, Regra[6], Contradomínio⟩, no propósito de que uma tal abordagem possa contribuir para um exercício efetivo do movimento local x global supra referido. Cabe aqui novamente lembrar que a mera mudança de definição de um conceito matemático pode não repercutir de maneira suficientemente ativa na rede semântica que compõem as compreensões do referido conceito, principalmente em contextos similares ao investigado. Assim, o que estou sugerindo aqui é um *exercício efetivo* desta definição na práxis do processo educacional num curso de Cálculo inicial.

Sobre Limite e Continuidade:

O conceito de limite foi entendido nesta investigação como uma das bases essenciais num curso de Matemática. É claro que, dependendo do contexto em que tais bases são tratadas, essencialidade pode não implicar em necessidade. Neste sentido, e conforme já discutido no capítulo anterior, o conceito de limite não é

[6] A componente Regra deve satisfazer às condições usuais para qualquer função univalente.

necessário à constituição do conceito de derivada. Neste caso, a questão seguinte se torna imediata:

Deveríamos sugerir a exclusão deste conceito do programa de Cálculo para um curso de Matemática?

Minha resposta tende a ser negativa, mas desde que a abordagem usual seja reformulada. Os dados da pesquisa sugerem que o(a)s estudantes constroem compreensões razoavelmente coerentes sobre a “dinâmica das aproximações”, característica do conceito, ainda que, nesta fase inicial, a manipulação desses significados pareça dependente de interações com elementos gráficos explícitos. De todo modo, mais importante do que eventuais e circunstanciais “dependências” dessas informações está o fato de que o exercício desta dinâmica é altamente recomendável, assim como a conveniência de se aproveitar quaisquer possibilidades que se traduzam em “dinamização” nos processos de manipulação conceitual envolvendo o Cálculo.

No capítulo anterior, eu observei que trazer movimento à cena educacional pode também facilitar a emergência de desequilíbrios. Visando contrapor tais desequilíbrios, eu sugeri uma “algebrização” mais explícita do conceito de limite por meio da exploração do conceito algébrico de *operação.* A idéia é trazer um pouco mais de estabilidade a uma noção “escorregadia” como a de limite e fonte de insegurança para o(a)s estudantes de Matemática que estão se iniciando no Cálculo. Cabe salientar aqui que a sugestão não pretende alcançar outros cursos que mantêm esta disciplina em seus currículos. Dada as especificidades de um curso de Matemática — quer seja no caminho da licenciatura ou no do bacharelado —, onde demandas teóricas explícitas emergem da Análise e da Álgebra (e da Geometria) a todo momento, creio que qualquer iniciativa que induza um maior entrelaçamento entre essas áreas poderá contribuir consideravelmente para o desenvolvimento e fortalecimento das redes semânticas que sustentam as compreensões dos seu vários conceitos.

Quanto ao conceito de *continuidade*, a pesquisa mostrou que, assim como a derivabilidade, ele também parece estar bastante associado a determinadas características visuais dos gráficos de funções nas quais o conceito é analisado. De todo modo, estrita e teoricamente falando, *continuidade* é matéria da topologia. Num curso de Cálculo, ainda que as abordagens não tenham como fugir das intuições e das imagens gráficas, a pesquisa sugere a exploração do conceito por meio de funções como as tratadas nos experimentos aqui relatados, isto é, o caminho para a exploração do conceito de continuidade é o exercício sistemático do conceito de descontinuidade.

Sobre a Derivada

Em relação ao conceito de derivada, a pesquisa caracteriza as compreensões do(a)s participantes como constituídas principalmente por significados emergentes da geometria — a derivada como coeficiente angular de tangentes, em particular. Assim, corroborando esta sugestão, aparecem os resultados que mostram uma clara associação entre derivabilidade de uma função e a “suavidade” de seu gráfico ou, no mesmo sentido, uma associação entre “bicos” neste gráfico e uma correspondente “perda” de derivabilidade da função. Até que ponto tais compreensões podem ser interpretadas como um “porto seguro” no contexto de desequilíbrios induzido pela dinâmica caracterizada na disciplina, é uma questão em aberto e que valeria a pena ser investigada mais detalhadamente. De todo modo, a pesquisa sugere uma exploração mais intensa do conceito como *taxa de variação instantânea*, de modo a exercitar esta dinâmica.

Considerações Finais

Escrever uma tese em Educação Matemática é tentar sintetizar em algumas centenas de páginas um caleidoscópio de impressões, percepções, experiências de vida acadêmica, articulações teóricas e reflexões que se integraram, no período de alguns anos, no objetivo de contribuir, da melhor maneira, para ampliar e aprofundar as compreensões sobre um tema específico da área. Em suma, é o fruto de um trabalho coletivo, que emerge na forma escrita pelas mãos de seu autor, sem, contudo, ser capaz de refletir toda a exuberância e a riqueza deste caleidoscópio. Este trabalho coletivo nasce com as primeiras idéias de um projeto de pesquisa e se desenvolve com a contribuição do(a)s participantes diretos na investigação, com as sugestões e críticas de professore(a)s, de pesquisadore(a)s, de membros de seu grupo de pesquisa e, obviamente, das de seu orientador.

O estudo ora relatado teve como objeto as compreensões sobre conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial — função, limite, continuidade e derivada — emergentes num ambiente integrado por ingressantes em um curso de Matemática e por mídias caracterizadas na oralidade, escrita e informática. Os resultados decorrentes das análises do referido objeto, além da descrição propriamente dita de compreensões e imagens que se materializaram ao longo de todo o processo, sugerem alguns encaminhamentos principais no sentido de contribuir para uma reversão do quadro desolador descrito no capítulo introdutório desta tese.

Os conceitos, processos, procedimentos e objetos que constituem e configuram a fase inicial da transição para a Matemática do Ensino Superior, carregam, como parte inextricável de suas naturezas, um potencial gerador de conflitos para todo(a) estudante que decide iniciar sua caminhada universitária num curso de graduação em Matemática. O nível de conversão deste potencial em conflitos reais, que se manifestarão ao longo dos processos de aprendizagem, é, obviamente, função de uma série de fatores pessoais, educacionais, históricos, contextuais e institucionais. Na impossibilidade de abarcar todos esses fatores numa única pesquisa, um foco foi escolhido: o da compreensão de conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial. Especialmente para aluno(a)s de primeiro ano, os novos conceitos matemáticos são particularmente problemáticos, pois além de suas naturezas complexas e “escorregadias”, eles quase sempre induzem conflitos e desequilíbrios sobre compreensões cristalizadas ao longo dos estudos pré-universitários.

As análises dos experimentos realizados sugerem que uma das maiores fontes de atrito nesta transição materializa-se no conceito de função. Uma visão predominante estática, povoada por exemplares de funções bem comportadas, mais ou menos familiares, parece embaraçar a necessária articulação e os movimentos que caracterizam a essência dos conceitos do Cálculo Diferencial: a dinâmica. É praticamente impossível exercitar a dinâmica do Cálculo no Ensino Superior, sem que seus conceitos-base — função e limite — sejam, também, “dinamizados”, exercitados e explorados em suas possibilidades.

Conforme anotado nas conclusões deste estudo, entrar em movimento geralmente implica incrementar as possibilidades de desequilíbrio, e desequilíbrio é quase sempre desconfortável. Assim, não é à toa que, por exemplo, as compreensões prevalecentes na pesquisa sobre o conceito de derivada buscaram a “segurança” da geometria plana: um coeficiente angular parece algo mais “estável” do que uma velocidade instantânea. Ocorre que transições como esta para a Matemática do Ensino Superior, com seus potenciais desequilíbrios, além de inevitáveis, podem ser desejáveis, desde que o objetivo do(a) estudante seja ganhar dividendos em termos de maturidade matemática e de aparelhamento para enfrentar a emergência de futuros problemas de compreensão, não apenas dos conteúdos da seqüência tradicional do Cálculo, como aqueles das demais disciplinas de um curso de Matemática.

No capítulo I, alguns dados relativos a índices de reprovação na disciplina foram apresentados. Supondo que tais índices, de alguma forma, representem uma “medida” do aprendizado, então é absolutamente claro que sem observar os problemas do ensino, reverter este quadro é tarefa, senão impossível, pelo menos muito difícil. Embora esta pesquisa não tenha tratado especificamente o ensino como objeto de investigação, a experiência aqui relatada pode, sem dúvida, ser de valia para professores e professoras de Cálculo.

Neste sentido, as potencialidades das novas mídias, em particular dos sistemas de computação algébrica, não podem mais ser vistas como “complementos desejáveis”. Da mesma forma, a oralidade e a escrita em linguagem natural têm potencial para materializar muitas das compreensões do(s) aluno(a)s, que poderiam passar despercebidas se não lhes fossem solicitadas. Os experimentos mostraram algumas das potencialidades de uma tal integração. Claro que para isso há que se ter uma mudança de perspectiva e de abordagem.

Num trabalho recente (CURY, 2003), esta autora mostra exemplos onde aluno(a)s de Cálculo apresentam erros em 90% dos problemas propostos. Em sua maioria, trata-se de erros em exercícios procedurais, cuja tônica é simplificar, fatorar polinômios, calcular limites e derivadas, etc. Segundo a autora, tais erros podem ser creditados à falta de domínio de conteúdos de álgebra, trigonometria e geometria, do ensino básico, assim como às dificuldades de abstração e de generalização. No que tange aos conteúdos desses exercícios, muitos dos algoritmos que os caracterizam já estão implementados em sistemas computacionais de manipulação simbólica que vem se tornando cada vez mais acessíveis. Abdicar de sua utilização sob o argumento de que o(a) estudante precisa necessariamente fazê-los “à mão” é análogo a defender posições que sustentam a exclusão das calculadoras da matemática do ensino básico – posições, sem dúvida, bastante questionáveis. Além disso, um dos efeitos colaterais indesejáveis da predominância dos aspectos procedurais num curso de Cálculo é que as discussões sobre as idéias fundamentais acabam tendo que ser sacrificadas – tanto em extensão quanto em profundidade – pois o tempo, já tradicionalmente escasso, é alocado para atividades sem voltagem suficiente para exercitar as idéias, as abstrações, as generalizações e as modelagens, que seriam, a rigor, o principal escopo das atividades matemáticas universitárias.

É possível que, subjacente à este cenário, haja também alguma confusão entre abstração e vazio de significados quando se atribui a um cálculo de limites — cuja tônica geralmente é a manipulação algébrica e não a idéia subjacente — uma “concretude” que possivelmente não seria atribuída a uma compreensão materializada em escrita natural sobre o mesmo conceito. Assim sendo, é natural que “dificuldades de abstração e generalização” — conforme anotado por Cury (2003) — continue se destacando como características nas salas de aula de Cálculo.

Como sugestão para projetos futuros, a exploração do potencial dinâmico dos sistemas de computação algébrica na Educação Matemática ainda tem um longo caminho a ser percorrido. Assim como ocorreu com a Geometria, com os sistemas Cabri, Geometricks e outros, esta mesma “manipulação dinâmica” deveria já estar disponível para o tratamento dos conceitos principais do Cálculo. A bem da verdade, ela já está: a maioria dos CAS dispõe de ferramentas de programação que permitem “animar” gráficos, curvas e qualquer objeto que possa ser materializado na tela. Entretanto, em grande parte dos casos interessantes, tais programações envolvem algum conhecimento especializado neste campo. Assim, talvez seja necessária uma nova geração de sistemas mais amigáveis neste aspecto, a fim de que sejam popularizados e seus potenciais sejam mais sistematicamente explorados. Conforme já referido, a dinâmica é a própria essência do Cálculo. As potencialidades para a exploração são inúmeras e a urgência por novas idéias que contribuam para reverter a difícil situação em que se encontram os processos de aprendizagem da disciplina é mais do que evidente.

Para finalizar, faço minhas as palavras de Stewart (1996, p. 2, tradução nossa) “Matemática não se trata de símbolos e de cálculos. Matemática se trata de *idéias*. Em particular, das maneiras pelas quais diferentes idéias se relacionam.” “Boa matemática tem um ar de economia e um elemento de surpresa. Mas acima de tudo, tem *significado”.*

REFERÊNCIAS:

ARAÚJO. J. L. *Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: As Discussões dos Alunos.* Tese de Doutorado. UNESP, Rio Claro, 2002.

ALCOCK, L; SIMPSON, A. *Definitions: dealing with categories mathematically*. For the Learning of Mathematics, 22-2. pp. 28-34. Kingston: FLM Publising, 2002.

ALVES-MAZZOTI, A. J.; GEWANDSNAJDER, F. *O Método nas Ciências Naturais e Sociais.* São Paulo: Pioneira, 2001.

ARTIGUE, M. Analysis. In: TALL (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking.* London: Kluwer, 1991.

ARTIGUE, M. *Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work.* CAME (Computer Algebra in Mathematics Education) Symposium, 2001.

BARDIN, L. *Análise de Conteúdo.* Lisboa: Edições 70. 2003.

BARUFI, M. C. B. *A Construção/negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutorado. USP-SP, 1999.

BAUER, M. W.; GASKELL, G. *Pesquisa Qualitativa com Texto, Imagem e Som*. 2a. Ed. São Paulo: Vozes, 2003.

BEIDLEMAN, A.; JONES, D.; WELLS, P. Increasing students' conceptual understanding of first semester calculus through writing. *Primus* (4):297- 316, December 1995.

BICUDO, I. *Demonstração em Matemática*. BOLEMA, Boletim de Educação Matemática. N. 18. Rio Claro, 2002.

BORBA, M. C. *Students' Understanding of Transformation of Functions using Multi-representational Software.* Tese de Doutorado. Cornell University, 1993.

BORBA, M. C. Overcoming Limits of Software Tools: A Student's Solution for a Problem Involving Transformation of Functions. In: *Proceedings of the PME 19, L. Meira e D. Carraher* (Eds.) 2, pp. 248-255, 1995a.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática,* Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the Reorganization of Mathematical Thinking.* New York: Springer, 2005.

BEINEKE, J. et al. Horizontal and Vertical Growth of Students' Conception of Function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.). *The Concept of Function* (pp. 133–149). MAA (1992).

BROWN, T. *Mathematics Education and Language – Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism*. 2nd. Ed. Dordrecht: Kluwer, 2001.

BRUNER, J.; GOODNOW, J.; AUSTIN, G. *A Study of Thinking.* New York: Wiley, 1967.

BUERK, S. Writing in Mathematics a Vehicle for Development and Empowerment. In: STERRET, A. (Ed.) *Using Writing to Teach Mathematics.* New York: Mathematical Association of America, MAA Notes, 1990, p. 78-84, 1991.

CARNAP. R. Empiricism, Semantics, and Ontology. IN: BENACERRAF, P; PUTNAM, H (Eds). *Philosophy of Mathematics – Selected Readings*. 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

CHAUÍ, M. *Convite à Filosofia.* São Paulo: Ática, 2004.

CONFREY, J. Six Approaches to Transformation of Function Using Multi-Representational Software. *Proceedings of the 8th Conference of PME*. Universidade de Lisboa, Portugal, 2, pp. 217–224, 1994.

CONFREY, J.; COSTA, S. *A critique of the Selection of Mathematical Objects as a Central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking*. International Journal of Computers and Mathematical Learning, 1, pp. 139-168. Dordrecht: Kluwer, 1996.

COOLEY, L. *Writing in Calculus and Reflective Abstraction.* Journal of Mathematical Behavior, 21. pp. 255-282. New York: Pergamon, 2002.

CORNU, B. Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale*. PME, Grenoble, pp. 322-326, 1981.

CORNU, B. Limits. In: TALL (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking.* London: Kluwer, 1991.

CUOCO, A. Thoughts On Reading Artigue's "Learning Mathematics In A Cas Environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **7.** pp. 293– 299, Dordrecht: Kluwer, 2002.

CURY, H. N. Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia. IN: *Anais do Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 31*, São José do Rio Preto, 2003.

DALL'ANESE, C. *Conceito de Derivada: Uma Proposta para seu Ensino e Aprendizagem.* Dissertação de Mestrado. PUC-SP. São Paulo, 2000.

DeMAROIS, P.; TALL, D. Function: Organizing Principle or Cognitive Root ? *Proceedings of the 23rd Conference of PME – Psychology of Mathematics Education,* Haifa, Israel, vol. 2, pp. 257–264, 1999.

DENZIN, N; LINCOLN, Y. *Handbook of Qualitative Research*. 2nd. Ed. New York: Sage, 2000.

DEWEY, J. *Como Pensamos.* 3ª Ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

DRISCOLL, M.; POWELL, A. B. Communicating in Mathematics. IN: HEDLEY, C et al (Eds). *Literacy Across the Curriculum*. pp. 247-265. Norwood: Ablex, 1992.

ERNEST, P. A Postmodern Perspective on Research in Mathematics Education. In: SIERPINSKA, A; KILPATRICK, J. (Eds) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity.* Dordrecht: Kluwer, 1998.

GLASER; STRAUSS. *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine Publishing Company, 1967.

GUIDORIZZI, H. *Um Curso de Cálculo.* Vol. 1. São Paulo: LTC, 2000.

LINCOLN,Y; GUBA, E. *Naturalistic Inquiry*. New York: Sage, 1985.

HACKETT, L. D. *The effects of writing in an applied calculus course: An analysis of performance and errors*. PhD thesis, The American University, 1998.

HOFFMAN M.; POWELL, A. *Mathematical and Commentary Writing: Vehicles for Student Reflection and Empowerment*. Mathematics Teaching, N. 126. 1989.

KAPUT, J. Technology and Mathematics Education. IN: GROUWS. D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515–556). New York: MacMillan, 1992.

KEITH, S. Z. Writing for Educational Objectives in a Calculus Course. In: STERRET, A. (Ed.) *Using Writing to Teach Mathematics.* New York: Mathematical Association of America, MAA Notes, 1990, p. 6-10, 1991.

KENDAL, M. *Teaching And Learning Introductory Differential Calculus With A Computer Algebra System*. Phd Dissertation. Melbourne University, Melbourne, 2001.

KERCKHOVE, D. *A Pele da Cultura*. Lisboa: Relógio D'Água, 1997

KLEINER, I. *History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus*. Educational Studies in Mathematics, Vol. 48, n. 2-3. pp. 137-174. London, 2001.

LÉVY, P. *As Tecnologias da Inteligência: O futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LINCOLN, Y.; GUBA, E. G. *Naturalistic Inquiry.* New York: Sage, 1985.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e Didática — As Concepções de Conhecimento e Inteligência e a Prática Docente.* São Paulo: Cortez, 1995.

MACHADO, N. J. *Matemática e Língua Materna. 3ª. Ed.* São Paulo: Cortez, 1990.

MARQUES, M. H. D. *Iniciação à Semântica*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

MORGAN, C. *Writing Mathematically: The Discourse of Investigation*. London: Falmer Press, 1998.

NARDI, E. *Zero and Ones in Advanced Mathematics: Transcending the Intimacy of Number.* For the Learning of Mathematics 20, 3. Kingston: FLM Publishing Association, 2000.

NOSS, R; HOYLES, C. *Windows on Mathematical Meanings – Learning Cultures and Computers*. Dordrecht: Kluwer, 1996.

PINTO, M. M. F. Educação Matemática no Ensino Superior. Dossiê – A Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. *Educação em Revista*, n. 36. pp. 223-238. Belo Horizonte, 2002.

PORTER, M. K.; MASINGILA, J. *Examining the effects of writing on conceptual and procedimental knowledge in calculus*. Educational Studies in Mathematics 42 (2): 165-177, Dordrecht: Kluwer, 2000.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER; C.A. *Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento de Idéias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes*. Boletim de Educação Matemática, BOLEMA, n. 21. 2004.

POWELL, A. B.; RAMNAUTH, M. *Beyond Questions and Answers: Prompting Reflections and Deepening Understanding of Mathematics Using Multiple-Entry Logs.* For the Learning of Mathematics 12, 2. Columbia: FLM Publishing, 1992.

PRZENIOSLO, M. Images Of The Limit Of Function Formed In The Course Of Mathematical Studies At The University. *Educational Studies in Mathematics* 55: pp. 103–132, Dordrecht: Kluwer, 2004.

PUGALEE. D. K. Connecting writing to the mathematics curriculum. *The Mathematics Teacher, 90*(4), pp. 308-310. 1997.

PUGALEE, D. K. *A Comparison of Verbal and Written Descriptions of Students' Problem Solving Processes*. Educational Studies in Mathematics N. 55, pp. 27-47. Dordrecht: Kluwer, 2004.

REZENDE, W. M. *O ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.* Tese de Doutorado. Faculdade de Educação, USP, 2003.

RODDICK, C. D. *Differences in Learning Outcomes: Calculus and Mathematica vs. Traditional Calculus.***:** Primus; v11 n1 pp.161-184, 2001.

ROSE, B. Using Expressive Writing to Support Mathematics Instruction: Benefits for the Student, Teacher and Classroom. In: STERRET, A. (Ed.) *Using Writing to Teach Mathematics.* New York: Mathematical Association of America, MAA Notes, pp. 63-72, 1990.

ROTH, M. *What's the meaning of meaning? A Case Study from Graphing.* Journal of Mathematical Behavior. 23 pp. 75–92, New York: Pergamon, 2004.

ROTH, W. M; LEE, Y. J. Interpreting Unfamiliar Graphs: A Generative, Activity Theoretic Model. *Educational Studies in Mathematics* **57:** 265–290, Dordrecht**:** Kluwer 2004.

SANTOS, M. B. S. *Escrever, Para Quê? A Redação Mediando a Formação de Conceitos em Cálculo I*. Dissertação de Mestrado. UFG. Goiânia. 2000.

SARAIVA, R. P. *Novas Tecnologias no Ensino do Conceito de Limite de Função*. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 2000.

SAUSSURE, F. de. *Curso de Lingüística Geral.* São Paulo: Cultrix, 1987.

SCHOENFELD, A. et al. Learning: The Microgenetic Analysis of One Student's Evolving Understanding of a Complex Subject Matter Domain. IN: R. Glaser (Ed.), *Advances in Instructional Psychology*, 4 (pp. 55–175). Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1993.

SCHWANDT, T. A. Three Epistemological Stances for Qualitative Inquiry: Interpretivism, Hermeneutics, and Social Constructionism. IN: DENZIN, N; LINCOLN, Y. *Handbook of Qualitative Research*. 2nd. Ed. New York: Sage, 2000.

SFARD, A. Operational Origins of Mathematical Notions and the Quandary of Reification – The Case of Function. IN: HAREL, G.; Dubinsky, E. (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Monograph N. 25 (pp. 59–84). Washington: Mathematical Association of America, 1992.

SIERPINSKA, A. *Some Remarks on Understanding in Mathematics*. For the Learning of Mathematics, Vol. 10, n. 3, 1990.

SIERPINSKA, A; KILPATRICK, J. *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity.* Dordrecht: Kluwer, 1998.

SIPKA, T. Writing in Mathematics: A Plethora of Possibilities. In: STERRET, A. (Ed.) *Using Writing to Teach Mathematics.* New York: Mathematical Association of America, MAA Notes, pp. 11-16, 1990.

SMITH, D. A. How People Learn… Mathematics*. Proceedings of 2º International Conference on Teaching of Mathematics*, Crete, Greece. 2002.

STACEY, K. Teaching with CAS in a Time of Transition. *Proceeedings of III CAME – Computer Algebra in Mathematics Education Symposium*. Reims, France, 2001.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. In: R. Lesh & A. E. Kelly. *Research Design in Mathematics and Science Education* pp. 267-307. Hillsdale. NJ: Erlbaum, 2000.

STEWART, I. *From Here to Infinity – A Guide to Today's Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1996.

TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking.* London: Kluwer, 1991.

TALL, D. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, infinity and Proof. IN: GROUWS, D. A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 495–511. New York: Macmillan, 1992.

TALL, D; BAKAR, M. *Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs*. International Journal of Mathematics Education in Science & Technology, 23 1, pp. 39–50, Leicestershire: Taylor & Francis, 1992.

TALL, et al. Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* CJSMTE / RCESMT 1:1, 2001.

TALL, D.; TIROSH, D. Infinity — The Never-ending Struggle. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 48. N. 2-3, pp. 129-136. Dördrecht: Kluwer, 2001.

THOMPSON, P. W. Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. IN: DUBINSKY, E.; SCHOENFELD, A. H.; KAPUT, J (eds). *Research in Collegiate Mathematics Education I.* Conference Board of the Mathematical Sciences. Issues in Mathematics Education. Vol. 4. Providence: American Mathematical Society, 1994.

TUCKER, A. C.; LEITZEL, J.R.C. A report to the community. In: LEITZEL, J. R. C. and TUCKER, A. C. (Eds). *MAA Reports,* Washington: MAA, 1995. p. 97. Lafayette, USA, 1993.

VILLARREAL, M. E. *O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas.* Tese de Doutorado. UNESP, Rio Claro, 1999.

VINNER, S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. IN: TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking.* London: Kluwer, 1991.

ZUFFI, E. M. *O Conceito de Função e sua Linguagem para os Professores de Matemática e de Ciências*. Ciência e Educação v. 8. n.1 pp. 1-12, 2002.

EXPERIMENTO DE ENSINO
CONCEITOS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO
1ª Tema - FUNÇÕES (1)

1. Em relação ao conceito de *Função*:
   a) Explique o que você entende sobre esse conceito e cite alguns exemplos.
   b) Descreva alguns fenômenos físicos que poderiam ser representados por funções.

2. Comparando o que você escreveu ao responder a questão anterior com a Definição de Função apresentada na Folha de Definições:
   a) Você mudaria algo na sua resposta?
   b) Você mudaria algo na Definição?

3. Nos livros de Cálculo aparecem freqüentemente sentenças do tipo: "*Seja y = f(x) uma função...*" .
   a) Explique os significados que os símbolos y, f , x , f(x) e y = f(x) têm para você.
   b) y = f(x) é uma equação? Uma função? Explique.
   c) De acordo com a definição, uma função é uma terna composta por um domínio, um contradomínio e uma regra de associação satisfazendo certas condições. No caso da sentença "*Seja y = f(x) uma função...*", quais são esses componentes?

4. Na sua opinião:
   a) Que condições duas funções devem satisfazer para serem consideradas iguais?
   b) Seria possível a construção de funções diferentes, mas com a mesma regra de associação? Explique.
   c) Seria possível a construção de funções diferentes, mas com o mesmo gráfico? Explique.

5. Explique o você entende sobre *Imagem* de uma função? Há alguma relação entre a Imagem de uma função e o Gráfico dessa função? Explique.

6. O gráfico de uma função $f : A \to B$, segundo a definição, é o conjunto:
   $$G_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}.$$
   Em geral, quando falamos em gráfico de uma função no curso de Cálculo I, costumamos representá-lo numa forma similar a que aparece na Fig.1 (Folha de Definições). Compare e explique essas duas representações.

7. Nos cursos de Cálculo I é dito que as funções estudadas são *funções reais de uma variável real.* Diz-se também que, em geral, trabalha-se com o conjunto dos números reais, e que este, por sua vez, pode ser representado por uma reta. Explique porque, então, nesse contexto, o gráfico de uma função é sempre esboçado no plano?

8. Ao esboçar o gráfico de uma função, uma pessoa marca alguns pontos no plano cartesiano, liga os pontos com uma linha e afirma que essa linha é o gráfico da função dada. Explique o que você entende desse procedimento e dessa afirmação?

9. Analise as expressões abaixo e explique se cada uma delas poderia ou não representar uma regra de associação para alguma função?
   a) $x = 3$
   b) $s = 0$
   c) $a^2 + b^2 = 4$
   d) $y = x^3$

10. É possível definir-se alguma função com domínio $A = \{1, 2, 3\}$ e contradomínio $B = \{2, 4, 7, 8\}$. Se sua resposta for positiva, dê um exemplo e esboce o gráfico.

11. Explique a operação de adição de funções. Cite algum exemplo.

12. Explique a operação de composição de funções. Cite algum exemplo.

13. Explique o que é uma função par e o que é uma função ímpar. Cite exemplos.

14. Explique o que são funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Cite exemplos

EXPERIMENTO DE ENSINO
CONCEITOS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO
1ª Tema - FUNÇÕES (2)

1. Suponhamos que **$f : A \rightarrow B$** e **$g : C \rightarrow D$** sejam duas funções. Pergunta-se:
   a) É possível se definir as **funções compostas fog** e **gof?** Expliquem suas concepções.
   b) Se a resposta acima for afirmativa, expliquem, passo a passo, os processos para se obter fog e gof.
   c) Utilizem o SCA para explorar o conceito de função composta.

2. Suponhamos que **$f : A \rightarrow B$** seja uma função.
   a) É possível se definir a **função inversa** de f ? Expliquem suas concepções.
   b) Se a resposta acima for afirmativa, expliquem, passo a passo, o processo para se obter a inversa de f.
   c) Utilizem o SCA para explorar o conceito de função inversa.

3. Existe alguma relação entre o conceito de função composta e o conceito de função inversa? Expliquem.

EXPERIMENTO DE ENSINO
CONCEITOS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO
2ª Atividade – Limite e Continuidade (1)

Aluno(a): ____

Os conceitos de LIMITE e CONTINUIDADE aparecem como temas centrais na literatura sobre o Cálculo. No contexto desta atividade, trataremos de **Limites e Continuidade de Funções Reais de uma Variável Real.** Assim sendo, nesse contexto:

1. Explique o que você entende sobre os conceitos de ***Limite*** **e** ***Continuidade.***

2. Cite exemplos de fenômenos físicos em relação aos quais seria possível envolver os conceitos de limite e continuidade. Explique o raciocínio.

3. Suponhamos que o enunciado de um problema seja dado na forma "C*alcule o limite de uma função f num ponto* a". Explique o que está sendo solicitado.

4. Nos livros de Cálculo aparece freqüentemente uma seqüência de símbolos da forma:

$$\lim_{x \to a} \mathrm{f}(x) = L$$

   Como você traduziria essa forma simbólica para a linguagem natural?

5. Explique o que você entende sobre o conceito de ***função contínua***.

No livro-texto[1] temos as seguintes definições de ***função contínua em um ponto p*** e de ***limite de uma função num ponto p***.

Seja f uma função e p um ponto de seu domínio. Definimos:

$$\text{f contínua em p} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \varepsilon > 0 \text{ dado, existe } \delta > 0 \text{ (} \delta \text{ dependendo de } \varepsilon\text{), tal que,} \\ \text{para todo } x \in D_f\text{, } p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon \end{cases}$$

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõe o domínio de f. Dizemos que f tem limite L, em p, se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

$$0 < | x - p | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$$

Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim\limits_{x \to p} f(x)$

6. Comparando as concepções que você escreveu ao responder as questões 1 e 5 com as definições apresentadas pelo livro:
   i. Você mudaria algo naquelas concepções ?
   ii. Você gostaria de sugerir alguma mudança nas definições apresentadas pelo livro?

7. Explique o que você entende sobre os chamados **limites laterais**.

8. Suponha que f(x) seja uma função ímpar.
   i. O fato de saber que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$ diz algo sobre $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$? Justifique.

   ii. E se f(x) fosse uma função par?

9. Nos livros textos aparecem freqüentemente problemas questionando se o limite de uma dada função f(x) num ponto a existe ou não. Pergunta-se: A existência (ou não) desse limite depende do domínio e do contradomínio de f ? Explique.

[1] Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo*, Vol.1. 5ª. Ed. São Paulo: LTC, 2001

EXPERIMENTO DE ENSINO
CONCEITOS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO
Limites e Continuidade (2)

Alunos(as):____

____

1. **Definição**: Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo o ponto p. Dizemos que f tem **limite L quando x tende a p**, se, dado $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_{f'}$, $0 < | x - p | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$.

   Expliquem essa definição através de um exemplo.

2. Considerem $g(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$ e $k(x) = \mathrm{sen}(1/x)$.
   i) Comparem e expliquem o comportamento de g e k próximo da origem.
   ii) O que se pode dizer em relação a $\lim_{x\to 0} g(x)$ e $\lim_{x\to 0} k(x)$?

3. Suponhamos que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para qualquer x =≠ 2 e que $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5$. i) Pode-se concluir algo sobre os valores de f, g e h em x = 2? Expliquem.
   ii) Pode-se concluir algo sobre $\lim_{x\to 2} f(x)$? Expliquem.

4. Nos livros de Cálculo aparece freqüentemente a seguintes expressão simbólica:

$$\lim_{x \to \infty} \mathrm{f}(x) = L$$

   iii) Como vocês traduziriam essa expressão para a linguagem natural?
   iv) Como vocês avaliariam a seguinte afirmação : “ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ é um número que tende a zero.” ?

5. Uma **função racional** é uma função da forma f(x) = g(x)/h(x) onde g e h são funções polinomiais. Assim sendo:

i) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de uma função racional? Expliquem.

ii) Quantas assíntotas verticais pode ter o gráfico de uma função racional? Expliquem.

iii) Expliquem o conceito de assíntota em termos do conceito de limite.

6. Suponham que f(x) seja uma função racional tal que no ponto c ela não esteja definida. Quando isso ocorre mas existe $\lim_{x \to c} f(x) =$ L é possível definir-se uma nova função F(x) da seguinte forma:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \text{ está no domínio de } f\,; \\ L, \text{ se } x = c \end{cases}$$

A função F é contínua em x =c e é chamada de **extensão contínua** de f para x = c.

Analisem as funções abaixo. É possível se definir extensões contínuas para cada uma delas? Expliquem.

a) $f(x) = \dfrac{10^x - 1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$

7. Analisem, avaliem e ilustrem com um exemplo (ou contra-exemplo) a seguinte afirmação:

"Se f é contínua em c e g é contínua em f(c) então a composta gof é contínua em c".

8. Analisem, avaliem e ilustrem com exemplos (ou contra-exemplos) as seguintes afirmações:

v) A equação cos x = x possui pelo menos uma solução real.

vi) A função $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ atinge um máximo e um mínimo no intervalo [-2, 2].

EXPERIMENTO DE ENSINO
CONCEITOS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO
Derivadas (1)

Aluno(a):____

1. Explique o que você entende sobre o conceito de **derivada**.

2. Explique o que você entende sobre o conceito de **reta tangente** a uma curva.

3. Explique a relação que você faz entre o conceito de **derivada** e o conceito de **reta tangente** a uma curva.

4. Comparando o que você escreveu como resposta à questão 1 e a definição formal apresentada na folha de definições, você:
   a) Mudaria algo nas suas concepções? Explique.
   b) Mudaria algo na definição? Explique

5. Explique o que você entende sobre o conceito de **função derivada.**

6. Considere a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{1/3}$. Essa função é derivável? Explique. Em caso positivo, qual seria a função derivada de f ?

7. Como você compararia os conceitos de continuidade e derivabilidade? Explique.

8. Suponha que uma função f possua limite num dado ponto a. O que você poderia dizer com relação à derivabilidade de f nesse mesmo ponto a?

9. Considere uma função derivável $f : A \rightarrow B$, definida por $y = f(x)$. Explique os significados que você atribui aos seguintes símbolos: f' e $f'(x)$.

10. Caso você tenha alguma(s) dúvida(s) sobre o conceito de derivada, descreva essa(s) dúvida(s).

EXPERIMENTO DE ENSINO
CONCEITOS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO
Derivadas (2)

Alunos(as):____

____

1. Considerem a função f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ sen } (1/x) & \text{para } x \neq 0. \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

Pergunta-se:

i) Sem utilizar o SCA, o que vocês diriam sobre a derivabilidade de f?
ii) Utilizando o SCA, o que vocês diriam sobre a derivabilidade de f ?
iii) Se f for derivável, como será definida a função f ' ? Expliquem.

2. Considerem a função f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = $\dfrac{4x}{x^2+1}$

ii. Esbocem o gráfico de f.
iii. Calcule, pela definição, a derivada de f num ponto x.
iv. Esbocem o gráfico de f '.
v. Façam uma comparação entre os gráficos de f e f '. Que interpretação vocês dariam para os valores de f '(x) negativos, nulos ou positivos ?

3. Considerem os conceitos de **função**, **limite**, **continuidade, derivada**, **função derivada** e **reta tangente a um ponto do gráfico de uma função**. Ilustrando com um exemplo da Física, expliquem como os conceitos acima podem ser articulados.

4. A derivada de uma função f : $D_f \to C_f$ num ponto x $\in D_f$ é dada por $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, se este limite existir. Suponhamos, então, que este limite exista e seja igual a L. Em outras palavras, L é o limite de alguma função g(h) quando h $\to$ 0. Neste caso, pergunta-se:

i) Qual é essa função g?
ii) g é uma função contínua? Expliquem.
iii) g tem alguma relação com a função derivada de f ? Expliquem.

5. Considere uma função derivável h : $D_h \to C_h$, definida por y = h(x). Expliquem o que vocês entendem sobre o significado de cada um dos seguintes símbolos: h', h'(x), d/dx, dy/dx , dh/dx.

6. Caso vocês tenham alguma(s) dúvida(s) sobre o conceito de derivada, descrevam essa(s) dúvida(s).