IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.004/12

Dinâmica Gravitacional em Modelo de 3-Brana Aplicada às Curvas de Rotação de Galáxias

Pablo Fernando Carlesso

Orientadora

Maria Cristina Batoni Abdalla Ribeiro

Coorientador

Julio Marny Hoff da Silva

Agosto de 2012

Agradecimentos

Nestes dois anos nos quais realizei meu mestrado aprendi muito, sobre física e além dela. O IFT se mostrou um lugar excelente para trabalhar em física teórica, tanto pela sua estrutura como pelos seus professores e alunos. Por isto sou grato à esta instituição por tudo que ela me proporcionou. Para realizar este trabalho tive a ajuda de diversas pessoas. Devo agradecimentos a elas:

– À professora Cristina, pela sua orientação e por dar-me a oportunidade de trabalhar neste assunto.

– Ao Julio, meu coorientador, pela grande ajuda no desenvolvimento deste trabalho.

– A meus pais por sempre me apoiarem.

– A meus colegas e amigos do IFT pela convivência durante esses 2 anos.

Finalmente, agradeço também à CAPES pelo auxílio financeiro, de fundamental importância.

Resumo

Nesta dissertação, tratamos de um modelo de 3-brana mergulhada em um *bulk* de 5 dimensões. Neste modelo, buscamos determinar as equações dinâmicas que descrevem a interação gravitacional na brana. Para isso fazemos uso das equações de Gauss-Codazzi que, aqui deduzidas, relacionam a curvatura intríseca da brana com a curvatura do *bulk* em que ela está mergulhada. Expressamos as modificações gravitacionais provenientes do modelo na forma de um fluido cosmológico e com isso abordamos o problema das curvas de rotação de galáxias. Determinamos os parâmetros do fluido de tal forma a descrever as curvas de rotação em um regime assintótico.

Palavras Chaves: Branas; Gauss-Codazzi; Curvas de Rotação de Galáxias

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos; Gravitação e Cosmologia; Astrofísica

Abstract

In this work, we find the gravitational equations for a 3-brane model embedded in a 5-dimensional bulk. For that purpose, firstly we derive Gauss-Codazzi equations. These equations relate the intrinsic brane curvature with those in the bulk. Once we find the dynamical equations describing the gravitational interaction on the brane, we approach the galactic rotation curves problem. The changes on Einstein's gravitational equations provided by the model are expressed in a cosmological fluid form. As our last step, we determine the fluid parameters that fit flat galactic rotation curves.

Notação

Nesta dissertação, utilizamos duas notações para as coordenadas:

$\{x^a\}$, cobrindo um espaço-tempo de 4+1 dimensões (*bulk*), com índices latinos variando de 0 a 4.

$\{x^\mu\}$, cobrindo um espaço-tempo de 3+1 dimensões (brana), com índices gregos variando de 0 a 3.

A métrica do espaço-tempo de 5 dimensões é denotada por g_{ab} e a métrica do subespaço de 4 dimensões, associado à brana, é denotada por q_{ab}.

Definimos o tensor de Riemann em termos dos símbolos de Christoffel da seguinte forma:

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{db} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}, \tag{1}$$

e usamos um índice "(5)" à esquerda quando nos referimos aos tensores de Riemann e de Einstein do *bulk* (${}^{(5)}R^a_{bcd}$, ${}^{(5)}G_{ab}$) para distingui-los dos tensores referentes ao subespaço da brana.

Ademais, utilizamos a assinatura da métrica $(-,+,+,+,+)$ e assumimos sempre $c = 1$ para a velocidade da luz.

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

As principais teorias físicas disponíveis atualmente — que melhor descrevem nosso universo e os fenômenos físicos que nele ocorrem — são construídas em um espaço-tempo de 3+1 dimensões. Todas as evidências indicam que o universo seja constituído por 3 dimensões espaciais e uma temporal. No entanto, o que aconteceria se considerássemos a hipótese de existirem mais dimensões do que estas 4 usuais?

Se considerarmos a hipótese de dimensões adicionais também podemos questionar por que motivo tais dimensões ainda não foram observadas. Assim, adotando essa hipótese, é plausível buscarmos por efeitos de dimensões extras sobre a física que observamos. Como as teorias físicas vigentes estão construídas sobre o pano de fundo quadridimensional, a busca por tais evidências implica na tentativa de detectar falhas destas teorias na explicação de determinados fenômenos, ou até mesmo inconsistências teóricas.

Na década de 1920 Theodor Kaluza e Oscar Klein desenvolveram uma teoria unificada para o eletromagnetismo e a gravitação [1] [2] utilizando a hipótese de dimensão extra. Com isso, encontraram uma descrição geométrica para o eletromagnetismo, tratando sua liberdade de *gauge* como um grau de liberdade espacial sobre a dimensão extra. Tal descrição não mostrou-se muito promissora, mas com o surgimento da teoria de cordas a hipótese de dimensões extras veio à tona novamente, desta vez na tentativa de unificar as 4 interações da natureza. Sabe-se que a teoria das cordas precisa de dimensões extras para ser auto-consistente. Desenvolvimentos mais atuais na teoria (teoria M) descrevem um universo com 11 dimensões onde as partículas fundamentais são descritas através de modos normais de vibração de cordas fundamentais e daí surgem todas as suas propriedades físicas.

A ideia de mundos-brana surge, fundamentalmente, da teoria de cordas [3]. Existem soluções de cordas abertas e cordas fechadas: as partículas de spin 2, como o gráviton, são tratadas como cordas fechadas e podem deslocar-se fora da brana. As demais partículas são tratadas como cordas abertas, tendo suas extremidades presas à brana, estando portanto confinadas a ela e não podendo mover-se ao longo de dimensões extras.

Os modelos de Randall-Sundrum I [4] e II [5] também tiveram por base a teoria de cordas. Destacaram-se no cenário da física teórica, na última década, devido ao fato de terem proposto uma possível solução ao problema da hierarquia usando uma hipótese de dimensão extra.

O modelo de Randall-Sundrum I considera a existência de uma dimensão espacial adicional, compactada, e que é detentora de simetria $\mathbb{Z}_2$ (simetria especular) — tal como prescrevem alguns cenários de cordas. Assim, a dimensão extra é uma 1-esfera com simetria $\mathbb{Z}_2$, conhecida também como *orbifold*. Neste cenário, existem duas branas que se localizam ao longo da dimensão extra, uma delas modelando nosso universo observável de 4 dimensões. A distância entre as duas branas é determinada pelo raio de compactificação da dimensão extra. Os campos do Modelo Padrão, que descrevem as partículas das quais nosso universo é constituído, estão confinadas sobre as branas. Já a interação gravitacional ocorre em todo o sistema, de modo que as branas só podem interagir gravitacionalmente. Assim, neste cenário a ação clássica é escrita como a ação de Eistein-Hilbert tomada em 5 dimensões mais as ações referentes a cada uma das branas.

Para a solução das equações de Einstein deste modelo foi, então, proposta uma métrica que cobrisse todo o espaço de 5 dimensões e que fosse invariante por transformações de Poincaré sobre as branas:

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c d\phi^2, \tag{1.1}$$

onde ϕ é uma parametrização utilizada para a dimensão extra e r_c é o raio de compatificação da dimensão extra.

Ao resolver as equações de Einstein em 5 dimensões, tendo como base essa métrica, Randall e Sundrum chegaram às seguintes condições:

— O espaço de 5 dimensões, denominado *bulk*, deveria possuir uma curvatura negativa.

— As tensões nas duas branas deveriam ter sinais opostos.

Quando a métrica dada em (1.1) é levada em consideração no mecanismo de Higgs as escalas de massa físicas vêm acompanhadas de um fator exponencial dependente do raio de compactificação (distância entre as branas). Tal fator explicaria a diferença entre as escalas de massa da natureza.

No modelo de Randall-Sundrum II o raio de compactificação é levado ao infinito, de modo a restar apenas uma brana, onde estariam localizadas as partículas do modelo padrão, e um *bulk* de 5 dimensões com a dimensão extra infinita, mas ainda assim com uma curvatura negativa associada.

O cenário de branas que será utilizado nesta dissertação será uma 3-brana (onde o 3 denota o número de dimensões espaciais da brana) mergulhada num *bulk* de 5 dimensões com curvatura negativa e cuja dimensão extra tem simetria $\mathbb{Z}_2$. Esse modelo é claramente inspirado no modelo de Randall-Sundrum II, que já foi amplamente tratado desde a sua proposição em 1999 e portanto há um grande número de trabalhos sobre ele. Além disso há, atualmente, experimentos a serem realizados no LHC (*Large Hadron Collider*) para testá-lo. Essa é uma motivação para tratar com mais detalhes esse tipo de modelo. Outro motivo para utilizarmos um modelo com apenas uma dimensão extra é devido à sua simplicidade e pode também ser encarado como um primeiro passo rumo a modelos mais complicados.

Nesta dissertação, estudaremos inicialmente as consequências gravitacionais desse cenário cosmológico, ou seja: as equações que determinam a dinâmica gravitacional na brana. Para isso, utilizaremos a abordagem usual da Relatividade Geral que descreve a gravidade como dada pela geometria do espaço-tempo. Assim, nosso universo observável será visto como uma hipersuperfície mergulhada em uma variedade de 5 dimensões. Com isso teremos a curvatura da variedade global, que será o *bulk*, e a curvatura da hipersuperfície, que representará a brana. A dinâmica gravitacional será dada pela curvatura intrínseca da brana, portanto buscaremos relacionar as duas curvaturas através das Equações de Gauss-Codazzi. Estas equações serão deduzidas no Capítulo 2 da dissertação.

Na localização da brana sobre a dimensão extra, com seu conteúdo de matéria e tensão intrínseca, utilizaremos as condições de Junção de Israel [8] para relacionar esse tensor com a curvatura da brana. Tais condições também serão deduzidas no Capítulo 2 e então chegaremos às equações que relatam a dinâmica gravitacional na brana. Como veremos, essas equações diferem das equações que Einstein obteve para a gravitação.

O passo seguinte é questionar se tais modificações na gravitação são úteis para explicar os problemas físicos que temos atualmente. Sabemos que há uma série de incompatibilidades entre os dados experimentais e as previsões teóricas em astrofísica e cosmologia. Estes problemas surgem quando aplicamos a gravitação de Newton ou de Einstein para escalas de ordem galática ou maiores. Eles abrangem muitos tópicos modernos de astrofísica e cosmologia, como curvas de rotação de galáxias, dinâmica de aglomeradas de galáxias, efeitos de lente gravitacional em aglomerados galáticos e a formação de estruturas em larga escala que deu origem à distribuição de matéria que observamos hoje no universo. É provável que todos estes problemas estejam relacionados e a explicação deva advir ou de uma reconsideração no montante de matéria existente no universo ou de uma modificação da teoria gravitacional vigente.

Assim, no Capítulo 3 abordaremos o problema específico das curvas de rotação de galáxias com as equações para a gravidade na brana obtidas no Capítulo 2. Inicialmente faremos uma revisão do problema com a apresentação dos dados relevantes e então buscaremos resolver as equações dinâmicas para o espaço-tempo ao redor de uma galáxia espiral. A contribuição advinda da dimensão extra poderá ser expressa como o tensor de um fluido cosmológico. No Capítulo 4 buscaremos ajustar os parâmetros desse “fluido” de modo a explicar as curvas de rotação de galáxias espirais em um regime assintótico. Finalmente, no Capítulo 5 concluiremos a dissertação com uma breve análise dos resultados obtidos.

Capítulo 2

Dinâmica Gravitacional em Modelos 3-brana

Modelos de branas descrevem o universo através de cenários em que os campos do modelo padrão estão confinados em um espaço-tempo quadridimensional (brana) que por sua vez está mergulhado em um espaço com mais dimensões (*bulk*). Nestes cenários, apenas a interação gravitacional é global — atuando em todas as dimensões. Portanto, uma questão que surge é como é descrita a dinâmica gravitacional na brana quando levamos em conta a existência de dimensões extras.

De qualquer forma, toda medida da interação gravitacional que podemos fazer será sobre a brana (onde residimos e estão todos os observáveis físicos). Portanto, admitindo a descrição tida na Relatividade Geral (que vê a gravitação como uma consequência da curvatura espaço-temporal) como válida, precisamos obter equações em 4 dimensões relacionando a distribuição de energia na brana com sua curvatura intrínseca. Para isso são úteis as equações de Gauss-Codazzi, que permitem relacionar a curvatura intrínseca da brana com a curvatura global do *bulk*. De posse dessa relação é possível então inferir quais as possíveis influências de uma suposta dimensão extra sobre a dinâmica gravitacional dos objetos contidos na brana.

2.1 Equações de Gauss-Codazzi

As equações de Gauss-Codazzi relacionam a curvatura intrínseca de uma hipersuperfície com a curvatura do espaço no qual ela está mergullhada. Nesta dissertação, derivaremos tais equações para o caso específico de uma hipersuperfície de 4 dimensões mergulhada num espaço com uma dimensão extra, que representa o papel de um modelo 3-brana com um *bulk* de 5 dimensões. Tal abordagem foi feita anteriormente em [7], seguiremos aqui a mesma linha de raciocínio para obter as equações gravitacionais na brana. Já na derivação das equações de Gauss-Codazzi seguimos um procedimento similar a [6] com as diferenças de que aqui tratamos de um espaço-tempo de 5 dimensões e a hipersuperfície é tipo tempo.

2.1.1 Métricas do *Bulk* e da Brana

Para o cenário abordado nesta dissertação, a métrica do *bulk* será representada por g_{ab}, onde os índices latinos vão de 0 a 4. Cobrindo a brana com um vetor unitário normal em cada ponto n_a podemos construir uma métrica intrínseca da brana q_{ab} definindo-a da seguinte forma:

$$q_{ab} = g_{ab} - n_a n_b. \tag{2.1}$$

Com esta métrica, podemos escrever qualquer quantidade em termos de suas componentes normais e paralelas à brana. Podemos chamá-la de métrica intrínseca da brana pois ela não tem componentes na direção normal a esta, como é possível verificar

$$q_{ab}n^b = g_{ab}n^b - n_a n_b n^b, \tag{2.2}$$

levando em conta que n_a possui norma unitária ($n_b n^b = 1$), temos

$$q_{ab}n^b = n_a - n_a = 0. \tag{2.3}$$

Sabendo ainda que tanto g_{ab} quanto $n_a n_b$ são simétricos pela troca dos dois índices, concluímos que q_{ab} em (2.1) também o é.

A última condição necessária para chamarmos q_{ab} de métrica intrínseca da brana é que ela sirva para contrair, abaixar e levantar índices de quantidades tensoriais pertencentes à brana. Isso pode ser facilmente verificado, dado um vetor qualquer v^a pertencente à brana

$$v^a q_{ab} = v^a g_{ab} - v^a n_a n_b, \tag{2.4}$$

mas, por definição, v^a pertence à brana, não tendo componentes na direção normal a ela, o segundo termo da equação acima se anula, o que nos dá

$$v^a q_{ab} = v_b. \tag{2.5}$$

Uma propriedade desta métrica intrínseca é que ela pode ser usada como um projetor, projetando qualquer quantidade pertencente ao *bulk* sobre a brana. Dado um vetor qualquer V_a, podemos escrevê-lo em termos de suas partes paralela e ortogonal à brana. A parte ortogonal será porporcional a n_a:

$$V_a = V_{||a} + V_{\perp} n_a. \tag{2.6}$$

Se aplicarmos o tensor q^a_b sobre V_a, o primeiro termo resultante se transforma como em (2.5) - dado que $V_{||a}$ pertence à brana, já o segundo termo se anula devido à propriedade dada em (2.3). Portanto, teremos

$$q^a_b V_a = V_{||b}, \tag{2.7}$$

ou seja, q^a_b seleciona apenas a parte do tensor que pertence à brana, atuando como um projetor.

2.1.2 Derivada Covariante Intrínseca

De posse da métrica definida em (2.1) podemos também definir uma derivada covariante intrínseca da brana, que pode ser construída projetando cada componente da derivada covariante global sobre a brana

$$D_a T_b = q^c_a q^d_b \nabla_c T_d. \tag{2.8}$$

Esta operação se refere à derivada de um tensor arbitrário de ordem 1 T_a. Para tensores de ordens mais altas a derivada covariante intrínseca é sempre obtida com a projeção de cada uma das componentes resultantes da derivada covariante global sobre o tensor. Esta operação satisfaz todas as propriedades necessárias à uma derivação covariante. Há um teorema que garante a existência de uma única derivada covariante que, quando aplicada sobre a métrica do espaço-tempo, se anula [6]. Em nosso caso, devemos ter

$$D_a q_{ab} = 0. \tag{2.9}$$

Verificamos isto substituindo (2.1) em (2.9) e usando (2.8)

$$D_c q_{ab} = q_c^d q_a^e q_b^f \nabla_d g_{ef} - q_c^d q_a^e q_b^f \nabla_d n_e n_f. \tag{2.10}$$

Mas o primeiro termo do lado direito da equaçção acima se anula, pois a derivada covariante da métrica é nula. O segundo termo pode ser reescrito da seguinte maneira

$$q_c^d q_a^e q_b^f \nabla_d n_e n_f = q_c^d q_a^e q_b^f n_f \nabla_d n_e + q_c^d q_a^e q_b^f n_e \nabla_d n_f. \tag{2.11}$$

Ambos os termos da equação acima se anulam, pois a contração do vetor normal à brana com sua métrica intríseca é nula. Assim, a expressão (2.10) satisfaz a condição determinada em (2.9), o que permite afirmarmos que esta é a única derivada covariante possível a ser definida sobre a brana.

2.1.3 Curvatura Extrínseca

Dada a métrica do *bulk* e sabendo-se como os vetores normais estão distribuídos temos toda informação sobre a brana. Há ainda uma outra quantidade que caracteriza a maneira como a brana está mergulhada no *bulk*: é a curvatura extrínseca, ou curvatura de Gauss. Ela é dada pela variação do vetor normal à brana em cada ponto. No nosso caso, será a derivada covariante intrínseca da brana aplicada ao seu vetor normal unitário

$$K_{ab} = q_a^c q_b^d \nabla_c n_d. \tag{2.12}$$

2.1.4 Equação de Gauss

De posse destas quantidades, buscaremos relacionar as curvaturas intrínseca e extrínseca da brana com a curvatura do *bulk*. Para isso, utilizamos a definição do tensor de curvatura de Riemann. O tensor de curvatura do *bulk* será denotado por ${}^{(5)}R^d_{abc}$, sendo definido em termos da derivada covariante em 5 dimensões

$$ {}^{(5)}R^d_{abc}\omega_d = \nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c. \tag{2.13} $$

Já o tensor de curvatura intrínseco da brana será definido em termos de sua derivada covariante intrínseca

$$ R^d_{abc}\omega_d = D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c, \tag{2.14} $$

onde ω_c é um campo vetorial arbitrário ao longo da brana.

Na equação (2.14), desenvolvendo o primeiro termo do lado direito através das definições dadas anteriormente de derivada covariante intrínseca (2.8) e da métrica da brana (2.1), obtemos

$$ \begin{aligned} D_a D_b \omega_c = -q^m_a q^d_b q^p_c n^o \nabla_m n_p \nabla_d \omega_o - q^m_a q^n_b q^o_c n^d \nabla_m n_n \nabla_d \omega_o + \\ q^m_a q^d_b q^o_c \nabla_m \nabla_d \omega_o. \end{aligned} \tag{2.15} $$

Entretanto, os fatores que contêm derivadas covariantes do vetor n^a podem ser reescritos levando-se em conta a definição de curvatura extrínseca dada em (2.12), de tal forma que a expressão (2.15) toma a forma

$$ D_a D_b \omega_c = q^m_a q^d_b q^o_c \nabla_m \nabla_d \omega_o + K_{ac} K^o_b \omega_o - q^o_c K_{ab} n^d \nabla_d \omega_o. \tag{2.16} $$

Se permutarmos os índices a e b na equação acima obtemos uma expressão análoga para o segundo termo da equação (2.14), isso permite reescrever todo seu lado direito

$$ \begin{aligned} R^d_{abc}\omega_d = q^m_a q^d_b q^o_c (\nabla_m \nabla_d \omega_o - \nabla_d \nabla_m \omega_o) + K_{ac} K^o_b \omega_o - \\ K_{bc} K^o_a - q^o_c K_{ab} n^d \nabla_d \omega_o + q^o_c K_{ba} n^d \nabla_d \omega_o. \end{aligned} \tag{2.17} $$

Sendo K_{ab} um tensor simétrico, os dois últimos termos se anulam e usando a expressão (2.13) para o tensor de curvatura no *bulk*, a expressão acima pode ser reescrita

$$R^{d}_{abc}\omega_d = ^{(5)}R^{n}_{mdo}\omega_n q^{m}_{a} q^{d}_{b} q^{o}_{c} + K_{ac}K^{o}_{b}\omega_o - K_{bc}K^{o}_{a}\omega_o. \tag{2.18}$$

Podemos rearranjar a equação de tal modo que eliminemos os fatores em ω_a, com isso chegamos à equação de Gauss, relacionando a curvatura do *bulk* com as curvaturas intrínseca e extrínseca da brana:

$$R^{a}_{bcd} = ^{(5)}R^{m}_{npo} q^{a}_{m} q^{n}_{b} q^{p}_{c} q^{o}_{d} + K^{a}_{c}K_{bd} - K^{a}_{d}K_{bc}. \tag{2.19}$$

2.1.5 Equação de Codazzi

Em nosso caso, a Equação de Codazzi relaciona as derivadas da curvatura extrínseca com o tensor de Ricci em 5 dimensões. Para obter esta relação começamos calculando a seguinte expressão

$$D_n K^{a}_{b} = q^{m}_{n} q^{o}_{b} q^{a}_{l} \nabla_m (q^{d}_{o} \nabla_d n^l), \tag{2.20}$$

onde nos valemos da definição de derivada covariante sobre a brana dada em (2.8) e da definição de curvatura extrínseca (2.12). Desenvolvendo a derivada covariante em m na última expressão

$$\nabla_m (q^{d}_{o} \nabla_d n^l) = \nabla_m q^{d}_{o} \nabla_d n^l + q^{d}_{o} \nabla_m \nabla_d n^l \tag{2.21}$$

e usando (2.1), escrevemos

$$\nabla_m q^{d}_{o} = -n_o \nabla_m - n^d \nabla_m n_o. \tag{2.22}$$

Substituindo esta expressão em (2.21) e juntando tudo na expressão (2.20) chegamos a

$$D_n K^{a}_{b} = q^{m}_{n} q^{o}_{b} q^{a}_{l} n_o \nabla_m n^d \nabla_d n^l - q^{m}_{n} q^{o}_{b} q^{a}_{l} n^d \nabla_m n_o \nabla_d n^l + q^{m}_{n} q^{o}_{b} q^{a}_{l} q^{d}_{o} \nabla_m \nabla_d n^l. \tag{2.23}$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima é nulo devido à contração do vetor normal à brana com sua métrica intrínseca. Contraímos os índices n e a da equação acima, de modo a obter

$$D_a K^a_b = q^d_b q^m_l \nabla_m \nabla_d n^l - q^m_l q^o_b n^d \nabla_m n_o \nabla_d n^l. \tag{2.24}$$

Agora contraímos os índices a e b ainda em (2.23), de onde obtemos

$$D_n K^a_a = D_n K = q^m_n q^d_l \nabla_m \nabla_d n^l - q^m_n q^o_l n^d \nabla_m n_o \nabla_d n^l \tag{2.25}$$

e diminuimos (2.25) de (2.24) (renomeando os índices) de tal forma a obter

$$D_a K^a_b - D_n K = q^d_b q^m_l (\nabla_m \nabla_d n^l - \nabla_d \nabla_m n^l) - q^m_l q^o_b n^d \nabla_d n^l (\nabla_m n_o - \nabla_o n_m). \tag{2.26}$$

Então nos valemos das expressões (2.12) e (2.13) para simplificar a equação acima, podendo escrevê-la em termos do tensor de Gauss e do tensor de curvatura do *bulk*

$$D_a K^a_b - D_b K = q^d_b q^m_l {}^{(5)}R^l_{cmd} n^c - \nabla_d n^l (K_{lb} - K_{bl}). \tag{2.27}$$

Uma vez que o tensor de Gauss é simétrico, o último termo da equação acima desaparece. Usamos agora novamente a equação (2.1) para desenvolver a seguinte expressão

$$q^d_b q^m_l = g^d_b g^m_l + n_b n_l n^d n^m - g^d_b n_l n^m - g^m_l n_b n^d, \tag{2.28}$$

que, quando substituída em (2.27) e levadas em conta as propriedades de antissimetria do tensor de Riemann com relação aos dois últimos índices para o cancelamento de alguns termos envolvidos, obtemos

$$D_a K^a_b - D_b K = {}^{(5)}R_{cb} n^c - {}^{(5)}R_{cd} n_b n^d n^c. \tag{2.29}$$

Finalmente, uma vez que a quantidade do lado esquerdo da equação acima pertencente à brana, podemos aplicar um fator q^b_l de modo a anular o último termo da equação acima, o que resulta na Equação de Codazzi

$$D_a K^a_l - D_l K = {}^{(5)}R_{cb} n^c q^b_l. \tag{2.30}$$

2.2 Gravitação em 5 dimensões

Por meio da equação de Gauss podemos escrever o tensor de Einstein na brana em termos dos tensores de curvatura do *bulk*. Sendo o tensor de Einstein intrínseco da brana definido como

$$G_{bd} = R_{bd} - \frac{1}{2}Rq_{bd}, \tag{2.31}$$

precisamos então obter o tensor de Ricci da brana, o qual pode ser obtido contraindo-se os índices a e c da Equação de Gauss (2.19) de forma a obter

$$R_{bd} = {}^{(5)}R^{m}_{npo}q^{p}_{m}q^{n}_{b}q^{o}_{d} + KK_{bd} - K^{a}_{d}K_{ba}, \tag{2.32}$$

usando (2.1) para escrever q^p_m como

$$q^{p}_{m} = g^{p}_{m} - n_m n^p, \tag{2.33}$$

a expressão (2.32) nos dá o tensor de Ricci como

$$R_{bd} = {}^{(5)}R_{no}q^{n}_{b}q^{o}_{d} - {}^{(5)}R^{m}_{npo}n_m n^p q^{n}_{b}q^{o}_{d} + KK_{bd} - K^{a}_{d}K_{ba}. \tag{2.34}$$

O escalar de curvatura da brana é obtido simplesmente contraindo os índices b e d na equação acima

$$R = {}^{(5)}R_{no}q^{o}_{n} - {}^{(5)}R^{m}_{npo}n_m n^p q^{o}_{n} + K^2 - K^{a}_{b}K^{b}_{a}. \tag{2.35}$$

Valendo-nos novamente da expressão (2.1), podemos escrever o segundo termo do lado direito da equação anterior como:

$$ {}^{(5)}R^{m}_{npo}n_m n^p q^{o}_{n} = {}^{(5)}R_{no}n^n n^o - {}^{(5)}R^{m}_{npo}n_m n^p n^n n^o = {}^{(5)}R_{no}n^n n^o, \tag{2.36}$$

sendo que o termo que contém o tensor de Riemann se anula devido a sua propriedade de antissimetria com relação aos dois últimos índices. Já o primeiro termo do lado direito de (2.35) também pode ser rearranjado utilizando (2.1) da forma

$$ {}^{(5)}R_{no}q^{no} = {}^{(5)}R - {}^{(5)}R_{no}n^n n^o. \tag{2.37}$$

Substituímos estas expressões (2.36) e (2.37) em (2.35) e então obtemos a expressão desejada para o escalar de Ricci

$$R = {}^{(5)}R - 2\,{}^{(5)}R_{no}n^n n^o + K^2 - K^a_b K^b_a. \tag{2.38}$$

Agora substituímos as expressões para o tensor de Ricci (2.34) e o escalar de curvatura (2.38) na equação (2.31)

$$\begin{aligned} G_{bd} = [{}^{(5)}R_{no} - \frac{1}{2}{}^{(5)}R g_{no}]q^n_b q^o_d + {}^{(5)}R_{no}n^n n^o q_{bd} + KK_{bd} - \\ K^a_d K_{ba} - \frac{1}{2}(K^2 - K^a_b K^b_a) - {}^{(5)}R^m_{npo}n_m n^p q^n_b q^o_d. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Esta expressão tem ainda um termo com o tensor de curvatura do *bulk*, mas podemos reescrevê-lo decompondo-o em termos do tensor de Ricci e do tensor de Weyl [6] C^m_{npo}

$${}^{(5)}R^m_{npo} = \frac{2}{3}(g^m_{[p}{}^{(5)}R_{o]n} - g_{n[p}{}^{(5)}R^m_{o]}) - \frac{1}{6}g^m_{[p}g_{o]n}{}^{(5)}R + C^m_{npo}, \tag{2.40}$$

usando essa relação em (2.39) temos então

$$\begin{aligned} G_{bd} = \frac{2}{3}\left({}^{(5)}G_{no}q^n_b q^o_d + {}^{(5)}G_{no}n^n n^o q_{bd}\right) - \frac{1}{4}{}^{(5)}R q_{bd} + KK_{bd} - \\ K^a_d K_{ba} - \frac{1}{2}(K^2 - K^a_b K^b_a) - E_{bd}, \end{aligned} \tag{2.41}$$

onde ${}^{(5)}G_{no}$ é o tensor de Einstein em 5 dimensões e E_{bd} é o termo dependente do tensor de Weyl:

$$E_{bd} = C^m_{npo}n_m n^p q^n_b q^o_d. \tag{2.42}$$

Supondo agora que o universo de 5 dimensões relacione a geometria (${}^{(5)}G_{no}$) com a distribuição de energia (T_{bd}) do universo de maneira análoga à Relatividade Geral usual, de 4 dimensões

$${}^{(5)}G_{bd} = {}^{(5)}R_{bd} - \frac{1}{2}{}^{(5)}R q_{bd} = k_5^2 T_{bd}, \tag{2.43}$$

onde k_5^2 é uma constante de acoplamento referente ao universo de 5 dimensões.

Podemos então reescrever a equação (2.41) em termos da distribuição de energia do universo. A equação (2.43) permite determinar ${}^{(5)}R$ em termos do tensor energia momento do universo pentadimensional

$$ {}^{(5)}R = -\frac{2}{3}k_5^2 T. \tag{2.44} $$

Com (2.43) e (2.44) a expressão (2.41), que nos dará a gravitação na brana, pode ser escrita em termos da distribuição de energia total *bulk*, do tensor de curvatura de Gauss e do tensor de Weyl projetado na brana:

$$ \begin{aligned} G_{bd} = \frac{2}{3}k_5^2 \left(T_{no}q_b^n q_d^o + \left(T_{no}n^n n^o - \frac{1}{4}T \right) q_{bd} \right) + KK_{bd} - \\ K_d^a K_{ba} - \frac{1}{2}(K^2 - K_b^a K_a^b) - E_{bd}. \end{aligned} \tag{2.45} $$

2.3 Distribuição de Energia no *Bulk*

Precisamos agora determinar como a energia se distribui no sistema $bulk + brana$, ou seja, explicitar o tensor energia-momento T_{ab} da equação (2.45). Para uma descrição adequada da distribuição de energia deste modelo, precisamos cobrir o espaço-tempo com um sistema de coordenadas e localizar a brana em um ponto específico da dimensão espacial extra.

Consideremos então uma congruência de curvas geodésicas cobrindo todo o *bulk* e interceptando a brana ortogonalmente. Se parametrizarmos estas curvas através de um parâmetro l de tal modo que o valor do parâmetro seja nulo sempre que cada uma das curvas intercepte a brana, poderemos assim dizer que a brana está localizada na posição $l = 0$ da dimensão extra. Assumimos ainda que tal sistema de coordenadas é gaussiano, ou seja, que o intervalo métrico nesse sistema de coordenadas pode ser escrito como

$$ ds^2 = q_{ab}dx^a dx^b + dl^2. \tag{2.46} $$

Uma das propriedades dos modelos de Randall-Sundrum ([4] e [5]) é que o *bulk* tem uma constante cosmológica negativa, ou seja: o espaço-tempo de 5 dimensões deve ter geometria anti de Sitter. Sendo que uma das principais inspirações para modelos de branas como o tratado nessa dissertação é sucitada pelos modelos de branas tipo Randall-Sundrum. Assumiremos aqui que o *bulk* possua uma constante cosmológica negativa associada. Levando-se em conta agora que toda a matéria do universo está contida na brana, o tensor energia-momento do sistema total pode ser representado com o termo da constante cosmológica do *bulk* mais um termo referente à distribuição de energia na brana - S_{ab} - que pode ser localizado em $l = 0$ através de uma função delta de Dirac

$$T_{ab} = -\Lambda g_{ab} + S_{ab}\delta(l). \tag{2.47}$$

A distribuição de energia na brana pode também ser caracterizada por uma constante cosmológica intrínseca λ mais um termo τ_{ab} dando a distribuição de matéria e energia na brana

$$S_{ab} = -\lambda q_{ab} + \tau_{ab}. \tag{2.48}$$

Agora basta substituir a expressão para o tensor energia-momento, definida em (2.47) e (2.48) na equação (2.45), obtida na seção anterior e que relaciona a distribuição de energia do *bulk* com a geometria na brana, que chegaremos a uma equação que nos dará a dinâmica gravitacional na brana. Mas ao fazermos isso vemos que a simples substituição de termos acarreta no seguinte problema: os tensores que dão a geometria na brana em (2.45) estão definidos sobre ela, ou seja, em $l = 0$, mas a função delta de Dirac assume valor infinito neste ponto da dimensão extra. Para contornar este problema, deduziremos algumas condições de junção, tomando o limite para $l \to 0$ em cada lado da brana.

2.4 Condições de Junção

Em nosso modelo cosmológico com uma 3-brana mergulhada em um *bulk* de 5 dimensões, a brana é localizada por meio da função delta de Dirac em um ponto da dimensão extra — todos os campos do modelo padrão estão sobre este ponto na dimensão extra — mas, para analisarmos a dinâmica gravitacional dos objetos contidos na brana através das equações projetadas, precisamos fazer o limite para

l tendendo a zero. Surge então a questão de como as quantidades, tais como curvatura do *bulk* e curvatura extrínseca, se comportam quando feito tal limite. Este problema é conhecido como problema das Condições de Junção.

Este não é um problema que surge especificamente em cenários de branas, já sendo há décadas abordado para certos sistemas astrofísicos, como por exemplo no problema de Oppenheimer-Snyder que trata a junção entre os campos externo e interno de uma estrela [9].

A dedução é feita nesta dissertação para o problema específico da 3-brana mergulhada em um *bulk* de 5 dimensões, com a condição adicional de que a dimensão extra possui simetria $\mathbb{Z}_2$, que, como visto no Capítulo 1, é reivindicada pela teoria das supercordas e assumida nos modelos de Randall-Sundrum.

Nesta dedução usaremos dois sistemas de coordenadas distintos, o sistema de coordenadas $\{x^a\}$, usado nas seções anteriores com os índices latinos variando de 0 a 4 cobrindo todo o universo e com a métrica da brana definida por (2.1) e também um segundo sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ cobrindo apenas a brana e portanto definido em 4 dimensões, com os índices gregos variando de 0 a 3. O sistema de coordenadas cobrindo o *bulk* é arranjado de tal forma que as três primeiras coordenadas cobrem a brana e a quinta ($a = 4$) é construída como uma congruência de geodésicas tal qual descrito na seção anterior. Assim, o vetor unitário n_a, normal à brana em cada ponto, sempre estará ao longo da coordenada x^4, coberta pelo parâmetro l. Levando isso em consideração e escolhendo um parâmetro l propício, podemos escrever os vetores n_a como vetores tangentes à coordenada x^4

$$n^a = \frac{\partial x^a}{\partial l} \tag{2.49}$$

e como n^a é unitário, suas componentes contravariantes podem ser escritas como

$$n_a = \frac{\partial l}{\partial x^a}. \tag{2.50}$$

As quantidades contidas apenas na brana podem ser representadas em termos de qualquer dos dois sistemas de coordenadas definidos. Para escrever a métrica intrínseca na brana em termos do novo sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ basta fazer uma simples transformação de coordenadas em (2.1)

$$q_{\mu\nu} = \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^b}{\partial x^\nu}q_{ab} = \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^b}{\partial x^\nu}g_{ab} - \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^b}{\partial x^\nu}n^a n^b. \tag{2.51}$$

No entanto, o segundo termo se anula pois não há componentes de n^a sobre a brana. Então a equação (2.51) fica simplesmente

$$q_{\mu\nu} = \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^b}{\partial x^\nu}g_{ab}. \tag{2.52}$$

Assim as derivadas parciais da transformação entre os sistemas de coordenadas atuam como projetores, relacionando quantidades do *bulk* com suas componentes na brana. É conveniente a partir daqui escrever as derivadas parciais na seguinte notação

$$e^a_\mu \equiv \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}. \tag{2.53}$$

Então, dada qualquer quantidade contida no *bulk*, sua projeção sobre a brana pode ser feita através de (2.53).

Agora considerando a brana localizada na posição $l = 0$ da dimensão extra, a comparação de quantidades quando se toma o limite para $l \to 0$ pode ser sumarizada pela seguinte notação:

$$[A] \equiv \lim_{l\to 0^+} A - \lim_{l \to 0^-} A \equiv A^+ - A^-, \tag{2.54}$$

onde A representa um tensor arbitrário.

Para o caso considerado nesta dissertação, o vetor normal à brana obedecerá a seguinte relação, levando em conta que a dimensão extra possui simetria $\mathbb{Z}_2$ e portanto tem o sinal invertido quando em lados diferentes da brana:

$$[n_a] = n_a^+ - n_a^- = 2n_a^+. \tag{2.55}$$

2.4.1 Primeira Condição de Junção de Israel

Vimos que a simetria $\mathbb{Z}_2$ implica em uma relação para o vetor normal unitário para cada lado da brana. Mas outras quantidades, como a métrica g_{ab} do *bulk* não tem um comportamento imediatamente evidente no limite para $l \to 0$. Em [8] Israel obteve duas condições de junção, a primeira determinando o comportamento do tensor métrico. Em nosso caso, estamos lidando com um sistema de 5 dimensões e além disso a quinta dimensão possui uma simetria especial. Mesmo assim, as condições de junção são as mesmas obtidas por Israel em um contexto completamente diferente.

Em nosso caso, para desvelar o comportamento da métrica utilizaremos uma função distribuição de Heaviside tal como feito em [10], com a diferença que aqui a simetria $\mathbb{Z}_2$ é imposta sobre a dimensão extra.

A função de Heaviside é definida como:

$$\begin{aligned} \Theta(l) &= 1 \text{ se } l > 0, \\ \Theta(l) &= 0 \text{ se } l < 0, \\ \Theta(l) & \text{ indeterminada se } l = 0. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Com tais definições, as seguintes propriedades da função de Heaviside seguem imediatamente:

$$\Theta^2(l) = \Theta(l), \tag{2.57}$$

$$\Theta(l)\Theta(-l) = 0, \tag{2.58}$$

$$\frac{d\Theta(l)}{dl} = \delta(l). \tag{2.59}$$

Através desta função de distribuição a métrica do *bulk* pode ser escrita como a soma de duas funções: suas partes em cada lado da brana

$$g_{ab} = \Theta(l) g^+_{ab} + \Theta(-l) g^-_{ab}, \tag{2.60}$$

mas ficando indefinida para $l = 0$.

Derivando $g_{\alpha\beta}$ na equação acima

$$\partial_\gamma g_{ab} = \partial_c \Theta(l) g^+_{ab} + \Theta(l)\partial_c g^+_{ab} + \partial_c\Theta(-l) g^-_{ab} + \Theta(-l)\partial_c g^-_{ab} \tag{2.61}$$

e levando em conta, usando as relações (2.50) e (2.57), que

$$\partial_c\Theta(l) = \frac{\partial l}{\partial x^c}\frac{d\Theta(l)}{dl} = n_c\delta(l) \tag{2.62}$$

e analogamente

$$\partial_c\Theta(-l) = -n_c\delta(l), \tag{2.63}$$

a equação (2.61) pode ser escrita como

$$\partial_c g_{ab} = \Theta(l)\partial_c g^+_{ab} + \Theta(-l)\partial_c g^-_{ab} + n_c\delta(l)[g_{ab}]. \tag{2.64}$$

De posse desta relação para a derivação parcial da métrica é possível também obter uma relação para os símbolos de Christoffel que são dados por

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{ce}(\partial_a g_{eb} + \partial_b g_{ae} - \partial_e g_{ab}). \tag{2.65}$$

Então, usando a expressão para a métrica (2.60) e sua derivada (2.64), os símbolos de Christoffel passam a ser escritos como

$$\begin{aligned}\Gamma^c_{ab} = \Theta(l)\Gamma^{c+}_{ab} + \Theta(-l)\Gamma^{c-}_{ab} + \frac{1}{2}\delta(l)(\Theta(l)g^{+ce} + \Theta(-l)g^{ce})(n_a[g_{eb}]&\\ +n_b[g_{ea}] - n_e[g_{ab}].&\end{aligned} \tag{2.66}$$

Mas o último termo é proporcional a $\delta(l)\Theta(l)$, o qual impossibilita a representação dos símbolos de Christoffell com a função de Heaviside, pois $\Theta(l)$ não é definida para $l = 0$. Para contornar este problema, é conveniente impor a seguinte condição

$$[g_{ab}] = 0, \tag{2.67}$$

que é conhecida como Primeira Condição de Junção de Israel, sendo pela primeira vez deduzida por Israel em [8].

Com esta condição, a equação (2.66) fica simplesmente escrita como

$$\Gamma^c_{ab} = \Theta(l)\Gamma^{c+}_{ab} + \Theta(-l)\Gamma^{c-}_{ab} \tag{2.68}$$

e ainda podemos obter a seguinte relação, levando em conta a equação (2.1) juntamente com a Primeira Condição de Junção (2.67)

$$[q_{ab}] = -[n_a n_b]. \tag{2.69}$$

Levando-se em conta a simetria $\mathbb{Z}_2$, que faz com que o vetor normal à brana tenha sinais opostos em diferentes lados dela, temos

$$[n_a n_b] = n_a^+ n_b^+ - n_a^+ n_b^+ = 0 \tag{2.70}$$

e portanto, levando isso em conta na relação (2.69), chega-se à condição

$$[q_{ab}] = [q_{\mu\nu}] = 0, \tag{2.71}$$

pois se um tensor é nulo em um dado sistema de coordenadas ele também o será em qualquer outro sistema de coordenadas. Mas como $q_{\mu\nu}$ é obtido pela relação (2.52), a seguinte condição também deve ser satisfeita:

$$[e_\alpha^a] = 0. \tag{2.72}$$

2.4.2 Segunda Condição de Junção de Israel

Todas essas condições seguem da Primeira Condição de Junção de Israel, mas existe uma segunda condição de junção. Para chegar a ela começamos determinando o tensor curvatura de Riemann, definido em termos das derivadas dos símbolos de Christoffel

$$^{(5)}\!R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{db} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}. \tag{2.73}$$

Utilizando a expressão (2.68) é possível obter uma relação para as derivadas dos símbolos de Christoffel

$$\partial_d \Gamma^c_{ab} = \Theta(l)\partial_d \Gamma^{c+}_{ab} + \Theta(-l)\partial_d \Gamma^{c-}_{ab} + \delta(l) n_d [\Gamma^c_{ab}]. \tag{2.74}$$

Assim, levando-se em conta (2.68) e (2.74), o tensor de Riemann (2.73) toma a seguinte forma

$$^{(5)}\!R^a_{bcd} = \Theta(l)\,^{(5)}\!R^{a+}_{bcd} + \Theta(-l)\,^{(5)}\!R^{a-}_{bcd} + \delta(l) A^a_{bcd}, \tag{2.75}$$

onde A^a_{bcd} é definida da seguinte maneira

$$A^a_{bcd} \equiv n_c[\Gamma^a_{bd}] - n_d[\Gamma^a_{bc}]. \tag{2.76}$$

Para determinar adequadamente este termo é preciso analisar as condições de junção para as derivadas da métrica. Uma vez que os termos proporcionais a $[\Gamma^a_{bc}]$ dependem de tais derivadas, é útil começar fazendo a seguinte suposição

$$[\partial_c g_{ab}] = \kappa_{ab} n_c, \tag{2.77}$$

que pode ser justificada considerando-se que, se houver alguma descontinuidade em $l = 0$ sobre as derivadas da métrica, esta será na direção perpendicular à brana. Então, usando (2.77) chega-se a uma expressão para as condições de junção sobre símbolos de Christoffel

$$[\Gamma^c_{ab}] = \frac{1}{2} g^{ce}(\kappa_{eb} n_a + \kappa_{ae} n_b - \kappa_{ab} n_e), \tag{2.78}$$

que, quando substituída na expressão (2.76), chega-se a uma relação para o tensor A^a_{bcd}

$$A^a_{bcd} = \frac{1}{2}(\kappa^a_d n_c n_b - \kappa_{bd} n^a n_c - \kappa^a_c n_b n_d - \kappa_{bc} n^a n_d). \tag{2.79}$$

De posse da relação de junção para o tensor de Riemann podemos também determinar as condições de junção do tensor de Einstein, dado por

$$^{(5)}G_{bd} =^{(5)} R_{bd} - \frac{1}{2} g_{bd} R, \tag{2.80}$$

onde o tensor de Ricci R_{bd} pode ser obtido na contração de a com c no tensor de Riemann (2.75)

$$^{(5)}R_{bd} = \Theta(l)^{(5)}R^+ bd + \Theta(-l)^{(5)}R^-_{bd} + \delta(l) A_{bd} \tag{2.81}$$

e o escalar de curvatura R, contraindo b com d na equação acima, é dado por

$$^{(5)}R = \Theta(l)^{(5)}R^+ + \Theta(-l)^{(5)}R^- + \delta(l) A, \tag{2.82}$$

sendo A_{bd} e A são obtidos nas sucessivas contrações de (2.79)

$$A_{bd} = \frac{1}{2}(\kappa_{ad} n^a n_b + \kappa_{ba} n^a n_d - \kappa_{bd} - \kappa n_b n_d), \tag{2.83}$$

$$A = \kappa_{ab} n^a n^b - \kappa. \tag{2.84}$$

Substituindo (2.81) e (2.82) em (2.80) chega-se então à expressão para o tensor de Einstein:

$$\begin{aligned} {}^{(5)}G_{bd} = \Theta(l)^{(5)}R^{+}bd + \Theta(-l)^{(5)}R^{-}_{bd} - \frac{1}{2}g_{bd}(\Theta(l)^{(5)}R^{+} + \Theta(-l)^{(5)}R^{-}) + \\ \delta(l)(A_{bd} - \frac{1}{2}g_{bd}A). \end{aligned} \tag{2.85}$$

Usando a função distribuição de Heaviside, podemos descrever o tensor energia-momento do universo T_{ab} em termos da distribuição de energia em cada lado da brana e da distribuição de energia na brana, a partir da equação (2.47)

$$T_{ab} = \Theta(l)T^{+}_{ab}\Theta(-l)T^{-}_{ab} + \delta(l)S_{ab}, \tag{2.86}$$

que, se comparada com (2.85) através da equação (2.43), nos dá a seguinte relação

$$A_{bd} - \frac{1}{2}g_{bd}A = \kappa_5^2 S_{bd}. \tag{2.87}$$

Podemos reescrever o lado direito da equação acima usando as relações (2.83) e (2.84) obtidas para o tensor A_{bd} e sua forma escalar respectivamente:

$$k_5^2 S_{\beta\delta} = \frac{1}{2}e^b_\beta e^d_\delta[\kappa_{ad}n^a n_b + \kappa_{ba}n^a n_d - \kappa_{bd} - \kappa n_b n_d - g_{bd}(\kappa_{ab}n^a n^b - \kappa)], \tag{2.88}$$

onde nos valemos do fato de S_{bd} estar contido na brana, tornando possível escrevê-lo em termos do sistema de coordenadas intrínseco da brana.

Se usarmos a relação (2.1) para reescrever os termos contendo o vetor normal unitário n^a é possível simplificar bastante a expressão (2.89)

$$k_5^2 S_{\beta\delta} = -e^b_\beta e^d_\delta \kappa_{bd} + q_{\beta\delta}q^{ab}\kappa_{ab}. \tag{2.89}$$

Guardemos esta relação e vejamos agora o comportamento da curvatura extrínseca no limite para $l \to 0$. Para fazer isso, analisemos a expressão para a derivada covariante do tensor normal unitário

$$[\nabla_a n_b] = \left[\frac{\partial n_b}{\partial x^a} - \Gamma^c_{ab} n_c\right] = -\left[\Gamma^c_{ab} n_c\right], \tag{2.90}$$

onde a derivada parcial de n_b é nula pois, para o sistema de coordenadas definido, ele só possui uma componente diferente de zero e constante.

Com a relação para a derivada covariante do vetor normal unitário podemos também obter uma relação para a curvatura extrínseca da brana levando-se em conta sua definição (2.12)

$$[K_{\alpha\beta}] = [e^a_\alpha e^b_\beta \nabla_a n_b] = -e^a_\alpha e^b_\beta [\Gamma^c_{ab} n_c]. \tag{2.91}$$

Considerando agora a expressão (2.55), que determina o comportamento do tensor normal unitário, o termo entre colchetes em (2.91) se torna

$$[\Gamma^c_{ab} n_c] = n_c(\Gamma^{c+}_{ab} n_c + \Gamma^{c-}_{ab}) = n_c([\Gamma^c_{ab}] + 2\Gamma^{c-}_{ab}) \tag{2.92}$$

e com isso a expressão (2.91) para o tensor de curvatura extrínseca se torna

$$[K_{\alpha\beta}] = e^a_\alpha e^b_\beta [\Gamma^c_{ab}] n_c - 2 e^a_\alpha e^b_\beta \Gamma^{c-}_{ab} n_c, \tag{2.93}$$

O segundo termo do lado direito da equação acima se anula, pois o símbolo de Christoffel não está sobre a brana e portanto não possui componentes ao longo desta em $l = 0$, o que implica que sua projeção será nula. Mas a expressão $[\Gamma^c_{ab} n_c]$ na equação acima já foi calculada anteriormente, sendo dada pela expressão (2.78), com isso a expressão (2.93) se simplifica

$$[K_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} e^a_\alpha e^b_\beta \kappa_{ab}. \tag{2.94}$$

A Segunda Condição de Junção de Israel é obtida comparando esta expressão com a equação para a distribuição de energia na brana (2.89)

$$[K_{\alpha\beta}] = -\frac{k_5^2}{2}\left(S_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} q_{\alpha\beta} S\right). \tag{2.95}$$

Esta relação nos diz que a forma como a brana está mergulhada no *bulk*, dada pela sua curvatura extrínseca, é determinada pelo conteúdo de energia na brana.

2.5 Equações Gravitacionais na Brana

Na seção 2.4 obtivemos uma expressão para o tensor de Einstein na brana em termos da sua curvatura extrínseca, do tensor energia-momento T_{ab} e do tensor E_{ab} referente à projeção do tensor de Weyl em 5 dimensões sobre a brana (2.45). Na seção posterior descrevemos a distribuição de energia no universo localizando o tensor energia-momento da brana em $l = 0$ na dimensão extra através da função delta de Dirac (2.47). Como a função delta de Dirac assume valor infinito na posição em que a brana se encontra, não podemos avaliar o tensor energia-momento T_{ab} exatamente sobre este ponto, fazemos apenas o limite para $l \to 0$, portanto nesse limite a componente do tensor energia-momento sobre a brana S_{ab} será desconsiderada, sendo que está exatamente sobre $l = 0$.

A contribuição do tensor S_{ab} sobre as equações projetadas que nos darão a dinâmica na brana, se dará nos termos contendo o tensor de curvatura extrínseca através da Segunda Condição de Junção de Israel (2.95). Mas levando-se em conta a definição do tensor de curvatura extrínseca, dado pela projeção da derivada covariante do vetor normal unitário sobre a brana, devemos ter a seguinte relação para o tensor de curvatura extrínseca no limite para diferentes lados da brana

$$K^{+}_{\alpha\beta} = -K^{-}_{\alpha\beta}. \tag{2.96}$$

Ao impormos esta condição sobre a Segunda Condição de Junção (2.95), temos

$$\frac{1}{2}[K_{\alpha\beta}] = K^{+}_{\alpha\beta} = -K^{-}_{\alpha\beta} = -\frac{k_5^2}{2}\left(S_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}q_{\alpha\beta}S\right). \tag{2.97}$$

O tensor de curvatura extrínseca possui sinais opostos em diferentes lados da brana por ele ser obtido através do vetor normal unitário, que inverte de sinal devido à simetria $\mathbb{Z}_2$ sobre a dimensão extra. Podemos ver que será indiferente usarmos $K^{+}_{\alpha\beta}$ ou $K^{-}_{\alpha\beta}$ para obter o limite $l \to 0$. A única diferença entre estes tensores se deve ao sinal e os termos contendo o tensor de curvatura extrínseca na equação (2.45) são quadráticos.

Assim, substituindo (2.97) em (2.45) chegamos finalmente às equações que nos dão a dinâmica gravitacional na brana:

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + 8\pi G_N \tau_{\mu\nu} + k_5^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}, \tag{2.98}$$

onde:

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}k_5^2\left(\Lambda + \frac{1}{6}k_5^2\lambda^2\right), \tag{2.99}$$

$$G_N = \frac{k_5^4\lambda}{48\pi}, \tag{2.100}$$

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\tau_\mu^\sigma \tau_{\nu\sigma} + \frac{1}{12}\tau\tau_{\mu\nu} + \frac{1}{8}q_{\mu\nu}\tau_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} - \frac{1}{24}q_{\mu\nu}\tau^2. \tag{2.101}$$

Se considerarmos apenas os dois primeiros termos do lado direito da equação (2.98) fica evidente a semelhança com as equações de campo de Einstein onde o fator Λ_4 faz o papel de uma constante cosmológica efetiva sobre a brana e G_N se relaciona à constante gravitacional de Newton.

Já o termo com $\pi_{\mu\nu}$ é uma consequência direta da dimensão extra. Mesmo assim seu valor depende da distribuição de energia na brana, pois é um termo quadrático em $\tau_{\mu\nu}$.

O último termo, $E_{\mu\nu}$, também é uma contribuição direta da dimensão extra, sendo um termo puramente geométrico que resulta da projeção do tensor de Weyl sobre a brana. Este termo não depende de nada contido na brana, é portanto não-local. Para que ele não seja nulo é necessário que o espaço-tempo global não seja conformalmente plano, pois neste caso o tensor de Weyl do *bulk* será nulo. Ademais, ele não está definido sobre a brana e deve ser entendino no contexto de um limite tendendo à brana.

A Equação de Codazzi, que não foi utilizada até agora, (2.30) pode ser utilizada para avaliarmos a conservação de energia no sistema. Levando em conta a equação de Einstein para 5 dimensões dada em (2.43) a equação de Codazzi pode ser escrita substituindo o tensor de Ricci pelo tensor energia-momento T_{ab}:

$$D_a K_l^a - D_l K = T_{cb} n^c q_l^b. \tag{2.102}$$

Mas se levarmos em consideração a expressão para T_{ab} definida em (2.47) vemos que o lado direito da equação acima se anula. Como obtemos na segunda condição de junção uma expressão para o tensor de curvatura extrínseca em termos do conteúdo de energia na brana temos então a seguinte relação:

$$D_a K^a_l - D_l K \propto D_a \tau^a_l = 0, \qquad (2.103)$$

que representa a conservação da energia contida na brana.

Resta agora buscar por possíveis soluções para a equação (2.47). Sabemos que as equações de campo de Einstein tiveram grande sucesso ao descrever nosso universo, sendo possível abordar com precisão uma grande quantidade de fenômenos astrofísicos e cosmológicos, muitos dos quais a gravitação de Newton não conseguiu descrever. Mesmo assim há ainda muitas questões em aberto em astrofísica e cosmologia. Dentre os principais problemas estão a expansão acelerada do universo, a homogeneidade da radiação cósmica de fundo, as curvas de rotação de galáxias e os efeitos de lente gravitacional em aglomerados de galáxias. Todos estes problemas podem ser tratados com a Relatividade Geral de Einstein, mas apenas se admitirmos a existência de estruturas extras no universo, tais como: um fluído cosmológico ideal com pressão negativa para explicar a expansão acelerada do universo, um campo escalar primordial, que produziria uma expansão exponencial num período proximo ao Big Bang explicando então porque nosso universo é tão homogêneo, e uma matéria escura, para dar conta das curvas de rotação de galáxias e desvios por lentes gravitacionais em grandes aglomerados de galáxias observados.

Mas todas estas estruturas, muito em voga atualmente, não foram detectadas diretamente, surgindo apenas como hipóteses *ad hoc* para explicar os dados observacionais. Enquanto tais hipóteses não se confirmam é conveniente buscar por explicações alternativas para estes grandes problemas. Por isso se torna interessante analisar que papel os termos adicionais obtidos para as equações de campo da gravitação na brana podem ter na dinâmica gravitacional e também verificar se eles dariam conta de explicar algum desses problemas contemporâneos supracitados.

Nesta dissertação abordaremos o problema das curvas de rotação de galáxias resolvendo a equação (2.98) para a região exterior a uma distribuição de matéria com simetria esférica, que representa aproximadamente a região externa a uma galáxia cuja concentração principal de matéria se encontra em seu bojo central.

Capítulo 3

Curvas de Rotação de Galáxias Espirais

3.1 O Problema das Curvas de Rotação

As curvas de rotação descrevem a velocidade de rotação de estrelas e nuvens de gás como função da distância radial medida com relação ao centro da galáxia. O problema das curvas de rotação de galáxias espirais consiste no fato de que os dados disponíveis a respeito dessas curvas para diferentes galáxias não estão de acordo com as previsões feitas pelas teorias gravitacionais, tanto de Newton quanto de Einstein.

As galáxias espirais são enormes aglomerados de estrelas com uma forma bem peculiar, com braços estelares espiralando em torno de um bojo central. Por isso sempre despertou o interesse de astrônomos e físicos na tentativa de descrever sua distribuição de matéria e cinemática de seus constituintes com base nas teorias gravitacionais.

Já no inicio da década de 1970 os primeiros cálculos numéricos da dinâmica estelar conseguiam explicar parcialmente o formato espiralado observado em grande parte das galáxias na abordagem do problema de N-corpos newtoniano [11]. No entanto, a distribuição espiralada de estrelas em tais modelos se mostrava instável, o que levou os astrofísicos a proporem a existência de uma estrutura extra para assegurar a estabilidade observada [12]. Tal estrutura foi proposta como um halo de matéria escura (que não interage, ou interage muito fracamente com radiação eletromagnética).

Em seguida, com o aparecimento de radio-telescópios foi possível observar as galáxias através de outros comprimentos de onda, diferentes da luz visível, permitindo a medida de nuvens de hidrogênio neutro (HI) que emitem radiação em um comprimento de onda de 21 centímetros. As medidas nesta faixa do espectro eletromagnético possibilitaram analisar as galáxias espirais até muito além do disco óptico (região onde se localizam as estrelas e nuvens de formação estelar (HII) que emitem radiação com comprimento de onda da luz visível) assim como ter uma melhor estimativa da distribuição de massa nas galáxias.

Devido à dependência do comprimento de onda emitido com a velocidade da fonte de radiação (efeito Doppler) foi possível inferir a velocidade de rotação de estrelas e nuvens de hidrogênio ao redor das galáxias e os resultados obtidos para um número significativo de galáxias analisadas foi que a velocidade de rotação das nuvens de hidrogênio neutro tende a um valor constante à medida em que a distância do centro aumenta. Um compêndio de dados de curvas de rotação para muitas galáxias está reunido em [13].

Albada e Sancisi em 1986 fizeram um trabalho de análise das curvas de rotação bem mais apurado, selecionando galáxias com um perfil de rotação bem próximo de circular e sem muitas assimetrias na distribuição de matéria [14]. Abaixo seguem os dados para duas galáxias com tal perfil:

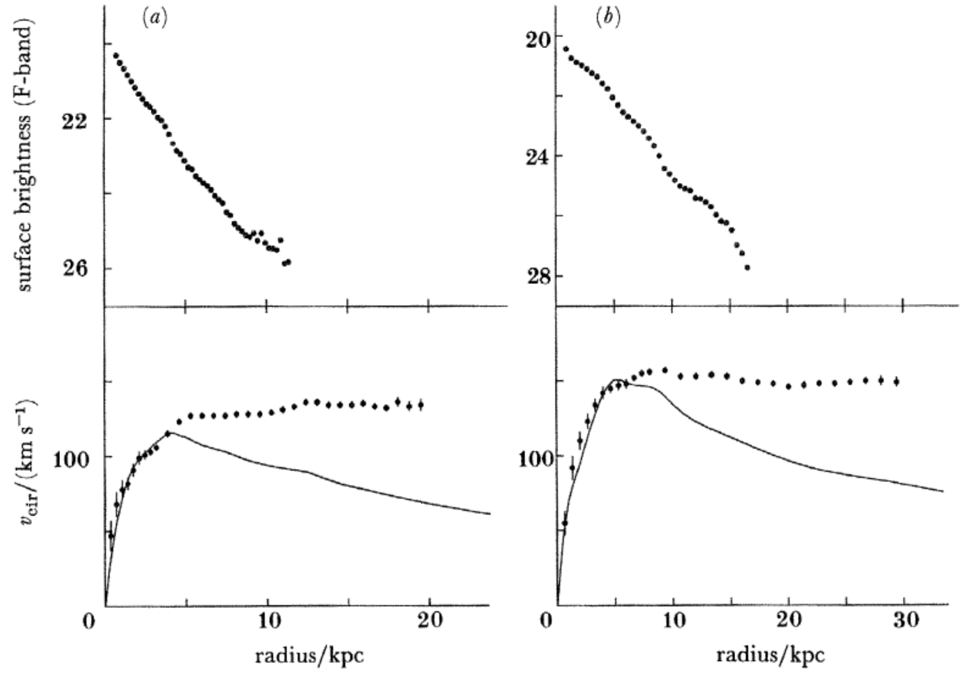

Figura 3.1: Gráficos referentes às galáxias NGC 2403 (a) e NGG 3198 (b). Os gráficos superiores descrevem a distribuição radial de luminosidade na faxa de amplitude de ondas de rádio de 2,1 a 3,3 mm. Já os gráficos inferiores dão as curvas de rotação referentes a cada uma das galáxias, com os pontos representando valores experimentais enquanto as curvas a estimativa teórica feita com base na distribuição dada [14].

Neste trabalho, a comparação entre a distribuição de luz nas galáxias com as suas respectivas curvas de rotação levou à suposição da existência de um halo de matéria escura circundando as galáxias. A estimativa da distribuição de massa nas galáxias é feita com base nas medidas da luminosidade. Com essa estimativa são feitas as previsões para as curvas de rotação. Em geral a discrepância entre as curvas observadas e calculadas começa quando as curvas atingem seu máximo, próximo à fronteira do disco óptico.

Na figura a seguir, Albada e Sancisi demonstram como um halo de matéria escura poderia contribuir para as curvas de rotação de modo que a curva resultante coincida com os dados experimentais:

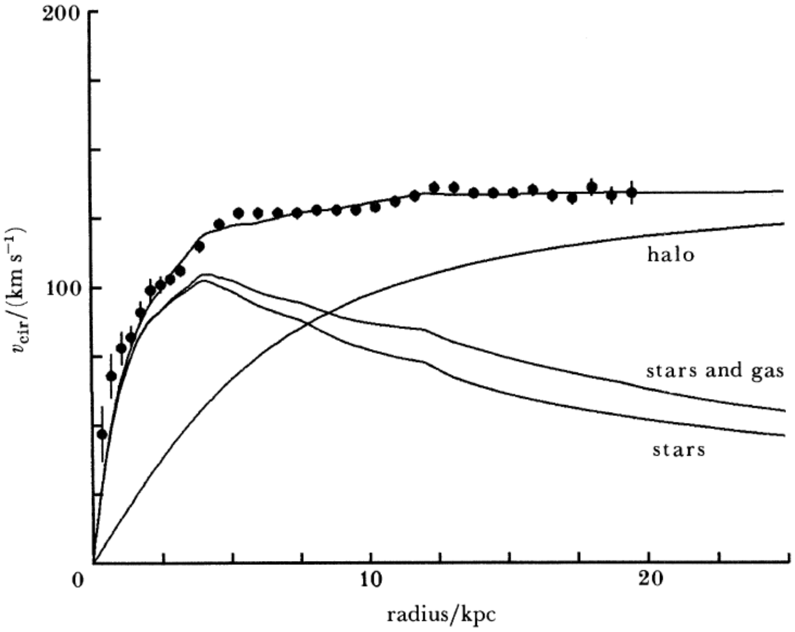

Figura 3.2: Estimativa sobre os dados referentes às curvas de rotação da galáxia NGC 2403. A soma das contribuições sobre a velocidade de rotação referentes a massa de estrelas e nuvens de gás com o halo de matéria escura resulta na curva de rotação que descreve satisfatoriamente os dados experimentais [14].

A hipótese de um halo de matéria escura circundando a galáxia pode então explicar satisfatóriamente as curvas de rotação. Mas não é possível definir a forma exata de tal halo apenas com os dados das curvas de rotação. Para caso de um halo esférico, a densidade de matéria escura deve cair com $1/r^2$ para reproduzir as curvas de rotação. Ademais, a constituição dos halos, ou a natureza da matéria escura também é uma incógnita. As hipóteses possíveis se dividem em dois subgrupos: matéria escura bariônica e não bariônica. A bariônica seria constituída pelas partículas conhecidas do modelo padrão, mas de tal forma que sua interação com a luz fosse fraca o suficiente para impossibilitar sua observação. Este poderia ser o caso de estrelas mortas ou buracos negros desprovidos de disco de acreção, por exemplo. Tais objetos são denominados MACHOS (*Massive Astrophysical Compact Halo Object* na sigla em inglês).

O paradigma de Curvas de Rotação assintóticas é amplamente usado por quem trabalha com a hipótese de matéria escura, mas dados atuais já não corroboram esse paradigma. Em análises recentes, como em [19], Salucci e Gentille indicam que curvas de rotação que tendem a um valor constante, como as expostas nos gráficos anteriores, são minoria e grande parte das galáxias exibem curvas de rotação que variam com o raio mesmo para regiões afastadas do disco óptico. Apesar disso, grande parte dos trabalhos feitos para distribuição de matéria escura se utilizam da hipótese de curvas de rotação assintóticas, possivelmente por simplificar o problema ou tratá-lo como uma primeira aproximação. No gráfico a seguir há um compêndio de diferentes curvas de rotação mostrando a dependência das curvas com o raio. Os autores ainda obtiveram uma fórmula universal para as curvas de rotação, dependentes da distribuição de matéria intrínseca de cada galáxia, explicitando a relação entre a quantidade de matéria visível contida nas galáxias e a variação radial das curvas de rotação.

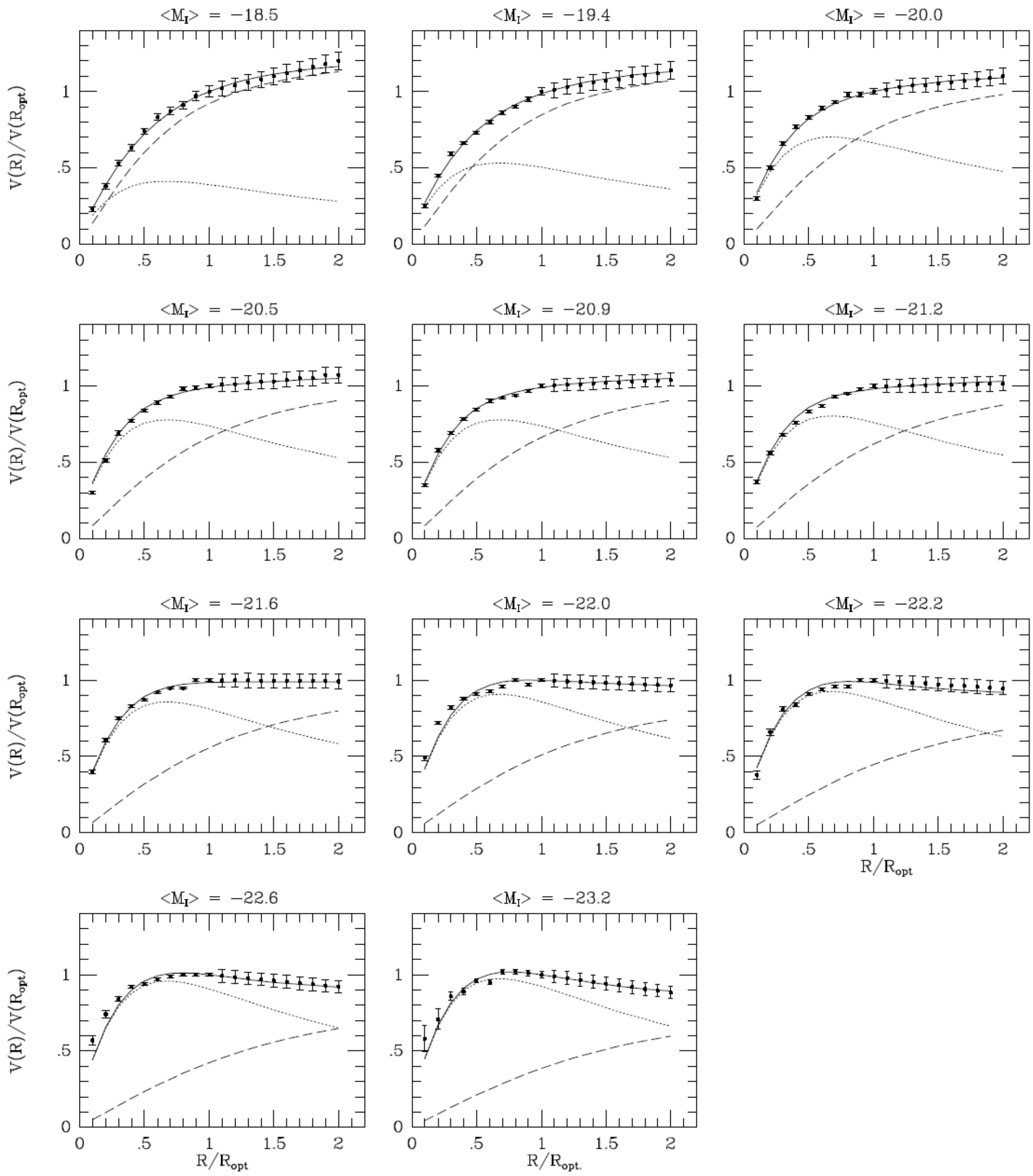

Figura 3.3: Curvas de rotação para galáxias com diferentes magnitudes. A curva sólida que descreve os dados é a combinação das contribuições sobre a velocidade de rotação devido à matéria visível (curva pontilhada) e a suposta matéria escura (curva tracejada)[19]

Há ainda outro fenômeno que possivelmente esteja relacionado com as curvas de rotação, conhecido desde a década de 1930. Fritz Zwicky observou [15] no aglomerado de galáxias de Coma que as galáxias se moviam mais rápido do que o esperado para a quantidade de matéria estimada através da luminosidade das galáxias. Foi aí que primeiro surgiu a hipótese de uma matéria escura, necessária neste caso para explicar a dinâmica de aglomerados de galáxias. Zwicky propôs que poderia haver uma matéria adicional invisível permeando o aglomerado ou sobre cada galáxia individualmente.

Em Cosmologia, também há discrepâncias entre os dados experimentais e as previsões teóricas que levam à evidência indireta de matéria escura. Apesar de o universo ser homogêneo em larga escala, ele é heterogêneo em escalas menores: a matéria é concentrada em superaglomerados de galáxias. Tal padrão se deve à inomogeneidade do universo em seus períodos primordiais, que pode ser observada na anisiotropia da radiação cósmica de fundo, foi esta anisiotropia que sucitou a formação de estruturas em nosso universo e permitiu o surgimento de galáxias e estrelas. Mas quando levado em conta apenas a matéria bariônica, é impossível explicar as estruturas formadas, assim surge também em Cosmologia a necessidade de uma matéria escura [16]. Os neutrinos, com sua abundância no universo podem exercer o papel de matéria escura, mas somente até certo ponto, pois eles não são capazes de explicar inteiramente a formação de estruturas observada no universo. Assim, tais evidências apontando para a existência de uma matéria escura impelem à busca de partículas novas, além das previstas pelo modelo padrão, tais como as previstas pela supersimetria, na possibilidade de tais partículas preencherem as lacunas existentes entre as observações e as previsões teóricas. Mas até o presente momento não foi detectada nenhuma forma de matéria escura exótica.

A falta de evidência direta de matéria escura pode sugerir que o problema não esteja com matéria que é considerada nas previsões teóricas, mas sim com as teorias utilizadas para fazer tais previsões. Esta também é uma possibilidade plausível a ser considerada e teorias com modificações na dinâmica newtoniana (MONDs - *Modified Newtonian Dynamics* na sigla em inglês) são desenvolvidas desde a década de 1980 [17]. Tais teorias introduzem modificações na Segunda Lei de Newton ou em sua Lei da Gravitação Universal. Milgrom [17] em 1982 propôs uma modificação na dinâmica, considerando que segunda lei de Newton sofre alterações para acelerações muito pequenas, que no caso representaria a dinâmica de nuvens de HI em regiões afastadas do núcleo galático. Com isso ele conseguiu reproduzir os dados experimentais de curvas de rotação que tendem a um valor constante. Mas teorias tipo MOND parecem ser ineficazes para descrever efeitos de lente gravitacional em aglomerados de galáxias [18].

Uma possibilidade alternativa que surge com os modelos de branas é indagar se o fato de o universo ter uma dimensão extra poderia contribuir de tal forma que as discrepâncias existentes até então possam ser explicadas.

3.2 Curvas de Rotação no Contexto dos Modelos de Branas

Como visto no Capítulo II, o cenário cosmológico de uma 3-brana mergulhada em um *bulk* de 5 dimensões faz com que as equações do campo gravitacional sobre a brana sejam modificadas com relação à Relatividade Geral em 4 dimensões. Usaremos esta modificação resultante da presença de uma dimensão extra com simetria $\mathbb{Z}_2$ para abordar um dos principais problemas atuais na astrofísica: as curvas de rotação de galáxias.

Vimos que as hipóteses de matéria escura e MOND podem explicar as curvas de rotação e que ainda não há evidência direta que aponte a existência de matéria escura exótica. Além disso, as teorias tipo MOND também sofrem uma série de restrições quando aplicadas para aglomerados de galáxias.

Curvas de rotação no contexto de modelos de branas já foram abordadas em alguns trabalhos, inicialmente por Mak e Harko [20] e em trabalhos posteriores ([21], [22] e [23]). Além disso, gravitação em modelos de branas também foi utilizada para explicar efeitos de lente gravitacional em aglomerados de galáxias sem necessidade de matéria escura exótica [24]. Assim como também foi utilizada em Cosmologia para explicar a formação de estruturas no universo, utilizando efeitos do *bulk* no lugar de efeitos devido à matéria escura [25]. Em todos estes trabalhos, o ponto de partida são as equações gravitacionais obtidas através da projeção das equações de Einstein no *bulk* sobre a brana, tal como calculado no Capítulo 2 por meio do formalismo de Gauss-Codazzi.

Tratemos então de resolver estas equações dinâmicas referentes à gravitação na brana (2.98) para o espaço-tempo em torno de uma galáxia espiral. Para fins de simplificação do problema, suporemos que o bojo central da galáxia, aproximadamente esférico, dará a distribuição de matéria dominante, de forma que consideraremos o espaço-tempo ao redor da galáxia como detentor de simetria esférica. Portanto, assumiremos uma métrica para o espaço-tempo do tipo

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{3.1}$$

onde as funções $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ definem a dependência da métrica com r e serão determinadas ao resolvermos a equação (2.98). Precisamos então determinar o lado direito da equação projetada na brana, analisando cada um dos termos de (2.98).

O primeiro termo diz respeito à constante cosmológica efetiva sobre a brana, que para o caso de dimensões de ordem galáticas terá efeito desprezível, portanto este termo será desconsiderado. O segundo termo também desaparece, já que queremos resolver a equação para o vácuo externo à galáxia. Consequentemente, o terceiro termo, de correção local, $\pi_{\mu\nu}$ também deve se anular, pois depende do tensor energia-momento da brana.

Resta-nos então apenas o termo $E_{\mu\nu}$ que é a correção não-local devido à dimensão extra. E como este termo possui traço nulo, a equação (2.98) adquire a seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu}. \tag{3.2}$$

Basta então resolvermos a equação acima e determinarmos a métrica do espaço-tempo. A métrica definida em (3.1) permite determinar os símbolos de Christoffel (2.65) para este espaço-tempo. Suas componentes não nulas calculadas estão listadas abaixo:

$$\left.\begin{array}{c}
\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{\nu'}{2} \\
\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda} \\
\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2} \\
\Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda} \\
\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda} \\
\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot\theta
\end{array}\right\} \tag{3.3}$$

De posse destas componentes, podemos calcular também o Tensor de Ricci, que é dado em termos dos símbolos de Christoffel

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha\nu} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\nu\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta\mu}. \tag{3.4}$$

Disso, obtemos todas as componentes do Tensor de Ricci. As componentes diagonais são as únicas não nulas

$$R^0_0 = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{\nu'}{r}\right), \tag{3.5}$$

$$R^1_1 = e^{-\lambda}\left(\frac{-\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{r}\right), \tag{3.6}$$

$$R^2_2 = e^{-\lambda}\left(\frac{e^\lambda - 1}{r^2} - \frac{\nu'}{2r} + \frac{\lambda'}{2r}\right), \tag{3.7}$$

e

$$R^3_3 = e^{-\lambda}\left(\frac{e^\lambda - 1}{r^2} + \frac{\lambda' - \nu'}{2r}\right). \tag{3.8}$$

Para o vácuo, sem efeitos de dimensões extras, estas componentes do tensor de Riemann remetem à solução de Schwarzschild, mas no caso tratado aqui tais componentes estão vinculadas com o tensor de Weyl do *bulk* através da equação (3.2).

3.2.1 Fluido Escuro

O que sabemos a respeito de $E_{\mu\nu}$ é que ele resulta da projeção do tensor de Weyl em 5 dimensões sobre a brana (2.42) e possui traço nulo. Seu valor depende da métrica global, que é indefinida. A dinâmica gravitacional em 5 dimensões não depende do tensor de Weyl, pois esta é dada pela equação de Einstein em 5 dimensões que relaciona apenas o Tensor de Ricci com a distribuição de energia T_{ab}. Já a parte do tensor de Riemann com traço nulo - que é o tensor de Weyl - não possui qualquer vínculo com o conteúdo de energia, e portanto representa o campo gravitacional livre, não-local, do *bulk*. Mas para a dinâmica gravitacional da brana, vemos que o tensor de Weyl é determinante.

Apesar de ser um termo dado pela geometria do espaço-tempo do *bulk*, podemos fazer uma analogia deste termo com uma fonte de campo gravitacional. Considerando a forma mais geral em que podemos escrever o tensor energia-momento de um fluido, em termos de uma densidade de energia ρ, uma pressão isotrópica p, uma pressão anisiotrópica $s_{\mu\nu}$ e um fluxo de energia f_μ:

$$\Pi_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu - p h_{\mu\nu} + f_{(\mu} u_{\nu)} + s_{\mu\nu}, \tag{3.9}$$

onde u_μ representa a quadrivelocidade do fluido e $h_{\mu\nu}$ a métrica relacionada à seção espacial de observadores em repouso com relação ao fluido ou, em outras palavras, o espaço ortogonal aos quadrivetores u_μ. De qualquer forma, é possível decompor o espaço-tempo da brana em termos de um campo de quadrivelocidades u_μ e de sua seção ortogonal

$$q_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu. \tag{3.10}$$

Usando esta decomposição, o tensor $E_{\mu\nu}$ pode ser representado por

$$E_{\mu\nu} = -k^4[U(u_\mu u_\nu + \frac{1}{3}h_{\mu\nu}) + P_{\mu\nu} + Q_{(\mu} u_{\nu)}], \tag{3.11}$$

onde a cosntante k é introduzida a fim de dar a dimensionalidade adequada à suas componentes. Nesta definição, temos

$$U = -k^{-4} E_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \tag{3.12}$$

que pode ser interpretado como uma densidade de energia efetiva não local sobre a brana advinda do campo gravitacional do *bulk*. Temos ainda

$$P_{\mu\nu} = -k^{-4}[h^{\alpha}_{(\mu}h^{\beta}_{\nu)} - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}]E_{\alpha\beta}, \tag{3.13}$$

como uma pressão anisiotrópica associada ao “fluido escuro”e

$$Q_{\mu} = -k^{-4}h^{\alpha}_{\mu}E_{\alpha\beta}u^{\beta}, \tag{3.14}$$

um fluxo efetivo de energia, também proveniente do campo gravitacional do *bulk*. A equação (3.11) representa bem o papel de um fluido anisiotrópico atuando como fonte do campo gravitacional na brana. Por isso ele é denominado fluido escuro, mas se trata apenas da contribuição do campo gravitacional não local do *bulk*.

Ao determinarmos os valores de U, Q_{μ} e $P_{\mu\nu}$ estamos caracterizando completamente o fluido, ou a contribuição do campo gravitacional do *bulk* sobre a brana. Mas tais parâmetros estão livres já que não impomos restrições ainda sobre o tensor de Weyl no *bulk*. Ao considerarmos, por exemplo, que a métrica na brana represente um universo homogêneo e isotrópico — métrica de Friedmann Robertson Walker [6] — isso implica que o termo anisiotrópico no fluido escuro deve ser nulo (ou pelo menos, irrelevante em escalas cosmológicas). Do contrário, quebraria a isotropia do espaço-tempo.

Para o caso a ser abordado nesta dissertação — curvas de rotação de galáxias onde desejamos determinar o espaço-tempo afastado do núcleo galático — é pertinente que este seja esfericamente simétrico, já que o problema que desejamos tratar diz respeito à dependência da velocidade tangencial de estrelas ou nuvens de gás com relação a sua distância do centro galático, mas com dependência angular irrelevante para este caso. No mesmo sentido, queremos também uma solução que não dependa do tempo, ou seja, estática. Uma consequência disso é que o fluxo de energia Q_{μ} deve ser nulo. Dada a imposição de esfericidade sobre o espaço-tempo, o fluido escuro também deve possuir tal simetria. Então, a densidade de energia do fluido escuro deve ter apenas dependência radial, $U = U(r)$, assim como a pressão anisiotrópica, que passamos a escrever como

$$P_{\mu\nu} = P(r)(r_\mu r_\nu - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}), \tag{3.15}$$

onde r_μ é um vetor radial unitário. Dada a métrica com simetria esférica definida em (3.1), isso implica

$$r_\mu = (0, e^{\frac{\lambda}{2}}, 0, 0). \tag{3.16}$$

Com estas considerações, o fluido escuro passa a ser representado por

$$E_{\mu\nu} = -k^4[U(r)(u_\mu u_\nu + \frac{1}{3}h_{\mu\nu}) + P(r)(r_\mu r_\nu - \frac{1}{3}h_{\mu\nu})]. \tag{3.17}$$

Se escolhermos uma quadrivelocidade associada a observadores estáticos no sistema de coordenadas da brana, ela será dada, levando em conta a métrica definida em (3.1), por

$$u_\mu = (e^{\frac{\nu}{2}}, 0, 0, 0). \tag{3.18}$$

Com os quadrivetores r_μ e u_μ dados nas expresssões acima podemos então determinar as componentes do fluido escuro em (3.11)

$$E_0^0 = k^4 U, \tag{3.19}$$

$$E_1^1 = -\frac{k^4}{3}(U + 2P) \tag{3.20}$$

e

$$E_2^2 = E_3^3 = -\frac{k^4}{3}(U - P). \tag{3.21}$$

Com estas componentes de $E_{\mu\nu}$ e juntamente com as componentes do tensor de Ricci determinadas em (3.5-3.8) chegamos a três equações usando (3.2)

$$e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{-\nu'\lambda'}{2}\right) = \frac{2k^4}{3}(U - P), \tag{3.22}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = k^4 U \tag{3.23}$$

e

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=\frac{k^4}{3}(U+2P), \tag{3.24}$$

onde o X' diz respeito à derivação de X com relação à coordenada radial.

Mas há ainda um vínculo adicional para as variáveis métricas, que surge da equação (3.11): ao aplicarmos a derivada covariante da brana sobre (3.11), o termo resultante do lado direito se anula, o que nos dá o seguinte vínculo:

$$D^\mu E_{\mu\nu}=0, \tag{3.25}$$

que para a métrica dada (3.1) resulta na seguinte expressão

$$\frac{1}{3}U'+\frac{2}{3}\nu' U+\frac{1}{3}\nu' P+\frac{2}{3}P'+\frac{2}{r}P=0, \tag{3.26}$$

de onde obtemos uma expressão para a derivada de $\nu(r)$:

$$\nu'=-\frac{U'+2P'}{2U+P}-\frac{6P}{r(2U+P)}. \tag{3.27}$$

Com isso, temos as variáveis métricas $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ determinadas em termos dos parâmetros do fluido escuro.

3.2.2 Velocidade de Rotação em Termos do Fluido Escuro

Dada a métrica com simetria esférica (3.1) com os parâmetros $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ vinculados ao fluido escuro através das relações (3.22), (3.23), (3.24) e (3.27) desejamos obter a velocidade de rotação de partículas de teste, que podem representar estrelas ou nuvens de hidrogênio, em termos de sua distância do centro.

Consideremos então tal partícula de teste, livre de forças orbitando a origem do sistema de coordenadas. Neste caso, sua lagrangeana será determinada pela sua energia cinética:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}u^\mu u_\mu. \tag{3.28}$$

Utilizamos a métrica do espaço-tempo (3.1) para determinar a contração de u_μ

com seu dual contravariante

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = \frac{1}{2}(-e^\nu \dot{t}^2 + e^\lambda \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2), \tag{3.29}$$

onde o ponto denota derivação com relação ao tempo próprio.

Considerando que o plano galático é definido por $\theta = 0$, as partículas descreverão seu movimento sobre este plano, com θ constante e nulo, portanto a lagrangeana se reduz a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(-e^\nu \dot{t}^2 + e^\lambda \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2), \tag{3.30}$$

que deve satisfazer a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = 0. \tag{3.31}$$

Sabendo que a lagrangeana não depende explicitamente do tempo t nem de ϕ, temos duas quantidades conservadas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -e^\nu \dot{t} = E \tag{3.32}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2\dot{\phi} = L. \tag{3.33}$$

Levando-se em conta agora que a quadrivelocidade deve satisfazer a condição $u^\mu u_\mu = -1$, ou seja:

$$-e^\nu \dot{t}^2 + e^\lambda \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = -1, \tag{3.34}$$

mas usando as expressões (3.32) e (3.33), esta equação pode ser reescrita em termos das grandezas conservadas E e L

$$-e^{\nu+\lambda}\dot{r}^2 + e^\nu\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = E^2. \tag{3.35}$$

Podemos interpretar esta equação como um termo cinético mais um termo potencial dando a energia total do sistema, onde o potencial efetivo associado será dado por:

$$V_{ef} = e^{\nu}\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \tag{3.36}$$

Se considerarmos que a partícula de teste descreve uma órbita estável e circular, teremos $\dot{r} = 0$ e a condição de órbita estável implica que ela estará sobre uma superfície equipotencial $\frac{\partial V_{ef}}{\partial r} = 0$, o que nos dá

$$\nu' e^{\nu}\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) - \frac{2L^2}{r^3}e^{\nu} = 0, \tag{3.37}$$

que ao substituirmos na equação (3.35) nos dá as seguintes expressões para as constantes de movimento:

$$E^2 = \frac{e^{\nu}}{1 - \frac{r\nu'}{2}} \tag{3.38}$$

e

$$L^2 = \frac{r^3\nu'}{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{r\nu'}{2}}\right). \tag{3.39}$$

Já a quadrivelocidade da partícula de teste terá apenas componentes na direção temporal e na direção de ϕ. Escrevendo agora o intervalo métrico como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -e^{\nu}dt^2\left[1 - e^{-\nu}r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right], \tag{3.40}$$

onde a velocidade espacial, ou tangencial da partícula é então dada por:

$$v_{tg}^2 = e^{-\nu}r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2. \tag{3.41}$$

Daí vemos que há uma dependência da velocidade tangencial com a coordenada radial através do fator $e^{-\nu}$ onde a função $\nu(r)$ é determinada em termos dos parâmetros do fluido escuro.

Reescrevendo a derivada temporal da coordenada ϕ como

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}, \tag{3.42}$$

podemos reescrever a equação (3.41) em termos de E e L, dados nas equações

(3.32) e (3.33) respectivamente:

$$v_{tg}^2 = \frac{e^{\nu} L^2}{r^2 E^2}. \tag{3.43}$$

Agora utilizando as expressões (3.38) e (3.39) para as constantes de movimento, temos finalmente a seguinte relação para a velocidade tangencial da partícula de teste em movimento circular:

$$v_{tg}^2 = \frac{r\nu'}{2}. \tag{3.44}$$

A expressão (3.27) obtida da restrição sobre o fluído escuro (3.25) dá justamente uma forma para $\nu(r)$ em termos dos parâmetros que definem o fluido:

$$v_{tg}^2 = -\frac{r}{2}\left(\frac{U' + 2P'}{2U + P} + \frac{6P}{r(2U + P)}\right). \tag{3.45}$$

Até o momento não foi feita referência à massa da galáxia, esta é obtida na integração sobre as soluções de vácuo obtidas (3.22), (3.23) e (3.24) analogamente ao que é feito na solução de Schwarzschild. Se reescrevermos a equação (3.23) como

$$-\frac{d}{dr}\left(re^{-\lambda}\right) = -1 + k^4 U r^2 \tag{3.46}$$

e efetuarmos a integração sobre a coordenada r, temos

$$-re^{-\lambda} = -r + k^4 \int U r^2 dr + C. \tag{3.47}$$

A solução de Schwarzschild é dada a menos do termo referente ao fluido escuro e a constante de integração é interpretada como a massa da fonte de simetria esférica. Aqui também assim o interpretamos, além de considerar a integral em Ur^2 como uma "massa escura". Temos então as seguintes definições:

$$C \equiv 2GM \tag{3.48}$$

e

$$GM_U \equiv k^4 \int U r^2 dr. \tag{3.49}$$

Com isso, a equação (3.47) nos dá

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{GM_U}{r}. \tag{3.50}$$

Uma expressão para a derivada de U em termos das massas definidas em (3.48) e (3.49) pode ser obtida através das soluções das equações do campo gravitacional na brana dadas em (3.22), (3.23) e (3.24). Substituindo a expressão para ν' dada por (3.27) na equação (3.24) obtemos

$$U' = -2P' - \frac{6P}{r} + (2U + P)\left(-\frac{1}{r} + -\frac{e^{\lambda}}{r}\right) + \frac{1}{3}rk^4e^{\lambda}(U + 2P)(2U + P) \tag{3.51}$$

e fazendo uso da relação (3.50) chegamos então à seguinte expressão para a derivada de U com relação a coordenada r:

$$U' = -2P' - \frac{6P}{r} - \frac{(2U + P)[2GM + GM_U + \frac{1}{3}k^4r^3(U + 2P)]}{r^2\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{GM_U}{r}\right)} \tag{3.52}$$

Por fim, esta expressão permite determinar a velocidade tangencial da partícula teste dada em (3.53) diretamente em termos de de U, P, M e M_U:

$$v_{tg}^2 = \frac{1}{2}\frac{2GM + GM_U + \frac{1}{3}k^4r^3(U + 2P)}{r\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{GM_U}{r}\right)}. \tag{3.53}$$

Sem os termos devido ao fluido escuro a velocidade tangencial decai com o inverso da distância r. Esta é a previsão convencional, advinda da solução de Schwarzchild.

Agora resta determinar os parâmetros do fluido escuro de tal forma que eles possam reproduzir as curvas de rotação observadas.

Capítulo 4

Fluido Escuro Explicando as Curvas de Rotação

No capítulo anterior obtivemos uma relação para a velocidade tangencial de partículas de teste orbitando uma galáxia espiral com movimento circular uniforme (3.53) dada em termos da massa da galáxia M, da massa escura M_U e dos parâmetros do fluido escuro (U e P), advindo do modelo de 3-brana considerado no segundo capítulo. Agora podemos indagar se esta velociade tangencial é capaz de descrever os dados experimentais.

Nos dados apresentados no capítulo anterior, mostramos como se comportam as curvas de rotação de uma maneira geral. Na figura 3.1 evidenciamos a dependência radial das curvas de rotação para galáxias com diferentes luminosidades ou, como a luminosidade está relacionada com a massa das galáxias, diferentes massas. No trabalho de Salucci e Gentile [19], é apresentada uma forma universal para as curvas de rotação, que representa bem o perfil das curvas de quaisquer das galáxias apresentadas em 3.1, bastando para isso conhecer o raio óptico (distância do centro à borda da galáxia — onde termina a emissão de luz em comprimentos de onda visíveis) e o perfil de luminosidade L das galáxias:

$$V_{URC}(x) = V_{opt}\left[\left(0,72 + 0,44\log\frac{L}{L_*}\right)\frac{1,97x^{1,22}}{(x^2+0,782)^{1,43}} + \left(0,28 - 0,44\log\frac{L}{L_*}\right)\left[1+2,25(L/L_*)^{0,4}\right] + \frac{x^2}{x^2+2,25(L/L_*)^{0,4}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.1}$$

$V_{URC}(x)$ representa a velocidade tangencial como função da distância x (distância radial ao centro da galáxia normalizada pelo seu raio óptico) e L_* denota o valor da luminosidade sobre a região do raio óptico da galáxia.

Dependendo da massa luminosa da galáxia, a discrepância entre os dados experimentais e as previsões teóricas baseadas na gravitação clássica varia. Podemos ver no gráfico em 3.1 que para certos valores de massa (valores de magnitude M_I entre -22.0 a -23.2) a discrepância se acentua apenas para regiões exteriores ao disco óptico e as curvas de rotação apresentam uma queda com o raio em regiões externas da galáxia, enquanto que para magnitudes entre -18.5 a -21.2 os dados já não coincidem mesmo para regiões internas e as velocidades de rotação só aumentam com a distância. Mas entre estes dois opostos, para um conjunto de galáxias que satisfazem certos perfis de luminosidade (como a representada com magnitude -21.6 na figura), são observadas curvas de rotação assintóticas, cujas velocidades de rotação tendem a um valor fixo para regiões além do disco óptico.

A obtenção de uma forma universal para as curvas de rotação a partir da velocidade tangencial dada em termos dos parâmetros do fluido escuro como explicitada em (3.53) mostra-se deveras complicada devido à quantidade de parâmetros a serem ajustados. Se usarmos a hipótese das curvas de rotação assintóticas como uma primeira aproximação, podemos simplificar o problema e assim ter uma ideia de como os parâmetros do fluido escuro devem se comportar para que esse modelo de branas possa explicar as curvas de rotação nesse regime.

Partindo da equação (3.44) do capítulo anterior, podemos reescrevê-la da seguinte maneira

$$v_{tg} = \sqrt{\frac{r(e^{\nu})'}{2e^{\nu}}}. \tag{4.2}$$

Logo, uma condição suficiente para que a velocidade tangencial na equação acima assuma valores constantes é que a exponencial de ν satisfaça o seguinte vínculo [22]

$$e^{\nu} = B_0 r^l, \tag{4.3}$$

onde B é uma constante arbitrária e $l = 2v_0^2$. Assim, quando substituída esta expressão na equação (4.2) pode-se imediatamente verificar que a velocidade tangencial assume o valor v_0 independentemente do valor de r.

Esta solução apresenta as curvas de rotação como constantes para qualquer região, mas ela será assumida como válida apenas para regiões além do raio óptico. Obviamente tal solução não descreve as curvas de rotação como um todo, pois para regiões internas ao raio óptico a matéria luminosa domina a dinâmica e as curvas de rotação apresentam forte variação com o raio. Esta solução, contudo, nos dará uma idéia do comportamento da métrica na brana para as regiões externas ao disco óptico e também poderemos inferir o comportamento dos parâmetros do fluido escuro nestas regiões através do vínculo posto em (4.3). Este vínculo nos dá imediatamente expressões para as derivadas de ν

$$\nu' = \frac{l}{r} \tag{4.4}$$

e

$$\nu'' = \frac{-l}{r^2}. \tag{4.5}$$

Buscamos agora uma expressão para a exponencial de λ na métrica da brana (3.1). Isto pode ser conseguido através das equações da solução de vácuo com simetria esférica obtidas no capítulo anterior: se somarmos as equações (3.22) e (3.24), subtrairmos de (3.23) e levarmos em consideração as expressões para as derivadas de ν dadas acima, obtemos

$$\frac{2}{r} = \left(2 + l + \frac{l^2}{2}\right)\frac{e^{-\lambda}}{r} - \left(2 + \frac{l}{2}\right)\lambda' e^{-\lambda}, \tag{4.6}$$

que pode também ser escrita de uma forma mais simplificada como

$$z' + \frac{az}{r} = \frac{2}{(2 + \frac{l}{2})r}, \tag{4.7}$$

onde escrevemos $z = e^{-\lambda}$ e $a = \frac{\left(2+l+\frac{l^2}{2}\right)}{(2+\frac{l}{2})}$.

Escrevendo a equação (4.7) na seguinte forma

$$\frac{d}{dr}(zr^a) = \frac{2r^{a-1}}{(2 + \frac{l}{2})}, \tag{4.8}$$

podemos integrá-la, o que resulta em

$$e^{-\lambda} = \frac{2}{(2+\frac{l}{2})a} + \frac{D}{r^a}, \tag{4.9}$$

onde D é uma constante de integração e novamente expressamos a variável z em termos de λ.

Portanto, a métrica para o espaço-tempo exterior ao disco óptico das galáxias que levará às curvas de rotação assintóticas será dada pela equação da métrica dada em (3.1) juntamente com a substituição das variáveis em ν e λ dadas nas expressões (4.3) e (4.9) respectivamente:

$$ds^2 = -(B_0 r^l)dt^2 + \left[\frac{2}{(2+\frac{l}{2})a} + \frac{D}{r^a}\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{4.10}$$

Cabe constatar aqui que os escalares obtidos através dessa métrica (R, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$) têm um bom comportamento quando o raio vai a infinito (ver Apêndice A), garantindo uma solução regular (sem divergências ou singularidades) inclusive para valores assintóticos de r ($r \to \infty$).

Agora para obtermos a forma dos parâmetros do fluido escuro levando em conta o vínculo proposto em (4.3) basta substituí-lo na equação (3.23), de onde obteremos uma expressão para a densidade de energia do fluido escuro:

$$U(r) = k^{-4}\left[\frac{D(a-1)}{r^{a+2}} + \left(1 - \frac{2}{a(2+\frac{l}{2})}\right)\frac{1}{r^2}\right]. \tag{4.11}$$

O parâmetro de pressão do fluido escuro pode ser obtido substituindo-se a derivada de ν (4.4) em (3.27) e utilizando a relação anterior (4.11) para expressar a densidade de energia escura. Isso nos levará à seguinte equação diferencial

$$P' + \frac{cP}{r} = \frac{d}{r^{a+3}} + \frac{e}{r^3}, \tag{4.12}$$

onde usamos $c = \frac{6+l}{2}$, $d = \frac{D(a-1)[a+2(1-l)]}{2k^4}$ e $e = k^{-4}(1-l)\left(1 - \frac{2}{a(2+\frac{l}{2})}\right)$.

O lado esquerdo da equação acima pode ser escrito como

$$P' + \frac{cP}{r} = \frac{1}{r^c}\frac{d}{dr}(r^c P). \tag{4.13}$$

Assim podemos integrar a equação (4.12)

$$\int d(r^c P) = \int \left(\frac{d}{r^{3+a-c}} + \frac{e}{r^{3-c}} \right) dr \tag{4.14}$$

de onde obtemos uma relação para P:

$$P(r) = -\frac{d}{(2+a-c)r^{2+a}} - \frac{e}{(2-c)r^2} + \frac{E}{r^c}, \tag{4.15}$$

onde E é uma constante de integração.

Pode-se notar que tanto U quanto P são inversamente proporcionais à distância r e ambos vão a zero quando r vai a infinito.

A determinação de $U(r)$ em (4.11) permite também obter a distribuição de "massa" do fluido escuro através da equação (3.49), obtida no capítulo anterior

$$GM_U = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left[\frac{D(a-1)}{r^a} + \left(1 - \frac{2}{a(2+\frac{l}{2})} \right) \right] dr. \tag{4.16}$$

Efetuando a integração, esta expressão mostra que a massa relacionada com o fluido escuro é crescente com o raio

$$GM_U = \left[\left(1 - \frac{2}{a(2+\frac{l}{2})} \right) r - \frac{D}{r^a} \right]_{r_{min}}^{r_{max}}. \tag{4.17}$$

Embora a "massa" do fluido escuro seja diretamente proporcional ao raio, a sua densidade cairá proporcionalmente com $1/r^2$, pois o volume associado a um determinado intervalo será proporcional ao cubo do raio. Isso está de acordo com os modelos que utilizam matéria escura para descrever as curvas de rotação. Nestes modelos o halo de matéria escura, quando tomado como esférico, apresenta uma densidade de massa que é inversamente proporcional ao quadrado do raio [26].

Cabe ressaltar novamente que tais soluções se aplicam somente para regiões exteriores ao raio óptico. De qualquer forma, como mostrado no capítulo anterior, nas regiões internas das galáxias a matéria que forma as estrelas e nuvens de gás é dominante na dinâmica gravitacional. Portanto, a contribuição do fluido escuro deve ser muito pequena quando comparada com a contribuição da matéria em escalas menores que a de uma galáxia.

O tensor $E_{\mu\nu}$, que é o próprio "fluido escuro", não está localizado exatamente sobre a brana. Pois, no Capítulo 2, apenas tomamos o limite desse tensor para o ponto em que está localizada a brana na dimensão extra. Assim, como esse termo é dado pelo tensor de Weyl em 5 dimensões (2.42) — que está relacionado à solução de ondas gravitacionais — as perturbações sobre a métrica devido a esse termo se traduzem na forma de ondas gravitacionais se propagando no *bulk* [7]. Do ponto de vista de física de partículas, o tensor $E_{\mu\nu}$ carrega informação sobre modos massivos de grávitons que estão livres no *bulk* [27] e cuja localização não está centrada sobre a brana. Mesmo assim há uma densidade de probabilidade não nula de tais grávitons estarem localizados sobre o ponto onde se encontra a brana na dimensão extra. São esses grávitons que modificam a dinâmica gravitacional da brana. Mas como possuem uma probabilidade pequena de se encontrarem sobre ela, sua influência não se faz observável para regiões muito pequenas — como da ordem do sistema solar ou de aglomerados estelares pequenos. Para dimensões da ordem de uma galáxia espiral ou maiores, a influência desses grávitons se torna mais evidente.

A massa associada aos grávitons deve-se ao fato de que, embora no *bulk* o quadrimomento dos grávitons seja um vetor tipo luz, quando projetado sobre a brana o quadrimomento será tipo tempo. Ou seja, para a variedade do *bulk*, temos:

$$p^a p_a = 0, \tag{4.18}$$

que representam os grávitons deslocando-se à velocidade da luz no *bulk*.

Mas quando projetamos o quadrimomento sobre a brana, este poderá ser tipo tempo, já que a sua componente ao longo da dimensão extra é suprimida, portanto temos:

$$p^\mu p_\mu = -m^2, \tag{4.19}$$

onde m será maior ou igual a zero, dependendo da trajetória dos grávitons no *bulk*. Por isso, no espaço-tempo da brana, os grávitons têm uma massa associada.

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho foi possível obter equações que descrevem a interação gravitacional na brana e vimos que elas diferem das equações originais da Relatividade Geral. Estas modificações se devem à presença de termos adicionais, dependentes tanto do conteúdo de energia da brana quanto da geometria do *bulk*. Para chegar a esse resultado, o formalismo de Gauss-Codazzi se mostrou muito útil, assim como as Condições de Junção de Israel.

O principal resultado deste trabalho foi mostrar que é possivel abordar o problema das curvas de rotação de galáxias através de modelos de branas. As correções advindas da dimensão extra puderam ser expressas na forma de um tensor que representa um fluido, que nada mais contém além de modificações na geometria da brana. Tal fluido, denominado aqui fluido escuro, pode simular muito bem o efeito da matéria escura sobre as galáxias (pelo menos para o regime assintótico especificado no capítulo anterior).

A hipótese de uma matéria que não interage com a luz e que explicaria as discrepâncias entre os dados experimentais e as previsões teóricas já foi amplamente abordada ao longo das últimas décadas num grande número de trabalhos. Atualmente há vários experimentos que buscam por evidência direta de matéria escura mas apesar de todas as buscas por partículas exóticas nada foi detectado até hoje. Assim, a falta de evidências experimentais de matéria escura nos compele à busca por hipóteses alternativas, tais como tentativas de modificação na dinâmica gravitacional. O fluido escuro se enquadra nessa possibilidade, já que não é propriamente uma matéria exótica, estando apenas relacionado com os modos gravitacionais massivos não completamente localizados sobre a brana.

A hipótese de existência de dimensões extras é plausível dada sua forte motivação por parte de teorias unificadoras. Assim a busca por consequências físicas da existência de dimensões adicionais é relevante na física teórica. Da mesma forma que é importante a abordagem de problemas em aberto na física contemporânea por meio desses modelos alternativos para descrever o universo, tal como feito nesta dissertação.

Obviamente, partimos de uma hipótese simplificada para o problema das curvas de rotação, supondo que essas curvas têm uma forma assintótica. Como visto, as curvas de rotação de galáxias espirais são bem mais complexas, mas isso não invalida nossa análise. Muitos trabalhos que utilizam matéria escura ou gravitação modificada também partem deste modelo simplificado para as curvas de rotação. No caso de nossa abordagem, tendo como base os desenvolvimentos apresentados nessa dissertação, podemos buscar uma dependência radial para os parâmetros de tal forma que estes se encaixem melhor na forma universal para as curvas de rotação expressa em (4.1), permitindo assim, dar um passo a frente em busca de uma descrição mais realística para o fenômeno.

Finalmente, podemos ainda estudar as condições de estabilidade para os parâmetros do fluido através de uma análise via sistemas dinâmicos. Esta análise encontra-se em andamento e promete resultados.

Apêndice A

Invariantes: Comportamento assintótico ($r \to \infty$)

A métrica define completamente as propriedades de um espaço-tempo. Com ela é possível calcular o tensor de Riemann da variedade. Mas se desejarmos saber as propriedades do espaço-tempo, é mais adequado analisar os escalares construidos através dos tensores métrico e de curvatura, pois eles são quantidades invariantes e não dependem da escolha do sistema de coordenadas.

Como desejamos descrever o espaço-tempo para regiões assintóticas de r, é conveniente analisarmos o comportamento dos escalares construídos da métrica (4.10) nesse limite, para garantirmos que a métrica obtida não contenha singularidades que invalidem nossa análise. Utilizamos o programa *Wolfram Mathematica* para calcular o tensor de Riemann e os escalares relacionados:

— Escalar de Curvatura R, construído com a contração dos índices no tensor de Ricci:

$$R = \frac{1}{20r^2}\left[\frac{90a^2D^2r^{-a}}{3aD+2r^a} - \frac{410+84r^{1-l}}{7a} + 5aD \left(4r^{-a} + r^{1-a-l} + \frac{72}{(4+l)(3aD+2r^a)}\right) + 5\left(8 - Dr^{-a-l}\left(3r+22r^l\right)\right)\right] \quad (A.1)$$

Se tomarmos agora o limite para $r \to \infty$, como a e l são consteantes positivas, vemos que ele converge:

$$\lim_{r\to\infty} R = 0 \tag{A.2}$$

— Escalar construído com o quadrático do tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$):

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{1}{19600a^2r^{2(2+a)}}\Big[\big(55125a^4D^2+91156r^{2a}+2450a^3D\left(-47D+16r^a\right) \\ -280ar^a\left(-1193D+410r^a\right)+35a^2\left(8855D^2-7968Dr^a+1120r^{2a}\right)\big)\Big] \tag{A.3}$$

Tomando o limite para $r \to \infty$, obtemos:

$$\lim_{r\to\infty} R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 0 \tag{A.4}$$

— Escalar de Kretschmann (quadrático com o tensor de Riemann):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{9800a^2r^{2(2+a)}}\Big[2450a^3D^2+25725a^4D^2+52356r^{2a}- \\ 280ar^a\left(-673D+150r^a\right)+245a^2\left(705D^2-312Dr^a+160r^{2a}\right)\Big] \tag{A.5}$$

No limite para $r \to \infty$, obtemos:

$$\lim_{r\to\infty} R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \tag{A.6}$$

Portanto, vemos que os escalares advindos da métrica (4.10) convergem para valores assintóticos de r.

Bibliografia

[1] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik* (Sitzungsber. Preuss Akad. (Wiss. Berlin Math. Phys. **K 1** 966, 1921).

[2] O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie* (Zeitschrift für Physik **A 37 (12)** 895, 1926).

[3] P. Horava e E. Witten, *Heterotic and Type I String Dynamics from Eleven Dimensions* (Nucl. Phys. **B460**, 506, 1996).

[4] L. Randall e R. Sundrum, *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension* (Phys. Rev. Lett. **83**, 3370, 1999).

[5] L. Randall e R. Sundrum, *An Alternative to Compactification* (Phys. Rev. Lett. **83**, 4690, 1999).

[6] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1983).

[7] T. Shiromizu, K. Maeda e M. Sasaki, *The Einstein Equations on the 3-Brane World* (Phys. Rev. **D 62**, 043523, 2000).

[8] W. Israel, *Singular Hypersurfaces and Thin Shells in General Relativity* (Nuovo Cim. **44B**, 1, 1966).

[9] J. R. Oppenheimer e H. Snyder, *On Continued Gravitational Contraction* (Phys. Rev. **56**, 455, 1939).

[10] P. MacFadden, *A Signature of Higher Dimensions at the Cosmic Singularity* (PhD Thesis, University of Cambridge, 2006)[arXiv:hep-th/0612008v2].

[11] R. H. Miller, K. H. Prendergast, e W. J. Quirk, *Numerical Experiments in Spiral Strucure*, (Astroph. J. **161**, 903-16, 1970)

[12] J. P. Ostriker e P. J. E. Peebles, *A numerical study of flattened galaxies: or can cold galaxies survive* (Astroph. J. **193**, L1-L4, 1973).

[13] Bosma, A . *The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types*, (PhD dissertation, The University of Groningen, 1978)

[14] T. S. Van Albada and R. Sancisi, *Dark matter in spiral galaxies.* (Phil. Trans. R. Sac. Land. **A 320**, 447-464, 1986)

[15] F. Zwicky, *Der Rotverschiebung von extragalaktischen Neblen.* (Act. Helv. Phys. **6**, 110-127, 1933)

[16] L. Bergström, *Non-baryonic dark matter: observational evidence and detection methods.* (Rep. Prog. Phys. **63**, 793, 2000)

[17] M. Milgrom, *A modification of Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden matter hypothesis.* (Astrophys. J. **270**, 365 (1983))

[18] R. Gravazzi, *Constraints on MOND from the lensing cluster MS2137-23.* (New Astronomy Reviews **46**, 783 (2002))

[19] P. Salucci and G. Gentile, *Comment on Scalar-tensor gravity coupled to a global monopole and flat rotation curves.* (Phys. Rev. **D 73**, 128501 (2006))

[20] M. K. Mak and T. Harko, *Can the galactic rotation curve be explained in brane world models?.* (Phys. Rev. **D 70**, 024010 (2004))

[21] C. G. Böhmer and T. Harko, *Galactic dark matter as a bulk effect on the brane.* (Class. Quantum Grav. **24** 3191 (2007))

[22] F. Rahaman, M. Kalam, A. DeBenedictis, A. A. Usmani e S. Ray, *Galactic rotation curves and brane world models.* (Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **389**, 27-33 (2008))

[23] K. K. Nandi, A. I. Filippov, F. Rahaman, Saibal Ray, A. A. Usmani, M. Kalam e A. DeBenedictis, *Features of galactic halo in a brane world model and observational constraints.* (Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **399**, 2079-2087 (2009))

[24] T. Harko e K. S. Cheng, *Galactic metric, dark radiation, dark pressure and gravitational lensing in brane world models.* (The Astrophysical Journal **636**, 8-20 (2006))

[25] S. Pal, *Structure formation on the brane: A mimicry.* (Phys. Rev. **D 74**, 024005 (2006))

[26] R. H. Sandres, *The Dark Matter Problem.* (Cambridge University Press, New York, (2010))

[27] R. Maartens e K. Koyama, *Brane-world gravity.* (Living Rev. Relativity **13**, (2010))