



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# Sobre a existência de solução para equações

**Pedro Alvaro da Silva Junior**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador  
**Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva**

**2013**

111      Silva Junior, Pedro Alvaro  
X111x      Sobre a existência de solução para equações/ Pedro Alvaro da  
Silva Junior- Rio Claro: [s.n.], 2013.  
55 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientador: Ricardo Parreira da Silva

1. Análise. 2. Geometria. 3. Topologia. 4. Métodos iterativos.  
I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Pedro Alvaro da Silva Junior  
SOBRE A EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA EQUAÇÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva  
Orientador

Prof. Dra. Suzete Maria Silva Afonso  
IGCE - UNESP

Prof. Dra. Vera Lucia Carbone  
Departamento de Matemática - UFSCar

**Rio Claro, 07 de Agosto de 2013.**

*Aos meus pais,  
Pedro e Elza.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS, por ter me dado esta oportunidade. A minha família e a minha namorada por ter me apoiado em todos os momentos, desde os mais alegres até os mais delicados, em especial os meus pais. Gostaria também de deixar meu agradecimento a todos os professores que fizeram parte deste trabalho e me ajudaram, em especial ao professor Dr. Ricardo Parreira da Silva pela orientação e paciência.

Agradeço também a todos os meus colegas de sala, com quem tive a oportunidade de conviver durante um bom período e com quem aprendi a dividir todos os tipos de sentimentos, tais como: alegria, esperança, sonhos, decepção, entre outros. E que a distância entre nós não seja suficiente para apagar uma amizade tão boa que foi formada, e que possamos sempre estar em contato uns com os outros.

*"O único lugar onde o sucesso vem antes  
do trabalho é no dicionário."  
Albert Einstein*

# Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar algumas equações e funções para serem trabalhadas com alunos do ensino médio. Nos dois primeiros capítulos serão apresentadas noções básicas de topologia, tais como: métrica, espaços métricos, sequências de Cauchy, espaços métricos completos. Em seguida, usando estas noções, faremos um estudo sistemático sobre o Teorema do Ponto Fixo de Banach, aplicando-o em solução de equações numéricas e na demonstração do Método de Newton para zeros de funções.

**Palavras-chave:** Análise, Geometria, Topologia, Métodos iterativos.

# Abstract

This paper aims to present some equations and functions to be worked with High School students. The first two chapters will present basics of topology, such as: metric, metric spaces, Cauchy sequences and complete metric spaces. Then, using these notions, we will make a systematic study of Banach's Fixed Point Theorem, applying it to solve numerical equations and in the demonstration of Newton's Method for zeros of functions.

**Keywords:** Analysis, Geometry, Topology, Iterative methods.

# Lista de Figuras

2.1	Métricas $d, d'$ e $d''$ em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	22
4.1	Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$ e $y = x$ . . . . .	37
4.2	Gráfico da função $f(x) = e^{-x}$ e $y = x$ . . . . .	38
4.3	Gráfico da função $f(x) = 0,75 \operatorname{sen}(x) + 1$ e $y = x$ . . . . .	40
4.4	Gráfico da função $f(x) = \operatorname{arctg}(x) - 2$ e $y = x$ . . . . .	42
4.5	Gráfico da função $f(x) = -\ln(1 + e^x)$ e $y = x$ . . . . .	43
4.6	Gráfico da função $f(x) = \cos(\operatorname{sen}(x))$ e $y = x$ . . . . .	44
4.7	Gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x))$ e $y = x$ . . . . .	45
4.8	Interpretação geométrica do Método de Newton. . . . .	49
4.9	Interpretação geométrica do Teorema do Valor Intermediário. . . . .	52
4.10	Gráfico de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ . . . . .	52
4.11	Gráfico de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 2$ . . . . .	53

# Lista de Tabelas

4.1	Aproximações do ponto fixo de $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$ . . . . .	38
4.2	Aproximações do ponto fixo de $f(x) = e^{-x}$ . . . . .	39
4.3	Aproximações do ponto fixo de $f(x) = 0,75 \operatorname{sen}(x) + 1$ . . . . .	41
4.4	Aproximações do ponto fixo de $f(x) = \operatorname{arctg}(x) - 2$ . . . . .	42
4.5	Aproximações do ponto fixo de $f(x) = -\ln(1 + e^x)$ . . . . .	43
4.6	Aproximações do ponto fixo de $f(x) = \cos(\operatorname{sen}(x))$ . . . . .	45
4.7	Aproximações do ponto fixo de $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x))$ . . . . .	46
4.8	Aproximações do ponto fixo de $(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{\operatorname{sen} y}{4}, \frac{\operatorname{sen} z}{3} + 1, \frac{\operatorname{sen} x}{5} + 2\right)$ . . . . .	47
4.9	Aproximações da raiz de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ . . . . .	53
4.10	Aproximações das raízes de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 2$ . . . . .	54

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Espaços Métricos</b>	<b>21</b>
2.1	Definição de espaço métrico e exemplos . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Espaços Métricos Completos</b>	<b>29</b>
3.1	Sequências de Cauchy . . . . .	29
3.2	Espaços Completos . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Método das aproximações sucessivas</b>	<b>33</b>
4.1	Teorema do Ponto Fixo de Banach . . . . .	33
4.2	Resolução de equações . . . . .	37
4.3	O Método de Newton para zeros de funções . . . . .	48
	<b>Referências</b>	<b>55</b>

# 1 Introdução

Neste trabalho apresentaremos elementos de topologia que serão usados como ferramenta para mostrar a existência da solução de algumas equações e funções, apresentando exemplos destinados ao trabalho de professores com alunos do ensino médio.

Nos primeiros capítulos, trabalharemos com algumas noções básicas de topologia, como definição de métrica, espaços métricos, sequências de Cauchy, espaços completos, sendo todos ilustrados com exemplos.

Em seguida, demonstraremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que será usado para a resolução de algumas equações numéricas e na demonstração do Método de Newton para zeros de funções.

Por fim, apresentaremos exemplos de equações e funções para serem trabalhadas com alunos do ensino médio.

## 2 Espaços Métricos

### 2.1 Definição de espaço métrico e exemplos

**Definição 2.1.** Uma distância ou métrica em um conjunto  $M$  é uma função  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada par ordenado  $(x, y) \in M \times M$  um número real  $d(x, y)$ , chamado a distância de  $x$  a  $y$ , satisfazendo:

- $d_1)$   $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- $d_2)$   $d(x, y) = d(y, x)$ ,  $\forall x, y \in M$ ;
- $d_3)$   $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in M$  (desigualdade triangular).

Um **espaço métrico** é um par  $(M, d)$ , onde  $M$  é um conjunto e  $d$  é uma métrica em  $M$ . Quando não houver risco de confusão, omitiremos a métrica e nos referiremos apenas ao "espaço métrico  $M$ ".

**Observação 2.1.** Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos etc. Porém, serão sempre chamados de pontos de  $M$ .

**Exemplo 2.1.** A métrica zero-um. Considere  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $d(x, x) = 0$  e  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$ . Um espaço métrico obtido com esta métrica é muito útil para contra-exemplos. Vamos verificar que  $d$  é, de fato, uma métrica:

- $d_1)$  Pela própria definição da métrica zero-um, temos:  
 $d(x, x) = 0$  e  $d(x, y) = 1$ ,  $\forall x, y \in M$ , logo  $d(x, y) \geq 0$ ,  $\forall x, y \in M$ .
- $d_2)$  Para  $x \neq y$ , temos:  $d(x, y) = 1 = d(y, x)$ ,  $\forall x, y \in M$ .
- $d_3)$  Para provarmos a terceira propriedade de métrica, vamos dividir em quatro casos:  
 $d(x, y) + d(y, z) = 1 + 1 = 2 > 1 = d(x, z)$  se  $x \neq y \neq z$ ,  
 $d(x, y) + d(y, z) = 0 + 1 = 1 = d(x, z)$  se  $x = y, y \neq z$  e  $x \neq z$ ,  
 $d(x, y) + d(y, z) = 1 + 0 = 1 = d(x, z)$  se  $x \neq y, y = z$  e  $x \neq z$ ,  
 $d(x, y) + d(y, z) = 0 + 0 = 0 = d(x, z)$  se  $x = y = z$ .

Em todos os casos, temos:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in M$ .

Portanto,  $d$  é uma métrica em  $M$ .

**Exemplo 2.2.** Vejamos agora o exemplo mais importante de espaço métrico: a *reta real*, ou seja, o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais. Seja  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d(x, y) = |x - y|$ , então  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{R}$ . Podemos dizer também que  $d$  é a distância entre dois pontos  $x, y \in \mathbb{R}$ .

d<sub>1</sub>) Se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) = |x - y| > 0$ , pela propriedade do valor absoluto. Se  $x = y$ , então  $d(x, y) = d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$ .

d<sub>2</sub>)  $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ , pois  $|x - y| = |y - x|$ .

d<sub>3</sub>) Pela propriedade de desigualdade de módulos, sabemos que: se  $a, b \in \mathbb{R}$ , então  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , portanto  $|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ .

Daí, obtemos  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Portanto,  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $(\mathbb{R}, d)$  é um espaço métrico. Esta métrica é conhecida como métrica usual da reta.

**Exemplo 2.3.** Considere  $M = \mathbb{R}^n$ . Os pontos de  $\mathbb{R}^n$  são as listas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  com  $x_i \in \mathbb{R}$ . Em seguida, apresentaremos três maneiras de definir uma métrica em  $M$ . Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Temos:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2};$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;$$

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

**Exemplo 2.4.** Consideremos o plano  $\mathbb{R}^2$ . Vamos definir um conjunto  $B$  de pontos deste plano da seguinte maneira:  $B[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}^2; d(x, 0) \leq 1\}$ . Os conjuntos  $B[0, 1]$  relativamente às métricas  $d, d'$  e  $d''$ , possuem respectivamente as formas das figuras abaixo.

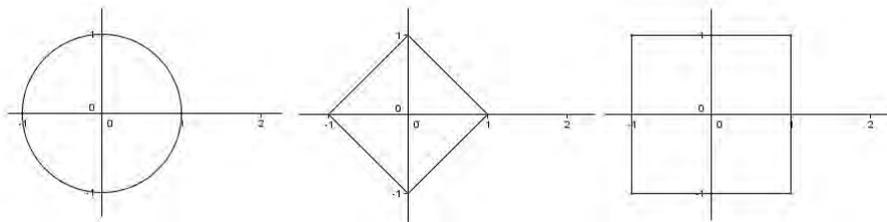


Figura 2.1: Métricas  $d, d'$  e  $d''$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Com efeito, para a métrica  $d$ , temos  $d(x, 0) \leq 1 \Rightarrow \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} \leq 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ , ou seja, a expressão de uma circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $r \leq 1$ .

Para a métrica  $d'$ , temos que  $|x_1 - 0| + |x_2 - 0| \leq 1 \Rightarrow |x_1| + |x_2| \leq 1$ , ou seja, um quadrado de diagonais paralelas aos eixos coordenados de comprimento  $\leq 2$ .

Para a métrica  $d''$ , temos que  $\max\{|x_1 - 0|, |x_2 - 0|\} \leq 1 \Rightarrow \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1$ . Então, segue que  $|x_1| \leq 1$  e  $|x_2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x_1 \leq 1$  e  $-1 \leq x_2 \leq 1$ .

Note que a figura definida por essa expressão seria um quadrado de lado  $\leq 2$ .

**Proposição 2.1.** *Sejam  $d, d'$  e  $d''$  definidas no exemplo 2.3. Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , temos:*

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y).$$

*Demonstração.* Considere  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Então,

$$d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = |x_k - y_k|$$

para algum  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Como

$$|x_k - y_k| = \sqrt{(x_k - y_k)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_k - y_k)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = d(x, y),$$

segue que

$$d''(x, y) \leq d(x, y).$$

Vamos mostrar agora que  $d(x, y) \leq d'(x, y)$ .

Note que,

$$[d(x, y)]^2 = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2,$$

enquanto,

$$\begin{aligned} [d'(x, y)]^2 &= [|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|]^2 \\ &= |x_1 - y_1|^2 + 2 \cdot |x_1 - y_1| \cdot \left[ \sum_{i=2}^n |x_i - y_i| \right] + \left[ \sum_{i=2}^n |x_i - y_i| \right]^2 \\ &= |x_1 - y_1|^2 + \left[ \sum_{i=2}^n |x_i - y_i| \right]^2 + 2 \cdot |x_1 - y_1| \cdot \left[ \sum_{i=2}^n |x_i - y_i| \right]. \end{aligned}$$

Desenvolvendo

$$\begin{aligned} &\left[ \sum_{i=2}^n |x_i - y_i| \right]^2 \\ &\left[ \sum_{i=2}^n |x_i - y_i| \right]^2 = [|x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|]^2 \\ &= |x_2 - y_2|^2 + 2 \cdot |x_2 - y_2| \cdot \left[ \sum_{i=3}^n |x_i - y_i| \right] + \left[ \sum_{i=3}^n |x_i - y_i| \right]^2. \end{aligned}$$

Repetindo o processo, teremos

$$[d'(x, y)]^2 = |x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2 + \Omega$$

onde  $\Omega \geq 0$ . Desta forma,

$$[d'(x, y)]^2 = [d(x, y)]^2 + \Omega$$

e, portanto,

$$[d(x, y)]^2 \leq [d'(x, y)]^2,$$

que implica em

$$d(x, y) \leq d'(x, y)$$

uma vez que  $d, d'$  são não negativos.

Resta provar que  $d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y)$ .

Observe que

$$d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = |x_k - y_k|,$$

para algum  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Então  $|x_i - y_i| \leq |x_k - y_k|$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| \\ &\leq |x_k - y_k| + |x_k - y_k| + \dots + |x_k - y_k| = n \cdot |x_k - y_k| \\ &= n \cdot d''(x, y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y).$$

□

**Exemplo 2.5.** Seja  $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dados  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , vamos mostrar que

$$d(x, y) = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]}$$

é uma métrica em  $\mathbb{R}^n$ .

d<sub>1</sub>) Se  $x \neq y$  temos que  $(x_i - y_i)^2 > 0$ , para algum  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Então,

$$d(x, y) = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]} > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Se  $x = y$  temos que  $(x_i - y_i)^2 = (x_i - x_i)^2 = 0^2 = 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Então,

$$d(x, y) = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - x_i)^2 \right]} = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n (0)^2 \right]} = 0.$$

d<sub>2</sub>) Sabemos que, para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ , vale  $(a - b)^2 = (b - a)^2$ . Então,

$$d(x, y) = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]} = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \right]} = d(y, x).$$

d<sub>3</sub>) Vamos provar que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}.$$

Considere  $c_i = x_i - y_i$  e  $d_i = y_i - z_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , então podemos escrever a desigualdade acima como,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i + d_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (d_i)^2}.$$

Note que

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (c_i - \lambda d_i)^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^n c_i d_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^n d_i^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$2\lambda \sum_{i=1}^n c_i d_i \leq \sum_{i=1}^n c_i^2 + \lambda^2 \sum_{i=1}^n d_i^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Tomando

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n c_i d_i}{\sum_{i=1}^n d_i^2}, (d \neq 0),$$

temos

$$\left[ \sum_{i=1}^n c_i d_i \right]^2 \leq \left[ \sum_{i=1}^n c_i^2 \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^n d_i^2 \right] \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n c_i d_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (c_i + d_i)^2 &= \sum_{i=1}^n c_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n c_i d_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n c_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2} \right]^2 \\
\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i + d_i)^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (d_i)^2}
\end{aligned}$$

Então, concluímos que a desigualdade  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  é válida.

Portanto,  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{R}^n$ , logo  $(\mathbb{R}^n, d)$  é um espaço métrico. Esta métrica é conhecida como Métrica Euclidiana. Ela nos fornece a distância usual da Geometria Euclidiana.

**Exemplo 2.6.** Seja  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $d(x, y) = (x - y)^2$ . Vamos mostrar que  $d$  não é uma métrica em  $\mathbb{R}$ .

De fato,  $d$  satisfaz as duas primeiras propriedades de métrica, mas não  $(d_3)$ . Basta observar o contra-exemplo:

$$d(1, 4) = 9$$

$$d(1, 3) = 4$$

$$d(3, 4) = 1$$

$$\text{E assim } d(1, 4) > d(1, 3) + d(3, 4).$$

Logo,  $d$  não satisfaz todas as propriedades de métrica. Portanto,  $d$  não é uma métrica em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.7.** *Espaços vetoriais normados.* Seja  $E$  um espaço vetorial real. Uma norma em  $E$  é uma função real  $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada vetor  $x \in E$  o número real  $\|x\|$ , chamado a norma de  $x$ , de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer  $x, y \in E$  e  $\lambda$  escalar:

$$n_1) \|x\| \geq 0 \text{ e } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$n_2) \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|;$$

$$n_3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Todo espaço vetorial normado  $(E, \|\cdot\|)$  pode se tornar um espaço métrico. Basta definirmos uma métrica da seguinte forma:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Esta métrica é dita **proveniente da norma**. Verifiquemos que, de fato,  $\|x - y\|$  é uma métrica:

$$d_1) \text{ Se } x \neq y, \text{ então } x - y \neq 0, \text{ logo } \|x - y\| \neq 0 \text{ e, portanto, } d(x, y) > 0.$$

$$\text{Se } x = y, \text{ então } d(x, y) = d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = \|0 \cdot 0\| = |0| \cdot \|0\| = 0.$$

$$d_2) d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x), \\ \forall x, y \in E.$$

d<sub>3</sub>)  $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$ .

**Exemplo 2.8.** Seja  $E$  um espaço vetorial real. Um produto interno em  $E$  é uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par ordenado de vetores  $(x, y) \in E \times E$  um número real  $\langle x, y \rangle$ , chamado o produto interno de  $x$  por  $y$ , de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para  $x, y, z \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  arbitrários:

p<sub>1</sub>)  $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$ ;

p<sub>2</sub>)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ ;

p<sub>3</sub>)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ;

p<sub>4</sub>) Se  $x \neq 0$ , então  $\langle x, x \rangle > 0$ .

Dessas propriedades, decorrem:

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle;$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle;$$

$$\langle 0, x \rangle = 0.$$

A partir de um produto interno, podemos definir uma norma em um espaço vetorial  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Basta definir:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Neste caso, dizemos que a **norma provém de um produto interno**.

De fato,

n<sub>1</sub>) Se  $x \neq 0$ , então  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} > 0$  por (p<sub>4</sub>).

n<sub>2</sub>)  $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

Para provar (n<sub>3</sub>), antes precisamos do seguinte resultado:

**Proposição 2.2.** (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*) Seja  $E$  um espaço vetorial real, para quaisquer dois vetores  $x, y \in E$ , tem-se:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

*Demonstração.* Se  $x = 0$ , então  $|\langle x, y \rangle| = 0$  e  $\|x\| = 0$ , o que torna óbvia a desigualdade.

Agora, vamos supor  $x \neq 0$ . Então,  $\|x\| > 0$  e podemos definir o seguinte número

$$\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}.$$

Desta forma, se tomarmos o elemento  $z = y - \lambda x$ , teremos

$$\langle z, x \rangle = \langle y, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} \langle x, x \rangle = \langle y, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} \cdot \|x\|^2 = 0.$$

Sendo  $z = y - \lambda x$ , temos  $y = z + \lambda x$  e

$$\langle y, y \rangle = \langle z, z \rangle + \lambda \langle x, z \rangle + \lambda \langle z, x \rangle + \lambda^2 \langle x, x \rangle,$$

isto é,

$$\|y\|^2 = \|z\|^2 + \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, z \rangle = \|z\|^2 + \lambda^2\|x\|^2$$

uma vez que  $\langle x, z \rangle = \langle z, x \rangle = 0$ .

Daí,

$$\|y\|^2 = \|z\|^2 + \lambda^2\|x\|^2 \Rightarrow \|y\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2.$$

Mas

$$\lambda^2\|x\|^2 = \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} \right)^2 \cdot \|x\|^2 = \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|} \right)^2.$$

Então,

$$\|y\|^2 \geq \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|} \right)^2,$$

isto é,

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

e extraindo a raiz quadrada dos dois membros, temos

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

□

Voltando a prova de (n<sub>3</sub>):

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

# 3 Espaços Métricos Completos

## 3.1 Sequências de Cauchy

Dada uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  num espaço métrico  $M$ , mostrar sua convergência consiste em exibir  $x = \lim x_n$ . No entanto, estamos interessados apenas em saber se ele existe, não sendo necessário conhecer tal limite. Para isso, temos alguns testes de convergência. O mais conhecido é o critério de Cauchy, segundo o qual uma sequência de números reais  $x_n$  é convergente se, e somente se,  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} |x_m - x_n| = 0$ .

Neste capítulo, serão estudados os espaços métricos  $M$  onde o critério de Cauchy se aplica, ou seja, uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $M$  converge se, e somente se,  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$ .

**Definição 3.1.** Diz-se que, uma sequência  $(x_n)$ , num espaço métrico  $M$ , é de Cauchy quando, para todo  $\epsilon > 0$ , é possível obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$ .

**Proposição 3.1.** Toda sequência convergente é de Cauchy.

*Demonstração.* Se  $\lim x_n = a$  no espaço métrico  $M$ , então dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$ . Se tomarmos  $m, n > n_0$ , teremos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo,  $x_n$  é de Cauchy. □

**Observação 3.1.** Nem toda sequência de Cauchy é convergente, como veremos no exemplo a seguir.

**Exemplo 3.1.** Dada uma sequência  $x_n$  de números racionais convergindo para um número irracional (por exemplo  $x_1 = 1, x_2 = 1,7, x_3 = 1,73, x_4 = 1,732\dots$  com  $\lim x_n = \sqrt{3}$ ), sendo convergente em  $\mathbb{R}$  segue da proposição 3.1 que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy no espaço métrico  $\mathbb{Q}$  dos números racionais. Mas evidentemente  $(x_n)$  não é convergente em  $\mathbb{Q}$ .

**Proposição 3.2.** Toda sequência de Cauchy é limitada.

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy no espaço métrico  $M$ . Dado  $\epsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$ .

Logo o conjunto  $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$  é limitado e tem diâmetro menor que ou igual a 1. Segue que

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$$

é limitado. □

**Observação 3.2.** Nem toda sequência limitada é de Cauchy, como veremos no exemplo a seguir.

**Exemplo 3.2.** O exemplo mais simples para mostrar que a recíproca da proposição anterior é falsa, é o seguinte: embora limitada, a sequência com termos  $(1, 0, 1, 0, \dots)$  não é de Cauchy, pois  $d(x_n, x_{n+1}) = 1$ , para todo  $n$ .

**Proposição 3.3.** *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente e tem o mesmo limite que a subsequência.*

*Demonstração.* Sejam  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy no espaço métrico  $M$  e  $(x_{n_k})$  uma subsequência que converge para o ponto  $a \in M$ .

Afirmamos que  $\lim x_n = a$ , pois dado  $\epsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k > p \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}$ . Existe também  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ .

Tomemos  $n_0 = \max\{p, q\}$ . Para todo  $n > n_0$  existe  $n_k > n_0$  e então,

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo,  $\lim x_n = a$ . □

**Exemplo 3.3.** Se uma sequência possui duas subsequências que convergem para limites distintos, então a sequência não é de Cauchy.

Em particular, uma sequência que assume um número finito de valores distintos só pode ser de Cauchy quando, a partir de um certo índice, ela é constante.

## 3.2 Espaços Completos

**Definição 3.2.** *Diz-se que, um espaço métrico  $M$  é completo quando toda sequência de Cauchy em  $M$  é convergente.*

O exemplo mais importante de espaço métrico completo é a reta real. A proposição que se segue é devida a Cauchy.

**Proposição 3.4.** *O conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais, com a métrica usual  $d(x, y) = |x - y|$ , é um espaço métrico completo.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy de números reais. Para cada  $n$ , ponhamos  $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$  e  $a_n = \inf X_n$ . Como  $x_n$  é limitada e  $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$ , obtemos assim uma sequência crescente limitada de números reais  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$ . Seja  $a = \lim a_n$ . Afirmamos que  $a = \lim x_n$ . Pela proposição 3.3, basta mostrar que existe uma subsequência  $(x_{n_k})$  convergindo para  $a$ . Para isso, é suficiente provar que todo intervalo  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ , contém pontos  $x_n$  com  $n$  suficientemente grande. Ora, dado qualquer  $n_1$ , existe  $m > n_1$  com  $a - \epsilon < a_m < a + \epsilon$ . Sendo  $a_m = \inf X_m$ ,  $a_m < a + \epsilon$  implica que existe  $n > m$  (e, portanto,  $n > n_1$ ) tal que  $a_m \leq x_n < a + \epsilon$ , isto é,  $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Proposição 3.5.** *Sejam  $(M_1, d_1), \dots, (M_k, d_k)$  espaços métricos. O produto cartesiano  $M = M_1 \times \dots \times M_k$ , munido da métrica*

$$d(x, y) = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^k d_i(x_i, y_i)^2 \right]},$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in M$ , é um espaço métrico completo se, e somente se, cada um dos fatores  $M_1, \dots, M_k$  é um espaço métrico completo.

*Demonstração.* Se cada  $M_i$  é completo, dada uma sequência de Cauchy  $(x_n)$  em  $M$ , cada uma das sequências de coordenadas  $(x_{ni})_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy em  $M_i$  e, portanto, converge em  $M_i$ . Segue-se que  $(x_n)$  converge em  $M$  e, portanto,  $M$  é completo. Reciprocamente, se um dos fatores (digamos,  $M_1$  para simplificar a escrita) não fosse completo, existiria uma sequência de Cauchy  $(y_n)$  não convergente em  $M_1$ . Fixemos arbitrariamente pontos  $a_2 \in M_2, \dots, a_k \in M_k$ . A sequência de pontos  $x_n = (y_n, a_2, \dots, a_k) \in M$  seria de Cauchy, pois  $d(x_m, x_n) = d_1(y_m, y_n)$ , e não convergiria em  $M$ . Logo,  $M$  não seria completo.  $\square$

**Corolário 3.1.** *O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é completo.*

# 4 Método das aproximações sucessivas

Suponhamos que se deseja resolver uma equação do tipo  $f(x) = b$ , onde  $f$  é contínua.

O método das aproximações sucessivas realiza-se da seguinte maneira. Introduzimos uma nova função  $\varphi(x) = f(x) + x - b$ , desta maneira a equação original é equivalente a  $\varphi(x) = x$ . Para obter uma solução desta equação, toma-se um valor arbitrário  $x_0$  e põe-se, sucessivamente,  $x_1 = \varphi(x_0)$ ,  $x_2 = \varphi(x_1)$ ... Se a sequência  $(x_n)$  convergir, então  $x = \lim x_n$  será uma solução de  $\varphi(x) = x$ , pois  $\varphi(x) = \varphi(\lim x_n) = \lim \varphi(x_n) = \lim x_{n+1} = \lim x_n = x$ . Em consequência,  $x = \lim x_n$  será uma solução da equação  $f(x) = b$ .

A discussão acima não apresenta uma formalização adequada, visto que não explicitamos o domínio nem o contradomínio de  $f$ . Para substituir a equação  $f(x) = b$ , por  $\varphi(x) = x$ , é necessário somar e subtrair elementos nesses conjuntos e também que  $x$  e  $f(x)$  pertençam ao mesmo espaço.

Vamos agora realizar um tratamento sistemático baseado no "Teorema do ponto fixo das contrações" devido a Stefan Banach.

## 4.1 Teorema do Ponto Fixo de Banach

**Definição 4.1.** *Sejam  $(M, d_1)$  e  $(N, d_2)$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$ , chama-se uma contração quando existe uma constante real  $k$ , com  $0 \leq k < 1$  tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y),$$

*quaisquer que sejam  $x, y \in M$ .*

**Definição 4.2.** *Dada uma aplicação  $f : M \rightarrow M$ , de  $M$  em si mesmo, um ponto  $x \in M$  chama-se ponto fixo de  $f$  quando  $f(x) = x$ .*

**Exemplo 4.1.** Na aplicação identidade  $f(x) = x$ , todo ponto  $x \in M$  é ponto fixo.

No espaço  $\mathbb{R}^n$ ,  $0$  é o único ponto fixo da aplicação  $f(x) = -x$ .

A aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$ , tem dois pontos fixos 0 e 1, com efeito  $x = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$  ou  $x = 1$ .

Se  $a \neq 0$ , a aplicação  $x \rightarrow x + a$ , de  $\mathbb{R}^n$  em si mesmo não tem ponto fixo.

**Observação 4.1.** Geometricamente, quando trabalhamos com uma função de uma variável real, os pontos fixos da aplicação são as abcissas dos pontos do plano onde o gráfico de  $f$  intersecta a diagonal  $y = x$ .

Dada uma aplicação  $f : M \rightarrow M$ ,  $f^n(x)$  denotará a  $n$ -ésima iterada de  $f$ , escreveremos  $f^2(x) = f(f(x))$ ,  $f^3(x) = f(f^2(x))$ , ...,  $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ .

**Teorema 4.1.** (Teorema do Ponto Fixo de Banach) Seja  $(M, d)$  um espaço métrico completo e  $f : M \rightarrow M$  uma contração. Então:

- i) Existe um, e somente um,  $\bar{x} \in M$ , tal que  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ .
- ii) Qualquer que seja  $x_1 \in M$ , a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $x_{n+1} = f^n(x_1)$ , converge para  $\bar{x}$ .
- iii) Para todo  $n$ , temos que  $d(x_n, \bar{x}) \leq k^{n-1} \cdot \frac{d(x_1, x_2)}{(1 - k)}$ , onde  $x_1, x_2 \in M$ ,  $k$  é uma constante de contração de  $f$  e  $(x_n)$  é a sequência definida em (ii).

*Demonstração.* Provaremos primeiro o item (ii), ou seja, a existência de tal ponto. Seja  $x_1 \in M$  qualquer e  $x_{n+1} = f^n(x_1)$ , onde  $n = 1, 2, \dots$ . Vamos demonstrar que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy.

Para  $n > 1$ , temos

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq k \cdot d(x_{n-1}, x_n).$$

Por indução sobre  $n$ , vem que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^{n-1} \cdot d(x_1, x_2),$$

para todo inteiro positivo  $n$ . Então, para  $1 \leq n < m$ , temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_m) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m). \end{aligned}$$

Pela propriedade de contração, temos

$$d(x_n, x_m) \leq k^{n-1} \cdot d(x_1, x_2) + \dots + k^{m-2} \cdot d(x_1, x_2) = k^{n-1} \cdot d(x_1, x_2) (1 + k + \dots + k^{m-n-1}) \leq k^{n-1} \cdot \frac{d(x_1, x_2)}{(1 - k)}.$$

Como  $k^n \rightarrow 0$ , quando tomamos  $n$  suficientemente grande, segue que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy. Sendo  $M$  completo, existe  $\bar{x} \in M$  tal que  $x_n \rightarrow \bar{x}$ . Vamos mostrar que  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ . Para todo inteiro positivo  $n$ , temos

$$d(f(\bar{x}), x_{n+1}) = d(f(\bar{x}), f(x_n)) \leq k \cdot d(\bar{x}, x_n)$$

e como  $d(\bar{x}, x_n) \rightarrow 0$ , segue que  $x_n \rightarrow f(\bar{x})$ . Pela unicidade do limite, temos  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ .

Unicidade: Sejam  $\bar{x}, \bar{y} \in M$ , tal que  $\bar{x} \neq \bar{y}$ , com  $f(\bar{x}) = \bar{x}$  e  $f(\bar{y}) = \bar{y}$ . Então  $0 < d(\bar{x}, \bar{y}) = d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) \leq k \cdot d(\bar{x}, \bar{y})$  e, portanto,  $k \geq 1$  contradizendo a hipótese, isto termina a prova de (i).

Quanto a (ii), da demonstração de existência, resulta que toda sequência da forma  $f^n(x_1)$ ,  $x_1 \in M$ , converge a um ponto fixo  $\bar{x}$ , pela unicidade do limite.

Para provar a afirmação (iii) observamos que da desigualdade acima resulta, para  $1 \leq n < m$  que

$$d(x_n, \bar{x}) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, \bar{x}) \leq k^{n-1} \cdot \frac{d(x_1, x_2)}{1-k} + d(x_m, \bar{x}).$$

Como  $d(x_m, \bar{x}) \rightarrow 0$  segue a afirmação (iii). □

**Corolário 4.1.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  tal que para algum  $m$  a iterada  $f^m(x)$  é uma contração. Então  $f$  tem um, e somente um, ponto fixo e para todo  $x_1 \in M$ , a sequência  $f^n(x_1)$  converge para este ponto fixo.*

*Demonstração.* Seja  $\bar{x}$  o único ponto fixo de  $f^m(x)$ . Provaremos que  $\bar{x}$  é o ponto fixo de  $f$ . Como  $f(f^m(x)) = f^m(f(x))$ , para todo  $x \in M$ , temos

$$f(\bar{x}) = f(f^m(\bar{x})) = f^m(f(\bar{x})).$$

Logo,  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ .

Por outro lado, como todo ponto fixo de  $f$  é ponto fixo de  $f^m(x)$ ,  $\bar{x}$  é o único ponto fixo de  $f$ . De fato

$$f^k(x_1) \rightarrow \bar{x},$$

pelo Teorema 4.1 item (ii), e para todo  $r$  com  $1 \leq r \leq m-1$ ,

$$f^{km+r}(x_1) = f^{km}(f^r(x_1)) = \bar{x}$$

pela mesma razão. □

**Exemplo 4.2.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função satisfazendo a condição de Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|,$$

para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  com  $0 \leq c < 1$ . Então, existe um único  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  tal que  $f(\bar{x}) = \bar{x}$  e para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , temos  $f^n(x) \rightarrow \bar{x}$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Com efeito, adotando a métrica usual,  $\mathbb{R}$  é um espaço métrico completo, como  $0 \leq c < 1$  a condição de Lipschitz é uma contração em  $\mathbb{R}$ , sendo assim o Teorema 4.1 garante a existência de um único ponto fixo  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 4.3.** Sejam  $F \subset \mathbb{R}^n$  fechado,  $f : F \rightarrow F$  satisfazendo a condição de Lipschitz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|,$$

para quaisquer  $x, y \in F$ , com  $0 \leq c < 1$ . Então, existe um único  $\bar{x} \in F$  tal que  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ .

Com efeito adotando a métrica proveniente da norma,  $\mathbb{R}^n$  é um espaço métrico completo, logo um subconjunto fechado  $F \subset \mathbb{R}^n$  será um espaço métrico completo, como  $0 \leq c < 1$  a condição de Lipschitz é uma contração em  $F$ , sendo assim o Teorema 4.1 garante a existência de um único ponto fixo  $\bar{x} \in F$ .

Para o próximo exemplo precisaremos do Teorema do Valor Médio, que será enunciado a seguir, a demonstração do mesmo será omitida.

**Teorema 4.2.** *Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Então, existe um número real  $c$  em  $(a, b)$  tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

**Exemplo 4.4.** Seja  $f$  uma função real de variável real que possui em todos os pontos  $x \in \mathbb{R}$  uma derivada  $f'(x)$  satisfazendo a condição  $|f'(x)| \leq k < 1$ , onde  $k$  é constante. Então o gráfico de  $f$  corta a diagonal  $y = x$  exatamente num ponto  $(x, x) = \lim (x_n, x_n)$ , onde  $x_n = f^n(x_0)$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$  é tomado arbitrariamente.

Com efeito, pelo Teorema do Valor Médio,  $f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$ , para algum  $x$  entre  $a$  e  $b$ , então  $|f(b) - f(a)| = |f'(x)| \cdot |b - a|$ , como  $|f'(x)| \leq k < 1$ , segue que  $f$  é uma contração, sendo  $\mathbb{R}$  completo o Teorema 4.1 garante a existência de um único ponto fixo.

## 4.2 Resolução de equações

### Equações numéricas

**Exemplo 4.5.** Considere a seguinte equação

$$x = \lambda \cos(x),$$

onde  $0 < \lambda < 1$ .

Verifique se a equação tem solução e se a solução é única.

Como  $f(x) = \lambda \cos(x)$  é uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , adotando a métrica usual,  $\mathbb{R}$  é completo. Temos que mostrar que  $f$  é uma contração para usarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Seja  $d(f(x), f(y)) = d(\lambda \cos(x), \lambda \cos(y)) = \lambda |\cos(x) - \cos(y)| \leq \lambda |x - y| = \lambda d(x, y)$ , pois  $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$ , para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Assim,  $f$  é uma contração com  $k = \lambda$ .

A desigualdade  $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$ , usada acima decorre do Teorema do Valor Médio. De fato,  $\cos(x) - \cos(y) = f'(t)(x - y)$ , para algum  $t$  entre  $x$  e  $y$ . Então,  $|\cos(x) - \cos(y)| = |-\sin(t)| \cdot |x - y| \leq |x - y|$ , pois  $|\sin(t)| \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Segue pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, que partindo de qualquer número real  $x_1$ , as iteradas sucessivas de  $f$  convergem ao número  $x$ , ponto fixo de  $f$ .

$$x_n = \lambda \cos(\lambda \cos(\lambda \cos(\dots \lambda \cos(x_1) \dots))).$$

Vamos resolver a equação tomando  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Abaixo, temos o gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$  e a diagonal  $y = x$ .

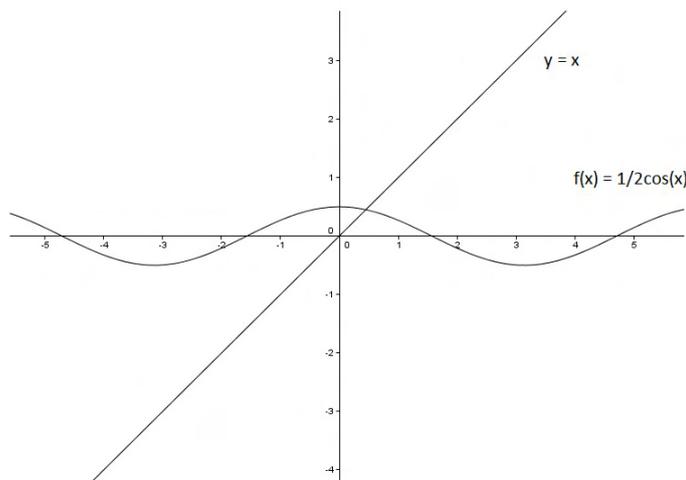


Figura 4.1: Gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$  e  $y = x$ .

Podemos visualizar que o ponto fixo está próximo de 0,5. Assim, faremos uma tabela de valores considerando como ponto inicial  $x_1 = 0,5$ .

$i$	$x_i$	$\cos(x_i)$	$x_{i+1} = 1/2 \cos(x_i)$
1	0,50000000	0,87758256	0,43879128
2	0,43879128	0,90526584	0,45263292
3	0,45263292	0,89929875	0,44964938
4	0,44964938	0,90059956	0,45029978
5	0,45029978	0,90031667	0,45015833
6	0,45015833	0,90037822	0,45018911
7	0,45018911	0,90036483	0,45018241
8	0,45018241	0,90036774	0,45018387
9	0,45018387	0,90036711	0,45018355
10	0,45018355	0,90036725	0,45018362

Tabela 4.1: Aproximações do ponto fixo de  $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$ .

Após 10 iterações, podemos determinar que o valor do ponto fixo com precisão de seis casas decimais é  $x = 0,450183$ . Consequentemente, esta é uma aproximação para a solução da equação inicial  $x = \frac{1}{2} \cos(x)$ .

**Exemplo 4.6.** Use o Teorema do Ponto Fixo de Banach para mostrar que em  $\mathbb{R}$  a equação  $x = e^{-x}$  tem somente uma solução. Determine um valor aproximado após 20 iterações.

Observe o gráfico abaixo:

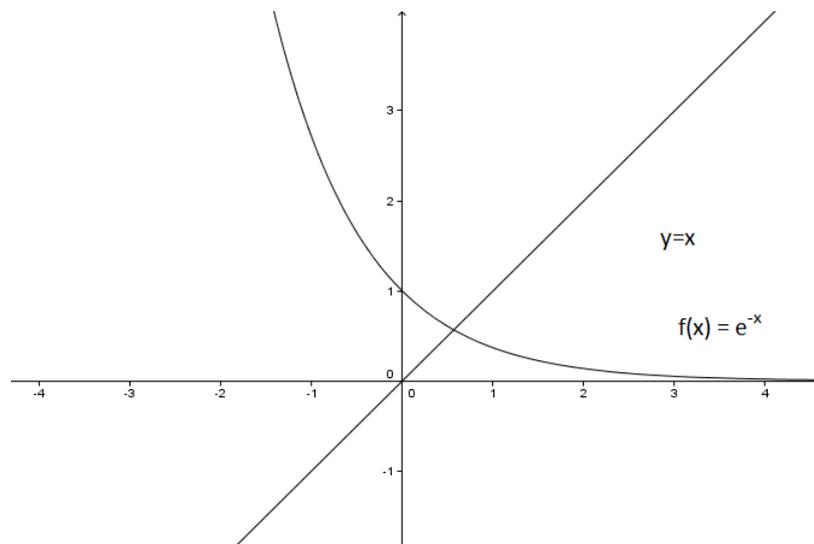


Figura 4.2: Gráfico da função  $f(x) = e^{-x}$  e  $y = x$ .

Podemos visualizar que a interseção entre o gráfico da função  $f(x) = e^{-x}$  e a diagonal  $y = x$  consiste em um único ponto.

Porém, a função  $f(x) = e^{-x}$  não é uma contração em  $\mathbb{R}$ , por exemplo,  $|f(-2) - f(0)| \simeq 6,38 > |-2 - 0|$ . Já a segunda iterada  $g(x) = f^2(x) = e^{(-e^{-x})}$  é uma contração em  $\mathbb{R}$ .

Segue pelo Teorema do Valor Médio que

$$g(x) - g(y) = g'(t)(x - y)$$

para algum  $t$  entre  $x$  e  $y$ , onde  $|g(t)| = |e^{(-e^{-t})}|$  e  $|g'(t)| = |e^{-(t+e^{-t})}| \leq e^{-1}$  (visto que  $t+e^{-t} \geq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ), por isso  $f^2$  tem uma constante de contração  $\frac{1}{e} < 1$ . Segue, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach que, partindo de qualquer valor inicial  $x_1$ , as iteradas sucessivas de  $f$ , convergem para o ponto fixo de  $f$ , que também é a solução procurada da equação  $x = e^{-x}$ .

Tomando como valor inicial  $x_1 = 0,5$ , obtemos a seguinte tabela de valores:

$i$	$x_i$	$x_{i+1} = e^{-x_i}$
1	0,50000000	0,60653066
2	0,60653066	0,54523921
3	0,54523921	0,57970309
4	0,57970309	0,56006463
5	0,56006463	0,57117215
6	0,57117215	0,56486295
7	0,56486295	0,56843805
8	0,56843805	0,56640945
9	0,56640945	0,56755963
10	0,56755963	0,56690721
11	0,56690721	0,56727720
12	0,56727720	0,56706735
13	0,56706735	0,56718636
14	0,56718636	0,56711886
15	0,56711886	0,56715714
16	0,56715714	0,56713543
17	0,56713543	0,56714775
18	0,56714775	0,56714076
19	0,56714076	0,56714472
20	0,56714472	0,56714248

Tabela 4.2: Aproximações do ponto fixo de  $f(x) = e^{-x}$ .

Portanto, podemos determinar que o valor do ponto fixo de  $f$  com precisão de cinco

casas decimais é  $x = 0,56714$ , uma aproximação para a solução da equação original  $x = e^{-x}$ .

**Exemplo 4.7.** Considere a seguinte equação

$$x = \lambda \operatorname{sen}(x) + c,$$

onde  $0 < \lambda < 1$  e  $c \in \mathbb{R}$ .

Verifique se a equação tem solução e se a solução é única.

Como  $f(x) = \lambda \operatorname{sen}(x) + c$  é uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , adotando a métrica usual,  $\mathbb{R}$  é completo. Temos que mostrar que  $f$  é uma contração para usarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Seja  $d(f(x), f(y)) = d(\lambda \operatorname{sen}(x) + c, \lambda \operatorname{sen}(y) + c) = |\lambda \operatorname{sen}(x) + c - \lambda \operatorname{sen}(y) - c| = \lambda |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leq \lambda |x - y| = \lambda d(x, y)$ , pois  $|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leq |x - y|$ , para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Assim  $f$  é uma contração com  $k = \lambda$ .

A desigualdade  $|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leq |x - y|$ , usada acima decorre do Teorema do Valor Médio. De fato,  $\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = f'(t)(x - y)$ , para algum  $t$  entre  $x$  e  $y$ . Então  $|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| = |\cos(t)| \cdot |x - y| \leq |x - y|$ , pois  $\cos(t) \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Segue, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, que partindo de qualquer número real  $x_1$ , as iteradas sucessivas de  $f$  convergem ao número  $x$ , ponto fixo de  $f$ .

$$x_n = \lambda \operatorname{sen}(\lambda \operatorname{sen}(\lambda \operatorname{sen}(\dots [\lambda \operatorname{sen}(x_1) + c] \dots))) + c.$$

Resolvendo a equação para o caso  $\lambda = 0,75$  e  $k = 1$ . Abaixo temos o gráfico da função  $f(x) = 0,75 \operatorname{sen}(x) + 1$  e a diagonal  $y = x$ .

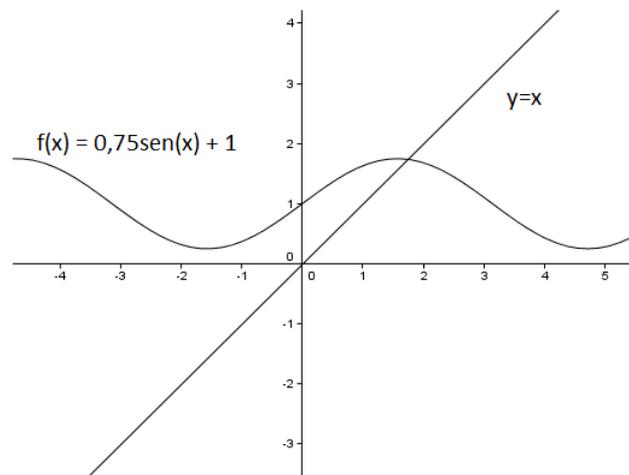


Figura 4.3: Gráfico da função  $f(x) = 0,75 \operatorname{sen}(x) + 1$  e  $y = x$ .

Podemos visualizar que o ponto fixo está próximo de 2. Sendo assim, faremos uma tabela de valores considerando como ponto inicial  $x_1 = 2$ .

$i$	$x_i$	$\text{sen}(x_i)$	$0,75 \text{sen}(x_i)$	$x_{i+1} = 0,75 \text{sen}(x_i) + 1$
1	2,00000000	0,90929743	0,68197307	1,68197307
2	1,68197307	0,99382623	0,74536967	1,74536967
3	1,74536967	0,98480073	0,73860055	1,73860055
4	1,73860055	0,98595388	0,73946541	1,73946541
5	1,73946541	0,98580906	0,73935680	1,73935680
6	1,73935680	0,98582729	0,73937047	1,73937047
7	1,73937047	0,98582500	0,73936875	1,73936875
8	1,73936875	0,98582528	0,73936896	1,73936896
9	1,73936896	0,98582525	0,73936894	1,73936894
10	1,73936894	0,98582525	0,73936894	1,73936894

Tabela 4.3: Aproximações do ponto fixo de  $f(x) = 0,75 \text{sen}(x) + 1$ .

Assim, podemos determinar que o valor do ponto fixo com precisão de sete casas decimais é  $x = 1,7393689$  que, por consequência, é uma aproximação para a solução da equação inicial  $x = 0,75 \text{sen}(x) + 1$ .

**Exemplo 4.8.** Considere a seguinte equação

$$x = \text{arctg}(x) + c,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ .

Verifique se a equação tem solução e se a solução é única.

Como  $f(x) = \text{arctg}(x) + c$  é uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , adotando a métrica usual,  $\mathbb{R}$  é completo. Temos que mostrar que  $f$  é uma contração para usarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Segue, pelo Teorema do Valor Médio que

$$f(x) - f(y) = f'(t)(x - y)$$

para algum  $t$  entre  $x$  e  $y$ . Como  $|f(t)| = |\text{arctg}(t) + c|$  e  $|f'(t)| = \left| \frac{1}{t^2 + 1} \right|$ , então  $d(f(x), f(y)) = d(\text{arctg}(x) + c, \text{arctg}(y) + c) = |\text{arctg}(x) + c - \text{arctg}(y) - c| = |\text{arctg}(x) - \text{arctg}(y)| = \left| \frac{1}{t^2 + 1} \right| \cdot |x - y| = \left| \frac{1}{t^2 + 1} \right| \cdot d(x, y)$ , como  $\frac{1}{t^2 + 1} < 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}^*$ , então  $f$  é uma contração.

Segue, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, que partindo de qualquer número real  $x_1$ , as iteradas sucessivas de  $f$  convergem ao número  $x$ , ponto fixo de  $f$ .

$$x_n = \text{arctg}(\text{arctg}(\text{arctg}(\dots[\text{arctg}(x_1) + c]\dots))) + c.$$

Vamos resolver a equação para o caso  $c = -2$ . Inicialmente, vamos traçar o gráfico da função  $f(x) = \text{arctg}(x) - 2$  e a diagonal  $y = x$ .

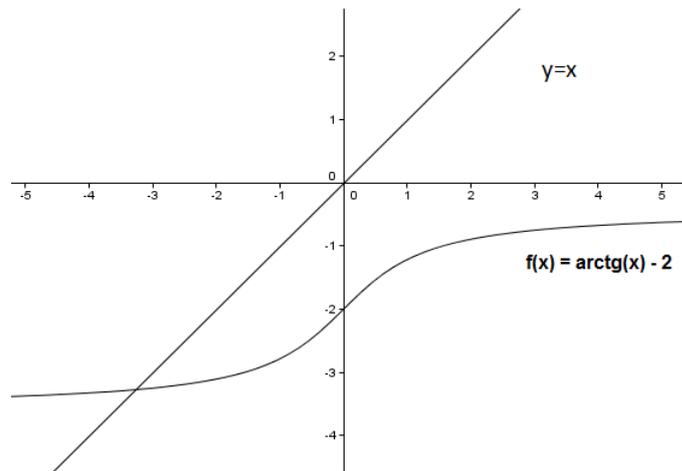


Figura 4.4: Gráfico da função  $f(x) = \arctg(x) - 2$  e  $y = x$ .

Podemos visualizar que o ponto fixo está próximo de  $-3$ . Sendo assim, faremos uma tabela de valores considerando como ponto inicial  $x_1 = -3$ .

$i$	$x_i$	$\arctg(x_i)$	$x_{i+1} = \arctg(x_i) - 2$
1	-3,00000000	-1,24904577	-3,24904577
2	-3,24904577	-1,27221485	-3,27221485
3	-3,27221485	-1,27420675	-3,27420675
4	-3,27420675	-1,27437680	-3,27437680
5	-3,27437680	-1,27439131	-3,27439131
6	-3,27439131	-1,27439255	-3,27439255
7	-3,27439255	-1,27439265	-3,27439265
8	-3,27439265	-1,27439266	-3,27439266

Tabela 4.4: Aproximações do ponto fixo de  $f(x) = \arctg(x) - 2$ .

Portanto, podemos determinar que o valor do ponto fixo com precisão de sete casas decimais é  $x = -3,2743926$  que, por consequência, é uma aproximação para a solução da equação inicial  $x = \arctg(x) - 2$ .

**Exemplo 4.9.** Use o Teorema do Ponto Fixo de Banach para mostrar que em  $\mathbb{R}$  a equação  $x = -\ln(1 + e^x)$  tem somente uma solução.

Como  $f(x) = -\ln(1 + e^x)$  é uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , adotando a métrica usual,  $\mathbb{R}$  é completo. Temos que mostrar que  $f$  é uma contração para usarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$f(x) - f(y) = f'(t)(x - y)$$

para algum  $t$  entre  $x$  e  $y$ . Como  $|f(t)| = |-\ln(1 + e^t)|$  e  $|f'(t)| = \left| -\frac{e^t}{1 + e^t} \right|$ , então

$d(f(x), f(y)) = d(-\ln(1+e^x), -\ln(1+e^y)) = |-\ln(1+e^x) + \ln(1+e^y)| = \left| -\frac{e^t}{1+e^t} \right| \cdot |x - y| = \left| -\frac{e^t}{1+e^t} \right| \cdot d(x, y)$ , como  $\frac{e^t}{1+e^t} < 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então  $f$  é uma contração.

Segue, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, que a equação possui solução única e que partindo de qualquer número real  $x_1$ , as iteradas sucessivas de  $f$  convergem ao número  $x$ , ponto fixo de  $f$ .

Observe o gráfico abaixo:

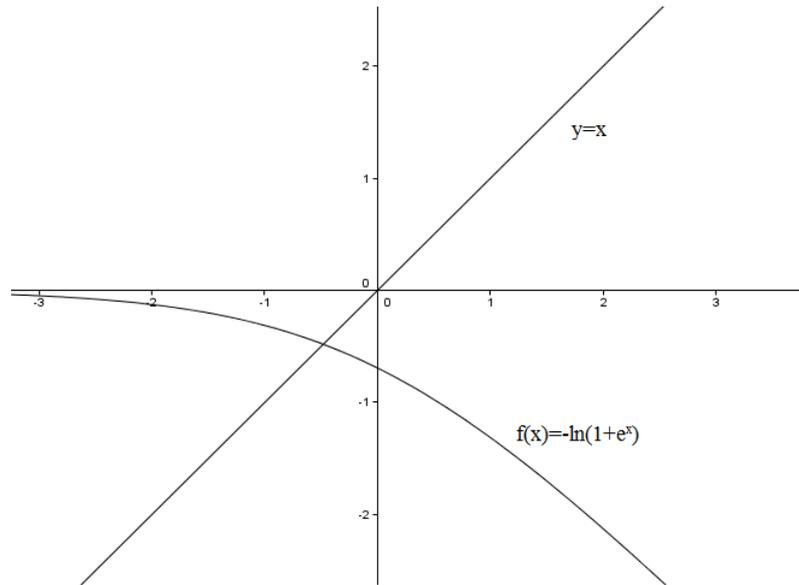


Figura 4.5: Gráfico da função  $f(x) = -\ln(1+e^x)$  e  $y = x$ .

Tomando como valor inicial  $x_1 = -0,5$ , obtemos a seguinte tabela de valores:

$i$	$x_i$	$e^{x_i}$	$1 + e^{x_i}$	$x_{i+1} = -\ln(1 + e^{x_i})$
1	-0,50000000	0,60653066	1,60653066	-0,47407698
2	-0,47407698	0,62245933	1,62245933	-0,48394310
3	-0,48394310	0,61634827	1,61634827	-0,48016945
4	-0,48016945	0,61867855	1,61867855	-0,48161011
5	-0,48161011	0,61778739	1,61778739	-0,48105971
6	-0,48105971	0,61812801	1,61812801	-0,48126993
7	-0,48126993	0,61799808	1,61799808	-0,48118963
8	-0,48118963	0,61804771	1,61804771	-0,48122030
9	-0,48122030	0,61802875	1,61802875	-0,48120859
10	-0,48120859	0,61803599	1,61803599	-0,48121306

Tabela 4.5: Aproximações do ponto fixo de  $f(x) = -\ln(1+e^x)$ .

Portanto, podemos determinar que o valor do ponto fixo de  $f$  com precisão de quatro casas decimais é  $x = -0,4812$ , uma aproximação para a solução da equação

inicial  $x = -\ln(1 + e^x)$ .

**Exemplo 4.10.** Use o Teorema do Ponto Fixo de Banach para mostrar que em  $\mathbb{R}$  a equação  $x = \cos(\sin(x))$  tem somente uma solução. Determine um valor aproximado após 15 iterações.

Observe o gráfico abaixo:

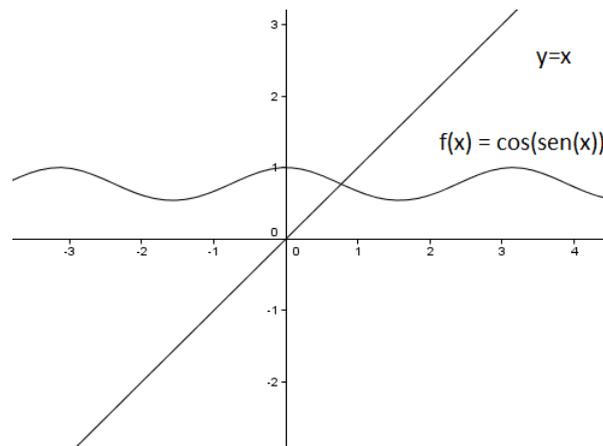


Figura 4.6: Gráfico da função  $f(x) = \cos(\sin(x))$  e  $y = x$ .

Podemos visualizar que o gráfico da função  $f(x) = \cos(\sin(x))$ , intersecta a diagonal em um único ponto.

Como  $f(x) = \cos(\sin(x))$ , é uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , adotando a métrica usual,  $\mathbb{R}$  é completo. Vamos mostrar que  $f(x) = \cos(\sin(x))$  é uma contração em  $\mathbb{R}$ , segue pelo Teorema do Valor Médio que

$$f(x) - f(y) = f'(t)(x - y)$$

para algum  $t$  entre  $x$  e  $y$ , onde  $|f(t)| = |\cos(\sin(t))|$  e  $|f'(t)| = |-\sin(\sin(t)) \cos(t)|$ . Então,  $d(f(x), f(y)) = d(\cos(\sin(x)), \cos(\sin(y))) = |\cos(\sin(x)) - \cos(\sin(y))| = |-\sin(\sin(t)) \cos(t)| \cdot |x - y| = |-\sin(\sin(t)) \cos(t)| \cdot d(x, y)$ , como  $|\sin(t)| \leq 1$  e  $|\cos(t)| \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então  $f$  é uma contração.

Segue, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, que partindo de qualquer valor inicial  $x_1$ , as iteradas sucessivas de  $f$ , convergem para o ponto fixo de  $f$ , que também é a solução procurada da equação  $x = \cos(\sin(x))$ .

Tomando como valor inicial  $x_1 = 1$ , obtemos a seguinte tabela de valores:

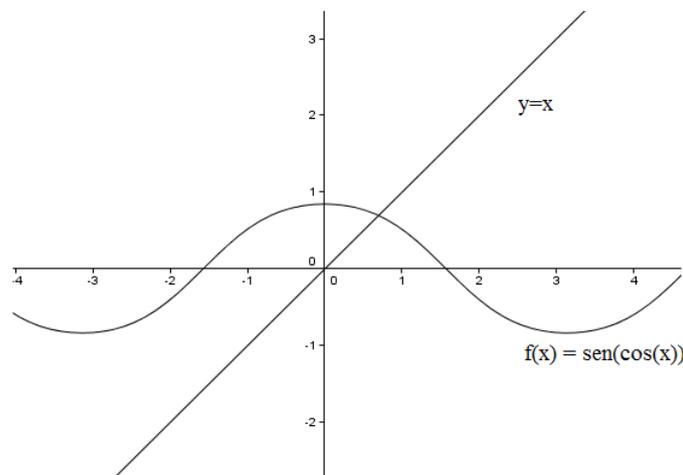
$i$	$x_i$	$\text{sen}(x_i)$	$x_{i+1} = \cos(\text{sen}(x_i))$
1	1,00000000	0,84147098	0,66636675
2	0,66636675	0,61813407	0,81496121
3	0,81496121	0,72769899	0,74670690
4	0,74670690	0,67922554	0,77805946
5	0,77805946	0,70189854	0,76361774
6	0,76361774	0,69153920	0,77026535
7	0,77026535	0,69632571	0,76720406
8	0,76720406	0,69412529	0,76861356
9	0,76861356	0,69513923	0,76796453
10	0,76796453	0,69467251	0,76826338
11	0,76826338	0,69488745	0,76812577
12	0,76812577	0,69478849	0,76818913
13	0,76818913	0,69483406	0,76815996
14	0,76815996	0,69481308	0,76817339
15	0,76817339	0,69482274	0,76816722

Tabela 4.6: Aproximações do ponto fixo de  $f(x) = \cos(\text{sen}(x))$ .

Portanto, podemos determinar que o valor do ponto fixo de  $f$  com precisão de quatro casas decimais é  $x = 0,7681$ , uma aproximação para a solução da equação  $x = \cos(\text{sen}(x))$ .

**Exemplo 4.11.** Use o Teorema do Ponto Fixo de Banach para mostrar que em  $\mathbb{R}$  a equação  $x = \text{sen}(\cos(x))$  tem somente uma solução. Determine um valor aproximado após 15 iterações.

Observe o gráfico abaixo:

Figura 4.7: Gráfico da função  $f(x) = \text{sen}(\cos(x))$  e  $y = x$ .

Podemos visualizar que o gráfico da função  $f(x) = \text{sen}(\cos(x))$ , intersecta a diago-

nal  $y = x$  em um único ponto.

Usando a métrica usual,  $\mathbb{R}$  é completo, vamos mostrar que  $f(x) = \text{sen}(\cos(x))$  é uma contração em  $\mathbb{R}$ , segue pelo Teorema do Valor Médio que

$$f(x) - f(y) = f'(t)(x - y)$$

para algum  $t$  entre  $x$  e  $y$ , onde  $|f(t)| = |\text{sen}(\cos(t))|$  e  $|f'(t)| = |-\cos(\cos(t)) \text{sen}(t)|$ . Então,  $d(f(x), f(y)) = d(\text{sen}(\cos(x)), \text{sen}(\cos(y))) = |\text{sen}(\cos(x)) - \text{sen}(\cos(y))| = |-\cos(\cos(t)) \text{sen}(t)| \cdot |x - y| = |-\cos(\cos(t)) \text{sen}(t)| \cdot d(x, y)$ , como  $\text{sen}(t) \leq 1$  e  $\cos(t) \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então  $f$  é uma contração.

Segue, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, que partindo de qualquer valor inicial  $x_1$ , as iteradas sucessivas de  $f$ , convergem para o ponto fixo de  $f$ , que também é a solução procurada da equação  $x = \text{sen}(\cos(x))$ .

Tomando como valor inicial  $x_1 = 1$ , obtemos a seguinte tabela de valores:

$i$	$x_i$	$\cos(x_i)$	$x_{i+1} = \text{sen}(\cos(x_i))$
1	1,000000	0,540302	0,514395
2	0,514395	0,870590	0,764710
3	0,764710	0,721583	0,660574
4	0,660574	0,789640	0,710100
5	0,710100	0,758297	0,687686
6	0,687686	0,772717	0,698083
7	0,698083	0,766076	0,693313
8	0,693313	0,769133	0,695513
9	0,695513	0,767725	0,694500
10	0,694500	0,768374	0,694967
11	0,694967	0,768075	0,694752
12	0,694752	0,768212	0,694851
13	0,694851	0,768149	0,694805
14	0,694805	0,768178	0,694826
15	0,694826	0,768165	0,694817

Tabela 4.7: Aproximações do ponto fixo de  $f(x) = \text{sen}(\cos(x))$ .

Portanto, podemos determinar que o valor do ponto fixo de  $f$  com precisão de quatro casas decimais é  $x = 0,6948$ , uma aproximação para a solução da equação  $x = \text{sen}(\cos(x))$ .

**Exemplo 4.12.** Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$(x, y, z) \rightarrow \left( \frac{\text{sen } y}{4}, \frac{\text{sen } z}{3} + 1, \frac{\text{sen } x}{5} + 2 \right)$$

Mostre que existe um único ponto fixo e encontre uma aproximação para o mesmo.

Como  $f$  é uma função de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}^3$ , adotando a métrica euclidiana,  $\mathbb{R}^3$  é um espaço métrico completo. Temos que mostrar que  $f$  é uma contração para usarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Para isso, vamos usar o fato de que  $|\text{sen}(x) - \text{sen}(y)| \leq |x - y|$ . Considere dois pontos  $(x, y, z)$  e  $(x', y', z')$ .

$$\begin{aligned} d(f(x, y, z), f(x', y', z')) &= d\left(\left(\frac{\text{sen } y}{4}, \frac{\text{sen } z}{3} + 1, \frac{\text{sen } x}{5} + 2\right), \left(\frac{\text{sen } y'}{4}, \frac{\text{sen } z'}{3} + 1, \frac{\text{sen } x'}{5} + 2\right)\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{\text{sen } y - \text{sen } y'}{4}\right)^2 + \left(\frac{\text{sen } z - \text{sen } z'}{3}\right)^2 + \left(\frac{\text{sen } x - \text{sen } x'}{5}\right)^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{\text{sen } y - \text{sen } y'}{3}\right)^2 + \left(\frac{\text{sen } z - \text{sen } z'}{3}\right)^2 + \left(\frac{\text{sen } x - \text{sen } x'}{3}\right)^2} \\ &\leq \frac{1}{3} \sqrt{(y - y')^2 + (z - z')^2 + (x - x')^2} \\ &= \frac{1}{3} d((x, y, z), (x', y', z')) \end{aligned}$$

Então,  $f$  é contração com fator  $k = \frac{1}{3}$ . Segue, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, que tomando qualquer condição inicial  $(x_1, y_1, z_1)$ , as iteradas sucessivas de  $f$  irão convergir ao ponto fixo de  $f$ .

Tomando como ponto inicial  $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ , obtemos a seguinte tabela de valores:

$i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$x_{i+1} = \frac{\text{sen}(y_i)}{4}$	$y_{i+1} = \frac{\text{sen}(z_i)}{3} + 1$	$z_{i+1} = \frac{\text{sen}(x_i)}{5} + 2$
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000	2,000000
2	0,000000	1,000000	2,000000	0,210367	1,303099	2,000000
3	0,210367	1,303099	2,000000	0,241095	1,303099	2,041763
4	0,241095	1,303099	2,041763	0,241095	1,297043	2,047753
5	0,241095	1,297043	2,047753	0,240690	1,297043	2,047753
6	0,240690	1,296132	2,047753	0,240629	1,296132	2,046774
7	0,240629	1,296132	2,046774	0,240629	1,296144	2,047662
8	0,240629	1,296144	2,047662	0,240629	1,296145	2,047662
9	0,240629	1,296145	2,047662	0,240630	1,296145	2,047662
10	0,240630	1,296145	2,047662	0,240630	1,296145	2,047662

Tabela 4.8: Aproximações do ponto fixo de  $(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{\text{sen } y}{4}, \frac{\text{sen } z}{3} + 1, \frac{\text{sen } x}{5} + 2\right)$ .

Portanto, o ponto  $(0.2406, 1.2961, 2.0476)$  é uma aproximação para o ponto fixo com precisão de 4 casas decimais.

### 4.3 O Método de Newton para zeros de funções

Nesta seção, vamos estudar sob o ponto de vista do Teorema do Ponto Fixo de Banach o conhecido Método de Newton usado para determinação de zeros de funções reais.

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função para a qual determinaremos um zero ou raiz, ou seja, uma solução da equação  $f(x) = 0$ . Note que essa equação é equivalente a  $x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , desde que  $f'(x) \neq 0$ . Assim o problema torna-se um problema de ponto fixo para a aplicação  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

#### Interpretação Geométrica

Dado  $x_1$ , o valor de  $x_2$  pode ser obtido geometricamente traçando-se pelo ponto  $(x_1, f(x_1))$  a tangente à curva  $y = f(x)$ .

O ponto de intersecção da tangente com o eixo x determina o ponto  $x_2$ .

De fato,

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \\ \Rightarrow x_1 - x_2 &= \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ \Rightarrow x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \end{aligned}$$

Tomando agora  $x_2$ , devemos traçar pelo ponto  $(x_2, f(x_2))$  a reta tangente à curva  $y = f(x)$ .

O ponto de intersecção da tangente com o eixo x determina o ponto  $x_3$ .

De fato,

$$\begin{aligned} f'(x_2) &= \operatorname{tg} \beta = \frac{f(x_2)}{x_2 - x_3} \\ \Rightarrow x_2 - x_3 &= \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\ \Rightarrow x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \end{aligned}$$

Por recorrência, tomando agora  $x_n$ , temos que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

A figura abaixo ilustra este processo.

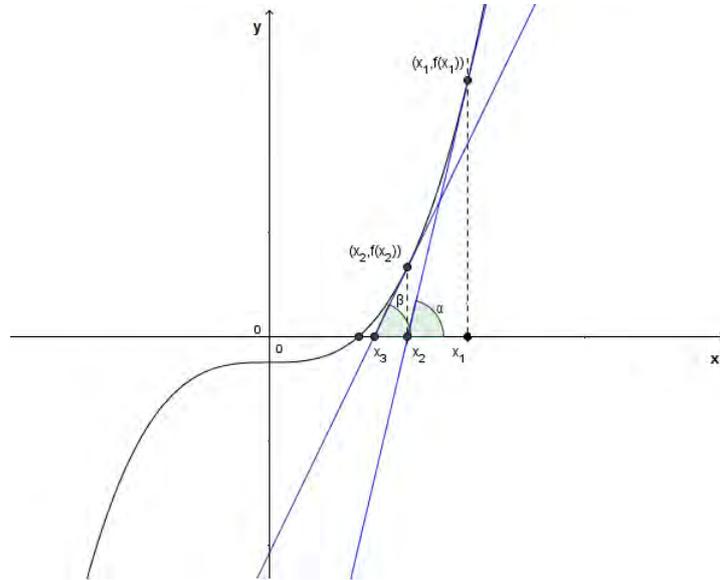


Figura 4.8: Interpretação geométrica do Método de Newton.

**Proposição 4.1.** *Seja  $f$  uma função pelo menos duas vezes diferenciável, então  $f$  possuirá um único zero  $\bar{x}$ , num dado intervalo  $[a, b]$ , se existir  $\lambda$  com  $0 \leq \lambda < 1$  tal que*

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq \lambda \quad (4.1)$$

para todo  $x \in [a, b]$ ,

e se

$$\left| \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \right| \leq (1 - \lambda)\alpha, \quad (4.2)$$

onde  $x^* = \frac{a+b}{2}$  e  $\alpha = \frac{b-a}{2}$ . Desse modo, teremos  $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , onde a sequência  $x_n \in [a, b]$  pode ser determinada recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0$$

e se tomarmos  $x_0 \in [a, b]$ , arbitrário, teremos

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |f(x_0) - x_0| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} (b - a), n \geq 0. \quad (4.3)$$

**Observação 4.2.** A condição (4.1) pressupõe  $f'(x) \neq 0$  em  $[a, b]$ , sendo importante para garantir a contratividade de  $f$ , enquanto 4.2 é suficiente para garantir que  $f$  leva ponto de  $[a, b]$  em  $[a, b]$ . Notemos também, que o Método de Newton funciona sob condições mais fracas sobre a função  $f$ , nesse caso fora do contexto do Teorema do

Ponto Fixo de Banach. Então a convergência das iterações pode ser mais lenta que aquela garantida em (4.3).

*Demonstração.* Dados  $x, y \in [a, b]$ , temos que

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= y - \frac{f(y)}{f'(y)} - x + \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= \int_x^y \frac{d}{dt} \left[ t - \frac{f(t)}{f'(t)} \right] dt = \int_x^y \frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Deste modo (4.1) garante que

$$|f(y) - f(x)| \leq \lambda |y - x|.$$

Isso estaria dizendo que  $f$  é uma contração. Precisamos, porém, garantir que  $f$  leve pontos de  $[a, b]$  em  $[a, b]$ . Isso equivale a garantir que  $|f(x) - x^*| \leq \alpha$  para todo  $x \in [a, b]$ , ou seja, para todo  $x$  tal que  $|x - x^*| \leq \alpha$ . Uma maneira de impor isso usando 4.1 é supor válida a equação (4.2). De fato,

$$|f(x) - x^*| = \left| f(x) - f(x^*) + \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \right| \leq |f(x) - f(x^*)| + \left| \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \right|$$

pela condição (4.1)

$$\leq \lambda |x - x^*| + \left| \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \right|$$

da condição (4.2)

$$\leq \lambda |x - x^*| + (1 - \lambda)\alpha$$

como  $x \in [a, b]$

$$\leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha$$

$$= \alpha.$$

Com isso, provamos que  $f$  é uma contração que mapeia o espaço métrico completo  $[a, b]$  em si mesmo. O Teorema do Ponto Fixo de Banach garante o resto.  $\square$

**Exemplo 4.13.** Usando o Método de Newton, determine um valor aproximado para  $\sqrt{3}$ .

Como  $x = \sqrt{3}$ , temos  $x^2 = 3$ , logo obter um valor aproximado para  $\sqrt{3}$  equivale a determinar o zero positivo de  $f(x) = x^2 - 3$ . As iterações serão  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , com  $f(x) = x^2 - 3$  e  $f'(x) = 2x$ .

Tomando  $x_0 = 1$ , obtemos a sucessão:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \left( \frac{-2}{2} \right) = 2$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{7}{4} - \frac{1}{56} = \frac{97}{56}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = \frac{97}{56} - \frac{1}{10864} = \frac{18817}{10864}.$$

Após quatro iteração, obtemos que  $x_4 \simeq 1,73205081$  é uma aproximação com precisão de sete casas decimais para  $\sqrt{3}$ .

**Exemplo 4.14.** Usando o Método de Newton, determine um valor aproximado para  $\sqrt{5}$ .

Como  $x = \sqrt{5}$ , temos  $x^2 = 5$ , logo obter um valor aproximado para  $\sqrt{5}$  equivale a determinar o zero positivo de  $f(x) = x^2 - 5$ . As iterações serão  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , com  $f(x) = x^2 - 5$  e  $f'(x) = 2x$ .

Tomando  $x_0 = 2$ , obtemos a sucessão:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{9}{4} - \frac{1}{72} = \frac{161}{72}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{161}{72} - \frac{1}{23184} = \frac{51842}{23184}.$$

Após três iterações, obtemos que  $x_3 \simeq 2,23611$  é uma aproximação com precisão de três casas decimais para  $\sqrt{5}$ .

Vamos usar o Método de Newton para aproximar o valor da raiz de uma função polinomial. Para isso, precisamos do Teorema do Valor Intermediário, que será enunciado a seguir.

**Teorema 4.3.** *Se  $f$  é uma função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$ , e  $k$  um número real compreendido entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , então existe pelo menos um valor real  $c$ , pertencente ao intervalo aberto  $(a, b)$  tal que  $f(c) = k$ .*

Ilustraremos o teorema conforme a figura abaixo, e a demonstração do mesmo será omitida.

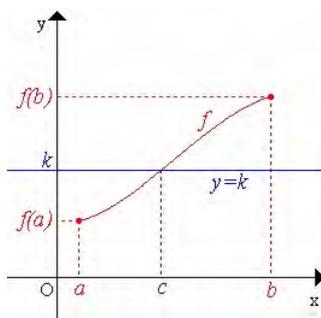


Figura 4.9: Interpretação geométrica do Teorema do Valor Intermediário.

Como exemplo, consideramos  $f$  uma função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$ . Se traçarmos uma reta horizontal  $y = k$ , em que  $f(a) < k < f(b)$ , esta intersectará o gráfico de  $f$  em pelo menos um ponto, neste caso de coordenadas  $(c, k)$ .

No caso particular de  $k = 0$ , a reta será  $y = 0$ , ou seja, o eixo  $Ox$ , onde cada  $c$  corresponderá a um zero de  $f$ . Por isso mesmo, este Teorema tem especial importância na localização de zeros de determinadas funções (principalmente funções em que não é possível obter os seus zeros por meros processos algébricos), através do Corolário, enunciado a seguir.

**Corolário 4.2.** *Se  $f$  é uma função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$  e  $f(a)$  e  $f(b)$  têm sinais contrários, então existe pelo menos um valor real  $c$ , pertencente ao intervalo aberto  $(a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .*

**Exemplo 4.15.** Usando o Método de Newton, determine um valor aproximado para a raiz real da função  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ .

Primeiramente, desenhamos o gráfico da função  $f$ .

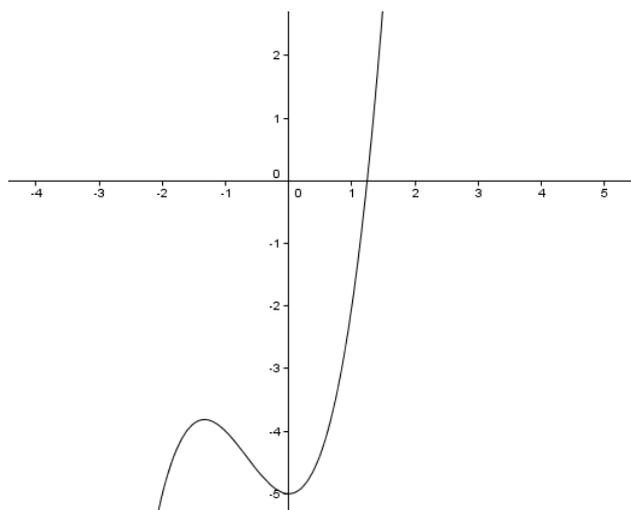


Figura 4.10: Gráfico de  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ .

Como  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ ,  $f(1) = -2$  e  $f(2) = 11$ , segue pelo Corolário 4.2 que existe  $x \in (1, 2)$  tal que  $f(x) = 0$ , ou seja,  $x$  é uma raiz da função.

A tabela abaixo mostra as iterações do Método de Newton, utilizando como ponto inicial  $x_1 = 1$ .

$i$	$x_i$	$f(x_i) = x_i^3 + 2x_i^2 - 5$	$f'(x_i) = 3x_i^2 + 4x_i$	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
1	1,00000000	-2,00000000	7,00000000	1,28571428
2	1,28571428	0,43148688	10,10204082	1,24300144
3	1,24300144	0,01060777	9,60716353	1,24189729
4	1,24189729	0,00000698	9,59451581	1,24189656

Tabela 4.9: Aproximações da raiz de  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ .

Portanto, após três iterações, obtemos que  $x = 1,24189$  é uma aproximação para a raiz real da função  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ , com precisão de cinco casas decimais.

**Exemplo 4.16.** Usando o Método de Newton, determine um valor aproximado para as três raízes reais da função  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 2$ , com erro menor que 0,0001.

Como  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ ,  $f(-1) = -4$ ,  $f(0) = 2$ ,  $f(1) = -2$ ,  $f(2) = -4$  e  $f(3) = 8$ , segue pelo Corolário 4.2 que as raízes da função pertencem aos intervalos  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(2, 3)$ .

Conforme mostra o gráfico abaixo.

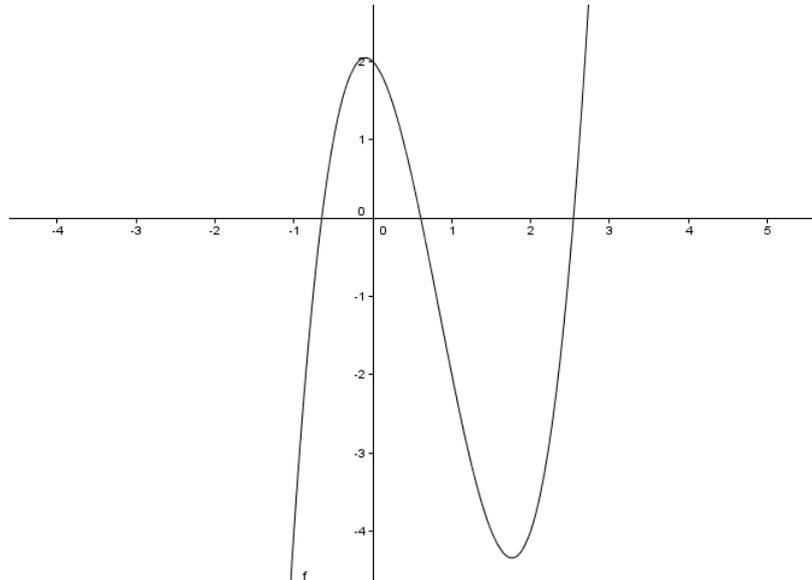


Figura 4.11: Gráfico de  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 2$ .

As tabelas abaixo mostram as iterações do Método de Newton, utilizando os pontos -1, 1 e 3 como pontos iniciais.

$i$	$x_i$	$f(x_i) = 2x_i^3 - 5x_i^2 - x_i + 2$	$f'(x_i) = 6x_i^2 - 10x_i - 1$	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
1	-1,00000000	-4,00000000	15,00000000	-0,73333333
2	-0,73333333	-0,74429630	9,56000000	-0,65547807
3	-0,65547807	-0,05603372	8,13268974	-0,64858814
4	-0,64858814	-0,00042340	8,00988076	-0,64853528
$i$	$x_i$	$f(x_i) = 2x_i^3 - 5x_i^2 - x_i + 2$	$f'(x_i) = 6x_i^2 - 10x_i - 1$	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
1	1,00000000	-2,00000000	-5,00000000	0,60000000
2	0,60000000	0,03200000	-4,84000000	0,60661157
3	-0,60661157	-0,00006062	-4,85825012	0,60659909
4	0,60659909	0,00000000	-4,85821617	0,60659909
$i$	$x_i$	$f(x_i) = 2x_i^3 - 5x_i^2 - x_i + 2$	$f'(x_i) = 6x_i^2 - 10x_i - 1$	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
1	3,00000000	8,00000000	23,00000000	2,65217391
2	2,65217391	1,48861675	14,68241966	2,55078621
3	2,55078621	0,11009583	12,53119971	2,54200048
4	2,54200048	0,00079406	12,35059376	2,54193618
5	2,54193618	0,00000004	12,34927552	2,54193618

Tabela 4.10: Aproximações das raízes de  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 2$ .

Portanto, as aproximações para as três raízes da função  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 2$  com erro menor que 0,0001 são  $x = \{-0.64853, 0.60659, 2.54193\}$ .

# Referências

- [1] CHAIN, S.H. *Aplicações da topologia à análise*, Rio de Janeiro: IMPA, 1976.
- [2] LIMA, E.L. *Espaços métricos*, 4.ed Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [3] LIMA, E.L. *Elementos de Topologia Geral*, Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.
- [4] BARATA, J.C.A. *Curso de Física-Matemática*, 2012.