UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA

MARCELO CARLOS DE PROENÇA

UM ESTUDO EXPLORATÓRIO SOBRE A FORMAÇÃO CONCEITUAL EM GEOMETRIA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

BAURU - 2008

MARCELO CARLOS DE PROENÇA

UM ESTUDO EXPLORATÓRIO SOBRE A FORMAÇÃO CONCEITUAL EM GEOMETRIA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência/Área de concentração: Ensino de Ciências, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus Bauru, como requisito para obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola.

BAURU – 2008

DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO
UNESP – BAURU

Proença, Marcelo Carlos de.
Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio / Marcelo Carlos de Proença, 2008.
200 f. il.

Orientador: Nelson Antonio Pirola.

Dissertação (Mestrado)–Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2008.

1. Geometria – Ensino. 2. Conceitos geométricos. 3. Polígonos. 4. Poliedros. 5. Geometria – Formação conceitual. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por Maricy Fávaro Braga – CRB-8 1.622

unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE BAURU
FACULDADE DE CIENCIAS DE BAURU

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE MARCELO CARLOS DE PROENÇA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DO(A) FACULDADE DE CIENCIAS DE BAURU.

Aos 27 dias do mês de fevereiro do ano de 2008, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Pós-graduação, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA do(a) Departamento de Educação / Faculdade de Ciencias de Bauru, Profa. Dra. ODALEA APARECIDA VIANA do(a) Faculdade de Ciências Integradas do Pontal / Universidade Federal de Uberlândia, Profa. Dra. REGINA MARIA PAVANELLO do(a) Departamento de Teoria e Prática Da Educação / Universidade Estadual de Maringa, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a argüição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de MARCELO CARLOS DE PROENÇA, intitulado "Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio". Após a exposição, o discente foi argüido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final:_ APROVADO _ . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA

Odaléa Viana

Profa. Dra. ODALEA APARECIDA VIANA

Profa. Dra. REGINA MARIA PAVANELLO

Para meus pais Antonio e Marina que sempre se preocuparam comigo e se colocaram a disposição, compreendendo a necessidade da nossa distância em prol da realização desta importante etapa de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola, orientador e grande amigo, pela atenção e pelos apontamentos indispensáveis na realização desta dissertação.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências da UNESP/Bauru pelo apoio e esclarecimentos de questões e dúvidas que direcionaram este trabalho.

Ao Prof. Dr. Valter Locci do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da UNESP/Bauru pelas dicas e sugestões grandiosas na revisão dos instrumentos da pesquisa.

Ao coordenador da unidade escolar da cidade de Bauru/SP, local onde foram coletados os dados da pesquisa, pela sua colaboração e atenção quanto às necessidades de realização da etapa de coleta de dados.

À Profª Drª. Irene Cazorla, da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) da Bahia, pelas análises estatísticas realizadas e pela atenção dispensada às várias discussões.

À Profª Drª. Odalea Aparecida Viana e à Profª Drª. Regina Maria Pavanello pelas imensas contribuições dadas nos exames de qualificação e defesa que enriqueceram o trabalho.

À Profª Ms. Deise Aparecida Peralta pela ajuda no processo de coleta de dados, sem a qual teria sido mais difícil, e pela honra do companheirismo concedido durante o período de pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo auxílio financeiro parcial concedido para a realização da pesquisa.

"Deus é o grande geômetra. Deus geometriza sem cessar"

Platão

Resumo: O objetivo da pesquisa foi analisar o conhecimento declarativo de alunos do ensino médio sobre polígonos e poliedros em termos de seus atributos definidores, das relações subordinadas e supra-ordenadas e de seus exemplos e não-exemplos. A concepção teórica utilizada foi o modelo de formação de conceitos de Klausmeier e Goodwin (1977). Os participantes foram 253 alunos do ensino médio de uma escola da rede oficial pública de ensino de Bauru, que responderam, na primeira fase, um questionário, uma prova matemática, um teste de atributos definidores, um teste de exemplos e não-exemplos e um teste de relações subordinadas e supra-ordenadas. Na segunda fase, foram selecionados, aleatoriamente, três alunos com média abaixo de cinco pontos e três alunos com média igual ou superior a cinco pontos para participarem de uma entrevista. Os resultados coletados na primeira fase, analisados quantitativamente, mostraram que no teste de atributos definidores a nota média foi de 6,03, sendo que não houve diferença significativa entre as séries (p = 0,084). No teste de exemplos e não-exemplos a nota média 5,59 refletiu o desempenho dos participantes e não foram encontradas diferenças significativas entre as séries (p = 0,057). Em relação ao teste de relações subordinadas e supra-ordenadas a nota média dos participantes foi 5,64, sendo que a nota média obtida pela primeira série diferiu significativamente da nota média obtida pela terceira série (p = 0,024). Em relação aos dados da segunda fase, analisados qualitativamente, alguns participantes pensavam, de maneira equivocada, sobre os atributos definidores de polígonos e de poliedros. Os atributos irrelevantes não interferiram na identificação da figuras selecionadas do teste de exemplos e não-exemplos como exemplos de polígonos. Na análise de algumas afirmações do teste de relações subordinadas e supra-ordenadas, os participantes tiveram dificuldades para explicar o atributo comum entre exemplos de polígonos e de poliedros as quais estiveram relacionadas à falta de conhecimento da própria figura. Os resultados apontaram para um conhecimento declarativo de polígonos e de poliedros longe do desejável para alunos que estão no ensino médio.

Palavras-chave: Ensino de geometria. Conceitos geométricos. Polígonos e poliedros. Formação conceitual.

Abstract: The objective of this reseach was to analyse the declarative knowledge of students from Elementary School Teaching about polygons and polyhedrons in terms of their defining attributes, the subordinate relations and supraordinate and their examples and no-examples. The theoretical conception used was the model of formation from Klausmeier and Goodwin (1977)´s concepts. The participants were 253 students from Elementary School Teaching of one school of the Official Public Network from Bauru, who answered, in the first phase, one questionnaire, one math test, one test of defining attributes, one test of examples and no-examples and one test of subordinate relations and supraordinate. In the second phase, three students were randomly selected with the average below five points and three students with equal average or higher to five points who participated in an interview. The collected results in the first phase, quantitatively analysed, showed that in the test of defining attributes, the average grade was 6,03, so there was no significative difference among the series (p=0,084). In the test of examples and no-examples the average grade 5,59 reflected the performance of the participants and no significative differences were found among the series (p= 0,057). In the relation to the test of subordinate relations and supraordinate the average grade of the participants was 5,64, so the average obtained by the first grade had no significative difference from the average obtained by the third grade (p= 0,024). In relation to the data of the second phase, qualitatively analysed, some participants thought wrongly about the defining attributes of polygons and polyhedrons. The irrelevant attributes did not interfere in the identification of the selected pictures of the test of examples and no-examples as polygons examples. In the analysis of some statements of the test of subordinate relations and supraordinate, the participants had difficulties to explain the common attribute among the polygons and polyhedrons examples which were related to the lack of knowledge from the picture itself. In the general way, the results pointed out to one declarative knowledge of polygons and polyhedrons far from the desirable for the students who are in the Elementary School Teaching.

Key-words: Geometry teaching. Geometrical concepts. Polygons and polyhedrons. Conceptual formation.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 28), o papel do ensino de Matemática para a formação do aluno está na "formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares".

Muitas vezes, esse ensino é realizado nas escolas cultivando a reprodução de exercícios e a prática memorística. Para Gonçalez e Brito (2001), o conhecimento matemático é resultado de uma elaboração mental, sendo que, alunos que recebem o conteúdo matemático de forma pronta e acabada podem apresentar uma dificuldade maior para realizar abstrações e transferir a nova aprendizagem para outras situações. Segundo Micotti (1999, p. 164), o professor precisa observar as idéias dos alunos, quando estão em contato com os conteúdos. E ressalta que "os aspectos cognitivos não são os únicos em jogo, os aspectos afetivos interferem nesse processo".

O ensino baseado na concepção tradicional tem contribuído para resultados negativos do desempenho dos alunos. Segundo a décima edição do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), publicada em 2007, a média 48,30 (numa escala de zero a cem), na prova que avaliou habilidades e competências em diversas disciplinas, refletiu o baixo rendimento apresentado por alunos concluintes do ensino médio da escola pública.

A intenção do Ministério da Educação é fazer com que as escolas revejam suas formas de ensino mediante os resultados de algumas avaliações de rendimento escolar que têm mostrado um desempenho desfavorável dos alunos. Observando os dados apresentados pelo SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica), as médias de proficiência em Matemática em 2003 e 2005 foram, respectivamente, 278,7 e 271,3 de alunos da terceira série do ensino médio. De acordo com o INEP (Instituto de Normas e Pesquisas), esses resultados servem para que os sistemas escolares discutam e comparem com seus objetivos estabelecidos para o ensino.

O aluno deve ter a oportunidade de desenvolver sua capacidade de pensamento mediante atividades que permitam testar hipóteses, generalizar, fazer conjecturas, transferir conhecimentos, desenvolver uma atitude positiva perante a Matemática entre outras.

Em relação ao ensino de geometria, a ênfase do ensino de Matemática tem se concentrado na valorização da álgebra e no conseqüente abandono do ensino da geometria. Este tem sido abordado somente no final do ano letivo e sem se aprofundar nos conceitos

(PAVANELLO, 1993). De acordo com as Propostas Curriculares para o ensino de Matemática de São Paulo e o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil, observamos que o ensino de geometria deveria ser abordado como parte integrante para o desenvolvimento do pensamento geométrico na educação básica. “O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente” (BRASIL, 1998, p. 51).

Pode-se perceber que esse abandono se estende ao fato de o professor não dominar os conceitos geométricos, desfavorecendo, assim, uma abordagem ampla dentro do currículo escolar e em sala de aula. As pesquisas de Pirola (2000) e Passos (2000) mostraram que professores em exercício não dominavam conceitos básicos de geometria. Passos (2000) afirmou que os professores de seu estudo apresentaram a falta de conhecimentos teóricos e metodológicos para trabalhar com conceitos geométricos.

Pereira (2001) analisou pesquisas nos últimos 20 anos que trataram sobre o “abandono do ensino de geometria”. O Quadro 1 mostra as questões que estiveram presentes nas pesquisas observadas.

Pesquisas	Problemas com a formação do professor	Omissão da Geometria em livros didáticos	Lacunas deixadas pelo Movimento da Matemática Moderna
Vianna (1988)	X	X	X
Bertonha (1989)	X	X	X
Pavanello (1989)			X
Perez (1991)	X	X	
Sangiacomo (1996)		X	
Gouvêa (1998)	X	X	X
Mello (1999)		X	
Passos (2000)	X		X

Quadro 1: Categorias referentes ao abandono do ensino de geometria (Pereira, 2001, p. 56).

Os problemas com a formação de professores estão na falta de conhecimentos necessários em geometria para utilizá-los nas atividades pedagógicas de sala de aula. A geometria presente nos livros didáticos, que apresentou falta de conceitos e conteúdos, influenciou na prática pedagógica do professor (PEREIRA, 2001). A respeito do Movimento da Matemática Moderna (MMM), ficou evidenciada a influência no ensino de geometria pelos autores destacados no quadro acima caracterizando que o movimento gerou lacunas no ensino de geometria e esteve voltado aos estudos algébricos da Matemática. As análises realizadas nas pesquisas colocam o MMM “como o principal responsável pelas seqüelas deixadas no ensino da geometria” (PEREIRA, 2001, p. 65). Ficou evidente que se os professores apresentaram dificuldades sobre o ensino de geometria, não é de se estranhar que os alunos também apresentem desempenho desfavorável.

Várias pesquisas investigaram as dificuldades de alunos na formação e identificação de conceitos geométricos e evidenciaram, entre outras coisas, dificuldades em classificar e diferenciar formas planas e não-planas, além de dificuldades em formar os conceitos a partir da representação das formas geométricas (GARDIMAN, 1994; OLIVEIRA e MORELATTI, 2006; SANTOS, 2002; SILVA, 2004).

É importante a presença do ensino de geometria nas escolas, pois através dos conceitos geométricos “o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1998, p. 51). A geometria auxilia no desenvolvimento de habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação em solução de problemas. Além disso, esse ensino possibilita o desenvolvimento da capacidade de conjecturar, experimentar, testar hipóteses, comunicar idéias, generalizar, entre muitas outras (BRASIL, 2002).

Na visão de Lorenzato (1995), é importante a presença da geometria em nossas escolas, pois esta parte da matemática auxilia as pessoas a solucionarem problemas do cotidiano que, muitas vezes, são geometrizados, além de contribuir para que as pessoas possam solucionar problemas envolvendo outras áreas do conhecimento. “A Geometria desempenha um papel integrador entre as diversas partes da Matemática, além de ser um campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar” (FAINGUELERNT, 1999, p. 49-50).

O Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (PSIEM) da Faculdade de Educação da UNICAMP tem se preocupado em investigar, entre outras coisas, o processo de ensino e aprendizagem da Matemática no contexto escolar. Os trabalhos de Pirola (1995) e Viana (2000) tiveram como enfoque a aprendizagem da geometria, investigando o conhecimento de alunos do ensino fundamental e de futuros professores, respectivamente, sobre figuras planas (polígonos) e figuras espaciais (poliedros e corpos redondos), o que comprovou uma formação conceitual muito aquém de níveis formais de conceito geométricos.

Os conteúdos do ensino compreendem os conceitos, os procedimentos e as atitudes. Os conceitos permitem interpretar dados e fatos, sendo sua aprendizagem gradual e relacionada a conceitos anteriores. Os procedimentos estão relacionados ao saber fazer, o que implica a consecução de uma meta. As atitudes estão ligadas à questão afetiva, à predisposição, à motivação etc. (BRASIL, 1998).

Os conteúdos conceituais são constituídos por fatos, conceitos e princípios (COLL *et al.*,2000). Estes, diferentemente dos conteúdos de procedimentos, correspondem ao conhecimento que as pessoas declaram sobre objetos, acontecimentos e até de relações entre conceitos. Assim, aprender fatos, conceitos e princípios significa que sejam reconhecidos, compreendidos e relacionados, de tal forma que esse "**conhecimento declarativo**, uma vez evocado, possa servir para entender coisas novas" [...] (COLL e VALLS, p. 91-92, grifo meu). Dessa maneira, o conhecimento declarativo dos conceitos de polígono e poliedro, por exemplo, corresponde às informações das propriedades que fazem com que sejam relacionados e diferenciados de outros conceitos.

A importância de se compreender os conceitos deriva do fato de que, no ensino de geometria, uma das dificuldades que os professores têm encontrado é justamente o ensino dos conceitos de polígono e poliedro, o qual tem se processado por um trabalho preliminar com figuras planas. Nesse caso, o professor apresenta triângulos, quadrados, pentágonos entre outros, porém não estabelece relação com os poliedros, o que pode fazer com que os alunos não consigam diferenciá-los, entre eles, ou de outras figuras. Assim, faz-se necessário que o professor mostre aos alunos tanto figuras de polígonos como de figuras que não são constituídas pelas características de polígonos, os não-exemplos[1]. O trabalho por meio dessa comparação entre exemplos e não-exemplos coopera com a aprendizagem, no momento em que permite o aluno não só saber as características que são das figuras apresentadas, mas também as que não são, aguçando, assim, a capacidade de o aluno diferenciá-las.

Segundo a Proposta Curricular para o ensino de Matemática do Ensino Médio (SÃO PAULO, 1992), o ensino deve iniciar com os poliedros e a partir deles, os alunos poderiam ter a possibilidade de formar conceitos como os de paralelismo, perpendicularidade, figuras tridimensionais, faces, discriminação de objetos etc. Propiciar o desmontar, ou seja, a planificação dos poliedros pode dar condições aos alunos de começarem a estudar os polígonos e suas propriedades, bem como seus atributos definidores. Os atributos definidores correspondem às características dos objetos, que no caso dos polígonos, alguns deles seriam:

[1] O termo não-exemplo foi utilizado por Klausmeier e Goodwin (1977) para designar as instâncias que não apresentam todas as propriedades relacionadas aos exemplos de um dado conceito.

figura plana, segmentos de reta, figura fechada. Os atributos caracterizam a informação ordenada sobre o conceito de polígono, fazendo com que ele se diferencie de outros objetos como os poliedros segundo (KLAUSMEIER e GOODWIN, 1977).

Além disso, o trabalho com polígonos e poliedros em sala de aula tem se processado de forma que os alunos apliquem fórmulas prontas e acabadas utilizando, para esse fim, figuras contidas nos livros didáticos ou uma representação de uma figura no quadro negro. Até mesmo o trabalho de construção geométrica, utilizando régua, compasso e esquadro, na maior parte das escolas, não é realizado em sala de aula com os estudantes. Essa atividade pode proporcionar aos alunos a identificação de propriedades das formas geométricas planas e espaciais em termos de seus atributos definidores, reconhecimento de princípios através das relações que se podem estabelecer entre as figuras etc. Pirola (1995) apontou a falta da disciplina Desenho Geométrico na maioria das escolas, a qual oferece a oportunidade de realizar construções geométricas e contribui na compreensão dos conceitos geométricos.

Um tipo de comparação importante que se estabelece entre figuras geométricas é a partir de uma taxonomia. Quando se parte dos conceitos específicos para os gerais como, por exemplo, de quadrado para retângulo até chegar aos polígonos, envolve-se uma relação entre seus atributos definidores, denominada por Klausmeier e Goodwin (1977) de relação supra-ordenada. A relação que parte dos conceitos gerais para os específicos e que compartilham, para isso, atributos comuns, como, por exemplo, de poliedro para prisma e de prisma para cubo, foi denominada pelos autores de relação subordinada.

O "*ensino orientado conceitualmente* utiliza uma estrutura conceitual – taxonomia de partes, de tipos ou matriz – para sua organização" (COLL, 2001, p. 116, grifo do autor). Desse modo, as relações ou estruturas que podem ser estabelecidas entre os conceitos são de subordinação, supra-ordenação e coordenação, as quais estabelecem relações entre classes de conceitos.

Em detrimento de um ensino tradicional que trata a geometria como um corpo de conhecimento pronto e acabado é função do ensino escolar propiciar, entre outras coisas, condições para o desenvolvimento conceitual dos alunos. Assim, tendo em vista os problemas encontrados no processo ensino-aprendizagem da geometria e do papel importante que a aquisição de conceitos geométricos apresenta na formação cognitiva, afetiva e social do aluno, o seguinte problema de pesquisa foi formulado: **Qual o conhecimento declarativo sobre polígonos e poliedros que alunos do ensino médio possuem em termos de seus atributos definidores, das relações subordinadas e supra-ordenadas e de seus exemplos e não-exemplos?**

A pesquisa foi estruturada em oito capítulos que representam a base de investigação para responder ao problema enunciado acima. São capítulos que abordam assuntos referentes à geometria, investigando a formação de conceitos de polígonos e poliedros.

O capítulo I promove uma discussão sobre a área na qual esta pesquisa está inserida, a Psicologia da Educação Matemática, sobre a formação de conceitos e o ensino de geometria. É apresentado, de maneira breve, a história de formação da área de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática e suas linhas de investigação. A formação de conceitos aborda as maneiras de como os conceitos geométricos se desenvolvem e como poderiam ser trabalhados em sala de aula. Ao se tratar do ensino de geometria, é evidenciado o que se pretende com esse assunto, discorrendo sobre objetivos e finalidades para a educação.

O capítulo II constitui a Revisão Bibliográfica e teve como objetivo enumerar os trabalhos que estiveram envolvidos com o ensino e aprendizagem de conceitos geométricos.

No capítulo III são abordadas as concepções de Sternberg (2000) a respeito do conhecimento declarativo e as de Klausmeier e Goodwin (1977) sobre o modelo de formação conceitual. Este descreve a aprendizagem e o desenvolvimento de conceitos, em que um mesmo conceito pode assumir quatro níveis cognitivos (concreto, identidade, classificatório e formal) e podem ser desenvolvidos por meio de atividades em sala de aula.

O capítulo IV discute as definições de polígonos e poliedros, bem como exemplos dessas figuras e alguns de seus elementos. A intenção não é investigar as definições, mas os conceitos dessas figuras a partir de seus atributos definidores e exemplos e não-exemplos.

O capítulo V retoma o problema de pesquisa e são enunciados os objetivos do estudo, o método empregado, os participantes da pesquisa, os instrumentos, o procedimento de coleta e o plano de análise dos dados.

O capítulo VI é centrado nos resultados obtidos na primeira fase e na segunda fase analisados de modo quantitativo e qualitativo, respectivamente.

O capítulo VII mostra os resultados e a análise dos dados. As considerações finais e as implicações do estudo estão apresentadas no capítulo VIII.

CAPÍTULO I

PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, FORMAÇÃO DE CONCEITOS E ENSINO DE GEOMETRIA

1.1 Psicologia da Educação Matemática

A Psicologia da Educação Matemática é uma área de pesquisa que tem como uma de suas preocupações a atividade mental na formação de conceitos em Matemática, fornecendo subsídios para o debate no campo da Educação Matemática.

Desde que os profissionais da Psicologia Educacional se interessaram por áreas específicas do ensino, como por exemplo, pela Educação Matemática, os seus esforços se concentraram em ampliar os conhecimentos sobre o ensino e a aprendizagem. "A maior contribuição da Psicologia Educacional à Educação Matemática é aumentar, através da pesquisa, o entendimento sobre *como* as pessoas aprendem e ensinam a Matemática" (BRITO, 2001, p. 51, grifo da autora). E foi através das mudanças ocorridas na psicologia escolar e na psicologia do desenvolvimento e da aprendizagem que surgiu a área de Psicologia da Educação Matemática.

As discussões sobre a Psicologia da Educação Matemática tiveram início em 1969, dentro das atividades do I *International Congress on Mathematical Education* (ICME) realizado em Lyon na França. Mas a sua estruturação formal como uma área de estudos e pesquisas se deu somente pela constituição do grupo internacional *Psychology of Mathematics Education* (PME), formado no III ICME, realizado na cidade alemã de Karlruhe, em 1976. A partir disso, o PME passou a realizar encontros em diversos países agregando pesquisadores interessados em questões referentes ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

No Brasil o encontro aconteceu, pela primeira vez, em 1995 através da realização das atividades da 19ª Reunião Anual do grupo PME, promovida pelo programa de pós-graduação em psicologia da Universidade Federal de Pernambuco. Posteriormente, em 1996, foi constituído o grupo de Psicologia da Educação Matemática formado por diversos pesquisadores de universidades brasileiras que desenvolviam trabalhos nessa área. O grupo foi agregado à Associação Nacional de Pesquisa e Pós-graduação em Psicologia (ANPEPP) como área de pesquisa (FALCÃO, 2003).

A Psicologia da Educação Matemática surgiu a partir do interesse de profissionais da área da Psicologia Educacional e é considerada uma sub-área da educação. A Psicologia da

Educação Matemática é "uma área de pesquisa que envolve a psicologia, a educação e a matemática, cujo objetivo é estudar o ensino e a aprendizagem da Matemática, bem como os demais fatores cognitivos e afetivos relacionados a essa disciplina" (BRITO, p. 52).

O aporte teórico dessa área envolve as teorias da Psicologia Cognitiva, a qual se preocupa com os processos mentais dos sujeitos, ou seja, como as pessoas aprendem, percebem, recordam e pensam sobre a informação. Nesse caso, a Psicologia Cognitiva e a Matemática, se trabalhadas de forma interdisciplinar, podem permitir um aumento do conhecimento das dificuldades e avanços no ensino e aprendizagem da Matemática (BRITO, 2001).

Os estudos em Psicologia da Educação Matemática abrangem vários temas, entre eles destacamos: atitudes em relação à matemática, gênero e matemática, habilidades, formação de conceitos, solução de problemas, memória, percepção, desenvolvimento dos pensamentos aritmético, algébrico e geométrico, pensamento matemático avançado e educação estatística. Os estudos são realizados nos diversos níveis escolares a partir de concepções cognitivistas.

A presente pesquisa faz parte dos estudos desenvolvidos na área da Psicologia da Educação Matemática e apresenta como tema de investigação a formação de conceitos. À luz da teoria de Klausmeier e Goodwin (1977) sobre formação de conceitos, pretende-se analisar a formação conceitual em geometria de alunos da educação básica. Serão em termos de identificação, discriminação e nomeação, baseados nos processos cognitivos, que os participantes do estudo serão analisados para verificar os componentes de cada nível conceitual que eles têm formado os conceitos geométricos.

A formação de conceitos é uma das capacidades superiores de pensamento, sendo de extrema importância na educação escolar. A sua aprendizagem necessita de um entendimento do professor de como ela acontece para que possa ensinar visando a uma aprendizagem de significados.

1.2 Formação de conceitos

A formação de conceitos é uma questão primordial para o ensino escolar, pois cada disciplina, através de seus conceitos, ajuda no desenvolvimento de habilidades e capacidades do pensamento dos alunos. Além disso, aprender um conceito favorece condições de estabelecer relações com outros conceitos o que determina, conforme Klausmeier e Goodwin (1977), a formação de um princípio, contribuindo para o bom desempenho em solução de problemas. Os conceitos são importantes para a compreensão de dados e fatos que fazem parte de um corpo de conhecimento, tendo em vista que *"para que os dados e fatos adquiram* *significado, os alunos devem dispor de conceitos que lhes permitam interpretá-los"* (POZO, 2000, p. 21, grifo do autor).

Tanto fatos e dados como os conceitos fazem parte do aprendizado. Desse modo, a aprendizagem de fatos e dados corresponderia a seguinte forma:

> Os fatos ou os dados devem ser aprendidos, literalmente, de um modo reprodutivo; não é necessário compreendê-los e, de fato, frequentemente quando se adquirem conteúdos factuais, ou não há nada para compreender ou não se está disposto ou capacitado a fazer esforço para compreendê-lo (POZO, 2000, p. 24-25).

A aprendizagem de conceitos acontece quando a pessoa consegue dar significado a um material de estudo, isto é, quando ela consegue adquirir uma aprendizagem significativa[2]. Assim, a aprendizagem efetiva ocorre a partir do momento em que se ativa alguma idéia geral que está presente em seu acervo conceitual de conhecimentos prévios, ou seja, quando há um diálogo entre a informação nova e a já trazida pelo indivíduo.

> [...] trata-se de um processo no qual o que aprendemos é o produto da informação nova interpretada à luz daquilo que já sabemos. Não basta somente reproduzir informação nova, também é preciso assimilá-la ou integrá-la aos nossos conhecimentos anteriores. Somente assim compreendemos e adquirimos novos significados ou conceitos. (POZO, 2000, p. 32).

Nota-se que o fator essencial para promover a aprendizagem significativa é levar em consideração os conhecimentos conceituais que o aprendiz já possui. É nesse sentido que a aprendizagem de conceitos na escola vem da interação de novos saberes com conhecimentos anteriores, buscando a uma compreensão (aprendizagem significativa), que acontece de maneira gradativa durante os anos escolares do aluno, e não uma memorização arbitrária, que decorre da aprendizagem reprodutiva, podendo gerar nos alunos uma atitude passiva na construção do conhecimento (POZO, 2000).

Klausmeier e Goodwin (1977) definem conceito nessa mesma linha. Para eles, um conceito pode ser definido como um construto mental do indivíduo, ou seja, como os significados que os sujeitos constroem a partir das experiências de aprendizagem e de seus padrões maturacionais únicos.

A aquisição de conceitos está intimamente ligada à estrutura do material (textos, tarefas, discursos expositivos) trabalhado e a predisposição dos alunos para relacionar suas idéias prévias com esse material. Este não pode ser apenas um elenco arbitrário de elementos e sim apresentar uma coerência conceitual interna (POZO, 2000).

---

[2] A aprendizagem significativa é utilizada, de modo geral, para designar a situação de aprendizagem em que "as idéias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva" (AUSUBEL *et al*. 1980, p. 34).

A análise do conteúdo escolar deveria ser feita com a intenção de verificar como pode ser estruturado o conhecimento, a fim de promover e facilitar a aprendizagem dos alunos. O estabelecimento de hierarquias conceituais deve ocorrer por meio da análise do conteúdo "a partir dos conceitos mais gerais e inclusivos até chegar aos mais específicos, passando pelos conceitos intermediários" (COLL, 2001, p. 97). Esta seqüência poderia promover a diferenciação entre os conceitos como ressaltar as relações de semelhança, subordinação, supra-ordenação etc. entre os conceitos. Dessa forma, contempla-se "tanto a estrutura interna dos conteúdos do ensino como os processos psicológicos que intervêm na aprendizagem significativa" (COLL, 2001, p. 98). No entanto as hierarquias conceituais acabam tendo foco nos conceitos, o que é um problema, pois acaba não contemplando conteúdos, por exemplo, procedimentais.

A formação de conceitos matemáticos possibilita identificar os níveis conceituais em que os alunos se encontram e assim propor atividades para que avancem nesses níveis. Para Klausmeier e Goodwin (1977, p. 310), "o ensino-aprendizagem de conceitos é um objetivo educacional importante em todos os níveis escolares". De acordo com isso, professores, especialistas em currículo e planejadores de materiais de ensino estão envolvidos na identificação de conceitos que os alunos podem aprender em níveis sucessivamente superiores.

Uma questão a se observar é a falta de valorização, na prática do professor, com a aprendizagem de conceitos. O professor de Matemática tem valorizado a memorização de fórmulas, definições, regras, teoremas e demonstrações, o que prejudica a compreensão conceitual e a importância de se estudar a formação de conceitos na escola (PAIS, 2002). Segundo Brito e Pirola (2001), o ensino de conceitos na maior parte das escolas tem se firmado na apresentação de regras, definições e fórmulas, desvinculando-os, também, de outros conceitos.

Um dos conteúdos da Matemática em que muitos pesquisadores, dentre eles Lauro (2007) e Teixeira-Filho (2002), investigaram as dificuldades na formação de conceitos é a geometria. Eles têm apontado a necessidade do trabalho com a representação de figuras e com objetos concretos na escola. Esse procedimento metodológico auxilia, através da visualização, a identificar as características das figuras e a diferenciá-las. A "visualização geralmente se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais" (FAINGUELERNT, 1999, p. 53).

Um conceito é formado por outros conceitos e a relação entre conceitos determina um princípio como, por exemplo: todos os triângulos eqüiláteros são semelhantes (em forma). A estrutura de um conceito se dá pela relação entre seus atributos definidores (KLAUSMEIER e GOODWIN, 1977).

A formação de um conceito depende da síntese de uma pessoa sobre os conceitos que ele detinha anteriormente. No caso do cubo, por exemplo, destaca-se:

> Na síntese racional do conceito geométrico cubo podemos destacar os seguintes componentes precedentes: quadrado, segmento de reta, ponto, paralelas, perpendiculares, ângulo, diagonais, entre vários outros. Por outro lado, o quadrado, na condição de componente de cubo, é também um conceito na qual existem outros conceitos [...] (PAIS, 2002, p.61).

Para favorecer a formação de conceitos é necessário investigar os conhecimentos prévios do indivíduo, bem como utilizar e preparar o material ou conteúdo com uma estrutura conceitual elaborada para o ensino. Toda essa preparação e levantamento do que os alunos já sabem passa pela formação do professor. Para uma aprendizagem significativa dos conceitos por parte dos alunos, o professor deve ter domínio sobre o conteúdo, de procedimentos de ensino eficazes e de como se dá a aprendizagem do aluno, eixos considerados por Mizukami (2006) como a base de formação à docência.

As atividades que o professor poderia utilizar para o ensino de conceitos seriam as de descobrimento e de exposição. As atividades de descobrimento seriam aquelas em que os próprios alunos pesquisariam e analisariam o significado e as relações conceituais contida num material não explicitamente estruturado. As atividades de exposição exigiriam que os alunos assimilassem significativamente a informação conceitual organizada apresentada através de um texto ou comunicação oral. Ambas podem ajudar os alunos a aprender conceitos, mas se elas não estiverem corretamente organizadas, ou seja, se na aprendizagem por descobrimento os alunos não encontrarem significado conceitual ou se no ensino expositivo os alunos apenas memorizarem os conceitos, a aprendizagem não seria significativa (POZO, 2000).

Para o ensino de conceitos geométricos, essas características são importantes e muitas vezes são decisivas para auxiliar na formação intelectual do aluno. Assim, o professor pode dar oportunidades aos alunos de manipularem modelos de objetos (caixas, latas, embalagens etc.), realizarem a representação por meio de desenhos, montarem, a partir de planificações, figuras espaciais (cubos, pirâmides, cilindros etc.), apresentarem seus vocabulários sobre a nomenclatura, enfim, proporcionar a construção e desenvolvimento dos conceitos.

1.3 Ensino de Geometria

De acordo com o PCN do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), é consenso a inserção nos currículos, entre outros estudos, do estudo da geometria. A intenção é de identificar que conceitos, procedimentos e atitudes são relevantes para a vida social do aluno.

Em grego, *Geo* significa terra e *metria*, medir. O seu estudo abrange formas geométricas planas e espaciais e um de seus objetivos é a realização pelo aluno de representações planas de objetos tridimensionais e de figuras bidimensionais como também a construção de figuras utilizando régua e compasso e a montagem e desmontagem de sólidos geométricos.

Segundo os Referenciais Curriculares Nacionais para a Educação Infantil (BRASIL, 1998), as experiências das crianças não devem iniciar com os conceitos formais da geometria, mas pela exploração sensorial de objetos, ou seja, pelas relações habituais com o espaço, desenhando, construindo e comunicando essas ações com a intenção de desenvolver seu pensamento geométrico. Com o passar dos anos escolares, o estudo da geometria deveria contribuir para o desenvolvimento da capacidade de organização do pensamento, da habilidade de resolver problemas envolvendo conceitos geométricos, da representação mental de elementos geométricos, como figuras planas e não-planas, da experimentação e validação de resultados, da orientação espacial e da percepção geométrica. O trabalho com esses elementos via estudo da geometria corresponde a uma parte integrante para o desenvolvimento do pensamento do aluno em Matemática.

Assim, a construção em sala de aula de triângulos, quadriláteros, cubos, pirâmides etc., faz parte do ensino de geometria e é essencial para formar os conceitos geométricos, pois os alunos precisam dominá-los para poder realizar uma representação adequada das suas formas. Essas construções devem ser precedidas com um trabalho de manipulação de formas tridimensionais que favoreça a percepção. De acordo com a Proposta Curricular para o ensino de Matemática do Ensino Fundamental, o ensino de geometria, a partir dos primeiros contatos, deve:

> [...] partir da manipulação dos objetos, do reconhecimento das formas mais freqüentes, de sua caracterização através das propriedades, da passagem dos relacionamentos entre objetos para o encadeamento de propriedades, para somente ao final do percurso aproximar-se de uma sistematização. (SÃO PAULO, 1997, p. 11).

Depois de um trabalho inicial com as formas espaciais os alunos podem realizar a sua planificação, permitindo que sejam exploradas e investigadas as figuras geométricas planas:

formas, nomenclatura, classificações etc. Começar pelas formas tridimensionais e depois chegar ao tratamento das formas bidimensionais caracteriza o enfoque da Proposta Curricular para o ensino de Matemática do Ensino Fundamental (SÃO PAULO, 1997). Essa opção pelo ensino de geometria é ressaltada através de um paralelo que a Proposta Curricular realiza com os objetivos de ensino dos antigos Guias Curriculares Nacionais (1977), destacando que estes davam ao ensino de geometria "ênfase na utilização da linguagem dos conjuntos na geometria – o que desviou a atenção das propriedades geométricas" (SÃO PAULO, 1997, p. 181).

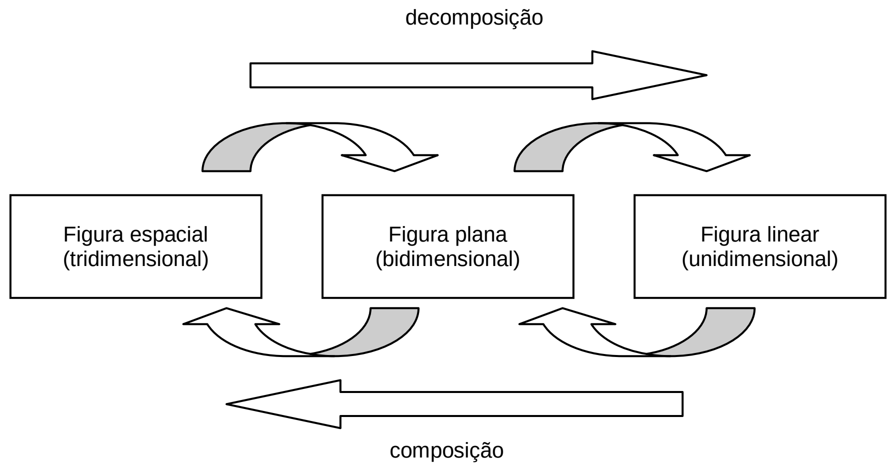


Figura 1: Esquema representativo de um trabalho com figuras espaciais e planas.

Como vivemos em um mundo rodeado de formas tridimensionais, a intenção é partir dos objetos espaciais que estão presentes no espaço da criança.

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998, p. 51).

O estudo da geometria contribui no sentido de possibilitar a representação dos objetos do mundo, ajudando a desenvolver o raciocínio espacial através da visualização das formas. "O estudo da Geometria é de fundamental importância para se desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para a leitura do mundo [...]" (FAINGUELERNT, 1999, p. 53). O desenvolvimento do pensamento espacial e do raciocínio deveriam receber maior ênfase para a aprendizagem no ensino fundamental, em vez de uma abordagem enfática sobre o automatismo, a memorização e das técnicas operatórias (FAINGUELERNT, 1999).

O desenvolvimento das capacidades intelectuais de pensamento e do pensamento geométrico pode ser prejudicado se os conceitos não forem abordados utilizando uma estratégia eficaz de ensino. A geometria, mesmo presente no currículo da unidade escolar, muitas vezes, tem sido negligenciada até o fim do ano letivo. Quando é trabalhada, o professor simplesmente solicita aos alunos que apliquem fórmulas prontas de cálculo de áreas e volumes. Não é feito um estudo explorando os elementos principais de figuras geométricas, os quais realmente caracterizam essas formas e que contribuem para uma melhor formação conceitual e aplicação em solução de problemas.

A geometria é deixada muitas vezes para o fim do ano, apresentando apenas algumas formas geométricas e certas nomenclaturas e trabalham-se poucos exercícios. O professor não precisaria esgotar em uma única unidade a geometria. Ele pode desenvolver uma atividade por dia ou então no mínimo duas vezes na semana durante todo o período letivo o que enriqueceria matematicamente as crianças (DANA, 1994). Dana (1994), sobre o ensino de geometria em sala de aula, ressalta:

> [...] estou convencida de que se trata de uma fonte inesgotável de idéias, processos e atitudes inteiramente adequados à escola elementar. Tenho observado reiteradamente que a geometria pode ser estimulante, motivadora, gratificante, instigadora do raciocínio e, às vezes, desafiante (com freqüência tanto para o professor como para o aluno) (DANA, 1994, p. 141).

Mesmo o professor explorando elementos principais constituintes de figuras geométricas em sala de aula, muitas vezes ele não atenta para os termos que enuncia para os alunos, realizando confusões com as nomenclaturas específicas. Pavanello e Franco (2007) realizaram uma investigação sobre o discurso de uma professora com alunos de quinta série a respeito do tema Figuras Geométricas. Eles mostraram que, na relação entre a linguagem e poucos objetos geométricos que foram trabalhados, a professora apresentou dificuldades em conduzir as explicações, evidenciando imprecisões em seu conhecimento ao abordar os conceitos e a falta de consideração sobre as concepções dos alunos através das respostas erradas fornecidas. Quartieri e Rehfeldt (2007) mostraram que professores em exercício, dos ensinos fundamental e médio, apresentaram dificuldades na conceituação de palavras propostas como quadrados, triângulos, circunferência, rotação, simetria etc.

A aprendizagem dos conceitos geométricos desde a educação infantil favorece o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno e é importante para todos os níveis escolares, sendo o professor responsável em possibilitar tal aprendizagem. No ensino médio os alunos precisam ter aprendido conceitos de polígonos e poliedros, pois precisarão utilizá-los na solução de problemas e também relacioná-los a outros assuntos da Matemática. Inicialmente, a preocupação deve ser com as formas mais freqüentes, com a nomenclatura, com a representação e com a construção de formas geométricas, partindo-se de objetos do cotidiano. Isso evidencia a importância dos objetos para uma posterior abordagem formal dos conceitos. E nesse caso, a percepção a partir de manipulação e construção auxilia na formação conceitual (SÃO PAULO, 1992).

Para a construção do conhecimento geométrico é "fundamental a articulação entre as atividades perceptivas e os momentos de elaboração conceitual, ou o estabelecimento de relações mais consistente entre o conhecimento empírico e sua sistematização formal" (MACHADO, 2000, p. 52). A Proposta Curricular de Matemática do Ensino Médio (SÃO PAULO, 1992) apresenta como conteúdos básicos a serem ministrados nas aulas de geometria os tópicos referentes aos prismas, pirâmides e corpos redondos com intuito de também realizar uma exploração e revisão dos polígonos e das outras figuras planas que formam suas faces e superfícies laterais. O objetivo é realizar uma investigação de propriedades geométricas (diagonais, figura regulares, planificações etc.) como também relações métricas (áreas, volumes, altura etc.).

Um tópico importante da geometria do ensino médio que deveria ser utilizado pelo professor como uma introdução ao abordar a Geometria Espacial é a Geometria de Posição, a qual estuda as posições relativas entre pontos, retas e planos, o que possibilita um entendimento inicial e importante para o aluno na aprendizagem das propriedades e relações métricas das figuras espaciais. Como se trata de uma abordagem intuitiva, muitas vezes a Geometria de Posição não tem sido trabalhada em sala de aula. Pirola (2000), ao citar sua atuação como docente em curso de Licenciatura em Matemática, relatou que as Geometrias de Posição e Métrica estavam colocadas no último ano do curso, sendo que os alunos apresentavam dificuldades para resolver problemas envolvendo os conceitos de área e volume. Se o professor apresentar dificuldades na sua formação, conseqüentemente os alunos não terão oportunidades de desenvolver seus conhecimentos.

Para haver um ensino de geometria de qualidade é esperado que o professor domine os conceitos dessa área, saiba como se processa uma formação conceitual em nível de aprendizagem e como ele pode identificar o conhecimento conceitual de seus alunos para propor atividades que direcionem os alunos a uma aprendizagem significativa dos conceitos geométricos em sala de aula.

Atualmente, vários autores têm destacado a utilização da informática como recurso didático para promover uma aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos. *Softwares* de geometria como o Logo e o Cabri-Géomètre têm sido foco de pesquisa de muitos autores, como Bertolucci (2003) e Maggi (2002), os quais têm mostrado resultados positivos na aprendizagem dos alunos de conceitos geométricas favorecendo a percepção visual. Esses *softwares* têm proporcionado a investigação de propriedades geométricas, estimulando a curiosidade dos alunos na verificação de relações entre as figuras e seus atributos. Os estudos apontam que a utilização de *softwares* geométricos pode auxiliar o processo de ensino e aprendizagem da geometria. O maior problema, no entanto, é quando o professor não tem o domínio sobre as tecnologias da informática, ou quando, mesmo que a escola tenha uma sala de informática, muitos professores não se arriscam a manipulá-las.

Em síntese, o ensino em sala de aula deveria levar em consideração a formação de conceitos geométricos por meio de atividades que permitam que o aluno realize uma aprendizagem com significado. Os alunos poderiam realizar investigações que vão desde explorações de objetos tridimensionais até a construção de conceitos de geometria plana e espacial em níveis formais de pensamento. O professor deve se atentar às condições de ensino que ele enfrentará para alcançar os objetivos educacionais propostos pelos PCN de Matemática.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As dissertações e teses da área de Psicologia da Educação Matemática têm incluído, na organização de seus estudos, um capítulo referente à revisão da literatura que discorre sobre o tema abordado. A revisão bibliográfica possibilita resgatar o que já foi produzido em termos de conhecimento científico e possibilita a discussão, por parte do pesquisador, sobre questões metodológicas e teóricas que foram utilizadas nas pesquisas.

Esta parte do trabalho traz os resultados de estudos que se preocuparam com a questão da formação de conceitos em Matemática e, em especial, com a formação de conceitos geométricos. As pesquisas sobre a formação de conceitos em geometria foram agrupadas de acordo com a semelhança dos objetivos investigados. Todos os estudos selecionados, de uma forma ou de outra, propiciam uma contribuição para melhorar o ensino e a aprendizagem da geometria.

De maneira sintética, as categorias estabelecidas para as pesquisas são apresentadas abaixo.

1. Pesquisas envolvendo as concepções e dificuldades dos alunos em geometria: buscou-se evidenciar dificuldades com a formação de conceitos geométricos desde as representações das formas até nomenclatura e distinção entre figuras planas e não-planas.
2. Pesquisas sobre metodologias no ensino de conceitos geométricos: foram mostrados estudos que utilizaram atividades em sala de aula, bem como cursos e materiais manipulativos como forma de desenvolver a aprendizagem dos alunos.
3. Pesquisas referentes às formas de aprendizagem de conceitos geométricos: foram apresentados estudos nos quais foi possível verificar como os alunos aprendem conceitos geométricos e alguns fatores que viabilizam a aprendizagem.
4. Pesquisas sobre a formação de conceitos geométricos utilizando *softwares* de geometria: procurou-se destacar estudos em que os alunos ampliaram a sua formação conceitual de formas geométricas através do uso de *softwares* de geometria. Os programas computacionais auxiliaram na questão da visualização espacial, favorecendo uma aprendizagem significativa dos conceitos geométricos.

5. Pesquisas sobre o componente da habilidade espacial: a percepção: alguns estudos trataram dos componentes da habilidade matemática, um deles, da habilidade espacial, mais precisamente sobre a percepção na aprendizagem da geometria.

Do total de estudos que foram revistos, 15 tiveram como participantes alunos do ensino fundamental, 8 do ensino médio, 4 professores em formação/exercício, 1 trabalho que investigou livros didáticos e as Propostas Curriculares de Matemática do Ensino Fundamental e 1 estudo que analisou a geometria na grade curricular de um curso militar. O número de trabalhos que envolvem alunos do ensino médio parece ser reduzido, pelo menos não foram encontrados outros estudos com participantes nesse nível de ensino. Várias buscas foram feitas nos bancos de teses e dissertações de algumas universidades estaduais e federais, consultas de periódicos, verificação em *sites*, análise dos trabalhos dos últimos congressos de Educação Matemática como o ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), SIPEM (Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática) etc.

2.1 Pesquisas envolvendo as concepções e dificuldades dos alunos em geometria

As pesquisas aqui relatadas mostram que a maioria dos alunos da educação básica tem apresentado dificuldades quando se deparam em situações-problema, envolvendo a geometria, e essas dificuldades podem ser provenientes de uma má formação conceitual que se processa durante todos os anos da escolaridade.

Com o interesse de estudar figuras tridimensionais e bidimensionais, Oliveira e Morelatti (2006) realizaram uma pesquisa com o objetivo de investigar os conhecimentos prévios e as dificuldades de aprendizagem em geometria de 22 alunos de 5ª série do ensino fundamental quanto à relação existente entre sólidos geométricos e figuras planas. Foram organizados sete grupos e aplicadas três atividades que procuraram investigar: 1- Estratégias para agrupar sólidos geométricos e critérios de agrupamento, bem como a nomenclatura utilizada e a relação com objetos do cotidiano; 2- Relação entre formas tridimensionais e bidimensionais ligando os sólidos às respectivas figuras planas que formam suas faces; 3- O reconhecimento de figuras bidimensionais quanto às diferentes posições e a nomenclatura empregada. A análise dos dados mostrou que os sujeitos da pesquisa apresentaram dificuldades em agrupar e nomear os sólidos geométricos. Utilizaram vários critérios de agrupamento e nomearam incorretamente o cubo e a pirâmide de quadrado e triângulo, respectivamente. Relacionaram de maneira precária os sólidos geométricos às figuras planas que formam suas faces, bem como não conseguiram nomear figuras planas como círculo, pentágono e hexágono. Foi possível verificar que os sujeitos da pesquisa possuíam dificuldades em perceber as semelhanças e diferenças entre os sólidos geométricos e as figuras planas. Nesse sentido, as autoras destacam que o professor precisa abordar no ensino de geometria diferentes estratégias que envolvam a visualização, a construção e o raciocínio geométrico.

Outro estudo sobre o processo ensino-aprendizagem de geometria plana e espacial foi realizado por Silva (2004). Seu objetivo foi identificar as principais causas das dificuldades relativas à formação de conceitos geométricos. Os sujeitos da pesquisa, de natureza etnográfica, foram alunos da terceira série do ensino médio do Centro Federal de Educação Tecnológica de Alagoas (CEFET-AL). Os instrumentos utilizados pelo pesquisador na coleta de dados foram: 1-Observações participantes; 2-Avaliações aplicadas no decorrer das aulas e; 3-Questionários. Procurou-se analisar a complexidade relativa ao campo conceitual em geometria, em relação à riqueza das implicações entre os modelos epistemológico, didático, pedagógico e educacional de quadros didáticos envolvidos no contexto do processo ensino e aprendizagem de geometria. Esta pesquisa apontou como algumas das principais causas das dificuldades no ensino e aprendizagem de geometria plana e espacial um complexo de ordem estrutural nos modelos citados anteriormente. De acordo com esse autor há a necessidade de uma coerência entre teoria e prática, pautada por uma postura reflexiva na ação educadora.

Um estudo sobre uma classe de figuras bidimensionais e de figuras tridimensionais foi realizado por Proença e Pirola (2006), cujo objetivo foi analisar a formação conceitual de polígonos e poliedros, em termos de atributos definidores e exemplos e não-exemplos. Foram sujeitos 187 alunos oriundos de quinta a oitava séries e ensino médio. A base teórica para a pesquisa foi o estudo de Klausmeier e Goodwin os quais descrevem a formação de conceitos de acordo com quatro níveis cognitivos: concreto, identidade, classificatório e formal. A coleta de dados foi obtida pela aplicação de uma prova matemática, tipo lápis e papel, a todos os sujeitos, dos quais oito participaram de uma entrevista. A análise dos dados mostrou que na prova matemática os sujeitos demonstraram pouco conhecimento sobre conceitos, identificação de atributos definidores e também uma discriminação inadequada de exemplos e não-exemplos de polígonos e poliedros, o que também foi evidenciado nas entrevistas. Segundo a base teórica da pesquisa, os alunos se enquadraram no nível de identidade de formação conceitual. É importante salientar que essa aparente conclusão se deveu apenas à análise da prova e da entrevista. No trabalho foi destacada a importância da realização de estudos mais detalhados sobre os níveis conceituais para se obter conclusões mais consistentes.

Elia, Gagatsis e Kyriakides (2003), tendo como sujeitos 99 crianças de quatro a sete anos, realizaram um estudo com objetivo de explorar o papel de polígonos como sendo modelos geométricos no ensino da Matemática, bem como obter e interpretar as concepções geométricas e o entendimento sobre formas geométricas desses alunos. Eles foram solicitados a "desenhar uma escada de triângulos, cada um maior do que o precedente" e repetir o mesmo procedimento com quadrados e retângulos. As teorias de Van Hiele e de Clements, bem como as teorias sobre o uso de modelos geométricos, foram utilizadas para interpretar os resultados. A análise dos dados mostrou que os alunos usaram duas estratégias diferentes para realizar a tarefa: (a) conservação da forma pelo aumento de ambas as dimensões da figura e (b) aumento de apenas uma dimensão da figura. Cada estratégia parece refletir um caminho diferente de raciocínio, possivelmente correspondente a um nível diferente de desenvolvimento do pensamento geométrico, ou seja, elas tendem a apresentar uma estratégia específica conforme a idade. As crianças que utilizaram a estratégia (a) parecem saber usar os componentes e propriedades das figuras, em vez de apenas se focar na aparência. Segundo os autores, os professores precisam utilizar as idéias que as crianças da escola primária apresentam sobre formas geométricas para construir conhecimentos mais amplos sem recorrer a um ensino formal. O ensino de geometria para as crianças deveria enfatizar as propriedades e características das formas, como também a hierarquia e a interconexão e as diferenças entre as formas culminando em casos específicos.

Santos (2002) investigou alunos da 8ª série do ensino fundamental com o objetivo de compreender por que os alunos, geralmente, têm dificuldades na aprendizagem e construção de conceitos geométricos, principalmente, em atividades que exigem articulação entre a dimensão conceitual e os seus diversos registros de representações. Foi utilizada a teoria de Piaget, a qual relaciona a geometria com a conscientização do espaço, com a representação e com a construção do conhecimento matemático, e a teoria de Duval, que analisa a importância e a necessidade do aluno compreender o estatuto das representações na aprendizagem da geometria, pois os objetos geométricos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão do uso de algum sistema de representação. O método para a coleta de dados foi a pesquisa de campo, utilizando-se quatro atividades sendo três em sala de aula e uma no laboratório de informática, com a finalidade de proporcionar ao pesquisador elementos necessários para analisar, compreender e descrever como os alunos tratam dos conceitos que aprendem pela manipulação dos objetos geométricos através do uso do computador em relação ao contato com as representações planas dos objetos. O resultado da pesquisa apontou dificuldades de aprendizagem dos participantes na construção de conceitos geométricos, relacionadas à representação conceitual e à capacidade de abstração e generalização, importantes na elaboração do conhecimento matemático. A mídia informática apresentou-se como ferramenta de grande potencial frente aos obstáculos inerentes à visualização de objetos tridimensionais.

Um outro estudo enfocando as dificuldades dos alunos em geometria é o de Teixeira Filho (2002) que realizou uma pesquisa com o objetivo de investigar as dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio com respeito à aprendizagem de geometria plana e espacial e testar uma metodologia de trabalho para esta aprendizagem. A primeira parte do estudo foi realizada com 258 alunos de segundas séries do ensino médio de um colégio particular de Curitiba. Foram aplicados um questionário escrito e um teste sobre linguagem simbólica. Na segunda parte do estudo, analisou-se uma abordagem metodológica diferenciada para o ensino da geometria. Realizada com os alunos de uma turma de 2ª série do ensino médio do CEFET-PR (Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná), elaborou-se uma atividade que incluía estratégias de motivação em função do contexto escolar no processo de construção do conhecimento e na vivência de situações significativas. A fundamentação teórica que embasou este estudo se apóia na teoria das inteligências múltiplas proposta por Gardner (1983), na programação neurolingüística de Bandler e Grinder (1982), nas teorias de Wallon (1993) (afetividade), Ausubel (1980) (aprendizagem significativa), Dewey (1959) (experimentação) e Vygotsky (1987) (significado e sentido). Pela análise dos dados, em relação às dificuldades dos alunos, o principal entrave estava relacionado à falta de compreensão da Geometria Plana e Espacial no que diz respeito à linguagem e a representação de figuras. Alguns fatores analisados para inferir essa falta de compreensão foram: a participação dos alunos na sala de aula, os meios e as técnicas usadas para o estudo da disciplina. Sobre a aula experimental, a análise dos dados permitiu destacar alguns itens: (a) os alunos tiveram um bom desempenho para o objetivo proposto; (b) o uso de materiais didáticos manipuláveis aumenta o aprendizado; e (c) o sucesso reforça a motivação para aprender geometria.

2.2 Pesquisas sobre metodologias no ensino de conceitos geométricos

Uma das metas da Educação Matemática é investigar e utilizar métodos de ensino que explorem os conceitos geométricos contribuindo para atingir os objetivos estabelecidos para a sua aprendizagem como, por exemplo, a diferenciação entre figuras planas e não-planas. Foram selecionados alguns trabalhos que elaboraram procedimentos de ensino de conceitos geométricos e verificaram suas potencialidades. Silva, V. (2003), por exemplo, realizou um estudo com 10 professores de primeira a quarta séries da rede de ensino municipal da cidade de São Paulo. O objetivo foi verificar a eficácia de uma metodologia de ensino voltada para a construção do conceito de polígono. A pesquisa utilizou os trabalhos de Vygotsky sobre o processo e desenvolvimento de conceitos e o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele. O procedimento metodológico de ensino utilizado constou de um curso intitulado A formação de conceitos geométricos - Polígonos. Com os resultados foi possível verificar que os participantes adquiriram o conceito de polígono, o que parece evidenciar a eficácia da metodologia de ensino utilizada. Entretanto, esses resultados não podem ser generalizados havendo a necessidade de novos estudos em outros contextos.

Inoue (2004) realizou uma pesquisa com o objetivo de descrever o processo de formação do conceito de quadriláteros no decorrer da realização de uma seqüência de atividades e verificar a possibilidade de avanços no desenvolvimento do pensamento geométrico, de alunos de uma 6ª série do Ensino Fundamental. Foram sujeitos da pesquisa, 28 alunos de uma escola pública municipal, situada em Itajaí, estado de Santa Catarina. Para a verificação do avanço entre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico utilizou-se pré e pós-testes, contendo 10 questões nos moldes do modelo Van Hiele. A seqüência de atividades desenvolvidas teve como referência algumas questões desenvolvidas pelo Projeto Fundão, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). O estudo, que utilizou os modelos de Van Hiele e Klausmeier, evidenciou que 76,19% dos sujeitos mostraram avanço em seus níveis de pensamento geométrico, dos quais 52,38% atingiram o nível 1 (reconhecimento) de Van Hiele e 23,81% atingiram o nível 2 (análise). Espera-se que a seqüência de atividades propostas permita a busca de novos olhares para o ensino da geometria.

Levandoski (2002) realizou um trabalho com o objetivo de propor, descrever, aplicar, analisar, interpretar e validar estratégias de ensino para a geometria, utilizando materiais didáticos manipuláveis. Participaram da pesquisa 224 alunos da segunda série do ensino médio de uma escola particular de Curitiba. Materiais como geoplanos, sólidos geométricos convexos e côncavos, utilizados na pesquisa, foram elaborados por professores do CEFET-PR e estagiários envolvidos no projeto “Laboratório de Matemática – desenvolvimento de recursos didáticos para o ensino da Matemática”. As estratégias de ensino de geometria foram investigadas no contexto de aulas ministradas na denominada “Sala de Aula Teórica”, onde foi realizado um ensino tradicional pelo professor da turma e depois um ensino com a apresentação dos materiais pelo pesquisador. Posteriormente, foi verificado o segundo contexto, “Mundo Experimental”, nos laboratórios de ciências. Nesse contexto, baseado num enfoque construtivista, os alunos tiveram a oportunidade de manusear o material didático e foi filmada uma das aulas práticas com a finalidade de se observar como os alunos reagiam a essa nova estratégia de ensino. A análise da aula filmada mostrou que ficou clara a riqueza das trocas interpessoais para o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Foi verificado que houve uma aprendizagem significativa através do estabelecimento de relações entre o novo conhecimento e os conceitos básicos relevantes da geometria.

Com o interesse voltado para melhorias no ensino e aprendizagem de geometria, Chinnappan e Lawson (2005) procuraram descrever uma estrutura, através da descrição e análise da qualidade do conhecimento de conteúdo de professores, para o ensino do conceito de quadrado da área de geometria. Foram investigados dois professores australianos (Gary e Sue) sobre seus conhecimentos do conceito de quadrado. Eles foram escolhidos porque possuíam no mínimo quinze anos de experiência no ensino médio e eram profissionais de destaque na área. Os professores foram entrevistados individualmente em horário escolar e suas respostas foram audiogravadas e filmadas com interesse de conhecer o que eles sabiam e como ensinavam tópicos de geometria. Na primeira entrevista, os professores foram perguntados sobre o conceito de quadrado e seus entendimentos a respeito do ensino e aprendizagem do mesmo. Na segunda entrevista, eles foram solicitados a resolver quatro problemas sendo que dois deles envolviam quadrados. Na terceira, foi realizada uma série de questões para dar oportunidade de verificar o conhecimento relevante que tinham. Por meio destas, a intenção foi de generalizar uma lista de características e relações para o conceito de quadrado, elaborando uma estrutura de mapa conceitual para os professores. O mapa correspondia a uma conexão entre quadrado e quatro áreas com conceitos relacionados: características definidoras, características relatadas, outros esquemas e aplicações. Os dados mostraram que Gary não tinha apenas bem desenvolvido o conhecimento das propriedades do quadrado (ângulos retos; quatro lados congruentes etc.), mas também o de outros esquemas como as relações entre quadrado e outras figuras geométricas (losango, retângulo, polígono etc.). Gary também apresentou muitas relações e conexões entre as características relatadas por ele sobre o quadrado (simetria, área, reflexão etc.). Entretanto, Sue, nas quatro áreas de conexão com o quadrado apresentou poucas relações. Não se aprofundou nas ligações estabelecidas entre o quadrado e outros quadriláteros, não mostrou um conhecimento aprofundado sobre simetria, conforme o fez Gary, enfim. Na área de aplicações, somente Gary forneceu alguma utilização do quadrado. No geral, ambos os professores mostraram possuir um conhecimento considerável sobre o conhecimento geométrico apresentando uma ligação favorável entre a linguagem e as imagens de figuras bidimensionais.

Martino (2001) preocupado com o ensino de geometria procurou investigar, numa perspectiva histórica, as causas da ênfase tradicionalmente dada pelo Exército Brasileiro ao ensino de Matemática em suas academias militares e à luz dos fatos sociais, políticos e econômicos e dos paradigmas pedagógicos vigentes, os motivos que têm levado esta instituição a abandonar, paulatina, mas completamente, o ensino de geometria. A pesquisa mostrou que em um período de 6 anos, foram suprimidos o ensino de Geometria Descritiva, no período de modernização do ensino, e o ensino de Geometria Analítica. O currículo das academias militares, destinado a formar engenheiros, caracterizou-se pelo constante confronto de opiniões entre correntes de cunho científico, que advogavam em prol de uma formação cultural, e de pensamento voltado para a questão profissional, que preferiam uma formação que fosse rigidamente militar. O pensamento filosófico positivista e as diversas tendências pedagógicas que pontuaram a educação brasileira no último século influenciaram as discussões sobre o currículo. A geometria pode fornecer uma enorme contribuição para a preparação técnica dos oficiais do exército.

2.3 Pesquisas referentes às formas de aprendizagem de conceitos geométricos

Nesta parte, foram selecionadas pesquisas que mostraram como os alunos aprendem conceitos e que tipo de atividade pode facilitar a sua aprendizagem.

Viana (2000) realizou um estudo sobre o conhecimento geométrico de alunos do curso Cefam sobre figuras tridimensionais mais comuns. Foram sujeitos da pesquisa 377 alunos das quatro séries do Cefam (Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do magistério) de Mogi das Cruzes/SP. Os alunos foram classificados de acordo com os graus de aquisição dentro dos níveis de conceituação propostos por Van Hiele. Foram também analisadas duas habilidades: a visual/gráfica (através dos desenhos de planificação de figuras) e a verbal (através da linguagem utilizada para nomear e descrever propriedades das figuras), tendo sido criadas categorias de análises fundamentadas, respectivamente, nas teorias de Piaget sobre representação do espaço e de Vygotsky sobre a nomeação de conceitos científicos e espontâneos. Os resultados mostraram que o fato de gostar de geometria e matemática, a procedência dos alunos, a avaliação que fizeram do ensino de geometria e a sua série influenciaram no desempenho. A partir da análise, a maioria dos alunos admitiu não estar preparada para ensinar geometria espacial.

Passos (2000), numa pesquisa sobre a complexidade no ensino-aprendizagem da geometria, buscou investigar como o aluno representa e interpreta tipos diferentes de representações geométricas e como o professor percebe e explora essas representações. Os sujeitos da pesquisa foram alunos de cinco classes de 4ª série do Ensino Fundamental (uma escola particular e quatro públicas) e suas respectivas professoras. Foi realizado um Estudo de Caso, com enfoque qualitativo, utilizando-se da resolução de problemas geométricos. Foram analisados os procedimentos dos alunos para representar sólidos geométricos no plano e no espaço e as dificuldades no reconhecimento de representações planas de objetos tridimensionais; também foram analisadas as convenções e o vocabulário próprio da geometria. A análise dos dados mostrou a importância da visualização e da representação geométricas no processo de ensino-aprendizagem dos alunos. A autora também destacou em seu estudo considerações didático-pedagógicas para auxiliar na reflexão sobre possíveis melhorias no ensino da geometria como, por exemplo, refletir se o modo como o professor aborda as atividades propostas em sala de aula estão propiciando o desenvolvimento da visualização e representação geométrica.

Araújo (1999) tendo como sujeitos alunos da sétima série de uma escola da rede de ensino público do município de Goiânia, investigou como eles adquirem conceitos geométricos, com base na teoria de Van Hiele e na articulação entre a álgebra e a geometria. A metodologia utilizada foi uma experiência de ensino orientada nos trabalhos de Piaget e Pierre e Dina Van Hiele, os quais abordaram o desenvolvimento do pensamento geométrico. A análise dos dados foi realizada sob a ótica da teoria sócio-histórica de Vygotsky e evidenciou que a formação de conceitos geométricos pelos alunos passa por etapas evolutivas, as quais são caracterizadas de acordo com níveis diferenciados de abstrações e generalizações. Esses conceitos geométricos são construídos através da interação dos conceitos cotidianos e científicos. Foi constatado que existe uma variabilidade na forma de pensamento e na construção dos conceitos, pois não houve limite fixo entre os níveis do pensamento geométrico. Um aluno que está em um nível mais avançado pode ou não resolver problemas que estejam em estágios menos avançados. A autora pôde observar que a linguagem do professor e dos colegas contribui para o desenvolvimento das operações mentais e para a formação de conceitos. Foi observado também que os alunos ainda estão longe de realizarem uma articulação entre a álgebra e a geometria. A importância do desenvolvimento de propostas de ensino de geometria leva em consideração: 1-Linguagem cotidiana e científica que o professor e o aluno possuem; 2-Interações em sala de aula; 3-níveis de desenvolvimento real e potencial do aluno.

Frade (2005) realizou uma pesquisa, em uma escola pública de ensino fundamental, sobre a dimensão tácito-explícita[3] da aprendizagem matemática. O referencial teórico para a pesquisa foram os trabalhos de Polanyi e Ernest, sobre conhecimento tácito e no modelo matemático envolvendo componentes tácitos e explícitos, respectivamente. Foram realizados dois estudos seqüenciais. No primeiro, foi analisado um episódio relacionado a uma discussão acerca da diferença entre figuras planas e figuras espaciais, iniciado pela professora, em uma classe de 6ª série, com 28 alunos, o qual durou vinte minutos sendo registrado em fitas de áudio. No segundo estudo, foi observado o desenvolvimento do conhecimento matemático de áreas e medidas de uma dupla de alunos dessa classe sob diferentes atividades matemáticas. Na análise do primeiro estudo, pôde-se perceber uma rica dinâmica entre o tácito e o explícito na discussão. Comparando os dois estudos, os conhecimentos tácitos dos alunos mostraram-se dependentes das tarefas. Porém, as articulações internas não dependeram das tarefas, pois foi possível identificá-las em quase todas as atividades distintas. A divergência entre o pensamento e a fala pode estar na dimensão tácito-explícito, isto é, na maneira como o tácito participa do processo de enunciação das compreensões formuladas. A autora teve a indicação, através dos resultados, de que a cognição não é, necessariamente, restrita e coincidente com a linguagem, mas vista como uma prática social situada, movendo-se entre os pólos das dimensões tácita da ação eficaz e explícita, projeção intersubjetiva dessa ação.

Dias (1998), à época professora de Desenho e Matemática, tendo como participantes seus alunos, procurou evidenciar as relações de aprendizagem existentes entre as disciplinas Geometria e Desenho e, também, mostrar a importância do desenho enquanto elemento facilitador de desenvolvimento do pensamento espacial. Rina Hershowitz, L. S. Vygotsky e Piaget foram os teóricos utilizados como referências para a pesquisa. Esta, desenvolveu-se segundo uma orientação intervencionista, com o objetivo de produzir resultados imediatos. O desenvolvimento desta pesquisa se deu utilizando as seguintes etapas: 1- aplicação de atividades em duas turmas de sétima série do primeiro grau, em dois momentos distintos; 2- análise de alguns livros texto de Matemática e Desenho e; 3- aplicação de questionários e entrevista com professores de Matemática e Desenho atuantes nos três graus de ensino. A autora observou que a metodologia adotada nas aulas de Desenho necessita ser urgentemente reformulada, para que o mesmo ocupe seu verdadeiro lugar na formação acadêmica dos alunos. Outro item é que os professores desta disciplina precisam tomar consciência de que

[3] Na teoria de Ernest (1998), o conhecimento matemático envolve componentes tácitos como a linguagem e simbolismo; visões meta-matemáticas; métodos, procedimentos, estratégias; estética e valores; e componentes explícitos como afirmações e proposições; provas e raciocínios.

procedimentos mecânicos baseados apenas em processos gráficos sem apresentar justificativas e relações com conteúdos de geometria não favorecem o desenvolvimento do pensamento espacial. Ressalta-se que a geometria deve ser ensinada em total sintonia com o Desenho, sendo necessário um entrosamento entre professores destas duas disciplinas para facilitar o aprendizado dos alunos.

2.4 Pesquisas sobre a formação de conceitos geométricos utilizando *softwares* de geometria

Uma das alternativas para a melhoria do ensino e aprendizagem da geometria tem sido o uso da informática como recurso didático na prática pedagógica. Esse recurso tem possibilitado aos alunos a visualização e manipulação de formas geométricas através de diferentes *softwares*. Alves (2004) com o objetivo de verificar se o uso de um *software* de geometria dinâmica auxiliava no desenvolvimento das representações mentais de objetos geométricos e se ele interferia numa melhor compreensão de conceitos relacionados a este domínio do conhecimento, realizou dois trabalhos de campo. O primeiro com alunos ingressantes no ensino técnico e o segundo com alunos concluintes. Com aqueles foi abordado o conteúdo de triângulos, suas classificações e cevianas e, com estes, abordado o conteúdo sobre cálculo de volume e a justificativa das fórmulas através do Princípio de Cavalieri. Teve como fundamentação teórica o construtivismo cognitivista de Jean Piaget, o sócio-construtivismo de Vygotsky, o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e as teorias de resolução de problemas e de representação do conhecimento sob a ótica da Psicologia Cognitiva. Os resultados mostraram que a introdução da tecnologia informática pôde efetivamente apontar uma melhora no desempenho dos alunos e potencializar a sua habilidade para visualizar conceitos geométricos.

SILVA, C. (2003) realizou um estudo com o objetivo de investigar, comparativamente, o desempenho de alunos em relação a conceitos de geometria em situação em que se utiliza ou não o *Software* Computacional Logo/Megalogo na sala de aula. Além disso, outra preocupação foi a de investigar se, quando se utiliza esse *software*, os alunos apresentavam atitudes mais positivas em relação à Matemática em comparação com as atitudes dos alunos que não o utilizaram. O LOGO foi utilizado com o apoio de livros didáticos, paradidáticos, vídeo e mosaico geométrico. Fizeram parte deste estudo 113 alunos da oitava série do ensino fundamental da rede estadual de ensino de São Paulo e 106 alunos da oitava série de uma escola da rede municipal de São Paulo. Foi utilizada para a coleta de dados uma prova escolar, tipo lápis e papel, contendo oito questões relacionadas à geometria, aplicada em três momentos, sob a forma de pré-teste (1 e 2) e pós-testes (1 e 2), tanto para o grupo A (G.A.) como para o B (G.B.); livros paradidáticos, mosaicos geométricos envolvendo alguns polígonos; e uma escala de atitudes desenvolvida por Aiken (1961). O resultado de alunos do G.A., que participaram de aulas com o uso do Logo/Megalogo, mostrou que as notas foram melhores do que as dos alunos do G.B., quando não se usou o Logo/Megalogo. Na comparação entre os resultados dos grupos, antes da utilização do *Software* Computacional Megalogo no ensino da Matemática (pré-teste), não houve diferença significativa de notas médias, quando se compararam dados dos Grupos A e B. Depois do uso do recurso do Logo no ensino, o teste estatístico (teste F) indicou uma diferença estatisticamente significativa entre os grupos para o pós-teste 1 e para o pós-teste 2. O uso do computador no ensino da Matemática, portanto, na proposta de aprendizagem significativa com o suporte de livros paradidáticos, vídeo e do uso do mosaico geométrico, teve uma influência significativamente positiva na nota de prova que os alunos realizaram. Os resultados da pesquisa mostraram que, na comparação entre os grupos, antes da utilização do recurso do Logo na sala de aula (Pré-teste), não houve diferença significativa nas atitudes dos sujeitos do G.A. e do G.B. em relação à Matemática. Depois do uso do Logo/Megalogo no ensino, ocorreu uma diferença estatisticamente significativa quando se compararam as atitudes dos alunos desses dois grupos. Comparando-se as atitudes em relação à Matemática no Pré-teste e nos Pós-testes 1 e 2, verificou-se que as atitudes dos alunos do Grupo B foram mais positivas no Pré-teste do que nos Pós-testes 1 e 2. Os alunos do Grupo B no Pós-teste 1 e no Pós-teste 2, depois de aulas de geometria sem o uso do Logo, apresentaram atitudes menos positivas do que as do Pré-teste.

Pratt e Davison (2003) realizaram uma pesquisa com o objetivo de investigar um trabalho de ensino para a construção e definição de quadriláteros. Os sujeitos foram 2 alunas de onze anos do ensino fundamental chamadas pelos autores de Christine e Michelle. Elas foram entrevistadas durante trinta minutos com o intuito de explorar suas idéias matemáticas e atitudes em relação ao computador. Posteriormente, o programa de ensino com as meninas consistiu de oito tarefas que elas realizaram no Cabri-Géomètre, envolvendo quadriláteros, triângulos, reflexão e translação, onde cada tarefa foi discutida utilizando o *Interactive Whiteboards*[4] *(IWBs)* e a maioria foi vídeo-gravado. No final do programa, as duas meninas foram novamente entrevistadas e questionadas sobre suas respostas em relação a duas tarefas: uma que envolveu a questão, mostrada no IWB, de que um quadrado é um tipo de losango e

[4] Consiste em uma placa grande (acessada através do toque) conectada no desktop de um computador e conectada a um projetor.

outra sobre as propriedades do paralelogramo. Os resultados indicaram que Michele achava que apenas o losango era um tipo de quadrilátero, enquanto Christine achava que era apenas uma pipa (figura que se forma quando um vértice do quadrado ou losango é deslocado na linha da diagonal para fora da figura em um ponto qualquer). Quando elas mudaram a posição dos vértices do quadrilátero, no IWB, formando uma pipa, ficaram em dúvidas se não era um losango, apresentando dificuldades devido aos aspectos visuais. Essa situação mostrou que suas idéias não deram suporte para entender a hierarquia dos quadriláteros, tendo em vista os critérios de inclusão. A construção de desenhos no IWB possibilitou observar as condições visuais das figuras. Nesse caso, o trabalho do professor deve ser o de auxiliar nos aspectos conceituais. Para os autores, uma mudança da ênfase no uso da IWB pode possibilitar uma compreensão dos conceitos sobre figuras através da questão conceitual das mesmas em vez do foco nos componentes visuais.

Maggi (2002) em sua pesquisa tratou do uso do computador e do programa LOGO como ferramentas de ensino de conceitos de geometria plana e de suas implicações no processo de ensino-aprendizagem. Para tal, utilizou uma metodologia de pesquisa qualitativa e participante, que leva em consideração os diversos aspectos suscitados pelo uso dos computadores como os observados nessa pesquisa: as interações afetivas da relação da criança com o computador e o programa educacional utilizado; os aspectos sociais inerentes ao desenvolvimento de atividades em um ambiente colaborativo de aprendizagem; o estabelecimento de regras de trabalho em grupo e a autonomia moral. A análise teve Piaget como referencial teórico e foi constatado o destaque do desenvolvimento da afetividade e o papel das interações sociais no processo de ensino-aprendizagem. De acordo com o autor o uso do computador promove uma melhora qualitativa no ambiente de aprendizagem, enriquecendo-o e contribuindo para o desenvolvimento cognitivo das crianças.

Pina (2002) realizou uma pesquisa com o objetivo de compreender e apresentar o quanto estavam formados os conceitos geométricos. Essa investigação visou à aprendizagem de alunos ao trabalharem com o Cabri Géomètre, situação decorrente do período em que a professora da classe aplicava seus projetos de trabalho. Os sujeitos da pesquisa foram alunos de sexta série do Colégio Militar de Brasília. Essa situação de ensino compõe a problemática relativa à prática pedagógica da geometria. Para isso foi utilizada uma metodologia que envolveu a observação, o registro no diário de campo e a gravação da produção dos alunos. Nas atividades de interação com o *software* e execução dos projetos pelos alunos, a autora observou que essas ações criaram condições favoráveis à aprendizagem da geometria, à mudança do estatuto do erro e do papel do aluno, alterando paradigmas anteriores. No grupo observado desenvolveu-se a noção do erro como estratégia de ação, atribuindo-lhe caráter positivo e, no aluno, a característica dinâmica e investigativa comum às ações do cientista ante o desconhecido. A análise foi feita a partir das teorias da Didática da Matemática e da Psicologia Cognitiva. Com esses resultados, a autora apontou: 1- a importância do trabalho em duplas; 2- a integração dos projetos de trabalho às ações de interação no Cabri; 3- a importância da pesquisa como fonte de formação reflexiva e; 4- a formação de conceitos no campo conceitual geométrico, pautada nos elementos: ação, mediação, representação e institucionalização.

Nesse mesmo sentido de interação, Bertolucci (2003) realizou uma pesquisa com o objetivo de avaliar a influência do uso do *software* Cabri-Géomètre II na aprendizagem de conceitos geométricos. Foram sujeitos 24 alunos de uma de 5ª série do ensino fundamental de uma escola pública localizada no município de Jaú-SP. Foi elaborada e implementada uma intervenção pedagógica, um curso, sobre alguns conteúdos geométricos dessa série (ângulo, medida angular, bissetriz de um ângulo, ângulos consecutivos e adjacentes, ângulos complementares e suplementares e ângulos opostos pelo vértice) com vinte e quatro alunos. A sua realização de deu na sala de informática da escola e para isso se utilizou oito computadores com o *software* Cabri-Géomètre II instalado. Montaram-se grupos de três alunos e seis temas com o conteúdo de geometria, os quais possuíam um roteiro escrito com objetivos, conceitos e procedimentos que os alunos deveriam realizar. No final da experiência, os alunos resolveram duas provas escritas individuais sobre os assuntos estudados e responderam um questionário para avaliação do curso. Os resultados desta pesquisa indicaram que o impacto do uso do *software* Cabri-Géomètre II, da forma como a intervenção foi proposta, foi positivo para a aprendizagem dos conceitos geométricos, mas não no nível em que outros estudos nessa área têm indicado. Foram sugeridas algumas alterações no curso para que, em outras experiências, o trabalho docente possa ser melhorado e, feitas algumas indicações para as políticas públicas de informatização das escolas.

Purificação (1999) realizou um trabalho com o interesse de analisar os avanços do pensamento geométrico de sujeitos ao utilizarem o *software* educacional Cabri-Géomètre. A pesquisa se desenvolveu com sujeitos da 8ª série do ensino fundamental de uma escola pública na cidade de Curitiba. O referencial teórico adotado foi o de Van Hiele sobre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. A elevação para cada nível necessita de cinco fases de aprendizado: informação, orientação guiada, explicitação, orientação e integração. Segundo esta teoria é possível identificar esses níveis e também propor alternativas metodológicas para o avanço dos mesmos. O trabalho se deu primeiramente com a aplicação do pré-teste de Van Hiele e primeira entrevista utilizando o recurso do *paint brush*, depois com a realização de atividades utilizando o *software* Cabri-Géomètre, pós-teste de van Hiele e segunda entrevista. A hipótese da pesquisa era que sujeitos ao utilizarem o *software* Cabri-Géomètre em uma situação de ensino-aprendizagem avançariam do nível visual para o nível de dedução informal segundo a teoria proposta por Van Hiele. A análise dos dados mostrou que somente os sujeitos que demonstraram alta aquisição do nível 2 (análise) de Van Hiele no pré-teste, avançaram para o nível 3 (dedução informal).

As pesquisas que investigam as potencialidades de *softwares* geométricos em relação às formas tradicionais de ensino têm apresentado resultados que mostram que esses *softwares* são bons recursos didáticos para auxiliar a aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, uma formação adequada do professor sobre o conhecimento de como utilizar essa ferramenta didática pode propiciar a ajuda pedagógica nas atividades escolares.

Zulatto (2002) teve como objetivo investigar o perfil dos professores que utilizavam *softwares* de Geometria Dinâmica e suas perspectivas com relação às potencialidades dos mesmos. Foram sujeitos da pesquisa, 15 professores do ensino público e particular que já tinham utilizado *softwares* de Geometria Dinâmica para o ensino. A coleta de dados se deu pela realização de entrevistas individuais, as quais foram audiogravadas e transcritas. O roteiro utilizado para as entrevistas envolveu assuntos como formação do professor, *softwares* utilizados, conteúdos matemáticos, dificuldades encontradas *versus* suporte recebido, condições das salas de informática entre outros. A análise dos dados evidenciou que o perfil dos professores não está relacionado à formação inicial, sendo que não tiveram oportunidades no curso para discutir sobre *softwares* geométricos. São oriundos de cursos de universidades públicas e particulares e que consideram fundamentais a formação continuada e o suporte dado nas escolas para investirem no conhecimento e uso dos *softwares*. Em relação às perspectivas, os professores relataram que o dinamismo dos *softwares*, por meio do “arrastar”, possibilita a construção de figuras geométricas, a realização de atividades investigativas e a exploração e visualização de propriedades, o que motiva os alunos.

2.5 Pesquisas sobre o componente da habilidade espacial: a percepção

As pesquisas apresentadas nesta parte visam destacar de que forma a percepção auxilia na construção do conhecimento geométrico. A percepção favorece o reconhecimento de propriedades por meio da visualização e manipulação de formas geométricas.

Oliveira (1998) investigou 9 estudantes de sexta série do ensino fundamental de uma particular da cidade de Campinas/SP com o objetivo de investigar e analisar as habilidades de percepção espacial na solução de problemas geométricos envolvendo discriminação e composição de figuras. O referencial teórico do conceito de habilidade de percepção espacial foi baseado nos trabalhos de V.A. Krutetskii (1976) e de Del Grande (1988, 1990), sendo este último utilizado para estabelecer as categorias de análise referentes à percepção espacial. Os sujeitos resolveram, individualmente, seis problemas que envolveram a identificação e composição do triângulo, quadrado e do paralelogramo, utilizando o Tangram, confeccionado em papel cartão, e o *software* Tegram. Essa resolução foi acompanhada e filmada pela pesquisadora, a qual, utilizando a metodologia do "pensar em voz alta", incentivava e estimulava os sujeitos a falar seus procedimentos. A análise dos dados mostrou que, mesmo as atividades de discriminação e composição de figuras serem simples, os procedimentos utilizados pelos sujeitos envolveram uma grande variedade de componentes de percepção espacial. A composição de figuras exigiu maior intervenção da pesquisadora, tendo em vista que as transformações geométricas necessitaram de translações, rotações e reflexões.

Rezi (2001) realizou um estudo tendo como sujeitos 201 alunos concluintes do ensino médio de duas escolas, uma pública e outra particular, submetidos a cinco instrumentos do tipo lápis e papel. Utilizando a abordagem da solução de problemas, o objetivo do estudo era contribuir para o entendimento de alguns componentes da habilidade matemática que são utilizados em atividades que envolvem conceitos geométricos. Procurou-se investigar quais as relações existentes entre o nível de desenvolvimento do pensamento em geometria e componentes das habilidades matemáticas, como a percepção geométrica e a habilidade para conceitos espaciais. Foi identificada uma relação linear significativa entre esses construtos, sendo que quanto maior o nível de desenvolvimento em geometria do sujeito, melhor era o seu desempenho em provas que avaliavam a percepção geométrica, as habilidades para trabalhar com conceitos espaciais e o raciocínio espacial. Os dados foram analisados também através de análise fatorial, sendo que as provas se agruparam em três fatores de avaliação: problemas com enunciado verbal, problemas que requerem processamento visual e problemas que requerem representação e manipulação mental de objetos.

Viana (2005) investigou 177 sujeitos do ensino médio de uma escola particular tendo como objetivo analisar o componente espacial da habilidade matemática e verificar a existência de relações entre o componente, o raciocínio espacial, as atitudes em relação à matemática e à geometria e o desempenho escolar. Utilizou um teste psicológico de raciocínio espacial e duas escalas de atitudes em relação à Matemática e geometria. As teorias utilizadas foram baseadas nos trabalhos de Krutetskii (1976) sobre a habilidade espacial envolvendo seu componente, a percepção, a qual também foi discutida pelas idéias de Sternberg (2000). E a respeito da formação e manipulação de imagens mentais e também da percepção, o estudo se fundamentou na teoria de Kosslyn (1995). Pela análise dos dados, os desempenhos em geometria estavam relacionados com o raciocínio espacial, com o componente espacial da habilidade matemática e com as atitudes em relação à geometria. Os dados também mostraram que os sujeitos mais habilidosos elaboram representações parciais e coerentes e não as utilizavam com a função de assistência perceptual.

Lauro (2007) realizou um estudo com o objetivo de investigar como as Propostas Curriculares instituídas no sistema nacional de ensino abordaram a articulação entre os quatro processos fundamentais (percepção-contrução-representação-concepção) na construção do conhecimento geométrico. Investigaram-se, também, alguns livros didáticos, desde o século XIX, sobre a existência ou não do equilíbrio e o trânsito entre os quatro aspectos citados. Para obter os dados, a referida autora realizou uma análise, ao longo da história da Matemática, das Propostas Curriculares e também em livros didáticos de 5ª a 8ª séries, sobre os quatro processos para o ensino de geometria. A base teórica principal utilizada foi Machado (1990, 2002), o qual discorre sobre a dinâmica de construção do conhecimento geométrico tendo como fundamental a caracterização dos quatro aspectos, foco investigado nos materiais de coleta de dados. Pela análise dos dados, a autora mostrou que os autores dos livros didáticos sempre abordaram a representação no ensino da geometria. Já com a construção, ela foi estimulada apenas em alguns dos livros selecionados. Mesmo considerando livros mais antigos, sempre existiram autores que se preocuparam em articular os quatro processos fundamentais no ensino da geometria. Por fim, a autora propõe um conjunto de atividade em geometria plana com o tema “Razão Áurea” articulando percepção, construção, representação e a concepção.

Ferreira e Correia (2007) realizaram um estudo com o objetivo de investigar as potencialidades das atividades de exploração como uma estratégia de ensino e aprendizagem a ser utilizada em estudos introdutórios de geometria, relacionados à percepção geométrica e visualização espacial. Foram sujeitos da pesquisa 71 alunos do ensino médio de duas escolas públicas (30 alunos do ensino diurno e 41 alunos do ensino noturno) da cidade de Sarzedo/MG. Na presença de seus professores, os alunos responderam, em duplas, a três questões retiradas de uma prova de concurso público para professor de Matemática (Município de Betim/MG) que envolviam a habilidade de percepção espacial a respeito da generalização de quadrados, identificação de triângulos e identificação de cubos em um bloco retangular. A análise dos dados mostrou que os alunos apresentaram dificuldades em perceber figuras geométricas como no caso de alunos do diurno que achavam que mudando a posição da folha, o triângulo obtido era diferente do mesmo já encontrado. Também foi percebida uma grande dificuldade nos alunos em visualizar figuras espaciais, ponto que necessitará de maiores intervenções por parte dos professores em suas respectivas turmas. Os autores observaram que as atividades de natureza exploratória se apresentaram como uma estratégia de ensino e aprendizagem rica em potencialidades para os estudos de geometria.

O Quadro 2 sintetiza as principais conclusões extraídas das pesquisas revistas neste capítulo.

Pesquisas envolvendo as concepções e dificuldades dos alunos em geometria
• Falta de conhecimento conceitual para diferenciar figuras planas de não-planas; • Confusão da nomenclatura de figuras planas com as não-planas; • Desconhecimento de propriedades das figuras; • Dificuldades em representar figuras geométricas.
Pesquisas sobre metodologias no ensino de conceitos geométricos
• Estratégias/metodologias/cursos foram eficazes para promover a aprendizagem; • Estrutura de pensamento em geometria mostrou que um conceito é relacionado a outros conceitos.
Pesquisas referentes às formas de aprendizagem de conceitos geométricos
• As atitudes positivas influenciam no desempenho dos alunos; • Visualizar e representar formas geométricas favorecem a compreensão dos alunos; • Os alunos apresentam variabilidade na construção de conceitos; • Muitas vezes há divergência entre pensamento e fala.
Pesquisas sobre a formação de conceitos geométricos utilizando *softwares* de geometria
• Os softwares auxiliam no desenvolvimento de habilidades de visualizar conceitos geométricos; • Propiciam a tendência de geração de atitudes positivas dos alunos; • Deve-se voltar os olhares para investigar os conceitos em vez de apenas ter o foco nos componentes visuais;
Pesquisas sobre o componente da habilidade espacial: a percepção
• A percepção é essencial na aprendizagem da geometria; • A percepção está relacionada com o bom desempenho nas atividades de construção e representação de figuras geométricas.

Quadro 2: Categorias das pesquisas e as conclusões a respeito do ensino e aprendizagem de geometria.

As pesquisas apresentaram um olhar voltado para a compreensão das dificuldades em geometria e para o entendimento dos fatores que favorecem o ensino e aprendizagem de conceitos geométricos em sala de aula.

CAPÍTULO III

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 A representação do conhecimento declarativo

Segundo Sternberg (2000), existem duas formas de conhecimento: o declarativo e o de procedimento. O conhecimento declarativo corresponde às informações reais que as pessoas conhecem sobre objetos, idéias e eventos, no ambiente. O conhecimento de procedimento engloba as informações quanto à maneira de executar uma seqüência de operações. A diferença entre eles está em *saber o que* e *saber como*, respectivamente.

Conforme Eysenck e Keane (1994), ao fazer a distinção entre os conhecimentos declarativo e de procedimento, o conhecimento declarativo é aquele que se pode expressar ou declarar, enquanto o de procedimento, que é o como fazer as coisas, em geral é difícil de ser expresso.

O conhecimento declarativo envolve uma representação externa por meio de figuras e palavras (pictóricas e lingüísticas, respectivamente) e uma representação interna feita por meio de imagens mentais (analógicas e proposicionais).

Na visão de Sternberg (2000), tanto a figura como a palavra não são suficientes para transmitir todas as informações a que se destinam. Uma figura transmite as informações concretas e espaciais (posições, medidas etc.) de modo análogo as formas do objeto que representa, garantindo uma similaridade como, por exemplo, a figura de um paralelepípedo representando uma embalagem de caixa de leite. A palavra corresponde a uma representação simbólica e estabelece com o que ela representa uma relação por uma regra arbitrária, de modo que as informações que são transmitidas seguem a estrutura para o sistema simbólico da palavra. Por exemplo, para denominar algumas figuras geométricas constituídas de ângulos internos de polígono, foram estabelecidos que a palavra seria formada por *poli* e *gono*, dois vocábulos gregos que significam vários e ângulo, respectivamente. Se fossemos pensar na palavra polígono, entendida como vários ângulos, sem estabelecer regra com qualquer figura, a representação poderia ser traduzida como um conjunto de ângulos (reunião de duas semi-retas de mesma origem e não colineares).

A representação mental interna do conhecimento declarativo sugere que objetos, eventos e ambientes possam ser representados na forma de uma imagem mental quando não estão sendo percebidas pelos órgãos sensoriais. A maior parte dos estudos em Psicologia

Cognitiva (SHEPARD e METZLER, 1971; COOPER, 1975; KOSSLYN, 1994; PANI *et al*., 1996) investigou a representação mental do conhecimento visual, ou seja, as imagens mentais visuais de objetos que não estão sendo vistos. De acordo com Kosslyn (1990 *apud* STERNBERG, 2000), as pessoas utilizam as imagens visuais para resolver problemas e atividades que envolvem objetos, criando e manipulando as imagens mentais. Por exemplo, no problema “um tijolo pesa um quilograma mais meio tijolo. Quantos pesam dois tijolos?” as pessoas podem criar uma representação mental de um tijolo e representar embaixo deste o um quilograma mais a representação do meio tijolo e chegar a conclusão que meio tijolo só pode pesar um quilograma. Assim, chegará a conclusão que um tijolo pesará 2 quilogramas e dois tijolos pesarão 4 quilogramas.

Da mesma forma em que as figuras e palavras apresentam suas características de representação externa, a representação interna de imagens e palavras também tiveram teorias explicativas. Segundo Sternberg (2000), foi Kosslyn (1994) quem sintetizou algumas hipóteses de representação de imagens e palavras e sugeriu que algumas imagens são representadas de forma análoga aos estímulos físicos observados e que outras imagens e as palavras são representadas na forma proposicional, sendo que quando recorremos a suas informações, codificadas e armazenadas como proposições, a nossa mente recria o código verbal e imaginal com certa precisão. Uma proposição seria o significado de uma relação específica entre conceitos que ajudaria a descrever relações entre atributos, ações, categorias etc.

Segundo Eysenck e Keane (1994), ao tratarem da questão do formato e organização do conhecimento, a razão de um conceito ser representado numa forma proposicional vem de duas especiais situações: a metáfora de se pensar o conceito como unidades atômicas cujas combinações geram estruturas complexas semelhantes às moléculas e a de que as proposições podem ser registradas através do cálculo de predicados (tipo de linguagem computacional), propiciando entendimentos sobre a organização do conhecimento.

Para Sternberg (2000), o conhecimento declarativo apresenta o conceito como unidade fundamental do conhecimento simbólico (palavras), sendo que um único conceito pode ser captado por uma única palavra, o qual está relacionado a outros conceitos. Por exemplo, o conceito de quadrado está relacionado aos conceitos de segmento de reta, ângulo, quadrilátero entre outros. Os conceitos também podem estar inter-relacionados e organizados em *esquemas* que são estruturas mentais para representar o conhecimento, abrangendo uma série de conceitos inter-relacionados em uma organização significativa. Partilhando a mesma idéia, Eysenck e Keane (1994) apresentam um esquema como um construto mental de agrupamento estruturado de conceitos.

A análise da relação entre conceitos e esquemas pode ser considerada em várias situações, dependendo da mente da pessoa ou do contexto. Por exemplo, a maioria dos alunos pode considerar o triângulo eqüilátero como um conceito fundamental (unidade de pensamento) dentro de um esquema de figuras geométricas planas. No entanto, para os professores de Matemática, esse exemplo pode não ser fundamental na medida em que podem reconhecer tipos diferentes de triângulos.

Segundo Sternberg (2000), as relações causais (se-então) dentro dos esquemas são as que mais interessam para os psicólogos cognitivistas, sendo que, os esquemas propiciam informações para podermos fazer inferências em situações novas. Por exemplo, ao solicitar que alguém identifique um quadrado no meio de diversas figuras planas e não-planas, pode-se fazer uma inferência a partir de esquemas para figuras planas, figuras não-planas e até mesmo da classe dos quadriláteros para fazer a identificação.

É importante salientar que os estudos sobre esquemas realizados pelos psicólogos cognitivistas permitiram que alguns pesquisadores interessados em inteligência artificial (IA) elaborassem modelos computadorizados da inteligência, adaptando a noção de esquemas para esses modelos e possibilitando o entendimento de como as pessoas processam informação.

De acordo com Sternberg (2000), um modelo alternativo para representar o conhecimento declarativo é uma *rede semântica* a qual é um conjunto de elementos interconectados. Os elementos, denominados *nós*, representam os conceitos. As conexões entre os *nós* são relações classificadas que podem envolver uma qualidade de membro de uma categoria, atributos ou alguma outra relação semântica, formando vínculos com a memória, o que ajuda a pessoa a conectar os vários *nós* de forma significativa.

Contudo, a forma simbólica do conhecimento declarativo, que é a qual trata das palavras, apresenta os conceitos como unidade básica desse conhecimento os quais permitem que diversas relações sejam estabelecidas criando maneiras de estruturar o conhecimento humano e processar informação. Dessa forma, os conceitos apresentam uma grande importância no conhecimento declarativo de uma pessoa. Assim, será apresentado um modelo de formação de conceitos, voltado para conceitos geométricos, que relaciona o conceito e as suas representações pictóricas.

3.2 O Modelo de formação de conceitos

Klausmeier e Goodwin (1977, p. 312), psicólogos americanos com atuação na área da Psicologia Cognitiva, desenvolveram trabalhos na área de formação conceitual e definiram **conceito** como a "informação ordenada sobre as propriedades de uma ou mais coisas – objetos, eventos ou processos – que torna qualquer coisa ou classe de coisas capaz de ser diferenciada de ou relacionada com outras coisas ou classes de coisas".

A palavra **"conceito"** é usada para designar tanto os **construtos mentais** de indivíduos como também as **entidades públicas** identificáveis que compreendam parte do conteúdo das várias disciplinas. Os conceitos como construtos mentais se formam de acordo com as experiências de aprendizagem e padrões maturacionais únicos de cada indivíduo. Conceitos como entidades públicas são definidos como informação organizada que corresponde aos significados de palavras os quais estão colocados em dicionários, enciclopédias e outros livros.

Klausmeier e Goodwin (1977), aprofundando sobre a definição de conceito dada acima, apresentaram oito características que qualquer conceito pode oferecer, em menor ou maior grau, para o processo de ensino-aprendizagem.

1. **Aprendibilidade:** Alguns conceitos são aprendidos mais facilmente do que outros pelos indivíduos. E são aqueles que apresentam exemplos perceptíveis, tais como, cachorro e árvore. Conceitos como átomo e eternidade, que não possuem exemplos perceptíveis, apresentam certa dificuldade.
2. **Utilidade:** A utilidade dos conceitos varia no sentido de que alguns podem ser mais usados do que outros para compreender e formar princípios, sendo que essa variação também ocorre para resolver problemas.
3. **Validade:** Os conceitos se tornam válidos na medida em que se avançam os estudos sobre ele e também quando se tornam mais próximos da definição aceita pelos especialistas.
4. **Generalidade:** Grande parte dos conceitos está disposta hierarquicamente, ou seja, apresentam taxonomia, em que, quanto mais elevado for o lugar do conceito, mais geral ele será em relação aos conceitos subordinados a ele. Por exemplo, na seqüência poliedro-prisma-cubo, poliedro é o conceito mais geral sendo prisma e cubo conceitos subordinados a ele. Assim, se os conceitos do indivíduo apresentam a estrutura de uma taxonomia, eles também variam em generalidade.

5. **Importância:** Refere-se à condição de um conceito facilitar ou ser essencial para formar outros conceitos. Cada disciplina apresenta conceitos fundamentais próprios que devem ser ensinados primeiro e os demais conceitos ou informações menos importantes devem ser correlacionados ao conceito fundamental. Por exemplo, o conceito de perpendicularidade é importante para que o aluno identifique e compreenda o conceito de triângulo retângulo.
6. **Estrutura:** Qualquer conceito como entidade pública, definido em termos de atributos, apresenta uma estrutura caracterizada pela relação com seus atributos definidores. Essa estrutura dos atributos definidores são denominadas de regras conceituais (afirmativa, conjuntiva, disjuntiva inclusiva, condicional ou bicondicional) e estão presentes em quase todos os conceitos escolares. Por exemplo, a afirmação "todos os triângulos apresentam três segmentos de retas" apresenta uma relação do conceito de triângulo com seu atributo definidor, três segmentos de reta. E essa é uma regra conceitual do tipo afirmativa. Uma regra conceitual bicondicional seria "uma forma geométrica espacial é dita cubo, se e somente se, apresenta 8 vértices, 6 faces quadradas e 12 arestas".
7. **Perceptibilidade de exemplos:** A percepção de exemplos de um conceito às vezes não é possível de acontecer através dos órgãos dos sentidos como, por exemplo, o conceito de eternidade que não apresenta exemplos perceptíveis. Na Matemática, como os conceitos são abstratos, vale-se de algum tipo de representação para torná-los acessíveis, como o conceito de infinito que pode ser representado, mas não há exemplos observáveis dele. Desse modo, as representações podem propiciar à criança condições de percepção para que aprenda mais através da manipulação e da observação de objetos e fazer as suas próprias representações.
8. **Numerosidade de exemplos:** Quase todos os conceitos apresentam exemplos. Por exemplo, a lua da Terra é um único exemplo; os continentes são números pequenos de exemplos; os números reais apresentam infinitos exemplos. Esses exemplos variam em quantidade. Com a idade, grande parte das pessoas sempre encontra novos conceitos, sejam verbais, representações ou pictóricos. Além disso, é necessário que os não-exemplos sejam distinguidos dos exemplos através da identificação de seus atributos definidores. Pirola (1995) investigou a formação dos conceitos de triângulo e paralelogramo de alunos do ensino fundamental aplicando, dentre outros, um teste de exemplos e não-exemplos envolvendo essas figuras. Os resultados mostraram que

esses alunos confundiram não-exemplos com exemplos, ao classificar, em sua maioria, sólidos geométricos como exemplos de triângulos e paralelogramos.

Para todos os oito atributos de conceito mencionados acima, é importante ressaltar que indivíduos com mesma vivência escolar, ou seja, que estão em uma mesma série, apresentam variações na aquisição de um mesmo conceito. Há também diversidades na identificação e no conhecimento numérico de exemplos de um conceito, bem como na capacidade de identificar e nomear seus atributos.

A base de toda a investigação de Klausmeier e Goodwin está no modelo de aprendizagem e desenvolvimento de conceitos que descreve como se processa o desenvolvimento conceitual, desde a primeira infância até a adolescência, de acordo com quatro níveis cognitivos: concreto, identidade, classificatório e formal. E a condição ou capacidade para se formar o mesmo conceito em qualquer nível, obrigatoriamente nessa seqüência, está nas operações mentais que cada indivíduo é capaz de desenvolver e em termos do que cada um já sabe.

Segundo Klausmeier e Goodwin (1977), um mesmo conceito é formado de acordo com quatro níveis cognitivos. Cada nível é um nível cognitivo porque apresenta operações mentais necessárias para formar um conceito. Veremos as operações mentais necessárias para formar um mesmo conceito em cada nível cognitivo.

Nível Concreto - Uma pessoa forma o conceito no nível concreto quando reconhece um objeto que foi encontrado em uma ocasião anterior. Segundo Klausmeier e Goodwin (1977, p. 53), as operações mentais necessárias para esse nível são: “prestar atenção a um objeto, discriminá-lo de outros objetos, representá-lo internamente como uma imagem ou traço e manter a representação (lembrar)”. Pode-se propiciar condições para formar um conceito em geometria nesse nível, apresentando ao indivíduo um cubo, por exemplo, para que preste atenção, sendo retirado da visão da pessoa por algum tempo e trazido de volta.

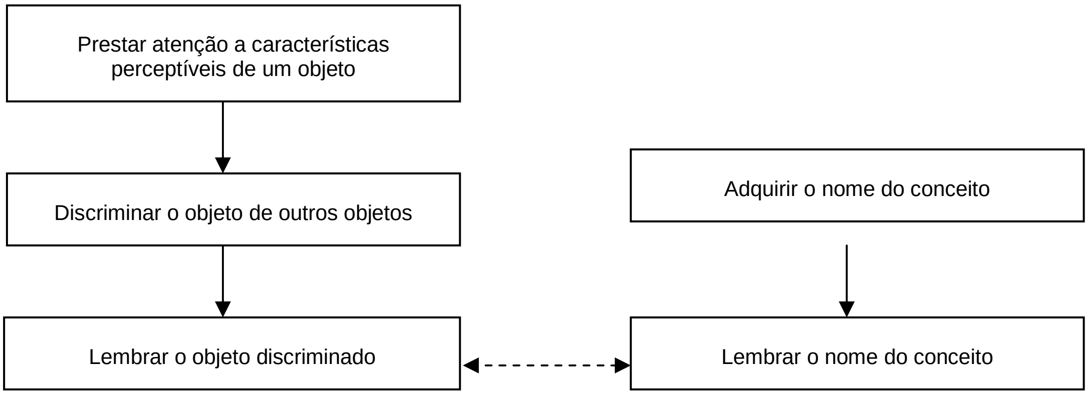


Figura 2: Operações cognitivas na formação de conceitos ao nível concreto (Klausmeier e Goodwin, p. 52).

Nível de Identidade - Um indivíduo forma um conceito no nível de identidade quando o mesmo já o formou no nível concreto, acrescentando que nesse nível a operação mental (cognitiva) requerida do indivíduo é generalizar que duas ou mais formas do objeto são o mesmo objeto. "A formação no nível de identidade envolve tanto discriminar várias formas de outros objetos, como também generalizar as formas equivalentes" (KLAUSMEIER e GOODWIN, 1977, p. 53). Isso quer dizer que o nível de identidade é inferido quando o indivíduo reconhece um objeto independente da sua perspectiva física ou sensorial diferentes. Por exemplo: Dado o mesmo triângulo isósceles em uma perspectiva física diferente, o nível de identidade é inferido se o indivíduo reconhece que se trata do mesmo tipo de triângulo, apesar da disposição.

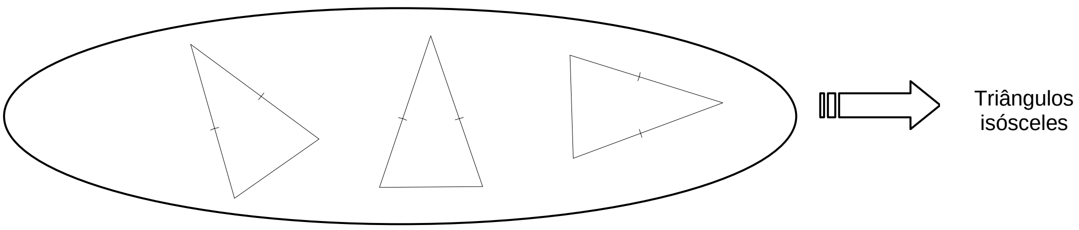


Figura 3: Triângulos isósceles em uma perspectiva física diferente.

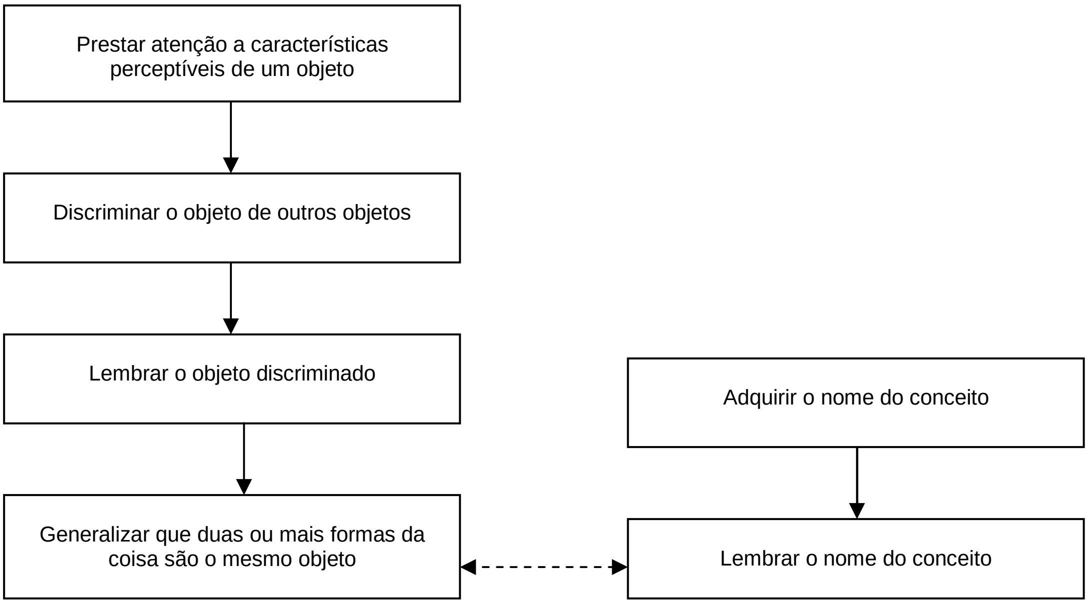


Figura 4: Operações cognitivas na formação de conceitos ao nível de identidade (Klausmeier e Goodwin, p. 54).

Nível Classificatório - Um indivíduo forma um conceito no nível classificatório quando o mesmo já o formou no nível concreto e no nível de identidade, acrescentando que a operação cognitiva requerida do indivíduo é generalizar que dois ou mais exemplos são equivalentes e pertencem à mesma classe de coisas, ou seja, o indivíduo tem que responder a pelo menos dois diferentes exemplos de uma classe de objetos como equivalentes. Conforme Klausmeier e Goodwin:

> Indivíduos ainda estão no nível classificatório quando podem classificar corretamente um grande número de instâncias como exemplos e outras como não exemplos, mas não podem definir a palavra que representa o conceito e também não podem explicar a base da classificação. (KLAUSMEIER e GOODWIN, 1977, p. 54).

Por exemplo: Dado vários tipos de triângulo, o indivíduo reconhece como pertencente à classe dos triângulos.

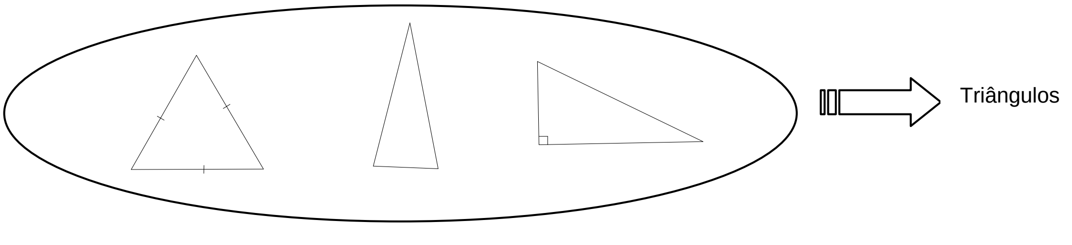


Figura 5: Triângulos eqüilátero, isósceles e escaleno como exemplos da classe dos triângulos.

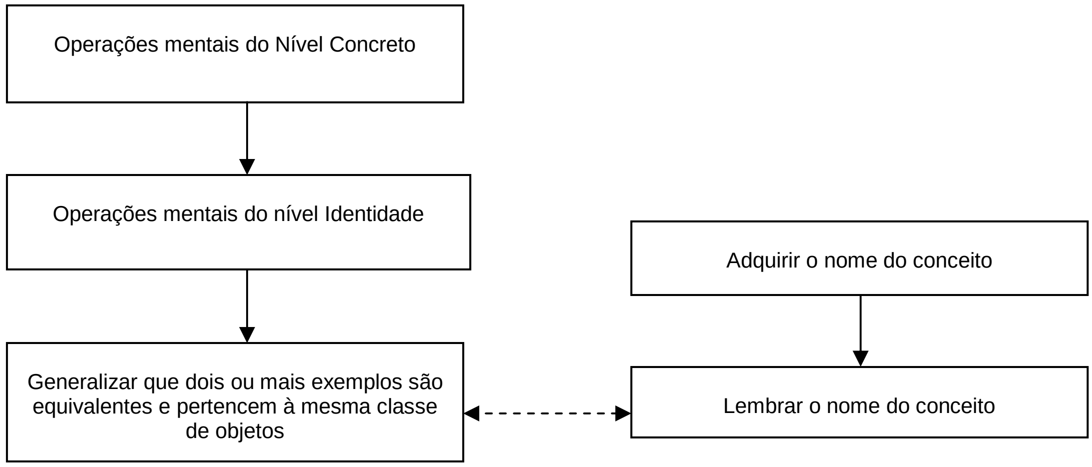


Figura 6: Operações cognitivas na formação de conceitos ao nível de classificatório (Klausmeier e Goodwin, p. 55).

Nível Formal - A formação de um conceito no nível formal é inferida quando o indivíduo já formou esse conceito no nível classificatório. Um indivíduo forma o conceito nesse nível quando ele consegue fornecer o nome do conceito, definir o conceito em termos de seus atributos definidores, sabe discriminar e nomear seus atributos e consegue diferenciar entre exemplos e não-exemplos de acordo com os atributos definidores. Em geometria, por exemplo, forma-se o conceito de triângulo eqüilátero ao nível formal quando o indivíduo chama-o de triângulo eqüilátero, identifica seus atributos definidores: três lados iguais, plana, simples, fechada e três ângulos iguais, sabendo dizer seus nomes. Consegue diferenciá-lo de triângulos isósceles e escalenos porque estes possuem dois lados iguais e os três lados de medidas diferentes, respectivamente.

Conforme a Figura 8, o indivíduo pode formar o conceito no nível formal através de dois conjuntos de operações mentais. Um deles envolve formular e avaliar hipóteses. Indivíduos que utilizam essa estratégia obtêm informação tanto de exemplos como de não-exemplos. O outro envolve perceber os atributos que são comuns nos exemplos do conceito inferindo o conceito. As pessoas utilizam uma dessas estratégias de acordo com o ensino formal ou informal que vivenciaram, da idade e se tiveram contatos apenas com exemplos, apenas com não-exemplos ou com os dois.

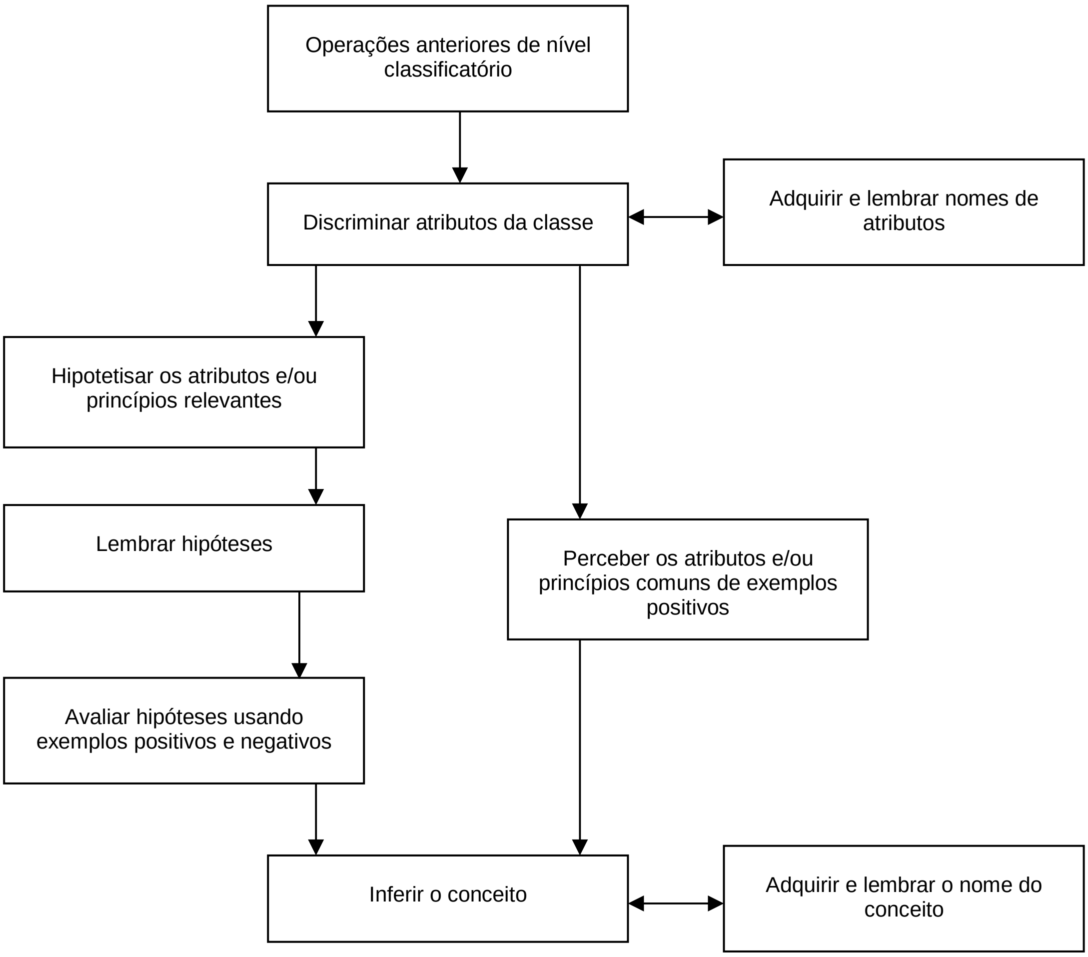


Figura 7: Operações cognitivas na formação de conceito ao nível formal (Klausmeier e Goodwin, p. 56).

Conforme descrito acima, os quatro níveis cognitivos exigem operações cognitivas que podemos resumir em: percepção, discriminação, generalização, teste de hipóteses e validação. As três primeiras são as operações para os níveis concreto e identidade, os quais podem ser utilizados para resolver problemas simples. As três últimas representam as operações cognitivas do nível classificatório e do nível formal, os quais podem ser utilizados, depois de formados, para a aprendizagem de novas situações que envolvem o conceito. A figura abaixo sintetiza a ampliação dos níveis cognitivos de formação conceitual e a utilização de um conceito de acordo com o nível formado.

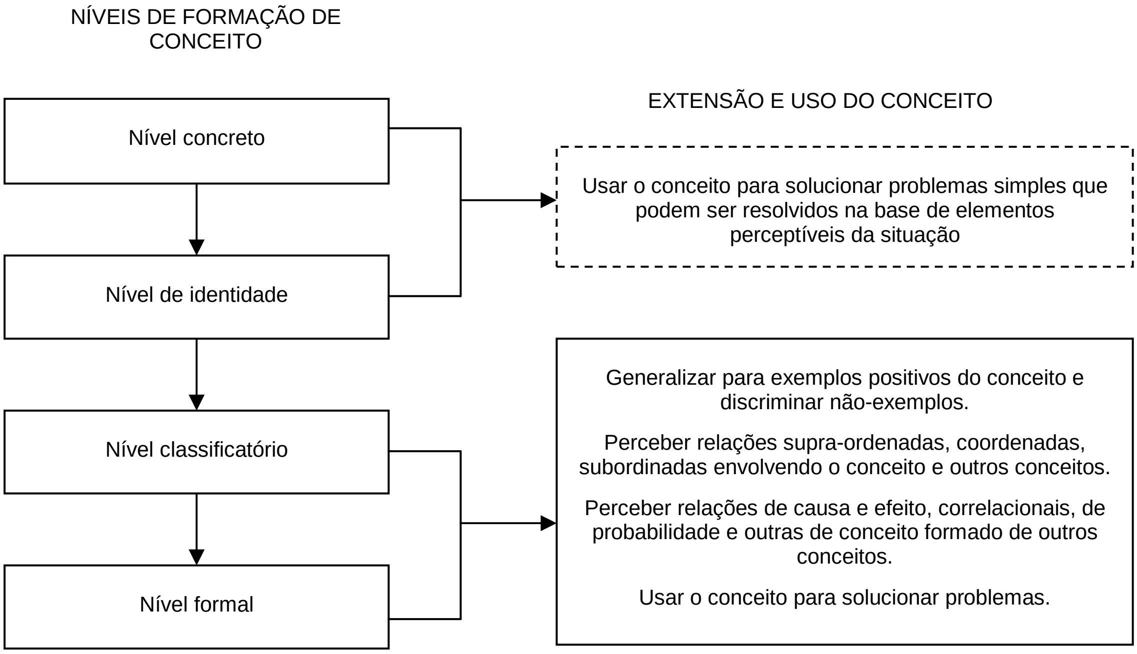


Figura 8: Extensão e uso do conceito (Klausmeier e Goodwin, 1977, p. 59).

De acordo com a figura acima, conceitos formados nos níveis classificatório e formal possibilitam que alunos consigam generalizar para novos exemplos e na maioria das vezes são pré-requisitos na resolução de problemas.

Grande parte do conhecimento adquirido pelo indivíduo é estruturada por meio de afirmações que incluem relações entre conceitos. A relação entre dois ou mais conceitos é designada de **princípio.** Quando compreendidos, permitem que o indivíduo interprete muitas situações específicas. Alguns tipos de relações são os seguintes:

1. Causa e efeito: “um efeito da morfina é produzir sono”. Esse tipo de afirmação pode ser estabelecido por uma relação “se-então”;
2. Probabilidade: “a probabilidade de se conseguir “cara” no lançamento de uma moeda é 0,5”;
3. Correlação: “quanto maior o número de ângulos internos de um polígono, maior é a quantidade de seu número de lados”;
4. Axiomas: “triângulos eqüiláteros têm forma semelhante”.

Outra maneira de extensão e uso de conceitos formados nos níveis classificatório e formal indicadas na figura acima é a **percepção de relações subordinadas e supra-ordenadas** entre classe de coisas. Essas relações estão presentes dentro de uma taxonomia que envolve classes de conceitos. De acordo com Klausmeier e Goodwin, a compreensão dessas relações aumenta muito a utilidade de um conjunto de conceitos relacionados dos indivíduos. As relações supra-ordenadas são aquelas que partem de conceitos específicos para os gerais (exemplo: quadrado – paralelogramo – quadrilátero – polígono) e as relações subordinadas são aquelas que partem de conceitos gerais para os específicos (por exemplo: poliedro – prisma – cubo). A percepção dessas relações é importante, pois mostra as conexões entre os atributos definidores de cada conceito bem como propicia o desenvolvimento da discriminação de conjuntos de exemplos e não-exemplos.

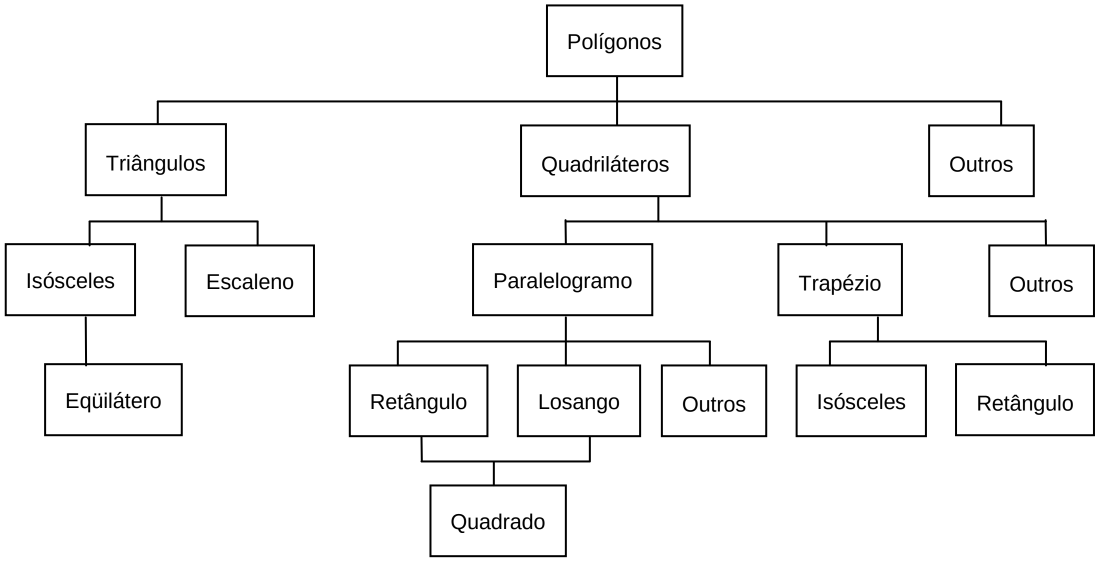


Figura 9: Um tipo de estrutura e relações dos polígonos.

A Figura 9 mostra um tipo de relação que se pode estabelecer entre os exemplos da classe polígonos. Na classe dos triângulos a relação foi dada por meio dos lados, mas poderia ter sido feita através dos ângulos, destacando aqueles que podem ser retângulos, acutângulos e obtusângulos. Já na classe dos quadriláteros as relações se estabelecem por meio de lados e ângulos, mas poderiam ser feitas através daqueles exemplos que seriam convexos e côncavos, classes estas que podem também ser utilizadas para pentágonos, hexágonos etc.

Observando os níveis de formação conceitual, percebe-se que Klausmeier e Goodwin (1977) salientam o uso de exemplos e não-exemplos na aprendizagem e desenvolvimento de conceitos. Para os autores, o uso de exemplos e não-exemplos possibilita a redução, ou mesmo evita, os erros ocasionados da supergeneralização, subgeneralização e má concepção do indivíduo sobre um conceito.

Em relação ao ensino, há certa tendência por parte dos professores em ensinar conceitos somente através de exemplos, omitindo-se os não exemplos. Quando isso acontece os alunos podem formar conceitos de forma equivocada. Por exemplo: quando se ensina o conceito de polígonos é de fundamental importância que haja um trabalho com as figuras planas e não-planas para que os estudantes não supergeneralizem que uma pirâmide é um triângulo e vice-versa. Se na formação do conceito de triângulo, por exemplo, é apresentado como exemplos apenas triângulos eqüiláteros, o aluno pode subgeneralizar o conceito por meio de um único tipo de exemplo.

O termo **não-exemplos** é utilizado por Klausmeier e Goodwin (1977) para designar o conjunto de exemplos que não correspondem aos exemplos do conceito que está se referindo. Ao fazer a análise do conceito de triângulo eqüilátero, os autores apresentam alguns de seus não-exemplos: triângulos isósceles, escalenos, retângulos e ainda quadrados de vários tamanhos e formas.

Nesse sentido, o termo não-exemplos não se confunde com o termo contra-exemplos do aspecto lógico da Matemática, pois, segundo Sober (2000), um contra-exemplo é um exemplo que contradiz o que diz uma teoria geral. No caso de ir contra uma generalização, o contra-exemplo mostra que a generalização é falsa.

Outra condição importante sobre os níveis cognitivos de formação conceitual é que muitos conceitos podem ser definidos em termos de atributos definidores. Para Klausmeier e Goodwin (1977, p. 52), "um atributo é uma característica discriminável de um objeto ou evento que pode assumir valores diferentes, por exemplo, cor, forma, etc.". Com isso, temos atributos relevantes e atributos irrelevantes. O primeiro diz respeito aos atributos que definem o conceito. Por exemplo, alguns atributos definidores de polígonos são: segmentos de reta, figura simples, figura fechada e figura plana. Os atributos definidores de poliedros são: figura não-plana (espacial), vértices, arestas e faces. O segundo, são atributos que não interferem na formação de um conceito, por exemplo: cor, hachuras, bordas espessas e finas, tamanho, orientação na página etc.

Nos exemplos de triângulos abaixo, os atributos irrelevantes não modificam o conceito de triângulo.

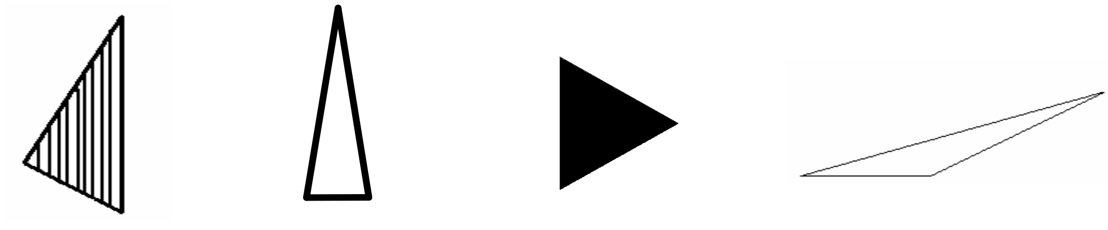


Figura 10: Exemplos de triângulo com alguns atributos irrelevantes.

Um outro aspecto sobre o ensino de conceitos salientado por Klausmeier e Goodwin (1977) diz respeito à generalidade do conceito, ou seja, é importante que no ensino os conceitos sejam ensinados não desvinculados uns dos outros, mas sejam relacionados através de uma taxonomia. Por exemplo, ao ensinar o conceito de polígonos, o professor deverá relacioná-los às classes dos triângulos, quadriláteros, pentágonos etc., de tal forma que o estudante compreenda, através da taxonomia, relações tais como: que um quadrado é um retângulo, que um losango é um paralelogramo etc. O mesmo poderá ser feito com os poliedros. Por exemplo: que um cubo é um prisma.

Klausmeier e Goodwin (1977) apresentaram alguns procedimentos que o professor poderia adotar na organização de atividades de ensino-aprendizagem de conceitos, porém não estabeleceram uma ordem em que tais atividades deveriam ser desenvolvidas, abordando a solução de problemas como procedimentos finais. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática apontam a solução de problemas como o ponto de partida a ser utilizado no ensino dos conteúdos matemáticos no sentido de abordar conceitos, procedimentos entre outros. Assim sendo, os procedimentos mencionados por Klausmeier e Goodwin (1977) poderiam ser reorganizados, de acordo com a concepção expressa pelos PCN, da seguinte forma:

1) Encorajar e orientar a descoberta e a auto-avaliação do aluno por meio de situações-problema reais e significativos; orientar a coleta de informações; propiciar um ambiente em que se possa fornecer um *feedback* imediato e preciso de modo que os alunos possam avaliar suas respostas. Alem disso, fornecer informações sobre a estrutura da área de conteúdo, nesse caso, da geometria.
2) Propiciar o uso de conceitos, tendo em vista que dificilmente acontecerá dos alunos transferirem ou aplicarem automaticamente o que aprenderam para novas situações que envolvam o conceito, a compreender princípios e resolver problemas. Os professores devem fazer experimentações e não somente apresentar os conceitos oralmente.
3) Identificar o nível em que o aluno pode formar o conceito enquanto está realizando tarefas de aprendizagem de conceito, julgando, mais precisamente, a capacidade do aluno.
4) Ensinar uma estratégia para o aluno formar conceitos, no caso, a diferenciar exemplos de não-exemplos e, de acordo com a aprendizagem, serem ensinados a procurar os atributos definidores que os diferenciam.

5) Programar uma seqüência adequada de conjuntos de exemplos e não exemplos para o ensino de conceito pode favorecer a redução de erros de subgeneralização e supergeneralização. Por exemplo, se apenas é mostrado o triângulo eqüilátero como exemplo de triângulos o aluno pode subgeneralizar que apenas triângulo eqüilátero é exemplo, não identificando que também poderiam ser os triângulos isósceles e os escalenos. Quando poucos não-exemplos, como a pirâmide de base triangular, são apresentados aos alunos, podem supergeneralizar que se trata de um triângulo, por causa de suas faces laterais serem formadas por triângulos.
6) Tornar claros os atributos definidores do conceito pedindo que identifiquem atributos ou mostrando-os aos alunos. Isso pode favorecer a formulação e verificação de hipóteses que envolvam atributos definidores, auxiliando na avaliação de novos exemplos que eles encontram posteriormente.
7) Estabelecer a terminologia correta para o conceito e seus atributos para se assegurar que o significado seja adquirido e não uma memorização com repetição. Assim, devem-se apresentar exemplos e não-exemplos com seus atributos num vocabulário de acordo com o nível de desenvolvimento do aluno.
8) Fornecer *feedback* informativo para a correção e mostrando os erros aos alunos quando estão envolvidos na aprendizagem e uso de conceitos.

Observando esses procedimentos, os professores poderão contribuir para que os alunos formem conceitos de forma mais adequada, evitando-se, assim, erros de generalização e má-formação conceitual.

As teorias apresentadas se complementam na discussão sobre a questão do conceito, enquanto um dos elementos que caracterizam o conhecimento declarativo das pessoas. Conforme Sternberg (2000), a representação externa desse conhecimento através de figuras e palavras muitas vezes assume um caráter arbitrário, o que mostra a necessidade de um ensino que privilegie formas eficazes de se trabalhar com a formação conceitual. Assim, sendo polígono e poliedro palavras que determinam conceitos dentro do campo da geometria e que estão relacionados a figuras representativas, se constituem num conhecimento declarativo que pode ser desenvolvido por um trabalho que leve em consideração os atributos definidores e exemplos e não-exemplos, segundo proposto por Klausmeier e Goodwin (1977).

CAPÍTULO IV

O CONCEITO MATEMÁTICO DE POLÍGONO E POLIEDRO

O interesse é investigar o conceito de polígonos e de poliedros, sendo, a definição, conforme aponta a Proposta Curricular para o ensino de Matemática do Ensino Médio (SÃO PAULO, 1992), o ponto de chegada e não o ponto de partida para o ensino e aprendizagem.

Ao analisar alguns livros de autores que trataram sobre geometria, pôde-se verificar que as definições de polígonos fornecidas contemplam certos exemplos e outras não. Os autores Dolce e Pompeo (1993, p. 80) definem polígono da seguinte maneira:

Definição de polígono: Dada uma seqüência de pontos de um plano (A_1, A_2,..., A_n) com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1, assim como A_n, A_1 *e* A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos A_1A_2, A_2A_3, ...,$A_{n-1}A_n$, A_nA_1.

Os exemplos são os seguintes:

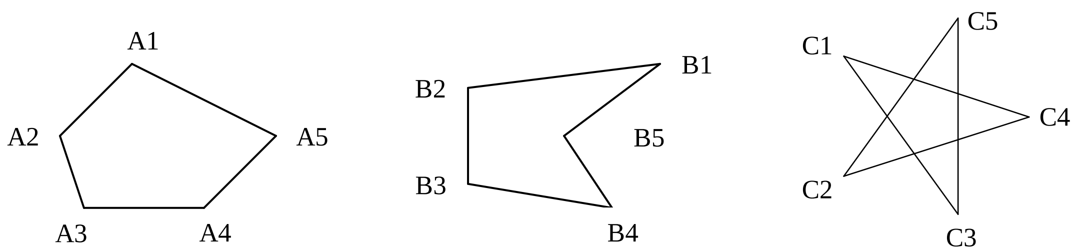


Figura 11: Exemplos de polígonos segundo Dolce e Pompeo (1993, p. 80).

Ao fazer essa definição, os autores mostram que os elementos constituintes de polígonos são os vértices, os lados, os ângulos e, definem o perímetro do polígono como sendo a soma de seus lados. Desse modo, fazem a definição do que chamam de *polígono simples:* um polígono é simples se, e somente se, a intersecção de quaisquer dois lados não consecutivos é vazia. Assim, o polígono $C_1C_2C_3C_4C_5$, entrelaçado, é o único que não pertence a esta definição dentre os exemplos fornecidos acima.

Por meio da definição de polígono simples os autores definem variações como as de polígonos convexos e côncavos, ponto interior e exterior, região poligonal (reunião do polígono com seu interior), o nome do polígono de acordo com seu número de lados e as características de um polígono regular.

Pode-se verificar que Dolce e Pompeo (1993) consideraram o polígono entrelaçado como exemplo de polígonos. Para esta pesquisa foi utilizada a definição estabelecida por

Barbosa (1985) dada abaixo porque corrobora, em relação aos exemplos, com a Proposta Curricular de Matemática do Ensino Fundamental (SÃO PAULO, 1997) a qual considera que a compreensão do conceito de polígono ocorre por entendê-lo como a que possui lados que não se cruzam.

4.1 Poligonal

Uma *poligonal* é uma figura formada por uma seqüência de pontos A_1, A_2,..., A_n e pelos segmentos A_1A_2, A_2A_3,..., $A_{n-1}A_n$, Os pontos são os *vértices* da poligonal e os segmentos são seus *lados*. Uma poligonal pode ser aberta ou fechada.

4.1.1 Definição de Polígono[5]

Um polígono é uma poligonal em que as seguintes condições são satisfeitas:

a) $A_n = A_1$

b) Os lados da poligonal somente se interceptam em suas extremidades.

c) Cada vértice é extremidade de dois lados.

d) Dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Exemplos de polígonos:

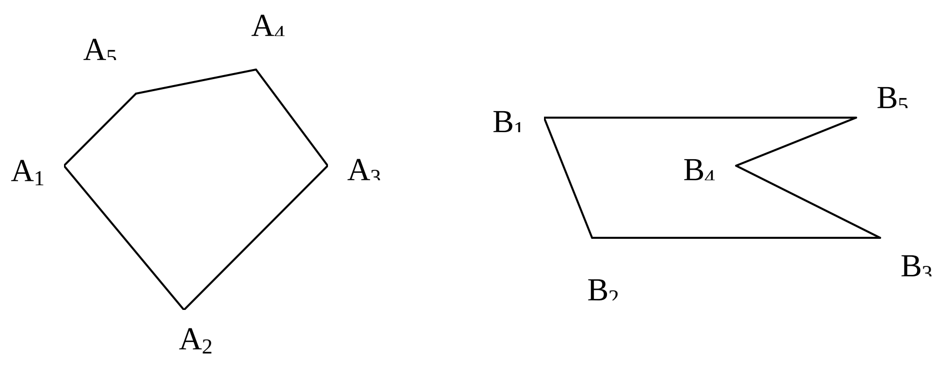


Figura 12: Exemplos de polígonos segundo Barbosa (1985, p. 38).

Um polígono de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} = A_1$, será representado por $A_1A_2A_3, \ldots, A_n$. Ele tem *n* lados, *n* vértices e *n* ângulos.

Um polígono é *convexo* se está sempre contido em um dos semi-planos determinados pelas retas que contêm os seus lados. Caso contrário, o polígono é *côncavo*. Nos exemplos abaixo, $A_1A_2A_3A_4A_5$ é polígono *convexo* e $B_1B_2B_3B_4B_5$ é polígono *côncavo*.

---

[5] BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBEM, IMPA, 1985 (p. 38).

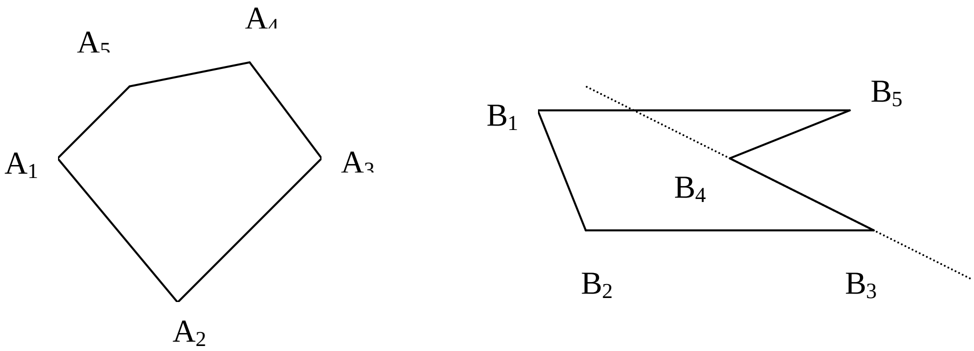


Figura 13: Exemplos de polígonos convexo e côncavo.

Os polígonos recebem nomes especiais conforme o número *n* de lados. Veja abaixo as nomenclaturas:

Número *n* de lados	Nome do polígono
3	triângulo ou trilátero
4	quadrangulo ou quadrilátero
5	pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Quadro 3: Nomenclatura dos polígonos de acordo com o número de lados.

Dentre os polígonos convexos, destacam-se os polígonos regulares, isto é, aqueles que apresentam lados congruentes (são eqüiláteros) e ângulos congruentes (são eqüiângulos). A figura abaixo mostra alguns exemplos.

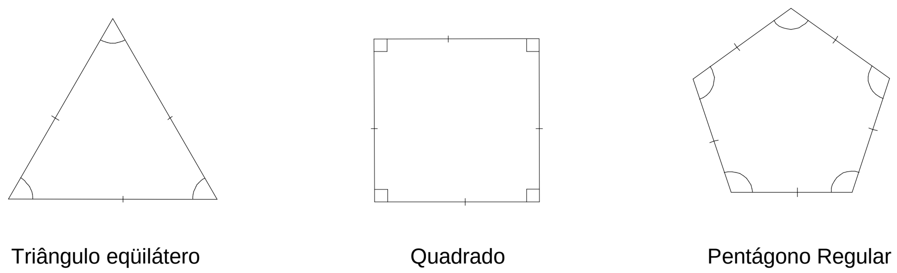


Figura 14: Exemplos de polígonos regulares.

É importante salientar que o polígono regular é denominado com o nome que corresponde ao seu número de lados seguido da palavra regular, como o exemplo citado acima, pentágono regular. Usualmente, utilizam-se os termos triângulo eqüilátero e quadrado para denominar o triângulo e o quadrilátero da Figura 14, porém podem ser chamados de triângulo regular e quadrilátero regular, respectivamente.

Em relação aos polígonos irregulares, estes se caracterizam por apresentarem apenas lados congruentes, ou ângulos congruentes ou apresentarem lados e ângulos de medidas variadas.

De acordo com Barbosa (1985), todo polígono determina uma região poligonal. Quando, em seu livro “Geometria Euclidiana Plana”, inicia-se o trabalho sobre área, salienta-se: “nós iremos tomar a liberdade de usar expressões do tipo **a área de um quadrado** quando queremos dizer realmente “a área da região poligonal cuja fronteira é um quadrado”” (BARBOSA, 1985, p. 176, grifo nosso).

Nesse sentido, polígono se refere a apenas os segmentos de reta que o formam, ou seja, a fronteira. Quando queremos nos referir à sua área, estamos tratando da região poligonal delimitada por um polígono. Assim, a área da região cuja fronteira é um polígono, será, por um abuso de linguagem, denominado área daquele polígono.

Dolce e Pompeo (1993), ao tratarem sobre poliedros, usam a nomenclatura **poliedros convexos**, pois assumem que eles são formados por polígonos planos convexos, ou seja, regiões poligonais convexas. Para esta pesquisa serão utilizados os exemplos de poliedros que contemplam faces poligonais convexas. Assim, o termo poliedro designa os poliedros convexos.

4.2 Definição de Poliedro[6]

Consideremos um número finito *n* (*n* > 4) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

a) Dois polígonos não estão num mesmo plano;
b) Cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
c) O plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Nessas condições, ficam determinados *n* semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semi-espaços é chamada *poliedro*.

Um poliedro possui: **faces**, que são os polígonos convexos; **arestas**, que são os lados dos polígonos e **vértices**, que são os vértices dos polígonos.

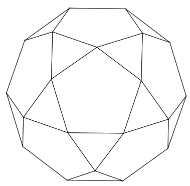


Figura 15: Exemplo de um poliedro.

Dentre os poliedros, existem duas classes que apresentam suas particularidades: os Prismas e as Pirâmides. Estes são poliedros que se diferenciam do exemplo dado acima e de muitos outros exemplos, como o octaedro regular, o dodecaedro regular e o icosaedro regular. Assim, as definições correspondem às seguintes:

4.2.1 Definição de Prisma

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) *ABCD* ... *MN* situado num plano α e um segmento de reta *PQ*, cuja reta suporte intercepta o plano α. Chama-se **prisma** (ou prisma convexo) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a *PQ*, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α.

[6] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial, posição e métrica, 10. 5 ed. São Paulo: Atual, 1993 (p. 124).

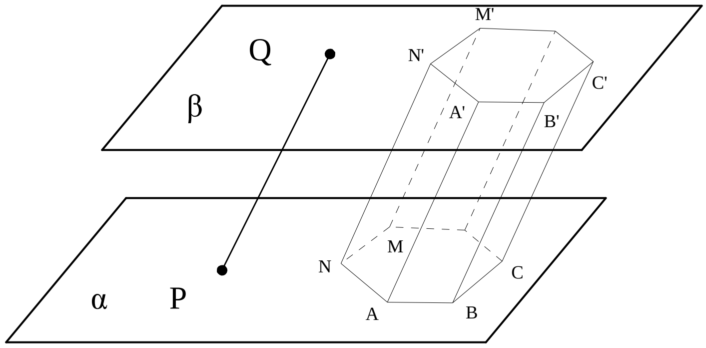


Figura 16: Figura ilustrativa da definição de prisma segundo Dolce e Pompeo (1993, p. 139).

Um prisma pode ser classificado como *reto* (aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases), *oblíquo* (aquele cujas arestas laterais são oblíquas aos planos das bases) e *regular* (prisma reto cujas bases são polígonos regulares). Abaixo são apresentados alguns prismas retos e regulares, os quais correspondem aos tipos utilizados na pesquisa.

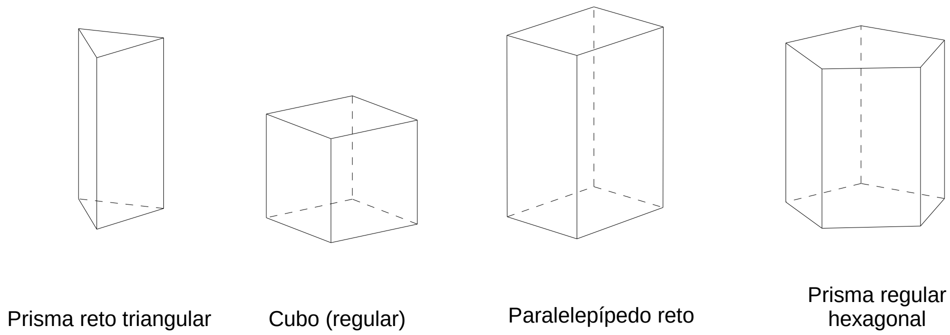


Figura 17: Exemplos de prismas retos e regulares.

Um prisma será denominado triangular, quadrangular, pentagonal etc., conforme o polígono que forma as suas bases. O prisma denominado cubo não foi chamado de prisma quadrangular, pois é um poliedro especial que apresenta todas as faces formadas por polígonos regulares, nesse caso, quadrados. Qualquer face em que o cubo fique apoiado mantém a mesma forma, sendo que quaisquer pares de faces opostas são paralelos e podem ser as bases desse prisma que é muito utilizado no ensino de geometria.

4.2.2 Definição de Pirâmide

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) *ABC ... MN* situado num plano α e um ponto *V* fora de α. Chama-se **pirâmide** (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com uma extremidade em *V* e a outra nos pontos do polígono.

V é o vértice e o polígono *ABC ... MN*, a base da pirâmide.

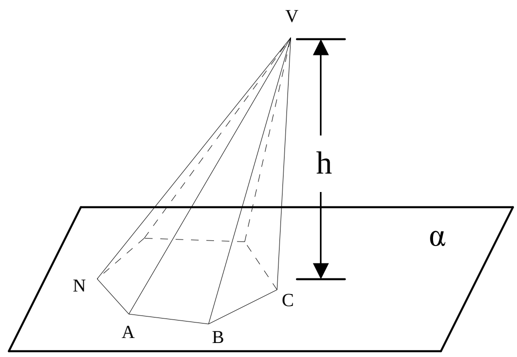


Figura 18: Figura ilustrativa da definição de pirâmide segundo Dolce e Pompeo (1993, p. 186).

Uma pirâmide pode ser *regular* (aquela cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base), *reta* (aquela cuja projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base) e *oblíqua* (aquela cuja projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é qualquer outro ponto, menos o centro da base). Abaixo são apresentadas algumas pirâmides retas e regulares, as quais correspondem aos tipos utilizados na pesquisa.

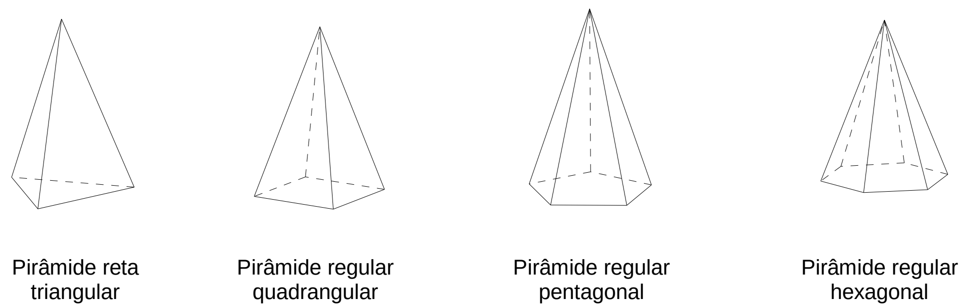


Figura 19: Exemplos de pirâmides.

Uma pirâmide será denominada triangular, quadrangular, pentagonal etc., conforme a base (polígono) for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc.

Para esta pesquisa será investigado se os alunos conhecem o conceito de polígono e de poliedro e não a definição formal. Para Pais (2002), o sentido de um conceito é essencial em relação a sua definição:

> Definir é necessário, mas é muito menos que conceituar, porque o texto formal de uma definição só pode apresentar alguns traços exteriores ao conceito. Por exemplo, a definição de uma figura geométrica, por si só, não pode traduzir a essência do conceito correspondente. (PAIS, 2002, p.56).

De acordo com a teoria de Klausmeier e Goodwin, o interesse está em evidenciar se os participantes conseguem identificar os atributos definidores e exemplos e não-exemplos, os quais estão implícitos e outros explícitos nas definições, desses dois conceitos de figuras geométricas. Evidenciando, também, se os sujeitos reconhecem atributos irrelevantes para o conceito geométrico como, por exemplo, espessura dos segmentos, cor da figura etc. No quadro abaixo, mostra-se alguns desses atributos.

Polígonos	**Poliedros**
bidimensional (figura plana)	tridimensional (figura não-plana)
segmentos de reta	vértices, faces e arestas
fechada	faces formadas por polígonos
simples	-

Quadro 4: Atributos definidores de polígonos e poliedros.

Para Fainguelernt (1999):

> O conceito geométrico é ligado a uma definição matemática e por essa razão possui atributos relevantes. Tais atributos devem ser reconhecidos para se identificar o conceito em qualquer contexto que ele esteja inserido. Os atributos irrelevantes e contra-exemplos do conceito, que possuem alguns daqueles atributos, mas não todos, são muito importantes no ensino, pois pela comparação entre os exemplos e os contra-exemplos pode-se chegar à definição matemática precisa do conceito que se quer construir" (FAINGUELERNT, 1999, p. 60-61).

O conhecimento sobre essas características, segundo Klausmeier e Goodwin, permite que o aluno tenha o conceito de polígonos e de poliedros. O interesse é que o aluno consiga utilizá-los na solução de problemas, tanto de Matemática como do cotidiano.

CAPÍTULO V

PROBLEMA, PARTICIPANTES, INSTRUMENTOS E PROCEDIMENTO

Trata-se de uma pesquisa exploratória e descritiva. A investigação exploratória possibilita ao investigador compreender melhor o assunto a ser estudado e os fenômenos que surgem dos estudos, ou seja, entender bem o problema que se pretende responder (KETELE e ROEGIERS, 1993). A pesquisa descritiva procura relatar, com a máxima precisão, a freqüência com que um fenômeno ocorre, suas características e relações com outros fenômenos através da observação, registro, análise e correlação dos fatos (CERVO e BERVIAN, 1983).

5.1 Problema de Pesquisa

O estudo pretendeu responder ao seguinte problema de pesquisa:

Qual o conhecimento declarativo sobre polígonos e poliedros que alunos do ensino médio possuem em termos de seus atributos definidores, das relações subordinadas e supra-ordenadas e de seus exemplos e não-exemplos?

5.2 Objetivos

A partir do problema proposto, foram formulados os seguintes objetivos:

1. Caracterizar as dificuldades dos alunos ao explicitarem os conceitos de polígonos e poliedros. As dificuldades serão analisadas em termos de:
   D1 – Dificuldade em identificar atributos definidores de polígonos e poliedros.
   D2 – Dificuldade em discriminar figuras planas e não-planas.
   D3 – Dificuldade em planificar sólidos geométricos.
2. Identificar o conhecimento dos alunos sobre atributos definidores e sobre exemplos e não-exemplos de polígonos e poliedros, focalizando os componentes dos níveis cognitivos em que formaram esses conceitos. Os componentes foram os seguintes: reconhecimento; identificação de formas equivalentes; identificação de exemplos equivalentes, e identificação de atributos definidores.
3. Verificar o desempenho dos alunos na identificação de relações subordinadas e supra-ordenadas estabelecidas entre os conceitos;

4. Verificar as relações existentes entre a série, o desempenho dos participantes e os componentes dos níveis cognitivos.

A partir dos objetivos, o presente estudo procurou evidenciar se os participantes possuem o conhecimento declarativo das formas geométricas a serem investigadas, conforme figura abaixo.

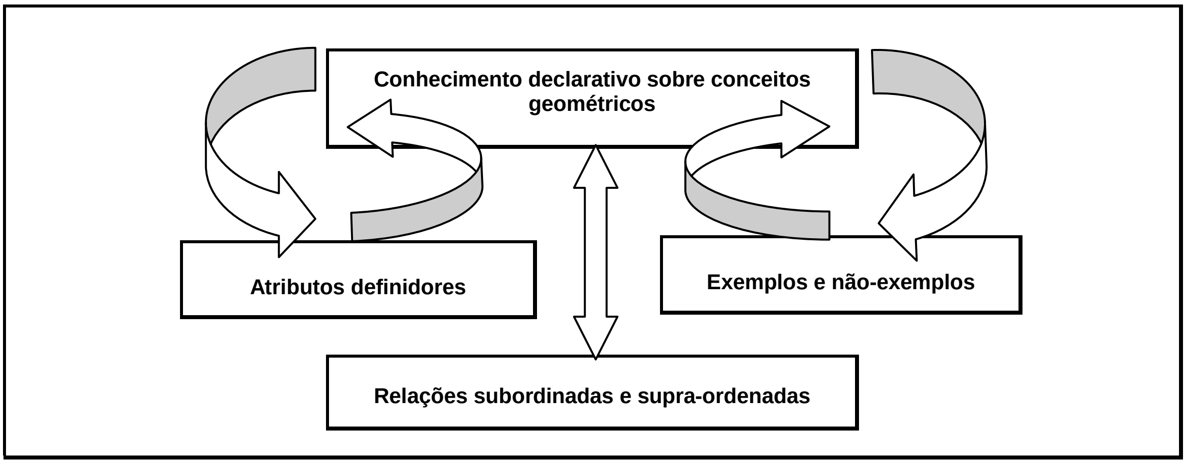


Figura 20: Modelo de investigação da pesquisa.

5.3 Análise dos instrumentos

Antes de se obter os instrumentos de coleta de dados na forma pronta para serem aplicados no estudo final, contou-se com a ajuda de um juiz que realizou a análise dos conceitos presentes nas atividades elaboradas nos instrumentos de pesquisa. O juiz é professor do Departamento de Matemática, especialista na área de geometria, da instituição superior onde se localiza o Programa de Pós-Graduação. Seus apontamentos, em cada instrumento, foram os seguintes:

1. Questionário: na questão 6 poderia introduzir mais uma questão "E o que você menos gosta? Por quê? Esta foi incorporada ao instrumento.
2. Prova matemática**:** fez várias correções de coerência no enunciado das questões e levantou a questão de se denominar de bidimensional um triângulo, por exemplo, pois para o juiz, este tem caráter unidimensional. Ser bidimensional, no caso, seria o plano e não o triângulo. Se um polígono é uma figura bidimensional é porque ela está contida em um plano bidimensional. Na presente pesquisa, levou-se em consideração que polígono só pode estar contido no plano. Assim, pode-se dizer que polígonos são

figuras do plano bidimensional ou simplesmente figuras bidimensionais, tendo em vista que os alunos reconhecem esta última maneira.

3. Teste de atributos definidores: duas afirmações foram foco de debate: “Os polígonos são bidimensionais” e “As faces dos poliedros são polígonos”. Para o juiz, polígono, consoante ao conceito de Barbosa (1985), é unidimensional, trata-se apenas do contorno. A primeira afirmação, nesse caso, seria falsa. Porém, seria verdadeira se fossem levados em consideração o polígono e a área que delimita internamente, idéia essa que não corresponde à concepção do presente avaliador, mas que tem sido apresentado, segundo ele, em muitos livros didáticos. A segunda afirmação seria, na visão do juiz sobre polígono, falsa, uma vez que as faces dos poliedros são definidas em termos de superfície poliédrica, tratando-se de um polígono com sua região poligonal (área). E para o polígono com sua área interna, a afirmativa seria verdadeira. Contudo, se for levado em consideração o conceito do juiz, as afirmações são falsas. Se, o que está descrito em livros didáticos, verdadeiras.
4. Teste de exemplos e não-exemplos: para os exemplos de polígonos que foram colocados apresentando atributos irrelevantes, como cor interna e hachuras, o juiz, conforme exposto sobre polígono acima, considerou que o correto seria assinalar “nda”, pois deveria ter a opção “região poligonal”.
5. Teste de relações subordinadas e supra-ordenadas: o juiz relatou inconsistências e incoerências em duas afirmações. Uma delas foi substituída pela afirmação “Toda pirâmide de base triangular é um tetraedro” e a outra afirmação “Toda pirâmide é um poliedro que é determinado pelo tipo de polígono que forma a sua base” foi reformulada. Também evidenciou falta de precisão no enunciado de três afirmações, mas foram corrigidas.

O juiz solicitou que fossem substituídos os nomes iniciais dos instrumentos como, por exemplo, “prova matemática” e “teste de atributos definidores”, por outros termos, durante a coleta de dados, pois essa nomenclatura poderia causar espanto e estranheza, por não fazer parte do vocabulário dos alunos. Os nomes da prova e dos testes foram substituídos pela nomenclatura Instrumento 1, 2, 3 e 4, conforme descrito abaixo no tópico instrumentos.

Foi sugerido que tomasse ciência dos livros didáticos adotados na escola dos participantes da pesquisa, a fim de verificar se os polígonos são apresentados com cor interna ou se são destacados apenas os segmentos, já que o juiz apresentou livros didáticos com figuras planas coloridas.

5.4 Estudo piloto

Foi realizado um estudo piloto com 76 alunos das três séries do ensino médio de uma escola pública do município de Bauru-SP para avaliar as condições dos instrumentos de pesquisa no que diz respeito ao enunciado, o entendimento dos alunos sobre como deveriam respondê-los e o tempo gasto pelos alunos para responder as atividades de cada instrumento. Esse estudo foi feito após as orientações fornecidas pelo juiz.

Durante a aplicação da prova matemática (Instrumento 1), um aluno da segunda série observou a falha no enunciado da questão nº 4, que era: “Responda quantas arestas F, vértices A ...”, esta tinha as letras trocadas em relação aos nomes e que foi corrigida para aplicação no estudo final.

Outro problema aconteceu no teste de exemplos e não-exemplos em que os alunos foram orientados corretamente para responderem as figuras que estavam desenhadas, sendo que para os itens finais (Elementos 19 a 24) eles deveriam esperar, pois seriam mostrados alguns objetos feitos com cartolina. No entanto, ao percorrer a sala de aula, percebeu-se que alguns alunos tinham respondido os itens que não havia nenhuma figura como referência. Quando questionados por que assinalaram uma resposta, disseram que acharam que “Elemento 1”, por exemplo, era a figura nº 1 (triângulo) contida no início do Instrumento. Essa situação foi importante para a aplicação no estudo final, em que os participantes tiveram a devida orientação para realizarem a tarefa.

A maior parte da correção dos enunciados tinha sido realizada por meio da discussão com o juiz (professor do Departamento de Matemática) o que possibilitou dar atenção a outros pontos importantes.

Quanto ao tempo gasto, os participantes levaram em média 1hora e 05 minutos para responder as atividades: 15 min. (questionário), 20 min. (Instrumento 1), 10 min. (Instrumento 2), 10 min. (Instrumento 3) e 10 min. (Instrumento 4). No total, a aplicação durou duas horas-aula, pois o início e as trocas entre os instrumentos dispensaram algum tempo. Esse mesmo tempo gasto em cada um dos Instrumentos foi estabelecido aos participantes do estudo final.

5.5 Participantes

Participaram da pesquisa 253 alunos, sendo 97 do gênero masculino e 156 do gênero feminino, estudantes do ensino médio de uma escola pública da cidade de Bauru do estado de São Paulo, que freqüentavam aulas no período diurno. A escolha por participantes do ensino médio deveu-se ao fato de que já tinham passado por todo um processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos no ensino fundamental. Com o conhecimento em diversas áreas da Matemática, os PCNEM (2002) apontam que os alunos podem "desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínios em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade" (BRASIL, 2002).

Ensino Médio	Turma A	Turma B	Turma C	Total
1ª série	32	31	30	93
2ª série	24	26	24	74
3ª série	32	23	31	86
Total	88	80	85	253

Quadro 5: Número de participantes por série do ensino médio.

5.6 Instrumentos e Material

Primeiramente, foram elaborados uma carta de apresentação do trabalho e pedido de autorização à diretora da unidade escolar para realização da pesquisa, além de um termo de consentimento livre e esclarecido e termo de autorização assinado pelos pais dos alunos autorizando a participarem das duas fases do estudo (Anexo I).

Os dados foram coletados mediante a aplicação de cinco instrumentos:

1. **Questionário.** Com questões sobre a vida escolar dos participantes como idade, gênero, se gostam de Matemática e geometria, o que se trabalha em geometria etc. (Anexo II).
2. **Prova matemática (Instrumento 1).** Formulada com questões para avaliar aspectos do conhecimento declarativo dos participantes a respeito dos conceitos de polígonos e poliedros. O interesse foi verificar se declaravam os atributos definidores e se conseguiam fornecer exemplos corretos. As atividades de planificação cobradas nesse instrumento serviram para analisar se os participantes sabiam diferenciar um poliedro a partir de seu atributo definidor "figura tridimensional" em relação aos polígonos obtidos pela planificação, cujo atributo definidor é "figura plana". Esses dois atributos são essenciais na diferenciação entre polígonos e poliedros (Anexo III).
3. **Teste de atributos definidores (Instrumento 2).** Composto de afirmações lógicas envolvendo os conceitos de polígonos e poliedros com seus respectivos atributos relevantes e também com atributos irrelevantes, com a finalidade de verificar o conhecimento declarativo dos alunos (Anexo IV).

4. **Teste de exemplos e não-exemplos (Instrumento 3).** Foi formulado levando-se em consideração que, para formar um conceito, além de identificar os exemplos, é necessário identificar os não-exemplos, ou seja, os atributos que definem o exemplo e os que não fazem parte dele. Foi composto de figuras planas (polígonos e não-polígonos) e de figuras não-planas (poliedros e corpos redondos), em que alguns polígonos foram representados com atributos irrelevantes (cor interna, borda espessa etc.). Seis figuras foram construídas com material e apresentadas, uma a uma, aos alunos: cubo, prisma de base triangular, quadrilátero, círculo, pirâmide de base quadrada e esfera (Anexo V).
5. **Teste de relações subordinadas e supra-ordenadas (Instrumento 4).** Composto de afirmações lógicas que envolveram relações subordinadas e supra-ordenadas dentre os exemplos da taxonomia polígono e da taxonomia poliedro. A intenção foi verificar se os participantes da pesquisa sabem, por exemplo, que um quadrado é um losango, e que cubo também é paralelepípedo, através das propriedades que as figuras mantêm (Anexo VI).

5.7 Procedimento

5.7.1 Primeira fase

Foram aplicados o questionário, a prova matemática, o teste de atributos definidores, o teste de exemplos e não-exemplos e o teste de relações subordinadas e supra-ordenadas, nessa ordem, para cada uma das 9 turmas, utilizando o tempo de duas aulas consecutivas. Nesse sentido, somente foi possível coletar os dados de duas turmas por dia.

O pesquisador introduziu cada instrumento sempre orientando os participantes sobre como deveriam proceder para fornecer suas respostas. A partir dos resultados obtidos pelos participantes foi possível selecionar seis deles para a segunda fase.

5.7.2 Segunda fase

Foram calculadas as médias obtidas pelos participantes nos instrumentos da primeira fase, sendo escolhidos, aleatoriamente, seis deles para participarem de uma entrevista. Escolheram-se três alunos com médias abaixo de cinco pontos e três alunos com média acima ou igual a cinco pontos. O Quadro 6 apresenta os participantes que foram entrevistados.

Ensino Médio	Média Final < 5,0	Média Final >= 5,0
1ª série	Aluno do 1ºC	Aluno do 1ºA
2ª série	Aluna do 2ºB	Aluna do 2ºA
3ª série	Aluno do 3ºC	Aluna do 3ºA

Quadro 6: Participantes que foram selecionados para serem entrevistados.

A entrevista pode ser utilizada como um instrumento de recolha de dados descritivos na linguagem do próprio participante, permitindo, assim, que o pesquisador consiga desenvolver de maneira intuitiva uma idéia a respeito do modo como os participantes interpretam aspectos do mundo (BOGDAN e BIKLEN, 1994).

Na realização das entrevistas, feitas na própria escola, cada participante respondeu novamente as questões dos instrumentos da primeira fase. Ao mesmo tempo, o pesquisador apresentava a resposta que ele havia fornecido nos instrumentos da primeira fase e questionava sobre como estava pensando, quando solicitado a explicar as respostas.

O tipo de entrevista utilizada foi a semi-dirigida, a qual apresenta duas características: (a) “o entrevistado produz um discurso que não é linear, o que significa que o entrevistador reorienta a entrevista em certos momentos”; (b) “nem todas as intervenções do entrevistador estão previstas antecipadamente. Quando muito este prevê algumas perguntas importantes ou alguns pontos de referência” (KETELE e ROGIERS, 1993, p. 193).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), recomenda-se que as entrevistas sejam gravadas, pois as transcrições posteriores são os principais dados dos estudos. No caso da presente pesquisa, elas foram audio-gravadas com cada um dos seis participantes, sendo realizadas, posteriormente, a transcrição e análise das falas pertinentes à investigação do estudo.

A figura abaixo sintetiza, graficamente, o procedimento que foi utilizado para a pesquisa.

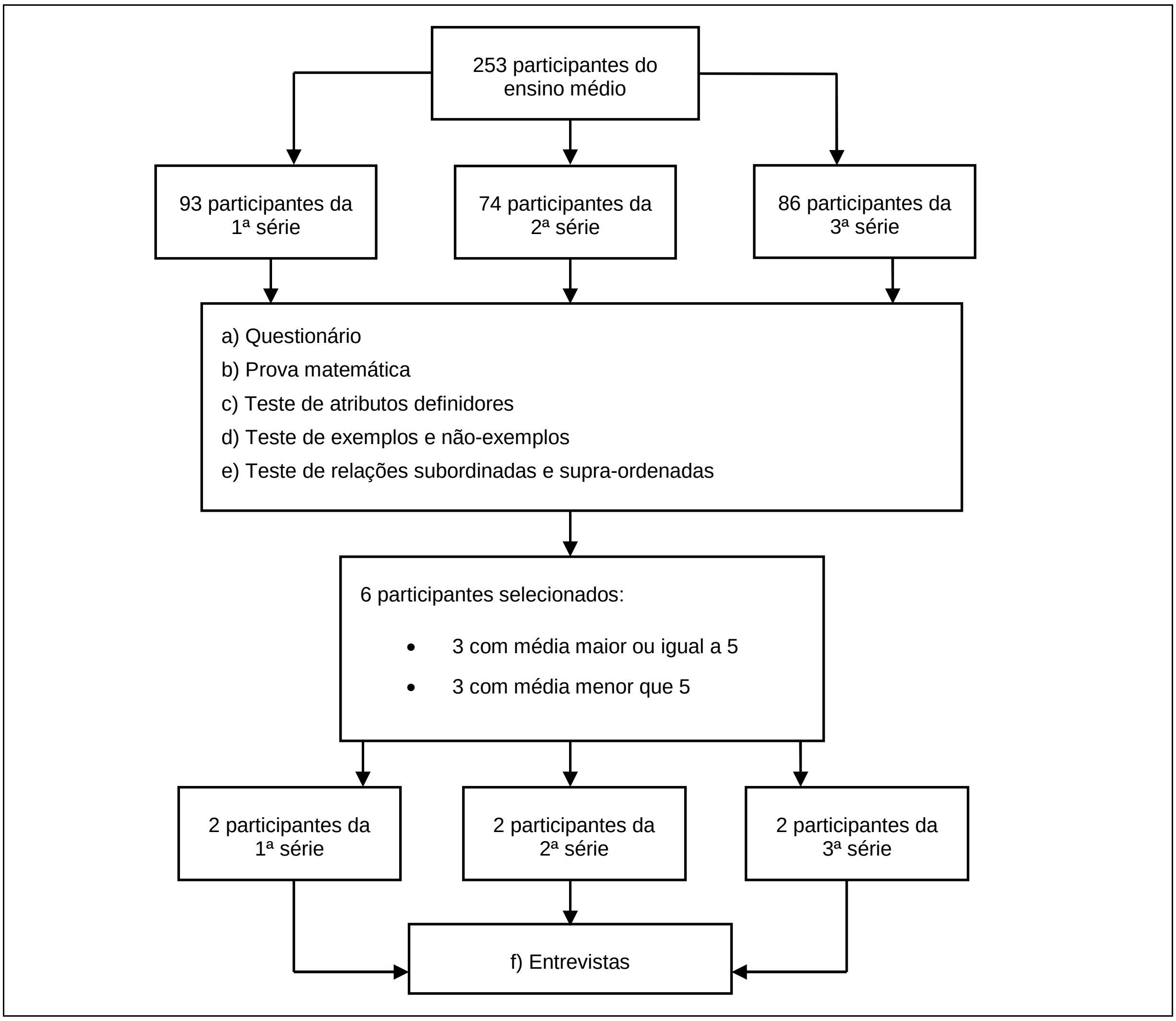


Figura 21: Resumo do procedimento utilizado na dissertação.

5.8 Análise dos dados

Na primeira fase do estudo foram feitas uma análise quantitativa e uma análise descritiva dos dados obtidos no questionário e na prova matemática (Instrumento 1).

Os resultados obtidos foram analisados utilizando técnicas estatísticas em duas vertentes. A primeira analisou o desempenho dos participantes em cada uma das atividades, tanto por série, quanto por gênero e, neste caso, foi utilizado o teste qui-quadrado (com dois graus de liberdade para série e um grau de liberdade para gênero) para comparar se a porcentagem de acerto entre as séries (ou entre os gêneros) poderia ser considerada igual.

A segunda vertente analisou o desempenho por participantes, foi contado o número de acertos em cada instrumento, depois esse número foi transformado em uma escala de zero a dez, que foi denominado de nota, calculado como número de respostas corretas dividido pelo número total de atividades e multiplicado por dez.

O desempenho dos participantes, avaliado através da nota, tanto nos instrumentos, quanto nos componentes dos níveis cognitivos, foi julgado utilizando a técnica de análise de variância (ANOVA), com um modelo fatorial completo de dois fatores (2-way), série e gênero (3x2), por meio do teste F e, quando este detectou diferenças significativas entre as médias foi utilizado o teste de comparações múltiplas de Tukey.

Para ilustrar o desempenho dos participantes por séries foi utilizado o diagrama da caixa ou *boxplot*, que é formado por uma caixa limitada pelos percentis 25 e 75 e possui um traço interno que representa a mediana. A caixa contém 50% dos dados, 25% ficam abaixo e 25% acima da caixa. As linhas externas representam os valores máximo e mínimo, a menos que existam valores *outliers* e extremos. Um valor é chamado de *outlier* quando se afasta da borda da caixa uma vez e meia seu comprimento e é representado por uma circunferência, quando se afasta três vezes esse comprimento é chamado de valor extremo, representado por um asterisco. Nesses casos, traça-se uma linha no último valor que não é *outlier*.

Para analisar a relação entre as notas nos diferentes instrumentos e componentes dos níveis cognitivos foi utilizado o coeficiente de correlação de Pearson, que mede o grau de relação linear entre duas variáveis, tomando valores entre menos um e mais um. Quando os valores se aproximam de um, indicam uma relação perfeita direta (quando uma variável aumenta a outra também aumenta) e quando se aproximam de menos um, indicam uma relação perfeita inversa (quando uma variável aumenta a outra diminui) e valores próximos de zero indicam ausência de relação linear.

Para processar os dados foi utilizado o pacote estatístico Statistical Package for Social Science - SPSS (Norusis, 1993) e o nível de significância foi de 5% ($\alpha = 0,05$), porém em todos os casos, as estatísticas foram acompanhadas do *p-valor*, dando ao leitor liberdade para extrair suas próprias conclusões. Os p-valores menores que 0,05 indicam a existência de diferenças significativas entre as porcentagens de respostas corretas por séries ou nas médias das notas nos instrumentos ou níveis cognitivos.

Na segunda fase do estudo, os dados foram analisados qualitativamente visando a maneira como pensavam os participantes a respeito dos conceitos de polígonos e poliedros, pois é uma forma de tentar "compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados e descrever em que consistem estes mesmos significados" (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 70*)*. As respostas foram dispostas em quadros.

CAPÍTULO VI

RESULTADOS E ANÁLISE DOS DADOS

PRIMEIRA FASE

A primeira fase da pesquisa corresponde a uma análise do conhecimento dos participantes sobre atributos definidores, exemplos e não-exemplos e relações subordinadas e supra-ordenadas de polígonos e poliedros durante a realização individual de atividades.

Os dados dos quatro instrumentos foram analisados por questão, calculando-se a porcentagem de participantes que acertaram cada uma delas e utilizando-se o teste qui-quadrado para analisar diferenças de desempenho por série. Em cada instrumento, também foi contado o número de respostas corretas por participante, transformadas em uma escala de zero a dez, utilizando-se o teste F para analisar diferenças significativas por série e gênero. Na prova matemática (Instrumento 1) foi feita uma análise qualitativa das respostas.

6.1 Perfil dos participantes

Participaram da pesquisa 253 alunos do ensino médio, que estudavam no período diurno em uma escola pública do município de Bauru/SP, distribuídos em três turmas de cada série, conforme mostra a Tabela 1.

Tabela 1: Distribuição da amostra por série, gênero e turma.

Série	Gênero	Turma						Total	
		A		B		C			
		Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
1ª	Masculino	11	34,4	11	35,5	13	43,3	35	37,6
	Feminino	21	65,6	20	64,5	17	56,7	58	62,4
	Total	32	100,0	31	100,0	30	100,0	93	100,0
2ª	Masculino	7	29,2	7	26,9	12	50,0	26	35,1
	Feminino	17	70,8	19	73,1	12	50,0	48	64,9
	Total	24	100,0	26	100,0	24	100,0	74	100,0
3ª	Masculino	12	37,5	9	39,1	15	48,4	36	41,9
	Feminino	20	62,5	14	60,9	16	51,6	50	58,1
	Total	32	100,0	23	100,0	31	100,0	86	100,0
Total	Masculino	30	34,1	27	33,8	40	47,6	97	38,3
	Feminino	58	65,9	53	66,3	45	53,6	156	61,7
	Total	88	100,0	80	100,0	85	101,2	253	100,0

Observa-se que em geral as mulheres são mais numerosas dos que os homens, conforme ilustra a Figura 22.

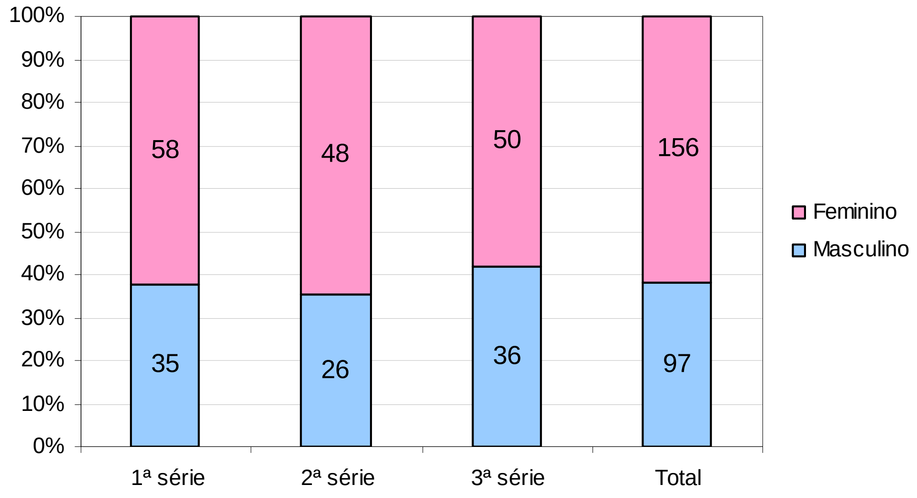


Figura 22: Distribuição da amostra por série e gênero.

Essa escola estava utilizando para o ensino fundamental os livros da coleção "Matemática e Realidade" (IEZZI, DOLCE e MACHADO, 2000). Foi observado o conceito dado para polígonos e verificou-se que o livro da quinta série apresenta, primeiro, a definição de poligonal como "a figura formada pelos pontos de um número finito de segmentos sucessivamente consecutivos, com quaisquer dois segmentos vizinhos não colineares" (p. 228). E que assim, define polígono como "uma poligonal em que as extremidades coincidem" (p. 230), isto é, os autores apresentam apenas um atributo de polígono, os segmentos de reta.

Através da observação feita nos livros, verificou-se que os autores consideram polígonos como formados pelos segmentos de reta sem a sua região interna, concepção que corroborou com a utilizada na presente pesquisa. No livro da oitava série, quando trabalha área, apresenta que a área do quadrado é a área da superfície ou região quadrada, e assim, as figuras aparecem coloridas para destacar o polígono com sua região interna.

6.2 Descrição das respostas no questionário

Os participantes foram solicitados a descrever o que era geometria e, pode-se observar que mais da metade (51,4%) respondeu que é o estudo das figuras geométricas. A segunda maior porcentagem (19,0%) foi atribuída ao estudo das medidas, sendo que os participantes da segunda (27,0%) e terceira séries (31,4%) foram os que mais indicaram esse estudo, como mostra a Tabela 2.

Tabela 2: Porcentagem de participantes por série, segundo o que é geometria.

Para você, o que é geometria?	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Estuda figuras e medidas	7,5	9,5	4,7	7,1
Estuda figuras geométricas	58,1	50,0	45,3	51,4
Estuda medidas	1,1	27,0	31,4	19,0
Estuda as formas das coisas	31,2	6,8	9,3	16,6
Outras (*)	2,2	2,7	3,5	2,8
Não respondeu	0,0	4,1	5,8	3,2
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

(*) Respostas muito gerais como, por exemplo, "é praticamente matemática" e "a medida da terra".

Ao serem questionados sobre se gostavam de geometria, 65,2% dos participantes responderam que não gostavam (Tabela 3). Os participantes das três séries afirmaram que não gostavam de geometria, pois os índices foram altos, sendo que a terceira série foi a que afirmou que menos gostava (67,4%).

Quanto à explicação dada, em relação ao não gostar de geometria, a maioria (41,1%) respondeu que não compreende os conceitos e as fórmulas, enquanto que, para os que afirmaram gostar, essa compreensão ocorreu com 10,7% dos participantes. Pôde-se verificar que a segunda maior porcentagem (15,8%) apresentou uma tendência à atitude negativa em relação à Matemática como explicação por não gostar de geometria (Tabela 3).

Tabela 3: Porcentagem de participantes por série, de acordo com o gostar de geometria e a explicação dada.

Descrição	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Você gosta de geometria?				
Sim	24,7	23,0	24,4	24,1
Não	62,4	66,2	67,4	65,2
Mais ou menos	11,8	8,1	4,7	8,3
Não responderam	1,1	2,7	3,5	2,4
Total	100,0	100,0	100,0	100,0
Explicação				
Gosta das figuras	5,4	12,2	3,5	6,7
Compreende os conceitos/fórmulas	11,8	5,4	14,0	10,7
Aplica-se no cotidiano	8,6	4,1	5,8	6,3
Não gosta das figuras	4,3	6,8	10,5	7,1
Não compreende os conceitos/fórmulas	44,1	41,9	37,2	41,1
Não gosta de Matemática	9,7	21,6	17,4	15,8
Não responderam	16,1	8,1	11,6	12,3
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

Conforme a Tabela 4, a maioria dos participantes (39,5%) respondeu que as figuras planas são o que se estuda em geometria plana, sendo os participantes da terceira série os que mais expressaram essa resposta. Em relação ao estudo de áreas e perímetros (13,4%), os participantes da terceira série novamente apresentaram a maioria das respostas (24,4%), mostrando uma tendência maior do que as outras séries para fornecer essa resposta.

Em relação à categoria "Outras", caracterizava-se pelas respostas imprecisas, das quais, a maioria (28,0%) foi dada por participantes da primeira série, sendo algumas delas as seguintes: "estuda o objeto de frente", "que pode ser visto de cima", "estuda o solo plano" etc.

Tabela 4: Porcentagem de participantes por série, segundo o que se estuda em geometria plana.

O que se estuda em geometria plana?	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Figuras planas	39,8	33,8	44,2	39,5
Áreas e perímetros	5,4	10,8	24,4	13,4
Outras(*)	28,0	10,8	17,4	19,4
Não responderam	26,9	44,6	14,0	27,7
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

(*) Respostas incoerentes como "que pode ser visto de cima" e "estuda o objeto de frente".

Quanto ao estudo da geometria espacial, a maioria das respostas (43,1%) indicou as figuras espaciais. Mais da metade dos participantes da terceira série (54,7%) deu essa resposta, sendo a maior porcentagem entre as séries. Como se pode observar na Tabela 5, somente os participantes da primeira série (11,8%) responderam que se estuda figuras planas na geometria espacial. Quando se realiza, por exemplo, o cálculo da área total de uma figura espacial, se estuda também a área das figuras planas que compõem as faces ou as superfícies, sendo um estudo que pode ser considerado como um dos trabalhos com a geometria espacial.

Tabela 5: Porcentagem de participantes por série, segundo o que se estuda em geometria espacial.

O que se estuda em geometria espacial?	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Figuras espaciais	39,8	33,8	54,7	43,1
Área/volume	5,4	14,9	25,6	15,0
Figuras planas	11,8	0,0	0,0	4,3
Outras(*)	9,7	8,1	4,7	7,5
Não responderam	33,3	43,2	15,1	30,0
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

(*) Respostas imprecisas como "o objeto de cima para baixo" e "as superfícies que geralmente não vemos".

A Tabela 6 mostra que a maioria dos participantes (40,7%) respondeu que o trabalho com medidas e cálculos é a principal dificuldade em geometria. A terceira série foi a que apresentou o maior índice de respostas (61,6%) para essa categoria, porcentagem essa muito superior a das outras séries. Observa-se que 14,2% dos participantes responderam que a dificuldade está na falta de compreensão em geometria.

Em relação à atribuição da dificuldade, a maioria dos participantes respondeu que a causa seria o fato de não estudar ou ter esquecido (19,8%), porcentagem que ficou muito próxima da resposta que indicou ser a geometria um conteúdo difícil (19,0%). O estudo de Pirola (2000), que trabalhou com conceitos geométricos, também apresentou um alto percentual de respostas em que os participantes afirmavam que não sabiam os conceitos ou tinham esquecido, não obtendo êxito na utilização de procedimentos para solucionar problemas de área, perímetro e volume.

Tabela 6: Porcentagem de participantes por série de acordo com a dificuldade e a atribuição dada para a dificuldade em geometria.

Descrição	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Qual a sua principal dificuldade em geometria?				
Medidas/cálculos	24,7	36,5	61,6	40,7
Desenhar/figuras	14,0	8,1	10,5	11,1
Falta de compreensão	19,4	10,8	11,6	14,2
Não responderam	33,3	41,9	12,8	28,9
Nenhuma	8,6	2,7	3,5	5,1
Total	100,0	100,0	100,0	100,0
A que você atribui essa dificuldade?				
Não foi ensinado	14,0	4,1	7,0	8,7
Não estuda/Esqueceu	17,2	14,9	26,7	19,8
Conteúdo difícil	9,7	14,9	32,6	19,0
Não responderam	59,1	66,2	33,7	52,6
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

Quando perguntados sobre o que mais gostavam de geometria (Tabela 7), a maioria não respondeu (60,9%), 16,2% dos participantes disse que era desenhar ou as formas (formato) e 11,9%, respondeu que gostavam mais dos cálculos. Quando questionados sobre as razões, grande parte dos participantes não respondeu (76,3%) e 19,4% afirmou que gostava de fazer/era fácil.

Quanto à parte que menos gostavam de geometria, a maioria dos participantes não respondeu (68,8%) e 14,2% afirmou ser medidas e/ou cálculos (14,2%), sendo a segunda série a que menos gostava, conforme mostra a Tabela 8. Em relação ao motivo de não gostar, a única resposta dada foi que não compreendiam e/ou era difícil o conteúdo de geometria.

Tabela 7: Porcentagem de participantes por série, segundo a parte da geometria que mais gostam e o porquê.

Descrição	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Qual a parte da geometria que você mais gosta?				
Figuras planas	6,5	0,0	10,5	5,9
Figuras espaciais	0,0	1,4	4,7	2,0
Cálculos	7,5	17,6	11,6	11,9
Desenhar/Formas	18,3	17,6	12,8	16,2
Tudo	2,2	2,7	4,7	3,2
Não responderam	65,6	60,8	55,8	60,9
Total	100,0	100,0	100,0	100,0
Por quê?				
Compreende os conceitos	3,2	2,7	1,2	2,4
Estimula o raciocínio	1,1	1,4	3,5	2,0
Gosta de fazer/Fácil	11,8	20,3	26,7	19,4
Não responderam	83,9	75,7	68,6	76,3
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

Tabela 8: Porcentagem de participantes por série, segundo a parte da geometria que menos gostam e o porquê.

Descrição	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Qual a parte da geometria que você menos gosta?				
Figuras planas	0,0	2,7	3,5	2,0
Figuras espaciais	5,4	2,7	9,3	5,9
Medidas/Cálculos	12,9	16,2	14,0	14,2
Desenhar	6,5	6,8	7,0	6,7
Nomenclatura	5,4	1,4	0,0	2,4
Não responderam	69,9	70,3	66,3	68,8
Total	100,0	100,0	100,0	100,0
Por quê?				
Não compreende/Difícil	8,6	17,6	22,1	15,8
Não responderam	91,4	82,4	77,9	84,2
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

A última questão solicitava que os participantes respondessem a série em que mais haviam estudado geometria. Pôde-se observar que a maior parte das respostas apontou que a 8ª série foi onde mais tinham estudado geometria. A 7ª série foi a segunda com maior porcentagem de indicação de maior estudo de geometria (17,0%), conforme mostra a Tabela 9.

Tabela 9: Porcentagem de participantes por série, segundo a série em que mais estudaram geometria.

Qual a série em que você mais estudou geometria?	1ª série	2ª série	3ª série	Total
4ª	3,2	0,0	0,0	1,2
5ª	12,9	5,4	2,3	7,1
6ª	14,0	2,7	8,1	8,7
7ª	25,8	14,9	9,3	17,0
8ª	16,1	48,6	51,2	37,5
1ª EM	1,1	4,1	8,1	4,3
2ª EM	0,0	0,0	4,7	1,6
Em duas séries do EF	14,0	17,6	3,5	11,5
Não responderam	12,9	6,8	12,8	11,1
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

De modo geral, as respostas fornecidas pelos participantes mostram que houve uma tendência a responderem mais a respeito do ensino de geometria com relação aos cálculos e medidas.

6.3 Descrição das dificuldades

As Tabelas 10 e 11 mostram as respostas que foram relatadas pelos participantes sobre as dificuldades que tiveram para responder as atividades do Instrumento 2 e do Instrumento 3, respectivamente. Esse relato foi cobrado nestes instrumentos com intuito de perceber o que dificultou o desempenho dos participantes.

É possível observar na Tabela 10 que a maioria relatou que a dificuldade estava em não saber geometria (39,9%). Os participantes da segunda série mostraram que sabiam muito menos de geometria (52,7%) do que as outras séries. Pode-se perceber que uma das respostas mais direcionadas para o que se cobrou no Instrumento 2 foi a dificuldade em saber o que era polígono e poliedro (21,7%). A categoria "atributos definidores" refere-se a respostas que os participantes forneceram como figura convexa, bidimensional e tridimensional como sendo os termos que tiveram dificuldades. Já a categoria "atributos irrelevantes" refere-se a respostas como polígono preto e poliedro branco citadas pelos participantes.

Na Tabela 11, pode-se verificar que a maioria dos participantes relatou que tiveram dificuldades em identificar os polígonos e os poliedros (21,7%), situação também relatada no Instrumento 2 e que apresentou a mesma porcentagem, conforme a Tabela 10. Uma porcentagem muito pequena de participantes relatou que tiveram dificuldades com os atributos irrelevantes (3,6%), categoria esta que correspondeu às respostas fornecidas pelos participantes como as dúvidas sobre a figura "ser pintada" (interior preto) e outras serem "figuras listradas" (hachura).

Tabela 10: Porcentagem de participantes por série de acordo com as dificuldades que relataram sobre a realização do Instrumento 2.

Dificuldades relatadas no Instrumento 2	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Polígonos/Poliedros	24,7	13,5	25,6	21,7
Atributos definidores	4,3	4,1	8,1	5,5
Atributos irrelevantes	5,4	1,4	5,8	4,3
Não sabe geometria	32,3	52,7	37,2	39,9
Não respondeu	12,9	14,9	14,0	13,8
Nenhuma	20,4	13,5	9,3	14,6
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

Tabela 11: Porcentagem de participantes por série de acordo com as dificuldades que relataram sobre a realização do Instrumento 3.

Dificuldades relatadas no Instrumento 3	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Polígonos/exemplos	1,1	0,0	1,2	0,8
Poliedros/exemplos	5,4	4,1	7,0	5,5
Identificar polígono/poliedro	26,9	12,2	24,4	21,7
Atributos irrelevantes	4,3	4,1	2,3	3,6
Não sabe/lembra geometria	17,2	14,9	12,8	15,0
Não respondeu	32,3	50,0	44,2	41,5
Nenhuma	12,9	14,9	8,1	11,9
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

Uma compreensão mais clara das dificuldades sobre o conhecimento a respeito de polígonos e poliedros será possível através da observação dos resultados apresentados na segunda fase da pesquisa feita através de entrevistas com alguns participantes.

6.4 Desempenho na prova matemática (Instrumento 1)

6.4.1 Análise por questão

A Tabela 12 mostra o índice de acertos dos participantes nas 23 questões/subquestões da prova matemática (Instrumento 1), por série, bem como o resultado do teste qui-quadrado

(χ^2) que analisa a significância estatística das diferenças entre as séries. Os itens destacados correspondem aqueles que apresentaram diferenças significativas.

Tabela 12: Porcentagem de acertos na prova matemática por série e resultado do teste χ^2.

Questão / subquestão	Porcentagem				Teste qui-quadrado	
	1ª	2ª	3ª	Geral	$\chi 2(2)$	p-valor
1. O que você entende por polígono? Desenhe dois tipos diferentes.	12,9	10,8	26,7	17,0	8,904	0,012
2. O que você entende por poliedro? Desenhe dois tipos diferentes.	2,2	6,8	14,0	7,5	9,047	0,011
3a. Defina face de um poliedro.	3,2	4,1	2,3	3,2	0,390	0,823
3b. Defina aresta de um poliedro.	8,6	10,8	8,1	9,1	0,386	0,825
3c. Defina vértice de um poliedro.	11,8	16,2	23,3	17,0	4,181	0,124
3d. Defina cubo.	5,4	1,4	2,3	3,2	2,478	0,290
3e. Defina pirâmide.	5,4	0,0	10,5	5,5	8,340	0,015
4a. Arestas do cubo.	43,0	31,1	43,0	39,5	3,120	0,210
4b. Vértices do cubo.	43,0	39,2	52,3	45,1	3,022	0,221
4c. Faces do cubo.	49,5	39,2	64,0	51,4	9,982	0,007
4d. Arestas da pirâmide de base quadrada.	43,0	35,1	43,0	40,7	1,347	0,510
4e. Vértices da pirâmide de base quadrada.	47,3	43,2	48,8	46,6	0,527	0,768
4f. Faces da pirâmide de base quadrada.	32,3	36,5	52,3	40,3	8,115	0,017
4g. Arestas do prisma triangular.	3,2	14,9	8,1	8,3	7,339	0,025
4h. Vértices do prisma triangular.	16,1	23,0	16,3	18,2	1,615	0,446
4i. Faces do prisma triangular.	8,6	18,9	20,9	15,8	5,861	0,053
5. O que você entende por figuras planas? E por figuras não-planas?	2,2	20,3	40,7	20,6	40,664	0,000
6. O que é um polígono regular? Dê dois exemplos.	6,5	6,8	24,4	12,6	16,341	0,000
7. Qual o menor número de lados de um polígono?	23,7	32,4	39,5	31,6	5,242	0,073
8. Desenhe uma planificação do cubo.	14,0	13,5	10,5	12,6	0,570	0,752
9. Desenhe uma planificação de um prisma de base triangular.	0,0	9,5	5,8	4,7	8,492	0,014
10. Desenhe uma planificação de uma pirâmide de base triangular.	18,3	17,6	4,7	13,4	8,667	0,013
11. Desenhe uma planificação de uma pirâmide de base quadrada.	22,6	18,9	3,5	15,0	14,006	0,001

De acordo com a Tabela 12, os participantes se saíram melhor nas questões relativas ao número de faces, vértices e arestas do cubo e da pirâmide de base quadrada e, pior para definir cubo e face do poliedro, como ilustra a Figura 23.

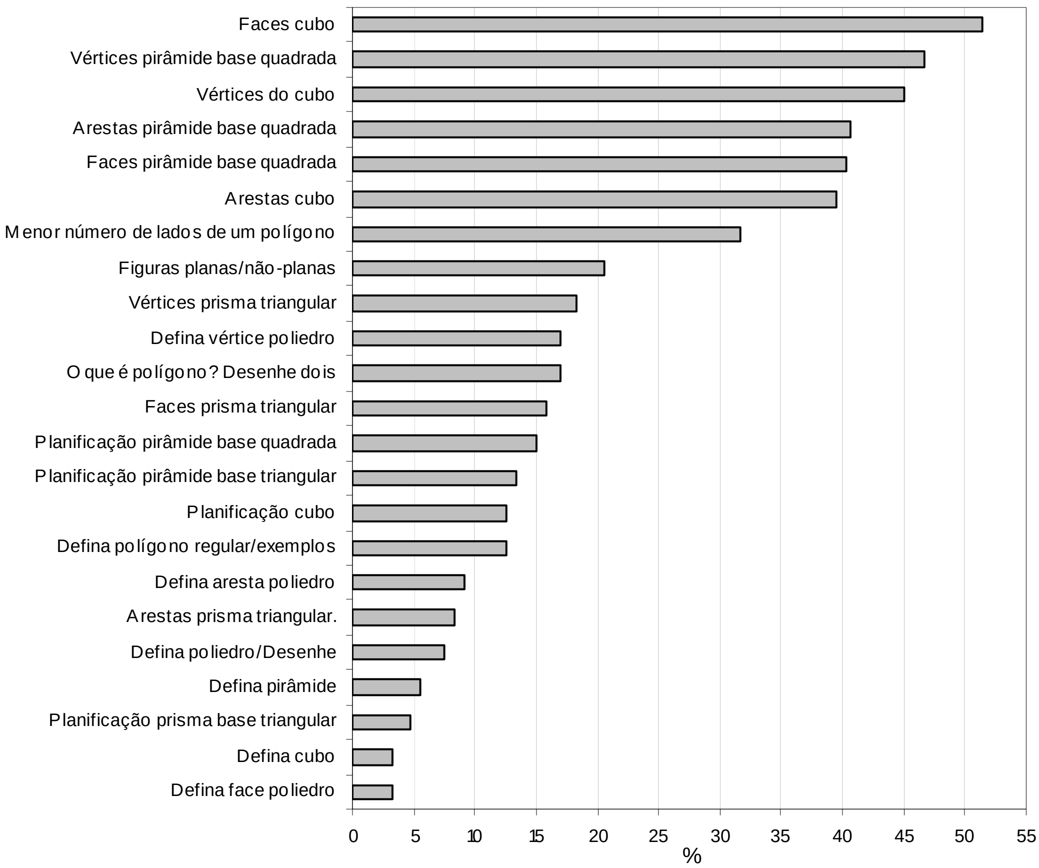


Figura 23: Desempenho dos participantes nas questões da prova matemática.

Das 23 questões/subquestões apenas em dez foram encontradas diferenças significativas por série, sendo que, em geral, a 3ª série tendeu a se sair melhor do que as outras séries, com exceção das questões 10 e 11, conforme ilustra a Figura 24.

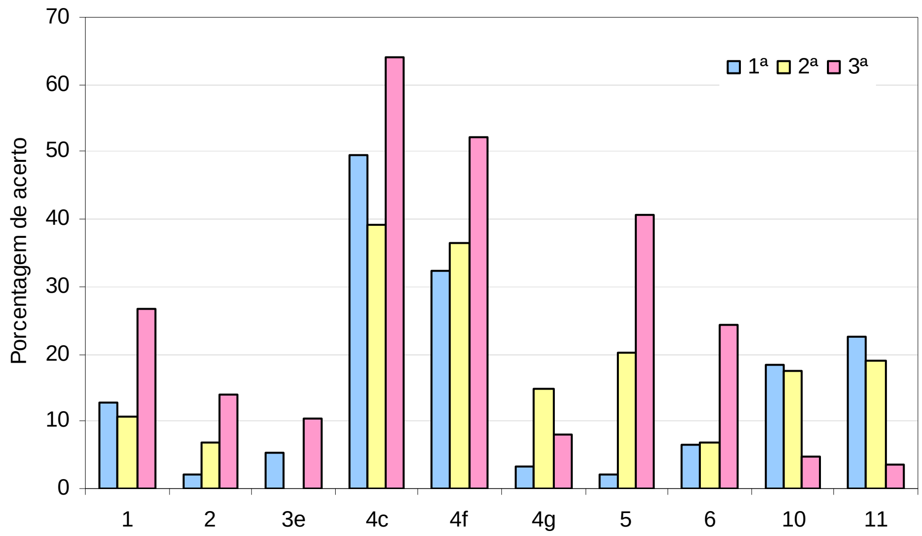


Figura 24: Desempenho dos participantes nas questões que apresentaram diferenças na prova matemática, por série.

Não foram encontradas diferenças significativas por gênero em nenhuma das questões.

A seguir foi analisada cada uma das questões presentes no Instrumento 1, cujas respostas dos participantes foram categorizadas. A Tabela 13 mostra os resultados da conceituação dada pelos participantes para polígono, em que se pode observar que apenas 20,6% dos participantes conceituaram polígono em termos de seus atributos definidores.

Tabela 13: Porcentagem de participantes por série, segundo entendimento de polígono.

O que você entende por polígono?	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Conceituou em termos de atributos	**15,1**	**16,2**	**30,2**	**20,6**
Apresentou atributos de poliedros	3,2	5,4	4,7	4,3
Com vários lados	8,6	2,7	10,5	7,5
Mais de quatro lados	18,3	1,4	12,8	11,5
Não respondeu nada sobre	54,8	74,3	41,9	56,1
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

A Tabela 14 mostra os resultados à solicitação para desenhar dois polígonos diferentes, o que foi feito por 41,9% dos participantes, sendo que 8,7% desenharam poliedros como exemplos de polígono.

Tabela 14: Porcentagem de participantes por série, segundo desenho de exemplos de polígonos.

Desenhe dois tipos diferentes de polígonos	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Desenhou dois polígonos diferentes	**33,3**	**39,2**	**53,5**	**41,9**
Desenhou apenas um	22,6	21,6	15,1	19,8
Desenhou duas formas iguais	18,3	13,5	11,6	14,6
Desenhou não-polígonos	3,2	1,4	0,0	1,6
Desenhou poliedros/figuras espaciais	5,4	14,9	7,0	8,7
Não respondeu	17,2	9,5	12,8	13,4
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

A Tabela 15 mostra que apenas 7,9% dos participantes conseguiram conceituar o poliedro através dos atributos definidores. Quase 90% dos participantes não souberam conceituar poliedro, mostrando um desconhecimento desse conceito.

Quanto aos exemplos, somente 15,0% dos participantes desenharam dois exemplos de poliedros (Tabela 16). Uma porcentagem de 19,0% dos participantes acabou desenhando polígonos e outras figuras planas como exemplos de poliedros.

Tabela 15: Porcentagem de participantes por série, segundo entendimento de poliedro.

O que você entende por poliedro?	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Conceituou em termos de atributos	**2,2**	**8,1**	**14,0**	**7,9**
Com vários lados	2,2	4,1	1,2	2,4
Não respondeu nada sobre	95,7	87,8	84,9	89,7
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

Tabela 16: Porcentagem de participantes por série, segundo desenho de poliedros.

Desenhe dois tipos diferentes de poliedro	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Desenhou dois poliedros diferentes	**2,2**	**24,3**	**20,9**	**15,0**
Desenhou apenas um	1,1	17,6	4,7	7,1
Desenhou polígonos/figuras planas	15,1	32,4	11,6	19,0
Não respondeu	81,7	25,7	62,8	58,9
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

A Tabela 17 mostra que apenas 3,2% dos participantes definiram face de um poliedro como polígono. Na categoria “discriminou o lugar das faces” os participantes somente indicaram a localização das faces, ou seja, que elas correspondiam à parte da frente, dos lados, em cima etc. A aresta de um poliedro foi definida como intersecção entre as faces somente por 9,1% dos participantes. Já o vértice de um poliedro foi definido corretamente por 17,0% dos participantes.

O cubo foi definido corretamente como constituído de seis faces quadradas por apenas 3,2% dos participantes. Já 11,9% dos participantes desenharam um cubo, o que mostra que esses participantes não conseguiram descrever com palavras os atributos deste conceito.

A pirâmide foi corretamente definida, em termos de seus atributos definidores, por apenas 5,5% dos participantes. Uma porcentagem de 18,6% dos participantes definiu a pirâmide apenas por exemplos particulares como a pirâmide de base triangular e a de base quadrada.

Tabela 17: Porcentagem de participantes por série, segundo definição de termos de geometria espacial.

Defina os seguintes termos / resultados	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Face de um poliedro				
Um polígono	**3,2**	**4,1**	**2,3**	**3,2**
Discriminou o lugar das faces	17,2	18,9	16,3	17,4
Outras	24,7	16,2	25,6	22,5
Não responderam	54,8	60,8	55,8	56,9
Aresta de um poliedro				
Intersecção entre faces	**8,6**	**10,8**	**8,1**	**9,1**
Lados dos polígonos	8,6	6,8	9,3	8,3
Outras	23,7	17,6	24,4	22,1
Não responderam	59,1	64,9	58,1	60,5
Vértice de um poliedro				
Intersecção das arestas	**11,8**	**16,2**	**23,3**	**17,0**
Outras	22,6	17,6	17,4	19,4
Não responderam	65,6	66,2	59,3	63,6
Cubo				
Seis faces quadradas	**5,4**	**1,4**	**2,3**	**3,2**
Um quadrado	24,7	21,6	24,4	23,7
Desenhou cubo	7,5	8,1	19,8	11,9
Outras	25,8	10,8	23,3	20,6
Não responderam	36,6	58,1	30,2	40,7
Pirâmide				
Uma base e faces laterais triangulares	**5,4**	**0,0**	**10,5**	**5,5**
Um triângulo	23,7	13,5	19,8	19,4
Particularizou	10,8	17,6	27,9	18,6
Desenhou uma pirâmide	4,3	4,1	4,7	4,3
Outras	9,7	0,0	8,1	6,3
Não responderam	46,2	64,9	29,1	45,8

A Tabela 18 descreve a quantidade de arestas, vértices e faces que os participantes colocaram para o cubo, a pirâmide de base quadrada e o prisma triangular. Observa-se que a quantidade desses elementos correspondentes ao cubo foram mais identificado do que a pirâmide, que pela sua vez foi mais identificado que o prisma. O cubo foi mais identificado corretamente pelo número de suas faces (53,0%), a pirâmide e o prisma pelo número de seus vértices (47,8% e 18,2%, respectivamente).

Tabela 18: Porcentagem de participantes por série, segundo respostas sobre a quantidade de arestas, vértices e faces do cubo, pirâmide de base quadrada e prisma triangular.

Cubo	Quantidade descrita	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Arestas	Mais de 12	3,2	1,4	7,0	4,0
	12	**45,2**	**31,1**	**43,0**	**40,3**
	Menos de 12	35,5	28,4	30,2	31,6
	Não respondeu	15,1	39,2	19,8	23,7
Vértices	Mais de 8	9,7	5,4	12,8	9,5
	8	**46,2**	**39,2**	**52,3**	**46,2**
	Menos de 8	29,0	21,6	18,6	23,3
	Não respondeu	15,1	33,8	17,4	21,3
Faces	Mais de 6	11,8	0,0	1,2	4,7
	6	**53,8**	**39,2**	**64,0**	**53,0**
	Menos de 6	21,5	25,7	14,0	20,2
	Não respondeu	14,0	35,1	19,8	22,1
Pirâmide	**Quantidade descrita**	**1ª série**	**2ª série**	**3ª série**	**Total**
Arestas	mais de 8	4,3	2,7	4,7	4,0
	8	**45,2**	**35,1**	**43,0**	**41,5**
	menos de 8	30,1	24,3	29,1	28,1
	Não respondeu	20,4	37,8	23,3	26,5
Vértices	mais de 5	12,9	4,1	17,4	11,9
	5	**50,5**	**43,2**	**48,8**	**47,8**
	menos de 5	9,7	13,5	14,0	12,3
	Não respondeu	26,9	37,8	19,8	27,7
Faces	mais de 5	16,1	4,1	2,3	7,9
	5	**35,5**	**36,5**	**52,3**	**41,5**
	menos de 5	26,9	24,3	27,9	26,5
	Não respondeu	21,5	36,5	17,4	24,5
Prisma	**Quantidade descrita**	**1ª série**	**2ª série**	**3ª série**	**Total**
Arestas	mais de 9	22,6	1,4	9,3	11,9
	9	**3,2**	**14,9**	**8,1**	**8,3**
	menos de 9	30,1	37,8	43,0	36,8
	Não respondeu	44,1	45,9	39,5	43,1
Vértices	mais de 6	10,8	4,1	7,0	7,5
	6	**16,1**	**23,0**	**16,3**	**18,2**
	menos de 6	26,9	31,1	27,9	28,5
	Não respondeu	46,2	41,9	48,8	45,8
Faces	mais de 5	25,8	8,1	9,3	15,0
	5	**9,7**	**18,9**	**20,9**	**16,2**
	menos de 5	20,4	28,4	29,1	25,7
	Não respondeu	44,1	44,6	40,7	43,1

A Tabela 19 apresenta os atributos definidores utilizados pelos participantes para as figuras planas e não planas. Observa-se que apenas 22,5% dos participantes identificaram o atributo definidor de figuras planas como sendo aquela que pertence ao plano, ou seja, que é bidimensional, e que 23,7% deles identificaram o atributo definidor de figuras não-planas como aquelas que são tridimensionais, figuras que ocupam lugar no espaço.

Tabela 19: Porcentagem de participantes por série, segundo descrição de figuras planas e não planas.

Descrição	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Figuras planas				
Não rolam/figuras retas	23,7	4,1	8,1	12,6
Bidimensional/do plano	**5,4**	**20,3**	**43,0**	**22,5**
Unidimensional	1,1	2,7	1,2	1,6
Citou um polígono	15,1	6,8	15,1	12,6
Outras	10,8	5,4	5,8	7,5
Não responderam	44,1	60,8	26,7	43,1
Figuras não-planas				
Que rolam	17,2	1,4	7,0	9,1
Tridimensional/do espaço	**5,4**	**20,3**	**46,5**	**23,7**
Citou poliedros	7,5	6,8	7,0	7,1
Figura plana com linha curva	12,9	4,1	3,5	7,1
Outras	11,8	2,7	9,3	8,3
Não responderam	45,2	64,9	26,7	44,7

Na Tabela 20, observa-se que o polígono regular foi conceituado corretamente por apenas 14,2% dos participantes e que somente 20,9% deles conseguiram fornecer dois exemplos.

Na Tabela 21, observa-se que somente 31,6% dos participantes identificaram que três é o número mínimo de lados que um polígono pode ter. Os participantes da terceira série identificaram melhor do que os participantes da segunda série, que por sua vez tiveram um melhor desempenho que os da primeira.

Tabela 20: Porcentagem de participantes segundo resposta sobre polígono regular e apresentação de dois exemplos de polígono regular.

Solicitação / respostas	1ª série	2ª série	3ª série	Total
O que é um polígono regular?				
Conceituou corretamente	**7,5**	**10,8**	**24,4**	**14,2**
Lados de mesma medida	14,0	8,1	10,5	11,1
Ângulos iguais	0,0	2,7	2,3	1,6
Outras	8,6	8,1	16,3	11,1
Não respondeu	69,9	70,3	46,5	62,1
Apresente dois exemplos				
Dois exemplos	**12,9**	**16,2**	**33,7**	**20,9**
Um exemplo	8,6	4,1	5,8	6,3
Exemplos não regulares	14,0	10,8	8,1	11,1
Figuras espaciais	5,4	4,1	2,3	4,0
Não respondeu	59,1	64,9	50,0	57,7

Tabela 21: Porcentagem de participantes por série, segundo resposta sobre o menor número de lados de um polígono.

Qual o menor número de lados de um polígono?	1ª série	2ª série	3ª série	Total
1 ou 2	4,3	1,4	7,0	4,3
3	**23,7**	**32,4**	**39,5**	**31,6**
4 a 6	37,6	14,9	22,1	25,7
Acima de 7	4,3	4,1	0,0	2,8
Não respondeu	30,1	47,3	31,4	35,6
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

A Tabela 22 mostra que apenas 12,6% dos participantes desenharam a planificação correta do cubo, já 44,7% dos participantes desenhou o próprio cubo como planificação. A Figura 25 ilustra algumas das respostas dos participantes para planificação do cubo, mostrando as dificuldades que tiveram na representação.

Analisando a Figura 25, pode-se observar que alguns participantes fizeram a planificação do cubo com a falta ou sobra de um quadrado. Parece que esses participantes não tomaram cuidado para verificar a quantidade de faces do cubo e poder fazer a planificação de tal modo que a montagem gerasse novamente o cubo.

Tabela 22: Porcentagem de participantes por série, segundo desenho da planificação do cubo.

Desenhe uma planificação do cubo	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Uma planificação	**14,0**	**13,5**	**10,5**	**12,6**
O cubo	51,6	28,4	51,2	44,7
Um quadrado	7,5	6,8	9,3	7,9
Outras	9,7	9,5	10,5	9,9
Não respondeu	10,8	37,8	16,3	20,6
Cilindro	6,5	4,1	2,3	4,3
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

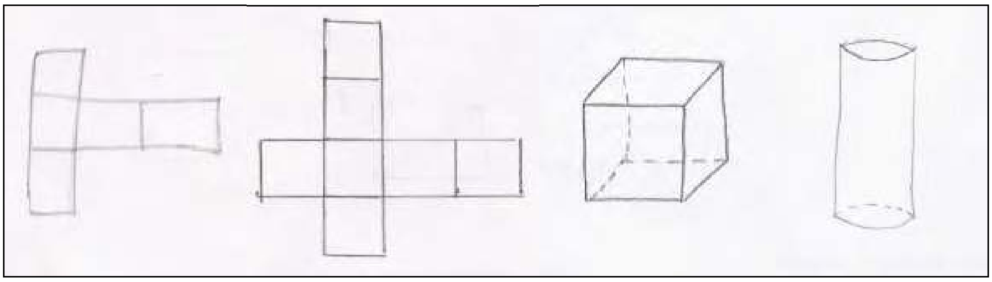


Figura 25: Representações dos participantes para uma planificação do cubo.

Alguns participantes desenharam o cubo, mostrando não entender o conceito de planificação e outros desenharam um cilindro, figura que não tem relação com um dos conceitos investigados na pesquisa, o de poliedro, conforme mostra a Figura 25.

Para a planificação correta do prisma de base triangular, somente 4,7% dos participantes a fizeram (Tabela 23). Uma porcentagem um pouco maior, 7,1%, desenharam o prisma para representar a planificação. Algumas das dificuldades que se pode observar para essa atividade são apresentadas na Figura 26.

Apesar de mostrar que entendiam o que significava planificação, alguns participantes demonstravam falta de rigor com a representação das medidas e a forma das figuras da planificação (Figura 26). Talvez um ensino de desenho geométrico pudesse auxiliar esses participantes a realizarem construções e representações planas mais coerentes. No segundo desenho, os participantes representaram o prisma, mostrando que não entendiam o conceito de planificação e também dificuldades em representar corretamente o próprio objeto.

Tabela 23: Porcentagem de participantes por série, segundo desenho da planificação do prisma de base triangular.

Desenhe uma planificação do prisma de base triangular	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Uma planificação	**0,0**	**9,5**	**5,8**	**4,7**
O prisma	3,2	10,8	8,1	7,1
Um triângulo	5,4	2,7	14,0	7,5
Outras	39,8	21,6	29,1	30,8
Não respondeu	51,6	55,4	43,0	49,8
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

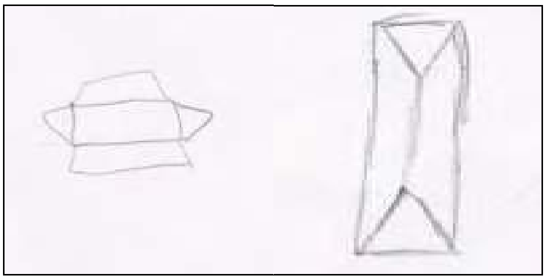


Figura 26: Representações dos participantes para uma planificação do prisma de base triangular.

A Tabela 24 mostra o resultado da questão que solicitava uma planificação da pirâmide de base triangular. Nessa, observa-se que apenas 13,4% dos participantes conseguiram fazê-lo de forma correta. Além disso, 24,5% dos participantes desenharam a pirâmide, mostrando dificuldades sobre o conceito de planificação como na realização correta do desenho, conforme a Figura 27.

Na Figura 27, os dois primeiros desenhos mostram que os participantes tinham a idéia de planificação, mas a primeira não é coerente para representação, não possibilitando obter, pela montagem, a pirâmide e, a segunda, não caracteriza uma representação correta de planificação, pois a planificação dessa pirâmide não corresponde em desenhar os triângulos separados e sim unidos pelos lados comuns. Uma situação curiosa foi que alguns participantes, 7,5%, fizeram a planificação como sendo a vista de cima da figura, conforme indica o terceiro desenho. E os participantes que não entendiam o que era planificar, desenharam a própria pirâmide, como mostra o último desenho.

Tabela 24: Porcentagem de participantes por série, segundo a planificação da pirâmide de base triangular.

Desenhe uma planificação da pirâmide de base triangular	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Uma planificação	**18,3**	**17,6**	**4,7**	**13,4**
A pirâmide	24,7	20,3	27,9	24,5
Um triângulo	15,1	12,2	15,1	14,2
Vista de cima	10,8	2,7	8,1	7,5
Outras	18,3	6,8	16,3	14,2
Não respondeu	12,9	41,9	27,9	26,5
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

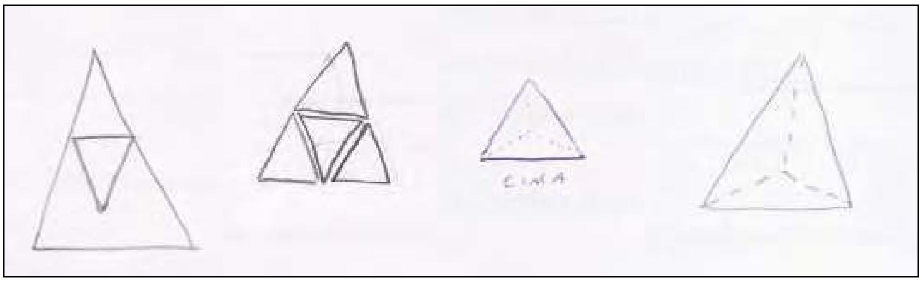


Figura 27: Representações dos participantes para uma planificação da pirâmide de base triangular.

Na Tabela 25, pode-se observar que a planificação da pirâmide de base quadrada foi feita corretamente por 14,6% dos participantes e que 23,3% dos participantes desenharam a pirâmide. As dificuldades em planificar as figuras e o entendimento errado de planificação podem ser observadas na Figura 28.

Na Figura 28, o primeiro desenho mostra que o participante não desenhou todos os triângulos que correspondem às faces laterais, mesmo tendo desenhado ao lado a pirâmide como base para a planificação. O segundo desenho apresenta os três triângulos unidos pelos vértices, situação não usual, pois nos documentos oficiais de ensino as planificações apresentam os triângulos unidos pelos lados, no entanto esse tipo de planificação foi considerado correto, pois pela montagem pode-se obter a pirâmide de base quadrada. Para alguns participantes (5,9%), a planificação da pirâmide era a projeção da vista de cima. Talvez entendessem que planificar era representar no plano o que estavam vendo da figura. E para essa atividade, alguns participantes também acabaram desenhando a figura solicitada e não a planificação, de acordo com o último desenho.

Tabela 25: Porcentagem de participantes por série, segundo a planificação da pirâmide de base quadrada.

Desenhe uma planificação da pirâmide de base quadrada	1ª série	2ª série	3ª série	Total
Uma planificação	**22,6**	**17,6**	**3,5**	**14,6**
A pirâmide	20,4	16,2	32,6	23,3
Um quadrado	1,1	1,4	1,2	1,2
Um triângulo	6,5	12,2	3,5	7,1
Vista de cima	5,4	0,0	11,6	5,9
Outras	20,4	10,8	22,1	18,2
Não respondeu	23,7	41,9	24,4	29,2
Total	100,0	100,0	100,0	100,0

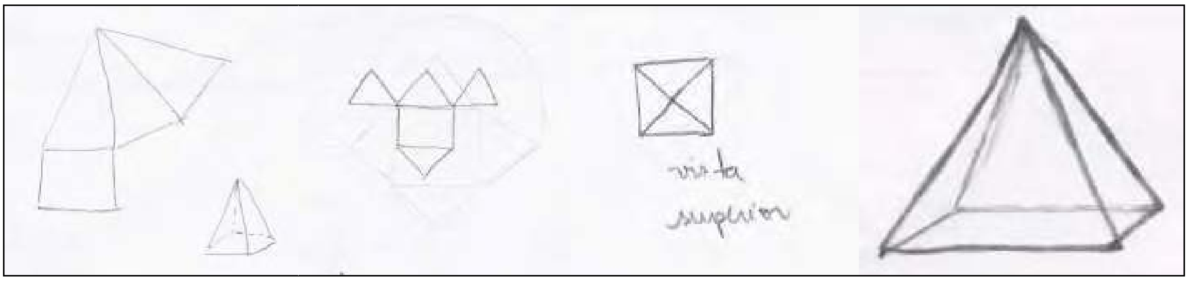


Figura 28: Representações dos participantes para uma planificação da pirâmide de base quadrada.

6.4.2 Análise geral

A Tabela 26 mostra a média e desvio padrão (DP) do desempenho dos participantes, numa escala de zero a dez, na prova matemática (Instrumento 1), por série e gênero. Em geral, os participantes apresentaram um baixo desempenho (média igual a 2,25 pontos de dez), o que demonstra que os participantes da pesquisa tiveram dificuldades em responder questões relacionadas a polígonos e poliedros.

Analisando por gênero, os do gênero masculino da terceira série foram os que apresentaram maior média (2,74), contudo essas diferenças não foram significativas nem por série ($F(2,247) = 2,415$; $p = 0,091$); nem por gênero ($F(1,247) = 0,286$; $p = 0,593$); nem interação entre gênero e série ($F(2,247) = 0,315$; $p = 0,730$). Isso significa que nem a série, nem o gênero interferiram no desempenho dos participantes. A Figura 29 ilustra esse desempenho e pode-se observar o pouco ganho, ou a quase estabilidade do desempenho, ao longo das séries.

Tabela 26: Desempenho dos participantes na prova matemática por série e gênero.

Série	Masculino			Feminino			Total		
	Nº	Média	DP	Nº	Média	DP	Nº	Média	DP
1ª	35	1,90	1,33	58	2,04	1,28	93	1,99	1,29
2ª	26	2,39	2,27	48	2,06	2,60	74	2,17	2,48
3ª	36	2,74	2,32	50	2,52	1,97	86	2,62	2,11
Total	97	2,34	2,02	156	2,20	1,98	253	2,25	1,99

Pode-se observar na Figura 8 uma tendência mais homogênea dos participantes da primeira série em relação às outras séries em torno da média da prova matemática (Instrumento1).

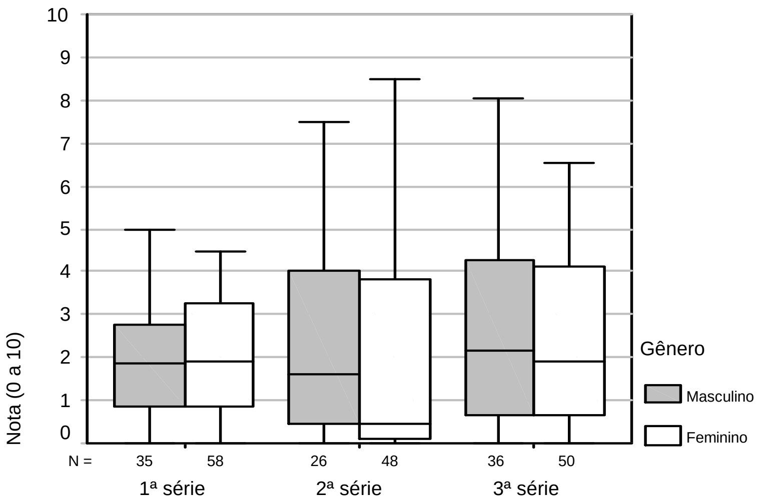


Figura 29: Desempenho dos participantes na prova matemática por série e gênero.

6.5 Desempenho no teste de atributos definidores (Instrumento 2)

6.5.1 Análise por afirmação

A Tabela 27 mostra o desempenho dos participantes, por série, no Instrumento 2, composto por 28 afirmações, que deviam ser assinaladas como verdadeiras ou falsas e mostra o teste qui-quadrado (χ^2) que analisa a significância estatística, sendo que as afirmações destacadas correspondem a que apresentaram diferenças significativas. A taxa média geral de acerto nas 28 afirmações foi de 60,3%, sendo que 10 afirmações tiveram taxa acima de 70,0% e 7 inferior a 50,0%, conforme ilustra a Figura 30.

Tabela 27: Desempenho dos participantes no Instrumento 2 por afirmação e série.

Afirmação		Porcentagem de acerto				Teste qui-quadrado	
		1ª	2ª	3ª	Geral	$\chi2(2)$	p-valor
1.	Todo polígono é uma figura plana	48,4	47,3	34,9	43,5	3,936	0,140
2.	Existem polígonos que não são figuras planas	41,9	48,6	36,0	41,9	2,595	0,273
3.	Todos os polígonos são formados por segmentos de reta	82,8	74,3	77,9	78,7	1,805	0,406
4.	Existem polígonos que não são formados por segmentos de reta	74,2	68,9	70,9	71,5	0,587	0,746
5.	Os polígonos são figuras abertas	83,9	78,4	93,0	85,4	7,099	0,029
6.	Todos os polígonos são figuras fechadas	77,4	74,3	84,9	79,1	2,915	0,233
7.	Todos os polígonos são pretos	88,2	93,2	90,7	90,5	1,239	0,538
8.	Triângulos e quadriláteros não são exemplos de polígonos	48,4	43,2	62,8	51,8	6,764	0,034
9.	Todos os polígonos são figuras simples	49,5	37,8	38,4	42,3	3,102	0,212
10.	Nem todos os polígonos são figuras simples	33,3	25,7	31,4	30,4	1,198	0,549
11.	Os polígonos possuem três dimensões	46,2	59,5	61,6	55,3	5,002	0,082
12.	Os polígonos são bidimensionais	54,8	54,1	55,8	54,9	0,050	0,975
13.	Os polígonos são também chamados de poliedros	64,5	44,6	52,3	54,5	6,855	0,032
14.	Todos os polígonos são convexos	46,2	63,5	70,9	59,7	11,961	0,003
15.	Todos os poliedros são tridimensionais	67,7	54,1	60,5	61,3	3,289	0,193
16.	Existem poliedros que são figuras planas	20,4	39,2	38,4	32,0	9,008	0,011
17.	As faces dos poliedros são polígonos	58,1	66,2	65,1	62,8	1,460	0,482
18.	Todos os poliedros são formados por segmentos de reta	30,1	31,1	29,1	30,0	0,077	0,962
19.	Todos os poliedros são formados por vértices, faces e arestas	68,8	74,3	80,2	74,3	3,050	0,218
20.	Existem poliedros que não possuem vértices	71,0	71,6	80,2	74,3	2,404	0,301
21.	Prismas e pirâmides são formados por vértices, faces e arestas	79,6	82,4	87,2	83,0	1,873	0,392
22.	O cilindro é um poliedro, cujas faces são planas	54,8	58,1	62,8	58,5	1,170	0,557
23.	Planificando um poliedro obtemos figuras planas	60,2	66,2	79,1	68,4	7,573	0,023
24.	Se um poliedro possui faces planas, então a esfera não é um poliedro	54,8	60,8	37,2	50,6	9,924	0,007

Continua...

Tabela 27: Desempenho dos participantes no Instrumento 2 por questão e série (continuação).

Questão	Porcentagem				Teste qui-quadrado	
	1ª	2ª	3ª	Geral	$\chi^2_{(2)}$	p-valor
25. Não existem poliedros cujas faces são pentágonos	57,0	59,5	65,1	60,5	1,280	0,527
26. Todos os poliedros são brancos	72,0	78,4	84,9	78,3	4,331	0,115
27. Um cubo é um poliedro, o qual possui faces formadas por quadrados	73,1	71,6	77,9	74,3	0,932	0,627
28. A pirâmide é um poliedro formada somente por triângulos	44,1	35,1	41,9	40,7	1,439	0,487

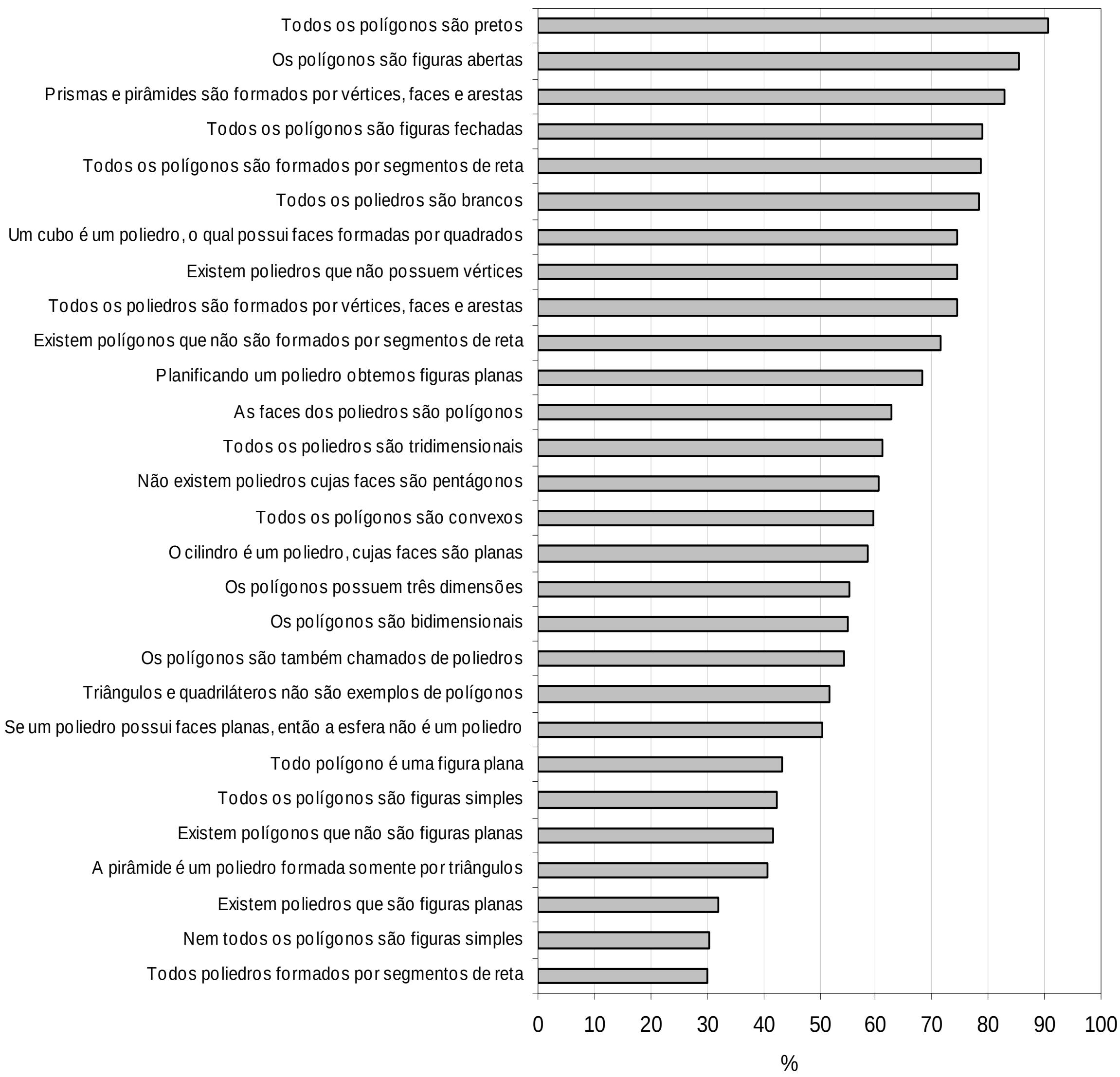


Figura 30: Desempenho dos participantes no Instrumento 2.

O desempenho mostrado na Tabela 27 significa que os participantes reconheceram as afirmações que eram verdadeiras e as afirmações que eram falsas, segundo as porcentagens indicadas. Por exemplo, a quase totalidade (90,5%) dos participantes reconheceu como falsa a Afirmação 7 “Todos os polígonos são pretos”, assim como 85,4% na Afirmação 5 “Os polígonos são figuras abertas”, tendo em vista que “figura aberta” não é atributo definidor de polígono, conforme ilustra a Figura 30.

As afirmações com índice de acerto abaixo de 50% apresentavam três atributos definidores de polígono (figura plana, figura simples e segmento de reta), os quais estavam relacionados a este e a poliedro, sendo que, o pior desempenho (30,0%) foi na Afirmação 18 “Todos os poliedros são formados por segmentos de reta”. Como segmento de reta é um atributo definidor de polígono e este é o que forma as faces dos poliedros, logo irá aparecer no formato dos objetos, pois corresponde à intersecção das faces, mas a nomenclatura para tal passa ser “aresta”, conhecimento esse que a maioria dos participantes mostrou não conhecer.

Analisando o desempenho por série, verifica-se que existem diferenças significativas em apenas sete (5, 8, 13, 14, 16, 23 e 24) das 28 afirmações, como ilustra a Figura 31. Em geral os participantes da 3ª série se saíram melhor, com exceção das Afirmações 13 e 24. Nas Afirmações 5, 8 e 13, os participantes da segunda série foram os que se saíram pior.

Em relação ao desempenho por gênero só foi encontrada diferença significativa em uma única afirmação, a 23, em que as mulheres apresentaram um desempenho (73,1%) superior ao dos homens (62,1%), isto é, 11 pontos percentuais de diferença, conforme resultados do teste qui-quadrado ($\chi^2_{(1)}$= 4,152; p = 0,042).

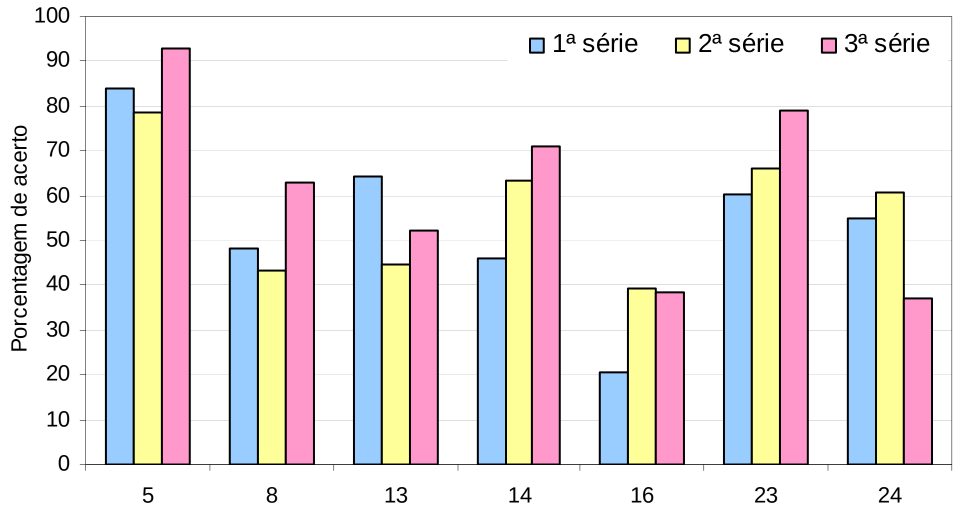


Figura 31: Desempenho dos participantes nas afirmações que apresentaram diferenças por série no Instrumento 2.

6.5.2 Análise geral

A Tabela 28 mostra o desempenho dos participantes no Instrumento 2 por série e gênero. O resultado da ANOVA mostra que não existe diferença por série ($F(2,247) = 2{,}499$; $p = 0{,}084$); nem por gênero ($F(1,247) = 0{,}075$; $p = 0{,}784$); nem interação entre gênero e série ($F(2,247) = 0{,}817$; $p = 0{,}443$).

Tabela 28: Desempenho dos participantes no Instrumento 2 por série e gênero.

Série	Masculino			Feminino			Total		
	Nº	Média	DP	Nº	Média	DP	Nº	Média	DP
1ª	35	5,93	1,18	58	5,88	1,12	93	5,90	1,14
2ª	26	5,80	1,07	48	6,01	1,39	74	5,94	1,28
3ª	36	6,43	1,24	50	6,13	1,30	86	6,25	1,28
Total	97	6,08	1,20	156	6,00	1,26	253	6,03	1,24

Comparadas à prova matemática (Instrumento 1), as médias no Instrumento 2 em cada série foram muito superiores e apresentaram certa linearidade, mas mesmo assim mostram um desempenho distante do esperado para participantes do ensino médio. Em relação ao gênero, apenas as mulheres da segunda série tiveram média superior (6,01) ao dos homens (5,80), porém essa superioridade não foi estatisticamente significativa. A Figura 32 ilustra esse desempenho e pode-se observar o pouco ganho, ou a quase estabilidade do desempenho, ao longo das séries.

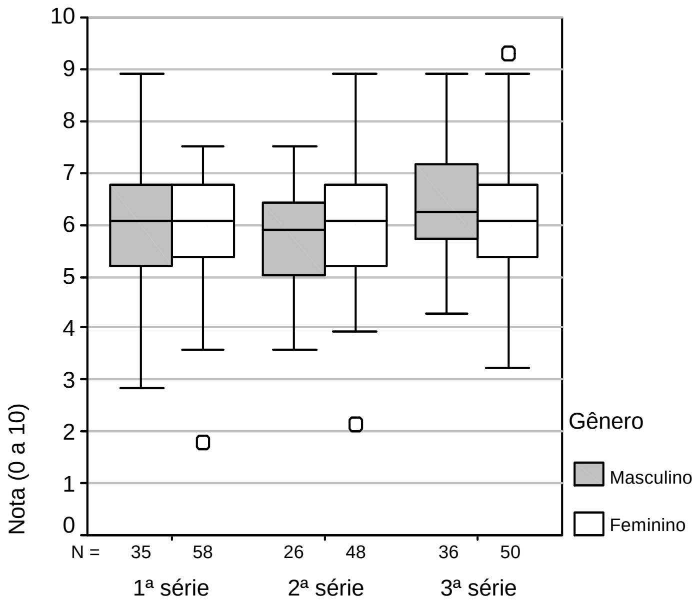


Figura 32: Desempenho dos participantes no Instrumento 2 por série e gênero.

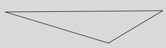
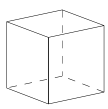
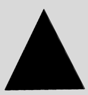
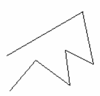
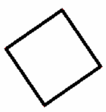
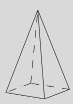
O conhecimento declarativo dos participantes da pesquisa sobre atributos definidores de polígonos e de poliedros, apesar de um desempenho que mostra que eles se saíram bem (Figura 32), ainda não é o ideal para participantes do ensino médio, pois diferenciar a informação das palavras que representam os conceitos envolve uma discriminação de atributos definidores, pois são estes que caracterizam a identidade particular dos conceitos de polígonos e poliedros.

6.6 Desempenho no teste de exemplos e não-exemplos (Instrumento 3)

6.6.1 Análise por figura

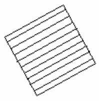
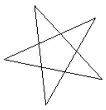
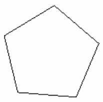
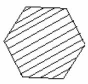
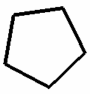
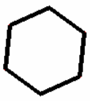
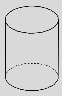
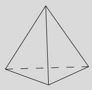
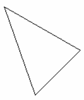
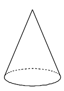
A Tabela 29 mostra o desempenho dos participantes no Instrumento 3 na identificação correta das 24 figuras, bem como o teste qui-quadrado (χ^2) que analisa as significância estatística, sendo que as figuras destacadas correspondem a que apresentaram diferenças significativas. As porcentagens indicam que os participantes identificaram corretamente cada figura como sendo polígono, poliedro ou nenhuma das anteriores (nda), isto é, nem polígono nem poliedro.

Tabela 29: Desempenho dos participantes no Instrumento 3 por figura e série.

Figura	Porcentagem de acerto				Teste qui-quadrado	
	1ª	2ª	3ª	Geral	$\chi 2(2)$	p-valor
1. 	51,6	75,7	64,0	62,8	10,287	0,006
2. 	38,7	52,7	55,8	48,6	5,932	0,052
3. 	51,6	71,6	66,3	62,5	7,850	0,020
4. 	67,7	77,0	80,2	74,7	3,988	0,136
5. 	76,3	71,6	76,7	75,1	0,680	0,712
6. 	41,9	59,5	62,8	54,2	9,015	0,011

Continua...

Tabela 29: Desempenho dos participantes no Instrumento 3, por questão e série (continuação)

Figura		Porcentagem de acerto				Teste qui-quadrado	
		1ª	2ª	3ª	Geral	$\chi2(2)$	p-valor
7.		60,2	50,0	67,4	59,7	5,046	0,080
8.		49,5	54,1	62,8	55,3	3,281	0,194
9.		16,1	18,9	26,7	20,6	3,254	0,196
10.		39,8	29,7	26,7	32,4	3,812	0,149
11.		69,9	79,7	83,7	77,5	5,201	0,074
12.		58,1	52,7	65,1	58,9	2,573	0,276
13.		72,0	71,6	82,6	75,5	3,518	0,172
14.		62,4	68,9	76,7	69,2	4,335	0,114
15.		35,5	14,9	22,1	24,9	9,918	0,007
16.		48,4	71,6	66,3	61,3	10,755	0,005
17.		58,1	59,5	57,0	58,1	0,101	0,951
18.		16,1	12,2	17,4	15,4	0,908	0,635

Continua...

Tabela 29: Desempenho dos participantes no Instrumento 3, por questão e série (continuação)

Figura		Porcentagem de acerto				Teste qui-quadrado	
		1ª	2ª	3ª	Geral	$\chi2(2)$	p-valor
19.		40,9	52,7	53,5	48,6	3,551	0,169
20.		60,2	77,0	65,1	66,8	5,418	0,067
21.		43,0	56,8	52,3	50,2	3,351	0,187
22.		67,7	54,1	62,8	62,1	3,309	0,191
23.		63,4	73,0	61,6	65,6	2,576	0,276
24.		75,3	39,2	64,0	60,9	23,042	0,000

A Figura 33 ilustra o desempenho no Instrumento 3. Em geral, observa-se que o acerto médio foi de 55,9%. Mais de 70,0% dos participantes identificaram os dois pentágonos, o quadrado de borda espessa e a figura aberta. Já os itens mais difíceis de identificar foram o cone (15,4%), a estrela (20,6%) e o cilindro (24,9%).

Em relação ao desempenho por série foram encontradas diferenças significativas em apenas seis figuras (1, 3, 6, 15, 16 e 24), conforme Tabela 19, sendo que os participantes da 2ª série tenderam a se sair melhor, seguido dos participantes da 3ª série, conforme ilustra a Figura 34.

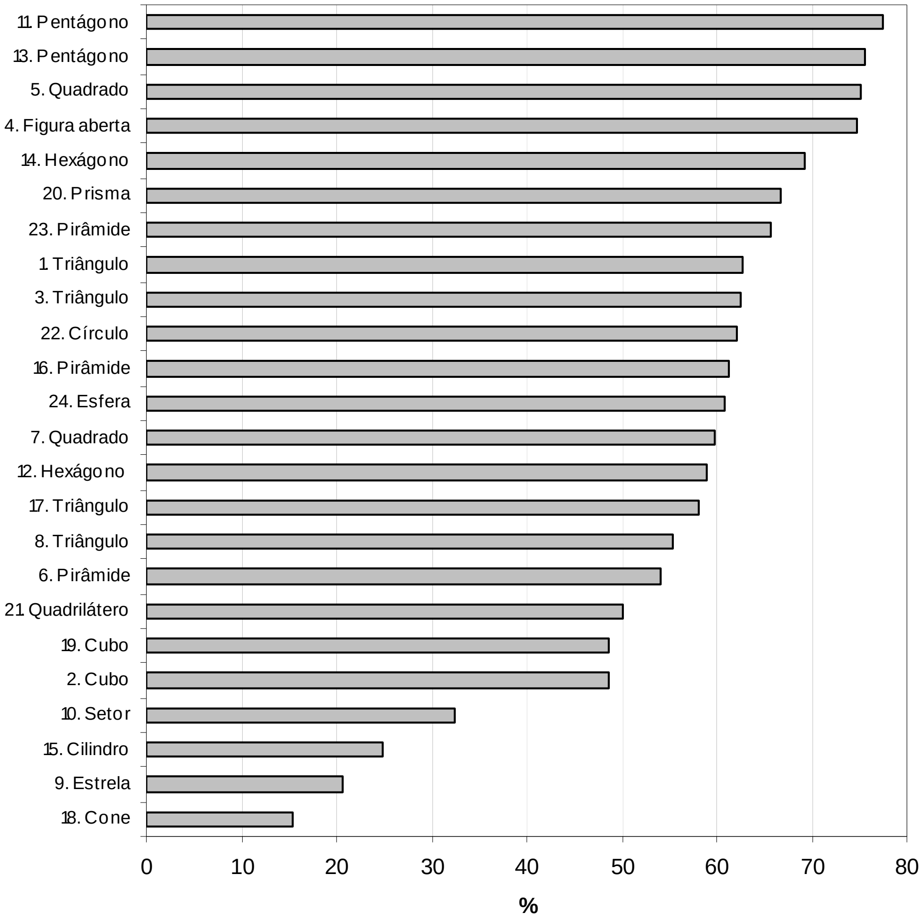


Figura 33: Desempenho dos participantes no Instrumento 3.

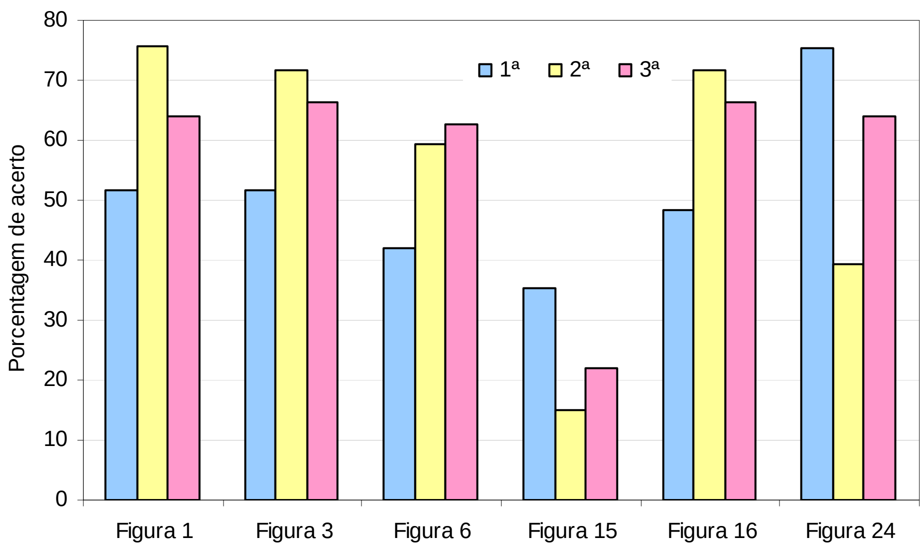


Figura 34: Desempenho dos participantes nas questões que apresentaram diferenças no Instrumento 3.

Pela diferença significativa encontrada nas respostas de identificação da figura 3 (triângulo preto) ($\chi^2_{(2)}$ = 7,850; p = 0,020), observou-se que a primeira série apresentou um desempenho inferior em relação às demais séries.

Em relação ao desempenho por gênero só foi encontrada diferença significativa em duas figuras, a 19, em que os homens apresentaram um desempenho (60,0%) superior ao das mulheres (42,3%), isto é, 17,7 pontos percentuais de diferença, conforme resultados do teste qui-quadrado ($\chi^2_{(1)}$= 6,483; p = 0,011) e na figura 21, com a mesma tendência, a favor dos homens (62,1%), em relação às mulheres (43,6%), conforme resultados do teste qui-quadrado ($\chi^2_{(1)}$= 7,107; p = 0,008).

6.6.2 Análise geral

A Tabela 30 mostra o desempenho no Instrumento 3 dos participantes por série e gênero. O resultado da ANOVA mostra que não existe diferença por série ($F(2,247) = 2,892$; $p = 0,057$); nem por gênero ($F(1,247) = 0,613$; $p = 0,434$); nem interação de gênero e série ($F(2,247) = 1,821$; $p = 0,164$).

Tabela 30: Desempenho dos participantes no Instrumento 3 por série e gênero.

Série	Masculino			Feminino			Total		
	Nº	Média	DP	Nº	Média	DP	Nº	Média	DP
1ª	35	5,262	1,718	58	5,273	1,562	93	5,269	1,613
2ª	26	5,433	2,026	48	5,694	2,115	74	5,602	2,074
3ª	36	6,424	2,118	50	5,550	2,220	86	5,916	2,208
Total	97	5,739	2,009	156	5,491	1,960	253	5,586	1,979

A Figura 35 ilustra esse desempenho e pode-se observar o pouco ganho, ou a quase estabilidade do desempenho, ao longo das séries.

Pode-se observar que no Instrumento 3 as médias da pontuação obtidas pelos participantes em todas as séries foram ligeiramente menores em relação às médias que obtiveram no Instrumento 2. O desempenho abaixo de 50% em 6 figuras pode ter contribuído para a diferença, conforme se verifica na Figura 12.

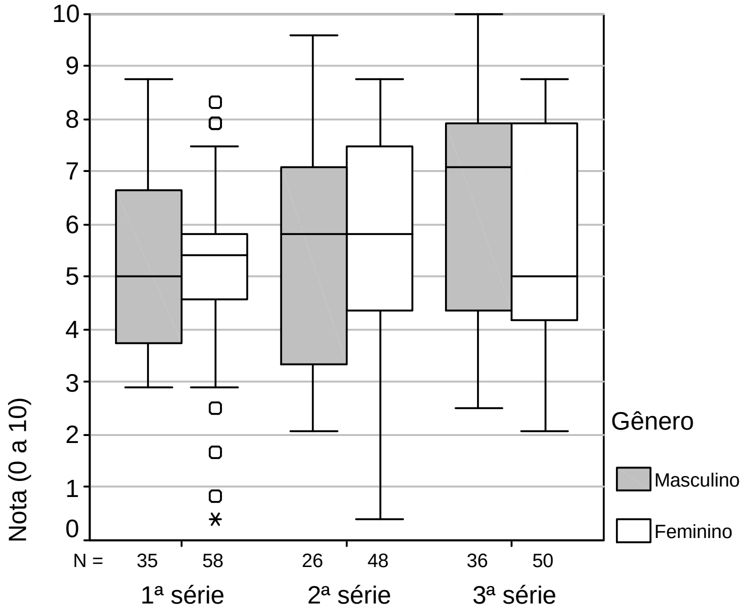


Figura 35: Desempenho dos participantes no Instrumento 3 por série e gênero.

6.7 Desempenho no teste de relações subordinadas e supra-ordenadas (Instrumento 4)

6.7.1 Análise por afirmação

A Tabela 31 mostra o desempenho dos participantes no Instrumento 4, em cada uma das 30 afirmações, bem como teste qui-quadrado (χ^2) que analisa as significância estatística, sendo que as afirmações destacadas correspondem as que apresentaram diferenças significativas. A taxa média geral de acerto foi de 56,4%, sendo que seis questões apresentaram taxa de acerto superior a 70%. A Figura 36 mostra a ordem decrescente da porcentagem de acertos nas afirmações do Instrumento 4. Pode observar que apenas duas superaram a marca do 80,0%, essas foram a Afirmação 1 “Todo polígono formado por quatro segmentos de reta é um quadrilátero” com 81,1% e a Afirmação 7 “Todo polígono que apresenta exatamente cinco segmentos de reta é pentágono”, com 80,6%. Nas afirmações de pior desempenho, treze tiveram desempenho inferior a 50%, dessas, apenas duas inferiores a 40%. A Afirmação 14 “Todos os triângulos eqüiláteros são triângulos isósceles” com 35,6% e, a Afirmação 25 “Todo poliedro formado por quatro faces quadradas é denominado cubo”, com apenas 37,9%.

Tabela 31: Desempenho dos participantes no Instrumento 4 por questão e série.

Afirmação	Porcentagem de acerto				Teste qui-quadrado	
	1ª	2ª	3ª	Geral	$\chi2(2)$	p-valor
1. Todo polígono formado por quatro segmentos de reta é um quadrilátero.	79,6	82,4	83,7	81,8	0,544	0,762
2. Todo polígono cuja soma dos ângulos internos medem 360º não são quadriláteros.	68,8	52,7	60,5	61,3	4,544	0,103
3. Todo quadrado é losango.	31,2	56,8	37,2	40,7	11,828	0,003
4. Todo losango é retângulo.	60,2	71,6	68,6	66,4	2,686	0,261
5. Se o polígono é formado por três ângulos internos então ele é um triângulo.	76,3	77,0	79,1	77,5	0,202	0,904
6. Todo polígono que é quadrado também é retângulo.	41,9	54,1	50,0	48,2	2,589	0,274
7. Todo polígono que apresenta exatamente cinco segmentos de reta é pentágono.	81,7	82,4	77,9	80,6	0,633	0,729
8. Existem triângulos que são quadriláteros.	52,7	62,2	62,8	58,9	2,345	0,310
9. Existem quadriláteros que não são paralelogramos.	45,2	54,1	58,1	52,2	3,164	0,206
10. O losango é um paralelogramo.	63,4	47,3	65,1	59,3	6,283	0,043
11. Se o triângulo possui um ângulo reto ele é o triângulo retângulo.	65,6	87,8	84,9	78,7	15,158	0,001
12. Todo triângulo que possui um ângulo reto (90º) é triângulo isósceles.	35,5	60,8	60,5	51,4	14,883	0,001
13. Todo polígono é uma figura fechada e formada por segmentos de reta	68,8	82,4	75,6	75,1	4,101	0,129
14. Todos os triângulos eqüiláteros são triângulos isósceles.	36,6	28,4	40,7	35,6	2,696	0,260
15. Existem triângulos retângulos que são triângulos eqüiláteros.	49,5	58,1	41,9	49,4	4,201	0,122
16. Algum prisma é paralelepípedo.	39,8	36,5	52,3	43,1	4,722	0,094
17. Toda pirâmide que tem exatamente quatro faces laterais triangulares é uma pirâmide quadrangular.	74,2	59,5	66,3	67,2	4,108	0,128
18. Se um poliedro apresenta duas faces (bases) paralelas e congruentes e faces laterais formadas por paralelogramos, então é um prisma.	39,8	41,9	51,2	44,3	2,584	0,275
19. O cubo e o Prisma de base pentagonal não são poliedros.	46,2	56,8	68,6	56,9	9,118	0,010
20. Toda pirâmide é um poliedro.	53,8	59,5	67,4	60,1	3,502	0,174

Continua...

Tabela 31: Desempenho dos participantes no Instrumento 4 por questão e série (continuação).

Afirmação	Porcentagem de acerto				Teste qui-quadrado	
	1ª	2ª	3ª	Geral	χ2(2)	p-valor
21. Todo cubo é um paralelepípedo.	38,7	58,1	51,2	48,6	6,546	0,038
22. Todo tetraedro é uma pirâmide de base triangular.	55,9	43,2	46,5	49,0	2,973	0,226
23. Se um prisma regular possui faces laterais retangulares então ele é um paralelepípedo.	47,3	33,8	47,7	43,5	4,002	0,135
24. Toda pirâmide de base triangular é um tetraedro.	48,4	40,5	47,7	45,8	1,197	0,550
25. Todo poliedro formado por quatro faces quadradas é denominado cubo.	43,0	36,5	33,7	37,9	1,732	0,421
26. Algum poliedro regular é o tetraedro.	44,1	40,5	39,5	41,5	0,421	0,810
27. Todos os prismas e pirâmides são poliedros.	65,6	62,2	64,0	64,0	0,211	0,900
28. Toda pirâmide é um poliedro que é determinado pelo tipo de polígono que forma a sua base.	50,5	55,4	65,1	56,9	3,970	0,137
29. Prismas e Pirâmides são poliedros que possuem faces, vértices e arestas.	68,8	70,3	76,7	71,9	1,535	0,464
30. A pirâmide de base triangular é um prisma.	38,7	50,0	43,0	43,5	2,149	0,342

A Tabela 31 mostra que em apenas seis afirmações (3, 10, 11, 12, 19 e 21) foram encontradas diferenças significativas por série, sendo que não se observa nenhum padrão de superioridade de uma série sobre outra, conforme ilustra a Figura 37.

Na Figura 37, pode-se observar que na Afirmação 3 “Todo quadrado é um losango” os participantes da primeira e terceira séries tiveram um desempenho baixo, pois foi pouca a porcentagem desses participantes que identificou que se tratava de uma afirmação verdadeira. Já os participantes da segunda série apresentaram um desempenho superior.

Na Afirmação 21 “Todo cubo é um paralelepípedo”, a segunda série também teve desempenho superior em relação às outras séries, pois identificaram que a afirmação era verdadeira. Essa mesma afirmação foi investigada por Viana (2000) numa atividade envolvendo afirmações sobre classes de inclusão e mostrou o baixo desempenho dos participantes.

Em relação ao desempenho por gênero foi encontrada diferença significativa em quatro afirmações, sendo três favoráveis às mulheres: a Afirmação 1, em que as mulheres conseguiram um desempenho de 86,5% em relação aos 75,8% dos homens ($\chi^2_{(1)}$= 6,094; p = 0,014); na Afirmação 2, em que as mulheres conseguiram um desempenho de 66,0% em relação aos 54,7% dos homens ($\chi^2_{(1)}$= 3,886; p = 0,049) e na Afirmação 20 em que as mulheres conseguiram um desempenho de 67,3%, superior aos 49,5% dos homens ($\chi^2_{(1)}$= 8,483; p = 0,003). Já na Afirmação 21 essa tendência se reverteu a favor dos homens (60,0%), sendo superior as mulheres (42,3%), conforme resultado do teste qui-quadrado ($\chi^2_{(1)}$= 6,483; p = 0,011) (Anexo VII).

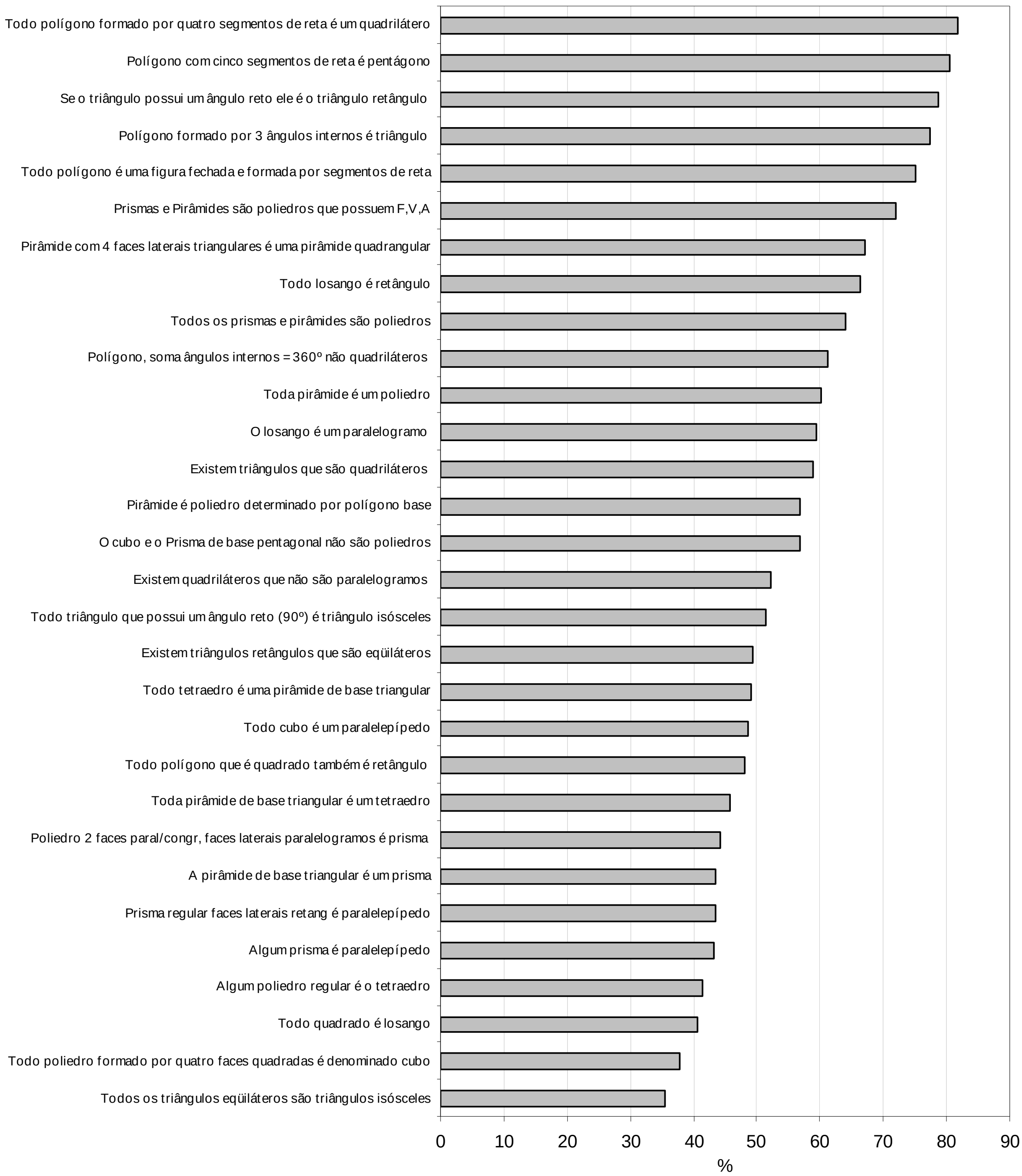


Figura 36: Desempenho dos participantes no Instrumento 4.

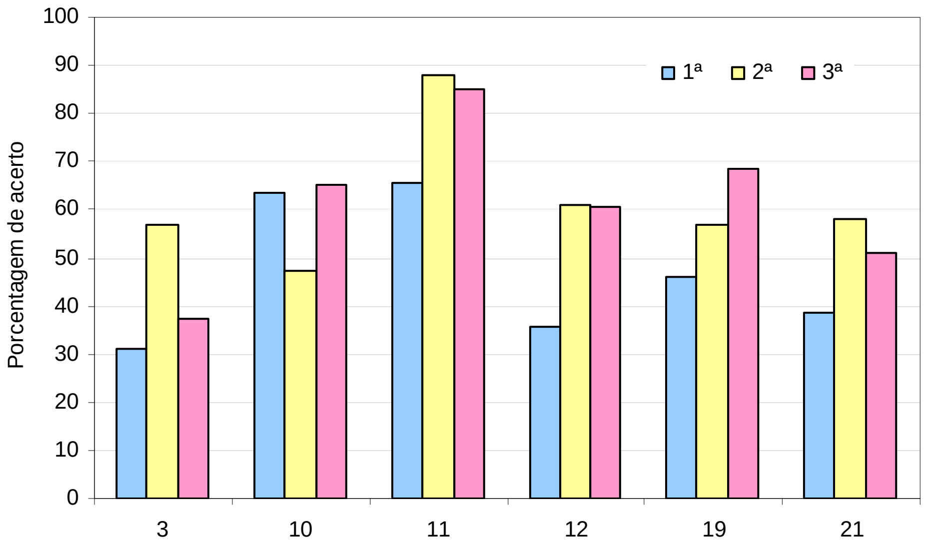


Figura 37: Desempenho dos participantes nas questões que apresentaram diferenças no Instrumento 4.

6.7.2 Análise geral

A Tabela 32 mostra o desempenho dos participantes no Instrumento 4, por série e gênero. O resultado da ANOVA mostra que existe diferença por série ($F(2,247) = 3{,}785$; $p = 0{,}024$); não existe diferença por gênero ($F(1,247) = 0{,}000$; $p = 0{,}995$) e nem interação entre série e gênero ($F(2,247) = 2{,}105$; $p = 0{,}124$).

Tabela 32: Desempenho dos participantes no Instrumento 4 por série e gênero.

Série	Masculino			Feminino			Total		
	Nº	Média	DP	Nº	Média	DP	Nº	Média (*)	DP
1ª	35	5,59	1,02	58	5,24	1,26	93	5,37 a	1,18
2ª	26	5,41	1,05	48	5,82	1,07	74	5,68 ab	1,08
3ª	36	5,93	1,28	50	5,87	1,08	86	5,89 b	1,16
Total	97	5,67	1,14	156	5,62	1,18	253	5,64	1,16

(*) Médias com letras iguais não diferem segundo o teste de comparações múltiplas de Tukey.

Como no modelo fatorial não foi encontrada interação, nem diferenças por gênero, foi aplicado o teste F para analisar as diferenças por série, que ratifica o resultado e, o teste de comparações múltiplas assinala que o desempenho da 3ª série difere do da 1ª série, mas o desempenho da 2ª série mantém interseção com essas duas séries, conforme ilustra a Figura 38.

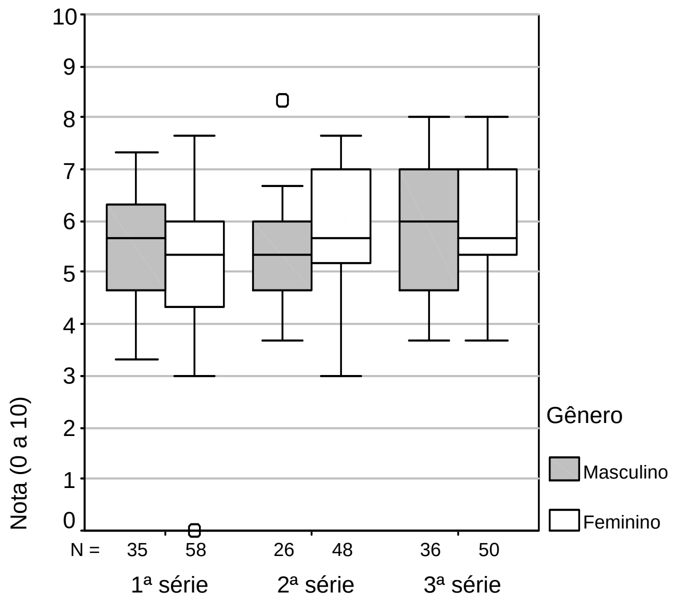


Figura 38: Desempenho dos participantes no Instrumento 4 por série e gênero.

Apesar dessas diferenças terem sido significativas, do ponto de vista estatístico, observa-se que não superam meio ponto de uma escala de zero a dez, isto é, o ganho a cada série é pequeno. Pode-se observar que somente as mulheres da segunda série tiveram uma média superior (5,82) as dos homens (5,41) para cada série, embora as diferenças por gênero não foram estatisticamente significativas.

6.8 Análise comparativa do desempenho nos instrumentos

A Tabela 33 resume o desempenho dos participantes nos quatro instrumentos. A comparação do desempenho dos participantes nos quatro instrumentos e na média geral por série mostrou que em todas há um crescimento linear segundo a série, isto é, os participantes da 1ª série apresentaram o menor desempenho, os da 2ª série um desempenho intermediário e os da 3ª série o melhor desempenho, embora essas diferenças sejam pequenas e não chegam a superar um ponto na escala de zero a dez, conforme ilustra a Figura 39.

Confirmando as análises nos itens anteriores, foi encontrada diferenças no desempenho por série apenas no Instrumento 4 e na nota média final, que apresentam um crescimento linear a cada ano de instrução, embora o ganho em cada série seja pequeno, uma vez que a média no Instrumento 4 passou de 5,37 da primeira série para 5,89 na 3ª série e na nota média geral, de 4,63 na 1ª série, para 4,88 na 3ª série, como ilustra a Figura 39.

Tabela 33: Síntese do desempenho dos participantes nos quatro instrumentos.

Instru-mento	1ª série (n = 93)		2ª série (n = 74)		3ª série (n = 86)		Total (n = 253)		Teste F (1)	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média (2)	DP	F(2,250)	p-valor
Inst 1	1,99	1,29	2,17	2,48	2,62	2,11	2,25 a	1,99	2,340	,098
Inst 2	5,90	1,14	5,94	1,28	6,25	1,28	6,03 c	1,24	2,172	,116
Inst 3	5,27	1,61	5,60	2,07	5,92	2,21	5,59 b	1,98	2,418	,091
Inst 4	5,37	1,18	5,68	1,08	5,89	1,16	5,64 b	1,16	4,620	,011
Média	4,63	0,85	4,85	1,20	5,17	1,32	4,88	1,15	5,069	,007

(1) Este teste se refere à comparação entre as médias das três séries dentro de cada instrumento.
(2) Este teste se refere à comparação entre as médias dos quatro instrumentos (independente da série), cujo resultado foi (F(3,1008) = 291,135; *p* = 0,000), isto é, o desempenho nos instrumentos foi diferente. Médias com letras iguais não diferem segundo o teste de comparações múltiplas de Tukey.

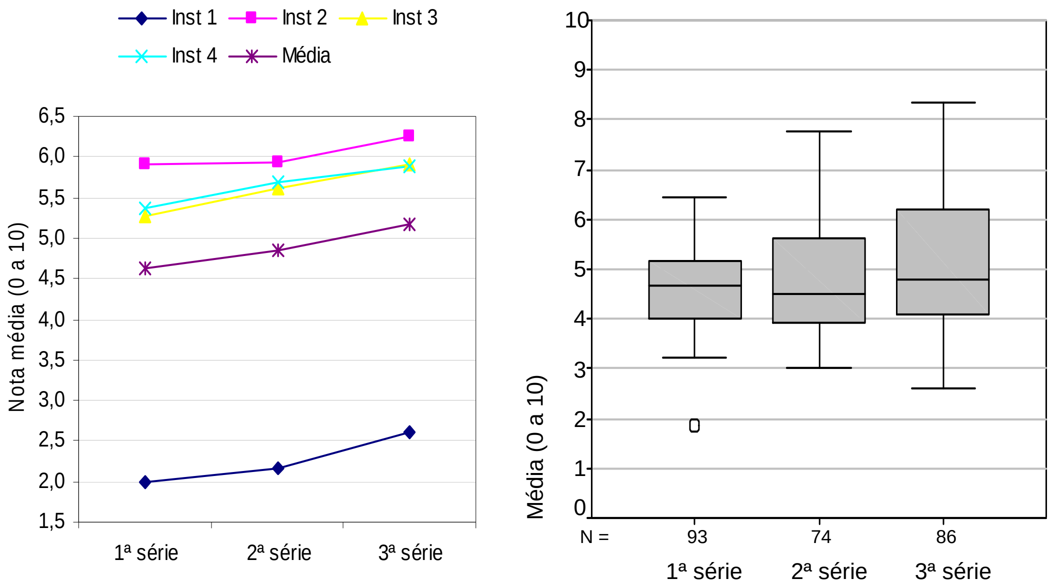


Figura 39: Desempenho médio dos participantes nos Instrumentos por série.

Foram encontradas diferenças significativas no desempenho dos participantes entre os quatro instrumentos ($F(3,1008) = 291,135$; $p = 0,000$), sendo que no primeiro instrumento os participantes apresentaram um desempenho desfavorável, pois obtiveram, em média, dois pontos e meio de dez; no terceiro e quarto instrumentos um desempenho similar e superior ao do primeiro (5,59 e 5,64 respectivamente) e, o melhor desempenho no segundo instrumento, no qual os participantes alcançaram seu maior desempenho, atingindo a média de 6,03 pontos de dez, conforme o resultado do teste de comparações múltiplas de Tukey (Norusis, 1993) e como ilustra a Figura 39. A Figura 40 sintetiza o desempenho nos quatro instrumentos por série.

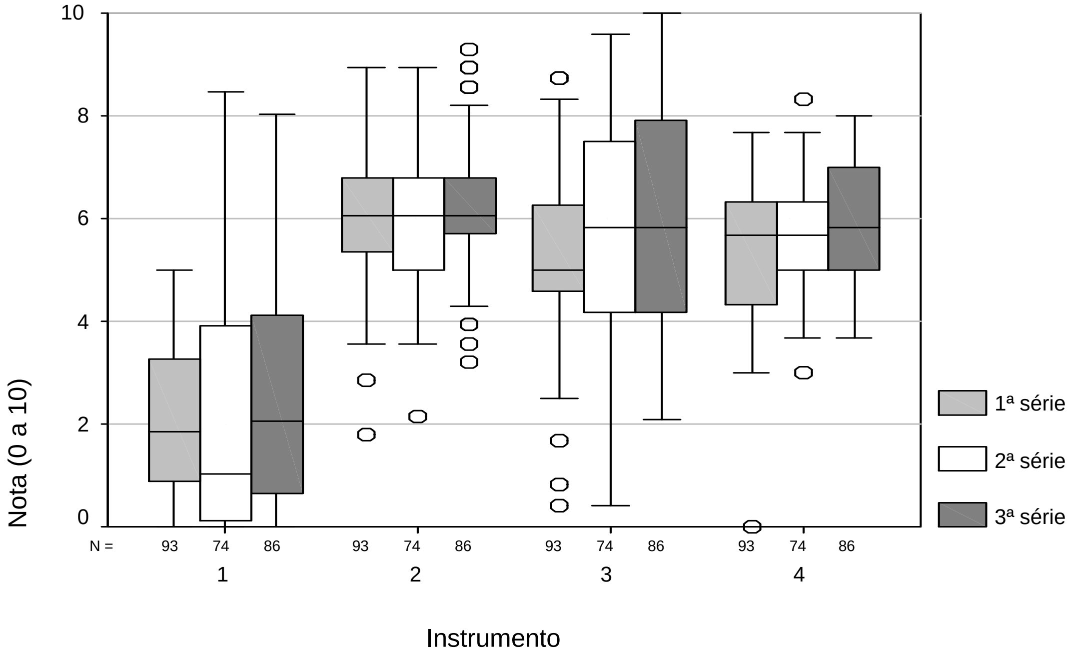


Figura 40: Desempenho dos participantes nos quatro instrumentos por série.

No geral, pela Figura 19, pode-se perceber que o desempenho por série em cada um dos instrumentos foi baixo.

A Tabela 34 mostra o coeficiente de correlação de Pearson entre as notas nos quatro instrumentos, sendo que todos foram altamente significativos (p < 0,001), embora a relação do desempenho entre esses instrumentos foi fraca. Apenas a relação entre as notas dos Instrumentos 1 e 3 mostrou alguma tendência, já a relação do desempenho nos Instrumentos 2 e 4 não foi observada nenhuma relação, conforme ilustra a Figura 41.

Tabela 34: Matriz de correlação de Pearson (n = 253).

	Instrumento 2	Instrumento 3	Instrumento 4	Média
Instrumento 1	0,287	0,509	0,324	0,811
Instrumento 2		0,282	0,161	0,554
Instrumento 3			0,360	0,817
Instrumento 4				0,591

Na Figura 41, pode-se observar que não existe uma supremacia de uma série sobre a outra, pois a nuvem de pontos por série se espalha ao longo do gráfico. Apenas a primeira série (asteriscos) tem um desempenho até cinco no Instrumento 1, ou seja, a nuvem de pontos vermelha não ultrapassa X=5.

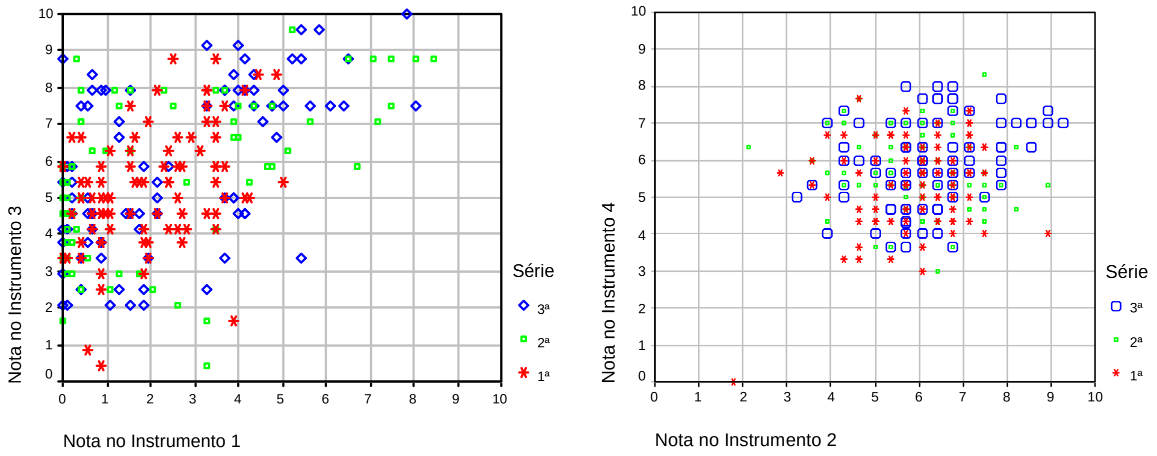


Figura 41: Relação entre as notas dos participantes nos instrumentos.

A Figura 42 mostra a contribuição dos Instrumentos 1 e 3 na formação da média. Novamente, observa-se que apenas o desempenho da primeira série (asteriscos) tende a se concentrar na porção inferior da nuvem de pontos, quando se trata do Instrumento 1, indicando um desempenho inferior ao das outras séries. Esperava-se que o desempenho da terceira série se concentrasse na porção superior da nuvem, porém isso não aconteceu, esses tiveram um desempenho muito similar aos da segunda série. Este resultado parece indicar que os participantes da primeira série possuem um conhecimento declarativo de polígonos e de poliedros pouco menos desenvolvido em relação ao conhecimento dos participantes das séries posteriores. Isso não acontece no Instrumento 3, onde as três nuvens de pontos (séries) se espalham ao longo de todo o gráfico.

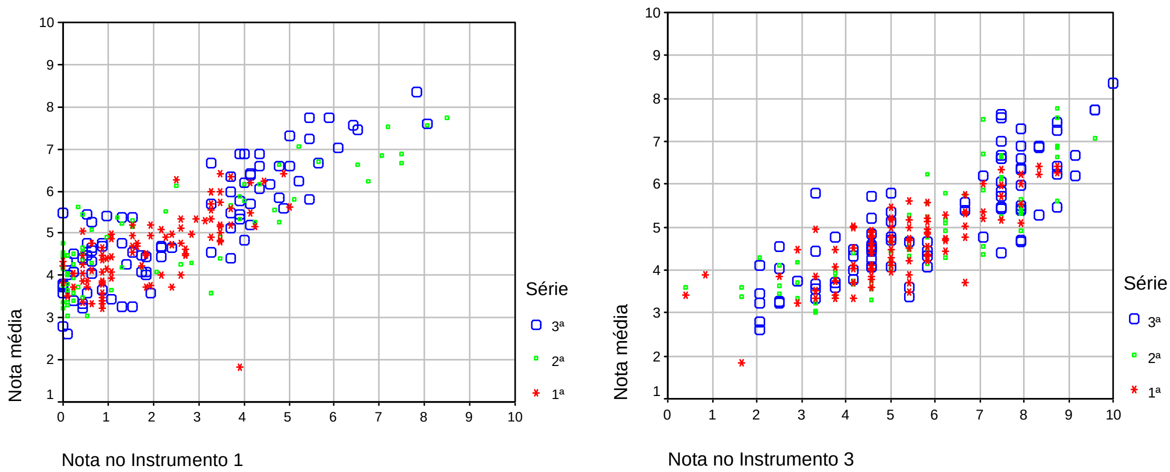


Figura 42: Relação entre as notas dos participantes nos Instrumentos 1 e 3 com a média geral.

6.9 Análise do desempenho nos diferentes componentes dos níveis cognitivos

O Quadro 1 resume os componentes utilizados, bem como as operações mentais envolvidas, e as atividades que foram selecionadas para avaliar o desempenho dos participantes nesses níveis. A intenção foi analisar em quais componentes os participantes apresentavam dificuldades, pois todos tratam, em menor ou maior grau, de atributos definidores e exemplos e não-exemplos de polígonos e de poliedros.

Nível cognitivo	Componente do nível	Atividades
Concreto	Reconhecimento	Figuras 19, 20, 21e 23 do instrumento 3
Identidade	Identificação de formas equivalentes	Figuras 1 e 8; 3 e 17; 5 e 7; 11 e 13; 12 e 14; 2 e 19; 6 e 23; do instrumento 3
Classificatório	Identificação de exemplos equivalentes	Figuras do instrumento 3
Formal	Identificação de atributos definidores Identificação de relações subordinadas e supra-ordenadas *(Extensão e uso do conceito formado ao nível Formal)*	Afirmações do instrumento 2 Afirmações do instrumento 4

Quadro 7: Componentes dos níveis cognitivos.

A Tabela 35 mostra o desempenho médio dos participantes nos quatro níveis cognitivos. Observa-se que o desempenho no nível identidade foi inferior aos outros três níveis, conforme teste estatístico ($F(2,1008) = 5,826$; $p = 0,001$).

Tabela 35: Síntese do desempenho nos quatro níveis cognitivos.

Nível	Nº de participantes	Média (*)	DP
Concreto	253	5,78 b	3,37
Identidade	253	4,97 a	3,26
Classificatório	253	5,59 b	1,98
Formal	253	5,83 b	0,91
Geral	253	5,54	2,60

(*) Médias com letras iguais não diferem segundo o teste de Tukey.

A Figura 43 ilustra o desempenho nos quatro níveis cognitivos. Pode-se observar que o nível concreto apresenta maior dispersão e o formal maior desempenho e mais homogêneo.

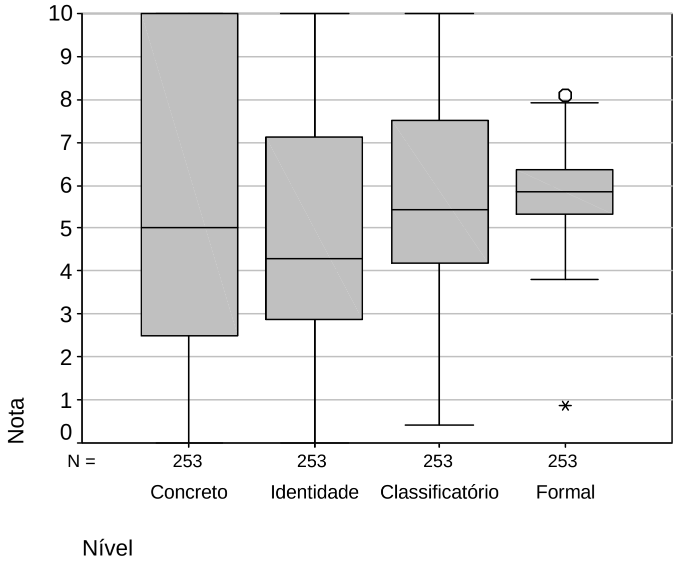


Figura 43: Desempenho dos participantes nos quatro níveis cognitivos avaliados.

A Tabela 36 e a Figura 44 detalham o desempenho dos participantes, por série, nos quatro níveis cognitivos. Observa-se que, com exceção do nível concreto, onde os participantes da 2ª série se saíram melhor, nos outros níveis existe uma tendência crescente no desempenho médio segundo o nível de escolaridade, porém nem sempre essas diferenças foram significativas.

Tabela 36: Síntese do desempenho médio nos quatro níveis cognitivos por série.

Nível	Série	Nº de participantes	Média (*)	DP	F(2,250)	p-valor
Concreto	1ª série	93	5,19 a	3,34	3,113	,046
	2ª série	74	6,49 b	2,86		
	3ª série	86	5,81 ab	3,71		
	Total	253	5,78	3,37		
Identidade	1ª série	93	4,42 a	2,43	3,463	,033
	2ª série	74	4,85 ab	3,63		
	3ª série	86	5,68 b	3,61		
	Total	253	4,97	3,26		
Classificatório	1ª série	93	5,27 a	1,61	2,418	,091
	2ª série	74	5,60 a	2,07		
	3ª série	86	5,92 a	2,21		
	Total	253	5,59	1,98		
Formal	1ª série	93	5,63 a	0,91	5,415	,005
	2ª série	74	5,80 ab	0,76		
	3ª série	86	6,07 b	0,99		
	Total	253	5,83	0,91		

(*) Média com letras iguais não difere segundo o teste de Tukey.

A Figura 44 mostra uma grande dispersão das notas dos participantes no nível concreto e identidade, principalmente, na 2ª e 3ª séries. Em relação ao nível formal, pode-se verificar uma alta concentração dos participantes de cada série em torno da média, mas o desempenho não superou a nota 8, situação desfavorável quanto ao que os participantes deveriam conhecer, pois foram investigados apenas um componente do nível e sua utilização em apenas uma única situação.

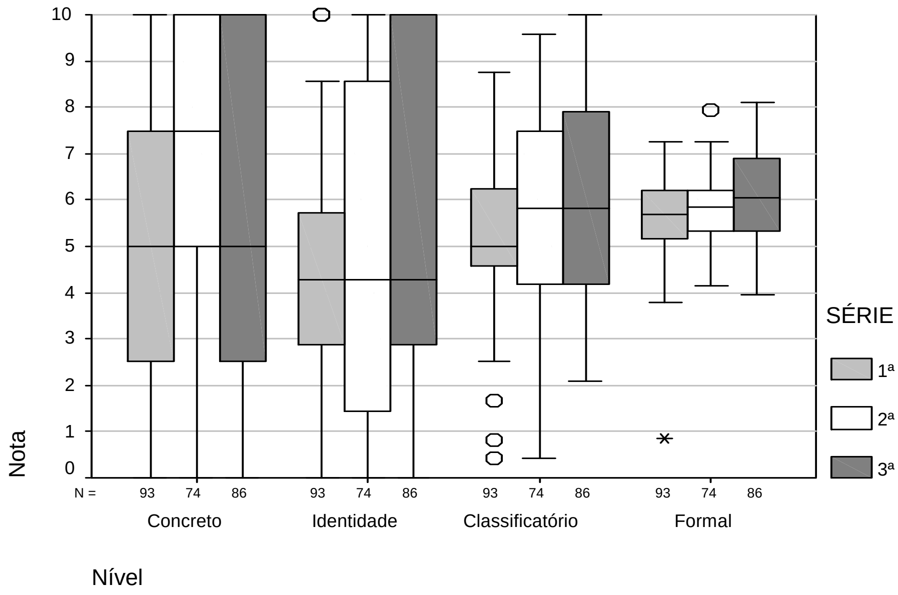


Figura 44: Desempenho dos participantes por nível cognitivo e série.

A Figura 45 sintetiza a tendência do desempenho médio nos quatro níveis cognitivos, por série. Pode-se verificar a maior média obtida pelos participantes da segunda série no nível concreto em relação à nota por série em todos os instrumentos.

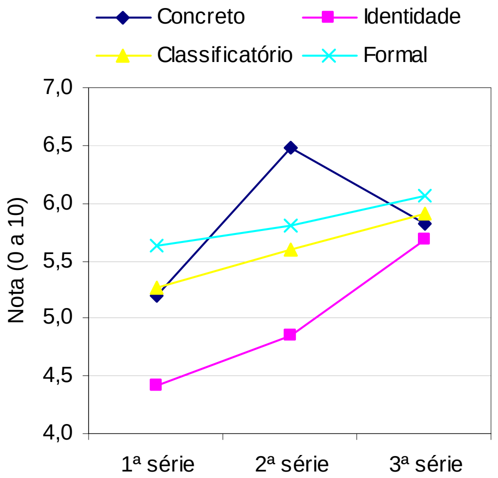


Figura 45: Desempenho médio nos quatro níveis.

A Tabela 37 mostra a correlação entre os quatro níveis cognitivos trabalhados nesta pesquisa, na qual pode ser observada que ocorreu uma boa correlação entre o nível identidade e classificatório (*r*(253) = 0,874) e a pior correlação entre o nível concreto e formal (*r*(253) = 0,335). Observa-se que os quatro níveis cognitivos não são linearmente independentes e, consequentemente, era de se esperar altas correlações, contudo isso não aconteceu.

Tabela 37: Matriz de correlação de Pearson (*) entre os diversos níveis cognitivos.

Níveis cognitivos	Identidade	Classificatório	Formal
Concreto	0,558	0,699	0,335
Identidade		0,874	0,417
Classificatório			0,421

*Todas as correlações foram significativas ao nível de 0,01 (1%).

A Figura 46 ilustra as duas maiores correlações encontradas entre os quatro níveis, em que pode ser observada uma tendência mais definida entre os níveis concreto e de identidade com relação ao classificatório.

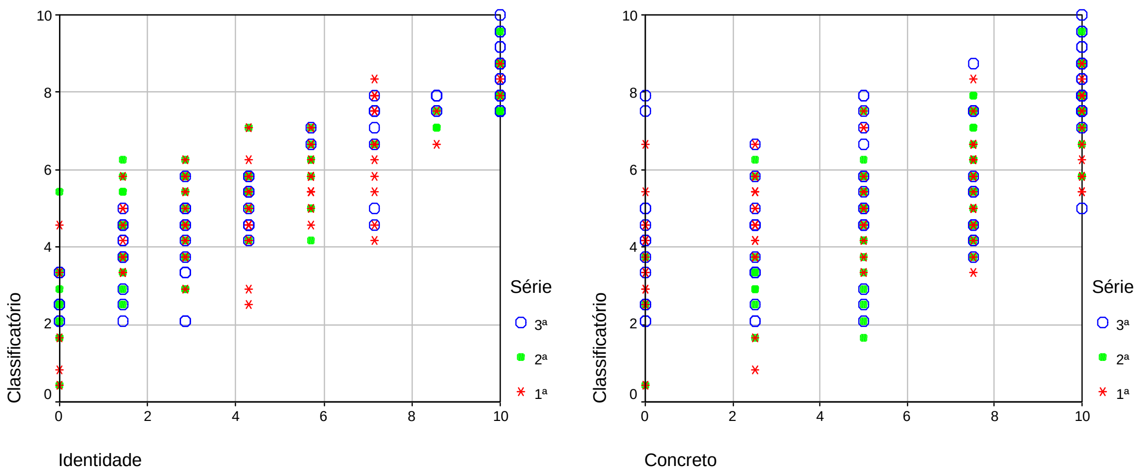


Figura 46: Maiores correlações entre os níveis cognitivos.

Já na Figura 47, pode-se observar que o nível formal não se correlaciona com os outros níveis.

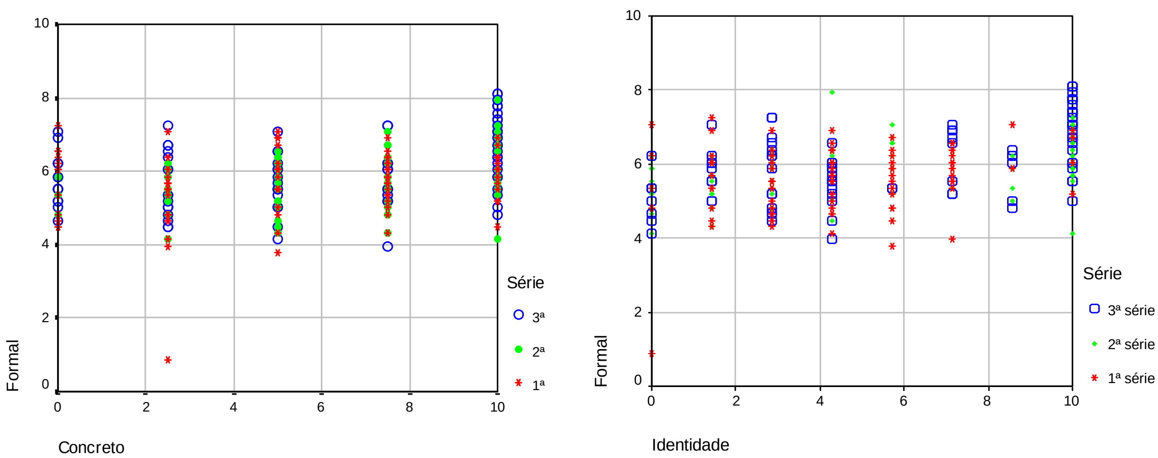


Figura 47: Menores correlações entre os níveis cognitivos.

Essa primeira fase de análise permite concluir que o desempenho obtido pelos participantes nos quatro instrumentos da pesquisa foi baixo, o que refletiu consequentemente, no baixo desempenho em cada um dos componentes dos níveis cognitivos. Foram encontradas diferenças significativas entre as séries apenas nas notas médias no Instrumento 4, mas no geral os participantes mostraram um desempenho desfavorável na realização das tarefas propostas. Apesar das correlações mais altas terem sido encontradas entre os Instrumentos 1 e 3 (r = 0,509), o valor aparenta ainda ser baixo, pois ambos exigiram o conhecimento de exemplos e não-exemplos de polígonos e de poliedros. Em relação às correlações entre os componentes dos níveis cognitivos, o nível identidade e classificatório apresentaram uma alta correlação (r = 0,874) que pode ser devido ambos tratarem da identificação de exemplos e formas equivalentes.

Esse resultado mostra que esses participantes do ensino médio, participantes da pesquisa, apresentaram dificuldades em reconhecer formas geométricas como polígonos e outras como poliedros; generalizar figuras de mesma forma; generalizar os exemplos de polígonos e os exemplos de poliedros; e identificar os atributos definidores de polígonos e de poliedros, bem como verificar a relação entre seus exemplos.

SEGUNDA FASE

A segunda fase da pesquisa correspondeu a entrevistas realizadas com alunos selecionados da primeira fase para verificar como eles estavam pensando a respeito das atividades propostas.

O objetivo foi compreender o que sabiam os alunos sobre polígonos e poliedros em termos de atributos definidores, exemplos e não-exemplos e relações subordinadas e supra-ordenadas, como também entender se os atributos irrelevantes, da teoria de Klausmeier e Goodwin (1977), causaram dificuldades no desempenho deles para identificar as figuras.

6.10 Perfil dos participantes das entrevistas

Para as entrevistas foram selecionados, aleatoriamente, seis alunos, sendo três com médias abaixo de cinco pontos e três com médias iguais ou acima de cinco pontos para responderem novamente os Instrumentos 1, 2, 3 e 4, a fim de verificar o conhecimento conceitual que tinham sobre polígonos e poliedros e também de seus atributos definidores, exemplos e não-exemplos e relações subordinadas e supra-ordenadas.

Foi selecionada uma aluna (1ºB) da primeira série do ensino médio que teve média abaixo de cinco pontos, a qual se dispôs a ser entrevistada, mas dias depois ela se recusou a participar. Em seu lugar foi convidado um aluno (1ºC), o qual aceitou colaborar com a pesquisa. Já na seleção de um aluno da segunda série do ensino médio que teve média igual ou acima de cinco pontos, as duas alunas (2ºA) que foram selecionadas aleatoriamente, onde uma delas seria convidada, caso a primeira não quisesse, não aceitaram participar. Assim, nessa mesma turma foi convidado um terceiro aluno, o qual era mulher, e que, recebendo esclarecimentos do pesquisador sobre a importância da pesquisa e também por parte da professora presente na sala de aula, aceitou contribuir com o estudo.

Os participantes da primeira, segunda e terceira séries que tiveram médias abaixo de cinco pontos e que aceitaram participar da entrevista serão chamados de P1, P2 e P3, respectivamente. Já os alunos que tiveram médias iguais ou acima de cinco pontos que concordaram em ser entrevistados serão chamados de P4, P5 e P6, respectivamente.

P1 é um participante do gênero masculino, 15 anos de idade, e obteve a média de 4,9 pontos (numa escala de zero a dez pontos) nos instrumentos aplicados na primeira fase do estudo.

P2 é um participante do gênero feminino, 17 anos de idade, e obteve a média de 4,9 pontos (numa escala de zero a dez pontos) na primeira fase do estudo.

P3 é um participante do gênero masculino, 17 anos de idade, e obteve a média de 4,4 pontos (numa escala de zero a dez pontos) na primeira fase do estudo.

P4 é um participante do gênero masculino, 15 anos de idade, e obteve a média de 5,1 pontos (numa escala de zero a dez pontos) nos instrumentos aplicados na primeira fase do estudo.

P5 é um participante do gênero feminino, 16 anos de idade, e obteve a média de 6,6 pontos (numa escala de zero a dez pontos) na primeira fase do estudo.

P6 é um participante do gênero feminino, 17 anos de idade, e obteve a média de 6,6 pontos (numa escala de zero a dez pontos) na primeira fase do estudo.

A ordem em que os participantes foram entrevistados foi a seguinte: P2 em um dia; P4 e depois P3 em um mesmo dia; P6 e depois P5 em um mesmo dia; e por último P1 em um outro dia.

A seguir são apresentados alguns resultados obtidos, comparando-se as respostas dos entrevistados na primeira fase com as da segunda fase. Nesta, foram destacadas as explicações fornecidas pelos alunos, suprimindo as falas do pesquisador nos diálogos.

6.11 Prova Matemática (Instrumento 1)

No Quadro 8 e no Quadro 9 são apresentadas as respostas dos alunos sobre a questão “O que você entende por polígono? Desenhe dois tipos diferentes”.

O que você entende por polígono?	
Primeira Fase	Segunda Fase
Branco	*P1: Que tem todos os lados iguais?* *P1: Os lados iguais eu acho que não tem os lados iguais.*
Branco	*P2: É tipo assim...que nem...um triângulo é um polígono...pode ser diversos lados, não é? Que nem, o triângulo tem três...aí, tem o quadrado tem quatro lados, aí qualquer um que tenha, aí lados, não é?*
Branco	*P3: Tem que ter faces, arestas.* *P3: Acho que teria que ter lados iguais. De mesma medida.*
Nome que se dá aos lados.	*P4: Polígono é só você...lado...basta ser... ser um quadrado...tipo quadrado, quatro lados iguais...polígono é mais ou menos isso.* *P4: Polígono tem...retas.*
Figura com três lados ou mais.	*P5: Polígono é desenho com no mínimo três lados, o triângulo, ou mais.* *P5: As arestas (chamando lados de arestas)*
Figura formada apenas por linhas retas.	*P6: Face, aresta, vértice.* *P6: Uma face.*

Quadro 8: Respostas dos participantes sobre polígono.

De acordo com essas respostas fornecidas é possível verificar que apenas P2 e P5 souberam identificar tipos de polígonos pela quantidade de seus “lados” (segmentos de reta). Já P3 e P6 citaram atributos de poliedros para identificar polígonos. Pode-se observar que apenas P5 deu a mesma resposta nas duas fases da pesquisa. Também se pode perceber que P3 e P4 achavam que polígono é o que tem lados iguais como na resposta dada por P3 à pergunta do pesquisador.

P: O que tem que ter para ser um polígono?
P3: Lados parecidos.

Parece que P3 pode estar particularizando o conceito de polígono com apenas um tipo de atributo, “lados de mesma medida” que é uma característica do conceito de polígono regular.

Desenhe dois exemplos.	
Primeira Fase	Segunda Fase
Quadrado e triângulo.	*P1: Quadrado. Triângulo.*
Triângulo.	*P2: Pode ser um triângulo?* (desenhou triângulo e quadrado)
Dois triângulos.	*P3: (desenhou um losango)*
Octógono e hexágono.	*P4: (desenhou um quadrado)* *P4: Pode também...sei lá...um círculo. (desenhou uma circunferência)*
Triângulo e quadrado.	*P5: Um triângulo no caso.* *P5: Ah, um quadrado.*
Quadrado e triângulo.	*P6: Quadrado, círculo.*

Quadro 9: Respostas dos participantes sobre exemplos de polígono.

No Quadro 9, pode-se verificar que, na entrevista, P2 e P5 desenharam dois exemplos corretos de polígonos mantendo coerência com suas respostas no Quadro 8. Verifica-se que P4 e P6, na primeira fase, forneceram dois exemplos de polígonos, e que, na entrevista, cada um forneceu um não-exemplo de polígono, uma circunferência e um círculo, respectivamente. Como no Quadro 8 eles não citaram o atributo definidor “lados” para conceituar polígonos, pode ser que consideraram essas duas figuras como exemplos por causa de outro atributo, no caso, o de figuras planas, comum tanto aos polígonos como para o círculo e a circunferência.

O participante P3 desenhou apenas um exemplo de polígono. Quando perguntado se os triângulos que havia feito nessa atividade na primeira fase eram realmente exemplos de polígono, respondeu que:

P3: Acho que não.
P: Este (triângulo) é diferente desse (losango) por quê?
P3: Só mudou o lado.

É possível que P3 considere como exemplos de polígonos apenas as figuras com quatro lados, pois citou somente um exemplo na entrevista, o losango, e até desconsiderou os triângulos que havia desenhado.

No Quadro 10 e no Quadro 11 são apresentadas as respostas a respeito da questão “O que você entende por poliedro? Desenhe dois tipos diferentes”.

Verifica-se que P2 mostrou não saber o que é um poliedro e na sua explicação, não soube argumentar muito bem por que tinha que ter mais de cinco lados, conforme o diálogo abaixo.

P2: Será que pode ser mais do que cinco lados?
P: Você acha que para ser poliedro a figura tem que ter mais de cinco lados? Com base em que você está pensando nisso?
P2: Não sei, que...eu pensei que no polígono pode ser até cinco e no poliedro pode ser mais que cinco.
P: Você acha que no caso, o poliedro é diferente do polígono por causa disso?
P2: É.

A explicação de P2 para determinar se uma figura é polígono ou poliedro é incoerente com a natureza conceitual dessas figuras. Os polígonos recebem uma nomenclatura de acordo com seus números de lados, sendo que um polígono com cinco lados é denominado de pentágono, um polígono com seis lados, de hexágono e assim por diante. Nesse sentido, a quantidade de “lados” não é um critério de diferenciação entre os dois conceitos. Os poliedros também apresentam figuras com seus números de “lados” (faces) menores ou maiores do que cinco, como, por exemplo, o tetraedro (quatro faces) e o prisma hexagonal (seis faces).

O que você entende por poliedro?	
Primeira Fase	Segunda Fase
Branco	*P1: (não, balançando a cabeça).*
Branco	*P2: Não sei, que...eu pensei que no polígono pode ser até cinco e no poliedro pode ser mais que cinco.*
Branco	*P3: Fazer eu até faço (idéia), mas assim, muito pouco.*
Branco	*P4: Que ele é tipo tridimensional...tipo cubo?* *P4: Tem dimensão.*
Figuras Tridimensionais.	*P5: É... tem dimensão. Pode ter uma perspectiva. Que nem no caso, o cubo e a pirâmide. Tem tipo...ai, não sei explicar.*
Polígono formado por linhas curvas ou uma (linha curva).	*P6: É um polígono, mas que possui volume. Bom, agora ele vai ter profundidade e altura.* *P6: Desenho em três dimensões. Tem tudo. Face, aresta, o vértice.*

Quadro 10: Respostas dos participantes sobre poliedros.

É possível verificar que P6 apresentou respostas diferentes nas duas fases da pesquisa, sendo que na entrevista foi o único que declarou sobre atributos definidores de poliedros (face, aresta, vértice, três dimensões). Porém, mostrou um erro ao dizer que se tratava de um polígono com volume, o que indica que ainda não consegue diferenciar polígono de poliedro, pois o primeiro é figura plana e, o segundo, figura não-plana.

As respostas de P4 e P5 sugerem que eles até sabem o que é um poliedro pela sua forma ao se referirem que é uma figura tridimensional e em perspectiva e também por fornecer exemplos, mas não conseguiram declarar seus atributos definidores. P5 manteve a mesma idéia que tinha na primeira fase sobre poliedro.

No Quadro 11, pode-se observar os desenhos realizados como exemplos de poliedros. Verifica-se a conseqüência da explicação dada por P2 no entendimento de poliedro do diálogo acima, por meio de sua explicação ao fornecer um octógono como exemplo de poliedro:

P: O que seria um desenho do poliedro?

P: Essa figura tem quantos lados?

P2: Oito.

P: Você acha que essa figura com oito lados é um poliedro?

P2: Acho que sim.

O participante P2 continuou com a mesma idéia que tinha a respeito da diferenciação que fazia dos exemplos de poliedro dos de polígono, o de ter mais de cinco lados. Nota-se que essa situação mostra um equívoco na formação conceitual adquirida por P2 e que corresponde a um grande problema devido ao tempo que esteve presente na educação escolar.

Desenhe dois exemplos.	
Primeira Fase	Segunda Fase
Branco.	*P1: Não sei.*
Octógono.	*P2: (desenhou um octógono).*
Branco.	*P3: Uma mesa. O formato da mesa.*
Branco.	*P4: Um cubo.*
Paralelepípedo e prisma de base triangular.	*P5: (desenhou o cubo e a pirâmide de base quadrada).*
Circunferência e uma figura fechada formada de dois segmentos de reta e uma linha curva.	*P6: Um retângulo...retângulo...uma caixa retangular. (desenhou um paralelepípedo).*

Quadro 11: Respostas dos participantes sobre exemplos de poliedro.

No Quadro 11, observa-se que na segunda fase, somente P5 desenhou dois exemplos corretos de poliedros, mesma situação apresentada na primeira fase. Na entrevista, os participantes P4 e P6 só sabiam fornecer um exemplo cada um, sendo que, na primeira fase, P6 forneceu não-exemplos, o que era de se esperar, pois, não conceituou poliedro corretamente, conforme o Quadro 10. Quanto a P2, desenhou um octógono como exemplo de poliedro, o mesmo que tinha feito na primeira fase da pesquisa.

Contudo, o baixo desempenho dos alunos na primeira fase, nessas duas atividades, é decorrente da falta do conhecimento declarativo em conceituar polígonos e poliedros através de seus atributos definidores e exemplos, conforme resultados das entrevistas. No caso dos poliedros é notória a confusão com atributos de polígonos, como, por exemplo, de chamar faces de lados, conforme respondeu P5 no Instrumento 1 ao definir face do poliedro: "*Seria esses lados aqui*".

6.12 Teste de atributos definidores (Instrumento 2)

Primeiramente, a análise das respostas dos entrevistados nas duas fases da pesquisa discorre sobre afirmações de polígonos com seus atributos definidores e um atributo irrelevante, posteriormente, sobre poliedros. Foram elencadas as seguintes afirmações para a análise das respostas:

a) Todo polígono é uma figura plana;
b) Todos os polígonos são formados por segmentos de reta;
c) Todos os polígonos são figuras fechadas;
d) Todos os polígonos são figuras simples;
e) Todos os polígonos são pretos;

f) Todos os poliedros são tridimensionais;
g) As faces dos poliedros são polígonos;
h) Todos os poliedros são formados por vértices, faces e arestas;
i) Todos os poliedros são brancos.

Algumas falas não foram apresentadas porque o pesquisador entendeu que quando o entrevistado identificava o atributo como pertencente ou não aos polígonos e poliedros, por meio da discussão já realizada no Instrumento 1, entendeu-se, durante as entrevistas, que esse aluno tinha o conhecimento do atributo em questão.

No Quadro 12, pode-se perceber que P6 foi o único que chegou a não considerar e depois mudar sua resposta na segunda fase de que polígono é uma figura plana. Os participantes P3 e P4 erraram a afirmação nas duas fases da pesquisa. Para explicar por que tinha colocado falso, P4 disse que tem as figuras espaciais e não se vê apenas de um lado, mas também do outro lado, sendo que a figura plana é aquela que só se observa de um ângulo.

É possível que esse aluno acredite que quando um polígono é visto isoladamente, ou seja, desenhada num plano, seja uma figura plana e quando ele a vê formando as faces de um poliedro seria não-plana, pois estaria numa forma tridimensional ou por causa de estar contida em planos diferentes, como no caso das faces do cubo.

Todo polígono é uma figura plana	
Primeira Fase	Segunda Fase
Verdadeiro.	*P1: Verdadeira.* *P1: (o pesquisador não questionou)*
Verdadeiro.	*P2: Verdadeira.* *P2: (o pesquisador não questionou)*
Falso.	*P3: Falsa.* *P3: Que eu lembre que eu acho que não precisa ser todos os polígonos uma figura plana.*
Falso.	*P4: Falsa.* *P4: Porque ele é...tem as espaciais também, tipo...você não vê só um lado, você vê ela do outro lado.* *P4: É. Porque acho que polígono é um desenho especial e a figura plana é só que você vê de um ângulo.*
Verdadeiro.	*P5: Verdadeira.* *P5: (o pesquisador não questionou)*
Falso.	*P6: Verdadeira.* *P6: (o pesquisador não questionou)*

Quadro 12: Respostas dos participantes sobre a afirmação de polígono que envolveu o atributo figura plana.

No Quadro 13, pode-se observar que P2, P3, P5 e P6 mudaram suas respostas na entrevista e que como para P5 círculo é polígono, concluiu que a afirmação só poderia ser falsa. Esse resultado mostra que esse aluno não formou o conceito de polígono, pois segmento de reta é um dos atributos definidores que caracteriza a distinção entre polígono e outras figuras como o círculo, que possuem linhas curvas.

Todos os polígonos são formados por segmentos de reta	
Primeira Fase	Segunda Fase
Verdadeiro.	*P1: Verdadeiro.* *P1: São as partes de um polígono.* *P1: Que está em volta dele.*
Falso.	*P2: (colocou verdadeiro).* *P2: Não...ai...tem a reta...horizontal, vertical.*
Falso.	*P3: (colocou verdadeiro)* *P3: Iria de um vértice ao outro.*
Falso.	*P4: Acho que é falso.* *P4: Nenhum, né, porque uma reta não forma um polígono. Só uma reta. Porque segmento de reta é um pedaço de linha.*
Verdadeiro.	*P5: (colocou falso).* *P5: Por causa do círculo. Ele é um polígono.*
Falso.	*P6: Sim.* *P6: Um pedaço de uma linha, de uma reta.*

Quadro 13: Respostas dos participantes sobre a afirmação de polígono que envolveu o atributo segmento de reta.

Em relação ao participante P6 pode ser observado que ele acertou a afirmação e identificou o que era segmento de reta, mas quando solicitado a dar exemplos, incluiu não-exemplos e mostrou não entender o atributo definidor investigado, conforme o diálogo abaixo:

P: Dá um exemplo.
P6: Quadrado, um triângulo, uma circunferência.
P: No caso, o círculo, tem segmento de reta?
P6: Tem, mas ela não é uma reta.
P: Você acha que mesmo essa curva pode ser chamada de segmento de reta?
P6: Sim.

Pode-se observar que a grande dificuldade de P6 está no desconhecimento do conceito de segmento de reta, o que, talvez, se realizasse uma aprendizagem baseada nos exemplos que são segmentos de reta comparados com não-exemplos, com linhas curvas, poderia não incluir a circunferência como exemplo de polígono. A Proposta Curricular para o ensino de Matemática do Ensino Fundamental (SÃO PAULO, 1997) recomenda que se ofereçam atividades para os alunos na compreensão da noção de polígono por meio da apresentação de figuras que são não-polígonos como as figuras com curvas, onde, através da comparação, é possível identificar os polígonos como figura fechada, lados que não se cruzam e lados formados por segmentos de reta.

No Quadro 14, observa-se que P2 e P3 foram os únicos que passaram a considerar na entrevista que polígonos são figuras fechadas em relação à primeira fase, mas P3 deu uma explicação errada do que seria uma figura fechada utilizando um exemplo de poliedro.

Todos os polígonos são figuras fechadas	
Primeira Fase	Segunda Fase
Verdadeiro.	*P1: (colocou verdadeiro)*
Falso.	*P2: (colocou verdadeiro)*
Falso.	*P3: Verdadeiro.* *P3: Mais ou menos da idéia do cubo, seria todo fechado.*
Verdadeiro.	*P4: (colocou verdadeiro)*
Verdadeiro.	*P5: (colocou verdadeiro)*
Verdadeiro.	*P6: Verdadeiro.* *P6: Tem que fechar ele pra ser um polígono.*

Quadro 14: Respostas dos participantes sobre a afirmação de polígono que envolveu o atributo figura fechada.

No Quadro 15 é possível verificar que todos os entrevistados assinalaram a mesma resposta que tinham dado na primeira fase. P1 e P5 acertaram a afirmação, mas não souberam explicar o que significa ser uma figura simples. A dificuldade em identificar polígono como uma figura simples é verificada pela resposta de P2 ao dar outro significado ao termo, de ser fácil de desenhar. P6 até que deu exemplos de figuras simples, mas o seu entendimento sobre esse atributo não correspondeu ao conhecimento do significado correto que é aquele onde os segmentos de reta da figura não se cruzam.

Todos os polígonos são figuras simples	
Primeira Fase	Segunda Fase
Verdadeiro.	*P1: (colocou verdadeiro).* *P1: Não sei. (não sabe o que é figura simples).* *P1: Não sei dizer por quê.*
Verdadeiro.	*P2: (colocou verdadeiro).* *P2: Que é fácil de desenhar.*
Falso.	*P3: (colocou falso).* *P3: Simples assim, de você ver e já saber logo de cara o que é.* *P3: Eu acho que não seriam figuras simples, não todos. Poderiam ter umas sim outras não.*
Falso.	*P4: Acho que é falso, né.* *P4: Não sei o que é uma figura simples.*
Verdadeiro.	*P5: Acho que é verdadeiro.* *P5: Ah, não sei explicar.*
Verdadeiro.	*P6: (colocou verdadeiro).* *P6: Uma figura normal. Quadrado, um triângulo. Eu acho que é isso.* *P6: Uma figura que a gente vê. Comum.*

Quadro 15: Respostas dos participantes sobre a afirmação de polígono que envolveu o atributo figura simples.

No Quadro 16, as respostas dos participantes sobre o atributo irrelevante de polígono mostraram que a maioria identificou, na segunda fase, que ser preto é um atributo irrelevante de polígono. O diálogo abaixo estabelecido com P2 exemplifica esse resultado:

P2: Acho que é falso, não precisa ser preto. O que tem a ver a cor com o formato? Sei lá.

P: Você acha que o preto não influencia?

P2: Não.

Todos os polígonos são pretos	
Primeira Fase	Segunda Fase
Falso.	*P1: Acho que é falso.* *P1: Não faz diferença.* *P1: Não tem nada haver.*
Falso.	*P2: Acho que é falso, não precisa ser preto. O que tem a ver a cor com o formato? Sei lá.* *P: Você acha que o preto não influencia?* *P2: Não.*
Falso.	*P3: Falso.* *P3: Acho que não interfere.*
Falso.	*P4: Falso. Não depende da cor.* *P: E se for um polígono amarelo?* *P4: Polígono. Continua sendo. Não importa a cor.*
Falso.	*P5: Não. Acho que não (colocou falso).* *P5: É. Acho que não.*
Verdadeiro.	*P6: Acho que não. (falso)* *P6: É falso.*

Quadro 16: Respostas dos participantes sobre a afirmação de polígono que envolveu o atributo irrelevante "cor preta".

O participante P6 foi o único que respondeu na primeira fase que polígonos são pretos, mas na entrevista, apesar de ter respondido corretamente, apresentou incerteza sobre a influência da cor preta no conceito de polígono, conforme pode ser observado no diálogo abaixo:

P6: Eu não sei o que é uma figura preta. Nunca ouvi falar isso.
P: O que você está pensando quando fala em preto?
P6: Não sei. Só uma cor preta. Polígono preto?
P: Você acha que cor preta é uma característica de polígono?
P6: Não sei.
P: Se eu falasse que todos os polígonos são amarelos?
P6: Não. (falso).

Percebe-se que P6 pode não ter tido um ensino que levou em consideração um trabalho dos atributos que não interferem na formação do conceito de polígono.

No Quadro 17, pode-se observar que P1, P2, P4 e P5 mantiveram as mesmas respostas que deram em cada uma das fases da pesquisa sobre poliedro como figura tridimensional, sendo que, na segunda fase, a explicação dada por esses alunos mostra a dificuldade na compreensão do significado desse atributo definidor, conforme podemos observar na explicação dada por P4, quando perguntado se poliedro é tridimensional:

P4: É, porque aqui (numa afirmação anterior: "Os polígonos possuem três dimensões") eu coloquei que polígono pode ter três dimensões.
P: Poliedros são tridimensionais?
P4: É. O termo poliedro que eu não sei bem o que é.

Isso mostra que para esse aluno, se polígono tem três dimensões, então poliedro também deve ter, apesar dele mesmo dizer que não sabe o que significa a palavra poliedro.

Todos os poliedros são tridimensionais	
Primeira Fase	Segunda Fase
Verdadeiro.	*P1: Acho que é verdadeiro.* *P1: Não sei dizer não o que seria ser tridimensional.*
Falso.	*P2: (colocou falso)* *P2: Porque tem mais que três lados...mais que três dimensões.*
Falso.	*P3: (colocou verdadeiro) (o pesquisador não questionou)*
Verdadeiro.	*P4: Verdadeiro.* *P4: É.*
Verdadeiro.	*P5: Verdadeiro.*
Falso.	*P6: (respondeu que é verdadeiro)*

Quadro 17: Respostas dos participantes sobre a afirmação de poliedro que envolveu o atributo figura tridimensional.

P5 também mostrou dificuldade no começo para identificar as três dimensões que formam um poliedro, mas com um incentivo do pesquisador acabou se saindo melhor na explicação, conforme o diálogo abaixo:

P: Se eu falasse que altura é uma dimensão, quais seriam as outras?
P5: Altura...a distância...
P: A distância? Como assim, a distância?
P5: A distancia de...
P: Se tridimensional é uma característica de poliedro e eu estou falando que altura é uma dimensão, as outras duas seriam quais?
P5: Comprimento e largura.

No começo, P5 apresentou dificuldades para explicar o significado de uma figura tridimensional, ou seja, com três dimensões. Pelo auxílio dado pelo pesquisador, pôde-se verificar que o participante conhecia as dimensões, mas por algum motivo, ou pelo esquecimento ou pela realização repetitiva de exercícios de cálculos de volumes como, por exemplo, do paralelepípedo, que apresenta muitas vezes uma atividade memorística, pode ter contribuído para que a entrevistada apresentasse a dificuldade observada.

No Quadro 18 pode ser verificado que, nas duas fases da pesquisa, todos os entrevistados consideraram que as faces dos poliedros são polígonos, apenas P3 e P4 tinham assinalado falso na primeira fase.

Apesar do pesquisador não ter questionado a maior parte dos entrevistados, observa-se a dificuldade nessa afirmação na fala de P6:

P: Um cubo, por exemplo, a face dele é um polígono?

P6: Sim. Quadrado.

P: E o cone?

P6: O cone? Mas, a base...não é a base, é...o cone de começo ele era um triângulo e rotação aí vira um cone.

P: Mas aquela base dele, que figura é a base?

P6: Não sei falar.

P: Isso (se referindo à base) é polígono?

P6: Sim.

É possível que para P6 os polígonos são os que formam as faces dos poliedros, mas sua resposta indica uma supergeneralização do conceito de polígono e também o de poliedro para outras figuras. Mostrou que mesmo sendo aluna da terceira série do ensino médio não sabia os atributos definidores de polígono, o que dificultou a identificação de que o cone é um não-exemplo de poliedro. Por outro lado, P6 pode ter pensado que como a rotação de um triângulo, que é um polígono, gera um cone, este seria um poliedro. Essa idéia de obtenção de uma figura espacial por meio da rotação de uma figura plana mostra que P6 apresenta uma noção dos sólidos de revolução (cone, cilindro etc.) que é um conhecimento mais complexo em geometria. Em contrapartida, não domina os conceitos mais básicos de polígonos e de poliedros.

As faces dos poliedros são polígonos	
Primeira Fase	Segunda Fase
Verdadeiro.	*P1: (colocou verdadeiro)?* *P1: Acho que pode ser sim. Coloquei verdadeiro aí (na primeira fase), não é?*
Verdadeiro.	*P2: (colocou verdadeiro) (o pesquisador não questionou)*
Falso.	*P3: (respondeu que é verdade) (o pesquisador não questionou)*
Falso.	*P4: (respondeu que é verdade) (o pesquisador não questionou)*
Verdadeiro.	*P5: (respondeu que é verdade) (o pesquisador não questionou)*
Verdadeiro.	*P6: Sim. Verdadeiro.*

Quadro 18: Respostas dos participantes sobre a afirmação de poliedro que envolveu o atributo faces formadas por polígonos.

No Quadro 19, observa-se que P2, P3 e P5 mantiveram, na segunda fase, as mesmas respostas dadas na primeira fase sobre poliedros como formados por vértices, faces e arestas. No caso de P2 que assinalou falso à afirmação, pode-se perceber que ele acredita que vértices, faces e arestas são atributos definidores de um tipo de polígono e não de poliedros, conforme a resposta dada ao questionamento do pesquisador:

P: Vértices, faces e arestas seriam de um outro tipo de objeto?
P2: De um triângulo.

É provável que P2 tenha pensado que triângulo é o que possui vértices, faces e arestas, atributos de poliedro, porque como é a figura que forma as faces laterais de uma pirâmide, e nesse caso é denominada de face, onde seus vértices também são os vértices da pirâmide e seus lados compõem três arestas dessa figura, pode ter incorporado a nomenclatura desse poliedro como a nomenclatura dos atributos de triângulo. Ou ainda, é possível que para P2 triângulo seja uma pirâmide, ou seja, pode ter confundido os conceitos.

Todos os poliedros são formados por vértices, faces e arestas	
Primeira Fase	Segunda Fase
Falso.	*P1: (respondeu que é verdade) (o pesquisador não questionou)*
Falso.	*P2: Não, é falso.*
Verdadeiro.	*P3: (respondeu que é verdade) (o pesquisador não questionou)*
Falso.	*P4: (respondeu que é verdade) (o pesquisador não questionou)*
Verdadeiro.	*P5: (respondeu que é verdade) (o pesquisador não questionou)*
Verdadeiro.	*P6: (respondeu que é falso). (não soube explicar).*

Quadro 19: Respostas dos participantes sobre a afirmação de poliedro que envolveu os atributos faces, vértices e arestas.

Assim como no Quadro 18, P6 mostrou mais uma vez a sua supergeneralização do conceito de poliedro para outro não-exemplo, a esfera. Como se observa no Quadro 19, P6 não soube nem sequer iniciar uma explicação. É possível entender por que respondeu falso ao analisar o diálogo abaixo sobre outra afirmação do Instrumento 2 que vinha em seguida “Existem poliedros que não possuem vértices”, a qual tinha respondido verdadeiro só na segunda fase:

P: Que poliedro é esse que não possui vértice?

P6: Uma...uma bola. Não é bola que chama.

P: Você acha que uma bola seria um exemplo?

P6: É, mas não é bola que chama.

P: Esfera?

P6: Isso.

Pela resposta de P6 fica evidente que vértice não é um atributo definidor de poliedro, o que mostra uma dificuldade grande de uma aluna que freqüenta a última série da educação básica e que tinha relatado que estava estudando geometria no cursinho pré-vestibular. É possível que esse participante tenha levado em consideração apenas o atributo definidor de poliedro, figura tridimensional, e inferido para todas as figuras que são tridimensionais, como a esfera.

No Quadro 20 é possível verificar que, nas duas fases da pesquisa, todos os entrevistados identificaram que os poliedros não são brancos. Pelas explicações de P1, P2, P3 e P4, observa-se que reconheceram a cor branca como um atributo irrelevante para conceituar poliedros.

Todos os poliedros são brancos	
Primeira Fase	Segunda Fase
Falso.	*P1: Falso.* *P1: Não tem nada haver.* *P: Acha que branco não é característica?* *P1: Não.*
Falso.	*P2: Ah, é falso.* *P: Cor não interfere?* *A: Não.*
Falso.	*P3: Falso.* *P: E se eu falasse que todos os poliedros são amarelos?* *P3: Mesma coisa do preto.* *P: Você acha que não influencia?* *P3: Não.*
Falso.	*P4: Falso.* *P4:Não depende da cor.*
Falso.	*(colocou que é falso)* *P5: Acho que é verdadeiro.*
Falso.	*(colocou que é falso)* *P6: Não sei.*

Quadro 20: Respostas dos participantes sobre a afirmação de poliedro que envolveu o atributo irrelevante “cor branca”.

O participante P5 tinha achado que a afirmação era verdadeira, mas percebeu que não poderia. O diálogo abaixo mostra que o pesquisador apresentou algumas situações para que a aluna chegasse numa resposta:

P: Todos os poliedros são brancos?

P5: Não!

P: Se eu falasse assim: todos os poliedros são rosas.

P5: É falso.

P: Se eu falasse assim: todos os poliedros são azuis.

P5: Falso.

P: Você acha que ser branco é um característica de poliedro?

P5: Não.

É provável que P5 tenha tido contato apenas com a representação plana de poliedros em livros didáticos, sendo que a cor clara do papel estava determinando que o poliedro fosse branco. Também parece que a aluna não teve uma aprendizagem com foco em analisar atributos irrelevantes como a cor da figura, pois mostrou dificuldade para identificar que a cor branca não interfere no conceito de poliedro.

Já P6 apresentou dúvida ao atributo irrelevante e mesmo com o auxílio do pesquisador não apresentou firmeza na sua resposta final:

P: Você acha que ser branco é uma característica de poliedro?
P6: Eu não sei.
P: Se eu falasse assim: todos os poliedros são rosas.
P6: Acho que não.
P: Todos os poliedros são amarelos.
P6: Não.
P: Então, branco, amarelo e rosa são características de poliedros?
P6: Eu acho que não.

Mesmo com algumas evidências P6 não apresentou uma fala que pudesse inferir que compreendeu que se tratava de um atributo irrelevante.

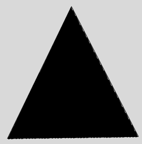
6.13 Teste de exemplos e não-exemplos (Instrumento 3)

Foram analisados os resultados sobre os três atributos irrelevantes que constavam nas figuras: a cor interna preta, borda espessa e hachura por meio de três figuras (triângulo, quadrado e hexágono, respectivamente) para verificar se dificultaram a identificação das mesmas por parte dos entrevistados. Também se verificou as respostas dos participantes para dois exemplos de poliedro, o cubo e o prisma de base triangular, e um não-exemplo, o círculo.

No Quadro 21, pode-se observar que, nas duas fases da pesquisa, todos os entrevistados assinalaram polígono para o triângulo, exceto P1 que tinha colocado na primeira fase que se tratava de um poliedro. O diálogo abaixo mostra que esse aluno reconheceu um exemplo de polígono e identificou o atributo irrelevante durante a entrevista.

P: Como você chegou à conclusão de que era polígono?
P1: Triângulo.
P: E essa cor preta?
P1: Acho que não tem nada haver.

Esse participante já tinha citado um triângulo como exemplo de polígono, conforme mostrou o Quadro 9, o que é um indicativo de que o reconhecimento da figura como sendo um triângulo não foi por acaso, e ainda mostrou que o atributo irrelevante não interferiu na sua resposta.

Figura: triângulo Atributo irrelevante: **cor interna preta**	
Primeira Fase	Segunda Fase
Poliedro.	*P1: Polígono.*
Polígono.	*P2: Polígono.* *P2: A cor não influencia em nada.*
Polígono.	*P3: Polígono. Triângulo.* *P3: A cor preta não. (não interferiu).*
Polígono.	*P4: Polígono.* *P4: Ah, não faz diferença eu acho. O que vale é o formato.*
Polígono.	*P5: Um polígono. Triângulo.*
Polígono.	*P6: Polígono.* *P6: Não. (não levou em consideração a cor preta)*

Quadro 21: Respostas dos participantes sobre o atributo irrelevante "cor interna preta".

Somente P5 relatou na entrevista que teve alguma dificuldade com a cor preta, o que, segundo a mesma, chegou a deixá-la em dúvidas para assinalar a resposta que forneceu, conforme o diálogo abaixo.

P: Essa cor te atrapalhou em alguma coisa para pensar?
P5: Uhum.
P: Deu margem para pensar que era poliedro?
P5: Não.
P: Mas deu margem para pensar que era nda?
P5: Uhum.

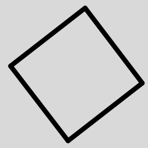
É possível que para P5 a figura realmente não fosse um poliedro, uma vez que no Quadro 11 citou corretamente dois exemplos, um prisma e uma pirâmide. Nesse caso, parece que a cor interna preta gerou dúvidas para identificar o tipo da figura, pois no Quadro 9, P5 forneceu dois exemplos de polígonos, um quadrado e um triângulo.

No Quadro 22, pode-se verificar que, nas duas fases da pesquisa, todos os entrevistados assinalaram polígono para o quadrado, exceto P2 que respondeu na entrevista nda, conforme o diálogo abaixo.

P: Por que você acha que é nda?
P2: Porque é um quadrado.
P: Um quadrado não é polígono e nem poliedro?

P2: Não.

Essa resposta de P2 foi incoerente com a apresentada nos Quadros 8 e 9, onde mostrou que quadrado é um tipo de polígono por possuir lados e ao citá-lo como exemplo. Não ficou evidente que o atributo irrelevante “borda espessa” tenha causado dificuldade, mas que o problema pode estar na falta do conhecimento declarativo da figura quadrado como um polígono.

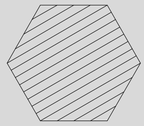
Figura: quadrado Atributo irrelevante: **borda espessa**	
Primeira Fase	Segunda Fase
Polígono.	*P1: Polígono.* *P1: Não. (não influenciou na resposta)*
Polígono.	*P2: Nda.*
Polígono.	*P3: Polígono.* *P3: Interferiu um pouco. Ela (figura) seria um quadrado.*
Polígono.	*P4: Polígono.* *P4: Não faz diferença.*
Polígono.	*P5: Um polígono.* *P5: (sobre a influencia da borda espessa respondeu que não, balançando a cabeça)*
Polígono.	*P6: Polígono.* *P6: Não tem nada haver. (a borda espessa)*

Quadro 22: Respostas dos participantes sobre o atributo irrelevante "borda espessa".

No Quadro 23, pode-se verificar que P4, P5 e P6, alunos que tiveram notas acima de cinco pontos na primeira fase, foram os únicos que assinalaram polígono nas duas fases da pesquisa para o hexágono. Quanto à explicação dada, apenas P5 demonstrou certa dificuldade com a hachura, mas que não interferiu na sua resposta final, conforme o comentário realizado.

P5: Ai esses risquinhos pra atrapalhar. Acho que é polígono.
P: Que figura é essa?
P5: Um hexágono.

Mesmo tendo se referido a hachura como um possível problema, o participante P5 mostrou conhecer a figura. Nesse caso, uma aprendizagem com foco em vários atributos irrelevantes que fazem parte das figuras pode auxiliar P5 a vê-los como uma característica que não interfere no conceito de polígono.

Figura: hexágono Atributo irrelevante: **hachura**	
Primeira Fase	Segunda Fase
Poliedro.	*P1: Polígono.* *P1: Não. (não levou em consideração a hachura)*
Nda.	*P2: Polígono.* *P2: Não tem nada haver.*
Poliedro.	*P3: Polígono.* *P3: Não. (não atrapalhou)*
Polígono.	*P4: Polígono.* *P4: Acho que não faz diferença.*
Polígono.	*P5: Acho que é polígono.*
Polígono.	*P6: Polígono? Polígono.* *P6: Acho que não. (que a hachura não atrapalhou)*

Quadro 23: Respostas dos participantes sobre o atributo irrelevante "hachura".

Em suma, todos os participantes assinalaram polígono para o triângulo, quadrado e hexágono que foram analisadas na entrevista e consideraram que o atributo irrelevante não influenciou nessa resposta final, sendo que estavam preocupados com o formato da figura, conforme relatou P3.

P: E essa hachura? Não atrapalha?

P3: Não.

P: Você olhou em que para assinalar polígono?

P3: No formato dela.

No Quadro 24, pode-se observar que P4, P5 e P6 foram os únicos que identificaram o cubo como um tipo de poliedro nas duas fases da pesquisa. O participante P2 havia repetido a resposta dada na primeira fase, mudando-a depois de questionada pelo pesquisador, pois tinha dito que cubo era quadrado.

P: É um cubo ou um quadrado?

P2: É um cubo.

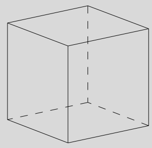
P: Se é um cubo, continua sendo nda?

P2: Não, é poliedro.

P: Por quê?

P2: Porque tem mais de cinco lados.

A resposta dada na última linha do diálogo foi a mesma apresentada pelo participante P2 no Quadro 10 sobre o entendimento de poliedro, o que mostra mais uma vez que não sabia conceituar poliedros por meio de seus atributos definidores, situação que ocasiona erro para identificar exemplos e não-exemplos.

Figura: cubo	
Primeira Fase	Segunda Fase
Polígono.	*P1: Poliedro.* *P1: Cubo.*
Nda.	*P2: Poliedro.* *P2: Porque tem mais de cinco lados.*
Polígono.	*P3: Poliedro. Uma figura tridimensional.*
Poliedro.	*P4: A dois é poliedro.* *P4: Porque ela tem dimensão.*
Poliedro.	*P5: (colocou poliedro) (o pesquisador não questionou)*
Poliedro.	*P6: (colocou poliedro) (o pesquisador não questionou)*

Quadro 24: Respostas dos participantes sobre o cubo.

No Quadro 25, pode-se observar que, nas duas fases da pesquisa, P3, P4, P5 e P6 foram os que identificaram corretamente o prisma de base triangular como poliedro, excetuando P2 e P3, sendo que P3 atribuiu erroneamente o atributo definidor do prisma, bases paralelas, como se fosse o que define poliedro, conforme diálogo abaixo.

P: Poliedro pelo fato de que?

P3: De ter base paralela.

Essa resposta não condiz para conceituar poliedro, pois, por exemplo, o cilindro não é um poliedro, mas apresenta as faces (círculos) das bases paralelas. Pode ser que P3 tenha tido contato apenas com prismas e como tinha conhecimento de que se tratava de poliedros acabou subgeneralizando o conceito de poliedro como sendo apenas prismas.

Figura: prisma de base triangular	
Primeira Fase	Segunda Fase
Polígono.	*P1: Poliedro.* *P1: Prisma de base triangular*
Nda.	*P2: É um polígono. (o pesquisador não questionou)*
Poliedro.	*P3: Eu acho que é poliedro.* *P3: Não lembro agora.*
Poliedro.	*P4: Poliedro.* *P4: Esse daí seria um prisma.*
Poliedro.	*P5: Poliedro.* *P5: Esse eu acho que é o prisma.* *P5: De base triangular.*
Poliedro.	*P6: Poliedro.* *P6: Prisma triangular?*

Quadro 25: Respostas dos participantes sobre o prisma de base triangular.

Verifica-se que o pesquisador não questionou P2 por ter assinalado polígono para o prisma, pois durante a entrevista ficou claro que o entrevistado considerava o tipo da figura pelo número de lados, de acordo com os Quadros 10 e 11. A explicação dada à figura 6 (pirâmide de base quadrada) do Instrumento 3 permite perceber tal situação:

P2: É um polígono.
P: O que tem nessa figura para ser polígono?
P2: Menos de cinco lados.

Como essa pirâmide tem cinco lados e o prisma de base triangular também tem, é provável que o fato de ter assinalado polígono para o prisma ocorreu dessa situação.

No Quadro 26 é analisado um não-exemplo de polígonos e de poliedros. É possível verificar que P2, P4 e P6 deram as mesmas respostas que cada um tinha dado nas duas fases da pesquisa. Somente P2 acertou ao assinalar que a figura era nda e ao identificar corretamente que o círculo não possui o atributo definidor “segmento de reta” (lado) dos polígonos, conforme sua explicação:

P2: Não tem lado.
P: Não é polígono?
P2: Não.
P: Como que é o nome dessa figura?

P2: Círculo.

O participante P2 mostrou que parece conhecer um atributo definidor dos polígonos, os segmentos de reta, conforme até já havia demonstrado em sua resposta no Quadro 8. No entanto, esse conhecimento não está bem formado, pois não havia identificado o quadrado como um polígono, segundo mostrou o Quadro 22.

Figura: círculo	
Primeira Fase	Segunda Fase
Nda.	*P1: Polígono.* *P1: Não sei dizer.*
Nda.	*P2: Nda.* *P2: Não tem lado.*
Nda.	*P3: Polígono.* *P3: Na mesma idéia da folha. (figura plana)*
Polígono.	*P4: Esse daí é um círculo. Polígono.* *P4: Porque ela é plana.*
Nda.	*P5: É um polígono.* *P5: Ela é plana.*
Polígono.	*P6: Polígono.* *P6: Por ele ser plano.*

Quadro 26: Resposta dos participantes sobre o círculo.

O participante P1 respondeu erroneamente que o círculo é um polígono e sequer soube explicar sua resposta. Já P3, P4, P5 e P6 explicaram por que assinalaram polígono, mas parece que como polígonos são figuras planas, todos generalizaram que círculo também era esse tipo de figura pelo fato de também ser uma figura plana.

6.14 Teste de relações subordinadas e supra-ordenadas (Instrumento 4)

Foram analisadas algumas afirmações que envolveram relações entre exemplos de polígonos e de poliedros, conforme descritas abaixo.

a) Todo quadrado é losango;
b) Todo polígono que é quadrado também é retângulo;
c) Todos os triângulos eqüiláteros são triângulos isósceles;
d) Algum prisma é paralelepípedo;
e) Toda pirâmide é um poliedro;

f) Todo cubo é um paralelepípedo.

No Quadro 27 é possível perceber que somente P2, na primeira fase, considerou o quadrado como losango e, na entrevista, mudou sua idéia, explicando que não sabia o que era um losango.

O participante P5 foi o único que identificou o atributo comum entre quadrado e losango, conforme a explicação abaixo:

P: Qual a característica para o quadrado ser losango?
P5: Os dois são quadriláteros e tem o mesmo tanto de...aí, face...
P: Lado?
P5: É. De mesma medida.

No entanto, essa aparente identificação parece não estar relacionada a um conhecimento correto do atributo comum porque achou que as figuras são iguais, conforme relatou abaixo:

P: Por que você acha que é verdadeiro?
P5: Ah, se tiver assim é quadrado e se virar...

Esse resultado indica que a aluna, de acordo com a teoria de Klausmeier e Goodwin (1977), possui pouco formado o conceito de quadrado e de losango ao nível identidade, o qual indica que a mudança espacial de uma figura, ou seja, se a figura é rotacionada, ela ainda continua sendo a mesma.

Todo quadrado é losango	
Primeira Fase	Segunda Fase
Falso.	*P1: Falso.* *P1: Nem todo quadrado é losango.*
Verdadeiro.	*P2: (colocou falso)* *P2: Porque eu não sei o que é losango.*
Falso.	*P3: Falso.* *P3: Os dois, pelo que eu estou pensando aqui, os dois parecem que são iguais, mas não que todo quadrado é losango.*
Falso.	*P4: Falso.* *P4: Porque quadrado é quadrado, losango é losango, mas eu não sei o que é losango.*
Verdadeiro.	*P5: Eu acho que é verdadeiro.* *P5: É. De mesma medida. (os lados de ambos)*
Falso.	*P6: (colocou falso).* *P6: Não. Todo losango é um quadrado, quadrado não é um losango.*

Quadro 27: Respostas dos participantes sobre a afirmação "Todo quadrado é losango".

Dos alunos que não consideraram quadrado como losango, podemos perceber as dificuldades, pois P2 e P4 não sabiam o que era um losango e P1, P3 e P6 parecem que não conheciam o atributo comum entre as figuras, sendo que P6 mostrou desconhecer qual dos dois conceitos era mais geral.

No Quadro 28, pode-se observar que apenas P1, P5 e P6 mantiveram as respostas na entrevista que haviam fornecido na primeira fase sobre o quadrado ser ou não um retângulo, sendo que P5 respondeu que para ele a afirmação só poderia ser falsa:

P: Por que falso?

P5: Porque se é quadrado não pode ser retângulo, não tem como.

P: Será que o quadrado tem alguma característica que é do retângulo?

P5: Os dois são quadriláteros. Só que o quadrado tem os quatro lados iguais e o retângulo tem dois lados iguais.

É provável que P5 tenha se prendido ao aspecto figural de ambas as figuras, tentando encontrar uma semelhança através dos segmentos de reta e não pela observação de uma outra característica que fosse comum, que são os ângulos retos. Essa mesma idéia é relatada por P4 que também respondeu falso à afirmação, conforme o Quadro 27.

Todo polígono que é quadrado também é retângulo	
Primeira Fase	Segunda Fase
Falso.	*P1: (colocou falso)* *P1: Não. (não tem característica em comum)*
Verdadeiro.	*P2: (colocou falso)* *P2: Não. (não tem característica em comum)*
Falso.	*P3: (colocou verdadeiro)* *P3: Comum...acho que a medida dos ângulos.*
Verdadeiro.	*P4: Falso. É porque quadrado tem quatro lados iguais e retângulo ele tem dois. Quatro lados iguais, mas aí tem dois de um jeito e dois de outro jeito.*
Falso.	*P5: Acho que é falso.* *P5: Porque se é quadrado não pode ser retângulo, não tem como.*
Verdadeiro.	*P6: Sim (verdadeiro).* *P6: Por ele ter quatro lados. Porque o quadrado é um retângulo, mas o retângulo não é um quadrado. Quadrado tem os lados iguais.*

Quadro 28: Respostas dos participantes sobre a afirmação "Todo polígono que é quadrado também é retângulo".

O participante P3 foi o único que identificou o atributo que era comum ao quadrado e retângulo, conforme o diálogo abaixo:

P: Não teria nenhuma característica em comum?

P3: Comum...acho que a medida dos ângulos.

P: São ângulos de que tipo?

P3: Noventa graus.

Para identificar um atributo comum entre duas figuras, como fez P3, é necessário que o aluno conheça os atributos que estão envolvidos, pois assim terá mais chances de conseguir avaliar a relação entre dois exemplos.

No Quadro 29, observa-se que P1 e P2 não sabiam as características dos dois triângulos. Pode ser verificado que, na segunda fase, todos os alunos que consideraram o triângulo eqüilátero como triângulo isósceles deram uma explicação adequada sobre o atributo comum aos dois tipos de triângulos. A resposta dada por P5 exemplifica essa situação.

P: Por quê?

P5: Porque se eqüilátero...

P5: Triângulo tem três lados. Eqüilátero são todos os lados iguais. E isósceles são dois, então se três são iguais, dois são também.

Essa é uma relação que envolveu os lados dos triângulos e que P5 conseguiu obter sucesso, sendo que já havia insistido nesse mesmo atributo para tentar encontrar uma relação entre o quadrado e o retângulo, a qual não obteve sucesso, segundo mostrou o diálogo relativo ao Quadro 28.

Todos os triângulos eqüiláteros são triângulos isósceles	
Primeira Fase	Segunda Fase
Verdadeiro.	*P1: Falso.* *P1: Não sei. (não sabia o que era um triângulo eqüilátero)*
Falso.	*P2: (deixou em branco)* *P2: Ah, eu não sei o que é eqüilátero e isósceles.*
Verdadeiro.	*P3: Verdadeiro.* *P3: Porque eqüilátero teria os lados iguais.* *P3: Dois lados iguais. (pelo menos)*
Falso.	*P4: (colocou verdadeiro)* *P4: Porque tem dois lados iguais. Porque eqüilátero tem três e o isósceles tem dois, tem três então tem dois.*
Falso.	*P5: Verdadeiro.*
Falso.	*P6: É sim.* *P6: As retas iguais que se encontram. As retas de mesma medida.*

Quadro 29: Respostas dos participantes sobre a afirmação "Todos os triângulos eqüiláteros são triângulos isósceles".

No Quadro 30, pode-se observar que, nas duas fases da pesquisa, P1, P3 e P5 consideraram que um prisma não pode ser paralelepípedo e que essa resposta incorreta é resultado do desconhecimento do formato de um paralelepípedo, conforme se verifica no silêncio de P1:

P: Sabe o que é um paralelepípedo?
P1: ...
P: Conhece alguma coisa que se chama paralelepípedo?
P1: ...

O participante P1 não conseguiu declarar por palavras e por meio de exemplos o que seria um paralelepípedo, figura que está presente nos ambientes escolares como, por exemplo, os armários de livros.

Algum prisma é paralelepípedo	
Primeira Fase	Segunda Fase
Falso.	*P1: (colocou falso)*
Falso.	*P2: (colocou verdadeiro).* *P2: Acho que é verdadeiro. (viu um paralelepípedo e identificou que era prisma)*
Falso.	*P3: Acho que é falso.* *P3: Já. (disse que conhecia)* *P3: Não. (mas não identificou nenhum numa sala de aula)*
Verdadeiro.	*P4: (colocou falso)* *P4: Por nome não. Eu posso conhecer.*
Falso.	*P5: Acho que é falso.* *P5: Acho que não. (que prisma não tem relação com paralelepípedo)*
Verdadeiro.	*P6: Sim (verdadeiro).* *P6: Sei. (desenhou um paralelepípedo)*

Quadro 30: Respostas dos participantes sobre a afirmação "Algum prisma é paralelepípedo".

O participante P2 reconheceu um prisma e parece que sabia a relação estabelecida na afirmação. Já P6, conhecia o formato de um paralelepípedo, mas não sabia a característica de prisma, segundo o diálogo abaixo.

P: Aqui na sala tem alguma coisa que é igual a esse desenho (paralelepípedo) que você fez?

P6: Tem. Do lado do monitor (gabinete do CPU).

P: E é um prisma?

P6: Prisma?

P: Paralelepípedo não é prisma?

P6: Não. É poliedro.

P: Isso é prisma? (apontou uma caixa)
P6: Não sei definir um prisma.

Parece que P6 conhece objetos que são paralelepípedo, mas não conseguiu conceituá-lo como exemplo de prisma por meio de um atributo definidor e também mostrou que desconhece a relação supra-ordenada paralelepípedo – prisma – poliedro que parte do conceito mais específico para o mais geral, por meio de um atributo comum.

No Quadro 31, pode-se observar que, na segunda fase, somente P2 considerou que pirâmide não é um poliedro. Mais uma vez ela apresenta a mesma idéia já descrita anteriormente sobre poliedro, conforme a explicação abaixo:

P: Por que a pirâmide não é poliedro?
P2: Porque ela tem três lados.
P: E o poliedro?
P2: Tem mais de cinco.

Em relação à P4 parece que sabia o motivo da afirmação ser verdadeira ao citar um atributo de triângulo e logo em seguida mencionar que a pirâmide tem faces. Já P5 demonstrou que sabia por que uma pirâmide é um poliedro ao citar seus três elementos principais.

Toda pirâmide é um poliedro	
Primeira Fase	Segunda Fase
Verdadeiro.	*P1: (colocou verdadeiro) (o pesquisador não questionou)*
Verdadeiro.	*P2: (colocou falso)* *P2: Porque ela (pirâmide) tem três lados.*
Falso.	*P3: (colocou verdadeiro) (o pesquisador não questionou)*
Falso.	*P4: Verdadeiro.* *P4: É, porque triângulo é só plano e pirâmide é ela...tem as faces.*
Verdadeiro.	*P5: Verdadeiro.* *P5: Porque ela tem face, vértice e aresta.*
Verdadeiro.	*P6: (respondeu verdadeiro) (o pesquisador não questionou)*

Quadro 31: Respostas dos participantes sobre a afirmação "Toda pirâmide é um poliedro".

No Quadro 32, pode-se observar que, na entrevista, P6 considerou que cubo pode ser um paralelepípedo ao identificar o atributo comum, mas mostrou confundir o termo face, de poliedro, com o termo lado, de polígono.

O participante P5 mostrou um erro ao chamar de retângulo um paralelepípedo, pois o fez para explicar que para o cubo ser um paralelepípedo as faces precisariam ser retângulos: *"se fosse um retângulo"*. Isso mostra a dificuldade em diferenciar uma figura plana de uma não-plana e de identificar o atributo comum a ambas.

Todo cubo é um paralelepípedo	
Primeira Fase	Segunda Fase
Verdadeiro.	*P1: Acho que é falso.* *P1: Não. (que não havia nada de comum)*
Verdadeiro.	*P2: Verdadeiro. (o pesquisador não questionou)*
Falso.	*P3: Falso.* *P3: Acho que todo não.*
Falso.	*P4: (colocou falso)* *P4: Paralelepípedo eu não sei o que é.*
Falso.	*P5: Acho que é falso.* *P5: É. Tipo se fosse um retângulo. Se fosse retângulo poderia ser.*
Falso.	*P6: Sim (verdadeiro).* *P6: De ele ter os lados paralelos.*

Quadro 32: Respostas dos participantes sobre a afirmação "Todo cubo é um paralelepípedo".

O participante P4 considerou que cubo não pode ser um paralelepípedo talvez por não conhecer um paralelepípedo e, por conseguinte não poder realizar uma comparação que o possibilitasse a identificar o atributo em comum.

CAPÍTULO VII

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

7.1 Resposta às questões de pesquisa

O presente estudo procurou investigar o conhecimento declarativo de polígonos e poliedros que alunos do ensino médio possuem em termos de atributos definidores, relações subordinadas e supra-ordenadas e exemplos e não-exemplos. O conhecimento declarativo envolve uma representação externa feita por meio de figuras e palavras, os quais correspondem ao que compõe os conceitos investigados na pesquisa: as palavras que exprimem os atributos e os nomes das figuras e as figuras que representam os nomes dos conceitos de polígonos e poliedros (STERNBERG, 2000).

Na revisão bibliográfica a pesquisa de Oliveira e Morelatti (2006) indica que os alunos do ensino fundamental apresentam dificuldades nos conceitos de geometria plana e espacial. Alunos do ensino médio ou equivalente mostraram não dominar conceitos da geometria espacial (VIANA, 2000). Até mesmo o professor, que deveria ter o conceito que ensina bem formado, possui dificuldades com os conceitos geométricos. (PASSOS, 2000; SILVA, 2003). Esses resultados estão em conformidade com os relatados na presente pesquisa no que diz respeito às dificuldades apresentadas sobre os conceitos de polígonos e poliedros, uma vez que alunos do último nível da educação básica, que deveriam ter construídos esses conceitos nas séries anteriores, não demonstraram tal fato na fase final.

Na análise da prova matemática (Instrumento 1), foi verificado que os participantes tiveram dificuldades para responder questões que envolviam os conceitos de polígonos e poliedros. Pôde-se constatar o baixo desempenho (M = 2,25; DP = 1,99) para descrever os conceitos em termos de seus atributos definidores e também para fornecer exemplos corretos, o que caracterizou uma falta de compreensão dos participantes para declarar conceitos que são trabalhados desde as séries iniciais do ensino fundamental.

Em relação às séries, não foram encontradas diferenças significativas (p = 0,091) que pudessem estabelecer uma supremacia de uma série posterior, entretanto as médias aumentaram na medida em que se passava de série. Em relação ao gênero, também não foram encontradas diferenças significativas (p = 0,593) que indicassem a superioridade dos homens sobre as mulheres e vice-versa.

Na análise do teste de atributos definidores (Instrumento 2), a média de acertos obtida pelos participantes nas afirmações foi de 6,03 (DP = 1,24), numa escala de zero a dez, o que corresponde a um desempenho bom na identificação de atributos definidores, porém ainda não é o ideal do que se espera de conhecimento declarativo de polígonos e poliedros de alunos do ensino médio. Na pesquisa de Viana (2000), a qual investigou a identificação de figuras espaciais através de frases que continham suas propriedades, como, por exemplo, o nome do sólido geométrico cujas faces são polígonos, os participantes que seriam futuros professores obtiveram a taxa média de 14% (n = 377).

Segundo Klausmeier e Goodwin (1977), os atributos definidores caracterizam a estrutura de um conceito. Nesse caso, cada conceito precisa ser definido de acordo com todos os seus atributos definidores, pois existem outros conceitos que compartilham de atributos comuns, como no caso de polígonos e não-polígonos (por exemplo, círculo) que compartilham do atributo “figura plana”, mas são conceitos diferentes.

No desempenho por série, não foram encontradas diferenças significativas ($p = 0{,}084$). A média da primeira série (5,90) foi muito próxima da média da segunda série (5,94), o que mostra um conhecimento declarativo semelhante quanto à identificação de atributos definidores de polígonos e de poliedros e também pouco desenvolvido para alunos que estão no último nível da educação básica. Quanto ao desempenho por gênero, não foram encontradas diferenças significativas ($p = 0{,}784$) que mostrassem a superioridade de homens sobre mulheres e vice-versa.

Na análise do teste de exemplos e não-exemplos (Instrumento 3), a média de 5,59 (DP = 1,98) mostrou a dificuldade em diferenciar figuras que eram polígonos e figuras que eram poliedros, assim como dificuldades em identificar figuras que eram não-exemplos desses conceitos. Resultado semelhante foi encontrado por Viana (2000) que mostrou a dificuldade de alunos do CEFAM no reconhecimento e nomeação de figuras espaciais.

A discriminação de exemplos de polígonos e de poliedros é importante para o processo de formação conceitual, uma vez que se podem perceber os atributos que caracterizam os conceitos. É necessária a comparação com os não-exemplos para verificar os atributos que são comuns e os que determinam a especificidade de cada um (KLAUSMEIER e GOODWIN, 1977).

A representação de um conceito por meio de uma figura corresponde ao domínio de uma das condições do conhecimento declarativo, ou seja, conhecer as informações de um objeto (STERNBERG, 2000). Dessa forma, os participantes da pesquisa mostraram que ainda necessitam de um ensino que valorize a diferenciação de exemplos e não-exemplos de polígonos e de poliedros.

No Instrumento 3, assim como nos anteriores, não foi encontrada diferença significativa por série (p = 0,057), somente houve uma linearidade das médias de acordo com as séries. Também não foram encontradas diferenças por gênero (p = 0,434) o que mostra uma tendência de mesmo desempenho entre homens e mulheres.

Na análise do teste de relações subordinadas e supra-ordenadas (Instrumento 4), ficou evidente que não houve um bom desempenho dos participantes devido à nota média baixa de 5,64 (DP = 1,16) nas afirmações que envolveram relações subordinadas e supra-ordenadas entre os exemplos de polígonos e de poliedros. Como a percepção dessas relações depende da formação dos conceitos investigados ao nível classificatório ou formal, conforme destacaram Klausmeier e Goodwin (1977), pode-se inferir que o baixo desempenho no Instrumento 4 é resultado do baixo desempenho dos participantes da pesquisa na identificação dos atributos definidores e dos exemplos e não-exemplos de polígonos e poliedros nos outros instrumentos aplicados, pois são essenciais para tal percepção.

Em relação à análise por série, verificou-se que o desempenho da terceira série (M = 5,89) na identificação das relações subordinadas e supra-ordenadas foi maior do que a da primeira série (M = 5,37), devido à diferença significativa encontrada (p = 0,024). Isso nos leva a inferir que alunos que estão na terceira série necessariamente apresentaram um conhecimento superior aos alunos da primeira série, entretanto não há uma diferença grande no valor das duas médias, pois ela é ligeiramente maior que meio ponto numa escala de zero a dez. Nem sempre os alunos que estão em séries mais adiantadas têm desempenhos melhores do que os das séries anteriores. Pirola (1995) mostrou que na definição dos conceitos de triângulo e paralelogramo os alunos da sétima série apresentaram um desempenho superior e significativo ($p < 0,05$) em relação às outras séries investigadas, sendo que a sexta série foi melhor que a oitava, que por sua vez foi melhor que a quinta.

O resultado apresentado por Pirola (1995) permite discutir o papel da escola para se desenvolver o conhecimento científico. A Proposta Curricular de Matemática (SÃO PAULO, 1997) foi elaborada tendo em vista a formação do conhecimento em espiral que possibilita ao professor retomar os conteúdos ensinados na série anterior para posteriormente aprofundar os conteúdos mais complexos. Nesse sentido, no caso da presente pesquisa, era esperado que alunos da terceira série tivessem adquirido maior conhecimento de polígonos e poliedros e apresentassem melhores desempenhos que os alunos que estão na primeira série, uma vez que tiveram maior contato com abordagens mais formais da aprendizagem em geometria.

Em relação ao gênero, no Instrumento 4, não foram encontradas diferenças (p = 0,995) que mostrassem a superioridade de homens em relação às mulheres nas médias obtidas e vice-versa.

O desempenho apresentado pelos participantes nos quatro instrumentos utilizados pode ser considerado ruim devido à nota média de 4,88 (DP = 1,15). A terceira série apresentou uma melhor nota média (5,17) em relação à primeira série (4,63), conforme a diferença encontrada (p = 0,007). A diferença da nota média dos participantes no Instrumento 1 (2,25) foi significativa em relação ao valor das notas médias apresentadas nos demais instrumentos. A maior nota média obtida foi no Instrumento 2 (6,03), o que mostra que os participantes souberam identificar melhor os atributos definidores de polígonos e de poliedros.

É importante ressaltar que o Instrumento 1, em relação aos demais instrumentos, exigia um maior conhecimento do assunto, tratava-se de uma atividade mental complexa, pois solicitava que os participantes declarassem os conceitos. Os testes (instrumentos 2, 3 e 4) eram de assinalar, o que possibilitou ao participante uma probabilidade de 50% de acerto para cada afirmação e para a identificação do exemplo ou não-exemplo. Estes testes, ao contrário do Instrumento 1, apresentavam uma vantagem para os participantes, pois os atributos estavam nas afirmações e os desenhos de exemplos e não-exemplos foram mostrados por meio de representações no plano e por meio de objetos, o que permitia a recordação e uma reflexão sobre se o que estava descrito fazia parte ou não de polígono ou poliedro. Os resultados mostraram que os participantes da pesquisa, alunos do ensino médio, não possuíam o conhecimento suficiente para o nível de ensino em que estavam.

Foi encontrada uma relação significativa, com alguma tendência linear e positiva apenas entre as notas nos Instrumentos 1 e 3 (r = 0,509; p < 0,001). Isso implica que quanto maior o conhecimento declarativo de atributos definidores, maior a identificação de exemplos e não-exemplos.

Nessa primeira fase do estudo, pode-se concluir que os participantes da pesquisa apresentaram um conhecimento declarativo de polígonos e de poliedros muito aquém do esperado de alunos que estão no ensino médio, pois tiveram um baixo desempenho em tarefas que exigiam a identificação de atributos definidores, a diferenciação de exemplos e não-exemplos e a identificação de relações subordinadas e supra-ordenadas. Esse resultado refletiu o desempenho dos participantes nos componentes dos níveis cognitivos.

De acordo com as atividades investigadas na pesquisa, foi analisado o desempenho dos participantes nos componentes dos níveis cognitivos de formação conceitual. A nota média no componente do nível identidade (identificar formas equivalentes) foi inferior (4,97) às notas dos componentes dos outros níveis, de acordo com a diferença significativa (p = 0,001). Para um componente de um nível inferior, que exige uma operação mental mais simples, em relação aos componentes dos níveis classificatório e formal, que exigem uma operação mental mais complexa, os participantes apresentaram um baixo desempenho. Em relação à nota média (5,78) no componente do nível concreto, é coerente que seja maior que a nota média do nível identidade, pois a operação mental exigida é mais simples (lembrar o objeto).

Esse resultado deveu-se ao fato de ter sido investigado somente um componente de cada nível cognitivo. Se fosse avaliado a hierarquia entre os níveis seria necessário analisar os níveis por completo. Nesse caso, o nível formal não seria analisado apenas pela identificação dos atributos definidores e pelo seu uso na identificação de relações entre os conceitos, feito na pesquisa, mas por todos os componentes necessários para inferir a sua formação.

O Quadro 33 mostra todos os componentes dos níveis cognitivos, enumerados a partir da interpretação da teoria de formação de conceitos de Klausmeier e Goodwin (1977). Em relação às operações mentais necessárias, essa teoria sugere que o professor deveria desenvolver atividades de ensino que pudessem contemplar cada componente, em conjunto ou em separado, permitindo ao aluno condições de formação de um conceito de acordo com cada nível cognitivo.

Nível cognitivo	Componentes para inferir o conceito
Concreto	▪ Reconhecer o objeto (exemplo); ▪ Discriminar o objeto de outros objetos; ▪ Criar uma imagem mental de seu entendimento; ▪ Lembrar o objeto
Identidade	▪ Generalizar formas equivalentes dentro da mesma classe; ▪ Identificar o objeto independente da posição; ▪ Identificar o objeto independente do tamanho; ▪ Identificar atributos definidores;
Classificatório	▪ Generalizar exemplos equivalentes como da classe mais inclusiva; ▪ Identificar exemplos; ▪ Identificar não-exemplos; ▪ Identificar atributos definidores; ▪ Identificar atributos irrelevantes;
Formal	▪ Identificar atributos definidores, isto é, declará-los; ▪ Discriminar exemplos de não-exemplos através dos atributos; ▪ Formular e avaliar hipóteses usando exemplos e não-exemplos; ▪ Perceber atributos do conceito através de exemplos; ▪ Generalizar para novos exemplos;

Quadro 33: Componentes dos níveis cognitivos utilizados na formação de um conceito.

As correlações entre os componentes dos níveis investigados na pesquisa não foram altas apesar de todas terem sido significativas ($p < 0{,}01$). Apenas uma boa correlação, linear e positiva, ocorreu entre os níveis identidade e classificatório ($r(253) = 0{,}874$). Isso implica que quanto maior o domínio na identificação de formas equivalentes, maior o domínio na identificação de exemplos equivalentes. Já a pior relação ocorreu entre o nível concreto e o formal ($r(253) = 0{,}335$). Assim, o aumento no reconhecimento de figuras não interferiu muito na identificação de atributos definidores.

Em relação à segunda fase do estudo, foi possível perceber o que pensavam os seis participantes sobre os conceitos investigados, bem como aprofundar o conhecimento sobre as respostas que haviam dado na primeira fase do estudo. As atividades selecionadas para a discussão permitiram retratar o conhecimento que esses participantes possuíam.

A respeito do que entendiam sobre polígono, os participantes conseguiram declará-lo apenas pelo atributo definidor “segmentos de reta”, feito somente por dois entrevistados (P2 e P5). Alguns participantes atribuíram erroneamente os atributos faces e arestas, que são de poliedros, como sendo de polígonos, o que evidenciou uma grande dificuldade na identificação do conceito. Em relação ao fornecimento de dois exemplos de polígonos, surgiram respostas que mencionaram um exemplo correto juntamente com figuras como a circunferência e o círculo, que correspondem a não-exemplos. Isso mostra que a dificuldade em declarar polígonos em termos de seus atributos definidores também ocorreu no fornecimento correto de exemplos. A maioria conseguiu fornecer exemplos corretos.

No caso dos poliedros, foram declarados vários atributos (faces, arestas, vértices e três dimensões), mas por um único entrevistado (P6). A maioria dos participantes não conseguiu conceituar poliedros em termos de seus atributos definidores, apenas deram indícios sobre uma idéia ao mencionar o termo “perspectiva” e fornecer exemplos. Quanto ao fornecimento de dois exemplos de poliedros, somente um participante o fez (P5).

Os participantes apresentaram dificuldade para responder sobre conceitos que deveriam ter aprendido em séries anteriores. Segundo a Proposta Curricular para o ensino de Matemática do Ensino Fundamental (SÃO PAULO, 1997), a percepção de poliedros como prismas e pirâmides e da relação entre suas faces, vértices e arestas, bem como a classificação de figuras em polígonos e não-polígonos devem ser trabalhadas nas séries iniciais do ensino fundamental, proporcionando a discussão que envolve outros conceitos relacionados como construção de figuras com régua e compasso e validação de teoremas.

Sobre a análise das respostas dos participantes em relação aos atributos definidores de polígonos e de poliedros, mostrou-se um conhecimento incorreto do próprio atributo em si e a forma equivocada de atribuir esses atributos para outros tipos de figuras.

Em relação aos polígonos, algumas falas evidenciaram que não são todos os polígonos figuras planas e os segmentos de reta poderiam ser linhas curvas, o que englobaria figuras como circunferência e círculo como exemplos de polígonos. Em outras respostas, ficou evidente que círculo e circunferência são exemplos de polígonos, pois citaram esses não-exemplos para justificar que os polígonos não são formados por segmentos de reta. O atributo “figura fechada” foi identificado corretamente, mas os participantes apresentaram dificuldade na identificação de “figura simples”, pois diziam que se tratava de uma figura normal, fácil de desenhar, de se ver e já saber o que é. O reconhecimento de um polígono como uma figura simples parece não ser uma ação fácil do que como uma figura fechada, pois o conceito de figura simples significa a figura que não apresenta cruzamento de seus segmentos de reta. No ensino de geometria, muitas vezes, as figuras simples, uma vez abordadas na quinta série, por exemplo, não são retomadas nas séries posteriores e não são ensinadas por meio da relação com não-exemplos, figuras não-simples, para que o aluno perceba o atributo definidor. Dessa forma, a dificuldade dos participantes da pesquisa no atributo figura simples pode ter sido pelo fato de terem aprendido esse conceito e não ter sido retomado nas outras séries, ou por não terem sido ensinados.

Em relação aos poliedros, apesar de identificar que são tridimensionais, não souberam explicar o significado desse atributo definidor. Os participantes identificaram corretamente que as faces dos poliedros são polígonos, porém um deles (P6) estendeu isso para figuras como o cone, pois considerou o círculo como polígono, logo, para essa aluna, o cone é um poliedro cuja face da base é um polígono. Essa situação ficou evidente quando P6 considerou que os poliedros não eram formados por vértices, faces e arestas, pois para ele, a esfera é um poliedro e não possui vértice. Esses mesmos atributos foram considerados por P2 como pertencentes à classe dos triângulos.

Resultados semelhantes ocorreram no estudo de Pirola, Proença e Quintiliano (2003), em que os participantes, alunos do ensino médio, denominaram a pirâmide de triângulo e o cubo de quadrado, apresentando dificuldades em identificar, por meio de seus atributos definidores, polígonos e poliedros, causando certa preocupação, pois eram alunos da última etapa da educação básica e já tinham passado (ou deveriam ter passado) pela formação desses conceitos.

Essa dificuldade na identificação de atributos definidores (Instrumento 2) de polígonos e de poliedros é um resultado que mostra a deficiência no conhecimento declarativo em termos do significado da palavra que cada conceito representa. Isso é explicado pelo fato de que, mesmo tendo assinalado verdadeiro para as afirmações que o eram, os participantes não sabiam realmente identificar os atributos definidores e aqueles que assinalaram falso, deram uma explicação incorreta da relação dos atributos definidores com os conceitos investigados.

Nas duas afirmações que envolveram polígonos e poliedros com atributos irrelevantes (Instrumento 2), não houve dúvidas por parte dos participantes, pois disseram que a cor não interfere e não influencia nos conceitos.

Conforme as respostas fornecidas pelos seis participantes no Instrumento 3, os atributos irrelevantes (cor preta, borda espessa e hachura) dos exemplos de polígonos não influenciaram na identificação das figuras, o que está de acordo com a teoria de formação conceitual de Klausmeier e Goodwin (1977). Além disso, em geral, todos identificaram corretamente as figuras discutidas (triângulo, quadrado e hexágono) como exemplos de polígonos, situação igual ao que apresentaram na primeira fase. Somente P2, na entrevista, afirmou que o quadrado não era nem polígono e nem poliedro, assinalando nda, resposta que não soube explicar.

As respostas dos participantes a respeito dos dois exemplos de poliedro discutidos mostraram que a identificação ocorreu, pelo menos para o cubo, pelo fato de ser uma figura tridimensional. Já para o prisma de base triangular, a identificação parece que aconteceu ao reconhecerem o tipo da figura: *"esse aí é um prisma"*, *"de base triangular"*. Somente P2 classificou a figura como polígono.

O participante P2, em alguns momentos da entrevista, mostrou que se a figura tivesse até cinco lados seria um polígono, mais de cinco, um poliedro. Isso foi verificado quando desenhou o octógono como exemplo de poliedro, explicando que tinha mais de cinco lados e ao dizer que o cubo era um poliedro pela mesma razão. Já o prisma triangular pode ter sido denominado de polígono por ter menos de cinco "lados" (faces), pois talvez P2 não levou em consideração a base apoiada no plano, situação semelhante a da pirâmide de base quadrada, que tem o mesmo número de faces do prisma e que P2 também disse que tinha menos de cinco lados. Esse resultado demonstra que P2 aprendeu uma forma totalmente incorreta de identificar polígonos e poliedros.

Em diversas partes das entrevistas o círculo foi uma figura muito citada e referenciada pelos participantes para justificar as respostas que forneciam. Assim, suas explicações em relação a essa figura evidenciaram que quase todos o consideraram como exemplo de polígono, atribuindo a tal consideração o fato de também ser uma figura plana. Os participantes acreditavam que ser uma figura plana é necessariamente ser um polígono. Apenas P2 considerou o círculo como não-exemplo de polígono e de poliedro, pois acertadamente disse que essa figura "não tem lado". Esse resultado foi diferente do apresentado na primeira fase da pesquisa porque a maioria tinha assinalado nda como resposta. Parece que a estratégia em fazer com que esse participantes fossem entrevistados foi importante para descobrir o que realmente sabiam do conceito.

A resposta de P2 estava coerente com o que havia dito sobre polígono na primeira questão do Instrumento 1 ao responder que deveria ter lados, o que mostrou que ela conseguiu identificar que uma figura é polígono se possuir segmentos de reta como atributo definidor. Entretanto, para poliedros, pelo critério de identificação adotado já comentado acima (mais de cinco lados), parece necessário um ensino que leve em consideração os atributos definidores e uma comparação entre exemplos e não-exemplos.

A última análise feita envolveu algumas afirmações sobre as relações subordinadas e supra-ordenadas (Instrumento 4) de polígonos e de poliedros, que relacionavam exemplos por meio de atributos definidores.

Nas relações que envolveram polígonos, foi constatado que a maioria dos participantes não percebeu o que poderia haver em comum entre as figuras. Eles desconheciam os atributos definidores que relacionavam quadriláteros e triângulos: que todo quadrado é losango, que todo quadrado é retângulo e que todo triângulo eqüilátero é isósceles. Na primeira fase da pesquisa, essas mesmas relações apresentaram índice de acertos abaixo de 50% (Figura 36). As dificuldades foram provenientes da não identificação do atributo comum, da atenção apenas no aspecto figural e do desconhecimento do conceito de triângulo eqüilátero e de triângulo isósceles, situação que pode ser considerada como o maior problema, pois fica difícil fazer uma comparação entre duas figuras que não se conhece os atributos definidores. Passos (2000) mostrou que esse tipo de dificuldade pode acontecer com professores, pois na sua pesquisa alguns do ensino fundamental se prendiam ao aspecto figural do retângulo não entendendo que um quadrado também é retângulo, devido à falta de conhecimento das propriedades dessas figuras.

Para as relações subordinadas e supra-ordenadas que envolveram poliedros, a maioria dos participantes teve dificuldades em perceber os atributos comuns que relacionavam prisma com paralelepípedo e cubo com paralelepípedo. O problema esteve na falta de conhecimento e identificação da figura paralelepípedo e do conceito de prisma. Em contrapartida, a identificação de atributos que tornam toda pirâmide um poliedro foi realizada pela maioria dos participantes. Apenas P2 voltou a apresentar o critério já discutido anteriormente, que a pirâmide não era um poliedro por possuir três “lados”, pois para o ser precisava ter mais de cinco.

Analisando as respostas dessa aluna nas atividades do Instrumento 1 que envolveram a definição de face de poliedro e sobre a quantidade de faces da pirâmide de base quadrada, pôde-se perceber que para ela face é só o que ela pode ver. No caso dessa pirâmide, considerou formada apenas por três faces (a da base e as laterais visíveis), situação que pode ter ocorrido no contato apenas com sua representação no plano, pois acabou considerando apenas essas.

A situação exposta sobre as dificuldades nas relações que envolveram os conceitos investigados aponta que o ensino voltado para a identificação de atributos definidores de polígonos e de poliedros, de acordo com Klausmeier e Goodwin (1977), é importante na formação dos conceitos ao nível formal de formação conceitual para que se possa fazer uso deles na percepção de relações entre os mesmos. Isso inclui estabelecer princípios que vão desde as relações subordinadas e supra-ordenadas, relações de causa e efeito, probabilidade etc. até o uso para solucionar problemas.

As dificuldades relatadas pelos participantes ao final do Instrumento 2 e do Instrumento 3, na primeira fase, foram direcionadas, em grande maioria, para o desconhecimento do conceito de polígono e de poliedro, o que informa que não sabiam conceituá-los em termos de atributos definidores e exemplos e não-exemplos. No Instrumento 1, ficou evidente que os participantes tiveram dificuldades em planificar poliedros, uma vez que apresentaram baixos índices de acertos e planificações muitas vezes incoerentes e com pouco rigor em suas medidas. Planificar permite que o aluno perceba as figuras que formam as faces das figuras não-planas e possa realizar procedimentos como, por exemplo, o cálculo da área total do cilindro, tendo em vista que a sua superfície lateral representa um conceito de uma figura plana.

Em suma, as respostas dos entrevistados mostraram as dificuldades em declarar polígonos e poliedros em termos de seus atributos definidores, relações subordinadas e supra-ordenadas e exemplos e não-exemplos. Conclui-se que o desempenho inferior apresentado na primeira fase da pesquisa juntamente com os indícios obtidos nas entrevistas, sobre a falta do conhecimento declarativo a respeito dos conceitos investigados, são rastros evidenciados de um ensino escolar que pode não contribuir para o a aprendizagem de conceitos geométricos.

CAPÍTULO VIII

CONSIDERAÇÕES FINAIS E IMPLICAÇÕES DO ESTUDO

8.1 Considerações finais

Alguns estudos revistos na revisão bibliográfica permitiram perceber que tanto alunos como professores que ensinam Matemática apresentaram dificuldades na abordagem de conceitos geométricos. A presente pesquisa concorda com os resultados desses trabalhos, pois mostrou que alunos do ensino médio não apresentaram bem formados os conceitos de polígonos e poliedros. No entanto, outros estudos da revisão bibliográfica mostraram que o uso de metodologias/estratégias de ensino pode ser eficaz para promover a aprendizagem. Quando há um planejamento e elaboração de atividades de conceitos geométricos levando-se em consideração o nível cognitivo em que o aluno pode formar um determinado conceito, os seus atributos definidores e os exemplos e não-exemplos, é possível auxiliar os alunos no desenvolvimento da aprendizagem significativa dos conceitos geométricos.

Foi possível perceber que as definições de polígono variam de autor para autor. No Capítulo IV, foram citados dois autores cujas definições de polígono contidas em seus livros contemplavam algumas características diferentes. Tais características fizeram com que uma definição contemplasse certo tipo de exemplo que a outra definição não engloba. Nos livros didáticos de Matemática da educação básica, por exemplo, existem definições de polígonos que os consideram apenas como formados por segmentos de reta e outras que os consideram como os segmentos de reta mais a região interna. Nesse sentido, é importante, ao se ensinar um conceito, que o professor verifique qual autor está referenciando.

A coleta e análise de dados, separadas em duas fases, uma quantitativa e outra qualitativa, forneceram maiores condições para avaliar o conhecimento declarativo dos alunos sobre polígonos e poliedros. O maior problema esteve na não diferenciação entre figuras planas e figuras não-planas por meio de seus atributos definidores e exemplos e não-exemplos. Percebe-se que ainda há um grande trabalho a ser feito na busca do desenvolvimento dos conceitos geométricos.

Os testes aplicados de atributos definidores e relações subordinadas e supra-ordenadas (Instrumentos 2 e 4) solicitavam que os participantes assinalassem verdadeiro ou falso e o teste de exemplos e não-exemplos (Instrumento 3) apresentava três alternativas para se escolher apenas uma. Nessas condições, as respostas fornecidas poderiam ter sido feitas sem que o participante realmente soubesse o conceito solicitado, garantindo algumas vezes um bom desempenho.

Por isso, foi de extrema importância, para a verificação da formação conceitual adquirida, a realização de uma segunda fase, que correspondeu a uma reaplicação dos Instrumentos utilizados na primeira, com intuito de analisar o que pensavam os entrevistados sobre os conceitos de polígonos e de poliedros.

A estratégia de obtenção de resultados feita na pesquisa é o que o professor deveria fazer para investigar e avaliar o conhecimento declarativo de seus alunos, o qual corresponde às palavras que denominam os conceitos e as figuras que os representam. O PCN de Matemática do Ensino Fundamental propõe como instrumentos de avaliação tanto as provas como as formas orais, “uma vez que estas revelam aspectos do raciocínio que muitas vezes não ficam evidentes nas avaliações escritas” (BRASIL, 1998, p. 55).

Quando os alunos desenvolvem seus conceitos a partir dos atributos definidores e exemplos e não-exemplos, essa construção de conhecimento caracteriza um tipo de nível conceitual. Segundo Klausmeier e Goodwin (1977), os indivíduos formam conceitos nos níveis concreto, identidade, classificatório e formal, nessa seqüência, sendo que o nível anterior precisa ser formado para se formar o seguinte.

Deve ficar claro que, na presente pesquisa, os níveis cognitivos não foram investigados por completo de acordo com todos os seus componentes. Um nível depende do outro, porém, na pesquisa, os resultados indicaram que não havia uma tendência de hierarquia entre os níveis. No caso, foram investigados alguns componentes para analisar em qual ou quais deles o professor precisaria realizar maior trabalho pedagógico.

Sendo assim, pesquisas com intenções de maiores aprofundamentos em relação à comprovação da teoria sobre a hierarquia dos quatro níveis cognitivos poderiam ser realizadas tendo em vista a análise dos mesmos por completo.

Com relação às respostas categorizadas no questionário e na prova matemática, ficou evidente a situação do ensino de geometria mencionada pelos participantes ao considerarem a realização de cálculos e medidas como sendo de grande dificuldade na aprendizagem. Isso implica que esse ensino pouco tem dado atenção ao desenvolvimento do conhecimento declarativo dos alunos a respeito dos conceitos de polígonos e poliedros.

A pesquisa de Pavanello (1993), muito referenciada nos estudos que abordam o ensino de geometria, mostrou que o ensino de geometria estava em um estado de abandono na rede escolar, o conteúdo se localizava ao final do livro didático e, muitas vezes, o professor terminava o ano letivo sem abordá-lo de forma efetiva. Passados quinze anos dessa constatação, pode-se perceber que a utilização de softwares geométricos, a presença do conteúdo geométrico no início ou no meio dos capítulos de alguns livros didáticos, os livros paradidáticos e o uso de materiais como geoplanos, mosaicos etc. têm se caracterizado como avanços na melhoria do ensino de conceitos geométricos. Apesar desse pequeno avanço, as pesquisas, como as apresentadas na revisão bibliográfica, ainda apontam para a necessidade de melhorias no ensino da geometria, tendo em vista as dificuldades dos alunos e as que se encontram na formação inicial do professor. Em relação aos professores em exercício, as políticas educacionais deveriam enfatizar mais a formação continuada, através de cursos que não tenham apenas o objetivo de apresentar uma metodologia (a conhecida “receita” de como ensinar), mas que contemple a revisão/ensino de conceitos geométricos.

Sobre as entrevistas realizadas, considera-se que pode ter havido falha nos modos de conduzi-las, pois surgiram dificuldades para explorar o que os participantes estavam pensando, pois algumas explicações apresentadas nos quadros da segunda fase não estavam descritas. Depois de ouvir as gravações, foi identificado que faltou maior intervenção para obter respostas mais significativas dos participantes. Faltou um estudo preliminar com um ou dois indivíduos, talvez alunos da graduação em Matemática, para poder entrevistá-los e tirar conclusões sobre a forma de se apropriar de melhores resultados.

Em suma, a maioria dos resultados encontrados no presente estudo pode ser peculiar à unidade escolar investigada, necessitando de novas investigações em outras escolas. Pelas pesquisas apresentadas na revisão bibliográfica e a deste estudo, parece que o ensino de geometria nos moldes de uma boa formação conceitual ainda está distante dos objetivos previstos para a educação escolar básica em Matemática. Acredita-se que só com disposição e vontade com vistas na melhoria do ensino de geometria é que os resultados conseguidos com o estudo poderão fazer a diferença nas práticas dos professores.

8.2 Implicações do estudo

O presente estudo analisou o conhecimento declarativo de polígonos e poliedros através de duas fases: uma em que foram aplicados uma prova matemática e testes de atributos definidores, exemplos e não-exemplos e de relações subordinadas e supra-ordenadas e outra que se constituiu em entrevistas com participantes para verificar como estavam pensando sobre os conceitos investigados.

Como os resultados mostraram que não houve um domínio esperado dos conceitos, domínio que deveria ser proveniente de séries anteriores, é necessário que professores que ministram aulas de Matemática, nesse caso, geometria, se atentem para as formas de como seus alunos podem formar os conceitos geométricos em níveis de pensamento mais complexos.

Algumas pesquisas da revisão bibliográfica mostraram que a compreensão dos conceitos geométricos pode ser favorecida com um trabalho que envolva visualização e representação plana de formas geométricas, percepção, materiais manipulativos e a utilização de softwares geométricos. Esse trabalho poderia auxiliar os participantes da presente pesquisa no desenvolvimento dos conceitos de polígonos e poliedros, pois apresentaram resultados desfavoráveis para alunos que estão no ensino médio.

Um trabalho em sala de aula preocupado na maneira como os alunos fazem a diferenciação de polígonos e poliedros pode levar em consideração a investigação de como o fazem por meio de seus atributos definidores. Cada conceito é definido em termos de seus atributos definidores que correspondem a propriedades que os diferenciam de outros conceitos (KLAUSMEIER e GOODWIN, 1977). É preciso que sejam identificados todos os atributos, pois vários conceitos podem apresentar atributos comuns, como, por exemplo, o de figura tridimensional, compartilhado por poliedros e corpos redondos como o cilindro.

Uma boa estratégia para analisar o conhecimento dos alunos sobre os atributos é fornecer uma quantidade de exemplos de polígonos e uma quantidade de não-exemplos, pois para se determinar o que significa um conceito é necessário analisar o que não significa.

Muitos professores têm realizado o ensino de geometria apenas por meio de um único exemplo como no caso do triângulo eqüilátero, que sempre é apresentado na mesma posição, freqüentemente utilizado para introduzir fórmulas e realizar cálculos e pouco destinado ao trabalho conceitual. Esse tipo de trabalho pode prejudicar o aluno na formação de um conceito geométrico, como mostrado por Ferreira e Correia (2007), ao investigarem a percepção geométrica, em que alunos do ensino médio acharam que se mudasse a posição da folha que estava desenhado um triângulo, ele não seria a mesma figura. Outros professores, atuando no ensino médio, exploram as figuras espaciais apenas para aplicação de cálculos de volume e de outras relações. E existem aqueles professores que ainda reforçam a idéia que a geometria está em estado de abandono ao darem maior ênfase para conteúdos aritméticos e algébricos por não dominarem tais conceitos geométricos.

> Nas escolas observa-se um engajamento, ainda tímido, na retomada da Geometria dentro das aulas de Matemática como domínio a ser explorado. Ainda são encontrados alguns docentes que evitam lecionar esses conceitos por não conhecê-los (REZI-DOBARRO, 2007, p. 155).

O ensino voltado à identificação de atributos definidores e exemplos e não-exemplos de polígonos e poliedros pode ser o primeiro passo para um aprofundamento de relações mais complexas. As relações de inclusão, subordinadas e supra-ordenadas, compreendem relações entre conceitos por meio de atributos definidores e correspondem a uma aplicação dos conceitos formados ao nível classificatório e formal.

Um parâmetro para os professores começarem a pensar na forma de organizar instrumentos de ensino e de avaliação pode ser a sugerida por essa pesquisa, principalmente no que diz respeito aos instrumentos nela utilizados. Desse modo, corresponderia a uma base para elaborar e desenvolver novas atividades que pudessem ser aplicadas em sala de aula e investigar o que os alunos sabem sobre polígonos e poliedros.

É muito importante que os professores identifiquem os conceitos principais que devem ser aprendidos pelos alunos antes de ensiná-los, pois isso poderá possibilitar que realizem a análise de um determinado conceito através dos critérios apresentados abaixo (KLAUSMEIER e GOODWIN, 1977). No caso desta pesquisa, esses critérios foram reorganizados de acordo com a identificação dos conceitos de polígonos e poliedros, conforme exposto a seguir:

1. Conseguir uma definição de polígonos e de poliedros que estabeleça seus atributos definidores;
2. Identificar os atributos definidores de polígonos e de poliedros e alguns de seus atributos irrelevantes;
3. Identificar exemplos e não-exemplos de polígonos e de poliedros para serem usados no ensino e na avaliação;
4. Identificar a taxonomia à qual polígonos e poliedros pertencem e indicar as relações subordinadas e supra-ordenadas desses conceitos com outros;
5. Identificar alguns princípios nos quais polígonos e poliedros são incluídos como, por exemplo, "se os polígonos possuem *n* ângulos internos, então terá *n* lados";
6. Identificar tipos de problemas cuja solução irá envolver o uso de polígonos e de poliedros;
7. Identificar os nomes dos atributos de polígonos e de poliedros.

Quando o professor realiza tal análise, ele tem condições de promover um ensino desses conceitos e a utilização, por parte dos alunos, em níveis cognitivos mais apropriados (KLAUSMEIER e GOODWIN, 1977). Algumas pesquisas, como as de Crescenti (2005) e Quartieri e Rehfeldt (2007), têm mostrado que o professor apresenta falta de conhecimento de geometria em relação aos seus conceitos, formas de ensino e da linguagem geométrica. Dessa forma, é importante que o professor reflita sobre quais os conteúdos geométricos que apresenta dificuldade e buscar alternativas para saná-las como, por exemplo, programas de educação continuada em que terá a oportunidade de realizar intercâmbios de experiências com outros professores, rever/aprender conceitos geométricos e buscar metodologias apropriadas visando a uma aprendizagem significativa por parte dos alunos.

A partir desses critérios colocados por Klausmeier e Goodwin (1977), o professor poderá promover a aprendizagem dos alunos, começando com a apresentação de situações-problema que envolvem conceitos geométricos. Seria o ponto de partida, salientado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, na abordagem desses conceitos, em que o professor poderia propor atividades que envolvam atributos definidores, exemplos e não-exemplos e o estabelecimento de relações subordinadas e supra-ordenadas.

O alcance dos objetivos educacionais, propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, parece ainda estar longe de ser conseguido com o trabalho em sala de aula, conforme os resultados constatados na revisão bibliográfica. Um fator que tem contribuído para essa realidade é a formação deficitária do professor de Matemática. Assim, o trabalho em sala de aula envolvendo atividades sobre atributos definidores, exemplos e não-exemplos e o uso dos conceitos na realização e identificação de relações subordinadas e supra-ordenadas age como uma alternativa de se pensar o ensino de conceitos geométricos na consecução dos objetivos educacionais, visando a melhoria da aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, G. S. **Os software de geometria dinâmica como auxilio à visualização geométrica:** um estudo comparativo com a aprendizagem em aulas clássicas de geometria. 2004. 200f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) - Curso de Pós-Graduação em Informática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Disponível em: <http://servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=20041613100101 7110P8 >. Acesso em: 21 set. 2006.

ARAÚJO, J. **Aquisição de conceitos geométricos:** aprendizagem baseada na teoria de Van Hiele e na articulação entre álgebra e geometria. 1999. 184f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. Disponível em: <http://servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=199910132001010001P7>. Acesso em: 21 set. 2006.

AUSUBEL, D. P., NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional.** Tradução de Eva Nick. Rio de Janeiro: Interamericana Ltda, 1980.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBEM, IMPA, 1985.

BERTOLUCCI, E. A. **Ensinando e aprendendo geometria:** uma experiência com o software Cabri-Géomètre II na 5ª série do Ensino Fundamental. 2003. 224f. Dissertação (Mestrado em Metodologia de Ensino) - Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**. Uma introdução à teoria e aos métodos. Trad. Maria João Alvarez; Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, Coleção Ciências da Educação. 1994, 335p.

BRASIL. MEC/INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/>. Acesso em: 27 de jan. 2008.

BRASIL. Secretaria de educação média e tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

______. Secretaria de ensino fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: SEF/MEC, 1998.

BRITO, M. R. F. Contribuições da Psicologia Educacional à Educação Matemática. In: ______ (Org.). **Psicologia da Educação Matemática:** teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001. p.49-67.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A. **Metodologia científica:** para o uso dos estudantes universitários. 3ª ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.

CHINNAPPAN, M.; LAWSON, M.J. A framework for analysis of teacher's geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. **Journal of Mathematics Teacher education,** v8, n. 3, june, p.197-221, 2005. Disponível em: <http://www.springerlink.com.w10078.dotlib.com.br/content/l61ml7505h640261/fulltext.pdf>. Acesso em: 10 abril 2007.

COLL, C.; VALLS, E. A aprendizagem e o ensino dos procedimentos. In: COLL. C.; POZO, J. I.; SARABIA, B.; VALLS, E. **Os conteúdos na reforma:** ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. Trad. Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000, p.73-118.

COLL, C. **Psicologia e Currículo**: uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar. 5. ed. Tradução de Cláudia Schilling. São Paulo: Ática, 2001.

COOPER, L. A. Mental rotation of randon two-dimensional shapes. **Cognitive Psychology**, v7, p.20-43, 1975.

CRESCENTI, E. P. **Os professores de matemática e a geometria**: opiniões sobre a área e seu ensino. 2005. Tese (Doutorado em Metodologia de Ensino) – Programa de Pós-Graduação em Educação, UFSCar, São Carlos.

DANA, M. E. Geometria – um enriquecimento para a escola elementar. In LINDQUIST, M. M. & SHULTE, A. P. (org). **Aprendendo e ensinando geometria.** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994, p.141-155.

DIAS, M. S. S. **A importância do desenho na construção dos conceitos geométricos.** 1998. 189f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Curso de Pós-Graduação em Educação, Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro. Disponível em: <http://servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=19983031017010002P0>. Acesso em: 21 set. 2006.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria espacial, posição e métrica, 10. 5 ed. São Paulo: Atual, 1993.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria plana, 9. 5 ed. São Paulo: Atual, 1993.

ELIA, I.; GAGATSIS, A.; KYRIAKIDES, L. Young children's understanding of geometric shapes: the role of geometric models. In PATEMAN, N.; DOUGHERTY, B.; ZILIOX, J. (Eds.). **Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA**. Volume 2. Hawaii: USA, 2003, p. 349-355. Disponível em: <http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_elia.pdf>. Acesso em: 19 abril 2007.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática:** representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

FALCÃO, J. T. R. **Psicologia da Educação Matemática:** uma introdução. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

FERREIRA, A. R., CORREIA, W. M. Explorações geométricas no ensino médio. 2007. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007. Belo Horizonte - MG. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007.

FRADE, C. A dimensão tácito-explícita da aprendizagem matemática: relato de uma investigação. **Zetetiké**, v13, n. 23, p.41-62, Jan./Jun. 2005.

GARDIMAN, A. C. Q. **Uma análise de configurações geométricas interveniente no processo ensino-aprendizagem da geometria em nível de 1º grau.** 1994. 174p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Curso de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. Disponível em: <http://servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=1994651001012001P0>. Acesso em: 21 set. 2006.

GONÇALEZ, M. H. C. C.; BRITO, M. R. F. A aprendizagem de atitudes positivas em relação à Matemática. In: BRITO, M. R. F (Org.). **Psicologia da Educação Matemática:** teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001. p. 221-234.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**. Coleção. 4 ed. Reformulada. São Paulo: Atual, 2000.

INOUE, R. K. M. **Efeitos de uma seqüência de atividades na construção do conceito geométrico de quadriláteros:** observando o processo de aprendizagem em alunos de uma 6ª série, do ensino fundamental. 2004. 166f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Curso de Pós-graduação em Educação, Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí. Disponível em:

<http://servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=20045941005015003P0>. Acesso em: 07 nov. 2006.

KETELE, J. M.; ROEGIERS, X. **Metodologia da recolha de dados.** Coleção Epistemologia e Sociedade. Trad. Carlos Aboim de Brito. Lisboa: Instituto Piaget, 1993.

KLAUSMEIER, H. J.; GOODWIN, W. **Manual de Psicologia Educacional:** aprendizagem e capacidades humanas: (Tradução de Abreu, M. C. T. A.). São Paulo: Harper & Row, 1977.

KOSSLYN, S. M. **Image and brain:** the resolution of the imagery debate. Cambridge, MASS: MIT Press, 1994.

KRUTETSKII. V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.** Traduzido do russo por Joan Teller. Chigado: University of Chicago Press, 1976.

LAURO, M. M. **Percepção – construção – representação – concepção:** os quatro processos do ensino da geometria: uma proposta de articulação. 2007. 396f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-20042007-103710/>. Acesso em: 26 abril 2007.

LEVANDOSKI, A. A. **Ensino e aprendizagem da geometria através das formas e visualização espacial.** 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Curso de Pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. Disponível em: <http://teses.eps.ufsc.br/defesa/pdf/7719.pdf >. Acesso em: 09 abril 2007.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista** - SBEM, n.1, 3-13, 1995.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática:** as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 4 ed. São Paulo: Cortez, 2000.

MAGGI, L. **A utilização do computador e do programa LOGO como ferramentas de ensino de conceitos de geometria plana.** 2002. 170f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Curso de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro.

MARTINO, M. C. **O ensino de geometria na formação do oficial do Exercito Brasileiro.** 2001. Dissertação (Mestrado Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MICOTTI, M. C. O. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 199, p. 153-168.

MIZUKAMI, M. G. N. Aprendizagem da docência: conhecimento específico, contextos e práticas pedagógicas. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs). **A formação do professor que ensina matemática**: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 213-231.

NORUSIS, M. J. **SPSS for windows base system user's guide release 6.0**. Chicago, IL: SPSS INC.

OLIVEIRA, E.A.; MORELATTI, M. R. M. Os conhecimentos prévios de alunos da 5ª série do ensino fundamental*:* um caminho para a aprendizagem significativa de conceitos geométricos. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2006. Águas de Lindóia - SP. **Anais...** Águas de Lindóia: SBEM, 2006.

OLIVEIRA, L. T. F. **Habilidades espaciais subjacentes às atividades de discriminação e composição de figuras planas utilizando a Tangram e o Tegram.** 1998. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PANI, J. R. *et al.* Imagining projective transformations: aligned orientations in spatial organization. **Cognitive Psychology**, v31, p.125-167, 1996.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica:** a geometria na sala de aula. 2000. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, v1, n. 1, 7-17, 1993.

PAVANELLO, R. M.; FRANCO, V. S. A construção do conhecimento geométrico no ensino fundamental: uma análise de um episódio de ensino. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007. Belo Horizonte - MG. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007.

PEREIRA, M. R. O. **A Geometria escolar:** uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino. 2001. 84p. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao_maria_regina_pereira.pdf>. Acesso em: 07 maio 2007.

PINA, R. S. **A formação de conceitos geométricos no contexto dos projetos de trabalho mediada pelo Cabri-Géomètre.** 2002. 257p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília. Disponível em: <http://servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=200225153001010001P0>. Acesso em: 07 nov. 2006.

PIROLA, N. A.; PROENÇA, M. C.; QUINTILIANO, L. C. Um estudo sobre o desempenho de alunos do ensino médio em tarefas envolvendo o conceito de polígono e poliedro. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2003. Santos. **Anais...** Santos: SBEM, 2003.

PIROLA, N. A.; BRITO, M. R. F. A formação dos conceitos de triângulo e de paralelogramo em alunos da escola elementar. In: BRITO, M. R. F (Org.). **Psicologia da Educação Matemática:** teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001. p.85-106.

PIROLA, N. A. **Um estudo sobre a formação dos conceitos de triângulos e paralelogramos em alunos de primeiro grau**. 1995. Dissertação (Mestrado em Psicologia Educacional) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

______. **Solução de problemas geométricos:** dificuldades e perspectivas. 2000. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

POZO, J. I. A aprendizagem e o ensino de fatos e conceitos. In: COLL. C.; POZO, J. I.; SARABIA, B.; VALLS, E. **Os conteúdos na reforma:** ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. Trad. Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000, p.17-71.

PRATT, D.; DAVISON, I. Interactive Whiteboards and the construction of definitions for the kite. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 27, 2003, Hawaii. **Proceedings...** Hawaii: PME 27, volume 4, p.31-38, July, 2003. Disponível em: <http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_pratt.pdf>. Acesso em: 19 abril 2007.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. A formação conceitual em geometria: uma análise sobre polígonos e poliedros. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2006. Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia: SBEM, 2006.

PURIFICAÇÃO, I. C. **Cabri-Géomètre e teoria Van Hiele:** possibilidades e avanços na construção do conceito de quadrilátero. 1999. 228p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. Disponível em: <http://servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=199911240001016001P0>. Acesso em: 07 nov. 2006.

QUARTIERI, M.; REHFELDT, M. J. H. Investigando conceitos no ensino de geometria. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007. Belo Horizonte. **Anais...**Belo Horizonte: SBEM-MG, 2007.

REZI, V. **Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria.** 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

REZI-DOBARRO, V. **Solução de problemas e tipos de mente matemática:** relações com as atitudes e crenças de auto-eficácia. 2007. Tese (Doutorado em Psicologia Educacional) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SANTOS, L. P. **Compreendendo dificuldades de aprendizagem na articulação de conceitos geométricos**. 2002. 193p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. Disponível em: <http://servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=20021225100101200lP0>. Acesso em: 05 mar. 2007.

SÃO PAULO (Estado). **Proposta curricular para o ensino de matemática:** 2ºgrau. Secretaria da Educação, 3 ed. CENP, 1992.

SÃO PAULO (Estado). **Proposta curricular para o ensino de matemática:** 1º Grau. Secretaria da Educação. CENP, 1997.

SHEPARD, R. N.; METZLER, J. Mental rotation of three-dimensional objects. **Science**, v191, p.701-703, 1971

SHERARD III, W. H. Wy is geometry a basic skill? **Arithmetic Teacher**, Janeiro, 1981.

SILVA, C. M. **Uso do logo em sala de aula.** 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SILVA, J. N. **Compreendendo as dificuldades de aprendizagem dos alunos do CEFET-AL em geometria espacial.** 2004. 103p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. Disponível em: <http://servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=20043102400101500lP4>. Acesso em: 05 mar. 2007.

SILVA, V. A. **A formação do conceito de polígono:** um estudo metodológico. 2003. 127p. Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia, Universidade São Marcos, São Paulo. Disponível em: <http://servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=20031513304901700 2P4>. Acesso em: 18 abril 2007.

SOBER. E. **Core questions in philosophy**. Prentice Hall, 2000. Disponível em: <http://www.criticanarede.com/fil_conhecimento.html >. Acesso em: 30 dez 2007.

STERNBERG, R. J. **Psicologia Cognitiva.** Trad. Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

TEIXEIRA FILHO, D. M. **O aprendizado da geometria no ensino médio:** origens de dificuldades e propostas alternativas. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. Disponível em: <http://teses.eps.ufsc.br/defesa/pdf/7722.pdf>. Acesso em: 09 abril 2007.

VIANA, O. A. **O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais:** um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

VIANA, O. A. **O componente espacial da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e à geometria.** 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica:** suas características e perspectivas. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Curso de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro.

ANEXO I

Termo de consentimento e Termo de autorização

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO E TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Por meio dos presentes Termos, eu, Marcelo Carlos de Proença, aluno regular do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da UNESP/Bauru, solicito o seu consentimento e a sua autorização para aplicar uma prova e testes em algumas aulas de Matemática na sala de aula da escola na qual o(a) seu (sua) filho(a) encontra-se matriculado(a), bem como realizar uma entrevista posterior, caso ele seja selecionado para tal, que será gravada e cujas informações não serão divulgadas.

A prova, os testes e a entrevista correspondem à parte de minha pesquisa de mestrado que é financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e que está formulada com questões que envolvem o conteúdo de geometria. O objetivo é investigar os conhecimentos dos alunos do ensino médio a respeito de conceitos geométricos e discutir com a unidade escolar possíveis caminhos para a melhoria do ensino de geometria em sala de aula.

Em respeito às normas de ética (Resolução 196/96 do Ministério da Saúde), cumpre salientar que o interesse do projeto é o de conhecer e contribuir com a realidade do ensino na escola pública.

Estamos à disposição para fornecer os esclarecimentos adicionais julgados necessários. Aproveitamos a oportunidade para agradecer pela atenção dispensada para esta solicitação.

Bauru, 30 de outubro de 2007

____

Marcelo Carlos de Proença
UNESP/Faculdade de Ciências – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência
Fones: 31036077 / 3103-6000 e-mail: marceloproenca@yahoo.com.br

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Estou ciente de que serão aplicados uma prova e testes de geometria com meu (minha) filho(a) na escola onde se encontra matriculado(a) e será entrevistado, caso seja selecionado. Estes procedimentos fazem parte da pesquisa de Marcelo Carlos de Proença e objetivam contribuir com o ensino e a aprendizagem dos alunos. Será garantido pelo pesquisador que o nome de meu/minha filho(a) e as informações não serão divulgados. Estou ciente de que posso ter acesso às informações coletadas. Ciente de que as pessoas responsáveis deverão respeitar as normas de funcionamento desta escola, autorizo a aplicação da prova e dos testes e de uma posterior entrevista, caso meu/minha filho(a) seja selecionado(a), na escola onde está matriculado(a).

Bauru, _____ de ___________________ de _________

Nome do filho(a):____

Nome do responsável: ____

Assinatura:____

ANEXO II

Questionário informativo

Nº

QUESTIONÁRIO INFORMATIVO

Instruções: Prezado(a) aluno(a), este questionário faz parte de um estudo que estamos realizando a respeito do conhecimento declarativo em geometria. A sua colaboração é imprescindível para buscarmos melhorias no ensino e aprendizagem da Matemática.

Escola____Série_______Idade________
Sexo: (   ) Masculino   (   ) Feminino

1. Para você, o que é geometria?

2. Você gosta de geometria? Explique.

3. O que se estuda em geometria plana?

4. O que se estuda em geometria espacial?

5. Qual a sua principal dificuldade em geometria? A que você atribui essa dificuldade?

6. Qual a parte da geometria que você mais gosta? Por quê? E qual a parte que você menos gosta? Por quê?

7. Qual a série em que você mais estudou geometria?

ANEXO III

Prova matemática (Instrumento 1)

Nº

INSTRUMENTO 1

Série__________ Sexo: (   ) Masculino   (   ) Feminino

1. O que você entende por polígono? Desenhe dois tipos diferentes.

2. O que você entende por poliedro? Desenhe dois tipos diferentes.

3. Defina os seguintes termos:

Face de um poliedro: ____

Aresta de um poliedro: ____

Vértice de um poliedro: ____

Cubo: ____

Pirâmide: ____

____

4. Responda quantas arestas A, vértices V e faces F têm:

a) um cubo A:___ V:___ F:___

b) uma pirâmide de base quadrada A:___ V:___ F:___

c) um prisma triangular A:___ V:___ F:___

5. O que você entende por figuras planas? E por figuras não-planas (espacial)?

6. O que é um polígono regular? Dê dois exemplos

7. Qual o menor número de lados de um polígono?

8. Desenhe uma planificação do cubo	**9.** Desenhe uma planificação de um prisma de base triangular
10. Desenhe uma planificação de uma pirâmide de base triangular	**11.** Desenhe uma planificação de uma pirâmide de base quadrada

ANEXO IV

Teste de atributos definidores (Instrumento 2)

Nº

INSTRUMENTO 2

Série__________ Sexo: (   ) Masculino   (   ) Feminino

Instrução: Prezado(a) aluno(a), você irá responder um teste contendo algumas afirmações sobre polígonos e poliedros em que deverá colocar **V** para as afirmações verdadeiras e **F** para as falsas. Solicitamos a gentileza de não deixar nenhuma afirmação em branco. Agradecemos a sua colaboração!

(   ) Todo polígono é uma figura plana
(   ) Existem polígonos que não são figuras planas
(   ) Todos os polígonos são formados por segmentos de reta
(   ) Existem polígonos que não são formados por segmentos de reta
(   ) Os polígonos são figuras abertas
(   ) Todos os polígonos são figuras fechadas
(   ) Todos os polígonos são pretos
(   ) Triângulos e quadriláteros não são exemplos de polígonos
(   ) Todos os polígonos são figuras simples
(   ) Nem todos os polígonos são figuras simples
(   ) Os polígonos possuem três dimensões
(   ) Os polígonos são bidimensionais
(   ) Os polígonos são também chamados de poliedros
(   ) Todos os polígonos são convexos
(   ) Todos os poliedros são tridimensionais
(   ) Existem poliedros que são figuras planas
(   ) As faces dos poliedros são polígonos
(   ) Todos os poliedros são formados por segmentos de reta
(   ) Todos os poliedros são formados por vértices, faces e arestas
(   ) Existem poliedros que não possuem vértices
(   ) Prismas e pirâmides são formados por vértices, faces e arestas
(   ) O cilindro é um poliedro, cujas faces são planas
(   ) Planificando um poliedro obtemos figuras planas
(   ) Se um poliedro possui faces planas, então a esfera não é um poliedro
(   ) Não existem poliedros cujas faces são pentágonos
(   ) Todos os poliedros são brancos
(   ) Um cubo é um poliedro, o qual possui faces formadas por quadrados
(   ) A pirâmide é um poliedro formada somente por triângulos

Após ter resolvido o teste, comente sobre as dificuldades que teve para realizá-lo.

____

____

____

____

____

ANEXO V

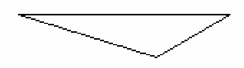
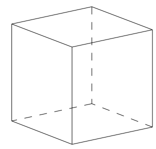
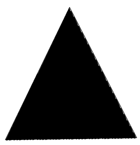
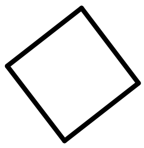
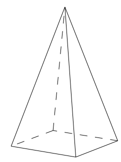
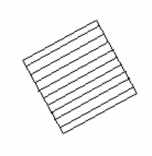
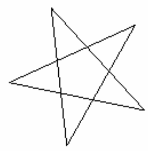
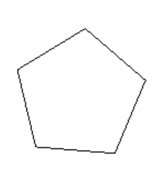
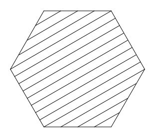
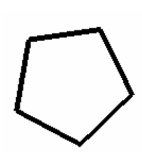
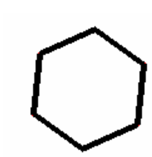
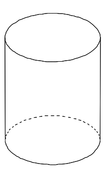
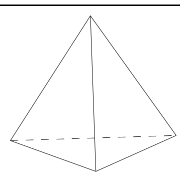
Teste de exemplos e não-exemplos (Instrumento 3)

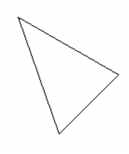
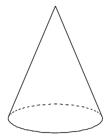
Nº

INSTRUMENTO 3

Série__________ Sexo: (   ) Masculino   (   ) Feminino

Instrução: Prezado(a) aluno(a), você irá responder um teste contendo algumas formas geométricas. Você deverá assinalar com "X" a alternativa (uma apenas) que corresponde à figura dada. Solicitamos a gentileza de não deixar nenhuma resposta em branco. Obs: nda: nenhuma das anteriores.

1)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda	2)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda
3)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda	4)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda
5)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda	6)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda
7)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda	8)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda
9)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda	10)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda
11)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda	12)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda
13)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda	14)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda
15)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda	16)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda

17)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda	18)  ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda
19) Elemento 1 ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda	20) Elemento 2 ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda
21) Elemento 3 ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda	22) Elemento 4 ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda
23) Elemento 5 ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda	24) Elemento 6 ( ) Polígono ( ) Poliedro ( ) nda

Ao final deste teste, responda quais as dificuldades que encontrou para a sua realização.

ANEXO VI

Teste de relações subordinadas e supra-ordenadas (Instrumento 4)

Nº

INSTRUMENTO 4

Série__________ Sexo: (   ) Masculino(   ) Feminino

Instrução: Prezado(a) aluno(a), você irá responder um teste contendo algumas afirmações sobre relações entre polígonos e entre poliedros em que deverá colocar **V** para as afirmações verdadeiras e **F** para as falsas. Solicitamos a gentileza de não deixar nenhuma afirmação em branco. Agradecemos a sua colaboração!

(   ) Todo polígono formado por quatro segmentos de reta é um quadrilátero.

(   ) Todo polígono cuja soma dos ângulos internos medem 360º não são quadriláteros.

(   ) Todo quadrado é losango.

(   ) Todo losango é retângulo.

(   ) Se o polígono é formado por três ângulos internos então ele é um triângulo.

(   ) Todo polígono que é quadrado também é retângulo.

(   ) Todo polígono que apresenta exatamente cinco segmentos de reta é pentágono.

(   ) Existem triângulos que são quadriláteros.

(   ) Existem quadriláteros que não são paralelogramos.

(   ) O losango é um paralelogramo.

(   ) Se o triângulo possui um ângulo reto ele é o triângulo retângulo.

(   ) Todo triângulo que possui um ângulo reto (90º) é triângulo isósceles.

(   ) Todo polígono é uma figura fechada e formada por segmentos de reta

(   ) Todos os triângulos eqüiláteros são triângulos isósceles.

(   ) Existem triângulos retângulos que são triângulos eqüiláteros.

(   ) Algum prisma é paralelepípedo.

(   ) Toda pirâmide que tem exatamente quatro faces laterais triangulares é uma pirâmide quadrangular.

(   ) Se um poliedro apresenta duas faces (bases) paralelas e congruentes e faces laterais formadas por paralelogramos, então é um prisma.

(   ) O cubo e o Prisma de base pentagonal não são poliedros.

(   ) Toda pirâmide é um poliedro.

(   ) Todo cubo é um paralelepípedo.

(   ) Todo tetraedro é uma pirâmide de base triangular.

(   ) Se um prisma regular possui faces laterais retangulares então ele é um paralelepípedo.

(   ) Toda pirâmide de base triangular é um tetraedro.

(   ) Todo poliedro formado por quatro faces quadradas é denominado cubo.

(   ) Algum poliedro regular é o tetraedro.

(   ) Todos os prismas e pirâmides são poliedros.

(   ) Toda pirâmide é um poliedro que é determinado pelo tipo de polígono que forma a sua base.

(   ) Prismas e Pirâmides são poliedros que possuem faces, vértices e arestas.

(   ) A pirâmide de base triangular é um prisma.

ANEXO VII

Tabelas

Tabela 38: Porcentagem de acertos dos participantes por gênero nos atributos definidores.

Questão	Porcentagem		Teste qui-quadrado	
	Masculino	Feminino	$\chi^2_{(1)}$	p-valor
1. Todo polígono é uma figura plana	49,5	40,4	1,585	0,208
2. Existem polígonos que não são figuras planas	47,4	39,1	1,305	0,253
3. Todos os polígonos são formados por segmentos de reta	81,1	78,2	0,049	0,824
4. Existem polígonos que não são formados por segmentos de reta	72,6	71,8	0,013	0,910
5. Os polígonos são figuras abertas	88,4	84,6	0,188	0,664
6. Todos os polígonos são figuras fechadas	84,2	76,9	1,113	0,291
7. Todos os polígonos são pretos	90,5	91,7	0,630	0,427
8. Triângulos e quadriláteros não são exemplos de polígonos	54,7	50,6	0,211	0,646
9. Todos os polígonos são figuras simples	45,3	41,0	0,268	0,605
10. Nem todos os polígonos são figuras simples	28,4	32,1	0,502	0,479
11. Os polígonos possuem três dimensões	53,7	57,1	0,484	0,486
12. Os polígonos são bidimensionais	60,0	52,6	0,928	0,335
13. Os polígonos são também chamados de poliedros	60,0	51,9	1,129	0,288
14. Todos os polígonos são convexos	60,0	60,3	0,055	0,814
15. Todos os poliedros são tridimensionais	64,2	60,3	0,174	0,676
16. Existem poliedros que são figuras planas	32,6	32,1	0,000	0,988
17. As faces dos poliedros são polígonos	65,3	62,2	0,077	0,781
18. Todos os poliedros são formados por segmentos de reta	36,8	26,3	2,734	0,098
19. Todos os poliedros são formados por vértices, faces e arestas	73,7	75,6	0,379	0,538
20. Existem poliedros que não possuem vértices	74,7	75,0	0,102	0,749
21. Prismas e pirâmides são formados por vértices, faces e arestas	83,2	84,0	0,272	0,609
22. O cilindro é um poliedro, cujas faces são planas	53,7	62,2	2,271	0,132
23. Planificando um poliedro obtemos figuras planas	62,1	73,1	4,152	0,042
24. Se um poliedro possui faces planas, então a esfera não é um poliedro	56,8	47,4	1,622	0,203
25. Não existem poliedros cujas faces são pentágonos	61,1	60,9	0,030	0,861
26. Todos os poliedros são brancos	77,9	79,5	0,360	0,549
27. Um cubo é um poliedro, o qual possui faces formadas por quadrados	73,7	75,6	0,379	0,538
28. A pirâmide é um poliedro formada somente por triângulos	46,3	37,8	1,409	0,235

Tabela 39: Porcentagem de acertos dos participantes por gênero nos exemplos e não-exemplos.

Questão	Porcentagem		Teste qui-quadrado	
	Masculino	Feminino	$\chi^2_{(1)}$	p-valor
1. Triângulo	66,3	61,5	0,298	0,585
2. Cubo	51,6	47,4	0,227	0,634
3. Triângulo preto	57,9	66,0	2,218	0,136
4. Figura aberta	74,7	75,6	0,189	0,664
5. Quadrado borda espessa	73,7	76,9	0,724	0,395

6.	Pirâmide BQ (desenhada)	60,0	51,3	1,348	0,246
7.	Quadrado hachurado	57,9	61,5	0,582	0,446
8.	Triângulo hachurado	55,8	55,8	0,031	0,860
9.	Figura estrelada	20,0	21,2	0,090	0,764
10.	Triângulo com um lado circular	36,8	30,1	0,968	0,325
11.	Pentágono normal	81,1	76,3	0,329	0,566
12.	Hexágono hachurado	63,2	57,1	0,570	0,450
13.	Pentágono borda espessa	80,0	73,7	0,694	0,405
14.	Hexágono borda espessa	73,7	67,3	0,662	0,416
15.	Cilindro	28,4	23,1	0,724	0,395
16.	Tetraedro	58,9	63,5	0,827	0,363
17.	Triângulo isósceles	61,1	57,1	0,185	0,667
18.	Cone	21,1	12,2	3,267	0,071
19.	Cubo	60,0	42,3	6,483	0,011
20.	Prisma base triangular	64,2	69,2	1,085	0,297
21.	Quadrilátero	62,1	43,6	7,107	0,008
22.	Círculo	69,5	58,3	2,394	0,122
23.	Pirâmide base quadrada	66,3	66,0	0,031	0,861
24.	Esfera	62,1	60,9	0,000	0,991

Tabela 40: Porcentagem de acertos dos participantes por gênero nas relações subordinadas e supra-ordenadas.

Questão		Porcentagem		Teste qui-quadrado	
		Masculino	Feminino	$\chi^2_{(1)}$	p-valor
1.	Todo polígono formado por quatro segmentos de reta é um quadrilátero.	75,8	86,5	6,094	0,014
2.	Todo polígono cuja soma dos ângulos internos medem 360º não são quadriláteros.	54,7	66,0	3,886	0,049
3.	Todo quadrado é losango.	45,3	38,5	0,853	0,356
4.	Todo losango é retângulo.	71,6	64,1	0,965	0,326
5.	Se o polígono é formado por três ângulos internos então ele é um triângulo.	80,0	76,9	0,070	0,792
6.	Todo polígono que é quadrado também é retângulo.	49,5	48,1	0,003	0,954
7.	Todo polígono que apresenta exatamente cinco segmentos de reta é pentágono.	83,2	80,1	0,066	0,797
8.	Existem triângulos que são quadriláteros.	67,4	54,5	3,263	0,071
9.	Existem quadriláteros que não são paralelogramos.	56,8	50,0	0,771	0,380
10.	O losango é um paralelogramo.	62,1	58,3	0,154	0,695
11.	Se o triângulo possui um ângulo reto ele é o triângulo retângulo.	76,8	80,8	1,082	0,298
12.	Todo triângulo que possui um ângulo reto (90º) é triângulo isósceles.	53,7	50,6	0,090	0,764
13.	Todo polígono é uma figura fechada e formada por segmentos de reta	75,8	75,6	0,064	0,800
14.	Todos os triângulos eqüiláteros são triângulos isósceles.	36,8	35,3	0,018	0,894
15.	Existem triângulos retângulos que são triângulos eqüiláteros.	50,5	49,4	0,000	0,985

16.	Algum prisma é paralelepípedo.	41,1	44,9	0,531	0,466
17.	Toda pirâmide que tem exatamente quatro faces laterais triangulares é uma pirâmide quadrangular.	74,7	63,5	2,571	0,109
18.	Se um poliedro apresenta duas faces (bases) paralelas e congruentes e faces laterais formadas por paralelogramos, então é um prisma.	42,1	46,2	0,586	0,444
19.	O cubo e o Prisma de base pentagonal não são poliedros.	60,0	55,8	0,219	0,640
20.	Toda pirâmide é um poliedro.	49,5	67,3	8,865	0,003
21.	Todo cubo é um paralelepípedo.	60,0	42,3	6,483	0,011
22.	Todo tetraedro é uma pirâmide de base triangular.	44,2	52,6	2,055	0,152
23.	Se um prisma regular possui faces laterais retangulares então ele é um paralelepípedo.	48,4	41,0	0,996	0,318
24.	Toda pirâmide de base triangular é um tetraedro.	51,6	42,9	1,379	0,240
25.	Todo poliedro formado por quatro faces quadradas é denominado cubo.	43,2	35,3	1,249	0,264
26.	Algum poliedro regular é o tetraedro.	44,2	40,4	0,209	0,647
27.	Todos os prismas e pirâmides são poliedros.	61,1	66,7	1,227	0,268
28.	Toda pirâmide é um poliedro que é determinado pelo tipo de polígono que forma a sua base.	54,7	59,0	0,702	0,402
29.	Prismas e Pirâmides são poliedros que possuem faces, vértices e arestas.	74,7	71,2	0,124	0,725
30.	A pirâmide de base triangular é um prisma.	46,3	42,3	0,227	0,634

unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Bauru

Faculdade
de Ciências

O **Comitê de Ética em Pesquisa** da **Faculdade de Ciências** da Universidade Estadual Paulista – **UNESP**, em sua **35ª Reunião Ordinária** realizada no dia **14 de novembro de 2007,** no Prédio do STI da **Faculdade de Ciências** da **UNESP**, Campus de Bauru, às 09h00, após análise do parecer emitido pelo relator **APROVA** o projeto **"Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria", Processo nº 2070/46/01/07,** sob responsabilidade do Professor Doutor Nelson Antonio Pirola.

Bauru (SP), 14 de novembro de 2007

PROF. DR. PAULO NORONHA LISBOA FILHO
Coordenador do Comitê de Ética em Pesquisa

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Av. Engº Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01 - Vargem Limpa - Bauru-SP - CEP: 17.033-360
Fone: (14) 3103-6187 - email: celiarf@fc.unesp.br