



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Câmpus de Presidente Prudente

# Fractais e Sistemas Dinâmicos

Thiago Martins da Silva

Orientadora: Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Setembro de 2022



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

## **Fractais e Sistemas Dinâmicos**

Thiago Martins da Silva

Orientadora: Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Setembro de 2022

S586f	<p data-bbox="470 1361 702 1393">Silva, Thiago Martins</p> <p data-bbox="494 1402 1181 1473">Fractais e Sistemas Dinâmicos / Thiago Martins Silva. -- , 2022 105 p. : il.</p> <p data-bbox="470 1527 1197 1635">Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, Orientadora: Tatiana Miguel Rodrigues</p> <p data-bbox="470 1684 1197 1756">1. Matemática. 2. Sistemas Dinâmicos. 3. Fractais. 4. Matemática aplicada. I. Título.</p>
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Fractais e sistemas Dinâmicos

**AUTOR: THIAGO MARTINS DA SILVA**

**ORIENTADORA: TATIANA MIGUEL RODRIGUES**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Profa. Dra. TATIANA MIGUEL RODRIGUES (Participação Virtual)  
Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru

Prof. Dr. FABIANO BORGES DA SILVA (Participação Virtual)  
Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru

Prof. Dr. GUSTAVO ANTONIO PAVANI (Participação Virtual)  
Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul

Presidente Prudente, 02 de setembro de 2022



# Resumo

---

Fractais são estruturas matemáticas que surgiram para definir formas existentes na realidade e que a geometria clássica não é capaz de descrever, como nuvens e árvores, por exemplo. Estes, não são polígonos, objetos circulares ou nenhuma outra forma que se é conhecida, eles são algo a mais, um fractal, como denominou Mandelbrot. Porém, a teoria sobre essas formas diferentes não se resume a isso, há uma fundamentação matemática bem formalizada em Sistemas Dinâmicos que vai além da Geometria Fractal, suas aplicações são inúmeras e em diversas áreas. Assim, esta dissertação estuda a parte teórica de fractais a partir de Sistemas de Funções Iteradas para, no final, estudar algumas aplicações dessa teoria.

Palavras-Chave: *Fractal, Sistema Dinâmico, IFS, Dimensão Fractal.*



# Abstract

---

Fractals are Mathematical Structures which arise to define forms that exist in reality and classical geometry was not capable of describing it, like clouds and trees, as an example. These are not polygons, circular objects, nor any other forms that are known, they are something else, a Fractal, as Mandelbrot denominated it. However, the theory about these forms is not restricted only to that, there is a Mathematical fundamentation well formalized in Dynamical Systems going beyond Fractal Geometry, their applications are countless and in many areas. Therefor, this dissertation study the theoretical part of fractals made by Iterated Function System to, in the final, study some applications of the theory.

Keywords: *Fractal, Dynamical System, IFS, Fractal Dimension.*



# Lista de Figuras

---

2.1	Globo terrestre . . . . .	23
2.2	Sequência de Conjuntos . . . . .	29
3.1	Conjunto de Cantor . . . . .	32
3.2	Semelhança . . . . .	34
3.3	Semelhanças . . . . .	34
3.4	Transformação de Möbius . . . . .	35
3.5	Transformação na Esfera . . . . .	36
3.6	Transformação Analítica . . . . .	37
4.1	Triângulo de Sierpinski . . . . .	45
4.2	Conjunto de Condensação . . . . .	46
4.3	Atrator do IFS . . . . .	46
4.4	Fractal THI . . . . .	48
4.5	Endereço de Pontos em Fractais . . . . .	50
4.6	Endereço de Pontos em Fractais . . . . .	51
4.7	Malha de quadrados no plano . . . . .	56
5.1	Gráfico de $\dot{x} = \text{sen } x$ . . . . .	65
5.2	Modelo Logístico . . . . .	66
5.3	Órbita de um ponto no plano . . . . .	67
5.4	Sistema $\{[0, 1]; 2x \bmod 1\}$ . . . . .	69
7.1	Monalisa . . . . .	89
7.2	Samambaia . . . . .	89
7.3	Folha de Bordo Azul . . . . .	89
7.4	Folha de Bordo Vermelha . . . . .	89
7.5	Samambaia Verde . . . . .	90
7.6	Samambaia Azul . . . . .	90
A.1	Constantes do Primeiro IFS . . . . .	100
A.2	Constantes do Segundo IFS . . . . .	101
A.3	Código Parte 1 . . . . .	102
A.4	Código Parte 2 . . . . .	103
A.5	Código Parte 3 . . . . .	104
A.6	Código Parte 4 . . . . .	105



# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>8</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>9</b>
<b>Capítulos</b>	
<b>1 Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2 Espaços Métricos</b>	<b>19</b>
2.1 Métrica . . . . .	19
2.2 Sequência de Cauchy . . . . .	20
2.3 Conjuntos Compactos . . . . .	21
2.4 Espaço dos Fractais . . . . .	24
2.5 Completude do Espaço dos Fractais . . . . .	25
<b>3 Transformações Algébricas</b>	<b>31</b>
3.1 Transformações e suas Classificações . . . . .	31
3.1.1 Transformação na Reta Real . . . . .	31
3.1.2 Transformação no Plano Real . . . . .	32
3.1.3 Transformação de Möbius . . . . .	34
3.1.4 Transformação Analítica . . . . .	35
3.2 Mudança de Coordenadas . . . . .	37
3.3 Contração . . . . .	38
<b>4 Fractal</b>	<b>41</b>
4.1 Contração no Espaço dos Fractais . . . . .	41
4.2 Transformação e Conjunto de Condensação . . . . .	44
4.3 Teorema da Colagem de Barnsley . . . . .	46
4.4 Dependência dos Fractais sobre os Parâmetros . . . . .	48
4.5 Endereço de Pontos em Fractais . . . . .	50
4.6 Transformações do Espaço de Código ao de Fractais . . . . .	52
4.7 Dimensão Fractal . . . . .	54
4.7.1 Determinação da Dimensão Fractal . . . . .	57
4.7.2 Dimensão de Hausdorff-Besicovitch . . . . .	59

<b>5</b>	<b>Sistemas Dinâmicos</b>	<b>61</b>
5.1	Introdução . . . . .	61
5.1.1	Principais Características . . . . .	63
5.2	Sistemas Dinâmicos Discretos . . . . .	65
5.3	Dinâmica nos Fractais . . . . .	67
5.4	Equivalência de Sistemas . . . . .	67
5.5	Dinâmica Caótica em Fractais . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Teoria da Medida</b>	<b>71</b>
6.1	Conceitos Iniciais . . . . .	71
6.1.1	Álgebra . . . . .	71
6.1.2	Medida . . . . .	72
6.1.3	Medida Exterior . . . . .	74
6.1.4	Medida de Borel na Reta Real . . . . .	76
6.2	Integração . . . . .	77
6.2.1	Funções Mensuráveis . . . . .	77
6.2.2	Integração de Funções não Negativas . . . . .	79
6.3	Random Iteration Algorithm . . . . .	82
6.3.1	O Espaço Métrico Compacto $(\mathbf{P}(x), d)$ . . . . .	82
6.3.2	Contração em $(\mathbf{P}(X), d)$ . . . . .	82
6.3.3	Teorema de Elton . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Aplicações</b>	<b>87</b>
7.1	Colour Stealing . . . . .	87
7.1.1	Algoritmo . . . . .	88
7.1.2	Aplicando o método . . . . .	89
7.2	Aplicação da Dimensão de Hausdorff . . . . .	90
7.2.1	Estrutura Fractal . . . . .	91
7.2.2	Algoritmo . . . . .	91
7.2.3	Cálculo de $\mathcal{H}^s(F)$ . . . . .	92
7.2.4	Cálculo de $D_H(F)$ . . . . .	93
7.2.5	<i>Support Vector Machine</i> . . . . .	93
	<b>Referências</b>	<b>96</b>
	<b>Referências</b>	<b>97</b>
	<b>Apêndices</b>	
<b>A</b>	<b>Informações do <i>Colour Stealing</i></b>	<b>99</b>

# Introdução

Fractais são objetos matemáticos que trazem uma grande riqueza de detalhes, além de serem associados a figuras peculiares e interessantes. Porém, mesmo sendo um tópico bastante estudado, principalmente por ser da área de sistemas dinâmicos, não existe um texto que formaliza e define todos esses objetos de forma única, pois é uma classe bem ampla. Todas as definições trazidas até hoje por grandes matemáticos, como o próprio Mandelbrot que foi o primeiro a utilizar o termo, não contemplava todos os fractais, sempre existe um que não cumpre todas as condições. Assim, para se referir a eles, é utilizado um contexto mais amplo a partir imagens e conceitos como, por exemplo, possuir (ou não) autossimilaridade, tanto parcial quanto total. A teoria sobre fractais surgiu através de diversos trabalhos de matemáticos famosos como Weierstrass, Cantor, Carathéodory, Hausdorff e muitos outros, para quem tem interesse nesses trabalhos preliminares, é recomendado o livro *Classics on Fractals*, de Edgar [8], uma coletânea de trabalhos e artigos que contribuíram de alguma forma para a criação do termo Fractal por Mandelbrot anos depois. Como, por exemplo, o trabalho de Hausdorff sobre dimensões e medidas, a qual mostrava-se possível a existência de uma dimensão não inteira. Após alguns anos, foi observado existir um tipo de estrutura que possuía sempre uma dimensão fracionária, por isso que Mandelbrot colocou essa condição na definição de fractal. Porém, foi descoberto posteriormente fractais com dimensão inteira, como a curva de Hilbert. Devido a inúmera quantidade de objetos que se enquadram como fractal se torna difícil escrever uma definição formal ao mesmo. É inegável também sua relação a Sistemas Dinâmicos, por isso, segue um pouco da evolução histórica até chegar em fractais e sua relação com eles, o texto se baseia no livro de Layek [13].

O estudo do comportamento de um sistema matemático através do tempo e sua dependência às condições iniciais começou por volta de 1880. É bem conhecido que soluções analíticas (ou forma fechada) de equações não lineares geralmente não podem ser obtidas, dado o grau de complexidade de encontrá-las, exceto por algumas específicas. E ainda, o comportamento da solução em diferentes condições iniciais ou suas características assintóticas são, às vezes, difíceis de determinar a partir de soluções de forma fechada. Nessa situação, cientistas sentiram a necessidade de desenvolver um método que determinasse recursos qualitativos do sistema, em contrapartida, aos quantitativos já existentes. O matemático francês Henri Poincaré (1854 – 1912) foi o pioneiro na abordagem qualitativa, sua combinação de análise com geometria foi um poderoso conceito para caracterizar o comportamento de sistemas, o que o consolidou como “pai da dinâmica não linear”.

O processo de evolução do tempo, descrito por equações lineares ou não lineares, define o que se chama de Sistema Dinâmico. O assunto se iniciou, informalmente, a partir de diferentes pontos de vista dos cientistas da área, começando no meio do século XVII

com Isaac Newton (1643 – 1727) inventando o cálculo, as equações diferenciais, as leis de movimento e a gravitação universal. Na abordagem qualitativa, o comportamento local e assintótico de uma equação podiam ser explicados, o poder dessa abordagem e a sua necessidade incentivaram cientistas como Lyapunov (1857 – 1918), Birkhoff (1908 – 1944), e um grupo de matemáticos de escolas russas a enriquecer os estudos na área.

Poincaré estudou sistemas contínuos devido a uma competição internacional em honra ao 60<sup>o</sup> aniversário de Oscar II, rei da Suécia e da Noruega, que propôs quatro questões. Ele optou pela estabilidade do sistema solar, ganhando o prêmio. Apesar de a publicação ter diferenças significativas do original por conta de um erro. Em seu estudo, achou conveniente trocar o fluxo contínuo do tempo por um análogo discreto.

Em mecânica celeste, Newton resolveu problemas de dois corpos, como, por exemplo, o movimento da terra em torno do sol, conhecida como a lei do quadrado inverso. Muitos cientistas tentaram estender os resultados para três ou mais corpos, demonstrando-se algo extremamente difícil e, até o momento, a situação parecia sem esperança. Assim, ao invés de procurar a posição exata dos planetas, os questionamentos foram se alterando para perguntas como: O sistema solar será sempre estável? Poincaré planejou um novo caminho analítico embasado na abordagem qualitativa. Eventualmente, originou-se a linha de pesquisa em “Sistemas Dinâmicos”. As escolas russas trouxeram contribuições importantes às teorias matemáticas de estabilidade da evolução dos sistemas, assim como o próprio Lyapunov. A definição matemática de estabilidade, dada a partir do teorema de Lyapunov, é amplamente utilizada para análise de estabilidade de certos sistemas. Assim como o expoente de Lyapunov que, com o crescimento (ou decaimento) exponencial pelo tempo, tem-se a ideia de quantificar movimentos caóticos.

Na primeira metade do século XX, dinâmicas não lineares foram principalmente associadas a osciladores não lineares e suas aplicações na física, circuitos elétricos, engenharia mecânica e ciências biológicas. Oscilações ocorrem amplamente na natureza, sendo exploradas por vários dispositivos criados pelo homem. Diversos cientistas fizeram formulações matemáticas e analisaram diferentes aspectos desse fenômeno. Balthasar van der Pol fez significativas contribuições para a área, como ciclos limites, osciladores, relaxamento de osciladores em circuitos elétricos não lineares e fenômeno de bifurcação. A equação de van der Pol aparece primeiramente no artigo intitulado “On relaxation Oscillation” publicado pela Revista Filosófica em 1926. O modelo descrito no trabalho é um exemplo de sistema com ciclo limite. Ele e van der Mask utilizaram essas equações para descrever tanto o batimento cardíaco, quanto um modelo elétrico do coração. Ciclos limites foram descobertos posteriormente em sistemas mecânicos e biológicos, informalmente, uma órbita é algo que descreve o processo de evolução de determinado objeto através do tempo, é como se descrevesse a transformação desse objeto até o estado que chegará ao fim da dinâmica, quando este processo fica se repetindo periodicamente, esta orbita recebe o nome de ciclo como, por exemplo, o movimento da Terra criando o que se conhece como dia e noite, com o passar do tempo, é vista essa mesma representação se repetindo. Assim, Ciclo Limite é um conjunto formado por órbitas que em algum momento se tornará um ciclo, ou seja, a partir de determinado período, começará a se repetir. Sua existência é importante cientificamente e sua estabilidade exprime osciladores autossustentáveis. Uma definição mais formal é dada no capítulo de sistemas dinâmicos.

Na natureza, existem espécies que dependem de outras, pois caso contrário, seriam extintas, gerando uma certa harmonia. Coexistência e, às vezes, exclusão mutua ocorrem na realidade quando uma das espécies se tornam extintas. Alfred James Lotka (1880 – 1949), Vito Volterra (1860 – 1940), Ronald Fisher (1890–1962) e Nicols Rashevsky (1899 – 1972) são alguns dos cientistas que estudaram esse tópico. A interação dinâmica das espécies, seus modelos matemáticos, e comportamentos assintóticos são ferramentas úteis

na dinâmica de população entre as espécies, visto que possuem um grande impacto na ecologia e no meio ambiente. O modelo Presa-Predador de duas espécies, em que uma caça a outra, foi formulada por Lotka em 1910 e futuramente por Volterra em 1926, gerando o conhecido modelo Lotka-Volterra. Na realidade, a população de presas e de predadores crescem e diminuem periodicamente e os valores de máximo e mínimo são relativamente constantes. Porém, não é verdade para esse modelo matemático, pois diferentes condições iniciais geram soluções com diferentes amplitudes. Então, Holling e Tanner (1975) construíram um modelo matemático de Presa-Predador em que as soluções possuem as mesmas amplitudes, independente das condições iniciais. O ecologista matemático Robert May (1972) e muitos outros formularam diversos modelos de população úteis para a análise da dinâmica.

A percepção do imprevisível nos fenômenos naturais e sociais tem grande impacto nos pensamentos humanos e também na evolução científica, gerando um longo conflito entre determinismo e livre arbítrio, na filosofia. No século XIX, o engenheiro francês Joseph Fourier (1770 – 1830) escreveu: “O estudo da natureza é o recurso mais produtivo de descobertas matemáticas. Oferecendo um objetivo específico, provém vantagens de excluir problemas vagos e cálculos desnecessários. O que também significa formular análises matemáticas e isolar os aspectos mais importantes para conhecer e conservar. Esses elementos fundamentais são aqueles que aparecem em todos os efeitos naturais.” Entretanto, modelos como a Mecânica Newtoniana, por exemplo, fornece uma visão determinística de um objeto, o qual o futuro é determinado pelas leis da força e por sua condição inicial. Não existe uma questão de imprevisibilidade ou de livre arbítrio na configuração de Newton.

No começo do século XX, metodologias como evidência experimental, descrição lógica e percepção filosófica de um fenômeno físico, tanto microscópico quanto macroscópico, geraram um avanço nas ciências. A percepção do infinito foi um tópico de grande preocupação dos cientistas da época. No mundo macroscópico, particularmente em osciladores na elétrica, mecânica, sistemas biológicos, e mecânica estática em fluidos e corpos materiais trouxeram estudos que estabeleceram o papel e a consequência da não linearidade de sistemas.

A existência de órbitas caóticas para uma equação de van der Pol forçada foi provada matematicamente por Cartwright e Littlewood nos anos de 1950. Durante este período o matemático Levinson mostrou que o modelo físico tinha uma família de soluções imprevisíveis na natureza. O acadêmico soviético Kolmogorov (1903 – 1987), o maior probabilista do século XX, e seus parceiros de trabalho fizeram contribuições significativas para a turbulência de fluidos isotrópicos, como a lei de 5/3 de Kolmogorov no intervalo de equilíbrio estatístico. Sua ideia foi baseada no pressuposto do equilíbrio estatístico em um fluido turbulento. No movimento turbulento, redemoinhos instáveis são formados no fluido e seu decaimento é espontâneo, de maneira que a queda de energia continue até ele ficar tão pequeno e ser suavizado pela viscosidade do fluido.

Henri Poincaré foi o primeiro a reportar a noção de sensibilidade às condições iniciais em seu trabalho. Como diz sua citação: “*Acontece que pequenas diferenças no produto inicial produz grandes diferenças no fenômeno final. Um pequeno erro anterior produzira um enorme erro posterior, impossibilitando a previsibilidade.*” Talvez a característica mais intrigante de um sistema caótico é sua extrema sensibilidade a condições iniciais. Naturalmente, existe uma necessidade de desenvolver uma ciência para essa imprevisibilidade. A real inovação veio de um resultado computacional de um sistema linear simples. No ano de 1963, Edward Lorenz (1917 – 2008) publicou um resultado intitulado “fluxo determinista não periódico”. Nesse artigo, ele derivou equações para convecção térmica em um modelo simplificado do fluxo da atmosfera e notou que a solução das equações poderiam

ser imprevisíveis e irregulares, apesar de serem determinísticas. A sensível dependência da evolução do sistema para uma mudança infinitesimal nas condições iniciais é conhecido como Efeito Borboleta. Sistemas deterministas podem exibir um comportamento regular para alguns valores de seus parâmetros, mas irregulares para outros. Podem dar um incremento a movimentos que são essencialmente randômicos e a previsão de longo termo é impossível. Outro artigo: *Differential Dynamical Systems*, publicado por Stephrn Smale, provou matematicamente a existência de soluções caóticas e deu uma descrição geométrica ao conjunto dessas soluções, o *Smale horseshoe map*. Matemáticos e físicos como Lev. D. Laudau, James Yorke, Robert May, Enrico Fermi, Stanislaw Ulam, J.G. Senai, Sarkovskii, A. Libchaber, J. Maurer, entre muitos outros, são grandes contribuidores para o desenvolvimento da ciência não linear e a teoria do caos.

O conceito de geometria fractal foi introduzida pelo matemático Benoit Mandelbrot (1924 – 2010) em 1975. Fractais (geralmente) são estruturas irregulares, errantes e autossimilares. Objetos fractais consistem de autossimilaridade entre escalas, ou seja, o padrão observado em grande escala se repete em escalas menores, sendo assim, feito por partes do todo, indefinidamente. A geometria se difere da euclidiana e acha ordem em formas e processos caóticos, em que suas órbitas podem ser representadas por fractais. Existem inúmeros exemplos de fractais na natureza e na ciência. O corpo humano é rico de exemplos, como o pulmão, coração e outros. E ainda, em anos recentes, há pesquisas para determinar aplicações na medicina. Maldelbrot e outros pesquisadores mostraram a ampla aplicação desses objetos. O fenômeno do caos é algo que se relaciona a realidade e então deve ser entendido e relacionado a nossa vida cotidiana. Suas aplicações são diversas, como segurança computacional, design digital e medicina, assim como em elementos destrutíveis como tsunamis e tornados, sendo considerado a terceira grande descoberta, atrás de relatividade e da mecânica quântica no século XX.

Durante o mestrado, foram estudados os conceitos iniciais sobre fractais gerados a partir de Sistemas de Funções Iteradas (IFS) e sobre os sistemas dinâmicos associados a eles. Para isso, foi utilizado o livro *Fractals Everywhere*, de Michael Barnsley [2] como base do estudo e alguns outros livros e artigos para aprofundar determinados tópicos que se faziam necessários, como os livros do Elon, de Topologia [14] e do Folland, de Análise Real [10].

Para realização desta dissertação, foi necessária uma base bem fundamentada de espaços métricos, para situar que contexto seria trabalhado, e de algumas transformações específicas, importantes na geometria fractal. Foram estudados também alguns teoremas e resultados importantes sobre IFS, como o Teorema da Colagem, que provém uma forma de construir esses sistemas de equações. Pesquisou-se também sobre sistemas dinâmicos contínuos para uma fundamentação teórica melhor formulada, seguindo-se a sistemas dinâmicos discretos e sua associação com fractais do tipo IFS, sobre dimensões fractais e finalizando a fundamentação com tópicos de teoria da medida. Para que, a partir desses conceitos, fosse realizado a aplicação de fractais em alguns contextos.

Foram duas aplicações baseadas em dois tópicos diferentes, uma se baseou em geração de imagens Fractais (*Fractal Top e Colour Stealing*) e a outra na Dimensão Fractal. Na primeira, foi aplicado um método para gerar e colorir fractais de forma eficiente. Na outra, foi estudado um algoritmo para o cálculo da dimensão de Hausdorff.

Dessa forma, o trabalho está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 encontram-se os tópicos sobre espaço métricos, ou seja, métrica, espaços completos, espaço de compactos e tópicos relacionados; no Capítulo 3 localizam-se estudos sobre transformações algébricas e contrações; no Capítulo 4 é estudado conceitos relacionado a Fractais, como contração de conjuntos, IFS, Dimensão, entre outros; no Capítulo 5 é estudado acerca de sistemas dinâmicos e suas associações com fractais; no Capítulo 6, para finalizar a parte teórica, é

---

introduzido alguns resultados e definição de Teoria da Medida. O Capítulo 7 é dissertado sobre as duas aplicações realizadas. No fim, a partir de um apêndice, há detalhes sobre o Colour Stealing e sua codificação.



## Espaços Métricos

Este capítulo trata sobre algumas definições e resultados de Espaços Métricos seguindo a metodologia proposta por Barnsley [2] com algumas das definições pautadas no livro Elementos de Topologia Geral, do Elon [14]. Ambos os livros seguem caminhos diferentes para suas definições, havendo algumas divergências, nestes casos, foi preferido seguir Barnsley [2] por ser a referência central da dissertação.

### 2.1 Métrica

**Definição 2.1.** *Um espaço métrico  $(X, d)$  é um conjunto  $X$  com uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que associa um número real  $d(x, y)$  a cada par de pontos  $x, y \in X$ , recebendo o nome de distância do ponto  $x$  ao ponto  $y$ . Uma métrica é uma distância que, para todo  $x, y, z \in X$ , satisfaz as propriedades:*

- a)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- b)  $d(x, y) > 0$ ,  $x \neq y$ ;
- c)  $d(x, x) = 0$ ;
- d)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

O item (d) recebe o nome de desigualdade triangular. Um exemplo de métrica comumente usada é a Euclidiana, ao considerar espaço métrico  $(\mathbb{R}^n, d_E)$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ , então ela é definida da forma:

$$d_E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

em que  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_n)$ .

Dados um número real  $r > 0$  e um ponto  $a$  qualquer de  $X$ . A bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $B(a, r)$  de todos os pontos de  $X$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor que  $r$ :

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

De forma análoga, a bola fechada  $B[a, r]$  é o conjunto de pontos cuja distância ao ponto  $a$  é menor que ou igual a  $r$ :

$$B[a, r] = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}.$$

**Definição 2.2.** Duas métricas  $d_1$  e  $d_2$  em um espaço  $X$  são equivalentes se existem constantes  $c_1, c_2 > 0$  de forma que

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

**Definição 2.3.** Dois espaços métricos  $(X_1, d_1)$  e  $(X_2, d_2)$  são equivalentes se existe uma função  $h : X_1 \rightarrow X_2$  bijetora e, portanto, inversível, na qual a métrica  $\tilde{d}_1$  em  $X_1$  definido por:

$$\tilde{d}_1(x, y) = d_2(h(x), h(y)), \quad \forall x, y \in X_1$$

é equivalente a  $d_1$ .

**Definição 2.4.** A função  $f : X_1 \rightarrow X_2$  de um espaço métrico  $(X_1, d_1)$  para um espaço métrico  $(X_2, d_2)$  é contínua no ponto  $a$  se, dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que

$$d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

É equivalente dizer que para cada bola aberta  $B(f(a), \epsilon)$  existe  $B(a, \delta)$  de forma que  $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$ .

$f$  é dita contínua se for contínua para todos os pontos de  $X_1$ .

Se  $f$  é bijetora e então inversível, e ainda, se sua inversa  $f^{-1}$  também for contínua, diz-se que  $f$  é um Homeomorfismo entre  $X_1$  e  $X_2$ . Nesse caso,  $X_1$  e  $X_2$  são homeomorfos. Dois espaços serem equivalentes é mais forte que serem homeomorfos. Para ser equivalente, precisa existir uma restrita relação entre  $\epsilon$  e  $\delta$  independente de  $x$ .

**Definição 2.5.** Sejam os espaços métricos  $(X_1, d_1)$  e  $(X_2, d_2)$ . Uma função  $f : X_1 \rightarrow X_2$  é uniformemente contínua se, para todo  $\epsilon > 0$ , pode-se obter um  $\delta > 0$  tal que  $d_1(x, y) < \delta$  implica  $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$ , para todo  $x, y \in X_1$ .

Enquanto a continuidade é uma propriedade local, a continuidade uniforme é uma propriedade global, esta (ao contrário da continuidade “comum”) necessita que, dado um único  $\epsilon$  e um único  $\delta$ , a função seja contínua em todos os pontos para estes mesmos valores.

## 2.2 Sequência de Cauchy

Uma sequência em um conjunto  $X$  é uma aplicação definida no conjunto dos inteiros positivos  $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$  com imagem em  $X$ . Cada inteiro  $n \in N$  possui um elemento correspondente em  $X$ , indicado por  $x_n$ . A sequência, como função, é denotada por  $(x_n)$  e, como conjunto de valores, por  $\{x_n\}_{n \in N}$ , ou simplesmente  $\{x_n\}$  quando  $N$  tiver subentendido.

Uma subsequência de uma sequência é uma restrição no domínio desta a um subconjunto  $N' = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ , é denotada por  $(x_{n_k})$ , e por  $\{x_{n_k}\}_{n_k \in N'}$  quando se refere a seus elementos.

**Definição 2.6.** Uma sequência  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de pontos em um espaço métrico  $(X, d)$  é chamada de Sequência de Cauchy se, dado qualquer  $\epsilon > 0$ , existe um inteiro  $n_0 > 0$ , tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad \forall n, m > n_0.$$

Em outras palavras, quanto mais longe caminha-se na sequência, mais próximos seus elementos estarão.

**Definição 2.7.** Uma sequência  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de pontos em um espaço métrico  $(X, d)$  é dita convergente para um ponto  $x \in X$  se, para qualquer  $\epsilon > 0$ , existe um inteiro  $n_0 > 0$  tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Nesse caso, o ponto para o qual a sequência converge, é chamado de Limite e recebe a notação  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Diz-se também que  $x_n$  tende a  $x$  ou simplesmente  $x_n \rightarrow x$ .

O limite  $x$  de uma sequência convergente  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  tem a propriedade de qualquer bola  $B(x, \epsilon)$  conter todos os pontos  $x_n$  depois de um certo  $n_0$ , em que  $n_0$  geralmente aumenta a medida que  $\epsilon$  diminui.

**Proposição 2.8.** Se a sequência de pontos  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  em um espaço métrico  $(X, d)$  converge para um ponto  $x \in X$ , então esta sequência é de Cauchy.

**Demonstração.** Como a sequência  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge para um ponto  $x \in X$ , então, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n \geq n_0$  de forma que  $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ . Suponha  $m, n \geq n_0$ , logo, a partir da Desigualdade Triangular para Medidas:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto,  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ , ou seja,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  é de Cauchy. ■

**Definição 2.9.** Um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  em  $X$  possui um limite  $x \in X$ .

Em outras palavras, o limite existe e pertence ao espaço onde a sequência está. Então, se  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência de Cauchy de pontos em  $X$  e este espaço é completo, existe um ponto  $x \in X$  de forma que, para qualquer  $\epsilon > 0$ , a bola fechada  $B[x, \epsilon]$  contém  $x_n$ .

O espaço métrico  $(\mathbb{R}^n, d_E)$ , com  $d_E$  sendo a métrica Euclidiana (apresentada anteriormente), é um exemplo de espaço métrico completo, o que é facilmente verificável.

**Definição 2.10.** Seja  $S \subset X$  um subconjunto de um espaço métrico  $(X, d)$ . Um ponto  $x \in X$  é chamado de Ponto de Acumulação de  $S$  se existe uma sequência  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de pontos  $x_n \in S \setminus \{x\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

**Definição 2.11.** Seja  $S \subset X$  um subconjunto de um espaço métrico  $(X, d)$ . O fecho de  $S$ , denotado por  $\bar{S}$ , é definido como  $\bar{S} = S \cup \{\text{pontos de acumulação de } S\}$ .  $S$  é fechado se contém todos os pontos de acumulação, ou seja,  $S = \bar{S}$ .

## 2.3 Conjuntos Compactos

**Definição 2.12.** Seja  $S \subset X$  um subconjunto de um espaço métrico  $(X, d)$ .  $S$  é compacto se toda sequência infinita  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  contém uma subsequência convergente com limite em  $S$ .

**Definição 2.13.** Seja  $S \subset X$  um subconjunto de um espaço métrico  $(X, d)$ .  $S$  é limitado se existe um ponto  $a \in X$  e um número  $R > 0$ , tal que

$$d(a, x) < R, \quad \forall x \in S.$$

Uma sequência, em  $X$ , é limitada se seus elementos são um subconjunto limitado de  $X$ .

$S$  é totalmente limitado se, dado  $\epsilon > 0$ , existe um conjunto finito de pontos  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset S$ , tal que, para todo  $x \in S$ ,  $d(x, y_i) < \epsilon$ , para algum  $y_i \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Esse conjunto é chamado  $\epsilon$ -net.

Em outras palavras, um conjunto  $S$  ser totalmente limitado significa que é possível “cobri-lo” totalmente com um número finito de bolas abertas de raio  $r$  (quantas forem necessárias), de forma que a interseção entre  $S$  e a união de todas as bolas abertas seja o próprio  $S$ . Assim, os pontos  $y_i$  que estão no centro de cada uma delas formam o conjunto  $\epsilon$ -net.

A seguir apresenta-se o Princípio da casa dos pombos, uma proposição utilizada na demonstração do Teorema 2.15. A notação  $| \cdot |$  representa a cardinalidade (quantidade de elementos) de um conjunto.

**Proposição 2.14** (Princípio da casa dos pombos). *Se  $|A| > |B|$ , então, para cada função  $f : A \rightarrow B$  existe pelo menos dois elementos de  $A$  que são levados a um mesmo elemento de  $B$  por  $f$ .*

**Demonstração.** Suponha, por contradição, que nenhum elemento  $b \in B$  é obtido por mais de um elemento  $a \in A$ . Como  $f$  é uma função, todos os elementos de  $A$  precisam de pelo menos uma imagem em  $B$ , então, para todos os elementos  $a \in A$ , existe  $b \in B$ , tal que  $b = f(a)$ , assim, ou  $A$  e  $B$  possuem o mesmo número de elementos ou  $B$  possui mais elementos que  $A$ , ou seja,  $|A| \leq |B|$ . Uma contradição, pois  $|A| > |B|$ . Portanto, ao menos um elemento de  $B$  é imagem de pelo menos dois elementos de  $A$ . ■

Em outras palavras, se  $m$  pombos são colocados aleatoriamente em  $n$  caixas diferentes e  $m > n$ , então, certamente uma das caixas terá mais que um único pombo. Por ser um evento aleatório, pode ocorrer de todos os pombos estarem em uma única caixa, assim como podem estar distribuídos de forma mais igualitária, porém, como o número de pombos é maior, uma das caixas terá mais que um pombo.

**Lema 2.15.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e um subconjunto  $S \subset X$ . Então  $S$  é compacto se e, somente se, é fechado e totalmente limitado.*

**Demonstração.** Suponha que  $S$  é fechado e totalmente limitado.

Seja  $\{x_n\}$  uma sequência infinita qualquer de pontos em  $S$ . Como  $S$  é totalmente limitado, pode-se achar uma coleção finita de bolas abertas de raio  $r = 1$  centradas em cada ponto  $y_i \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  ( $\epsilon$ -net), de forma que  $S$  é contido na união de todas elas. Como possui-se infinitos elementos  $x_n$  e apenas uma coleção finita de bolas abertas, tem-se mais pontos  $x_n$  do que bolas abertas, assim, pelo Princípio da casa dos pombos, uma dessas bolas, nomeada de  $B_1$ , terá infinitamente muitos pontos  $x_n$ .

Agora, escolha  $k_1$  para que  $x_{k_1} \in B_1$ . Então, para algum  $i$ ,  $B_1 = B_1(y_i, 1)$ , ou seja,  $d(x_{k_1}, y_i) < \epsilon$  (pois,  $S$  é totalmente limitado), mas  $x_{k_1}, y_i \in B_1 \cap S$ , ou seja, este conjunto também é totalmente limitado.

Assim, de forma análoga, pode-se cobrir  $B_1 \cap S$  por um conjunto finito de bolas de raio  $\frac{1}{2}$ . Pelo Princípio da casa dos pombos, uma das bolas conterá infinitamente muitos pontos  $x_n \in B_1 \cap S$ , seja ela nomeada de  $B_2$ . Escolha agora um  $k_2 > k_1$ , de forma que  $x_{k_2} \in B_2$ . Portanto, com um argumento semelhante ao já utilizado, afirma-se que  $B_2 \cap (B_1 \cap S)$  é totalmente limitado.

Indutivamente, continua-se esse processo, gerando uma sequência de conjuntos encaixados:

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset B_4 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$

Para simplificar a notação, considere  $B_n = B_n \cap B_{n-1} \cap \dots \cap B_1 \cap S$ .

Assim,  $B_n$  tem raio  $r = \frac{1}{2^{n-1}}$  e existe uma sequência de inteiros  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $x_{k_n} \in B_n$ , ou seja, pode-se criar a sequência  $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ . Pela forma como foi definido cada

$x_{k_n}$ , é obtido uma subsequência de  $\{x_n\}$ , e ainda, pode-se afirmar ser uma sequência de Cauchy em  $S$ , pois, visto que  $x_{k_{n+1}}, x_{k_n} \in B_{k_n}$ , tem-se que  $d(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) < \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$ , para um certo  $\epsilon$ .

Como  $S$  é fechado e  $\{x_{k_n}\}$  é de Cauchy, então ela converge para um ponto  $x \in S$ . Em outras palavras, dado uma sequência qualquer de  $S$ , existe uma subsequência convergente com limite em  $S$ . Portanto,  $S$  é compacto.

Suponha agora que  $S$  é compacto e, por contradição, não exista um  $\epsilon$ -net para  $S$ .

Então, existe uma sequência infinita de pontos  $\{x_n \in S\}$  com  $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ ,  $\forall i \neq j$  e  $\epsilon > 0$ . Mas essa sequência deve possuir uma subsequência convergente  $\{x_{k_i}\}$ , pois  $S$  é compacto. Pelo Teorema 2.8 essa subsequência é de Cauchy e então, pode-se achar um par de inteiros  $k_i, k_j$  com  $k_i \neq k_j$  tal que  $d(x_{k_i}, x_{k_j}) < \epsilon$ . Mas  $d(x_{k_i}, x_{k_j}) \geq \epsilon$ , um absurdo. Então existe um  $\epsilon$ -net, ou seja,  $S$  é totalmente limitado. ■

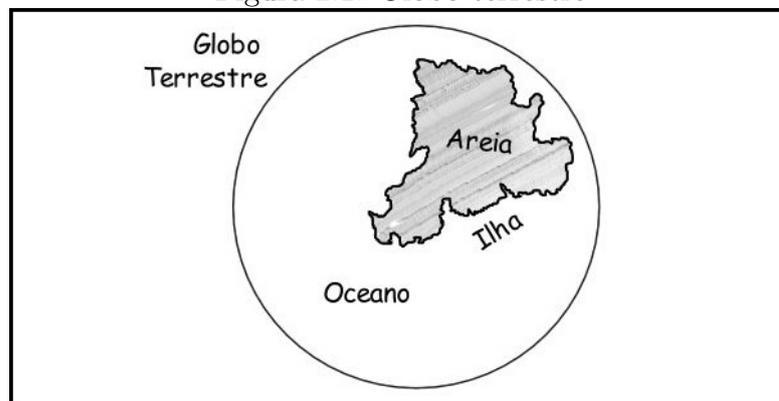
**Definição 2.16.** *Seja  $S \subset X$  um subconjunto de um espaço métrico  $(X, d)$ .  $S$  é aberto se, para todo  $x \in S$  existe  $\epsilon > 0$ , tal que  $B(x, \epsilon) \subset S$ .*

*Um ponto  $x \in X$  é um Ponto de fronteira se, para todo  $\epsilon > 0$ ,  $B(x, \epsilon)$  contém pelo menos um ponto de  $X \setminus S$  e um ponto de  $S$ . O conjunto de todos os ponto de fronteira é chamado de fronteira de  $S$  sendo denotado por  $Fr(S)$  ou  $\partial S$ .*

*Um ponto  $x \in S$  é chamado de Ponto interior de  $S$  se existe  $\epsilon > 0$  de forma que  $B(x, \epsilon) \subset S$ . O conjunto dos pontos interiores é chamado de interior de  $S$ , sendo denotado por  $S^0$  ou  $int(S)$ .*

Uma maneira de visualizar essas definições pode ser observada na Figura 2.1. Pode-se considerar o globo terrestre como sendo um espaço métrico, e a ilha e o oceano como sendo dois subconjuntos desse espaço. A borda da ilha corresponde a sua fronteira, e a areia a seus pontos interiores. Assim, a ilha é um conjunto fechado, pois sua fronteira (sendo interpretada como seu fecho) faz parte do conjunto, em contrapartida, o oceano é aberto, uma vez que a fronteira não pertence a ele.

Figura 2.1: Globo terrestre



Fonte: Autoria própria

A seguir, é apresentado o conceito de conjunto conexo, que será importante para as seções seguintes.

**Definição 2.17.** *Um espaço métrico  $(X, d)$  é conexo se os únicos subconjuntos de  $X$  que são simultaneamente abertos e fechados são os conjuntos  $X$  e  $\emptyset$ . Um subconjunto*

$S \subset X$  é conexo se o espaço métrico  $(S, d)$  é conexo.  $S$  é desconexo se não é conexo.  $S$  é totalmente desconexo se os subconjuntos conexos não vazios de  $S$  são os formados por apenas um ponto.

$S$  é conexo por caminho se, para todo par de pontos  $x$  e  $y$  de  $S$ , sempre existe uma função contínua  $f : [0, 1] \rightarrow S$ , do espaço métrico  $([0, 1], d_E)$  ( $d_E$  é a métrica Euclidiana) em  $(S, d)$ , de forma que  $f(0) = x$  e  $f(1) = y$ .  $f$  é chamada de caminho de  $x$  a  $y$ .  $S$  é desconexo por caminho se não é conexo por caminho.

## 2.4 Espaço dos Fractais

Nesta seção será apresentado o Espaço dos Fractais, representado por  $\mathcal{H}$ , um lugar matemático onde cada um de seus pontos são, na verdade, conjuntos. Assim, faz-se necessário um estudo de como trabalhar com conjuntos, os elementos desse espaço, ou seja, como sequências e distâncias se comportam, por exemplo. Inicialmente, é considerado um espaço métrico completo qualquer, denotado por  $(X, d)$ . Mas, quando o intuito é discutir figuras e desenhos, como a representação de fractais, um espaço que trabalha com conjuntos se torna o lugar ideal para seus estudos iniciais.

**Definição 2.18.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Então  $\mathcal{H}(X)$  denota o espaço onde os elementos são subconjuntos compactos de  $X$ , incluindo o conjunto vazio.*

**Definição 2.19.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo,  $x \in X$ , e  $B \in \mathcal{H}(X)$ . Defina*

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}.$$

Então,  $d(x, B)$  é a distância do ponto  $x$  ao conjunto  $B$ .

Como o conjunto  $B \in \mathcal{H}(X)$  é compacto e não vazio, então, garante-se a existência de um valor mínimo para definir a distância. Fixado  $x$ , considere a função  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(y) = d(x, y)$ ,  $\forall y \in B$ . Da definição de espaço métrico, segue que  $f$  é contínua, vista como uma função de  $(B, d)$  a  $(\mathbb{R}, d_E)$ ,  $d_E$  é a métrica Euclidiana. Seja  $p = \inf\{f(y) : y \in B\}$ . Como  $f(y) \geq 0$  para todo  $y \in B$ , segue que  $p$  é finito. Afirma-se então que existe um ponto  $\hat{y} \in B$  de forma que  $d(x, \hat{y}) = p$ . É possível achar uma sequência infinita de pontos  $\{y_n : n = 1, 2, \dots\} \subset B$  tal que  $|f(y_n) - p| < \frac{1}{n}$ . Usando a compacidade de  $B$ ,  $\{y_n : n = 1, 2, \dots\}$  possui uma subsequência com limite  $\hat{y} \in B$ . E, com a continuidade de  $f$ ,  $f(\hat{y}) = p$ , que era o desejado.

**Definição 2.20.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ . Então,*

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}$$

é a distância do conjunto  $A$  ao conjunto  $B$ .

De maneira análoga a já demonstrada, como  $A$  e  $B$  são compactos, garante-se a existência dessa distância. Porém, da forma como definida, ela não define uma métrica, por não ser comutativa, apesar de preencher os outros requisitos. Então, para definir um espaço métrico a partir de  $\mathcal{H}$ , a seguinte definição é necessária.

**Definição 2.21.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. A distância de Hausdorff entre os elementos  $A$  e  $B$  de  $\mathcal{H}(X)$  é definida por*

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Ou seja, a distância de Hausdorff é o maior valor entre  $d(A, B)$  e  $d(B, A)$ .

Assim, a distância  $h$  define uma métrica e, por consequência, o espaço  $\mathcal{H}(X)$  munido dessa métrica se torna um espaço métrico e mais, ele se torna também completo, como será dissertado na próxima seção. Portanto, têm-se as características necessárias para se trabalhar nele. Durante a dissertação, será utilizado as notações  $a \vee b$  e  $a \wedge b$  para representar o maior e o menor valor entre os números  $a$  e  $b$ , respectivamente, a fim de facilitar nas demonstrações e não deixá-las carregadas visualmente.

## 2.5 Completude do Espaço dos Fractais

O espaço métrico  $(\mathcal{H}(X), h)$  será referido como Espaço dos Fractais. Por enquanto, fractal será definido como qualquer subconjunto desse espaço métrico, porém, vale ressaltar que o mesmo não pode ser definido de forma tão simples assim, é geralmente visto, sem um rigor matemático, como um conceito mais amplo, através de imagens e contextos. Dito isso, como na dissertação é considerado apenas uma classe de fractais, que apesar de bem abrangente, não contém todos os existentes, é possível trazer uma definição que se enquadre com o que está sendo trabalhado, além de ser um subconjunto de  $(\mathcal{H}(X), h)$ . Tal definição é discutida no capítulo sobre fractais.

Nessa seção, define-se o espaço dos fractais como um espaço métrico completo. Para isso, é estudado como uma sequência se comporta em  $(\mathcal{H}(X), h)$ . Então, considere os seguintes resultados e definições.

**Definição 2.22.** *Sejam  $S \subset X$  e  $\Gamma \geq 0$ . Então,  $S + \Gamma = \{y \in X : d(x, y) \leq \Gamma, x \in S\}$ .  $S + \Gamma$  pode ser chamado de dilatação de  $S$  por  $\Gamma$ .*

**Lema 2.23.** *Sejam  $A, B$  pertencentes a  $\mathcal{H}(X)$ , em que  $(X, d)$  é um espaço métrico. Se  $\epsilon > 0$ , então,*

$$h(A, B) \leq \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B + \epsilon \quad \text{e} \quad B \subset A + \epsilon.$$

**Demonstração.** Inicialmente, demonstra-se que  $d(A, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subset B + \epsilon$ .

Suponha que  $d(A, B) \leq \epsilon$ .

Então,  $\max\{d(a, B) : a \in A\} \leq \epsilon$ , assim,  $d(a, B) \leq \epsilon$ , para qualquer  $a \in A$ . Como  $B + \epsilon = \{x \in X : d(x, b) \leq \epsilon, b \in B\}$ , tem-se que  $a \in B + \epsilon$ , para todo  $a \in A$ , ou seja  $A \subset B + \epsilon$ .

Suponha que  $A \subset B + \epsilon$ .

Como  $A \subset B + \epsilon$ , existe um  $b \in B$  de forma que  $d(a, b) \leq \epsilon$ , para algum  $a \in A$ . Então,  $d(a, B) = \min\{d(a, b) : b \in B\} \leq \epsilon$ . Isso é válido para todo  $a \in A$ . Ou seja,  $d(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\} \leq \epsilon$ .

De maneira análoga, prova-se que  $d(B, A) \leq \epsilon \Leftrightarrow B \subset A + \epsilon$ . Como  $h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) \leq \epsilon$ , tem-se que  $d(A, B) \leq \epsilon$  e  $d(B, A) \leq \epsilon$  o que é equivalente a  $A \subset B + \epsilon$  e  $B \subset A + \epsilon$ , pelo que foi demonstrado. Portanto,

$$h(A, B) \leq \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B + \epsilon \quad \text{e} \quad B \subset A + \epsilon.$$

■

Seja  $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$  uma sequência de Cauchy com elementos de  $(\mathcal{H}(X), h)$ . Isso é, dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $n_0$ , de forma que, para  $n, m \geq n_0$ ,

$$A_n + \epsilon \supset A_m \quad \text{e} \quad A_m + \epsilon \supset A_n.$$

Ou seja,  $h(A_n, A_m) \leq \epsilon$ , pelo Lema 2.23.

Deseja-se, agora, estender uma sequência de Cauchy  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \in X$  com  $x_{n_j} \in A_{n_j}$ , para cada  $j$ , a uma sequência de Cauchy  $\{x_n\} \in X$ , em que  $x_n \in A_n$ .

**Lema 2.24** (Lema da Extensão). *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e  $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$  uma sequência de Cauchy de elementos de  $(\mathcal{H}(X), h)$ . Seja também  $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ , com*

$$0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

*Suponha que se tem uma sequência  $\{x_{n_j} \in A_{n_j} : j = 1, 2, \dots\}$  em  $(X, d)$ . Então, existe uma sequência de Cauchy  $\{\tilde{x}_n \in A_n : n = 1, 2, \dots\}$  de forma que  $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ , para todo  $j = 1, 2, \dots$*

**Demonstração.** Primeiramente constrói-se a sequência  $\{\tilde{x}_n \in A_n : n = 1, 2, \dots\}$ .

Para cada  $n \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ , escolha um  $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_n)\}$ . Isso é,  $\tilde{x}_n$  é o ponto mais próximo (ou um dos) de  $x_{n_1}$  em cada  $A_n$ . A existência de tal proximidade é assegurada pela completude de  $A_n$ .

Sejam  $j \in \{1, 2, \dots\}$ , e  $n \in \{n_j + 1, n_j + 2, \dots, n_{j+1}\}$ . O seguinte conjunto ajuda a compreender o que está acontecendo:

$$\{1, 2, \dots, n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_2, n_2 + 1, \dots, n_3, \dots, n_j, \dots\}.$$

Escolha um  $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_n)\}$  para construir a sequência desejada. Agora, mostra-se que  $\{\tilde{x}_n\}$  possui tal característica, ou seja, é realmente uma extensão de  $\{x_{n_j}\}$  à  $\{A_n\}$ .

Claramente  $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ , pois, por construção,  $\tilde{x}_{n_j} \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_{n_j})\}$ , e como  $x_{n_j} \in A_n$ , então  $d(x_{n_j}, A_{n_j}) = 0$ . Falta então mostrar ser uma sequência de Cauchy. Dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $k_1$  de forma que  $n_k, n_j \geq k_1$  implica que  $d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \frac{\epsilon}{3}$ . Existe também um  $k_2$  tal que  $m, n \geq k_2$  implica que  $d(A_m, A_n) \leq \frac{\epsilon}{3}$ . Note que, pela desigualdade triangular para distâncias,

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, \tilde{x}_n),$$

com  $m \in \{n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, \dots, n_j\}$  e  $n \in \{n_{i-1} + 1, n_{i-1} + 2, \dots, n_i\}$ .

Visto que  $h(A_m, A_n) \leq \frac{\epsilon}{3}$ , então, pelo Lema 2.23,  $A_n \subset A_m + \frac{\epsilon}{3}$  e  $A_m \subset A_n + \frac{\epsilon}{3}$ , de forma que  $d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) \leq \frac{\epsilon}{3}$  e  $d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leq \frac{\epsilon}{3}$ . Então, para todo  $m, n > \max\{k_1, k_2\}$ ,

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) &\leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, a sequência é de Cauchy. ■

O seguinte teorema é muito relevante para esta dissertação por mostrar que o Espaço dos Fractais é completo, assim, uma sequência de Cauchy de conjuntos deste espaço se comporta bem, ou seja, é convergente. No Capítulo 4, é estudado sobre Fractais gerados a partir de sequências de Cauchy, então, em outras palavras, o resultado garante a existência desse Fractal.

**Teorema 2.25** (Completude do espaço dos Fractais). *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Então  $(\mathcal{H}(X), h)$  é um espaço métrico completo. E ainda, se  $\{A_n \in \mathcal{H}(X)\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência de Cauchy, então*

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{H}(X),$$

*e pode ser caracterizado como:*

$A = \{x \in X : \text{existe uma sequência de Cauchy } \{x_n \in A_n\} \text{ que converge a } x\}$ .

**Demonstração.** Sejam  $\{A_n\}$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{H}(X)$  e  $A$  definido nas condições do teorema. A prova é dividida nas seguintes partes:

- (a)  $A \neq \emptyset$ ;
- (b)  $A$  é fechado e então é completo, desde que  $X$  seja completo;
- (c) Para  $\epsilon > 0$ , existe  $k$  de forma que  $\forall n \geq k, A \subset A_n + \epsilon$ ;
- (d)  $A$  é totalmente limitado e então, por (b), é compacto;
- (e)  $\lim A_n = A$ .

a. Será provada a existência de uma sequência de Cauchy  $\{a_i \in A_i\} \in X$ .

Seja uma sequência de inteiros positivos  $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$  tal que

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i}, \quad \text{para } m, n > k_i.$$

Seja  $x_{k_1} \in A_{k_1}$ , como  $h(A_{k_1}, A_{k_2}) \leq \frac{1}{2}$ , é possível determinar  $x_{k_2} \in A_{k_2}$  de forma que  $d(x_{k_1}, x_{k_2}) \leq \frac{1}{2}$ . Assim, generalizando o processo, seja  $x_{k_i} \in A_{k_i}$ ,  $i = 2, \dots, l$ , para o qual  $d(x_{k_{i-1}}, x_{k_i}) \leq \frac{1}{2^{i-1}}$ . Então, como  $h(A_{k_l}, A_{k_{l+1}}) \leq \frac{1}{2^l}$ , e  $x_{k_l} \in A_{k_l}$ , tem-se  $x_{k_{l+1}} \in A_{k_{l+1}}$  de forma que  $d(x_{k_l}, x_{k_{l+1}}) \leq \frac{1}{2^l}$ .

Assim, por um método indutivo, é possível criar uma sequência infinita  $\{x_{k_i} \in A_{k_i}\}$  tal que  $d(x_{k_i}, x_{k_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}$ .

Para ver que  $\{x_{k_i}\}$  é de Cauchy em  $X$ , seja  $\epsilon > 0$ , escolha  $k_\epsilon$  tal que  $\sum_{i=k_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon$ . Então, para  $m > n \geq k_\epsilon$  tem-se:

$$d(x_{k_m}, x_{k_n}) \leq d(x_{k_m}, x_{k_{m+1}}) + d(x_{k_{m+1}}, x_{k_{m+2}}) + \dots + d(x_{k_{n-1}}, x_{k_n}) < \sum_{i=k_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon.$$

Pelo Lema da Extensão, existe uma subsequência convergente  $\{a_i \in A_i\}$  para cada  $a_{k_i} = x_{k_i}$ . Então,  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$  existe e está em  $A$ . Ou seja,  $A \neq \emptyset$ .

b. Para mostrar que  $A$  é fechado, suponha que  $\{a_i \in A\}$  é uma sequência que converge para um ponto  $a$ . tem-se que mostrar que  $a \in A$ , o que implica em  $A$  ser fechado. Para cada positivo inteiro  $i$ , existe uma sequência  $\{x_{i,n} \in A_n\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = a_i$ .

Seja a sequência  $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$  crescente de inteiros positivos tal que  $d(a_{k_i}, a) < \frac{1}{i}$ .

Então, existe uma subsequência de inteiros  $\{m_i\}$  de forma que  $d(x_{k_i, m_i}, a_{k_i}) \leq \frac{1}{i}$ .

Logo pela desigualdade triangular para distâncias,

$$d(x_{k_i, m_i}, a) \leq d(x_{k_i, m_i}, a_{k_i}) + d(a_{k_i}, a) < \frac{1}{i} + \frac{1}{i} = \frac{2}{i}$$

Se  $y_{m_i} = x_{k_i, m_i}$ , então  $y_{m_i} \in A_{m_i}$  e  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_{m_i} = a$ . Pelo Lema da Extensão  $\{y_{m_i}\}$  pode ser estendido para uma sequência convergente  $\{z_i \in A_i\}$  e então  $a \in A$ . Logo  $A$  é fechado.

- c. Seja  $\epsilon > 0$ , existe um  $k$  de forma que, para cada  $m, n \geq k$ ,  $h(A_m, A_n) \leq \epsilon$ , pois  $\{A_n\}$  é de Cauchy. Logo, pelo Lema 2.23,  $A_m \subset A_n + \epsilon$ .

Precisa-se mostrar que  $A \subset A_n + \epsilon$ . Para isso, seja  $a \in A$ . Como  $A$  é compacto (pois,  $A \in \mathcal{H}(X)$ ), existe uma subsequência  $\{a_i \in A_i\}$  que converge para  $a$ . Pode-se assumir  $k$  grande o bastante para que, dado  $m \geq k$ ,  $d(a_m, a) < \epsilon$ . Então  $a_m \in A_m \subset A_n + \epsilon$ .

Como  $A_n$  é compacto, observa-se que  $A_n + \epsilon$  é fechado, uma vez que  $A_n + \epsilon$  são todos os pontos  $x$  tais que  $d(x, a_n) \leq \epsilon$ ,  $\forall a_n \in A_n$ . Ou seja, como a igualdade é válida, o limite de qualquer sequência do espaço também pertence a esse espaço.

Então, visto que  $a_m \in A_n + \epsilon$ , para todo  $m \geq k$ , o limite da sequência  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_m$  também pertence a  $A_n + \epsilon$ , pois é um espaço fechado, considerando  $n$  grande o suficiente. Ou seja, como  $a$  é um elemento qualquer de  $A$ , tem-se que  $A \subset A_n + \epsilon$ .

- d. Suponha, por contradição, que  $A$  não seja totalmente limitado.

Então, para algum  $\epsilon > 0$ , não existe um  $\epsilon$ -net. Logo, pode-se achar uma sequência  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  em  $A$  de forma que  $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ , para  $i \neq j$ . Por (c), existe um  $n$  grande o bastante para que  $A \subset A_n + \frac{\epsilon}{3}$ . Para cada  $x_i$ , existe um correspondente  $y_i \in A_n$  para o qual  $d(x_i, y_i) \leq \frac{\epsilon}{3}$ , pela dilatação de  $A_n$ . Como  $A_n$  é compacto, alguma subsequência  $\{y_{n_i}\}$  de  $\{y_i\}$  converge. Então, pode-se achar pontos na sequência  $\{y_{n_i}\}$  tão próximos quanto se deseja. Em particular, dois pontos  $y_{n_i}$  e  $y_{n_j}$ , tal que  $d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3}$ . Mas, pela desigualdade triangular de distâncias:

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Gerando uma contradição pela forma que  $\{x_{n_i}\}$  foi escolhido. Então  $A$  é totalmente limitado e, por (b), também é fechado. Logo, pelo Teorema 2.15 é compacto.

- e. Por (d),  $A \in \mathcal{H}(X)$ . Então, por (c) e pelo Lema 2.23, será provado que  $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = A$  se, dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $k$  tal que, para  $n \geq k$ ,  $A_n \subset A + \epsilon$ .

Seja  $\epsilon > 0$ , ache  $k$  de forma que, para  $m, n \geq k$ ,  $h(A_m, A_n) \leq \frac{\epsilon}{2}$ , então  $A_m \subset A_n + \frac{\epsilon}{2}$ . Deseja-se então mostrar que  $A_n \subset A + \epsilon$ . Existe uma sequência crescente  $\{k_i\}$  de inteiros de forma que

$$n < k_1 < k_2 < \dots < k_j < \dots$$

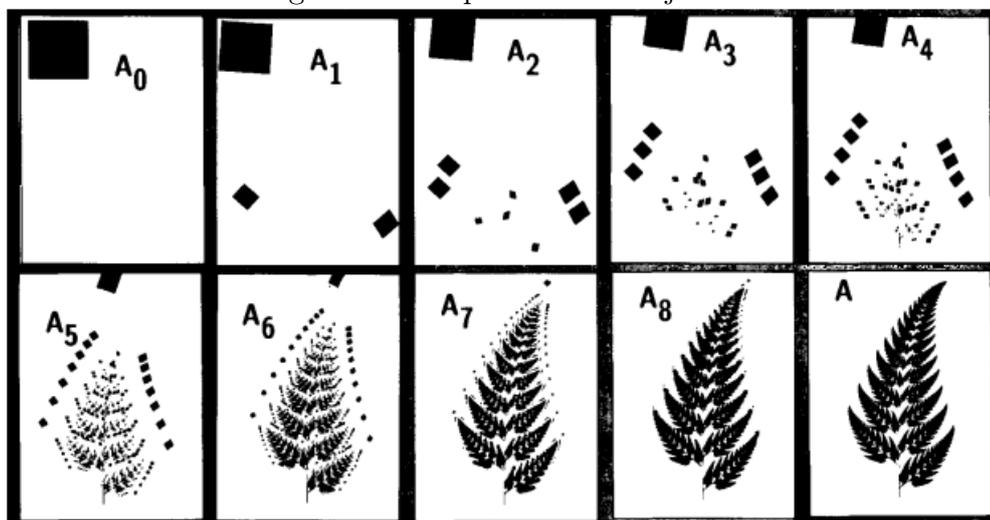
e, para  $m, l \geq k_j$ ,  $A_m \subset A_l + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$ . Note que  $A_n \subset A_{k_1} + \frac{\epsilon}{2}$ . Como  $y \in A_n$ , existe um  $x_{k_1} \in A_{k_1}$  tal que  $d(y, x_{k_1}) \leq \frac{\epsilon}{2}$ . Como  $x_{k_1} \in A_{k_1}$ , existe um ponto  $x_{k_2} \in A_{k_2}$  para que  $d(x_{k_1}, x_{k_2}) \leq \frac{\epsilon}{2^2}$ . De maneira similar, pode-se utilizar indução para achar uma sequência  $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots$  tal que  $x_{k_j} \in A_{k_j}$  e  $d(x_{k_j}, x_{k_{j+1}}) \leq \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$ . Usando a desigualdade triangular para distâncias e a soma de PG, tem-se, para qualquer  $j$ ,

$$\begin{aligned} d(y, x_{k_j}) &\leq d(y, x_{k_1}) + d(x_{k_1}, x_{k_2}) + \dots + d(x_{k_{j-2}}, x_{k_{j-1}}) + d(x_{k_{j-1}}, x_{k_j}) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \dots + \frac{\epsilon}{2^{j-1}} + \frac{\epsilon}{2^j} \leq \epsilon \left( \sum_{l=1}^j \frac{1}{2^l} \right) \leq \epsilon \left( 1 - \frac{1}{2^j} \right) \leq \epsilon, \end{aligned}$$

lembrando que  $\left(1 - \frac{1}{2^j}\right) \leq 1$ , para qualquer  $j$ . Concluindo que  $\{x_{k_j}\}$  é uma sequência de Cauchy que converge a um ponto  $x \in A$ . E ainda,  $d(y, x_{k_j}) \leq \epsilon$  implica que  $d(y, x) \leq \epsilon$ . Então, foi mostrado que  $A_n \subset A + \epsilon$ , para  $n \geq k$ . Ou seja, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  e, conseqüentemente, que  $\mathcal{H}(X)$  é um espaço métrico completo. ■

Dessa forma, um exemplo de como é possível visualizar uma sequência convergente de conjuntos é mostrado na Figura 2.2, onde pode ser visto uma sequência de conjuntos que estão convergindo para  $A$ , uma samambaia. Um dos objetivos dessa dissertação é transformar a figura em uma teoria matemática para, assim, calcular os fractais que se é desejado. O que, ao fim desta, espera-se que seja alcançado este objetivo.

Figura 2.2: Sequência de Conjuntos



Fonte: *Fractals Everywhere* [2]



# Transformações Algébricas

## 3.1 Transformações e suas Classificações

A geometria fractal estuda subconjuntos complicados de espaços geometricamente simples, como  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\hat{\mathbb{C}}$ , com  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . O foco é nos subconjuntos gerados por transformações geometricamente simples de um espaço métrico nele mesmo, ou que possuem propriedades invariantes sobre essas transformações. Assim, será estudada algumas transformações e suas classificações segundo Barnsley [2].

**Definição 3.1.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação em um espaço métrico. As iterações de  $f$  são transformações  $f^n : X \rightarrow X$  que, para  $n = 1, 2, \dots$ , definem-se por:*

$$\begin{aligned} f^0(x) &= x, \\ f^1(x) &= f(x), \\ f^2(x) &= f(f(x)), \\ &\vdots \\ f^n(x) &= f(f^{n-1}(x)). \end{aligned}$$

*Se  $f$  é inversível, então as iterações passadas de  $f$  são transformações  $f^{-m} : X \rightarrow X$  definidas por:*

$$\begin{aligned} (f)^{-1}(x) &= (f)^{-1}(x), \\ (f)^{-m}(x) &= (f^m)^{-1}(x), \text{ para } m=1,2,\dots \end{aligned}$$

### 3.1.1 Transformação na Reta Real

Uma transformação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , da forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

em que os coeficientes  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) são números reais diferentes de zero, é chamada de transformação polinomial e  $n$  é o grau da transformação.

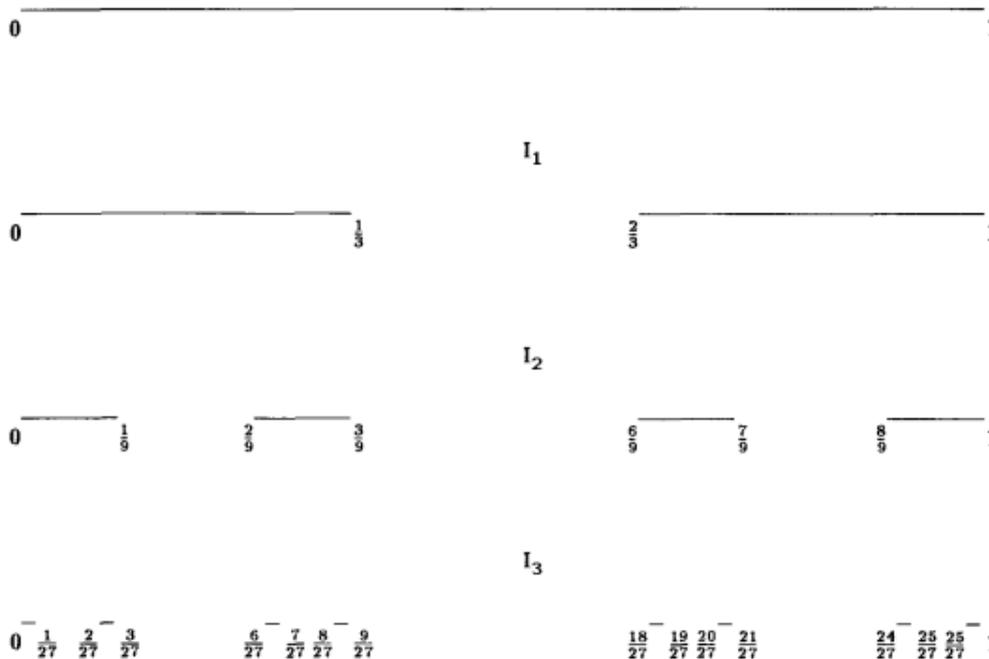
**Definição 3.2.** *Uma transformação  $f : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  definida na forma:*

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad \neq bc,$$

é chamada de transformação de Möbius (ou linear fracionária). Se  $c \neq 0$ , então  $f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$ , e  $f(\infty) = \frac{a}{c}$ . Se  $c = 0$ , então  $f(\infty) = \infty$ .

Considerando as funções  $w_1, w_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , definidas por  $w_1(x) = \frac{x}{3}$  e  $w_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$ , por exemplo, é possível realizar um processo iterativo. Inicialmente aplica-se ambas as funções  $w_1$  e  $w_2$  no intervalo  $I = [0, 1]$ , seus domínios, gerando os conjuntos  $w_1(I)$  e  $w_2(I)$ , em seguida, unem-se ambos os resultados, ou seja,  $I_1 = w_1(I) \cup w_2(I)$  para aplicar este a ambas as funções novamente, obtendo  $w_1(w_1(I) \cup w_2(I))$  e  $w_2(w_1(I) \cup w_2(I))$ , assim,  $I_2 = w_1(I_1) \cup w_2(I_1)$ . Então, unem-se estas imagens para aplicar de novo em  $w_1$  e  $w_2$ , e assim em diante. O processo utilizado se baseou em iterar o Operador de Hutchinson, que sera dissertado na próxima seção, a ideia de utilizá-lo foi para visualizar uma transformação de Möbius iterada, observável na Imagem 3.1. O conjunto gerado é conhecido como conjunto de Cantor.

Figura 3.1: Conjunto de Cantor



Fonte: *Fractals Everywhere* [2]

### 3.1.2 Transformação no Plano Real

Uma transformação  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , da forma:

$$w(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + e, cx_1 + dx_2 + f),$$

em que  $a, b, c, d, e, f$  são números reais, é chamada de transformação afim no plano. Observe que a seguinte notação matricial é equivalente à forma apresentada acima.

$$w(x) = w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t.$$

A partir de algumas operações, a matriz A pode ser reescrita da forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 & r_2 \sin \theta_2 \\ r_1 \sin \theta_1 & r_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix},$$

em que  $(r_1, \theta_1)$  são as coordenadas polares do ponto  $(a, c)$  e  $(r_2, (\theta_2 + \pi/2))$  são as coordenadas polares do ponto  $(b, d)$ . A transformação afim  $w(x) = Ax$ , com  $t = 0$ , recebe o nome de transformação linear. No plano  $\mathbb{R}^2$ , transforma qualquer paralelogramo com vértice na origem a outro paralelogramo com vértice também na origem, porém, sua forma é modificada, sendo rotacionada ou alterando suas medidas.

A transformação afim  $w(x) = Ax + t$ , no plano  $\mathbb{R}^2$ , consiste em uma transformação linear  $A$  que deforma o espaço relativo à origem, como descrito acima. Porém, translada a figura segundo  $t$ .

Mostra-se, a seguir, como achar uma transformação que modifica um conjunto {folha grande} a um conjunto {folha pequena}, apenas para ilustrar a definição de transformação afim e introduzir a ideia de semelhança. A ideia é literalmente desenhar duas folhas no plano cartesiano e achar funções que leve um desenho no outro.

Deseja-se achar números  $a, b, c, d, e, f$ , tal que

$$w(\{\text{folha grande}\}) = \{\text{folha pequena}\}.$$

Inicialmente, no plano  $\mathbb{R}^2$ , desenham-se ambos os conjuntos folhas (grande e pequena). Então, marcam-se três pontos na folha grande e anotam as coordenadas:  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , marcam-se também os pontos correspondentes na folha pequena e anotam as coordenadas:  $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ ,  $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ ,  $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)$ , respectivamente. Então, obtêm-se  $a, b, e$  resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x_1a + y_1b + e = \tilde{x}_1 \\ x_2a + y_2b + e = \tilde{x}_2 \\ x_3a + y_3b + e = \tilde{x}_3 \end{cases},$$

E  $c, d, f$  com o sistema:

$$\begin{cases} x_1c + y_1d + f = \tilde{x}_1 \\ x_2c + y_2d + f = \tilde{x}_2 \\ x_3c + y_3d + f = \tilde{x}_3 \end{cases}.$$

Assim, a transformação afim  $w(x) = Ax + t$  age exatamente da forma que se queria, e quando a aplica na folha grande,  $w$  leva ela na folha pequena.

**Definição 3.3.** Uma transformação  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é chamada de semelhança se tem a forma de uma das seguintes transformações afins:

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

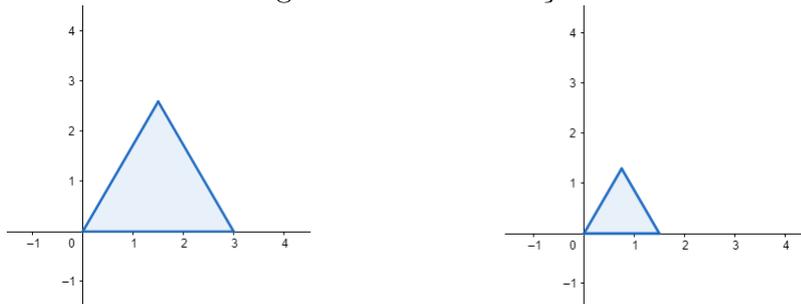
para alguma translação  $(e, f) \in \mathbb{R}^2$ , algum número  $r \neq 0$ , e algum ângulo  $0 \leq \theta < 2\pi$ . O ângulo  $\theta$  é chamado de ângulo de rotação, e  $r$  é chamado de fator de escala ou simplesmente de escala. A transformação linear

$$r_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

é uma reflexão.

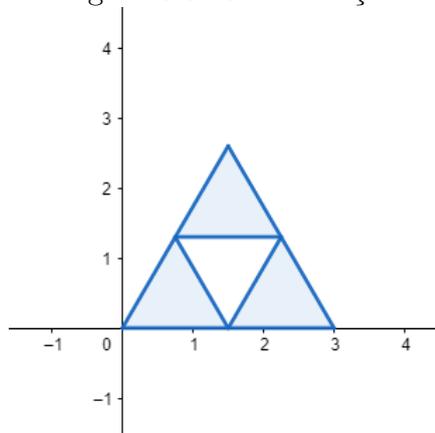
Um exemplo de semelhança pode ser observado na Figura 3.2, em que o triângulo da esquerda é reduzido de tamanho (triângulo da direita). Na Figura 3.3, foram realizadas três semelhanças (separadamente) ao triângulo da primeira figura, e uniu-se os resultados em um único desenho. Tem-se, então, a união de três desenhos em um único, com cada um deles gerados por uma semelhança. Matematicamente falando, é análogo a ter-se três semelhanças diferentes, aplicá-las a um mesmo conjunto e então unir os resultados em um único conjunto, semelhante ao realizado no exemplo de Cantor acima. Ou seja, pode-se pensar que a Figura 3.3 foi obtida através do Operador de Hutchinson, porém, não foi realizado um processo de iteração desse operador.

Figura 3.2: Semelhança



Fonte: Autoria Própria

Figura 3.3: Semelhanças



Fonte: Autoria Própria

### 3.1.3 Transformação de Möbius

**Definição 3.4.** Uma transformação  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  definida por

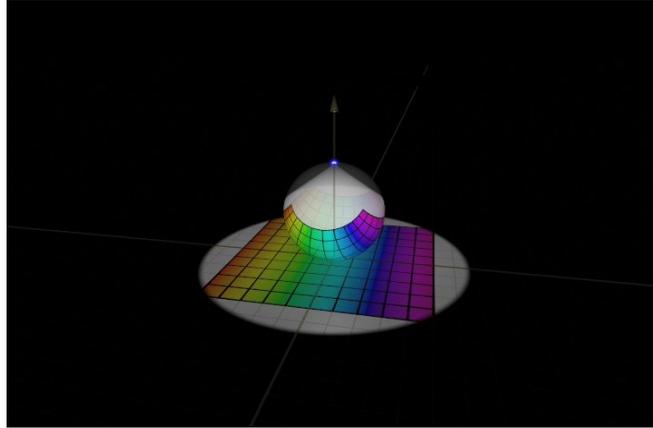
$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

nos quais  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , e  $ad - bc \neq 0$ , é chamada de transformação de Möbius em  $\hat{\mathbb{C}}$ . Se  $c \neq 0$ , então  $f(-d/c) = \infty$ , e  $f(\infty) = a/c$ . Se  $c = 0$ , então  $f(\infty) = \infty$ .

Pode-se pensar na transformação de Möbius como uma aplicação que leva todo o plano  $\mathbb{C}$  unido com o infinito para a esfera  $\hat{\mathbb{C}}$ . Uma sequência de operações é então aplicada na esfera. Cada operação é elementar e tem a propriedade de levar círculos em

círculos. As operações possíveis são: rotação dos eixos, reescala e translação. Finalmente, a esfera é levada de volta ao plano. A aplicação transforma o conjunto de linhas e círculos nele mesmo. Observa-se também que ela é inversível. É interessante ver como a complexa geometria da Transformação de Möbius é estudada simplesmente manipulando expressões da forma  $\frac{az + b}{cz + d}$ . Apesar de ser difícil visualizar estes conceitos, a Imagem 3.4 pode ajudar.

Figura 3.4: Transformação de Möbius



Fonte: *Möbius Transformations Revealed*[7]

### 3.1.4 Transformação Analítica

Nessa seção, generaliza-se a transformação de Möbius a partir de transformações analíticas, com foco nas transformações quadráticas.

A semelhança  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , definida pela fórmula  $f(z) = 3z + 1$ , é um exemplo de transformação analítica, ela transforma círculos em outros dilatados por um fator igual a 3 e o desloca uma unidade (a direita) no eixo real. É uma transformação contínua.

De forma simplificada, uma transformação em  $\hat{\mathbb{C}}$  é analítica se é contínua, e localmente se comporta como uma semelhança. Se considerar uma região suficientemente pequena que a transformação age sobre o espaço dilatando/contraindo, rotacionando, ou transladando, de forma quase igual a uma semelhança, então está sendo considerado uma transformação analítica.

Sendo mais preciso, observe o que a transformação faz em uma vizinhança de  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ . Assuma que  $z_0$  não é um ponto crítico, ou seja, a derivada da função nesse ponto difere de zero. Seja  $T$  uma pequena região que contenha  $z_0$  e  $f(T)$  sua imagem sobre a transformação. Então, pode-se redimensionar  $T$  por um fator de forma que fique praticamente no tamanho de um quadrado unitário, e redimensionar  $f(T)$  por esse mesmo fator, ou seja, é possível fazer isso através de uma semelhança, obtendo uma boa precisão. Quanto menor a região de  $T$ , mais preciso será esse processo.

Considere a transformação quadrática  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  definida por:

$$f(z) = z^2 = (x_1 + ix_2)^2 = (x_1^2 - x_2^2) + 2x_1x_2i = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2)i,$$

em que  $f_1(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2)$  é chamado de parte real de  $f(z)$  e  $f_2(x_1, x_2) = 2x_1x_2$  de parte imaginária, denotados por  $Re(z)$  e  $Im(z)$ , respectivamente.

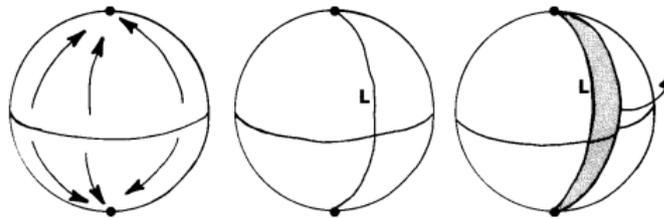
Analisa-se agora o que acontece com o ponto  $z = r \cos t + ir \sin t$ , para  $r > 0$ . A medida que o parâmetro  $t$  varia de 0 a  $2\pi$ ,  $z$  se move de forma anti-horária em torno do círculo de raio  $r$ . Assim,

$$f(z) = r^2 \cos 2t + ir^2 \sin 2t.$$

A medida que o parâmetro  $t$  vai de 0 a  $2\pi$ ,  $f(z)$  dá duas voltas em torno do círculo de raio  $r^2$ .

Na esfera de Riemann a transformação  $z \mapsto z^2$  pode ser descrita como segue. A linha do equador corresponde ao círculo de raio unitário no plano, o polo sul corresponde a origem e o polo norte ao infinito. Então, a transformação mantém ambos os polos fixos. A linha longitudinal  $L$  que conecta os polos, correspondente ao eixo real positivo, é levado nela mesma, assim como a linha do equador. Primeiramente, os pontos acima do equador são levados para mais próximos do polo norte e os que estão abaixo, para mais próximos do polo sul, a linha do equador continua no mesmo lugar. Em seguida, a superfície da esfera é cortada na linha longitudinal  $L$ . Um lado do corte é mantido fixo, enquanto o outro é puxado em torno da esfera, alongando uniformemente o espaço, até que a borda do corte chegue novamente em  $L$ . Os dois lados do corte são reconectados. A esfera foi transformada no dobro dela mesma. Os polos são os pontos críticos. Uma representação do processo pode ser vista na Imagem 3.5.

Figura 3.5: Transformação na Esfera



Fonte: *Fractals Everywhere*[2]

A transformação quadrática mais geral na esfera é expressa pela fórmula  $f(z) = az^2 + bz + c$ , com  $a, b, c$  números complexos. É possível realizar uma mudança de coordenadas,  $z \mapsto \theta(z)$ , em que  $\theta$  é uma semelhança de forma que  $f(z) = z^2 + \tilde{c}$ , para algum número complexo  $\tilde{c}$ . Então, a forma quadrática mais geral na esfera pode ser descrita da mesma forma feita acima, com exceção de que no final há uma translação  $\tilde{c}$ , que mantém o infinito fixo.

A transformação quadrática  $f(z) = z^2$  transforma o plano complexo sem a origem nele mesmo duas vezes. Cada ponto  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  possui duas imagens. Então  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  não é inversível. Porém, é possível definir uma função para que isso ocorra.

**Definição 3.5.** *Seja  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  uma transformação analítica de forma que  $f(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}}$ . Então a inversa de valor ajustado de  $f$  é a transformação  $f^{-1} : \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}})$ , definida por*

$$f^{-1}(A) = \{w \in \hat{\mathbb{C}} : f(w) \in A\}, \text{ com } A \in \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}).$$

**Definição 3.6** (Transformação Analítica). *Seja  $(\mathbb{C}, d)$  o plano complexo munido da métrica Euclidiana. Uma transformação  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é chamada de analítica se, para cada  $z_0 \in \mathbb{C}$ , existe uma semelhança da forma*

$$w(z) = az + b, \text{ para algum par de números } a, b \in \mathbb{C},$$

*tal que  $\frac{d(f(z), w(z))}{d(z, z_0)} \rightarrow 0$  a medida que  $z \rightarrow z_0$ . Os números  $a, b$  dependem de  $z_0$ . Se, em certo ponto  $z_0 = c$ , tem-se  $a = 0$ , então  $c$  é chamado de ponto crítico da transformação e  $f(c)$  é chamado de valor crítico.*

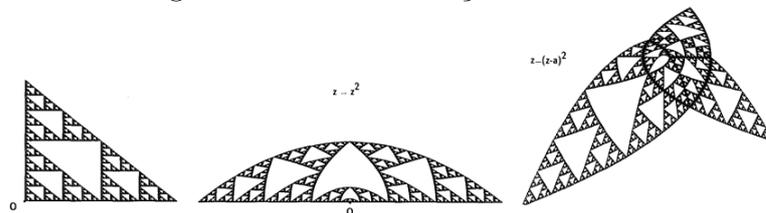
Se a transformação analítica  $f(z)$  é racional, o que significa dizer que ela pode ser expressa como uma razão de polinômios, então os números  $a, b$ , na semelhança  $w(z)$ , são dados pelas fórmulas:

$$a = f'(z_0), \quad b = f(z_0) - az_0.$$

Em que  $f'(z_0)$  é a derivada de  $f$  em relação a  $z$  e os pontos críticos  $c \in \mathbb{C}$  são as soluções da equação  $f'(c) = 0$ .

Na Imagem 3.6 é possível ver algumas transformações analíticas agindo sobre o Triângulo de Sierpinski:  $f_1(z) = z$ ,  $f_2(z) = z^2$ ,  $f_3(z) = (z - a)^2$ , respectivamente.

Figura 3.6: Transformação Analítica



Fonte: *Fractals Everywhere*[2]

## 3.2 Mudança de Coordenadas

Descrever transformações no espaço se faz necessário um sistema de coordenadas subjacente. A maioria dos espaços tem um sistema de coordenadas que define a localização dos pontos dele. Esse conjunto subjacente é definido por uma especificação do espaço. Por exemplo,  $X = [1, 2]$  provém uma coleção de pontos com a coordenada natural de  $x$  restrita a  $1 \leq x \leq 2$ . Pode-se pensar em um espaço feito dos pontos  $x \in X$ , ou, equivalentemente, nesse sistema de coordenadas. Se o espaço  $X$  é  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{C}$ , então o sistema de coordenadas subjacente (canônico) será as coordenadas cartesianas. Se  $X = \hat{\mathbb{C}}$ , então o sistema de coordenadas (canônico) será o sistema polar.

Em cada caso, o sistema de coordenadas subjacente é por si próprio um espaço métrico. Denota-se esse espaço por  $X_C$ . Geralmente não é diferenciado um ponto  $x \in X$  de sua coordenada  $x_C \in X_C$ . Note que o espaço  $X_C$  pode conter coordenadas que não corresponde a nenhum ponto de  $X$ , por exemplo,  $X = \mathcal{Q}$  (o espaço representado pelo quadrado de lado unitário), é natural considerar  $X_C = \mathbb{R}^2$ , então os pontos  $x \in X$  correspondem as coordenadas  $x_C = (x_1, x_2) \in X_C$ , com  $0 \leq x_1 \leq 1$  e  $0 \leq x_2 \leq 1$ . Porém, a coordenada  $(3, 5) \in X_C$  não corresponde a nenhum ponto de  $X$ . Pode-se dizer que o sistema de coordenadas está em “baixo” do espaço.

Uma mudança de sistema de coordenadas pode ser descrita a partir de uma transformação  $\theta : X_C \rightarrow X_C$ . Pode-se pensar na mudança como se estivesse movendo fisicamente cada ponto  $x \in X$  de forma que eles não estejam mais acima de  $x_C \in X_C$ , mas acima de  $x' = \theta(x) \in X_C$ . Então, é necessário distinguir um ponto  $x \in X$  de sua coordenada  $x_C \in X_C$ . Portanto, pode-se pensar na mudança de coordenadas  $\theta : X_C \rightarrow X_C$  como movendo  $X$  relativamente ao espaço  $X_C$ .

**Proposição 3.7.** *Sejam  $X$  um espaço, com  $X_C \supset X$  sendo seu sistema de coordenadas, uma mudança de coordenadas provida pela transformação  $\theta : X_C \rightarrow X_C$ , em que  $\theta$  é inversível quando tratado como uma transformação de  $X$  a  $\theta(X)$ . Sejam as coordenadas do ponto  $x \in X$  denotado por  $x$  antes da mudança e por  $x'$  após a mudança, então  $x' = \theta(x)$ .*

*Seja também  $f : X \rightarrow X$  uma transformação no espaço  $X$ , em que  $x \mapsto f(x)$  é sua lei nas coordenadas originais e  $x' \mapsto f'(x')$  nas novas coordenadas geradas por  $\theta$ , então*

$$\begin{aligned} f(x) &= (\theta^{-1} \circ f' \circ \theta)(x), \\ f'(x') &= (\theta \circ f \circ \theta^{-1})(x'). \end{aligned}$$

**Demonstração.** Primeiramente, é demonstrado que  $f(x) = (\theta^{-1} \circ f' \circ \theta)(x)$ . Para isso, precisa-se mostrar que as funções são definidas nos mesmos conjuntos e possuem a mesma lei. Como  $\theta$  leva os elementos de  $X \subset X_C$  a um certo subconjunto  $X' \subset X_C$ , pode-se considerar que o domínio de  $\theta$  seja  $X$  e o conjunto imagem seja  $X'$ , então  $\theta : X \rightarrow X'$ , logo  $\theta^{-1} : X' \rightarrow X$ . E ainda,  $f' : X' \rightarrow X'$ . Assim, observe que a composição está bem definida:

$$\begin{aligned} (\theta^{-1} \circ f' \circ \theta) : X &\rightarrow f' \rightarrow \theta^{-1}, \\ (X \rightarrow X') &\rightarrow (X' \rightarrow X') \rightarrow (X' \rightarrow X), \\ (X \rightarrow X') &\rightarrow (X' \rightarrow X), \\ X &\rightarrow X. \end{aligned}$$

Ou seja,  $(\theta^{-1} \circ f' \circ \theta) : X \rightarrow X$ , da mesma forma que  $f : X \rightarrow X$ , então ambas as funções possuem o mesmo domínio e a mesma imagem. Resta provar que possuem a mesma lei, ou seja,  $f(x) = (\theta^{-1} \circ f' \circ \theta)(x)$ . De fato, por hipótese, tem-se que  $\theta : f(x) \mapsto f'(x')$ , então,  $\theta^{-1} : f'(x') \mapsto f(x)$ . Logo,

$$(\theta^{-1} \circ f' \circ \theta)(x) = \theta^{-1}(f'(\theta(x))) = \theta^{-1}(f'(x')) = f(x).$$

De maneira análoga, se prova que  $f'(x') = (\theta \circ f \circ \theta^{-1})(x')$ . ■

**Definição 3.8.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação em um espaço métrico. Um ponto  $x_f \in X$ , de forma que  $f(x_f) = x_f$ , é chamado de ponto fixo de uma transformação.*

Os pontos fixos de uma transformação são muito importantes. Eles mostram quais partes do espaço são fixas e não se movem pela transformação. Os pontos fixos de uma transformação restringem o movimento do espaço suavemente e estará diretamente relacionado com a noção de fractal utilizada na dissertação.

### 3.3 Contração

**Definição 3.9.** *Uma transformação  $f : X \rightarrow X$  em um espaço métrico  $(X, d)$  é chamada de contração se existe uma constante  $0 \leq s < 1$  de forma que*

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

A constante  $s$  é chamada de fator de contração de  $f$ .

Seria conveniente falar do maior e do menor elemento de um conjunto de números reais. Porém, um conjunto como  $S = (-\infty, 3)$  não possui nenhum dos dois, visto que  $-\infty$  e  $3$  não pertencem ao conjunto, porém,  $-\infty < x < 3$ , para qualquer  $x \in S$ , mesmo que  $x$  não possa assumir os valores das extremidades, ele é limitado por eles. Então, a seguinte definição é de grande utilidade.

**Definição 3.10.** *Seja  $S$  um conjunto de números reais. O ínfimo de  $S$  é igual a  $\max\{x \in \mathbb{R} : x \leq s \quad \forall s \in S\}$ . Repare que o ínfimo de  $S$  pode ser  $-\infty$ , caso necessário. Assim, o ínfimo de  $S$  sempre existe, sendo denotado por  $\inf S$ .*

*O supremo de  $S$  é similarmente definido, é igual a  $\min\{x \in \mathbb{R} : x \geq s \quad \forall s \in S\}$ , é denotado por  $\sup S$ , e pode ser  $\infty$ , caso necessário.*

**Lema 3.11.** *Seja  $w : X \rightarrow X$  uma contração em um espaço métrico  $(X, d)$ . Então  $w$  é contínua.*

**Demonstração.** Sejam  $\epsilon > 0$  e um fator de contração  $s > 0$  para  $w$ . Então, para  $d(x, y) < \delta$ , seja  $\delta = \frac{\epsilon}{s}$ , assim:

$$d(w(x), w(y)) \leq sd(x, y) < s\delta = s \cdot \frac{\epsilon}{s} = \epsilon.$$

Ou seja, sempre que  $d(x, y) < \delta$ , tem-se  $d(w(x), w(y)) < \epsilon$ . Em outras palavras, se  $w$  é uma contração, então também é contínua. ■

**Teorema 3.12** (Teorema da Contração). *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma contração em um espaço métrico completo  $(X, d)$ . Então  $f$  possui exatamente um ponto fixo  $x_f \in X$  e ainda, para cada ponto  $x \in X$ , a sequência  $\{f^n(x) : n = 1, 2, \dots\}$  converge para  $x_f$ . Ou seja:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f, \quad \forall x \in X.$$

**Demonstração.** Seja a sequência

$$\{x_n\} = \{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots\},$$

equivalente a  $\{f^n(x)\}$  (basta observar que  $f^n(x_0) = f^{n-1}(f(x_0)) = f^{n-1}(x_1) = \dots = f(x_{n-1})$ ). Deseja-se provar que ela é convergente.

Como  $f$  é uma contração, então, existe uma constante  $0 \leq s < 1$  de forma que  $d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y)$ . Assim,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq sd(x_n, x_{n-1}) = sd(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \\ &\leq s^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) = s^2 d(f(x_{n-2}), f(x_{n-3})) \\ &\vdots \\ &\leq s^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Ou seja,  $d(x_{n+1}, x_n) \leq s^n d(x_1, x_0)$ . Agora, usando a desigualdade triangular para distâncias, tem-se, para  $p \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \\ &\quad + d(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}). \end{aligned}$$

Continuando o raciocínio, e utilizando a soma de PG:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &= \sum_{i=0}^{p-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} s^{n+i} \cdot d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{s^n}{1-s} \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Como  $0 \leq s < 1$ , então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s^n}{1-s} \cdot d(x_1, x_0) && \Leftrightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) &\leq 0 \cdot d(x_1, x_0) && \Leftrightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $\{x_n\}$  e, por consequência,  $\{f^n(x)\}$  são sequências de Cauchy em  $X$ , que, por ser um espaço métrico completo, garante  $\lim f^n(x) = x_f \in X$ .

Observe que  $x_f$  é ponto fixo de  $f$ , pois como  $f$  é uma contração, ela também é contínua, como mostrado no Lema 3.11, logo

$$f(x_f) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f \circ f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = x_f.$$

Para finalizar, resta provar que esse ponto  $x_f$  é único.

Suponha, por contradição, que exista outro ponto  $y_f \neq x_f$  que também seja fixo de  $f$ . Assim,

$$\begin{aligned} d(x_f, y_f) &= d(f(x_f), f(y_f)) \leq sd(x_f, y_f) && \Leftrightarrow \\ d(x_f, y_f) &\leq sd(x_f, y_f) && \Leftrightarrow \\ (1-s)d(x_f, y_f) &\leq 0. \end{aligned}$$

Como  $s < 1$ , então  $(1-s) > 0$ , logo  $d(x_f, y_f) \leq 0$ , o que só acontece quando  $x_f = y_f$ , uma contradição, portanto, existe um único ponto fixo. ■

Este capítulo será dedicado a fractais, sendo mais específicos, àqueles gerados a partir de um Sistema de Funções Iteradas (IFS), que será dissertado no decorrer deste. Apesar de ainda não existir uma definição formal, por não se conseguir uma única definição que considere todos os tipos de fractais existentes, dada a ampla gama de objetos pertencentes a essa classe, assim como foi dissertado na introdução. Neste texto, será definido Fractais como objetos que estão no espaço  $\mathcal{H}(X)$  e possuam autossimilaridade. Este, de maneira mais informal, em uma figura pode-se observar um certo padrão que se repete indefinidamente por toda ela, partes dela podem ser observadas nela mesma em escalas menores. Foi escolhido esta formalização, pois durante toda dissertação, os fractais apresentados possuem essa característica, devido ao fato de se trabalhar com fractais gerados a partir de IFS, eles são o ponto fixo destes sistemas. Dito isso, outras propriedades, como possuir uma dimensão não inteira, também são observadas nesses tipos de objetos, porém, esta não é contemplada por objetos como a curva de Hilbert, por exemplo, que cumpre os requisitos dados (ser do tipo IFS e possuir autossimilaridade) e mesmo assim sua dimensão é inteira, é exatamente igual o espaço em que ela está, justamente por preencher ele todo. Assim, este capítulo será sobre contrações e sistemas de contrações no espaço dos fractais  $\mathcal{H}$  para chegar a uma conclusão sobre essas figuras. Os estudos deste capítulo se basearam em Barnsley [2].

## 4.1 Contração no Espaço dos Fractais

Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  o espaço dos fractais associado a ele. Considerando a notação  $h(d)$  para se referir a qual métrica está sendo considerada para o cálculo de  $h$ .

**Lema 4.1.** *Seja  $w : X \rightarrow X$  uma contração no espaço métrico  $(X, d)$ . Então  $w$  leva  $\mathcal{H}(X)$  nele mesmo.*

**Demonstração.** Seja  $S$  um subconjunto compacto não vazio de  $X$ . Então,  $w(S) = \{w(x) : x \in S\}$  também é não vazio, caso contrário,  $w$  não seria uma contração. Deseja-se mostrar que  $w(S)$  é compacto.

Seja  $\{y_n = w(x_n)\}$  uma sequência infinita de pontos em  $S$ . Como  $S$  é compacto, existe uma subsequência  $\{x_{m_n}\}$  que converge para um ponto  $\hat{x} \in S$ . Mas a continuidade de  $w$  implica que  $\{y_{m_n} = w(x_{m_n})\}$  é uma subsequência convergente de  $\{y_n\}$ , que converge para  $\hat{y} = w(\hat{x}) \in w(S)$ . Ou seja, dado qualquer subsequência convergente de  $w(S)$ , seu limite

também pertence a esse conjunto. ■

O próximo lema diz respeito a como criar uma contração em  $(\mathcal{H}(X), h)$  a partir de uma contração em  $(X, d)$ .

**Lema 4.2.** *Seja  $w : X \rightarrow X$  uma contração em um espaço métrico  $(X, d)$  com fator de contração  $s$ . Então,  $w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  definido por*

$$w(B) = \{w(x) : x \in B\}, \quad \forall B \in \mathcal{H}(X),$$

*é uma contração em  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  com fator de contração  $s$ .*

**Demonstração.** Do Lema 3.11, segue que  $w : X \rightarrow X$  é contínua. Então, pelo Lema 4.1,  $w$  leva  $\mathcal{H}(X)$  nele mesmo.

Seja agora  $B, C \in \mathcal{H}(X)$ . Então,

$$\begin{aligned} d(w(B), w(C)) &= \max \{ \min \{ d(w(x), w(y)) : y \in C \} : x \in B \} \\ &\leq \max \{ \min \{ s \cdot d(x, y) : y \in C \} : x \in B \} = s \cdot d(B, C). \end{aligned}$$

Similarmente,  $d(w(C), w(B)) \leq s \cdot d(C, B)$ . Então,

$$\begin{aligned} h(w(B), w(C)) &= d(w(B), w(C)) \vee d(w(C), w(B)) \leq s \cdot (d(B, C) \vee d(C, B)) \\ &\leq s \cdot h(B, C). \end{aligned}$$

Assim,  $h(w(B), w(C)) \leq s \cdot h(B, C)$ , portanto,  $w$  é uma contração. ■

O seguinte lema fornece uma propriedade da métrica de Hausdorff.

**Lema 4.3.** *Para todo  $B, C, D, E \in \mathcal{H}(X)$ ,*

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq h(B, D) \vee h(C, E).$$

**Demonstração.** Primeiramente, mostra-se que  $d(B \cup C, D \cup E) \leq d(B, D) \vee d(C, E)$ . De fato,

$$\begin{aligned} d(B \cup C, D \cup E) &= \max \{ d(x, D \cup E) : x \in B \cup C \} \\ &= \max \{ d(x, D \cup E) : x \in B \} \vee \max \{ d(x, D \cup E) : x \in C \} \\ &= d(B, D \cup E) \vee d(C, D \cup E). \end{aligned}$$

Agora, para todo  $x \in B$ , tem-se

$$\begin{aligned} d(x, D \cup E) &= \min \{ d(x, y) : y \in D \cup E \} \\ &= \min \{ d(x, y) : y \in D \} \wedge \min \{ d(x, y) : y \in E \} \\ &\leq \min \{ d(x, y) : y \in D \} = d(x, D). \end{aligned}$$

Observe que, na parte acima é escolhido o conjunto  $D$  para realizar a demonstração, porém, o mesmo é válido para o conjunto  $E$ , assim, se  $D$  for o conjunto mais próximo de  $x$ , entre ele mesmo e  $E$ , então  $d(x, D \cup E) = d(x, D)$ , caso contrário,  $d(x, D \cup E) < d(x, D)$ . Agora, escolha o maior valor que  $d(x, D)$  pode assumir para qualquer  $x \in B$ , com isso, concluí-se que  $d(B, D \cup E) \leq d(B, D)$ . De maneira análoga, o mesmo é válido para  $x \in C$ . Logo,  $d(C, D \cup E) \leq d(C, E)$ .

Assim, se escolher o maior valor entre  $d(B, D)$  e  $d(C, E)$ , então certamente ele será maior que  $d(B, D \cup E)$  e  $d(C, D \cup E)$ , ou seja,

$$d(B \cup C, D \cup E) = d(B, D \cup E) \vee d(C, D \cup E) \leq d(B, D) \vee d(C, E).$$

Com o mesmo argumento mostra-se que

$$d(D \cup E, B \cup C) = d(D, B \cup C) \vee d(E, B \cup C) \leq d(D, B) \vee d(E, C).$$

Então,

$$\begin{aligned} h(B \cup C, D \cup E) &= d(B \cup C, D \cup E) \vee d(D \cup E, B \cup C) \\ &= \{d(B, D \cup E) \vee d(C, D \cup E)\} \vee \{d(D, B \cup C) \vee d(E, B \cup C)\} \\ &\leq \{d(B, D) \vee d(C, E)\} \vee \{d(D, B) \vee d(E, C)\} = h(B, D) \vee h(C, E). \end{aligned}$$

Ou seja,  $h(B \cup C, D \cup E) \leq h(B, D) \vee h(C, E)$ . ■

O último lema dessa seção provém um método para combinar contrações em  $(\mathcal{H}(X), h)$  para produzir novas contrações em  $(\mathcal{H}(X), h)$ , a função definida nele é mais conhecida como Operador de Hutchinson. Apesar de ser apenas um lema, esse operador é bem relevante para fractais do tipo IFS, que será definido logo a seguir, ele é utilizado para gerá-los, assim como foi feito com o Conjunto de Cantor e aquele conjunto de triângulos, que será generalizado no final desta seção como triângulo de Sierpinski, apresentados nos capítulos anteriores. Então, durante a dissertação, será referido como Operador de Hutchinson e não como Lema 4.4, quando se estiver falando de Fractais.

**Lema 4.4** (Operador de Hutchinson). *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e  $\{w_n : n = 1, 2, \dots, k\}$  contrações em  $(\mathcal{H}(X), h)$ . Seja ainda  $s_n$  o fator de contração de  $w_n$ , para cada  $n$ . Defina  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  por*

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_k(B) = \bigcup_{n=1}^k w_n(B), \quad \forall B \in \mathcal{H}(X).$$

Então,  $W$  é uma contração com fator de contração  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, k\}$ .

**Demonstração.** É demonstrado que vale para  $k = 2$  e então, por um argumento indutivo, prova-se o resultado desse lema. Assim:

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) \\ &\leq h(w_1(B), w_1(C)) \vee h(w_2(B), w_2(C)) \quad (\text{pelo Lema 4.3}) \\ &\leq s_1 h(B, C) \vee s_2 h(B, C) \\ &\leq s h(B, C). \end{aligned}$$

Portanto,  $W$  é uma contração para  $k = 2$ . ■

**Definição 4.5.** *Um Iterated Function System (hiperbólico) ou Sistema de Funções Iteradas (hiperbólico), consiste em um espaço métrico completo  $(X, d)$  com um conjunto finito de contrações  $w_n : X \rightarrow X$ , com os respectivos fatores de contração  $s_n$ , para  $n = 1, 2, \dots, k$ . Utiliza-se a sigla IFS para abreviá-lo, possui a notação  $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, k\}$ , e seu fator de contração é  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, k\}$ .*

Em outras palavras, um IFS é basicamente um sistema de funções, um IFS hiperbólico recebe este nome, pois cada uma das funções é uma contração. A palavra *Iterated* é utilizada por a intenção ser iterar esse sistema. A palavra hiperbólico está entre parênteses na definição, pois nessa dissertação, todos os IFS serão hiperbólicos, então, para evitar repetição, ela será omitida.

**Teorema 4.6.** *Seja  $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, k\}$  um IFS com fator de contração  $s$ . Então, o Operador de Hutchinson  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , definido por*

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B),$$

para todo  $B \in \mathcal{H}(X)$ , é uma contração no espaço métrico completo  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  com fator de contração  $s$ . Ou seja,

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C),$$

para todo  $B, C \in \mathcal{H}(X)$ . Seu único ponto fixo  $A \in \mathcal{H}(X)$  tal que

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^k w_n(A)$$

é dado por  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$ , para qualquer  $B \in \mathcal{H}(X)$ , e recebe o nome de atrator do IFS.

Sua demonstração será dada na próxima seção que é apresentado um teorema semelhante, uma extensão deste, possuindo assim provas análogas. Este é um dos teoremas mais importantes desta dissertação e será referenciado como Teorema da Contração para Conjuntos. Ele não só disponibiliza um método para calcular o atrator de um IFS a partir do Operador de Hutchinson, como também garante sua existência e unicidade. Como dito na introdução deste capítulo, segundo Barnsley [2], os atratores dos IFS hiperbólicos são um tipo de fractal. Ou seja, o teorema dispõe um método para gerar fractais a partir do gráfico desses atratores. Para ilustrar, considere o seguinte exemplo.

Sejam o espaço métrico  $(X, d)$ , com  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  e  $d$  a métrica Euclidiana, e o IFS:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \\ w_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right) \\ w_3(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right) \end{cases} .$$

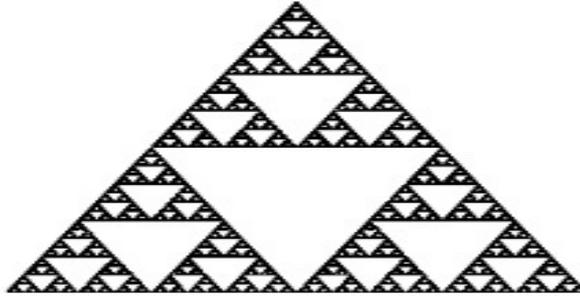
Ao plotar o atrator desse IFS, seguindo o Teorema acima, obtém-se a imagem mostrada na Figura 4.1, um fractal nomeado de Triângulo de Sierpinski.

## 4.2 Transformação e Conjunto de Condensação

**Definição 4.7.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e um subconjunto  $C \in \mathcal{H}(X)$ . Defina uma transformação  $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  por  $w_0(B) = C$ , para qualquer  $B \in \mathcal{H}(X)$ . Então  $w_0$  é chamado de transformação de condensação e  $C$  é chamado de conjunto de condensação.*

Observe que uma transformação de condensação  $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  é uma contração no espaço métrico  $(\mathcal{H}(X), d)$ , seu fator de contração é igual a zero e ela possui um único ponto fixo, o conjunto de condensação.

Figura 4.1: Triângulo de Sierpinski



Fonte: Autoria própria

**Definição 4.8.** *Sejam  $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, k\}$  um IFS com fator de contração  $0 \leq s < 1$ , e  $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  uma transformação de condensação, então  $\{X; w_n, n = 0, 1, \dots, k\}$  é chamado de IFS com condensação e fator de contração  $s$ .*

O seguinte teorema é uma variação do Teorema 4.6 para incluir uma transformação de condensação no IFS.

**Teorema 4.9.** *Seja  $\{X; w_n, n = 0, 1, \dots, k\}$  um IFS com condensação e fator de contração  $s$ . Então, o Operador de Hutchinson  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , definido por*

$$W(B) = \bigcup_{n=0}^k w_n(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(X),$$

*é uma contração no espaço métrico completo  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  com fator de contração  $s$ . Em outras palavras:*

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C),$$

*para todo  $B, C \in \mathcal{H}(X)$ . Seu único ponto fixo  $A \in \mathcal{H}(X)$  tal que*

$$A = W(A) = \bigcup_{n=0}^k w_n(A)$$

*é dado por  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$ , para qualquer  $B \in \mathcal{H}(X)$ .*

**Demonstração.** Note que  $W$ , nas condições do teorema, é uma contração, garantido pelo Lema 4.4, e possui um fator de contração  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .

Pelo Teorema da Contração, como  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  é uma contração, então possui um único ponto fixo  $A \in \mathcal{H}(X)$ , portanto,  $A = W(A)$ . E ainda, uma sequência iterativa  $\{W^n(B)\}$ , para qualquer  $B \in \mathcal{H}(X)$ , convergirá para o ponto fixo  $A$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B) = A$ . ■

A fim de se construir uma noção intuitiva desse teorema, e de se explicitar sua diferença do Teorema 4.6, segue um exemplo.

Considere inicialmente o Triângulo de Sierpinski apresentado na seção anterior. Agora, adicione a seu IFS o conjunto de condensação formado pelo desenho de um sorriso e o posicione no interior do triângulo central, como mostrado na Figura 4.2. Então a transformação de condensação é  $w_0 = \{\text{sorriso}\}$ , ao desenhar o atrator desse novo IFS obtém-se a Figura 4.3. Observe que o conjunto de condensação pode ser qualquer conjunto que deseja-se repetir durante todo o processo de iteração, é como se atribuísse uma característica específica ao atrator sem alterar seu padrão determinado pelo IFS. No exemplo, o

Triângulo de Sierpinski continua o mesmo, possui a mesma forma, porém, há um sorriso posicionado no centro dos três triângulos e, como um fractal possui autossimilaridade, ele se repete em escalas menores por toda a figura seguindo o padrão do IFS.

Figura 4.2: Conjunto de Condensação



Fonte: Autoria própria

Figura 4.3: Atrator do IFS



Fonte: Barnsley and Damko [4]

A palavra condensação, em alguns teoremas, estará entre parênteses, pois o resultado é válido para IFS com ou sem condensação, as demonstrações são análogas, não sendo necessário diferenciá-los.

### 4.3 Teorema da Colagem de Barnsley

Nesta seção, é apresentado um teorema em que é possível construir atratores a partir de IFS que são semelhantes a conjuntos previamente escolhidos, propondo uma forma de lidar com o problema inverso de fractais, dado um conjunto  $L$  qualquer, deseja-se achar um IFS para o qual  $L$  seja seu atrator.

**Lema 4.10.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo, e  $f : X \rightarrow X$  uma contração com fator  $0 \leq s < 1$ , em que  $x_f \in X$  é seu ponto fixo. Então,*

$$d(x, x_f) \leq (1 - s)^{-1} \cdot d(x, f(x)), \quad \forall x \in X.$$

**Demonstração.** Sabe-se que a função distância  $d(a, b)$ , para um  $a \in X$  fixo, é contínua em  $b \in X$ . Sabe-se também que  $f$  é contínua (por ser uma contração) e, pelo Teorema da Contração (3.12),  $x_f = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ . Assim, pela desigualdade triangular para distâncias,

$$\begin{aligned} d(x, x_f) &= d\left(x, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f^n(x)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x)) + \dots + d(f^{n-1}(x), f^n(x))) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n d(f^{m-1}(x), f^m(x)). \end{aligned}$$

Observe que, para um certo  $m = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} d(f^{m-1}(x), f^m(x)) &= d((f^{m-2} \circ f)(x), (f^{m-1} \circ f)(x)) \\ &\leq sd(f^{m-2}(x), f^{m-1}(x)) \\ &\leq s^2 d(f^{m-3}(x), f^{m-2}(x)) \\ &\vdots \\ &\leq s^{m-1} d(x, f(x)). \end{aligned}$$

Então, utilizando a soma de PG, tem-se:

$$\begin{aligned}
 d(x, x_f) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n d(f^{m-1}(x), f^m(x)) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n s^{m-1} \cdot d(x, f(x)) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s^{n-1} - 1}{s - 1} \cdot d(x, f(x)) \\
 &\leq (1 - s)^{-1} d(x, f(x)).
 \end{aligned}$$

■

**Teorema 4.11** (Teorema da Colagem de Barnsley). *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo, um conjunto qualquer  $L \in \mathcal{H}(X)$ , e  $\epsilon \geq 0$ . Escolha um IFS (com ou sem condensação)  $\{X; (w_0), w_1, \dots, w_k\}$  com fator de contração  $0 \leq s < 1$ , de forma que*

$$h \left( L, \bigcup_{\substack{n=1 \\ (n=0)}}^k w_n(L) \right) \leq \epsilon.$$

Então,

$$h(L, A) \leq \frac{\epsilon}{1 - s},$$

em que  $A$  é o atrator do IFS. Equivalentemente,

$$h(L, A) \leq (1 - s)^{-1} h \left( L, \bigcup_{\substack{n=1 \\ (n=0)}}^k w_n(L) \right), \quad \forall L \in \mathcal{H}(X).$$

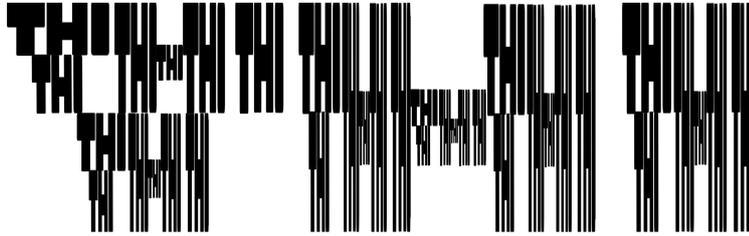
A demonstração do teorema é uma aplicação direta do Lema 4.10.

O teorema diz que para achar um IFS com atrator próximo a um conjunto dado ou que se parece com ele, precisa-se definir uma família de contrações de forma que a união (ou colagem) de suas imagens levem até próximo ao conjunto desejado. A proximidade é medida pela métrica de Hausdorff. Uma característica interessante desse teorema é o fato de se poder criar um IFS para qualquer fractal que deseja desenhar e o atrator dele estará muito próximo do fractal esperado, podendo este ser inventado por você mesmo. Um exemplo intrigante é o da Figura 4.4, em que se escreve cada palavra “THI” com ela mesma. Intuitivamente, obtém-se essa imagem a partir de colagens, colando a palavra THI nela mesma em escalas menores, seguindo a ideia de autossimilaridade. Matematicamente falando, é possível obter um IFS com essa figura sendo seu atrator. Assim, seja o IFS  $\{[0, 3] \times [0, 1]; t_n\}$ , com  $n = 1, 2, \dots, 6$ . As contrações  $t_n$  são da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1(x, y) = \left( \frac{x}{2.7}, \frac{y+1}{2} \right) \\ t_2(x, y) = \left( \frac{x+1.8}{5.9}, \frac{y}{2} \right) \\ t_3(x, y) = \left( \frac{x+9.2}{7.7}, y \right) \\ t_4(x, y) = \left( \frac{x+16}{10}, \frac{y+1}{3.3} \right) \\ t_5(x, y) = \left( \frac{x+14.5}{7.7}, y \right) \\ t_6(x, y) = \left( \frac{x+14.6}{5.9}, y \right) \end{array} \right. .$$

Plotando o atrator desse IFS obtém-se a imagem representada na Figura 4.4.

Figura 4.4: Fractal THI



Fonte: Autoria própria

## 4.4 Dependência dos Fractais sobre os Parâmetros

Os seguintes resultados são importantes, pois estabelecem a dependência contínua do atrator de um IFS hiperbólico aos parâmetros das contrações que constituem o IFS. Sendo contra intuitivo, pois fractais vêm de sistemas dinâmicos caóticos, que serão definidos no próximo capítulo, sem tanta rigorosidade, é equivalente a dizer que eles são sensíveis aos parâmetros e condições iniciais, ou seja, uma pequena variação nos valores do IFS, ou partindo de outro ponto inicial, se obterá uma solução completamente diferente, porém, o atrator desses sistemas se mantêm semelhantes, mesmo com essas pequenas variações. Inclusive, os resultados desta seção estão relacionados ao Teorema da Colagem de Barnsley, pois só é possível trabalhar com problemas de valores inversos com fractais por causa dessa dependência contínua aos parâmetros.

**Lema 4.12.** *Sejam  $(P, d_p)$  um espaço métrico, e  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Seja ainda  $w : P \times X \rightarrow X$  uma família de contrações com fator  $0 \leq s < 1$ . Ou seja, para cada  $p \in P$ ,  $w(p, \cdot)$  é uma contração em  $X$ . E ainda, para cada  $x \in X$  fixo, tem-se alguma contração  $w$  contínua em  $P$ . Então, o ponto fixo de  $w$  depende continuamente de  $p$ . Isso é,  $x_f : P \rightarrow X$  é contínua.*

**Demonstração.** Sejam  $x_f(p)$  o ponto fixo de  $w$ , para algum  $p \in P$ , e  $\epsilon > 0$  dado. Então, para todo  $q \in P$ ,

$$\begin{aligned} d(x_f(p), x_f(q)) &= d(w(p, x_f(p)), w(q, x_f(q))) \\ &\leq d(w(p, x_f(p)), w(q, x_f(p))) + d(w(q, x_f(p)), w(p, x_f(q))) \\ &\leq d(w(p, x_f(p)), w(q, x_f(p))) + sd(x_f(p), x_f(q)), \end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned} d(x_f(p), x_f(q)) - sd(x_f(p), x_f(q)) &\leq d(w(p, x_f(p)), w(q, x_f(p))) && \Leftrightarrow \\ (1-s)d(x_f(p), x_f(q)) &\leq d(w(p, x_f(p)), w(q, x_f(p))) && \Leftrightarrow \\ d(x_f(p), x_f(q)) &\leq (1-s)^{-1}d(w(p, x_f(p)), w(q, x_f(p))). \end{aligned}$$

A parte direita pode ser arbitrariamente pequena, restringindo  $q$  suficientemente próximo de  $p$ .

Obs.: Se existe uma constante real  $C$  de forma que:

$$d(w(p, x), w(q, x)) \leq Cd(p, q), \quad \forall p, q \in P \text{ e } x \in X,$$

então  $d(x_f(p), x_f(q)) \leq (1-s)^{-1} \cdot C \cdot d(p, q)$ , o que é uma estimativa útil. ■

**Lema 4.13.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico, suponha que se têm transformações contínuas  $w_n : X \rightarrow X$ ,  $n = 1, 2, \dots, k$ , dependendo continuamente em um parâmetro  $p \in P$ , em que  $(P, d_p)$  é um espaço métrico completo. Isso é,  $w_n(p, x)$  depende continuamente de  $p$ , para algum  $x \in X$  fixo. Então a transformação  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  definida por*

$$W(p, B) = \bigcup_{n=1}^k w_n(p, B), \quad \forall B \in \mathcal{H}(X),$$

também é contínua em  $p$ . Ou seja,  $W(p, B)$  é contínua em  $p$  no espaço métrico  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  para cada  $B \in \mathcal{H}(X)$ .

**Demonstração.** É suficiente considerar para o caso de  $k = 1$  e então expandir o resultado usando o Lema 4.3. Sejam  $B \in \mathcal{H}(X)$ ,  $p, q \in P$ , e  $\epsilon > 0$ , então

$$\begin{aligned} d(w_1(p, B), w_1(q, B)) &= \max_{x \in B} \min_{y \in B} d(w_1(p, x), w_1(q, y)) \\ &\leq \max_{x \in B} \min_{y \in B} \{d(w_1(p, x), w_1(p, y)) + d(w_1(p, y), w_1(q, y))\}. \end{aligned}$$

Agora,  $P \times B$  é compacto e  $w_1 : P \times B \rightarrow X$  é contínua. Como  $w_1$  é uniformemente contínua, existe um número  $\delta > 0$ , tal que  $d(w_1(p, y), w_1(q, y)) < \epsilon$ , para todo  $y \in B$ , sempre que  $d_p(p, q) < \delta$ . Assumindo  $d_p(p, q) < \delta$ , tem-se

$$\begin{aligned} d(w_1(p, B), w_1(q, B)) &< \max_{x \in B} \min_{y \in B} \{d(w_1(p, x), w_1(p, y)) + \epsilon\} \\ &\leq d(w_1(p, B), w_1(p, B)) + \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} d(w_1(q, B), w_1(p, B)) &< \epsilon \text{ para } d_p(p, q) < \delta, \quad \text{assim,} \\ h(w_1(p, B), w_1(q, B)) &< \epsilon \text{ para } d_p(p, q) < \delta. \end{aligned}$$
■

Juntando ambos os Lemas 4.12 e 4.13 obtém-se o seguinte teorema.

**Teorema 4.14.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico, e  $\{X; (w_0), w_1, \dots, w_k\}$  um IFS (com condensação) com fator de contração  $s$ . Para  $n = 1, 2, \dots, k$ .  $w_n$  depende continuamente de um parâmetro  $p \in P$ , com  $(\mathbf{P}, \mathbf{d})$  sendo um espaço métrico completo. Então o atrator  $A(p) \in \mathcal{H}(X)$  depende continuamente de  $p \in P$ .*

Em outras palavras, pequenas mudanças nos parâmetros nos leva a pequenas mudanças no atrator, desde que o sistema continue sendo hiperbólico. Isso é muito importante, pois demonstra que é possível controlar o atrator de um IFS de forma contínua, apenas ajustando os parâmetros das transformações.

## 4.5 Endereço de Pontos em Fractais

Informalmente, será estudado o conceito de endereço de pontos em fractais. Como exemplo, considere o atrator  $A$  do IFS

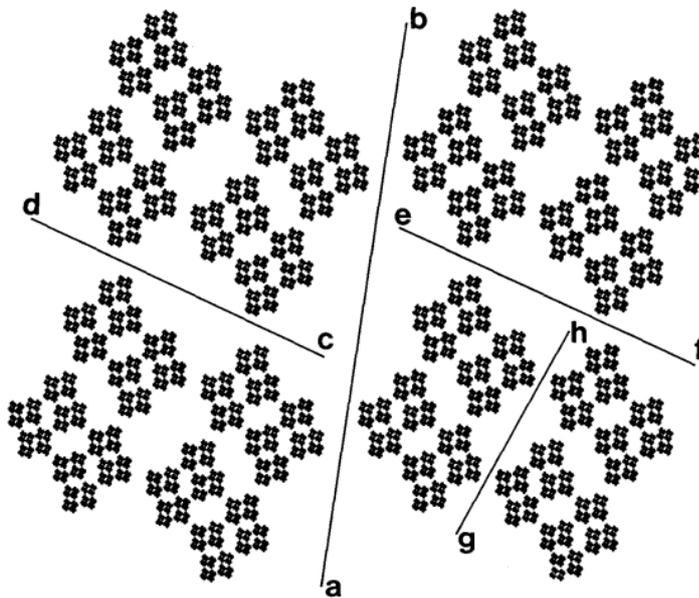
$$\{\mathbb{C}; w_1(z) = (0.13 + 0.64i)z, w_2(z) = (0.13 + 0.64i)z + 1\},$$

que pode ser visualizado na Figura 4.5. Este, é a união de dois conjuntos disjuntos  $w_1(A)$  e  $w_2(A)$ , que estão a esquerda e à direita da reta  $ab$ , respectivamente. Estes, por sua vez, podem ser dados da seguinte maneira:

$$w_1(A) = w_1(w_1(A)) \cup w_1(w_2(A)), \quad w_2(A) = w_2(w_1(A)) \cup w_2(w_2(A)).$$

Assim, pode-se utilizar a ideia de dar endereço aos pontos a partir de sequências das transformações usadas. Continuando com o raciocínio, todos os pontos do subconjunto  $w_1(w_1(A))$  estão situados na parte de baixo da linha  $dc$  e à esquerda de  $ab$ , desta forma, podem receber um endereço que comece com  $11\dots$ , pois foi aplicado  $w_1$  duas vezes. E, quanto mais a fundo analisa-se o atrator, mais números é possível definir em seus endereços. Em alguns casos, é possível definir um “código” único a cada ponto, estes tipos de IFS são chamados de totalmente desconexos, como o exemplo visto na Figura 4.5.

Figura 4.5: Endereço de Pontos em Fractais



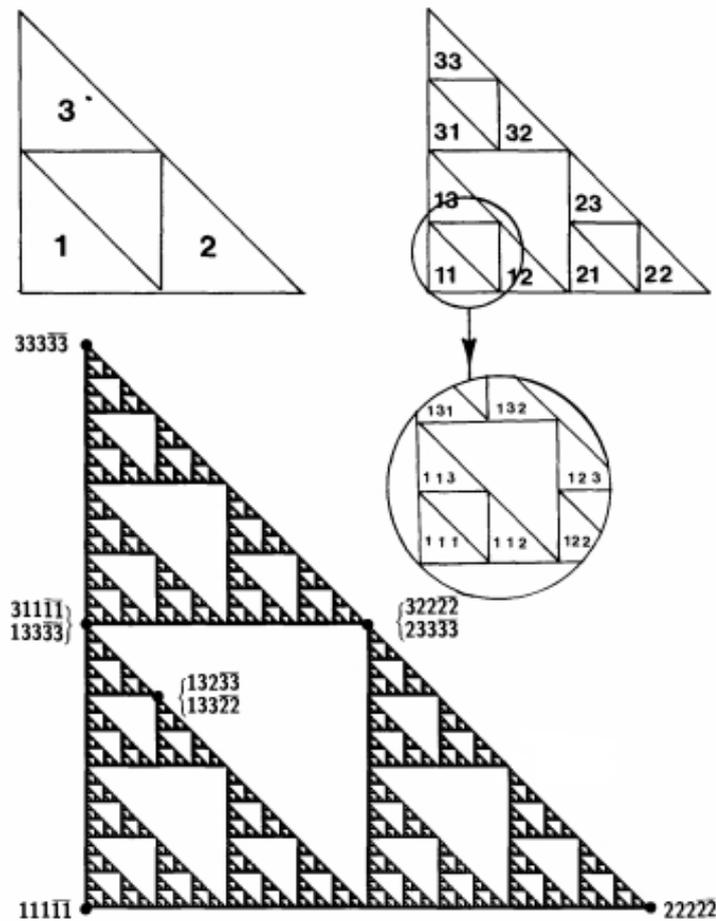
Fonte: *Fractals Everywhere* [2]

Agora, considere um exemplo diferente, mas familiar:

$$\left\{ \mathbb{C}; w_1(z) = \frac{z}{2}, w_2(z) = \frac{z+1}{2}, w_3(z) = \frac{z+i}{2} \right\},$$

seu atrator é o triângulo de Sierpinski. Neste caso, é facilmente verificável que pelo menos três pontos recebem dois endereços diferentes, pois há um ponto nas intercessões  $w_1(A) \cap w_2(A)$ ,  $w_1(A) \cap w_3(A)$  e  $w_2(A) \cap w_3(A)$ , como é visto na Figura 4.6, ao contrário do exemplo anterior, em que  $w_1(A) \cap w_2(A) = \emptyset$ . Porém, também é possível achar pontos com endereços únicos, como os vértices do triângulo maior. Assim, os IFS com esta característica “apenas se tocam”.

Figura 4.6: Endereço de Pontos em Fractais



Fonte: *Fractals Everywhere* [2]

Para finalizar, considere um último caso, o IFS

$$\left\{ [0, 1]; \frac{x}{2}, \frac{3x+1}{4} \right\},$$

seu atrator é  $A = [0, 1]$ . Porém, repare que

$$w_1(A) \cap w_2(A) = \left[ 0, \frac{1}{2} \right] \cap \left[ \frac{1}{4}, 1 \right] = \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right].$$

Diferente do exemplo anterior, em que a intercessão era somente um ponto, neste tem-se um conjunto inteiro de pontos. Assim, os IFS com esta característica possuem “sobreposição”.

Essas terminologias referem-se ao IFS propriamente dito, e não ao seu atrator em si. É definido desta forma pelo fato de um conjunto poder ser o atrator de diversos IFS diferentes. Ou seja, apesar do atrator parecer graficamente o mesmo, o IFS pode possuir características diferentes.

O espaço de código, segundo Barnsley [2], é um espaço em que seus elementos são os números que correspondem aos “endereços” de cada ponto de um atrator, os algarismos utilizados para escrever esse número são chamados de símbolos. O primeiro IFS apresentado nesta seção, por exemplo, possui apenas dois símbolos, os números 1 e 2.

Geralmente, em Álgebra, utiliza-se o conceito de Letra e Alfabeto para se referir a Símbolo e a Conjunto de Símbolos, respectivamente. De maneira mais formal, segundo

Pytheas [17], pode-se definir Letra como sendo um elemento  $a_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , e Alfabeto como o conjunto  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ , formado pelas letras  $a_1, \dots, a_n$ . Se  $a_i = i$ , então o termo símbolo também é utilizado, sendo a escolha de Barnsley em seu livro. Um conjunto de letras é chamado de palavra. As palavras do alfabeto  $\mathcal{A}$  são palavras infinitas, elas possuem um começo, mas não um fim. Se desejado escrever palavras finitas, então é utilizada a notação  $\mathcal{A}^*$ . No caso desta dissertação, é utilizado o termo Endereço no lugar de palavra, por fazer mais sentido no contexto utilizado, e sempre serão infinitos.

**Definição 4.15.** *Um conjunto  $S$  é enumerável se for finito ou existir uma aplicação biunívoca  $f : S \rightarrow \mathbb{N}$  chamada de função de enumerabilidade.*

**Proposição 4.16.** *O espaço de código  $\Sigma$  em dois ou mais símbolos é não enumerável.*

**Demonstração.** A prova será realizada para o espaço de código de dois símbolos  $\{1, 2\}$ . Seja  $\omega = \omega_1\omega_2\cdots \in \Sigma$ , com cada  $w_i \in \{1, 2\}$  e  $i = 1, 2, \dots$ . Defina  $\rho : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$  por  $\rho(1) = 2$  e  $\rho(2) = 1$  e suponha que  $\Sigma$  seja enumerável a partir da função  $c : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$ . Considere o ponto  $\omega \in \Sigma$  definido por  $\omega = \omega_1\omega_2\cdots$ , com  $\omega_n = \rho(c_n(n))$  e  $c_n(n)$  representando o símbolo da  $n$ -ésima posição de  $c(n)$ . O que é uma contradição, pois a função de enumerabilidade nunca alcançará  $\omega$ . ■

## 4.6 Transformações do Espaço de Código ao de Fractais

**Definição 4.17.** *O espaço métrico de código  $(d_C, \Sigma)$  associado ao IFS (com  $k$  contrações) é definido com sendo o espaço de código, com o alfabeto  $\mathcal{A} = \{1, \dots, k\}$ , e a métrica*

$$d_C(\omega, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\omega_n - \sigma_n|}{(k+1)^n}, \quad \text{para todo } \omega, \sigma \in \Sigma.$$

**Lema 4.18.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico,  $\{X; w_n : n = 1, \dots, k\}$  um IFS, e um conjunto  $K \in \mathcal{H}(X)$ . Então existe  $\tilde{K} \in \mathcal{H}(X)$  de forma que  $K \subset \tilde{K}$ , e  $w_n : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ . Em outras palavras,  $\{\tilde{K}; w_n\}$  é um IFS hiperbólico em um espaço compacto.*

**Demonstração.** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Barnsley [2]. ■

**Lema 4.19.** *Sejam o espaço métrico completo  $(X, d)$ , um IFS (com  $k$  contrações) e o espaço de código associado a ele, com o alfabeto  $\mathcal{A} = \{1, \dots, k\}$ . Para cada  $\sigma \in \Sigma$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in X$ , defina*

$$\phi(\sigma, n, x) = (w_{\sigma_1} \circ w_{\sigma_2} \circ \cdots \circ w_{\sigma_n})(x).$$

*Seja  $K$  um subconjunto não vazio de  $X$ . Então, existe uma constante real  $D$  de forma que, para todos  $x_1, x_2 \in X$ ,  $\sigma \in \Sigma$  e  $n, m \in \mathbb{N}$ ,*

$$d(\phi(\sigma, m, x_1), \phi(\sigma, n, x_2)) \leq Ds^{m \wedge n}.$$

*Lembrando que  $m \wedge n$  representa  $\min\{m, n\}$ .*

**Demonstração.** Seja  $\tilde{K}$  definido conforme o Lema anterior. Sem perda de generalidade, suponha  $m < n$ . Observe que

$$\phi(\sigma, n, x_2) = \phi(\sigma, m, \phi(\omega, n - m, x_2)), \quad \omega = \sigma_{m+1}\sigma_{m+2}\cdots\sigma_n\cdots$$

Seja  $x_3 = \phi(\omega, n - m, x_2)$ . Então,  $x_3 \in \tilde{K}$  e

$$\begin{aligned} d(\phi(\sigma, m, x_1), \phi(\sigma, n, x_2)) &= d(\phi(\sigma, m, x_1), \phi(\sigma, n, x_3)) \\ &\leq sd((w_{\sigma_2} \circ \cdots \circ w_{\sigma_j})(x_1), (w_{\sigma_2} \circ \cdots \circ w_{\sigma_j})(x_3)) \\ &\leq s^2 d((w_{\sigma_3} \circ \cdots \circ w_{\sigma_j})(x_1), (w_{\sigma_3} \circ \cdots \circ w_{\sigma_j})(x_3)) \\ &\vdots \\ &\leq s^m d(x_1, x_3) \leq s^m D, \end{aligned}$$

com  $D = \max \{d(x_1, x_3) : x_1, x_3 \in \tilde{K}\}$  finito, pois  $\tilde{K}$  é compacto. ■

**Teorema 4.20.** *Sejam o espaço métrico completo  $(X, d)$ , um IFS (com  $k$  contrações) com  $A$  sendo seu atrator e o espaço de código associado a ele, com o alfabeto  $\mathcal{A} = \{1, \dots, k\}$ . Para cada  $\sigma \in \Sigma$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in X$ ,*

$$\phi(\sigma, n, x) = (w_{\sigma_1} \circ \cdots \circ w_{\sigma_n})(x).$$

Então,

$$\phi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, x)$$

existe, pertence a  $A$ , e é independente de  $x \in X$ . Se  $K$  é um subconjunto compacto de  $X$ , então a convergência é uniforme sobre  $x \in K$ . A função  $\phi : \Sigma \rightarrow A$  é contínua e sobrejetora.

O Teorema acima é uma aplicação direta do Lema 4.18.

**Definição 4.21.** *Sejam um IFS com  $k$  contrações, e um espaço de código associado a ele, com o alfabeto  $\mathcal{A} = \{1, \dots, k\}$ . Seja também a função contínua  $\phi : \Sigma \rightarrow A$  construída no Teorema 4.20. O endereço de um ponto  $a \in A$  (atrator do IFS) é um membro qualquer do conjunto*

$$\phi^{-1}(a) = \{\omega \in \Sigma : \phi(\omega) = a\}.$$

Este conjunto recebe o nome de endereços de  $a \in A$ .

O IFS é totalmente desconexo se cada ponto de seu atrator possui um único endereço. O IFS apenas se toca se não é totalmente desconexo, mas seu atrator contém um conjunto não vazio  $\mathcal{O}$  aberto no espaço métrico  $A$  de forma que

$$(i) \quad w_n(\mathcal{O}) \cap w_m(\mathcal{O}) = \emptyset, \quad \forall n, m = 1, \dots, n \text{ e } n \neq m;$$

$$(ii) \quad \bigcup_1^n w_n(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}.$$

O IFS possui sobreposição se não é nenhuma das outras duas opções.

Quando o atrator de um IFS segue os itens acima, mas não apenas um subconjunto dele como é definido para IFS que apenas se tocam, então ele é dito seguir a condição do conjunto aberto (mais conhecido por Open Set Condition, de Moran).

**Teorema 4.22.** *Seja um IFS com  $k$  contrações inversíveis, e um atrator  $A$ . Ele é totalmente desconexo se, e somente se,*

$$w_n(A) \cap w_m(A) = \emptyset, \quad \forall n, m = 1, \dots, k \text{ e } n \neq m.$$

**Demonstração.** Se o IFS é totalmente desconexo, então cada ponto de seu atrator possui um único endereço, implicando a equação do teorema.

Se o IFS não for totalmente desconexo, então algum ponto possui mais de um endereço. Isto gera uma contradição, pois a imagem inversa desse ponto aplicado em alguma das contrações possuirá mais que um elemento, o que não é possível, pois todas são inversíveis. ■

**Definição 4.23.** *Seja  $A$  o atrator de um IFS com  $k$  contrações. Um ponto  $a \in A$  é periódico (do IFS) se existe uma sequência de número  $\{\sigma(n) \in \{1, 2, \dots, n\}\}_{n=1}^p$  de forma que*

$$a = (w_{\sigma(p)} \circ w_{\sigma(p-1)} \circ \dots \circ w_{\sigma(1)})(a).$$

*Se  $a \in A$  é periódico, então o menor inteiro  $p$  tal que a equação acima é verdadeira é chamado de período de  $a$ .*

**Definição 4.24.** *Um ponto em  $\Sigma$  cujos símbolos são periódicos é chamado de endereço periódico. Um ponto no espaço de código em que seus símbolos são periódicos quando se ignora um conjunto inicial de símbolos é chamado de eventualmente periódico.*

Para visualizar este conceito, observe o código

123123123123123123123...

Repare que 123 se repete indefinidamente, assim, ele é dito ser periódico. Semelhantemente,

123212121212121212121...

repete-se o 21 infinitamente, porém, antes dessa repetição, há os dígitos 123, o fazendo ser um código eventualmente periódico. Apenas alguns exemplos sem ter preocupação com o IFS e o atrator associados a estes códigos. O próximo teorema é uma consequência do Teorema 4.20 e é relevante, pois, como foi visto no capítulo sobre fractais, estes são um conjunto compacto e o ponto fixo de um IFS, então é esperado este comportamento.

**Teorema 4.25.** *O atrator de um IFS é o fecho de seus pontos periódicos.*

**Demonstração.** Do Teorema 4.20, tem-se que o espaço de código é o fecho do conjunto de códigos periódicos. Basta utilizar este argumento em  $A$  a partir da função contínua  $\phi : \Sigma \rightarrow A$  apresentada nesta seção, pois são sistemas equivalentes. ■

## 4.7 Dimensão Fractal

Existem várias formas para quantificar fractais e compará-los. Uma dessas formas recebe o nome de Dimensão Fractal, é uma tentativa de quantificar o quão denso um fractal é no espaço que está. A importância desses valores vem do fato de definirem uma conexão com a realidade.

Dimensão fractal pode ser utilizada para medir nuvens, árvores, redes de neurônios do corpo, cores emitidas pelo sol, entre diversos outros elementos Reais. Essa grandeza nos permite comparar objetos da realidade com conceitos teóricos, como os atratores dos IFS.

Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo,  $A \in \mathcal{H}(X)$  um subconjunto compacto não vazio, e  $B[x, \epsilon]$  uma bola fechada. Deseja-se definir um inteiro  $\mathcal{N}(A, \epsilon)$  como o menor número de bolas fechadas de raio  $\epsilon$  necessárias para cobrir o conjunto  $A$ . Ou seja,

o menor inteiro  $k$  tal que  $A \subset \bigcup_{n=1}^k B[x_n, \epsilon]$ , para algum conjunto distinto de pontos  $\{x_n : n = 1, 2, \dots, k\} \subset X$ .

A garantia da existência de  $\mathcal{N}(A, \epsilon)$  se dá pelo fato de  $A$  ser compacto e, assim, possuir uma subcobertura finita de bolas fechadas, bastando considerar o menor número de bolas em que essa subcobertura ainda cobre o conjunto  $A$ .

A ideia intuitiva de dimensão fractal vem da expressão:

$$\mathcal{N}(A, \epsilon) \approx C\epsilon^{-D},$$

em que  $D$  é a dimensão fractal de  $A$  para alguma constante  $C$ . Dados  $f$  e  $g$  funções reais, então  $f(\epsilon) \approx g(\epsilon)$  se  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln f(\epsilon)}{\ln g(\epsilon)} = 1$ .

Aplicando a função logarítmica em ambos os lados da expressão e isolando  $D$ , obtém-se:

$$D = \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon) - \ln C}{\ln \frac{1}{\epsilon}}.$$

Observe que  $\frac{\ln C}{\ln \frac{1}{\epsilon}}$  se aproxima de 0 a medida que  $\epsilon$  tende a 0. Pois, com um pequeno abuso de linguagem, e considerando esses valores no limite,  $\frac{\ln C}{\ln \frac{1}{0}} = \frac{\ln C}{\ln \infty} = \frac{\ln C}{\infty} = 0$ .

Fornecendo, assim, a seguinte definição.

**Definição 4.26.** *Sejam  $A \subset \mathcal{H}(X)$  compacto,  $(X, d)$  um espaço métrico, e  $\mathcal{N}(A, \epsilon)$  conforme descrito acima, então,  $D$  é a dimensão fractal de  $A$  quando*

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}}.$$

$D(A)$  é lido como a dimensão fractal do subconjunto  $A$ .

Para facilitar o cálculo de  $D$ , existem dois teoremas que possibilitam a troca da variável contínua  $\epsilon$  por uma discreta.

**Teorema 4.27.** *Sejam  $A \subset \mathcal{H}(X)$  compacto,  $(X, d)$  um espaço métrico, e  $\epsilon_n = Cr^n$ , para  $C > 0$  e  $0 < r < 1$  valores reais com  $n = 1, 2, \dots$ . Então,*

$$D(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon_n)}{\ln \frac{1}{\epsilon_n}}.$$

**Demonstração.** Seja  $f(\epsilon) = \max \{\epsilon_n \in E : \epsilon_n \leq \epsilon\}$ , assumindo que  $\epsilon \leq r$ ,

$$f(\epsilon) \leq \epsilon \leq \frac{f(\epsilon)}{r} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(A, f(\epsilon)) \geq \mathcal{N}(A, \epsilon) \geq \mathcal{N}\left(A, \frac{f(\epsilon)}{r}\right).$$

Como  $\ln x$  é uma função crescente positiva de  $x$ , para  $x \geq 1$ :

$$\left\{ \frac{\ln \left( A, \frac{f(\epsilon)}{r} \right)}{\ln \frac{1}{f(\epsilon)}} \right\} \leq \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \right\} \leq \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(A, f(\epsilon))}{\ln \frac{r}{f(\epsilon)}} \right\}.$$

Assumindo que  $\mathcal{N}(A, \epsilon)$  vai para  $\infty$  a medida que  $\epsilon$  vai para zero.

No lado direito,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(A, f(\epsilon))}{\ln \frac{r}{f(\epsilon)}} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon_n)}{\ln \frac{r}{\epsilon_n}} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon_n)}{\ln \frac{1}{\epsilon_n}} \right\}.$$

No lado esquerdo,

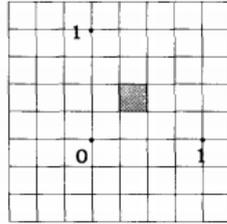
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln \left( A, \frac{f(\epsilon)}{r} \right)}{\ln \frac{1}{f(\epsilon)}} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon_{n-1})}{\ln \frac{1}{\epsilon_n}} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon_n)}{\ln \frac{1}{\epsilon_n}} \right\}.$$

Ou seja, quando  $\epsilon$  vai para zero, ambos os lados da equação vai para o mesmo valor, assim, o valor do meio também existe e é igual aos laterais, completando a prova. ■

**Teorema 4.28** (Dimensão Box-Counting). *Considerando a métrica euclidiana, seja  $A$  um compacto qualquer de  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ . Cubra  $\mathbb{R}^m$  com uma “malha de caixas” de comprimento  $\frac{1}{2^n}$ , como sugere a Figura 4.7 para  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $\mathcal{N}_n(A)$  o número de caixas que intersectam o subconjunto  $A$ . Então,*

$$D(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{N}_n(A)}{\ln 2^n}.$$

Figura 4.7: Malha de quadrados no plano



Fonte: *Fractals Everywhere* [2]

**Demonstração.** Observe que, para qualquer  $n = 1, 2, \dots$ , dado  $m = 1, 2, \dots$ , tem-se:

$$2^{-m} \mathcal{N}_{n-1} \leq \mathcal{N}\left(A, \frac{1}{2^n}\right) \leq \mathcal{N}_{k(n)}.$$

sendo  $k(n)$  o menor inteiro  $k$  que satisfaz  $k \geq n - 1 + \frac{1}{2 \log_2 m}$ .

A primeira inequação (da esquerda) se sustenta pela bola de raio  $\frac{1}{2^n}$  intersectar no máximo  $2^m$  caixas de tamanho  $\frac{1}{2^{n-1}}$ . Já a segunda (da direita) segue do fato de uma caixa de tamanho  $s$  caber dentro de uma bola de raio  $r$ , visto que  $r^2 \geq \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = m\left(\frac{s}{2}\right)^2$ , pelo Teorema de Pitágoras. Agora,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}_{k(n)}}{\ln 2^n} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln 2^{k(n)} \ln \mathcal{N}_{k(n)}}{\ln 2^n \ln 2^{k(n)}} \right\}.$$

Como  $\frac{k(n)}{n}$  vai para 1 a medida que  $n \rightarrow \infty$  e,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln 2^{-m} \mathcal{N}_{n-1}}{\ln 2^n} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}_{n-1}}{\ln 2^{n-1}} \right\} = D,$$

a prova fica completa para  $r = \frac{1}{2}$ . ■

O valor  $\frac{1}{2^n}$  foi utilizado apenas para facilitar os cálculos, outros valores podem ser considerados, até mesmo  $Cr^n$ , conforme definido no Teorema 4.27.

A seguinte proposição prova que conjuntos metricamente equivalentes possuem a mesma dimensão fractal.

**Proposição 4.29.** *Sejam  $(X_1, d_1)$  e  $(X_2, d_2)$  espaços métricos equivalentes com  $\theta : X_1 \rightarrow X_2$  a transformação que define a equivalência entre os espaços. Se  $A_1 \in X_1$  e  $A_2 = \theta(A_1) \in X_2$ , então  $D(A_1) = D(A_2)$ .*

**Demonstração.** A prova deste teorema pode ser encontrada em *Fractals Everywhere* [2]. ■

### 4.7.1 Determinação da Dimensão Fractal

Procurando abranger uma coleção maior de conjuntos, segue uma variação para a definição de dimensão fractal. É utilizado o conceito de lim sup, que pode ser definido como:

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ \sup \{ f(\tilde{\epsilon}) : \tilde{\epsilon} \in (0, \epsilon) \} \}.$$

**Definição 4.30.** *Sejam  $A \subset \mathcal{H}(X)$  com  $(X, d)$  um espaço métrico, e  $\mathcal{N}(\epsilon)$  o menor número de bolas de raio  $\epsilon$  necessárias para cobrir  $A$ , então,*

$$D(A) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mathcal{N}(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}}.$$

**Teorema 4.31.** *Sejam  $m$  um inteiro positivo, e o espaço métrico  $\mathbb{R}^m$  com a métrica euclidiana. Então, a dimensão fractal  $D(A)$  existe para todo  $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ . Se  $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$  de forma que  $A \subset B$ , então  $D(A) \leq D(B)$ . E ainda,  $0 \leq D(A) \leq m$ .*

**Demonstração.** A prova será feita para  $m = 2$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $A \subset \mathcal{Q}$ , o quadrado de lado unitário. Assim,  $\mathcal{N}(A, \epsilon) \leq \mathcal{N}(\mathcal{Q}, \epsilon)$ , para qualquer  $\epsilon > 0$ . Então, para todo  $0 < \epsilon < 1$ , tem-se que

$$0 \leq \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \leq \frac{\ln \mathcal{N}(\mathcal{Q}, \epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}}.$$

Utilizando o lim sup, tem-se

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \right\} \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(\mathcal{Q}, \epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \right\}.$$

O lim sup da direita existe e possui valor 2, ou seja,  $0 \leq D(A) \leq 2$ . Se  $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  com  $A \subset B$ , então ambas as dimensões fractais são definidas. Utilizando um processo análogo, mas substituindo  $\mathcal{Q}$  por  $B$ , conclui-se que  $D(A) \leq D(B)$ , finalizando a demonstração. ■

**Proposição 4.32.** *Sejam o espaço métrico  $\mathbb{R}^m$  com a métrica euclidiana, e  $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ . Se  $D(B) \leq D(A)$ , e a dimensão fractal de  $A$  é dada por*

$$D(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}},$$

então  $D(A \cup B) = D(A)$ .

**Demonstração.** Assuma, para simplificar as contas, que  $D(B) < D(A)$ . Pelo Teorema 4.31, segue que  $D(A \cup B) \geq D(A)$ . Restando provar que  $D(A \cup B) \leq D(A)$ . Comece observando que

$$\mathcal{N}(A \cup B, \epsilon) \leq \mathcal{N}(A, \epsilon) + \mathcal{N}(B, \epsilon).$$

Então,

$$\begin{aligned} D(A \cup B) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(A \cup B, \epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \right\} \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon) + \mathcal{N}(B, \epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \right\} \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(A, \epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \right\} + \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln 1 + \frac{\mathcal{N}(B, \epsilon)}{\mathcal{N}(A, \epsilon)}}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \right\}. \end{aligned}$$

A prova fica completa mostrando que  $\frac{\mathcal{N}(B, \epsilon)}{\mathcal{N}(A, \epsilon)}$  é menor que 1 quando  $\epsilon$  é suficientemente pequeno, assim, o segundo limite da última linha é zero, ou seja, o limite do lado direito converge para  $D(A)$ . ■

**Teorema 4.33.** *Seja  $\{\mathbb{R}^m; w_1, \dots, w_k\}$  um IFS com atrator  $A$ . Suponha que  $w_n$  sejam semelhanças com fatores de contração  $s_n$ , para  $n = 1, 2, \dots, k$ . Se o IFS for totalmente desconexo ou apenas se tocam, então o atrator tem dimensão fractal  $D(A)$  dada por*

$$\sum_{n=1}^k |s_n|^{D(A)} = 1, \quad D(A) \in [0, m].$$

Se o IFS é dito com sobreposição, então  $\bar{D} \geq D(A)$  com  $\bar{D}$  sendo a solução de

$$\sum_{n=1}^k |s_n|^{\bar{D}} = 1, \quad \bar{D} \in [0, \infty).$$

**Demonstração.** A prova completa pode ser encontrada em Bedford 1986, Hardin 1985, Hutchinson 1981 e Reuter 1987. ■

### 4.7.2 Dimensão de Hausdorff-Besicovitch

A Dimensão de Hausdorff-Besicovitch de um subconjunto limitado de  $\mathbb{R}^m$  é outro número real usado para caracterizar a complexa geometria desses subconjuntos. Uma de suas importâncias se dá pelo fato dessa grandeza caracterizar o tamanho de conjuntos que possuem a mesma dimensão fractal, além de ser uma boa aproximação para a mesma.

Considerando  $(\mathbb{R}^m, d)$  como um espaço métrico, sendo  $d$  a métrica Euclidiana, e  $m$  um inteiro positivo. Seja  $A \subset \mathbb{R}^m$  limitado, então, para  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Sejam  $0 < \epsilon < \infty$ ,  $0 \leq p < \infty$ , e  $\mathcal{A}$  o conjunto de seqüências de subconjuntos  $\{A_n \subset A\}$  de forma que  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Então,

$$\mathcal{M}(A, p, \epsilon) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam}(A_n))^p : \{A_n\} \in \mathcal{A}, \text{diam}(A_n) < \epsilon \right\}.$$

Considerando  $(\text{diam}(A_n))^0 = 0$  quando  $A_n$  é vazio.  $\mathcal{M}(A, p, \epsilon)$  é um número que varia no intervalo  $[0, \infty]$ . Defina também,

$$\mathcal{M}(A, p) = \sup \{\mathcal{M}(A, p, \epsilon) : \epsilon > 0\}.$$

**Definição 4.34.** Dadas as condições descritas acima,  $\mathcal{M}(A, p)$ , para cada  $p \in [0, \infty)$ , é a medida de Hausdorff  $p$ -dimensional de  $A$ .

**Teorema 4.35.** Sejam  $(\mathbb{R}^m, d)$ , e  $\mathcal{M}(A, p)$  visto como uma função de  $p$ , então existe um único valor real  $D_H \in [0, m]$  de forma que

$$\mathcal{M}(A, p) = \begin{cases} \infty, & p < D_H \\ 0, & p > D_H \end{cases}, \quad p \in [0, \infty).$$

Ou seja,  $\mathcal{M}(A, p)$  assume apenas três valores,  $0$ ,  $\infty$  ou a constante  $D_H$ , a Dimensão de Hausdorff-Besicovitch do subconjunto  $A$ , que também pode ser denotada por  $D_H(A)$ .

**Demonstração.** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Federer 1969, seção 2.10.3. ■

O seguinte resultado mostra que a dimensão fractal, assim como a de Hausdorff, são possivelmente fracionárias, assumindo no máximo o valor  $m$ , ou seja, a dimensão do espaço que se encontram. E mais, ambas as dimensões podem não possuir o mesmo valor, vindo do fato de  $D_H$  ser uma aproximação para  $D$ , assim como outras que se é conhecido, como a box-counting, apresentada acima. Porém,  $D_H$  apresenta uma das melhores aproximações para  $D$ , podendo assumir até mesmo valores iguais em casos mais específicos, como pode ser observado no Teorema de Moran apresentado na seqüência. Assim, visto que um dos objetivos é estudar um algoritmo para a dimensão de Hausdorff, os teoremas seguintes se fazem relevantes, por mostrar que  $D_H$  é uma boa aproximação e por serem usados direta ou indiretamente no Capítulo 7.

**Teorema 4.36.** Sejam  $D(A)$  e  $D_H(A)$  as dimensões definidas anteriormente como fractal e de Hausdorff-Besicovitch, respectivamente. Então, no espaço euclidiano de dimensão  $m$ , a seguinte desigualdade é válida:

$$0 \leq D_H(A) \leq D(A) \leq m.$$

**Demonstração.** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Barnsley [2]. ■

**Teorema 4.37** (Teorema de Moran). *Seja  $\{\mathbb{R}^m; w_1, \dots, w_k\}$  um IFS com atrator  $A$ . Suponha que  $w_n$  sejam semelhanças com fatores de contração  $s_n$ , para  $n = 1, 2, \dots, k$ . Se o IFS for totalmente desconexo ou apenas se tocam, então o atrator tem dimensão fractal  $D(A)$  e Dimensão de Hausdorff-Besicovitch  $D_H(A)$  iguais. Na verdade,  $D(A) = D_H(A) = D$ , em que  $D$  é dado por:*

$$\sum_{n=1}^k |s_n|^D = 1, \quad D \in [0, m].$$

*E ainda, se  $D > 0$ , então a medida de Hausdorff  $D$ -dimensional  $\mathcal{M}(A, D_H(A))$  é um número real diferente de zero.*

**Demonstração.** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Hutchinson 1981. ■

Para visualizar melhor a dimensão de Hausdorff, segue o exemplo. Considere o Triângulo de Sierpinski como sendo o atrator  $A$ . Primeiro, é necessário estimar  $\mathcal{M}(A, p, \epsilon)$ , com  $0 \leq p < \infty$ ,  $\epsilon = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , e  $n = 1, 2, \dots$ . O triângulo pode ser coberto por  $3^n$  bolas de diâmetro  $\sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Assumindo, sem perda de generalidade, que estes valores são obtidos a partir do ínfimo pedido na definição de  $\mathcal{M}$ . Obtendo assim o valor  $\mathcal{M} = 3^n \sqrt{2^p} \left(\frac{1}{2}\right)^{np}$ .

Agora, passando o limite para este valor obtido, para se conquistar o supremo dos valores de  $\mathcal{M}$ , têm-se:

$$\begin{cases} \infty, & \text{se } p < \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}}, & \text{se } p = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \\ 0, & \text{se } p > \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \end{cases}.$$

Ou seja, isso fornece que a dimensão de Hausdorff do Triângulo de Sierpinski é  $D_H(A) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ . O mesmo valor pode ser obtido através do Teorema de Moran, pois este IFS em questão se enquadra nas condições necessárias para sua aplicação.

# Sistemas Dinâmicos

## 5.1 Introdução

Dinâmica é, basicamente, o estudo do processo através do tempo e o sistema de equações que o corresponde é chamado de Sistema Dinâmico. Geralmente, um sistema com  $n$  equações diferenciais de primeira ordem em um espaço  $\mathbb{R}^m$  é chamado de sistema dinâmico de dimensão  $n$ , o qual determina o comportamento do processo evolutivo através do tempo de determinado objeto ou evento. O sistema pode possuir as propriedades de ser determinístico ou não, possuir dimensão finita ou infinita e possuir diferenciabilidade. De maneira informal, pode-se definir um processo como determinista se todo o seu percurso futuro (ou passado) são unicamente determinados por seu estado no presente. Caso contrário, é chamado de não-determinista. Na mecânica clássica, o sistema de movimento, em que o futuro e o passado são unicamente determinados por sua posição e velocidades iniciais, é um exemplo de Sistema Dinâmico Determinista.

Um processo de evolução pode descrever tanto um processo contínuo, quanto um discreto em relação ao tempo (ou ao parâmetro trabalhado). O contínuo é representado por equações diferenciais, enquanto o discreto é representado por equações de diferenças. A primeira seção deste capítulo foi baseada no livro *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos* de Layek [13], *Introduction to Dynamical Systems*, de Michael Brin e Garrett Stuck [5]; a segunda seção foi baseada no livro *Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão*, de Baraviera e Flávia Branco [1]; as demais seguem Barnsley [2].

Nesta área da matemática, é importante que uma função se “comporte bem” e, neste contexto, é equivalente à suavidade da função. Este conceito vem da definição de derivação. Para caracterizá-lo formalmente, alguns conceitos prévios são necessários, porém, por não ser o foco da dissertação, será definido apenas o necessário, a fim de ser possível entender o contexto que está sendo trabalhado, visto que esta seção é apenas uma introdução a sistemas dinâmicos de forma mais geral para então, nas próximas, focar em sistemas discretos e sua relação com fractais. Assim, uma função suave pode ser compreendida como uma função infinitamente derivável, que se pode derivar infinitas vezes. Faz-se também necessário a utilização de vetores, não aqueles da Álgebra Linear, mas sim os da Física (ou de Geometria Analítica), então, é basicamente um objeto com comprimento, direção e sentido, geralmente representado por um segmento de reta orientado (uma seta). Também, é utilizado os conceitos de derivada e integral do cálculo clássico.

Finalmente, sistema dinâmico contínuo pode ser descrito da seguinte forma.

**Definição 5.1.** *Seja  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ , com  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , um vetor representando as dinâmicas de um sistema. Um sistema dinâmico possui a representação:*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t), \quad (5.1)$$

em que  $f(x, t)$  é uma função suave definida em algum subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , que pode ser escrito como  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ .

A variável  $t$  é geralmente interpretada como o tempo e a função  $f(x, t)$  é geralmente não linear. O intervalo do tempo pode ser finito, semi-finito ou infinito. Por outro lado, o sistema discreto é relacionado com uma aplicação discreta  $g$  em que, dado um ponto  $x_0$ , se obtém um ponto  $x_1 = g(x_0)$ , que dará origem a um ponto  $x_2 = g(x_1)$  e assim em diante, um processo iterativo, como já definido anteriormente. Em outras palavras,  $x_{n+1} = g(x_n) = g(g(x_{n-1}))$ . Sistemas discretos serão aprofundados mais adiante.

Se a equação 5.1 for independente do tempo, da variável  $t$ , então o sistema é chamado de Autônomo, as soluções do sistema não mudam em função do tempo. Caso contrário, o sistema é chamado de Não Autônomo. Um sistema  $n$ -dimensional não autônomo pode ser convertido em uma forma autônoma introduzindo uma variável  $x_{n+1}$  tal que  $x_{n+1} = t$ . Geralmente, a solução da equação 5.1 é de difícil ou impossível obtenção. A seguir é dado alguns exemplos de sistemas dinâmicos.

- (i) Autônomo:  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$ , com  $\alpha, \beta > 0$ . A equação é um oscilador linear harmônico amortecido, os parâmetros  $\alpha, \beta$  são, respectivamente, a força do amortecimento e a força restauradora linear.
- (ii) Não Autônomo:  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = f \cos \omega t$ , com  $\alpha, \beta > 0$ . A equação é um oscilador linear com força externa dependente do tempo.  $f$  e  $\omega$  são a amplitude e a frequência da força motriz, respectivamente.

Agora, será apresentado um exemplo de um sistema dinâmico bastante conhecido, o modelo populacional Presa-Predador ou modelo de Lotka-Volterra. Foi formulado primeiramente por Alfred J. Lotka (1880 – 1949) no ano de 1910 e posteriormente por Vito Volterra (1860 – 1949) no ano de 1926. Deseja-se, por exemplo, estudar a dinâmica populacional entre a população de raposas e de coelhos, que vivem juntos em um determinado ambiente. A raposa se alimenta dos coelhos, assim, a quantidade deste no ambiente afeta diretamente a quantidade de raposas, pois depende deles para sua alimentação. Se a quantidade de coelhos é alta, a população de raposas aumenta e, nesse caso, a de coelhos cairá. Quando a quantidade de coelhos cai, a população de raposas também cai. Logo, as raposas ficarão sem comida, diminuindo sua população que, por consequência, irá aumentar a de coelhos e assim em diante. Pode-se, assim, modelar matematicamente o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy \end{cases},$$

$x$  denota a densidade de população da presa e  $y$  a densidade de população dos predadores. O parâmetro  $\alpha$  representa a taxa de crescimento da presa (sozinha), que crescerá sem o predador,  $\gamma$  representa a taxa de morte dos predadores sem interação com a presa, pois morrerão de fome, enquanto os parâmetros  $\beta$  e  $\delta$  são os parâmetros de relação entre os dois, a morte da presa pelo predador e a procriação do predador que agora não morrerá de fome, respectivamente.

### 5.1.1 Principais Características

Nessa seção, é dissertado acerca de algumas definições importantes para sistemas dinâmicos, com foco nos sistemas contínuos, os discretos serão trabalhados na próxima. A abordagem qualitativa é a combinação de análise com geometria, é uma ferramenta poderosa para analisar o comportamento do sistema, que se dá ao desenhar sua trajetória, que nada mais é do que a solução do sistema, também conhecida por curva integral. Essa análise provém inúmeras características importantes, não se restringido apenas a solução, mas também a sua evolução (ou seu passado) em momentos específicos pelo tempo, algumas dessas propriedades serão trabalhadas a seguir.

O processo de evolução do tempo de determinado ponto do sistema é chamado de trajetória, assim, pode-se analisar solução de um sistema dinâmico ao considerar a união de todas essas trajetórias. A solução  $x(t)$  de um sistema  $\dot{x} = f(x)$  que satisfaz  $x(t_0) = x_0$  fornece seu passado e sua evolução, para  $t < t_0$  e  $t > t_0$ , respectivamente.

**Definição 5.2.** Fluxo pode ser definido por  $\phi_t(x) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , em que  $\phi_t(x) = \phi(t, x)$  é uma função suave de  $x \in U \subset \mathbb{R}^n$  e  $t \in I \subset \mathbb{R}$  que satisfaz a equação

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = f(\phi_t(x)),$$

para todo  $t$ , de forma que a solução através de  $x$  exista e  $\phi(0, x) = x$ .

Fluxos satisfazem as seguintes propriedades:

- (a)  $\phi_0 = I_d$ ;
- (b)  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ .

Desta forma, seja o sistema  $\dot{x} = f(x)$ , com  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , de condição inicial  $x(0) = x_0$ . A solução deste, para um ponto específico, pode ser considerada uma curva contínua no espaço  $\mathbb{R}^n$  e parametrizada por  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , essa curva é chamada de **Órbita**, representada matematicamente pelo conjunto  $\{\phi_t(x_0) \mid t \in I\}$ . O conjunto de todas as órbitas do sistema é chamado de **Retrato de Fase**. Pode-se ainda pensar em um **Campo de Vetores** que tangencia a órbita, suas orientações (direção e sentido) segue a evolução do ponto.

**Definição 5.3.** Define-se  $x$  como um ponto periódico de período  $p$  se este é o menor inteiro tal que  $\phi_p(x) = x$ . Quando  $p = 1$ , ou seja,  $\phi(x) = x$ , então  $x$  é um ponto fixo de  $f$ . Quando  $x$  é periódico, sua órbita é um conjunto finito, conhecido como órbita periódica.

**Definição 5.4.** O conjunto  $\omega$ -limite de  $x$ , denotado por  $\omega(x)$ , é o conjunto dos pontos de acumulação de uma órbita, ou seja, os pontos pelos quais a órbita passará uma infinidade de vezes.

De forma mais técnica,  $z \in \omega(x)$  se existe uma sequência infinita e crescente de números naturais  $n_1, n_2, \dots$  tal que  $d(\phi_{n_i}(x), z) \rightarrow 0$ . É possível também falar no  $\omega$ -limite de um conjunto:

$$\omega(X) := \{\omega(x) : x \in X\}.$$

**Definição 5.5.** O conjunto  $\alpha$ -limite de  $x$ , denotado por  $\alpha(x)$ , é o conjunto dos pontos de acumulação de uma órbita quando se “caminha para trás”, ou seja,  $t < 0$ . De forma mais técnica,  $y \in \alpha(x)$  se existe uma sequência infinita e decrescente de números naturais  $n_1, n_2, \dots$  tal que  $d(\phi_{-n_i}(x), z) \rightarrow 0$ . Analogamente, pode-se falar no  $\alpha$ -limite de um conjunto:

$$\alpha(X) := \{\alpha(x) : x \in X\}.$$

**Definição 5.6.** Um conjunto  $A \in X$  é o atrator de um ponto  $x$  se  $\phi(A) = A$ , e a órbita de  $x$  se aproxima de  $A$ . Em outras palavras,  $A$  é um elemento fixo de  $X$ . Note que quando a órbita futura de um elemento  $x \in X$  entra no conjunto  $A$  ela não pode mais sair. O conjunto de pontos cujas órbitas se aproximam de  $A$  é chamado de bacia de atração de  $A$ . De forma análoga, um conjunto  $R \in X$  é chamado de repulsor para um ponto  $x$  se  $\phi_{-1}(R) = R$  e a órbita passada de  $x$  se aproxima de  $R$ .

Assim, segue um exemplo para visualizar como esses conceitos e definições ocorrem em sistemas dinâmicos contínuos.

Deseja-se analisar, qualitativamente, o sistema  $\dot{x}(t) = \text{sen } x$  com condição inicial  $x(0) = x_0$ . O sistema é de uma dimensão, não linear, autônomo e sua forma fechada (solução analítica) existe. Resolvendo a equação diferencial separável, obtém-se

$$\frac{dx}{dt} = \text{sen } x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\text{sen } x} = \text{cosec}(x)dx.$$

Agora, integrando-a:

$$\begin{aligned} t &= \int \text{cosec}(x)dx \\ &= -\ln |\text{cosec}(x) + \cotg(x)| + c, \end{aligned}$$

com  $c$  sendo a constante de integração.

Apesar de o sistema ser consideravelmente simples, analisá-lo a partir de sua solução de forma fechada, para qualquer condição inicial é difícil, pois não é possível isolar a variável  $x$  de forma fácil e intuitiva, a fim de se obter o operador do fluxo e desenhar suas órbitas. Realizando operações algébricas, pode-se reescrever  $t$  da seguinte forma

$$t = \ln \left| \text{tg } \frac{x}{2} \right| + c \Rightarrow x(t) = 2 \arctan(Ae^t),$$

em que  $A$  é a contante de integração. Calculando  $A$  para o valor inicial  $x(0) = x_0$  tem-se:

$$A = \text{tg } \frac{x_0}{2}.$$

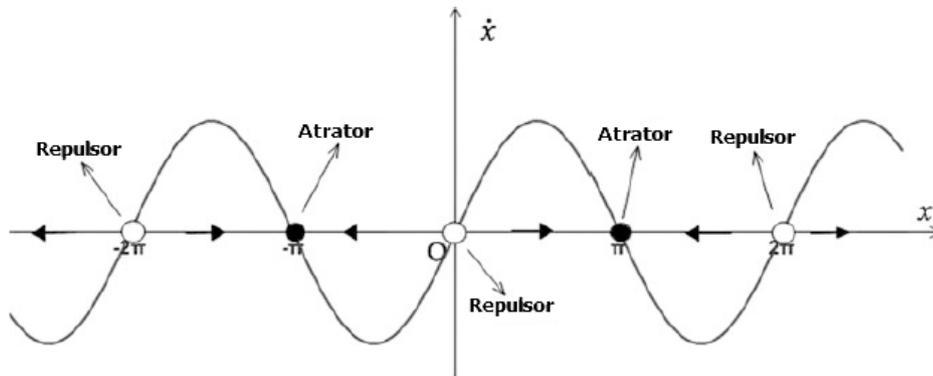
Sabe-se que o fluxo é dado por  $\phi_t$  quando se varia a condição inicial  $x_0$ , assim,  $\phi_t(x)$  é dado por

$$\phi_t(x) = 2 \arctan \left( \text{tg } \left( \frac{x}{2} \right) e^t \right).$$

Como foi dito acima, sem um software ou algo do tipo, plotar esse fluxo não é simples.

Agora, será analisado este mesmo sistema pela abordagem qualitativa. De maneira simplificada, estuda-se o gráfico de  $\dot{x} = \text{sen } x$  no plano de eixos  $\dot{x}$  por  $x$ . Isso dá o fluxo no eixo  $x$ , o que era complicado de se obter na forma fechada se torna algo mais fácil. Construindo uma analogia com a interpretação física, em que  $x$  é a posição e  $\dot{x}$  é a velocidade, então o gráfico representa a velocidade instantânea a cada posição do sistema. A equação diferencial representa um campo de vetores na reta, ele fornece a velocidade instantânea em cada posição  $x$ . Assim, os vetores terão sua direção na reta  $x$  e o sentido será para a direita quando  $\dot{x} > 0$  e para a esquerda quando  $\dot{x} < 0$ .

Nos pontos críticos (ou de equilíbrio)  $\dot{x} = 0$ , tem-se velocidade nula, então o sistema não está se movendo. Eles ocorrem quando  $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = n\pi$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ . Então este sistema possui infinitos pontos de equilíbrio em  $\mathbb{R}$  e a intenção é estudá-los. Observando o gráfico (Figura 5.1), há dois tipos de pontos, o que o fluxo vai em direção a ele, que se denominam atratores e representam os pontos de equilíbrio estáveis e os que o fluxo vai em direção contrária, os repulsores, que representam os pontos de equilíbrio instáveis.

Figura 5.1: Gráfico de  $\dot{x} = \sin x$ 

Fonte: An Introduction to Dynamical Systems and Chaos [13]

Analisando a condição inicial  $x(0) = x_0$ , se  $0 < x_0 < \pi$  ou  $\pi < x_0 < 2\pi$ , então, pelo fluxo, o sistema ganha velocidade até determinado ponto e a partir dele, começa a perder, até chegar em  $\pi$ , o qual tem velocidade zero, ou seja, ficará “parado” nesse ponto, em outras palavras,  $x$  tende a  $\pi$  a medida que  $t$  tende a infinito, pois  $\pi$  é um ponto de atração. Ao mesmo tempo, ele se afasta de seus repulsores, não importando o quão próximo esteja deles. Porém, se deseja-se analisar seu passado, de maneira análoga,  $x$  irá para os pontos de repulsão, ou seja,  $x$  tende aos seus repulsores a medida que  $t$  tende a  $-\infty$ . O mesmo pode ser feito para cada valor inicial que se desejar, porém, pelo gráfico, fica claro o que acontecerá de forma geral.

## 5.2 Sistemas Dinâmicos Discretos

Sistemas Dinâmicos discretos são fontes de fractais determinísticos, pois estão diretamente ligados com a teoria de IFS apresentada no Capítulo 4. Será apresentado, nas próximas seções, um Sistema Dinâmico de Mudança, que pode ser relacionado a um IFS. Estudando as órbitas desses sistemas obtêm-se alguns resultados importantes acerca de fractais.

Considere, nesta seção, que  $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ , sendo então  $x_n$  os pontos do processo iterativo definido nas seções anteriores.

**Definição 5.7.** Um Sistema Dinâmico é uma transformação  $f : X \rightarrow X$  definida em um espaço métrico  $(X, d)$ . É denotado por  $\{X; f\}$ . A órbita de um ponto  $x$  é a sequência  $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  ou  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ , considerando  $x_0 = x$ .

Então, há o interesse em saber o que acontece quando se segue determinada órbita, se existe algum tipo de atrator que ocorre frequentemente.

**Definição 5.8.** Seja  $\{X; f\}$  um sistema dinâmico. Um ponto periódico de  $f$  é um ponto  $x \in X$  de forma que  $f^p(x) = x$ , para algum  $p \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $p$  é chamado de período de  $x$ . A órbita de um ponto periódico é chamada de Ciclo de  $f$ . O período mínimo de ciclos é o número de pontos distintos pertencentes a ele. O período de um ciclo de  $f$  é o período de um ponto no ciclo.

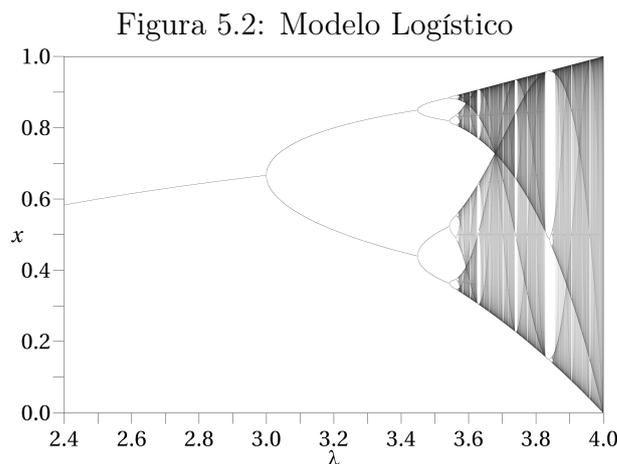
**Definição 5.9.** Sejam  $\{X; f\}$  um sistema dinâmico, e  $x_f \in X$  um ponto fixo de  $f$ ,  $x_f$  é chamado de ponto fixo atrator de  $f$  se existe  $\epsilon > 0$  de forma que  $f$  leva a bola  $B(x_f, \epsilon)$  até ela mesma, e ainda,  $f$  é uma contração em  $B(x_f, \epsilon)$ . O ponto  $x_f$  é chamado de ponto

fixo repulsivo de  $f$  se existem  $\epsilon > 0$  e  $C > 1$  de forma que

$$d(f(x_f), f(y)) \geq Cd(x_f, y), \quad \text{para todo } y \in B(x_f, \epsilon).$$

Um ponto periódico de  $f$  de período  $p$  é atrator se também for um ponto periódico de  $f_p$ . Um ciclo de período  $p$  é um ciclo atrator de  $f$  se o ciclo contém um ponto atrator periódico com período  $p$ . O mesmo, de forma análoga, para um ponto periódico repulsivo.

Considere o sistema dinâmico logístico, dado por  $\{[0, 1]; f(x) = \lambda x(1 - x)\}$ . É considerado um sistema importante, pois apesar de sua simplicidade, consiste apenas de uma função quadrática, é possível analisar um comportamento caótico, que será dissertado mais a frente. De maneira informal, um sistema caótico é algo que não se é possível prever, suas trajetórias (soluções) não seguem um certo padrão devido à sua sensibilidade aos parâmetros, dado no caso por  $\lambda$ . No sistema em questão, a partir de certo ponto, as trajetórias se dividem em dois, não sendo possível saber qual das duas o sistema seguirá. Quanto mais se aumenta o valor de  $\lambda$ , mais bifurcações surgem, chegando a algo inviável de se analisar, como sugere a Figura 5.2. Porém, qualitativamente, ainda é possível analisar esses sistemas, mesmo para altos valores de  $\lambda$ , apesar de possuírem demonstrações mais sofisticadas.



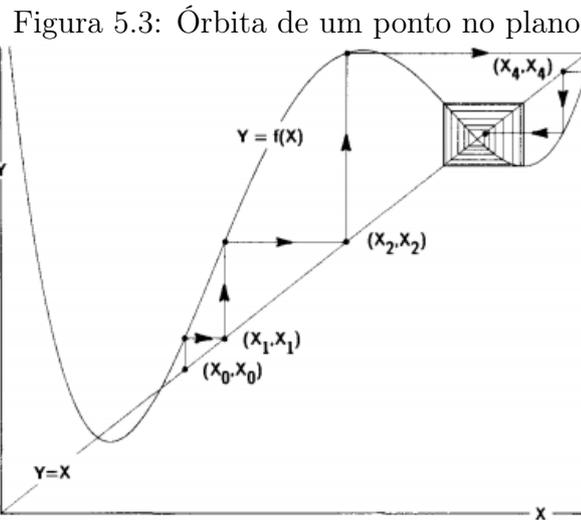
Fonte: Jordan Pierce, CC0, via Wikimedia Commons

Apenas para exemplificar um ponto fixo atrator, considere o Sistema Logístico para  $\lambda = 2$ . Observe que,  $x_f = \frac{1}{2}$  é o único ponto fixo desse sistema. Como  $Im(F) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , e  $f$  é uma contração, então  $x_f = \frac{1}{2}$  é um ponto fixo atrator.

**Definição 5.10.** *Seja  $\{X; f\}$  um sistema dinâmico. Um ponto  $x \in X$  é eventualmente periódico de  $f$  se  $f^m(x)$  é periódico, para algum inteiro  $m$ . Ou seja,  $x$  pode ou não ser periódico, porém, o ponto  $f^m(x)$  é periódico (a partir de determinada iteração), então se diz que  $x$  é eventualmente periódico.*

Se uma órbita  $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  é eventualmente periódica para algum inteiro  $m$ , então ela recebe o nome de ciclo limite, pois a partir de  $m$ , esta orbita se torna um ciclo, porém, não se pode desconsiderar os pontos anteriores. Assim, surge a notação para dizer que ela converge para algo periódico. As definições acima podem ser generalizadas para o passado, assim como foi realizado na seção anterior, quando existe a inversa da  $f$ , inclusive para o ciclo limite de um conjunto.

Existe uma construção simples, conhecida como diagrama de teia, para a representação da órbita de um sistema dinâmico da forma  $\{\mathbb{R}; f(x)\}$  utilizando o gráfico da função  $f$ . Inicialmente plota-se o gráfico  $y = f(x)$  e a reta  $y = x$ . Partindo do ponto  $(x_0, x_0)$ , o conecte (com um segmento de reta) com o ponto  $(x_0, x_1)$  e este com o ponto  $(x_1, x_1)$ . Em seguida, aplica-se o mesmo com o ponto  $(x_1, x_1)$  até  $(x_1, x_2)$ , finalizando em  $(x_2, x_2)$ . Assim, repete-se o processo analogamente. A órbita pode ser visualizada na reta  $y = x$ , com os pontos  $(x_0, x_0), (x_1, x_1), \dots, (x_n, x_n), \dots$ . Observa-se um exemplo na Figura 5.3.



Fonte: *Fractals Everywhere* [2]

### 5.3 Dinâmica nos Fractais

**Lema 5.11.** *Seja  $\{X; w_n, n = 1, \dots, k\}$  um IFS com atrator  $A$ . Se ele for totalmente desconexo, então, para cada  $n \in \{1, \dots, k\}$ , a transformação  $w_n : A \rightarrow A$  é injetora.*

**Demonstração.** A prova é efetuada através da utilização do espaço de código. Suponha pontos distintos  $a_1, a_2 \in A$  de forma que  $w_n(a_1) = w_n(a_2) = a \in A$ . Se  $a_1$  é representado pelo código  $\omega$ , e  $a_2$  por  $\theta$ , então  $a$  possui duas representações distintas,  $n\omega$  e  $n\theta$ , o que é impossível, pois o IFS é totalmente desconexo. ■

**Definição 5.12.** *Seja  $\{X; w_n, n = 1, \dots, k\}$  um IFS totalmente desconexo com atrator  $A$ . A transformação de mudança  $S : A \rightarrow A$  é definida por*

$$S(a) = w_n^{-1}(a), \text{ para } a \in w_n(A),$$

em que  $w_n$  é visto como uma transformação em  $A$ . O sistema dinâmico  $\{A; S\}$  é chamado de Sistema Dinâmico de Mudança associado ao IFS.

### 5.4 Equivalência de Sistemas

**Definição 5.13.** *Dois espaços métricos  $(X_1, d_1)$  e  $(X_2, d_2)$  são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo  $f : X_1 \rightarrow X_2$ . Dois subconjuntos  $S_1 \in X_1$  e  $S_2 \in X_2$  são topologicamente equivalentes, ou homeomorfos, se os espaços métricos  $(S_1, d_1)$  e  $(S_2, d_2)$*

são topologicamente equivalentes.  $S_1$  e  $S_2$  são metricamente equivalentes se  $(S_1, d_1)$  e  $(S_2, d_2)$  são espaços métricos equivalentes, conforme definido no Capítulo 2.

**Definição 5.14.** *Dois sistemas dinâmicos  $\{X_1; f_1\}$  e  $\{X_2; f_2\}$  são equivalentes, ou topologicamente conjugados, se existe um homeomorfismo  $\theta : X_1 \rightarrow X_2$  de forma que*

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= (\theta^{-1} \circ f_2 \circ \theta)(x_1), \text{ para todo } x_1 \in X_1, \\ f_2(x_2) &= (\theta \circ f_1 \circ \theta^{-1})(x_2), \text{ para todo } x_2 \in X_2. \end{aligned}$$

Dada a definição de Sistema de mudança, o seguinte teorema se torna útil e muitas vezes mais relevante que a própria definição, por mostrar como se utiliza essa a transformação de mudança e o porquê desse nome.

**Teorema 5.15.** *Sejam  $\{X; w_1, \dots, w_N\}$  um IFS totalmente desconexo, e  $\{A; S\}$  o sistema dinâmico de mudança associado a ele. Sejam também  $\Sigma$  o espaço de código associado ao IFS de  $N$  símbolos, e  $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$  definido por*

$$T(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots) = \sigma_2\sigma_3\sigma_4\cdots, \quad \text{para todo } \sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots \in \Sigma.$$

*Então, os dois sistemas dinâmicos  $\{A; S\}$  e  $\{\Sigma, T\}$  são equivalentes. O homeomorfismo que garante isso é definido por  $\theta : \Sigma \rightarrow A$ . E ainda,  $\{a_1, \dots, a_p\}$  é um ciclo repulsivo de período  $p$  em  $S$  se, e somente se,  $\{\theta^{-1}(a_1), \dots, \theta^{-1}(a_p)\}$  é um ciclo repulsivo de período  $p$  em  $T$ .*

**Demonstração.** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Barnsley [2]. ■

Apesar de ter sido traduzido como Sistema de Mudança, ele é comumente chamado de Sistema *Shift* (sem tradução), assim como a transformação *shift* (de mudança) associada a ele. Dois sistemas serem equivalentes significa dizer que ambos possuem certas propriedades em comum. Por exemplo, possuírem o mesmo número de ciclos periódicos. O interessante é que isso ocorre mesmo sendo sistemas diferentes no ponto de vista da geometria por trás deles. Uma particularidade importante que compartilham é que se um for caótico, ambos serão, conceito que será finalmente explicado na próxima seção.

## 5.5 Dinâmica Caótica em Fractais

**Definição 5.16.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Um subconjunto  $B$  é dito denso em  $X$  se seu fecho  $\overline{B}$  é igual a  $X$ . A sequência  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  de pontos em  $X$  é dita densa em  $X$  se, para cada  $a \in X$ , existe uma subsequência  $\{x_{\sigma_n}\}_{n=0}^{\infty}$  que converge para  $a$ . Assim, uma órbita  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  é densa em  $X$  se a sequência que a define for densa em  $X$ .*

A propriedade de um conjunto (ou sequência) ser denso em um espaço é invariante sobre equivalência de sistemas. Ou seja, se  $\theta$  define um homeomorfismo entre  $\{X; f\}$  e  $\{Y; g\}$  e se  $B$  é denso em  $X$ , então  $\theta(B)$  também é denso em  $Y$ . O mesmo para uma órbita (sequência) desses sistemas.

**Definição 5.17.** *Um sistema dinâmico  $\{X; f\}$  é transitivo se, sempre que  $U$  e  $V$  são subespaços abertos de um espaço métrico  $(X, d)$ , existe um inteiro finito  $n$  de forma que*

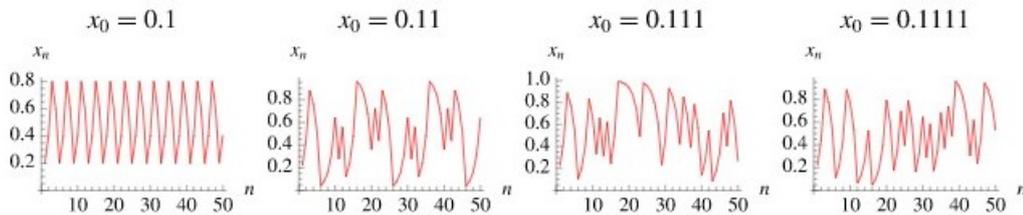
$$U \cap f^n(V) \neq \emptyset.$$

Como exemplo, considere o sistema dinâmico  $\{[0, 1]; f(x) = \min\{2x, 2 - 2x\}\}$ . Dados quaisquer dois intervalos abertos pertencentes a  $[0, 1]$ , quando iterar um deles por  $f$ , o intervalo aumentará, interceptando o outro a partir de determinada iteração.

**Definição 5.18.** Um sistema dinâmico  $\{X; f\}$  é sensível às condições iniciais se existe  $\delta > 0$  de forma que, para qualquer  $x \in X$ , e qualquer bola aberta  $B(x, \epsilon)$ , com  $\epsilon > 0$ , existe  $y \in B(x, \epsilon)$  e um inteiro  $n \geq 0$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ .

Em outras palavras, pode-se dizer que órbitas que começam próximas, se distanciam pela ação do sistema. Como, por exemplo, o sistema  $\{[0, 1]; 2x \bmod 1\}$ . Para cada  $x \in [0, 1]$  escolhido como condição inicial, obtém-se um gráfico bem diferente do anterior, como ilustra a Figura 5.4 para alguns pontos que estão próximos uns dos outros.

Figura 5.4: Sistema  $\{[0, 1]; 2x \bmod 1\}$



Fonte: Wolfram/Alpha

**Definição 5.19.** Um sistema dinâmico  $\{X; f\}$  é dito caótico se:

- (i) É transitivo;
- (ii) É sensível às condições iniciais;
- (iii) O conjunto das órbitas periódicas de  $f$  é densa em  $X$ .

**Teorema 5.20.** O sistema dinâmico de mudança associado a um IFS totalmente desconexo de duas ou mais transformações é caótico.

**Demonstração.** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Barnsley [2]. ■

**Lema 5.21.** Seja  $\{A; S\}$  um sistema dinâmico de mudança associado ao IFS totalmente desconexo  $\{X; w_1, \dots, w_k\}$ . Seja também  $\mathcal{N}(p)$  o número de ciclos distintos de período  $p$ . Então,

$$\mathcal{N}(p) = \frac{k^p - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ divide } p}}^{p-1} n\mathcal{N}(n)}{p}.$$

**Demonstração.** Para a demonstração, é suficiente restringir ao espaço de código  $\{\Sigma; T\}$  com  $k = 2$  símbolos.

Para  $p = 1$ , os ciclos de período 1 são exatamente os pontos fixos de  $T$ , ou seja,  $T(\sigma) = \sigma$ . Isto implica em  $\sigma = \overline{1111}$  ou  $\sigma = \overline{2222}$ . Então,  $\mathcal{N}(1) = 2$ .

Para  $p = 2$ , os ciclos são os pontos fixos de  $T^2$ , logo,  $T^2(\sigma) = \sigma$ . Assim,  $\sigma$  será  $\overline{11}$ ,  $\overline{12}$ ,  $\overline{21}$  ou  $\overline{22}$ . Destes, os ciclos que não possuem período 2, devem obrigatoriamente possuir período 1. Concluindo que existem 2 pontos distintos para  $p = 2$ , então

$$\mathcal{N}(2) = \frac{(2^2 - \mathcal{N}(1))}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Uma indução em  $p$  completa a prova para  $k = 2$ .

■

# Teoria da Medida

Neste capítulo, será dissertado um pouco sobre Teoria da Medida sem muito aprofundamento, apenas o essencial para enunciar o Teorema de Elton, um resultado que possibilita o Random Iteration Algorithm, um procedimento para geração gráfica dos atratores de IFS, os quais são usados neste trabalho. Assim, os estudos seguem o livro *Real Analysis*, do Folland [10], até a seção de integração, após esta, é seguido novamente Barnsley [2]. O símbolo  $\overline{\mathbb{R}}$  representa o conjunto  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

## 6.1 Conceitos Iniciais

### 6.1.1 Álgebra

Nesta seção, será tratado sobre Álgebra e  $\sigma$ -Álgebra, famílias de conjuntos que serão o domínio de medidas. Uma operação ser fechada para determinado conjunto significa dizer que, ao realizá-la em um elemento deste conjunto, ele continuará neste.

**Definição 6.1.** *Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma álgebra de conjuntos em  $X$  é uma família não vazia  $\mathcal{A}$  de conjuntos fechados para uniões finitas e para complementos, em linguagem matemática, se  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ , então  $\bigcup_{n=1}^k E_n \in \mathcal{A}$  e, se  $E \in \mathcal{A}$ , então  $E^c \in \mathcal{A}$ .*

*Uma  $\sigma$ -álgebra é uma álgebra fechada para união enumerável.*

É possível definir álgebras e  $\sigma$ -álgebras a partir de interseções finitas e enumeráveis, respectivamente, visto que  $\bigcap_{n=1}^k E_n = (\bigcup_{n=1}^k E_n^c)^c$  para álgebras, ou que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c)^c$  para  $\sigma$ -álgebras, considerando de  $n$  até  $\infty$  uma sequência enumerável. Ainda, é fácil verificar que  $\emptyset$  e  $X$  pertencem à álgebra, e uma álgebra é uma  $\sigma$ -álgebra considerando ser fechada para união enumerável e disjunta.

Sabe-se também que a interseção de uma família de  $\sigma$ -álgebras é uma  $\sigma$ -álgebra, que se  $\mathcal{E}$  é um subconjunto qualquer de  $\mathcal{P}(X)$  (conjunto das partes de  $X$ ), então existe uma única, e também é a menor,  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$  que contém  $\mathcal{E}$ , é a interseção de todas as  $\sigma$ -álgebras que contém  $\mathcal{E}$ .  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$  é chamado de  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{E}$ .

**Lema 6.2.** *Se  $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$ , então  $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$ .*

**Demonstração.** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Folland [10]. ■

**Definição 6.3.** Se  $X$  é um espaço métrico, a  $\sigma$ -álgebra gerada pela família de conjuntos abertos em  $X$  (ou, equivalentemente, de conjuntos fechados) é chamado de  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $X$ , denotado por  $\mathcal{B}_X$ , seus elementos são chamados de conjuntos de Borel. Assim,  $\mathcal{B}_X$  inclui conjuntos abertos e fechados, uniões enumeráveis de abertos, interseções enumeráveis de fechados e assim em diante.

### 6.1.2 Medida

Seja o conjunto  $X$  munido da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$ . Uma medida em  $\mathcal{M}$  (ou  $(X, \mathcal{M})$ , ou ainda apenas  $X$  se  $\mathcal{M}$  tiver subentendido) é uma função  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  tal que

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2. Se  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência disjunta de conjuntos em  $\mathcal{M}$ , então  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ .

Esta propriedade recebe o nome de aditividade enumerável e implica na aditividade finita:

3. Se  $E_1, \dots, E_k$  são conjuntos disjuntos de  $\mathcal{M}$ , então  $\mu(\bigcup_{n=1}^k E_n) = \sum_{n=1}^k \mu(E_n)$ .

Basta tomar  $E_n = \emptyset$ , para  $n > k$ . Se  $\mu$  satisfizer (1) e (3), mas não necessariamente (2),  $\mu$  recebe o nome de medida finitamente aditiva.

Se  $X$  é um conjunto e  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$  é uma  $\sigma$ -álgebra,  $(X, \mathcal{M})$  é um espaço mensurável e os conjuntos de  $\mathcal{M}$  são chamados de conjunto mensuráveis. Se  $\mu$  é uma medida em  $(X, \mathcal{M})$ , então  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  é um espaço de medida.

Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida. Assim:

- Se  $\mu(X) < \infty$ ,  $\mu$  é finita.
- Se  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , com  $E_n \in \mathcal{M}$ , e  $\mu(E_n) < \infty$ , para todo  $n$ ,  $\mu$  é  $\sigma$ -finita, equivalentemente, um conjunto  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , com  $\mu(E_n) < \infty$ , recebe o nome de  $\sigma$ -finito em relação a  $\mu$ .
- Se, para todo  $E \in \mathcal{M}$  com  $\mu(E) = \infty$ , existe  $F \in \mathcal{M}$  com  $F \subset E$  e  $0 < \mu(F) < \infty$ ,  $\mu$  é dita ser semifinita.

A seguir, algumas propriedades de medidas.

**Proposição 6.4.** *Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida.*

- (a) (Monotonicidade) Se  $E, F \in \mathcal{M}$  e  $E \subset F$ , então  $\mu(E) \leq \mu(F)$ ;
- (b) (Subaditividade) Se  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ , então  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ ;
- (c) (Continuidade por baixo) Se  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$  e  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , então  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$ ;
- (d) (Continuidade por cima) Se  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ ,  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ , e  $\mu(E_1) < \infty$ , então  $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$ .

**Demonstração.**

- (a) Se  $E \subset F$ , então  $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$ .

(b) Seja  $F_1 = E_1$  e  $F_m = E_m \setminus (\bigcup_{n=1}^{m-1} E_n)$ , com  $m > 1$ . Então, os conjuntos  $F_m$  são disjuntos e  $\bigcup_{n=1}^k F_n = \bigcup_{n=1}^k E_n$ , para qualquer  $n$ . Então, por (a),

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

(c) Seja  $E_0 = \emptyset$ , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \setminus E_{n-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mu(E_n \setminus E_{n-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k);$$

(d) Seja  $F_n = E_1 \setminus E_n$ , então  $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ ,  $\mu(E_1) = \mu(E_n) + \mu(F_n)$  e  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E_1 \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$ . Assim, por (c),

$$\mu(E_1) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(E_1) - \mu(E_n)).$$

Como  $\mu(E_1) < \infty$ , pode-se subtraí-lo de ambos os lados para obter o resultado desejado. ■

Se  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  é um espaço de medida, um conjunto  $E \in \mathcal{M}$  com  $\mu(E) = 0$  é chamado de conjunto nulo. Se uma afirmação sobre pontos de  $X$  é verdade exceto para algum  $x$  pertencente a um conjunto nulo, então a afirmação é dita verdadeira em quase todo lugar (a.e., almost everywhere), ou para quase todo  $x$ .

Se  $\mu(E) = 0$  e  $F \subset E$ , então  $\mu(F) = 0$ , porém, nem sempre  $F \in \mathcal{M}$ . Uma medida cujo domínio inclui todos os subconjuntos de conjuntos nulos recebe o nome de completa. Dito isso, a completude de uma medida pode ser obtida ao aumentar-se seu domínio com esses conjuntos que não pertencem a ele, como sugere o lema.

**Lema 6.5.** *Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida. Sejam também  $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$ , e  $\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M}, F \subset N \text{ para algum } N \in \mathcal{N}\}$ . Então  $\overline{\mathcal{M}}$  é uma  $\sigma$ -álgebra e existe uma única extensão  $\overline{\mu}$  de  $\mu$  para uma medida completa em  $\overline{\mathcal{M}}$ .*

**Demonstração.** Como  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  são fechados sobre uniões enumeráveis, então  $\overline{\mathcal{M}}$  também será. Se  $(E \cup F) \in \overline{\mathcal{M}}$ , com  $E \in \mathcal{M}$  e  $F \subset N \in \mathcal{N}$ , pode-se assumir que  $E \cap N = \emptyset$ , caso contrário, basta considerar  $F = F \setminus E$  e  $N = N \setminus E$ . Então,  $E \cup F = (E \cup N) \cap (N^c \cup F)$ , logo  $(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus F)$ . Mas  $(E \cup N)^c \in \mathcal{M}$  e  $(N \setminus F) \subset N$ . Portanto,  $(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}$ . Ou seja,  $\overline{\mathcal{M}}$  é uma  $\sigma$ -álgebra.

Se  $E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$ , como descrito acima, defina  $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$ , o que faz sentido, pois se  $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$ , com  $F_n \subset N_n \in \mathcal{N}$ , então  $E_1 \subset (E_2 \cup N_2)$  e  $\mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$  e, em contrapartida,  $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$ . É facilmente verificável que  $\overline{\mu}$  é uma medida completa em  $\overline{\mathcal{M}}$ , e que  $\overline{\mu}$  é a única medida em  $\overline{\mathcal{M}}$  que estende  $\mu$ . ■

A medida  $\overline{\mu}$  é chamada de completamento de  $\mu$  e  $\overline{\mathcal{M}}$  é o completamento de  $\mathcal{M}$  a respeito de  $\mu$ .

### 6.1.3 Medida Exterior

Nessa seção, serão vistas ferramentas utilizadas para construção de medidas. Como a medida exterior, um exemplo desta é utilizada no cálculo da área abaixo da curva no plano  $\mathbb{R}^2$ , o processo utilizado na soma de Riemann. Neste, desenham-se retângulos sobre a curva, com a altura coincidindo com o ponto de imagem mais alta, assim, a área é aproximada pela soma da área de todos os retângulos. Então, pode-se definir medida exterior como:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$ ;
- $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  se  $A \subset B$ ;
- $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$ .

Uma maneira de se obter uma medida exterior é a partir de uma família  $\mathcal{E}$  de conjuntos elementares munido de uma noção de medida, aproximando por fora o que se deseja medir, a partir de uma união enumerável de conjuntos de  $\mathcal{E}$ . O teorema a seguir descreve matematicamente esse processo.

**Teorema 6.6.** *Sejam  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ , e  $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ , de forma que  $\emptyset \in \mathcal{E}$ ,  $X \in \mathcal{E}$ , e  $\rho(\emptyset) = 0$ . Para qualquer  $A \subset X$ , tem-se*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ e } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}.$$

Então  $\mu^*$  é uma medida exterior.

**Demonstração.** Para qualquer  $A \subset X$ , existe  $\{E_j\} \subset \mathcal{E}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$  (basta escolher  $E_j = X$ ) para que a definição de  $\mu^*$  tenha sentido. Obviamente  $\mu^*(\emptyset) = 0$  (basta escolher  $E_j = \emptyset$  e  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ , para  $A \subset B$ , pois o conjunto que o ínfimo é escolhido na definição de  $\mu^*(A)$  inclui o conjunto correspondente na definição de  $\mu^*(B)$ ).

Para provar a subaditividade enumerável, suponha que  $\{A_j\} \subset \mathcal{P}(X)$  e  $\epsilon > 0$ . Para cada  $j$ , existe  $\{E_j^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$  tal que  $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k$ , e  $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + \epsilon 2^{-j}$ . Mas, se  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ , então  $A \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} E_j^k$ , e  $\sum_{j,k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \epsilon$ , enquanto  $\mu^*(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \epsilon$ . Como  $\epsilon$  é dado de forma arbitrária, a prova está completa. ■

**Definição 6.7.** *Seja a medida exterior  $\mu^*$  em  $X$ , um conjunto  $A \subset X$  é chamado  $\mu^*$ -mensurável se*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \text{ para todo } E \subset X.$$

Observe que  $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ , para qualquer  $A$  e  $E$ , basta aplicar a propriedade de subaditividade em  $E$ , visto que  $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$ . Assim, para provar que um conjunto  $A$  é  $\mu^*$ -mensurável, basta provar a inequação inversa. Porém, esta é sempre verdade se  $\mu^*(E) = \infty$ , assim, pode-se resumir a definição de  $\mu^*$ -mensurável para:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \text{ para todo } E \subset X \text{ de forma que } \mu^*(E) < \infty.$$

A definição diz que se  $E$  tem um bom comportamento, então um conjunto  $A \subset E$  é  $\mu^*$ -mensurável se  $\mu^*(E) - \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A) = \mu^*(A)$ , ou seja, se a medida exterior de  $A$  é igual a sua medida interior, esta pode ser vista como a medida do complemento de um conjunto, como aproximar a área de um conjunto por dentro.

**Teorema 6.8** (Teorema de Carathéodory). *Se  $\mu^*$  é uma medida exterior em  $X$ , a coleção  $\mathcal{M}$  de conjuntos  $\mu^*$ -mensuráveis é uma  $\sigma$ -álgebra, e a restrição de  $\mu^*$  a  $\mathcal{M}$ , representada por  $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ , é uma medida completa.*

**Demonstração.** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Folland [10]. ■

O Teorema de Carathéodory pode ser aplicado para estender medidas de álgebras para  $\sigma$ -álgebra. Se  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  é uma álgebra, uma função  $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  é chamada de pré-medida se

- $\mu_0(\emptyset) = 0$ ;
- Se  $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$  é uma sequência de conjuntos disjuntos em  $\mathcal{A}$  de forma que  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ , então  $\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$ . Em particular, esta propriedade também pode ser interpretada como aditividade finita.

As noções de pré-medidas finitas e  $\sigma$ -finitas são definidas iguais as de medida. Se  $\mu_0$  é uma pré-medida em  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ , então  $\mu_0$  induz uma medida exterior  $\mu^*$  em  $X$  conforme o Teorema 6.6,

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) : A_j \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}. \quad (6.1)$$

**Lema 6.9.** *Se  $\mu_0$  é uma pré-medida em  $\mathcal{A}$  e  $\mu^*$  é definida por 6.1, então*

- (a)  $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ ;
- (b) *Todo conjunto em  $\mathcal{A}$  é  $\mu^*$ -mensurável.*

**Demonstração.**

- (a) Suponha que  $E \in \mathcal{A}$ . Se  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ , com  $A_j \in \mathcal{A}$  e  $B_n = E \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)$ , então os conjuntos  $B_n$  são partes disjuntas de  $\mathcal{A}$ , em que sua união é  $E$ , assim,  $\mu_0(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$ . Segue que  $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$ , o inverso é verdade, uma vez que  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ , com  $A_1 = E$  e  $A_j = \emptyset$ , para  $j > 1$ .
- (b) Se  $A \in \mathcal{A}$ ,  $E \subset X$ , e  $\epsilon > 0$ , existe uma sequência infinita  $\{B_j\} \subset \mathcal{A}$ , com  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$  e  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leq \mu^*(E) + \epsilon$ .  $\mu_0$  é aditiva em  $\mathcal{A}$ , então

$$\mu^*(E) + \epsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Como  $\epsilon$  é arbitrário,  $A$  é  $\mu^*$ -mensurável. ■

**Teorema 6.10.** *Sejam  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  uma álgebra,  $\mu_0$  uma pré-medida em  $\mathcal{A}$ , e  $\mathcal{M}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{A}$ . Existe uma medida  $\mu$  em  $\mathcal{M}$ , em que sua restrição a  $\mathcal{A}$  é  $\mu_0$ , ou seja,  $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ , com  $\mu^*$  dado por 6.1. Se  $\nu$  é outra medida em  $\mathcal{M}$  que estende  $\mu_0$ , então  $\nu(E) \leq \mu(E)$ , para todo  $E \subset \mathcal{M}$ , com a igualdade acontecendo quando  $\mu(E) = \infty$ . Se  $\mu_0$  é  $\sigma$ -finito, então  $\mu$  é a única extensão a uma medida em  $\mathcal{M}$ .*

**Demonstração.** A primeira afirmação segue do Teorema de Carathéodory e o Teorema 6.9, pois a  $\sigma$ -álgebra de conjuntos  $\mu^*$ -mensuráveis incluem  $\mathcal{A}$  e, então,  $\mathcal{M}$ .

Para a segunda afirmação, se  $E \in \mathcal{M}$  e  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ , com  $A_j \in \mathcal{A}$ , então  $\nu(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$ , então  $\nu(E) \leq \mu(E)$ . Também, se  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ ,

$$\nu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu \left( \bigcup_{j=1}^n A_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \sum_{j=1}^n A_j \right) = \mu(A).$$

Se  $\mu(E) < \infty$ , pode-se escolher  $A$  de forma que  $\mu(A) < \mu(E) + \epsilon$ , então  $\mu(A \setminus E) < \epsilon$ , e

$$\mu(E) \leq \mu(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \mu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \epsilon. \quad (6.2)$$

Como  $\epsilon$  é arbitrário,  $\mu(E) = \nu(E)$ . Por fim, suponha que  $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ , com  $\mu_0(A_j) < \infty$ , em que pode-se assumir que os conjuntos  $A_j$  são disjuntos. Então, para qualquer  $E \in \mathcal{M}$ ,

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E \cap A_j) = \nu(E),$$

logo,  $\nu = \mu$ . ■

### 6.1.4 Medida de Borel na Reta Real

Esta seção é dedicada a construção de uma teoria para medir subconjuntos de  $\mathbb{R}$  baseado na ideia de medir o comprimento do intervalo, sua largura. Para isso, trabalha-se com medidas cujos domínios são a  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ , essas, recebem o nome de medidas de Borel em  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  pode ser definida a partir de h-intervalos, intervalos da reta que não são nem abertos e nem fechado, como, por exemplo,  $(a, b]$  ou  $[a, b)$ , com  $a, b \in [-\infty, \infty]$  e  $a < b$ , ou que são simultaneamente abertos e fechados, como  $X$  e  $\emptyset$ . Assim, interseções, uniões disjuntas e os complementares de h-intervalos, são também h-intervalos. A união disjunta, como já vista, forma a álgebra  $\mathcal{A}$  e a união (contável) forma a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ .

A utilização de h-intervalos se dá pelo fato de se usar funções contínuas à direita na construção da teoria, ou, equivalentemente, de funções contínuas à esquerda. Assim, faz-se necessário os limites laterais para defini-las. Então,  $L$  é um limite lateral à direita de  $f(x)$  quando, para todo  $\epsilon > 0$ , pode-se obter  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \epsilon$ , sempre que  $x \in X$  e  $a < x < \delta + a$ , para algum  $a$  fixo. É representado por  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ . A função  $f$  é dita contínua à direita em  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ . E, a função é dita contínua à direita (na totalidade) se o for para todos os pontos do domínio.

Equivalentemente,  $M$  é um limite lateral à esquerda de  $f(x)$  quando, para todo  $\epsilon > 0$ , pode-se obter  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - M| < \epsilon$ , sempre que  $x \in X$  e  $a - \delta < x < a$ , para algum  $a$  fixo. É representado por  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$ . A função  $f$  é dita contínua à esquerda em  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ . E, a função é dita contínua à esquerda (na totalidade) se o for para todos os pontos do domínio. Se ambos os limites laterais em um ponto  $a$  são iguais a  $L$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe e é igual a  $L$ . Se  $f(a) = L$ , a função é contínua em  $a$ . Para finalizar, uma função é crescente (decrescente) quando  $f(x) < f(y)$  ( $f(x) > f(y)$ ), para  $x < y$ .

**Lema 6.11.** *Seja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  crescente e contínua a direita. Sejam  $(a_j, b_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , h-intervalos, e*

$$\mu_0 \left( \bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j] \right) = \sum_{j=1}^n [F(b_j) - F(a_j)],$$

com  $\mu_0(\emptyset) = 0$ . Então,  $\mu_0$  é uma pré-medida na álgebra  $\mathcal{A}$ .

**Demonstração.** A demonstração do lema pode ser encontrada em Folland [10]. ■

**Teorema 6.12.** *Se  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é crescente e contínua à direita, existe uma única medida de Borel  $\mu_F$  em  $\mathbb{R}$  de forma que  $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ , para todo  $a, b$ . Se  $G$  é outra função com os mesmo requisitos, tem-se que  $\mu_F = \mu_G$  se, e somente se,  $F - G$  é uma constante. Por outro lado, se  $\mu$  é uma medida de Borel em  $\mathbb{R}$  finita em todo conjunto limitado de Borel, e definindo*

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) & x > 0 \\ 0 & x = 0, \\ -\mu((-x, 0]) & x < 0 \end{cases}$$

então  $F$  é crescente e contínua à direita e  $\mu = \mu_F$ .

**Demonstração.** Cada  $F$  induz uma pré-medida pelo Lema 6.11. Então,  $F$  e  $G$  induzem a mesma pré-medida se, e somente se,  $F - G$  é constante e se forem  $\sigma$ -finitas, pois  $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in J} (j, j + 1]$ , com  $J = (-\infty, \infty)$ . Então, as primeiras duas afirmações seguem do Teorema 6.10; para a última, a monotonicidade de  $\mu$  implica esta mesma propriedade a  $F$  e a continuidade de  $\mu$  por cima e por baixo implica a continuidade à direita de  $F$  para  $x \geq 0$  e  $x < 0$ . É evidente que  $\mu = \mu_F$  em  $\mathcal{A}$  e então, pelo Teorema 6.10,  $\mu = \mu_F$  em  $\mathcal{B}_X$ . ■

## 6.2 Integração

O mais comum, na literatura clássica, é definir integral a partir da soma de Riemann. Semelhantemente, existe uma noção de integral em espaços de medida, que será dissertada nessa seção. Esta se mostra abranger mais conjuntos e possuir resultados mais interessantes para a análise.

### 6.2.1 Funções Mensuráveis

Qualquer função  $f : X \rightarrow Y$  entre dois conjuntos induz uma função  $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , definida por  $f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$ , preservando união, interseção e complemento. Então, se  $\mathcal{N}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $Y$ ,  $\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{N}\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$ . Se  $(X, \mathcal{M})$  e  $(Y, \mathcal{N})$  são espaços mensuráveis, uma função  $f : X \rightarrow Y$  é chamada  $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável, ou apenas mensurável quando  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  tiverem subentendidos, se  $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ , para todo  $E \in \mathcal{N}$ . A composição de funções desse tipo resultam em uma função também mensurável, ou seja, se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  são  $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável e  $(\mathcal{N}, \mathcal{O})$ -mensurável, respectivamente, então  $g \circ f$  é  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ -mensurável.

**Proposição 6.13.** *Se  $\mathcal{N}$  é gerado por  $\mathcal{E}$ , então  $f : X \rightarrow Y$  é  $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável se, e somente se,  $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ , para todo  $E \in \mathcal{E}$ .*

**Demonstração.** Observe que  $\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra contendo  $\mathcal{E}$ , logo, também contém  $\mathcal{N}$ . A implicação inversa é trivial. ■

**Corolário 6.14.** *Se  $X$  e  $Y$  são espaço métricos, toda função  $f : X \rightarrow Y$  contínua é  $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$ -mensurável.*

**Demonstração.**  $f$  é contínua se, e somente se, sua imagem inversa  $f^{-1}(U)$  é um conjunto aberto em  $X$ , para todo aberto  $U \in \mathcal{B}_Y$ , e a  $\sigma$ -álgebra de Borel é uma família de abertos. ■

**Definição 6.15.** *Se  $(X, \mathcal{M})$  é um espaço mensurável, uma função real (ou complexa)  $f$  em  $X$  é chamada de mensurável se é  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ -mensurável (ou  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ -mensurável).  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  e  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$  são sempre compreendidos como a  $\sigma$ -álgebra do espaço que representa a imagem da função, exceto se especificado o oposto.*

Às vezes, será conveniente considerar funções com valores nos reais estendidos  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ , seus conjuntos de Borel são definidos por  $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ .  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é  $\mathcal{M}$ -mensurável se é  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ -mensurável.

**Proposição 6.16.** *Se  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  são  $\mathcal{M}$ -mensuráveis, então  $f + g$  e  $fg$  também são, assim como  $\max(f, g)$  e  $\min(f, g)$ . Considerando que  $0 \cdot (\pm\infty) = 0$  e que  $f + g = a$  se  $f = -g = \pm\infty$ , com  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ .*

**Lema 6.17.** *Se  $\{f_j\}$  é uma sequência em  $\overline{\mathbb{R}}$  de funções mensuráveis em  $(X, \mathcal{M})$ , então as funções*

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \sup_j f_j(x), & g_3(x) &= \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j, \\ g_2(x) &= \inf_j f_j(x), & g_4(x) &= \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j. \end{aligned}$$

são mensuráveis. Se  $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$  existe, para todo  $x \in X$ , então  $f$  é mensurável.

As demonstrações de ambos os resultados acima podem ser encontradas em Folland [10].

Uma função  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  pode ser dividida em parte positiva e negativa, respectivamente

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Então,  $f = f^+ - f^-$ , ou seja, se  $f$  é mensurável, então  $f^+$  e  $f^-$  também serão.

A seguir, é definido um tipo de função que será essencial para a teoria de integral. Seja  $(X, \mathcal{M})$  um espaço mensurável. Se  $E \subset X$ , a função característica  $\chi_E$  de  $E$  (também conhecida por função indicadora e denotada por  $1_E$ ) é definida por

$$\chi_E = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases}.$$

$\chi_E$  é mensurável se, e somente se,  $E \in \mathcal{M}$ . Uma função simples em  $X$  é a combinação linear finita de funções características de conjuntos de  $\mathcal{M}$ , ou seja,

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} z_j \chi_{E_j}, \text{ em que } E_j = f^{-1}(\{z_j\}) \text{ e } \text{Im}(f) = \{z_1, \dots, z_n\}.$$

A forma acima recebe o nome de representação *standard* de  $f$ . A seguir, é mostrado que funções arbitrárias podem ser aproximadas (com boa precisão) por funções simples.

**Teorema 6.18.** *Seja  $(X, \mathcal{M})$  um espaço mensurável. Se  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  é mensurável, existe uma sequência  $\{\phi_n\}$  de funções simples de forma que  $0 < \phi_1 < \phi_2 < \dots < f$ , então,  $\phi_n \rightarrow f$  ponto a ponto e  $\phi_n \rightarrow f$  uniformemente em qualquer conjunto que  $f$  é limitada.*

**Demonstração.** Para  $n = 1, 2, \dots$ , e  $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$ , seja

$$E_n^k = f^{-1}((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]) \text{ e } F_n = f^{-1}((2^n, \infty]).$$

Assim, defina

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n} \chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n}.$$

É facilmente verificável que  $\phi_n \leq \phi_{n+1}$  para todo  $n$  e  $0 \leq f - \phi_n \leq 2^{-n}$  no conjunto em que  $f \leq 2^n$ . ■

**Teorema 6.19.** *As seguintes implicações são válidas se, e somente se, a medida  $\mu$  é completa:*

(a) *Se  $f$  é mensurável e  $f = g$   $\mu$ -a.e., então  $g$  é mensurável.*

(b) *Se  $f_n$  é mensurável para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -a.e., então  $f$  é mensurável.*

**Demonstração.** A demonstração do teorema pode ser encontrada em Folland [10]. ■

**Teorema 6.20.** *Sejam  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida e  $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$  seu complemento. Se  $f$  é uma função  $\overline{\mathcal{M}}$ -mensurável, existe uma função  $\mathcal{M}$ -mensurável  $g$  de forma que  $f = g$   $\overline{\mu}$ -quase sempre.*

**Demonstração.** É obvio da definição de  $\overline{\mu}$  se  $f = \chi_E$ , em que  $E \in \overline{\mathcal{M}}$ , e também se  $f$  é uma função simples  $\overline{\mathcal{M}}$ -mensurável. Para o caso geral, seja a sequência  $\{\phi_n\}$  de funções simples  $\overline{\mathcal{M}}$ -mensuráveis que convergem ponto a ponto para  $f$  conforme o Teorema 6.18. Para cada  $n$ , seja  $\psi_n$  uma função simples  $\mathcal{M}$ -mensurável, com  $\psi_n = \phi_n$ , exceto em um conjunto  $E_n \in \overline{\mathcal{M}}$ , com  $\overline{\mu}(E_n) = 0$ . Considere  $N \in \mathcal{M}$  de forma que  $\mu(N) = 0$  e  $N \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  com  $g = \lim \phi_n \chi_{X \setminus N}$ . Então  $g$  é  $\mathcal{M}$ -mensurável e  $g = f$  em  $N^c$ . ■

## 6.2.2 Integração de Funções não Negativas

Nesta seção, será definido a integral a partir de uma medida. Para isso, considere o espaço de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e  $L^+$  como sendo o espaço de todas as funções mensuráveis e positivas, ou seja, saindo de  $X$  e chegando a  $[0, \infty]$ .

Se  $\phi$  é uma função simples em  $L^+$ , com representação *standard*  $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ , assim, a integral de  $\phi$  em relação a  $\mu$  é

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j), \quad (6.3)$$

assumindo que  $0 \cdot \infty = 0$ . Observe que a integral pode assumir o valor  $\infty$ . Lembrando que  $\phi$  é uma função que depende de  $x$ , assim, quando necessário, é utilizado a representação

$\int \phi(x) d\mu(x)$ , apesar de alguns autores preferirem a notação  $\int \phi(x) \mu(dx)$ . Por fim, se  $A \in \mathcal{M}$ , então  $\phi_{\chi_A} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{A \cap E}$  também é simples, e define-se  $\int_A \phi d\mu$  como sendo  $\int \phi_{\chi_A} d\mu$ .

**Proposição 6.21.** *Sejam  $\phi$  e  $\psi$  funções simples em  $L^+$ .*

(a) *Se  $c \geq 0$ ,  $\int c \phi d\mu = c \int \phi d\mu$ ;*

(b)  *$\int (\phi + \psi) d\mu = \int \phi d\mu + \int \psi d\mu$ ;*

(c) *Se  $\phi \leq \psi$ , então  $\int \phi d\mu \leq \int \psi d\mu$ ;*

(d) *Uma função  $A \mapsto \int_A d\mu$  é uma medida em  $\mathcal{M}$ .*

Assim, pode-se estender a definição de integral para todas as funções  $f \in L^+$  definindo

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ simples} \right\}. \quad (6.4)$$

**Teorema 6.22** (Teorema da Convergência Monótona). *Se  $\{f_n\}$  é uma sequência em  $L^+$ , tal que  $f_j \leq f_{j+1}$ , para todo  $j$ , e  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n (= \sup_n f_n)$ , então  $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ .*

**Demonstração.**  $\{\int f_n d\mu\}$  é uma sequência crescente de números, então o limite existe. E ainda,  $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$ . Para a inequação inversa, fixe  $\alpha \in (0, 1)$ , e sejam  $\phi$  uma função simples com  $0 \leq \phi \leq f$  e  $E_n = \{x : f_n(x) \geq \alpha \phi(x)\}$ . Então,  $\{E_n\}$  é uma sequência crescente de conjuntos mensuráveis cuja união é  $X$ , tem-se também que  $\int f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \alpha \int_{E_n} \phi d\mu$ . Pelo Teorema 6.9 e pela continuidade por cima de medidas,  $\lim \int_{E_n} \phi d\mu = \int \phi d\mu$  e então,  $\lim \int f_n d\mu \geq \alpha \int \phi d\mu$ . Como isto é verdade para todo  $\alpha < 1$ , então se mantém verdade para  $\alpha = 1$ , escolhendo o supremo de todas as funções simples  $\phi \leq f$ , obtém-se  $\lim \int f_n d\mu \geq \int f d\mu$ . ■

O Teorema da Convergência Monótona é uma ferramenta essencial em várias situações. A definição de  $\int f d\mu$  envolve o supremo de uma enorme família de funções simples, então é difícil avaliar  $f$  diretamente da definição. Assim, o Teorema 6.22 assegura que para calcular  $\int f d\mu$  basta calcular  $\lim \int \phi_n d\mu$  em que  $\{\phi_n\}$  é uma sequência crescente de funções simples que converge a  $f$  e o Teorema 6.18 garante sua existência.

**Corolário 6.23.** *Se  $\{f_n\}$  é uma sequência finita ou infinita em  $L^+$  e  $f = \sum_{n=1}^k f_n$ , então  $\int f d\mu = \sum_{n=1}^k \int f_n d\mu$ .*

**Demonstração.** Primeiro, considere duas funções  $f_1$  e  $f_2$ . Pelo Teorema 6.18 pode-se determinar sequências  $\{\phi_j\}$  e  $\{\psi_j\}$  de funções simples não negativas que crescem para  $f_1$  e  $f_2$ . Então,  $\{\phi_j + \psi_j\}$  cresce para  $f_1 + f_2$ , assim, pelo Teorema da Convergência Monótona e Teorema 6.21 (b),

$$\int (f_1 + f_2) d\mu = \lim \int (\phi_j + \psi_j) d\mu = \lim \int \phi_j d\mu + \lim \int \psi_j d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu.$$

Então, por indução,  $\int \sum_{n=1}^k f_n d\mu = \sum_{n=1}^k \int f_n d\mu$  para qualquer  $k$  finito. Fazendo  $k$

tender a  $\infty$ , e aplicando o Teorema da Convergência Monótona novamente, obtém-se

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu. \quad \blacksquare$$

**Proposição 6.24.** *Se  $f \in L^+$ , então  $\int f \, d\mu = 0$  se, e somente se,  $f = 0$  quase sempre.*

**Demonstração.** Se  $f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{E_j}$  com  $a_j \geq 0$ , então  $\int f \, d\mu = 0$  se, e somente se, para cada  $j$ ,  $a_j = 0$  ou  $\mu(E_j) = 0$ . No geral, se  $f = 0$  quase sempre, e  $\phi$  é simples, com  $0 \leq \phi \leq f$ , então  $\phi = 0$  quase sempre, assim,  $\int f \, d\mu = \sup_{\phi \leq f} \int \phi \, d\mu = 0$ . Por outro lado,  $\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , com  $E_n = \{x : f(x) > n^{-1} \chi_{E_n}\}$ , então, se é falso que  $f = 0$  quase sempre, tem-se que  $\mu(E_n) > 0$  para algum  $n$ . Mas,  $f > n^{-1} \chi_{E_n}$ , logo  $\int f \, d\mu \geq n^{-1} \mu(E_n) > 0$ . ■

**Corolário 6.25.** *Se  $\{f_n\} \subset L^+$ ,  $f \in L^+$  e  $f_n(x)$  converge de forma crescente a  $f(x)$ , para quase todo  $x$ , então  $\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$ .*

**Demonstração.** Se  $f_n(x)$  cresce para  $f(x)$ , com  $x \in E$  e  $\mu(E^c) = 0$ , então  $f - f \chi_E = 0$  quase sempre e  $f_n - f_n \chi_E = 0$  quase sempre, ou seja, pelo Teorema da Convergência Monótona,  $\int f \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu = \lim \int f_n \chi_E \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$ . ■

**Lema 6.26** (Lema de Fatou). *Se  $\{f_n\}$  é uma sequência qualquer em  $L^+$ , então*

$$\int (\liminf f_n) \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

**Demonstração.** Para cada  $k \geq 1$ , tem-se que  $\inf_{n \geq k} f_n \leq f_j$  para  $j \geq k$ , então  $\int \inf_{n \geq k} f_n \, d\mu \leq \int f_j \, d\mu$ , com  $j \geq k$ , assim,  $\int \inf_{n \geq k} f_n \, d\mu \leq \inf_{j \geq k} \int f_j \, d\mu$ . Se  $k \rightarrow \infty$ , e aplicando o Teorema da Convergência Monótona:

$$\int (\liminf f_n) \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \left( \inf_{n \geq k} f_n \right) \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu. \quad \blacksquare$$

**Corolário 6.27.** *Se  $\{f_n\} \subset L^+$ ,  $f \in L^+$ , e  $f_n \rightarrow f$  quase sempre, então  $\int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu$ .*

**Demonstração.** Se  $f_n \rightarrow f$  sempre, o resultado é imediato do Lema de Fatou, o mesmo pode ser obtido modificando  $f_n$  e  $f$  em um conjunto de medida nula sem afetar a integral pelo Teorema 6.24. ■

**Teorema 6.28.** *Se  $f \in L^+$  e  $\int f \, d\mu < \infty$ , então  $\{x : f(x) = \infty\}$  é um conjunto de medida nula e  $\{x : f(x) > 0\}$  é  $\sigma$ -finito.*

**Demonstração.** A demonstração do teorema pode ser encontrada em Folland [10]. ■

Para finalizar esta seção, falta apenas definir a integral para uma função real qualquer. Ora, como foi visto anteriormente, uma função  $f$  pode ser dividida em partes positiva  $f^+$  e negativa  $f^-$ , com ambas pertencentes ao intervalo  $[0, \infty]$ . Assim, se  $f = f^+ - f^-$ , então

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu. \quad (6.5)$$

Sendo  $f$  integrável se  $f^+$  e  $f^-$  são finitas.

## 6.3 Random Iteration Algorithm

**Definição 6.29.** Um sistema de funções iteradas (IFS) com probabilidade consiste de um sistema  $\{X; w_1, \dots, w_k\}$  com um conjunto de números  $\{p_1, \dots, p_k\}$  de forma que

$$p_1 + \dots + p_k = 1 \quad e \quad p_n > 0, \quad n = 1, \dots, k.$$

Cada número (probabilidade)  $p_n$  está associado a uma contração  $w_n$ . Pode ser representado por  $\{X; w_n; p_n\}$ , ou explicitando cada  $w_n$  e  $p_n$ .

O Random Iteration Algorithm segue o seguinte processo. Dado um ponto inicial  $z_0 \in X$ . Uma das contrações  $w_n$  é escolhida aleatoriamente segundo o conjunto de probabilidade, ou seja,  $w_n$  tem uma chance  $p_n$  de ser escolhida. Então, o ponto  $z_0$  é aplicado em  $w_n$ , gerando um ponto  $z_1$ . O processo é repetido gerando um ponto  $z_2$ , e assim em diante, quantas vezes forem necessárias, gerando uma sequência de pontos  $\{z_n : n = 1, \dots, m\}$ , sendo  $m$  um inteiro positivo, o conjunto também é conhecido como órbita, ou seja, ao plotar esse conjunto de pontos, tem-se o atrator do IFS e se este seguir as propriedades já discutidas na dissertação, então o atrator será um fractal.

### 6.3.1 O Espaço Métrico Compacto $(\mathbf{P}(X), d)$

Nesta seção, será apresentado um espaço bem definido que relaciona espaços métricos com a teoria de medida estudada, sendo este essencial quando se deseja trabalhar simultaneamente com fractais e medidas (e, por consequência, integrais).

**Definição 6.30.** O Suporte de uma medida  $\mu$ , denotado por  $\text{supp}(\mu)$ , é o menor conjunto fechado de pontos  $x \in X$ , de forma que  $\mu(B(x, \epsilon)) > 0$ , para todo  $\epsilon > 0$ , com  $B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\}$ .

**Definição 6.31.** Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico compacto, e  $\mu$  uma medida de Borel em  $X$ . Se  $\mu(X) = 1$ , então  $\mu$  é dita ser normalizada.

**Definição 6.32.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico compacto. Seja também o conjunto das medidas normalizadas de Borel em  $X$ , denotado por  $\mathbf{P}(X)$ . A métrica de Hutchinson  $d_H$  em  $\mathbf{P}(X)$  é definida por

$$d_H(\mu, \nu) = \sup \left\{ \left| \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \right| \mid f : X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ contínua}, |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \right\},$$

para todo  $\mu, \nu \in \mathbf{P}(X)$ .

**Teorema 6.33.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico compacto. Então,  $(\mathbf{P}(X), d_H)$  é um espaço métrico completo.

**Demonstração.** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Barnsley [2]. ■

### 6.3.2 Contração em $(\mathbf{P}(X), d)$

Seja  $\{X; w_1, \dots, w_n; p_1, \dots, p_n\}$  um IFS com probabilidade. O operador de Markov associado ao IFS é uma função  $M : \mathbf{P}(X) \rightarrow \mathbf{P}(X)$  definida por

$$M(\nu) = p_1 \nu \circ w_1^{-1} + \dots + p_n \nu \circ w_n^{-1}, \quad \text{para todo } \nu \in \mathbf{P}(X).$$

**Lema 6.34.** *Seja  $M$  o operador de Markov associado a um IFS. Seja também  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função simples ou uma função contínua. Se  $\nu \in \mathbf{P}(X)$ , então*

$$\int_X f d(M(\nu)) = \sum_{i=1}^n p_i \int_X f \circ w_i d\nu.$$

**Demonstração.** Suponha que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua. Pelo Teorema 6.33 pode-se achar uma sequência  $\{f_k\}$  de funções simples que convergem uniformemente para  $f$ . É facilmente verificável que

$$\int_X f_k d(M(\nu)) = \sum_{i=1}^n p_i \int_X f_k d\nu \circ w_i^{-1} = \sum_{i=1}^n p_i \int_{w_i(X)} f_k d\nu \circ w_i^{-1} = \sum_{i=1}^n p_i \int_X f_k \circ w_i d\nu.$$

A sequência  $\{\int f_k d(M(\nu))\}$  converge para  $\int f d(M(\nu))$ .

Para cada  $i = 1, \dots, n$  e cada inteiro positivo  $k$ ,  $f_k \circ w_i$  é uma função simples. A sequência  $\{f_k \circ w_i\}_k$  converge uniformemente para  $f \circ w_i$ . Então, segue que  $\{\int f_k \circ w_i d\nu\}_k$  converge para  $\int f \circ w_i d\nu$ . Assim,  $\{\sum_{i=1}^n p_i \int f_k \circ w_i d\nu\}_k$  converge para  $\sum_{i=1}^n p_i \int f \circ w_i d\nu$ . ■

**Teorema 6.35.** *Seja o IFS com probabilidade  $\{X; w_i; p_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  em um espaço métrico compacto,  $s$  o fator de contração do IFS e  $M : \mathbf{P}(X) \rightarrow \mathbf{P}(X)$  o operador de Markov associado a ele. Então,  $M$  é uma contração, com fator de contração  $s$ , quando considerado a métrica de Hutchinson em  $\mathbf{P}(X)$ . Ou seja,*

$$d_H(M(\nu), M(\mu)) \leq s d_H(\nu, \mu), \quad \text{para todo } \nu, \mu \in \mathbf{P}(X).$$

Em particular, existe uma única medida  $\mu \in \mathbf{P}(X)$  de forma que  $M\mu = \mu$

**Demonstração.** Seja  $L$  o conjunto de funções contínuas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ , para todo  $x, y \in X$ . Então,

$$\begin{aligned} d_H(M(\nu), M(\mu)) &= \sup \left\{ \left| \int f d(M(\mu)) - \int f d(M(\nu)) \right| \mid f \in L \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int \sum_{i=1}^n p_i f \circ w_i d\mu - \int \sum_{i=1}^n p_i f \circ w_i d\nu \right| \mid f \in L \right\}. \end{aligned}$$

Seja  $\tilde{f} = s^{-1} \sum_{i=1}^n p_i f \circ w_i$ .

Então,  $\tilde{f} \in L$ . Seja também  $\tilde{L} = \{\tilde{f} \in L : \tilde{f} = s^{-1} \sum_{i=1}^n p_i f \circ w_i, \text{ para algum } f \in L\}$ . Assim, pode-se escrever

$$d_H(M(\nu), M(\mu)) = \sup \left\{ \left| s \int \tilde{f} d\mu - s \int \tilde{f} d\nu \right| \mid \tilde{f} \in \tilde{L} \right\}.$$

Como  $\tilde{L} \subset L$ , segue que

$$d_H(M(\nu), M(\mu)) \leq s d_H(\nu, \mu). \quad \blacksquare$$

**Definição 6.36.** *Seja  $\mu$  o ponto fixo do operador de Markov, então  $\mu$  é chamada de medida invariante de um IFS com probabilidade.*

Medidas, quando utilizadas em fractais, proporcionam características interessantes como, por exemplo, definir a distribuição de massa de cada parte do fractal. Se  $A$  é o atrator do IFS e  $\mu$  a medida invariante da Definição 6.36. Então  $\mu(A) = 1$  e  $\mu(\emptyset) = 0$ , ou seja, o atrator possui medida 1, a mesma medida de todo o espaço  $X$  e também  $\mu(X) = 1$ , é como se a massa estivesse distribuída apenas pelo atrator.

**Proposição 6.37.** *Seja o IFS com probabilidade  $\{X; w_i; p_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  em um espaço métrico compacto  $(X, d)$ . Seja também a medida invariante  $\mu$ . Então, o suporte de  $\mu$  é o atrator do IFS  $\{X; w_i\}$ .*

**Demonstração.** Seja  $B$  o suporte de  $\mu$ . Então é um subconjunto compacto e não vazio de  $X$ . Seja  $A$  o atrator do IFS, assim,  $\{A; w_n; p_n\}$  é um IFS hiperbólico, com  $\nu$  sendo sua medida invariante, então, ela também é do IFS original. Logo, como  $\mu$  é único,  $\mu = \nu$ , o que segue que  $B \subset A$ .

Sejam  $a \in A$  e  $\mathcal{O}$  um conjunto aberto contendo  $a$ . Sejam  $\Sigma$  o espaço de código associado com o IFS e  $\sigma \in \Sigma$  o endereço de  $a$ . Assim, segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, A) = a$ , no qual a convergência é dada na métrica de Hausdorff. Assim, existe um positivo inteiro  $n$  de forma que  $\phi(\sigma, n, A) \subset \mathcal{O}$ . Mas  $\mu(\phi(\sigma, n, A)) \geq p_{\sigma_1} p_{\sigma_2} \cdots p_{\sigma_n} > 0$ . O que segue que  $\mu(\mathcal{O}) > 0$  e  $a$  é o suporte de  $\mu$ . Logo,  $a \in B$  e  $A \subset B$ . ■

**Teorema 6.38** (Teorema da Colagem de Barnsley para Medidas). *Sejam o IFS com probabilidade  $\{X; w_i; p_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  em um espaço métrico compacto  $(X, d)$ , a medida invariante  $\mu$  e  $s$  o fator de contração e  $M : \mathbf{P}(X) \rightarrow \mathbf{P}(X)$  o operador de Markov associados ao IFS. Se  $\nu \in \mathbf{P}(X)$ , então*

$$d_H(\nu, \mu) \leq \frac{d_H(\nu, M(\nu))}{1 - s}.$$

**Demonstração.** Este é um corolário do Teorema 6.35. ■

### 6.3.3 Teorema de Elton

Ambos o teorema e o corolário a seguir afirmam que certos eventos ocorrem com probabilidade um, ou seja, que certamente irá acontecer. Porém, não será dissertado a fundo sobre este tipo de probabilidade, apenas o necessário para sua utilização no Random Iteration Algorithm. O Teorema abaixo possui hipóteses mais amplas, porém, uma versão restrita deste é suficiente para o nosso propósito.

**Teorema 6.39.** *Seja  $\{X; w_i; p_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$  um espaço métrico compacto  $(X, d)$ . Seja também  $\{x_n\}$  uma órbita do IFS produzida pelo Random Iteration Algorithm. Ou seja,*

$$x_n = w_{\sigma_n} \circ w_{\sigma_{n-1}} \circ \cdots \circ w_{\sigma_1}(x_0),$$

*Se  $\mu$  for a única medida invariante para o IFS, então, com probabilidade um,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) = \int_X f(x) d\mu(x),$$

*para toda função contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e todo  $x_0$ .*

**Demonstração.** Para detalhes desta demonstração, veja [Elton, 1986]. ■

**Corolário 6.40.** *Sejam  $\mathcal{B}$  um subconjunto de Borel de  $X$  e  $\mu(\text{fronteira de } \mathcal{B}) = 0$ . Se*

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}, n) = \text{número de pontos em } \{x_0, \dots, x_n\} \cap \mathcal{B}, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

*Então, com probabilidade um,*

$$\mu(\mathcal{B}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(\mathcal{B}, n)}{n+1},$$

*para todo ponto  $x_0$ . Ou seja, a medida de  $\mathcal{B}$  é a proporção dele em relação às iterações ao utilizar o Random Iteration Algorithm para produzir pontos em  $\mathcal{B}$ .*

A medida  $\mu$  descrita no Corolário 6.40 mede a proporção de um determinado conjunto em referência ao atrator do IFS gerado pelo algoritmo, em outras palavras, o quanto esse conjunto representa do atrator. O resultado é interessante, pois se pode pegar o conjunto gerado por cada uma das funções do IFS e medir suas proporções em relação ao atrator, assim tem-se o quanto cada função influencia no conjunto final, a relevância disso se dá ao atribuir-se as probabilidades de cada contração do sistema para aplicar o método. Logicamente, independente da probabilidade (desde que seja maior que zero), pelo Teorema de Elton, sempre irá convergir para o atrator quando se tende ao infinito, porém, dependendo da probabilidade selecionada às funções, tem-se uma convergência mais rápida, quando se calcula uma aproximação do atrator. Isso é importante para se ter menos custo computacional.

Sejam  $\Sigma$  o espaço de código com  $n$  símbolos e  $\rho$  a única medida de Borel em  $\Sigma$  de forma que

$$\rho(C(\sigma_1, \dots, \sigma_m)) = p_{\sigma_1} \cdots p_{\sigma_m},$$

para cada inteiro positivo  $m$  e todo  $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \{1, \dots, n\}$ , no qual

$$C(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = \{\omega \in \Sigma : \omega_1 = \sigma_1, \dots, \omega_m = \sigma_m\}.$$

Então  $\rho \in \mathbf{P}(\Sigma)$ . Esta medida fornece meios de designar probabilidades a conjuntos de possíveis resultados da aplicação do Random Iteration Algorithm.

Quando o algoritmo é aplicado, um código  $\omega = \omega_1\omega_2\cdots \in \Sigma$  é gerado. Fixando um ponto inicial  $x_0$ , é possível descrever a probabilidade de uma órbita partindo de  $x_0$  em termos do código  $\omega$ . Assim, qual é a probabilidade que  $w_1 = 1$ ? Claramente é  $p_1 = \rho(C(1))$ . Qual é a probabilidade que  $\omega_1 = \sigma_1, \dots, \omega_m = \sigma_m$ ? Pelos símbolos serem escolhidos independentemente,  $\rho(C(\sigma_1, \dots, \sigma_m)) = P_{\sigma_1} \cdots P_{\sigma_m}$ . Seja  $\mathcal{B}$  um conjunto de Borel em  $\Sigma$ . Qual a probabilidade do algoritmo produzir um código  $\sigma \in \mathcal{B}$ ? É ao menos intuitivo que seja  $\rho(\mathcal{B})$ . Partindo do Teorema e do Corolário, se  $\mathcal{B}$  é um subconjunto de Borel de  $\Sigma$ , então  $\rho(\mathcal{B}) = 1$ .



# Aplicações

## 7.1 Colour Stealing

Deseja-se gerar um fractal através de processos matemáticos e então colori-lo. Referente a primeira parte, há vários métodos e cálculos diferentes que a possibilitam, já para a segunda, os algoritmos existentes deixam o fractal monocromático ou com cores aleatórias. Assim, surge o processo *Colour Stealing*, que seleciona determinadas cores de uma figura e as utiliza para colorir coerentemente outra imagem que se deseja criar, por isso, em uma tradução livre, se chama roubo de cores. O método se baseia no *Fractal Top*, um objeto matemático definido por Barnsley [3].

O método se baseia na utilização de três estruturas provenientes de sistemas de funções iteradas, cada uma descreve ou adiciona detalhes a figura, são geradas a partir do “*Random Iteration Algorithm*”. Elas possuem a propriedade da colagem (satisfazem as condições do Teorema da Colagem de Barnsley), ou seja, dependem continuamente dos parâmetros, possui autossimilaridade, e pode ser programada e calculada eficientemente, ou seja, com pouco custo computacional.

A primeira estrutura determina o fractal, sua forma, é o próprio atrator do IFS. A vantagem de se possuir a propriedade da colagem é que, nesta etapa, pode-se construir a figura que se deseja.

A segunda, é a medida invariante do processo MCMC. O IFS está associado com a contração  $M : P(X) \rightarrow P(X)$ , em que  $(P(X), d_{MK})$  é o espaço métrico compacto composto pelo conjunto das medidas de Borel normalizadas em  $X$  com a métrica de Monge-Kantorovitch, e  $M\mu = \sum p_n f_n \circ \mu$ ,  $(f \circ \mu)(X) := \mu(f^{-1}(X))$ , para qualquer conjunto de Borel  $\mathcal{B} \subset X$ .  $M\mu$  é também uma contração e seu ponto fixo  $M\mu = \mu$  pode ser pensado como uma medida autorreferencial. Pode ser computado pelo MCMC e segue os requisitos do teorema da colagem. Em resumo, é como se essa estrutura conseguisse medir cada parte da figura. Ela é responsável por selecionar as cores na imagem escolhida.

Por fim, e mais importante, a terceira estrutura, chamada de *Fractal Top*. Esta que definirá a forma que as cores “roubadas” na segunda parte será utilizada. Ela também possui a propriedade da colagem e autossimilaridade, porém, necessita de uma condição para sua aplicação, o IFS deve possuir sobreposição. Seja a aplicação Top  $T : \mathcal{H}(\Omega \times X) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega \times X)$ , em que  $\Omega = \{1, \dots, k\}$  denota o espaço de código (alfabeto) associado ao IFS munido da métrica usual para fazê-lo um espaço métrico compacto, ela é definida como  $T(\Theta) = Top(T_1(\Theta), \dots, T_N(\Theta))$ , para todo  $\Theta \in \mathcal{H}(\Omega \times X)$ , tal que

$$T_n(\Theta) = \{T_n(\omega, x) = (n\omega, f_n(x)) \mid (\omega, x) \in \Omega \times X\},$$

sendo  $n\omega$  a concatenação de  $n$  com  $\omega$ . Seja qualquer par de conjuntos  $A, B \in \mathcal{H}(\Omega \times X)$ ,

$$Top(A, B) = \{(\omega, x) \in A \cup B \mid \omega \geq \tilde{\omega} \text{ sempre que } (\tilde{\omega}, x) \in A \cup B\}.$$

T possui um único ponto fixo  $\Upsilon \in \mathcal{H}(\Omega \times X)$  que recebe o nome de *Fractal Top* associado ao IFS. Quando trabalhado em duas dimensões,  $\Upsilon$  pode ser aproximado pelo *Random Iteration Algorithm*, considerando o sistema

$$\{\Omega \times X; T_1, \dots, T_n; p_1, \dots, p_n\}.$$

O ponto fixo  $\Upsilon$  também pode ser calculado de forma determinística.

### 7.1.1 Algoritmo

A partir da teoria acima, é possível aplicar o processo *Colour Stealing* que se baseia em três IFS. O primeiro representa a forma do fractal, o segundo, colore o desenho a partir das cores de uma imagem escolhida, o terceiro é o *Fractal Top* que produz um novo objeto a partir do comportamento da primeira estrutura nos casos com sobreposição definindo um certo valor, chamado de prioridade, a cada cor definida, e as compara para decidir qual colorirá o fractal.

A programação do método se baseia no seguinte contexto. A ideia é ter uma tela em branco e pintá-la com o desenho do fractal que se deseja, com o intuito de ser o mais bonito possível. Por ser um método computacional, essa tela é uma área do monitor, ou seja, é feita inteiramente por píxeis, e para desenhar nessa tela, é necessário dizer ao computador onde está o desenho e qual será sua coloração. Desta forma, o primeiro IFS diz a localização do fractal nessa tela e os outros dois dizem como será sua coloração.

Assim, sejam os IFS  $F_1 = \{X; f_{1n}; p_n\}$ ,  $F_2 = \{X; f_{2n}; p_n\}$  e  $F_3 = \{X; f_{3n}; p_n\}$ , para  $n = 1, \dots, k$ , referentes a cada uma das estruturas, respectivamente. Observe que cada um possui a mesma quantidade de contrações, apesar de diferentes entre si, e ainda, os conjuntos de probabilidades são os mesmos, ou seja, a probabilidade de selecionar  $f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}$  no Random Iteration Algorithm (RIA) é mesma, para cada  $n$ . Ao rodar o RIA para um IFS, escolhe-se uma contração aleatoriamente com base em suas probabilidades, neste algoritmo, o RIA está sendo utilizado para gerar o atrator de três IFS concomitantemente, então ao selecionar uma contração  $n$ , esta deve ser selecionada nos três IFS, por isso a importância das probabilidades serem as mesmas, e que o número de funções também sejam iguais, na verdade, apenas um conjunto de probabilidade é necessário, o do primeiro IFS, já que este define a forma da figura e os outros dois irão se ajustar a ele.

Assim, ao aplicar o RIA nestes três IFS, o primeiro definirá as coordenadas dos pontos que se deseja pintar nessa tela, o segundo definirá píxeis em outra imagem previamente selecionada e associará suas cores a cada um dos pontos da primeira estrutura, o último IFS associará um valor de prioridade a cada um desses pontos, isto é efetuado através do *Fractal Top*. Ao final do processo, após um número suficientemente grande de iterações, tem-se uma lista de pontos, cada um possui uma cor e a coordenada do píxel onde ela será utilizada (na tela), além de um valor de prioridade, lembre-se que o fractal (primeiro IFS) possui sobreposição, ou seja, ao realizar o processo final de pintar a tela, após determinado momento perceberá que alguns dos pontos já estarão pintados, então surge a decisão de deixar a cor que está ou colocar essa nova, é escolhido a que possui o maior prioridade. Terminando de pintar todos os pontos dessa lista, o desenho estará pronto.

### 7.1.2 Aplicando o método

As contrações utilizadas para a aplicação do método são da forma:

$$f(x, y) = \left( \frac{ax + by + c}{gx + hy + j}, \frac{dx + ey + f}{gx + hy + j} \right).$$

Cada  $f_{m,n}$ , com  $m = 1, 2$  e  $n = 1, \dots, k$ , definidas na seção acima, possui a forma de  $f$ , porém, seus próprios parâmetros  $a, b, \dots$ . O *Fractal Top* utilizado para decidir as prioridades recebeu as funções  $h_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , que se baseiam nas probabilidades  $p_n$  associadas as contrações do IFS, são definidas por

$$h_n(x) = p_1 + \dots + p_{n-1} + \frac{e + 2xp_n}{2 + 2e}, \text{ com } n = 1, \dots, k \text{ e } p_0 = 0.$$

Os valores de cada uma das constantes, e o código utilizado, podem ser observados no Anexo A, assim, ao aplicar o método foi gerada a Figura 7.1.2 (da direita), o desenho do fractal, a Figura 7.1.2 (da esquerda) mostra a imagem que as cores foram “roubadas”. Nas figuras seguintes, são mostrados alguns exemplos obtidos com o método, mostrando a beleza e a eficiência do *Colour Stealing* e do *Fractal Top*.



Figura 7.1: Monalisa



Figura 7.2: Samambaia

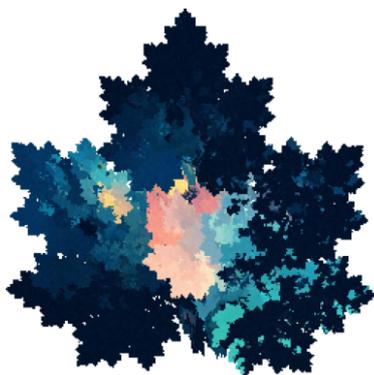


Figura 7.3: Folha de Bordo Azul

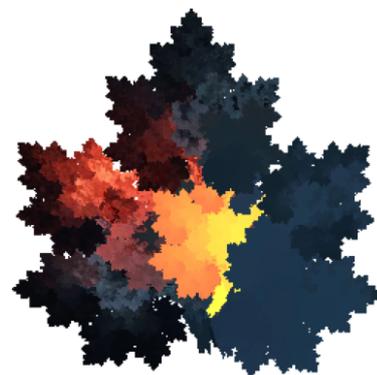


Figura 7.4: Folha de Bordo Vermelha



Figura 7.5: Samambaia Verde



Figura 7.6: Samambaia Azul

## 7.2 Aplicação da Dimensão de Hausdorff

Hoje em dia, uma das mais importantes aplicações de fractais é referente a dimensão fractal, pois traz valores e medidas interessantes que podem ser aplicadas a diversas áreas além da matemática, sendo um tópico bastante estudado. A dimensão fractal mais utilizada é a *box-counting* pela facilidade de aplicação, principalmente quando o objetivo é sua programação, pois utiliza “quadrados” como cobertura, sendo fácil a realização da programação, além de fornecer uma aproximação boa, que apesar de não ser ideal é o suficiente para muitos resultados desejados. Porém, teoricamente, a dimensão de Hausdorff  $D_H$  fornece a melhor aproximação possível, dada sua definição mais generalizada, em contrapartida, essa precisão vem com um preço, sua dificuldade de aplicação é proporcional ao quão precisa ela é, sendo de difícil (e algumas vezes impossível) cálculo, o assunto piora quando se deseja programar. Na literatura, há poucos trabalhos referentes ao cálculo computacional dessa dimensão, e geralmente se restringem a certos conjuntos e condições. Quando se fala de conjuntos autossimilares, que satisfazem a condição do conjunto aberto, há um resultado muito importante que fornece sua dimensão de Hausdorff, graças a Moran, resultado este trabalhado no Capítulo de Fractais. Porém, não há métodos e procedimentos genéricos que calculem  $D_H$  (até onde se sabe).

Tendo isso em mente, a ideia foi procurar um método que calculasse a dimensão de Hausdorff de forma digital e automatizada, sem se preocupar com seu custo computacional, para trazer uma precisão maior aos algoritmos já existente, que se utilizam da dimensão *box-counting* praticamente na totalidade dos trabalhos da área.

Fernández-Martínez e Sánchez-Granero no artigo “*How to calculate the Hausdorff dimension*” [18], desenvolveram um método discreto para calcular a dimensão fractal de um espaço a partir de Estruturas Fractais, que serão definidas nesse capítulo, e coberturas finitas, facilitando a programação de seu algoritmo. Este método, quando restrito a subconjuntos compactos e euclidianos, produz uma medida que se iguala à dimensão de Hausdorff, sendo um dos primeiros trabalhos a desenvolver um algoritmo para o cálculo (computacional) dessa dimensão. A seguir, é estudado o trabalho desses autores [18].

### 7.2.1 Estrutura Fractal

Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  coberturas de um espaço métrico  $\mathbf{X}$ .  $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$  significa que  $\Gamma_1$  é o refinamento de  $\Gamma_2$ , ou seja, para todo  $A \in \Gamma_1$ , existe um  $B \in \Gamma_2$  de forma que  $A \subset B$ . Define-se também  $\Gamma_1 \prec\prec \Gamma_2$  como sendo  $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$  e, para todo  $B \in \Gamma_2$ ,  $B = \{A \in \Gamma_1 : A \subset B\}$ .

**Definição 7.1.** *A estrutura fractal de um conjunto  $X$  é uma família enumerável de conjuntos  $\Gamma = \{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ , de forma que  $\Gamma_{n+1} \prec\prec \Gamma_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

Assim, define-se a estrutura fractal natural de um espaço euclidiano, de dimensão  $m$ , como sendo

$$\Gamma = \{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}, \text{ com } \Gamma_n = \left\{ \left[ \frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1 + 1}{2^n} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_m}{2^n}, \frac{k_m + 1}{2^n} \right] : k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (7.1)$$

**Teorema 7.2.** *Sejam  $\Gamma$  a estrutura fractal natural de um espaço euclidiano como definido na expressão 7.1, e  $F$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^d$ . Então a dimensão de Hausdorff-Besicovitch de  $F$  é dada exatamente como a estudada na seção 4.7.2 quando se consideram os subconjuntos  $A_n$  como sendo  $\Gamma_n$ .*

**Demonstração.** A demonstração do teorema pode ser encontrada no Artigo [18]. ■

Esse teorema traz um importante resultado para a construção de um algoritmo que calcule  $D_H$ , pois ao trabalhar com conjuntos compactos de espaços euclidianos, as coberturas necessárias para seu cálculo podem ser dadas a partir de retângulos de  $\mathbb{R}^d$ , estruturas fáceis de programar por serem vetores e matrizes simples, além de facilitar também o cálculo do diâmetro desses conjuntos, que seria  $\frac{\sqrt{d}}{2^n}$ , com  $d$  sendo a dimensão do espaço.

### 7.2.2 Algoritmo

Agora, é estudado um algoritmo para o cálculo da dimensão, assim, note que cada estrutura fractal possui uma quantidade enumerável de níveis  $\Gamma_n$ , para aplicações práticas, será considerado um número máximo  $n_{max}$  que dependerá de cada situação. Considere o seguinte valor, já estudado anteriormente,

$$\mathcal{H}_{n,m}^s = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k \text{diam}(A_i)^s : A_i \in \bigcup_{n \leq l \leq m} \Gamma_l, F \subset \bigcup_{i=1}^k A_i \right\}, \quad \forall n \leq m \leq n_{max}. \quad (7.2)$$

Para calcular a dimensão de Hausdorff, seguem-se os passos:

- Calcular  $\mathcal{H}_{n,m}^s$  para todo  $m$ ;
- Decidir a medida de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$ ;
- Calcular a Dimensão de Hausdorff  $D_H$ .

No primeiro item, obtém-se uma matriz triangular inferior, porém, é possível considerar  $m = n_{max}$  e obter apenas a última linha dessa matriz, o que também trará bons resultados. A seguir, é analisado os cálculos para  $\mathcal{H}_{n,m}^s$ .

**Proposição 7.3.** *Dada as mesmas condições descritas acima:*

$$(a) \mathcal{H}_{n+1,m+1}^s(F) \leq \mathcal{H}_{n+1,m}^s(F), \text{ para todo } n \leq m \leq n_{max} - 1;$$

(b)  $\mathcal{H}_{n,m+1}^s(F) \leq \mathcal{H}_{n+1,m+1}^s(F)$ , para todo  $n \leq m \leq n_{max} - 1$ .

### Demonstração.

(a) Seja  $\{A_i\}_{i=1}^k \in \mathcal{A}_{n+1,m}(F)$ . Então,  $A_i \in \bigcup_{n+1 \leq l \leq m} \Gamma_l$ , com  $F \subset \bigcup_{i=1}^k A_i$ . Assim,  $A_i \in \bigcup_{n+1 \leq l \leq m+1} \Gamma_l$ , para todo  $i$ . Implicando que  $\{A_i\} \in \mathcal{A}_{n+1,m+1}(F)$ . Logo,  $\mathcal{A}_{n+1,m}(F) \subset \mathcal{A}_{n+1,m+1}(F)$ , para todo  $n \leq m \leq n_{max} - 1$ . Concluindo o resultado ao considerar a definição de  $\mathcal{A}$  e de  $\mathcal{H}$ .

(b) De fato, seja  $\{A_i\}_{i=1}^k \in \mathcal{A}_{n+1,m+1}(F)$ , tem-se que  $A_i \in \bigcup_{n+1 \leq l \leq m+1} \Gamma_l$ , com  $F \subset \bigcup_{i=1}^k A_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ . Logo,  $A_i \in \bigcup_{n \leq l \leq m+1} \Gamma_l$ , implicando que  $\{A_i\} \in \mathcal{A}_{n,m+1}(F)$ . Assim,  $\mathcal{A}_{n+1,m+1}(F) \subset \mathcal{A}_{n,m+1}(F)$ , para todo  $n \leq m \leq n_{max} - 1$ . Ou seja,  $\mathcal{H}_{n,m+1}^s(F) \leq \mathcal{H}_{n+1,m+1}^s(F)$ . ■

Note que se uma coluna é fixa, então cada valor é maior que ou igual à quantidade abaixo dela e, se fixar uma linha, então cada valor é maior que ou igual ao da sua direita.

Note também que  $A_n(F) = \{A \in \Gamma_n : A \cap F \neq \emptyset\}$ , para todo  $n \leq n_{max}$ . Conhecendo essa família  $A_n$ , pode-se determinar a cobertura mínima necessária para calcular  $\mathcal{H}_{n,m}^s(F)$ , para todo  $n \leq m \leq n_{max}$ , o que será equivalente, nessa seção, a calcular uma cobertura finita que minimize a quantidade  $\sum_{i=1}^k \text{diam}(A_i)^s$ , com  $A_i \in \bigcup_{n \leq l \leq m+1} \Gamma_l$ . E ainda, é importante ressaltar que  $\text{diam}(A) = \frac{\sqrt{d}}{2^n}$ , para cada  $A \in \Gamma_n$ .

Assim, os procedimentos para calcular  $\mathcal{H}_{n,m}^s(F)$  são:

1. Para o nível  $m$ , a cobertura mínima é  $\mathcal{M}_m = \{A : A \in A_m(F)\}$ ;
2. Para o nível  $m - 1$ :  
Comece com  $\mathcal{M}_{m-1} = \emptyset$ .  
Para cada  $A \in A_{m-1}(F)$ , ache  $\{B \in \mathcal{M}_m : B \subset A\}$ .  
Se  $\text{diam}(A)^s < \{\sum \text{diam}(B)^s : B \in \mathcal{M}_m : B \subset A\}$ , adicione  $A$  em  $\mathcal{M}_{m-1}$ , caso contrário, adicione  $\{B \in \mathcal{M}_m : B \subset A\}$  em  $\mathcal{M}_{m-1}$ .
3. Repita até o nível  $n$ .
4. Retorne a cobertura mínima  $\mathcal{M}_n = \{A_1, \dots, A_k\}$  e  $\sum_{i=1}^k \text{diam}(A_i)^s$ , o que resulta em  $\mathcal{H}_{n,m}^s(F)$ .

### 7.2.3 Cálculo de $\mathcal{H}^s(F)$

Dados  $s > 0$  e  $F \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{H}^s(F)$  pode assumir apenas os valores zero ou infinito, exceto nos casos em que  $s = D_H(F)$ . Assim, a partir dos valores de  $\mathcal{H}_{n,m}^s(F)$  com  $n \leq m \leq n_{max}$ , é necessário decidir o valor de  $\mathcal{H}^s(F)$ , de modo a se obter uma boa aproximação da dimensão de Hausdorff de  $F$ .

Variando o valor de  $s$ , é possível perceber um certo padrão no comportamento de  $\mathcal{H}_{n,m}^s(F)$ , porém, é necessário decidir se seu valor será zero ou infinito a partir desse padrão. Para isso, é utilizado um *Support Vector Machine* (SVM), que será tratado mais adiante.

### 7.2.4 Cálculo de $D_H(F)$

Após definir o valor de  $\mathcal{H}^s(F)$ , resta calcular a dimensão de  $F$ , para isso, será utilizado um método de bisseção. O algoritmo se baseia no fato que  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$  para  $0 \leq s < D_H(F)$  e  $\mathcal{H}^s(F) = 0$  para  $s > D_H(F)$ , como visto no Teorema 4.35. Assim:

1. Considere  $s_0 = 0$  e  $s_1 = d$ , e  $s$  como sendo sua média aritmética,  $s = \frac{s_0 + s_1}{2}$ ;
2. Se  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ ,  $s_0 = s$ , ou, se  $\mathcal{H}^s(F) = 0$ ,  $s_1 = s$ ;
3. Calcule novamente  $s = \frac{s_0 + s_1}{2}$ ;
4. Repita até obter um erro absoluto  $E = s_1 - s_0 < \epsilon$ , com  $\epsilon$  sendo a precisão desejada.

Assim, obtém-se a dimensão de Hausdorff de  $F$ . Porém, ainda resta explicar o critério utilizado no SVM e seu processo de treino.

### 7.2.5 *Support Vector Machine*

*Support Vector Machine* (SVM), de forma bem simplificada, é um algoritmo de inteligência artificial baseado em aprendizagem supervisionada, sendo possível “prever” resultados desejados. Em outras palavras, é um programa que precisa de um banco de dados para “treiná-lo”, e a partir disso conseguirá descobrir padrões a partir de certos parâmetros dados, assim, ao entregar um novo arquivo ao SVM, ele irá classificar de acordo com esses parâmetros aprendidos.

O *Support Vector Machine* é utilizado para classificar  $\mathcal{H}^s(F)$  como sendo zero ou  $\infty$  a partir de uma base de dados. Então, primeiramente, é preciso criar uma base de dados com as medidas de Hausdorff  $\mathcal{H}^s(F)$  e seus respectivos  $\mathcal{H}_{n,m}^s(F)$  de subconjuntos compactos e euclidianos para que o algoritmo analise esses valores e consiga oferecer um valor tão preciso quanto se deseja. Para isso, será utilizado fractais reais gerados a partir de IFS hiperbólico, como já estudado no Capítulo 4. E, com essa base de dados, testar sua precisão em fractais não reais, o que o artigo demonstra trazer uma ótima aproximação, mesmo aplicando o método em diferentes dimensões.

Para realizar a criação desses dados, além de utilizar fractais reais gerados a partir de IFS hiperbólicos, será restringido as condições para IFS sem sobreposição, pois assim, a partir do Teorema de Moran, sabe-se a dimensão de Hausdorff de cada um desses conjuntos.

Então, o objetivo é criar um conjunto autossimilar  $K$  que satisfaz as condições:

1.  $0, 1 \in K$ , com  $K \in [0, 1]$ ;
2.  $K$  é o atrator do IFS  $\{\mathbb{R}; f_1, \dots, f_m\}$ ,  $m \geq 2$ , conforme as condições do Teorema da Contração para Conjuntos;
3. Seja  $d \in (0, 1)$ , então  $D_H(K) = d$ .

Como o foco está em IFS reais, as contrações desejadas são da forma  $f_i(x) = c_i x + a_i$ , com  $i = 1, \dots, m$  e  $c_i \in (0, 1)$ . Então, cada  $f_i$  possui um fator de semelhança (ou de contração) igual a  $c_i$ .

Primeiramente, será definido os fatores de semelhança  $c_i$ . Pelo Teorema de Moran, tem-se que  $\sum_{i=1}^m c_i^d = 1$ , pois  $0 < c_i < 1$ , então, basta escolher um valor aleatório  $c'_i \in (0, 1)$  de forma que  $c_i = c c'_i$ , para algum  $c \in (0, 1)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m (cc'_i)^d &= \sum_{i=1}^m c_i^d \\
\sum_{i=1}^m c^d c_i'^d &= 1 \\
c^d \sum_{i=1}^m c_i'^d &= 1 \\
c^d &= \frac{1}{\sum_{i=1}^m c_i'^d} \\
c &= \frac{1}{(\sum_{i=1}^m c_i'^d)^{\frac{1}{d}}}.
\end{aligned}$$

Agora, será definido os termos  $a_i$ . Considere  $d_1 = 0$ ,  $d_2$  como sendo um valor aleatório pertencente a  $[0, 1 - \sum_{i=1}^m c_i]$  e,  $d_{j+1} \in [0, 1 - \sum_{i=1}^m c_i - \sum_{i=1}^j d_i]$ , exceto  $d_m$  que é definido como  $d_m = 1 - \sum_{i=1}^m c_i - \sum_{i=1}^{m-1} d_i$ .

Então,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = c_1 + d_2$ , e generalizando,  $a_{j+1} = \sum_{i=1}^j c_i + \sum_{i=1}^{j+1} d_i$ , para  $j = 1, \dots, m-1$ .

Juntando essas informações, é possível construir todas as semelhanças  $f_i$  que possuirão as seguintes propriedades.

1.  $f_i(1) \leq f_{i+1}(0)$ , para todo  $i = 1, \dots, m-1$ .

Pois,  $f_i(0) = a_i$  e  $f_i(1) = a_i + c_i$ . Então,  $f_{i+1}(0) = a_{i+1} = a_i + c_i + d_{i+1} = f_i(1) + d_{i+1}$ .

2.  $f_m(1) = 1$ .

Note que  $f_m(1) = a_m + c_m = a_{m-1} + c_{m-1} + d_m + c_m = 1$ , pois  $d_m = 1 - \sum_{i=1}^m c_i - \sum_{i=1}^{m-1} d_i$  e  $a_m = \sum_{i=1}^{m-1} c_i + \sum_{i=1}^m d_i$ .

Portanto, falta apenas verificar que o IFS gerado a partir das semelhanças definidas acima satisfazem as condições de autossimilaridade.

1. Conforme os itens acima, é possível construir a relação

$$0 = f_1(0) < f_1(1) < \dots < f_i(0) < f_i(1) < \dots < f_m(0) < f_m(1) = 1$$

Assim,  $f([0, 1]) = [a_i, a_i + c_i] \in [0, 1]$ , então,  $F([0, 1]) = \bigcup_{i=1}^m f_i([0, 1]) \in [0, 1]$ , sendo  $F$  o Operador de Hutchinson utilizado na Teorema da Contração para Conjuntos, portanto,  $F^n([0, 1]) \in [0, 1]$ , para qualquer natural  $n$ . Tem-se ainda, pelo mesmo teorema, que seu atrator  $K \in [0, 1]$ , e também, como  $f_1(0) = 0$  e  $f_m(1) = 1$ , então  $0, 1 \in K$ .

2. A partir do item acima,  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n([0, 1])$  é o atrator do IFS  $\{\mathbb{R}; f_1, \dots, f_m\}$ ,  $m \geq 2$ .
3. Por construção, tem-se que  $\sum_{i=1}^m c_i^d = 1$ , logo, pelo Teorema de Moran,  $D_H(K) = d$ .

A partir do Teorema da Contração para Conjuntos, o atrator  $K$  é o único conjunto real não vazio que se mantém fixo sobre a ação do Operador de Hutchinson  $F$ . Também, seja  $E$  um conjunto real qualquer e não vazio, então,  $F^n(E)$  se torna uma aproximação melhor para  $K$  a medida que  $n$  aumenta. Por isso, é possível obter o comportamento de  $\mathcal{H}_{n,m}^s(K)$  através de  $\mathcal{H}_{n,m}^s(K_l)$ , grosseiramente falando, é como se fosse uma abordagem finita do atrator  $K$ . Para isso, seguem dois resultados para mostrar o número mínimo de iterações necessárias para obter essa abordagem finita de  $K$  a partir de um  $n_{max}$  fixo.

**Teorema 7.4.** *Seja o IFS  $\{\mathbb{R}, f_i\}$ , com  $i = 1, \dots, m$ , e  $K$  seu atrator. Sejam também  $c_i$  o fator de semelhança de cada  $f_i$ , e  $\Gamma$  a estrutura fractal de  $\mathbb{R}$ . Se  $K_0 = \{1, 0\}$  e  $K_l = F(K_{l-1}) = F^l(K_0)$ , com  $l \in \mathbb{N}$ , então as seguintes afirmações são verdadeiras.*

(a)  $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_l \subset K$ .

(b)  $K = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n}$ .

(c) Dado  $n_{max}$ , seja  $l = \left\lceil \frac{1}{\log_2 \max\{c_i\}^{\frac{-1}{n_{max}}}} \right\rceil$ . No qual,  $\lceil \cdot \rceil$  é a "função teto".

Então,  $K_l \cap A \neq \emptyset$  se, e somente se,  $K \cap A \neq \emptyset$ .

### Demonstração.

(a) É claro que  $K_0 \subset \bigcup_{i=1}^m f_i(K_0) = F(K_0) = K_1$ , com  $f_1(0) = 0$  e  $f_m(1) = 1$ . Então, suponha que  $K_{l-2} \subset K_{l-1}$ , precisa-se provar que  $K_{l-1} \subset K_l$ . De fato,  $K_{l-1} = F(K_{l-2}) \subset F(K_{l-1}) = K_l$ , por hipótese de indução. Por outro lado,  $K_0 \subset K$ . Logo,  $K_1 = F(K_0) \subset F(K) = K$ . De forma análoga, supondo que  $K_{l-1} \subset K$ , então  $K_l = F(K_{l-1}) \subset F(K) = K$ , para todo  $l \in \mathbb{N}$ .

(b) Primeiro, como  $K_{n+1} = F(K_n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(K_n, K) = 0$ . Para  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  de forma que  $d_H(K_n, K) < \epsilon$ , para todo  $n \geq n_0$ . Então, ambos os itens são válidos:

- $K \subset B(K_n, \epsilon)$ , implicando que  $K \subset B\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n, \epsilon\right)$ .
- $K_n \subset B(K, \epsilon)$ , para todo  $n \geq n_0$ . Assim,  $\bigcup_{n \geq n_0} K_n \subset B(K, \epsilon)$ . E ainda, como  $K_n \subset K_{n+1}$ , pelo item anterior, então tem-se que  $\bigcup_{n \geq n_0} K_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . Da mesma forma,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset B(K, \epsilon)$ . Finalmente, tem-se que ambos os itens levam a  $d_H(K, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n) < \epsilon$ , para todo  $\epsilon > 0$ , implicando que  $d_H(K, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n) = 0$  e  $K = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n}$ .

(c) Dado  $n_{max}$ , seja  $l = \left\lceil \frac{1}{\log_2 \max\{c_i\}^{\frac{-1}{n_{max}}}} \right\rceil$ .

Então, suponha que  $K_l \cap A \neq \emptyset$ . Pelo primeiro item deste teorema, tem-se que  $K_l \subset K$ , logo,  $K \cap A \neq \emptyset$ .

Por outro lado, assumamos que  $K \cap A \neq \emptyset$ , com  $A \in \Gamma_m$  e  $m \leq n_{max}$ , assim,  $K = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k([0, 1])$ , pois  $[0, 1]$  é um conjunto compacto e  $f_i([0, 1]) \subset [0, 1]$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ . Por hipótese,  $l \geq \left\lceil \frac{1}{\log_2 \max\{c_i\}^{\frac{-1}{n_{max}}}} \right\rceil$ , ficando claro que  $(\max_{i \in I} \{c_i\})^l < \frac{1}{2^{n_{max}}}$ . Logo, se  $x \in K \cap A$ , então  $x \in F^l([0, 1]) \cap A$ . Utilizando o conceito de endereço (palavra), é possível fazer a seguinte associação. Seja  $x \in F^l([0, 1])$ , portanto, existe  $(i_1, \dots, i_l)$  de forma que  $x \in f_{i_1, \dots, i_l}([0, 1]) = (f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_l})([0, 1]) = [a, b]$ , com  $a = f_{i_1, \dots, i_l}(0)$  e  $b = f_{i_1, \dots, i_l}(1)$ .

Note que  $K_j = \{f_{i_1, \dots, i_j}(0), f_{i_1, \dots, i_j}(1) : \text{para um certo } (i_1, \dots, i_j)\}$ , para todo  $j \leq n_{max}$ , ou seja,  $a, b \in K_j$ . Então, foi verificado que  $x \in [a, b] \cap A$ , com  $b - a < \frac{1}{2^{n_{max}}}$ , pois o fator de contração de  $f_{i_1, \dots, i_l}$  é  $c_{i_1} \cdots c_{i_l} \leq (\max_{i \in I} \{c_i\})^l < \frac{1}{2^{n_{max}}}$ . Assim, tem-se que  $a \in A$  ou  $b \in A$ , ou seja,  $A \cap K_l \neq \emptyset$ .

■

**Corolário 7.5.** *Dada as condições do Teorema 7.4,  $\mathcal{H}_{n,m}^s(K_l) = \mathcal{H}_{n,m}^s(K)$ , para cada  $n \leq m \leq n_{max}$ , em que  $l = \left\lceil \frac{1}{\log_2 \max\{c_i\}^{\frac{-1}{n_{max}}}} \right\rceil$ .*

Sua demonstração é uma aplicação direta do Teorema 7.4 Item (c).

O algoritmo está praticamente pronto, resta apenas treinar o SVM a partir dos resultados acima. Como o intuito dessa seção foi o estudo do artigo e não da aplicação do SVM propriamente dito, não foi realizado a programação do algoritmo, pois necessitaria de um tempo maior do que se tinha. Porém, os autores da pesquisa, Fernández-Martínez e Sánchez-Granero, realizaram a programação e todos os testes necessários e estão disponíveis em [18]. No artigo, eles trazem todos os detalhes desse teste, todos os números utilizados e também a sua eficácia. É verificado que, apesar da complexidade do código, ao comparar-se com o da dimensão *box-counting*, a precisão do método, quando treinado com um grande número de IFS, é proporcional a sua complexidade, trazendo ótimas aproximações à dimensão fractal.

## Referências

---

- [1] A. T. Baraviera; F. M. Branco. *Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão*. Campinas - SP: UNICAMP/IMECC, 2012.
- [2] M. Barnsley. *Fractals Everywhere, 1a. edição*. Academic Press, Dublin, 1988.
- [3] M. Barnsley. Theory and application of fractal tops. *Fractals in Engineering: New Trends in Theory and Applications*, Springer-Verlag:3–20, 2005.
- [4] M. Barnsley; S. Damko. Iterated function system and the global construction of fractals. *Proc. R. Lond., A* 399:243–275, 1985.
- [5] M. Brin; G. Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2003.
- [6] M. Castelli. Teoremas de ponto fixo. Master's thesis, UEM, Maringá-PR, 2016.
- [7] A. Douglas; R. Jonathan. Möbius transformations revealed, 2007.
- [8] G. A. Edgar. *Classics on Fractals*. Westview Press, 2004.
- [9] K. Falconer. *Fractal Geometry*. John Wiley-Sons Ltd., 1990.
- [10] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. Second Edition*. John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [11] M. Goemans. Pigeonhole principle and the probabilistic method. MIT, 2015. Lecture Notes.
- [12] G. Iezzi; S. Hazzan. *Fundamentos de Matemática Elementar: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas*. Editora Atual, 1997.
- [13] G. C. Layek. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2015.
- [14] E. L. Lima. *Elementos de Topologia Geral*. IMPA, 1970.
- [15] E. L. Lima. *Curso de análise, vol.2, 1a. edição*. IMPA, 2014.
- [16] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, 1983.
- [17] N. F. Pytheas. *Substitution in Dynamics, Arithmetics, and Combinatorics*. Springer, 1794.
- [18] M. Fernández-Martínez; M. A. Sánchez-Granero. How to calculate the hausdorff dimension using fractal structures. *Applied Mathematics and Computation*, 264:116–131, 2015.



## Informações do *Colour Stealing*

Neste apêndice, será mostrado as variáveis utilizadas para a aplicação do método *Colour Stealing*, e em seguida o código utilizado para a programação do algoritmo. Como já foi dito no Capítulo 7, as funções utilizadas para as primeiras duas estruturas são da forma

$$f(x, y) = \left( \frac{ax + by + c}{gx + hy + j}, \frac{dx + ey + f}{gx + hy + j} \right).$$

E, para o *fractal top*,

$$h_i(x) = p_1 + \dots + p_{i-1} + \frac{e + 2xp_i}{2 + 2e}, \text{ com } i = 1, \dots, n \text{ e } p_0 = 0.$$

Desta forma, seguindo a maneira utilizada na programação, as variáveis do primeiro IFS são as que estão na Figura A.1. Observe que as linhas da variável *constant* representam as constantes, então a primeira linha é equivalente à constante  $a$ , a segunda é  $b$  e assim em diante. Observe também que cada linha possui quatro valores, cada um representa uma função do sistema, ou seja, utilizamos quatro contrações em cada uma das estruturas. Por fim,  $p_{prop}$  é a probabilidade associada ao sistema. As constantes do Fern, são as utilizadas para a Samambaia, e as do Maple, para a folha de Bordo.

O segundo IFS, de forma análoga a já descrita, possui as variáveis da Figura A.2. Para estas, foi utilizada a que produzia a melhor distribuição de cores na imagem, na opinião dos autores da dissertação.

Apesar de não explicar cada detalhe do código, observável nas Figuras A.3, A.4, A.5, A.6, ele segue exatamente o algoritmo do *Colour Stealing*, foi programado em Python no software *Visual Code Studio*. O Código não é o mais otimizado possível, este não era o foco da pesquisa, o foco era aplicar o método e fazê-lo funcionar, independente de seu custo computacional.

Figura A.1: Constantes do Primeiro IFS

```
1  Fern
2  constant = [
3      [1.90080, 0.0020, 0.96543, -0.3252],
4      [-0.072, -0.044, -0.3519, -0.0581],
5      [0.1857, 0.0755, 0.05809, -0.0289],
6      [0.01539, 0.0027, 1.31389, -1.229],
7      [1.6914, -0.044, -0.0651, -0.0011],
8      [0.0277, 0.104, -0.191, 0.1991],
9      [0.5626, 0.0025, 1.34823, -1.2815],
10     [-0.20119, -0.0877, -0.30675, 0.243],
11     [2.0052, 0.154, 0.0747, -0.0585]
12 ]
13 p_prob = [0.6, 0.01, 0.195, 0.195]
14
15 Maple
16 constant = [
17     [0.14, 0.43, 0.45, 0.49],
18     [0.01, 0.52, -0.49, 0.00],
19     [-0.08, 1.49, -1.62, 0.02],
20     [0.00, -0.45, 0.47, 0.00],
21     [0.51, 0.50, 0.47, 0.51],
22     [-1.31, -0.75, -0.74, 1.62],
23     [0, 0, 0, 0],
24     [0, 0, 0, 0],
25     [0, 0, 0, 0]
26 ]
27 p_prob = [0.10, 0.35, 0.35, 0.20]
```

Fonte: Autoria Própria

Figura A.2: Constantes do Segundo IFS

```
74 ∨ constant2 = [  
75     [0.5, 0.5, 0.5, 0.5],  
76     [0, 0, 0, 0],  
77     [0, 0.5, 0, 0.5],  
78     [0, 0, 0, 0],  
79     [0.5, 0.5, 0.5, 0.5],  
80     [0, 0, 0.5, 0.5],  
81     [0, 0, 0, 0],  
82     [0, 0, 0, 0],  
83     [1, 1, 1, 1]  
84 ]  
85  
86 ∨ constant2 = [  
87     [0.2, 0.8, 0.2, 0.8],  
88     [0, 0, 0, 0],  
89     [0, 0.2, 0, 0.2],  
90     [0, 0, 0, 0],  
91     [0.2, 0.2, 0.8, 0.8],  
92     [0, 0, 0.2, 0.2],  
93     [0, 0, 0, 0],  
94     [0, 0, 0, 0],  
95     [1, 1, 1, 1]  
96 ]
```

Fonte: Autoria Própria

Figura A.3: Código Parte 1

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import matplotlib.image as mpimg
3 import numpy
4 import random
5 import math
6 from PIL import Image
7
8 points = 4000000
9
10 x_data = []
11 y_data = []
12 newx = [0.5]
13 newy = [0.5]
14 newx2 = [0.5]
15 newy2 = [0.5]
16
17 colorx = []
18 colory = []
19
20 h_prob = []
21 newx3 = 0
22
23 # Fractal
24 fractal_sizey = 250
25 fractal_sizex = 250
26 fractal = Image.new("RGB", (fractal_sizex,fractal_sizey), 'white')
27 frac_pixel = fractal.load()
28 priority = numpy.zeros([fractal_sizex, fractal_sizey])
29
30 f_qnt = 4
```

Fonte: Autoria Própria

Figura A.4: Código Parte 2

```
57 #loop
58 for n in range(points):
59     a = numpy.random.choice(numpy.arange(0,f_qnt), p=p_prob)
60
61     a_func = numpy.dot(constant[0][a], newx) + numpy.dot(constant[1][a], newy) + constant[2][a]
62     b_func = numpy.dot(constant[3][a], newx) + numpy.dot(constant[4][a], newy) + constant[5][a]
63     c_func = numpy.dot(constant[6][a], newx) + numpy.dot(constant[7][a], newy) + constant[8][a]
64
65     a_func2 = numpy.dot(constant2[0][a], newx2) + numpy.dot(constant2[1][a], newy2) + constant2[2][a]
66     b_func2 = numpy.dot(constant2[3][a], newx2) + numpy.dot(constant2[4][a], newy2) + constant2[5][a]
67     c_func2 = numpy.dot(constant2[6][a], newx2) + numpy.dot(constant2[7][a], newy2) + constant2[8][a]
68
69     h0 = numpy.divide((numpy.exp(1) + numpy.dot(numpy.dot(2,newx3),p_prob[a])),(2 + numpy.dot(2,numpy.exp(1))))
70     h1 = p_prob[0] + h0
71     h2 = p_prob[0] + p_prob[1] + h0
72     h3 = p_prob[0] + p_prob[1] + p_prob[2] + h0
73     h = [h0, h1, h2, h3]
74
75     newx = a_func/c_func
76     newy = b_func/c_func
77
78     newx2 = a_func2/c_func2
79     newy2 = b_func2/c_func2
80
81     newx3 = h[a]
82
83     colorx.extend(newx2)
84     colory.extend(newy2)
85
86     x_data.extend(newx)
87     y_data.extend(newy)
88
89     h_prob.append(newx3)
```

Fonte: Autoria Própria

Figura A.5: Código Parte 3

```
91 # Mudando o Fractal para os Naturais
92 mindx = min(x_data)
93 mindy = min(y_data)
94
95 if mindx < 0:
96     x_data = numpy.add(x_data, mindx)
97
98 if mindy < 0:
99     y_data = numpy.add(y_data, mindy)
100
101 maxdx = max(x_data)
102 maxdy = max(y_data)
103
104 x_data = numpy.dot(x_data,1/maxdx)
105 y_data = numpy.dot(y_data,1/maxdy)
106
107 x_data = numpy.dot(fractal_size_x -1, x_data)
108 y_data = numpy.dot(fractal_size_y -1, y_data)
109
110 # Imagem
111 img = mpimg.imread('figura1.jpg') #2,3,5,6
112 img2 = Image.open("figura1.jpg")
113 frac_color = img2.load()
114 img_size = numpy.shape(img)
115 img_0 = img_size[0] - 1
116 img_1 = img_size[1] - 1
```

Fonte: Autoria Própria

Figura A.6: Código Parte 4

```
118 # Mudando o Color IFS para os Naturais
119 mincx = min(colorx)
120 mincy = min(colory)
121
122 if mincx < 0:
123     colorx = numpy.add(colorx, mincx)
124
125 if mincy < 0:
126     colory = numpy.add(colory, mincy)
127
128 maxcx = max(colorx)
129 maxcy = max(colory)
130
131 colorx = numpy.dot(colorx, 1/maxcx)
132 colory = numpy.dot(colory, 1/maxcy)
133
134 colorx = numpy.dot(img_0, colorx)
135 colory = numpy.dot(img_1, colory)
136
137 #loop 2
138 for n in range(points):
139     x_color = int(numpy.round(colorx[n]))
140     y_color = int(numpy.round(colory[n]))
141
142     x_pixel = int(numpy.round(x_data[n]))
143     y_pixel = int(numpy.round(y_data[n]))
144
145     if h_prob[n] > priority[x_pixel][y_pixel]:
146         priority[x_pixel][y_pixel] = h_prob[n]
147         img_color = frac_color[y_color, x_color]
148         fractal.putpixel((x_pixel, y_pixel), img_color)
149
150 plt.imshow(fractal)
151 plt.axis('off')
152 plt.savefig("Fractal.jpg", dpi=70)
```

Fonte: Autoria Própria