





Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

90

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/95

**Análise dos Efeitos da Correção de Camadas para a
Distribuição de Massa do Cálcio⁴⁰**

Andrea Cressoni de Conti



Orientador

Diógenes Galetti

Agosto 1995

Agradecimentos

Agradeço a todos que contribuíram para a conclusão deste trabalho, em particular:

Aos meus pais que sempre acreditaram em mim;

Do Claudio, meu querido marido, que sempre esteve lá para mim, dando-me seu amor e compreensão;

Das minhas queridas amigas Lúcia e Rosana que sempre me fizeram uma ótima companhia;

Do professor Douglas Valente, que além de professor me mostrou um grande amor;

A CAPES pelo apoio financeiro.

A Jesus, o qual hoje, posso chamá-lo de Aba Pai

Resumo

Abstract

Estuda-se, nesse trabalho, a densidade de massa/carga nuclear, inicialmente através do modelo de camadas simples. Usando-se o método de Strutinsky, introduzem-se correlações adicionais no cálculo da densidade de massa através de uma ocupação efetiva. Os resultados para a densidade são também comparados com dados experimentais de espalhamento de elétrons.

Palavras- Chaves : *Método de Strutinsky, densidade espacial, correlações de um corpo, número de ocupação .*

Área de Conhecimento : *1.05.04.01-0*

Índice

1	Introdução	1
2	Espalhamento de Elétrons	5
2.1	Introdução	5
2.2	Teoria Básica do Espalhamento	6
2.3	Espalhamento Elástico de Elétrons	8
Abstract		
<p>In this work we intend to study the mass density initially by using the shell model. Using the Strutinsky shell correction method we can introduce additional correlations in the mass density calculation by using the effective occupation number. The results for this density are compared with the electron scattering experimental data.</p>		
3	Definição e Origem das Camadas	17
3.1	Deformação e Estabilidade	19
3.2	O Formalismo de Strutinsky	20
3.3	Problema de correção da energia de nível	21
3.4	Determinação das Correções de Curvatura	22
3.4.1	Correções de curvatura e o número de ocupação	23
3.4.2	Determinação das Correções de Curvatura	22
3.4.3	Correções de camadas e o número de ocupação	26
4	Cálculo de Densidade Espacial	31
4.1	Introdução	31
4.2	Distribuição de Densidades	33
4.3	Distribuição Angular	37
4.4	Dependência da Temperatura nas Funções Distribuições	38
5	Conclusões	43
A	Cálculo das Densidades de Massa	45

Índice	vi
1 Cálculo das Distribuições de Momentos	18
2 Cálculo da Distribuição Angular	39
Referências Bibliográficas	52

Índice

1	Introdução	1
2	Espalhamento de Elétrons	5
2.1	Introdução	5
2.2	Teoria Básica do Espalhamento de Elétrons	6
2.3	Espalhamento Elástico de Elétrons	8
3	Método de Strutinsky	17
3.1	Introdução	17
3.2	Definição e Origens das Camadas	18
3.3	Deformação e Estabilidade	19
3.4	O Formalismo de Strutinsky	20
3.4.1	Extração da parte atenuada da densidade de níveis	20
3.4.2	Determinação das Correções de Curvatura.	22
3.4.3	Correções de camadas e o número de ocupação	26
4	Cálculo da Densidade Espacial	33
4.1	Introdução	33
4.2	Distribuição de Densidades	33
4.3	Distribuição Angular	37
4.4	Dependência da Temperatura nas Funções Distribuições	38
5	Conclusões	43
A	Cálculo das Densidades de Massa	45

B Cálculo das Distribuições de Momentos

48

C Cálculo da Distribuição Angular

49

Referências Bibliográficas

52

Capítulo 1

Introdução

A fim de se descrever a estrutura nuclear, vários modelos foram propostos para os núcleos, como por exemplo, o modelo da gota líquida (LDM) e o modelo de camadas, que são os mais básicos e de grande validade. O LDM é de todos os modelos o mais simples, e sua descrição dos núcleos pesados se baseia em dois componentes fundamentais:

i) as densidades de massa no interior dos núcleos são aproximadamente as mesmas;

ii) as energias totais de ligação são aproximadamente proporcionais às massas nucleares, ou seja $B \approx cA$, onde A é o número de massa do núcleo e B a energia de ligação do núcleo.

Essas duas propriedades descritas acima podem ser comparadas com as análises válidas para gotas macroscópicas de líquido incompressível. Para tais gotas líquidas de várias formas:

i) as densidades no interior das gotas são as mesmas;

ii) os valores superficiais de tensão são proporcionais às respectivas massas.

O sucesso da segunda comparação está no fato de calor de vaporização ser a energia necessária para a fragmentação em moléculas da gota; análoga à energia de ligação do núcleo.

O modelo da gota líquida fornece uma boa estimativa para o comportamento nuclear em relação à massa e à energia de ligação. Como a energia de ligação é uma medida direta da estabilidade, por isso, quanto maior a energia de ligação por nucleão, maior a estabilidade. No interior da gota líquida observamos, portanto, o comportamento típico dos núcleos.

Capítulo 1

Introdução

A fim de se descrever a estrutura nuclear, vários modelos foram propostos para os núcleos, como por exemplo, o modelo da gota líquida (LDM) e o modelo de camadas, que são os mais básicos e de grande validade. O LDM é de todos os modelos o mais simples, e sua descrição dos núcleos pesados se baseia em duas componentes fundamentais:

- i) as densidades de massa no interior dos núcleos são aproximadamente as mesmas.
- ii) as energias totais de ligação são aproximadamente proporcionais às massas nucleares, pois $\frac{\Delta E}{A} \simeq \text{constante}$, onde A é o número de massa do núcleo e ΔE é a energia de ligação do núcleo.

Essas duas propriedades descritas acima podem ser comparadas com as análogas válidas para gotas macroscópicas de líquido incompressíveis. Para tais gotas líquidas de várias formas:

- i) as densidades no interior das gotas são as mesmas,
- ii) os calores específicos de vaporização são proporcionais às respectivas massas.

O sentido da segunda comparação está no fato do calor de vaporização ser a energia necessária para a fragmentação em moléculas da gota, análoga à energia de ligação do núcleo.

O modelo da gota líquida fornece uma boa estimativa para o comportamento médio dos núcleos em relação à massa ou à energia de ligação. Como a energia de ligação é uma medida direta da estabilidade, ou seja, quanto maior a energia de ligação, maior a estabilidade, o modelo da gota líquida descreve corretamente o comportamento médio dos núcleos

no que diz respeito a sua estabilidade. Entretanto, núcleos com certos valores de Z e/ou N apresentam desvios significativos desse comportamento médio, pois são singularmente estáveis. Esses valores de Z e/ou N são chamados de números mágicos

$$Z \text{ e/ou } N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.$$

Devido às altas energias de ligação apresentadas pelos núcleos mágicos, que são os núcleos que apresentam Z e/ou N mágicos, percebeu-se que o LDM não descrevia bem esses núcleos; era cabível então uma abordagem que começou a estudar esse problema fazendo analogias com a estrutura atômica, ou seja, começou a se levantar a hipótese de que os nucleons deveriam também formar camadas fechadas de energia quando os nucleons se movessem independentemente uns dos outros num potencial nuclear. Desse modo, começaram a surgir as primeiras idéias que dariam forma ao modelo de camadas.

O modelo de camadas, conhecido também como modelo de partícula independente, sugere que um nucleon se movimenta num potencial efetivo, produzido por todos os outros nucleons que estão no núcleo, sem que haja interação entre eles, mas somente entre o nucleon e o potencial. O problema então consiste em encontrar os níveis de energia dos neutrons e dos prótons, supondo uma forma especificada para o potencial efetivo de um certo núcleo.

Os números mágicos são descritos nesse modelo quando, adicionalmente, se introduz a interação spin-órbita; dessa forma, o modelo de camadas conseguiu prever os números mágicos e também as suas consequências. Porém, esse modelo não é bem sucedido na predição da energia de ligação do núcleo bem como dos momentos dipolares magnéticos.

Nesta dissertação estaremos apenas interessados em estudar uma das propriedades do núcleo atômico, qual seja, a densidade de massa nuclear. Queremos então usar uma ferramenta que nos permita fazer isso, estendendo o formalismo do modelo de camadas simples, de tal forma a introduzir correlações adicionais entre os nucleons, sem usar métodos auto-consistentes do tipo Hartree-Fock. Essa ferramenta que será usado por nós é dada por Strutinsky, através do seu método de correção de camadas. Este método pode ser classificado como um método híbrido, pois ele incorpora elementos que permitem apenas as predições corretas feitas pelo LDM e pelo método de correção de camadas. Ele ainda nos

dá uma nova maneira de vermos a estabilidade nuclear e, conseqüentemente os números mágicos, já que para esse método a estabilidade nuclear é analisada através da distribuição de níveis de energia próximos a energia de Fermi, sendo que, quanto menor for a densidade de níveis de energia perto da energia de Fermi, maior será a energia de ligação. Com esse método, devido ao seu caráter, poderemos estudar também a existência de outros efeitos existentes no núcleo, que conseguem ser bem descritos através das teorias microscópicas mais sofisticadas.

Na nossa dissertação, estaremos mais preocupados com a densidade de massa, do núcleo de ^{40}Ca , que é um núcleo de massa intermediária. Como sabemos que para esses núcleos pode-se aproximar a densidade de massa pela densidade de carga, teremos a possibilidade de comparar nossos resultados com os dados obtidos através do espalhamento elástico de elétrons, que tem se mostrado muito útil para esse estudo [1].

Podemos ver na figura 1.1, várias densidades de carga obtidas para diferentes núcleos pela análise de dados de espalhamento de elétrons.

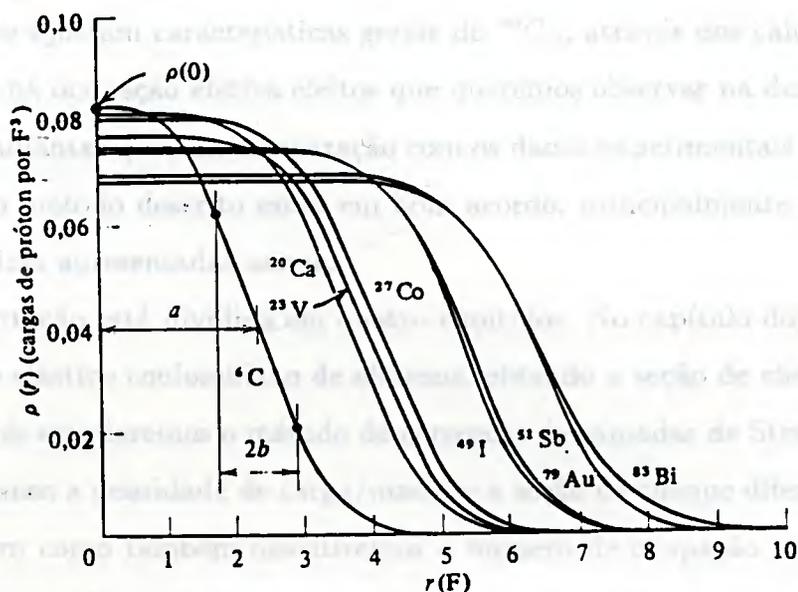


Figura 1.1: Densidades de cargas obtidas através do experimento de Hofstadter

[1]

Com base na figura 1.1, pode-se então extrair algumas características gerais:

a) A densidade de carga, que é essencialmente a distribuição de prótons no núcleo. é constante no seu interior e cai rapidamente a zero na superfície nuclear.

b) O raio, para o qual a densidade de carga possui a metade do valor relativo ao interior do núcleo, aumenta lentamente à medida que aumenta o número de nucleons A no núcleo. Mais precisamente o raio a é proporcional a $A^{1/3}$.

c) O valor da densidade de carga, $\rho(0)$, quando olhamos bem no centro da distribuição nuclear, ou seja, para $r = 0$, diminui lentamente à medida que A aumenta.

d) A espessura da superfície nuclear é dada aproximadamente pela quantidade $2b$, como visto na figura, e tem aproximadamente o mesmo valor para todos os núcleos.

O que iremos verificar nesta dissertação é que conseguimos melhorar as previsões do modelo de camadas simples, e assim reproduzir razoavelmente bem essas propriedades. utilizando para isso uma descrição da densidade de massa que incorpora correlações adicionais às de campo médio (do modelo de camadas) através do método de Strutinsky. Essas correlações são introduzidas na densidade por intermédio do número de ocupação efetivo obtido do formalismo de Strutinsky. A eficiência dessa nova abordagem reside então em que, quando se ajustam características gerais do ^{40}Ca , através dos cálculos de Strutinsky, incorporamos na ocupação efetiva efeitos que queremos observar na densidade espacial.

Podemos adiantar que, em comparação com os dados experimentais [1], as propriedades obtidas com o método descrito estão em bom acordo, principalmente no que diz respeito as características apresentadas acima.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos. No capítulo dois, iremos estudar o espalhamento elástico coulombiano de elétrons, obtendo a seção de choque diferencial. Já no capítulo três estudaremos o método de correções de camadas de Strutinsky; no capítulo quatro obteremos a densidade de carga/massa e a seção de choque diferencial para o nosso problema, bem como também discutiremos o número de ocupação, quando se utiliza o método de Strutinsky e, finalmente, no capítulo cinco iremos expor nossas conclusões a respeito dos resultados apresentados. Com fins de completeza, apresentamos detalhes dos cálculos das distribuições de massa, dos momentos dos nucleons e da distribuição angular nas apêndices A, B e C.

Capítulo 2

Espalhamento de Elétrons

2.1 Introdução

O espalhamento de elétrons [3] tem-se mostrado um dos melhores meios que temos para obter informações sobre muitas propriedades associadas à estrutura nuclear, sendo que a principal razão para isso vem do nosso conhecimento sobre a interação entre os elétrons e o núcleo. Esta, entendida em toda sua complexidade, inclui não apenas a interação carga-carga, mas também a interação dos momentos magnéticos e das correntes dos nucleons com o campo eletromagnético do elétron. Todas essas interações são bem descritas pela eletrodinâmica quântica. Como a interação eletromagnética é fraca em comparação com a força nuclear forte, então o elétron consegue sondar o núcleo sem que com isso lhe cause grandes distúrbios.

Considerando elétrons não-relativísticos, ou seja, $m_e \simeq 0, |\mathbf{k}| = \varepsilon$, m_e sendo a massa do elétron, \mathbf{k} seu momento e ε a sua energia, e denotando o momento e a energia dos elétrons incidentes e espalhados por $\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, \mathbf{k}_2, \varepsilon_2$ respectivamente, a energia e o tri-momento transferidos para o alvo serão $\omega = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ e $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, ao contrário de processos que envolvam fótons reais, pois então teríamos que $\mathbf{q}^2 = \omega^2$. No experimento de espalhamento de elétrons $\mathbf{q}^2 - \omega^2 > 0$, então, para uma dada energia transferida ω , o momento transferido pode ser variado, o que permite um estudo da dependência do momento transferido em vários tipos de elementos de matriz de transição.

Podemos visualizar na figura (2.1), localizada no final deste, os aspectos básico da resposta nuclear para um dado momento transferido [4, 5].

Distinguimos aí quatro regiões:

Região 1: Possui um pico produzido pelo espalhamento elástico. A energia transferida ao núcleo é $\omega = 0$ e então o comportamento da resposta com q irá informar-nos sobre as propriedades do estado fundamental do núcleo.

Região 2: Temos a excitação dos níveis discretos abaixo do limiar de emissão de partículas.

Região 3: Nesta região temos as ressonâncias gigantes, que correspondem a estados no contínuo do sistema nuclear.

Região 4: É conhecida como pico quasi-elástico.

Neste capítulo queremos estudar basicamente a região 1, ou seja, o espalhamento elástico de elétrons.

2.2 Teoria Básica do Espalhamento de Elétrons

A cinemática básica para qualquer espalhamento de elétrons por um núcleo alvo é descrita na figura (2.2), localizada no final do capítulo.

Para um elétron incidente com energia E_1 e momento \mathbf{k}_1 , e com energia do elétron espalhado E_2 e momento \mathbf{k}_2 (e ângulo de espalhamento θ), o processo de espalhamento de elétrons por núcleos alvos é descrito por [6]:



(onde o asterisco, significa estados finais excitados), que satisfaz as equações de conservação

$$\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = \mathbf{q} \quad (2.2)$$

$$E_1 - E_2 = E \quad (2.3)$$

Assumimos que os núcleos são suficientemente pesados tal que sua energia de recuo $T = q^2/2M$ pode ser desprezada. E é a energia transferida para o núcleo; ela não necessita ser igual a energia de excitação ω de um dado nível nuclear se esse último possui uma largura Γ , mas para um nível suficientemente estreito, iremos tomar:

$$E \cong \omega. \quad (2.4)$$

Se as energias dos elétrons incidentes e espalhados são ≥ 5 MeV, ou seja, grandes comparados com sua massa de repouso m_e , então

$$E_1 \gg m_e \quad (2.5)$$

$$E_2 \gg m_e. \quad (2.6)$$

Pode-se, desta forma, aproximar

$$E_1 \cong k_1 \quad (2.7)$$

$$E_2 \cong k_2. \quad (2.8)$$

Como já dissemos, o espalhamento de elétrons se torna muito útil para estudarmos a estrutura nuclear, já que ele nos permite saber, por exemplo, o tamanho e a forma do núcleo. Para visualizarmos a estrutura nuclear devemos escolher a energia do elétron incidente E_1 como sendo:

$$E_1 \geq 50 \text{ MeV} \quad (2.9)$$

pois, desse modo, teremos que o comprimento de onda de de Broglie,

$$\lambda_1 = \frac{h}{k_1}, \quad (2.10)$$

será igual ou menor que a extensão espacial do núcleo e, dessa forma, o elétron conseguirá sondar o núcleo. Assim, as equações (2.3) e (2.4) podem ser escritas da seguinte forma [6]:

$$q_{min} \equiv k_1 - k_2 \cong E \quad (2.11)$$

$$q_{max} \cong 2k_1 - E. \quad (2.12)$$

Feito esse breve resumo sobre a cinemática do espalhamento de elétrons, vamos agora dedicar a seção seguinte ao espalhamento elástico de elétrons, nos concentrando na parte de espalhamento coulombiano elástico de elétrons e então na obtenção da seção de choque correspondente.

2.3 Espalhamento Elástico de Elétrons

No caso do espalhamento elástico de elétrons, temos que $E = 0$, $k_1 = k_2$. A magnitude do momento transferido é dada através da equação (2.2) e pode ser escrita como

$$q = [k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2\cos(\theta)]^{1/2} \quad (2.13)$$

e, no referido caso, ela fica

$$q = 2k_1 \text{sen}\left[\frac{1}{2}\theta\right]. \quad (2.14)$$

Para os casos importantes de espalhamento em ângulos frontais ou de retrodispersão, $\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 180^\circ$, respectivamente, q assume seu valor máximo ou mínimo como sendo:

$$q_{min} = k_1 - k_2 \quad (2.15)$$

$$q_{max} = k_1 + k_2. \quad (2.16)$$

Para obtermos a seção de choque diferencial do espalhamento elástico de elétrons iremos usar a aproximação de Born de primeira ordem, ou seja, consideraremos apenas ondas plana.

Temos na figura (2.3), que se encontra no fim deste capítulo, o gráfico de Feynman que nos permite visualizar essa aproximação :

A interação eletromagnética completa de uma partícula carregada com um núcleo é determinada por três quantidades que descrevem as propriedades eletromagnéticas do núcleo:

i) A densidade de carga nuclear $e\rho(\mathbf{r})$, normalizada ao número de prótons

$$\int \rho(\mathbf{r})d^3r = Z. \quad (2.17)$$

Devemos lembrar que, no nosso estudo, iremos aproximar essa densidade de carga pela densidade de massa.

ii) A densidade de magnetização nuclear (spin) $e\mu_s(\mathbf{r})$.

iii) A densidade de corrente nuclear $e\mathbf{j}_c(\mathbf{r})$.

Essas quantidades são operadores e para o espalhamento elástico de elétrons nós iremos tomar o seu valor esperado no estado fundamental.

Vamos, inicialmente, calcular a seção de choque geral e depois particularizá-la para o caso do espalhamento elástico.

A interação completa do núcleo com o campo eletromagnético $(\mathbf{A}, i\Phi)$ é dada pela seguinte hamiltoniana de interação :

$$H_I = H_c + H_T, \quad (2.18)$$

onde H_c é a parte longitudinal ou coulombiana, H_T a parte transversal, e estas quantidades são dadas por:

$$H_c = e \int \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})d^3(r) \quad (2.19)$$

$$H_T = -e \int [\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mu_s(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})] d^3r. \quad (2.20)$$

A interação transversa não tem um papel muito importante no espalhamento nuclear, exceto para ângulos grandes de espalhamento $\theta \cong 180^\circ$. É suficiente então considerarmos somente a interação coulombiana H_c . O potencial coulombiano do elétron é:

$$\Phi_c(\mathbf{r}) = \int \left[\frac{\rho_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d^3r'. \quad (2.21)$$

Substituindo a equação (2.21) em (2.19) temos

$$H_c = e \int \left[\frac{\rho(\mathbf{r})\rho_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d^3r d^3r'. \quad (2.22)$$

Usaremos, em seguida, a transformada de Fourier:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3q}{q^2} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \quad (2.23)$$

e a expansão multipolar de uma onda plana:

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{LM} i^L j_L(qr) Y_{LM}^*(\hat{q}) Y_{LM}(\mathbf{r}), \quad (2.24)$$

onde \hat{q} é o momento transferido. Substituindo as equações (2.23), (2.24) na equação (2.22) teremos:

$$H_c = \left(\frac{2e}{\pi} \right) \sum_{LM} \int \frac{d^3q}{q^2} Y_{LM}^*(\hat{q}) \mu_{LM}(q) X(\mathbf{q}), \quad (2.25)$$

onde

$$\mu_{LM}(q) = i^L \int \rho(\mathbf{r}) j_L(qr) Y_{LM}(\mathbf{r}) d^3r \quad (2.26)$$

é o elemento de matriz coulombiano que depende somente da densidade de carga nuclear e da transformada de Fourier da densidade de carga do elétron,

$$X(\mathbf{q}) = \int \rho_e(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} d^3r', \quad (2.27)$$

onde $\rho_e = e\Psi^\dagger\Psi$ é a densidade de carga do elétron e Ψ é um spinor.

Integrando-se a equação (2.27) temos:

$$X(\mathbf{q}) = -e(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}) S_4, \quad (2.28)$$

onde

$$S_4 = \bar{\mu}(\mathbf{k}_2) \gamma_4 \mu(\mathbf{k}_1), \quad (2.29)$$

μ é um spinor e γ_4 é a matriz de Dirac.

Inserindo a equação (2.28) na equação (2.25) obtemos:

$$H_c = -\alpha \left(\frac{4\pi}{q^2} \right) S_4 \sum_{LM} Y_{LM}^*(\hat{q}) \mu_{LM}(q), \quad (2.30)$$

onde $\alpha = \frac{1}{137}$.

Então H_c é representado como uma série de termos de multipolos na carga nuclear, de multipolaridade L .

A seção de choque é obtida na teoria de perturbação de primeira ordem como:

$$d\sigma = \left(\frac{2\pi\epsilon_1}{k_1} \right) \delta(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon) \left(\frac{m_e^2}{\epsilon_1\epsilon_2} \right) |H_c|^2 \left[\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \right]. \quad (2.31)$$

Vamos agora introduzir a função $V_c(\theta)$ do ângulo de espalhamento

$$V_c(\theta) = \left(\frac{\Delta^2}{q^2} \right) (\epsilon_1\epsilon_2 + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m_e^2), \quad (2.32)$$

onde Δ^2 é o quadrimomento transferido.

Tomando-se a equação (2.26) e trocando o elemento de matriz nuclear por seu operador, temos:

$$\tilde{\mu}_{LM}(q) = i^L \int \rho^{op}(\mathbf{r}) j_L(qr) Y_{LM}(\mathbf{r}) d^3r, \quad (2.33)$$

onde ρ^{op} é o operador densidade, definido como:

$$\rho^{op}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A \frac{1}{2} [1 + \tau_3^{(i)}] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i). \quad (2.34)$$

Iremos denotar os estados nucleares iniciais e finais através de seus spins e das suas projeções de spins, $|J_i M_i\rangle$ e $|J_f M_f\rangle$ respectivamente e introduzir os elementos de matriz reduzidos pelo teorema de Wigner - Eckart.

$$\langle J_f M_f | \tilde{\mu}_{LM} | J_i M_i \rangle = \hat{J}_f^{-1} (J_i M_i, LM | J_f M_f) \langle J_f || \tilde{\mu}_c || J_i \rangle, \quad (2.35)$$

onde \hat{J} , na equação (2.35), é o operador momento angular definido como:

$$\hat{J} = (2J + 1)^{1/2}. \quad (2.36)$$

Se imaginarmos que o núcleo alvo está inicialmente no estado fundamental denotado por $|J_i M_i\rangle$, então o operador H_c^\dagger dado em:

$$|H_c|^2 \equiv H_c^\dagger H_c, \quad (2.37)$$

leva esse estado para um estado final denotado por $|J_f M_f\rangle$. E o termo H_c leva aquele estado para outro, que iremos denotar por, $|J'_f M'_f\rangle$, ou seja, um outro estado com spin e projeção de spin diferentes do estado final levado por H_c^\dagger . Obteremos uma seção de choque diferencial na forma de "matriz densidade".

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma^c}{d\Omega} \right)_{M_f M'_f}^{J_i \rightarrow J_f J'_f} &= (4\pi)^2 \frac{2\alpha^2 k_2}{k_1 \Delta^4 \hat{J}_f \hat{J}'_f} \sum_{LM L'M'} (J_i M_i, LM | J_f M_f) \\ &\times (J_i M_i, L' M' | J'_f M'_f) R_{LL'}^{(c)MM'} \end{aligned} \quad (2.38)$$

com

$$R_{LL'}^{(c)MM'} = V_c(\theta) Y_{LM'}^*(\hat{q}) Y_{LM}(\hat{q}) \mu_L^{if}(q) \mu_L^{if'}(q), \quad (2.39)$$

onde usamos outra abreviação para o elemento de matriz coulombiano,

$$\mu_L^{if}(q) \equiv \langle J_f \parallel \tilde{\mu}_L(q) \parallel J_i \rangle. \quad (2.40)$$

A seção de choque diferencial para o espalhamento de elétrons com transição nuclear $J_i \rightarrow J_f$, onde o estado final tem uma energia de excitação ε , é obtido das equações (2.38), (2.39) e (2.40) na forma:

$$\frac{d\sigma_{tot}^{(c)J_i \rightarrow J_f}}{d\Omega} = \hat{j}_i^{-2} \sum_{M_i M_f} \left(\frac{d\sigma^c}{d\Omega} \right)_{M_i M_f}^{J_i \rightarrow J_f J_f}. \quad (2.41)$$

O índice "c" significa que consideramos o espalhamento devido a interação coulombiana, o subíndice "tot" indica uma seção de choque diferencial onde consideramos a transição nuclear total no sentido que o nível final J_f pode ainda decair através de canais abertos.

Utilizando relações de ortogonalidade dos coeficientes de Clebsh-Gordon, que dão um fator $\delta_{LL'} \delta_{MM'}$, e a fórmula.

$$\sum_M |Y_{LM}(\hat{q})|^2 = \frac{\hat{L}^2}{4\pi}, \quad (2.42)$$

temos que a seção de choque diferencial do espalhamento coulombiano de elétrons é:

$$\frac{d\sigma^{(c)J_i \rightarrow J_f}}{d\Omega} = \frac{8\pi\alpha^2 k_2}{k_1 \Delta^4 \hat{j}_i^2} V_c(\theta) \sum_{L=0} |M_L^{if}(q)|^2 f_{rec}, \quad (2.43)$$

onde

$$f_{rec} = \left[1 + \left(\frac{2k_1}{M} \right) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^{-1}. \quad (2.44)$$

Para o espalhamento elástico de elétrons temos que $\varepsilon = 0$, $k_2 = k$, e assumimos também somente casos particulares em que $J_i = 0$. Temos então que a equação (2.43) fica:

$$\frac{d\sigma^{(c)}}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{2E_1\beta^2 \sin(\frac{\theta}{2})} \right)^2 (1 - \beta^2 \sin^2(\frac{\theta}{2})), \quad (2.45)$$

onde $\beta = \frac{k_1}{E_1}$.

Se a massa de repouso do elétron for desprezada para altas energias, $m_e \simeq 0$, e $\beta \simeq 1$, obtemos:

$$\frac{d\sigma^{(c)}}{d\Omega} \simeq \frac{\left(\frac{Z\alpha}{2E_1} \right)^2 \cos^2(\frac{\theta}{2})}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}, \quad (2.46)$$

que é conhecida como a fórmula de Mott.

O espalhamento de elétrons, como já foi dito, é muito importante para estudarmos a estrutura nuclear. Em particular, vê-se que as informações sobre o núcleo alvo no espalhamento elástico são extraídas da densidade de carga nuclear. Assim, nosso conhecimento teórico sobre o núcleo, como apresentado na forma de uma previsão de algum modelo para a densidade, pode ser testado através da comparação com os dados experimentais de espalhamento elástico de elétrons. Com base nessa possibilidade, podemos testar modelos nucleares simples de campo médio, onde só temos correlações de um corpo, e podemos ainda estudar algumas tentativas de introdução "ad hoc" de técnicas que simulem correlações de outros tipos. Aqui, nos concentraremos na prescrição de Strutinski de correções de camada, que será descrito no capítulo três e que nos permitirá estudar aqueles efeitos na densidade nuclear.

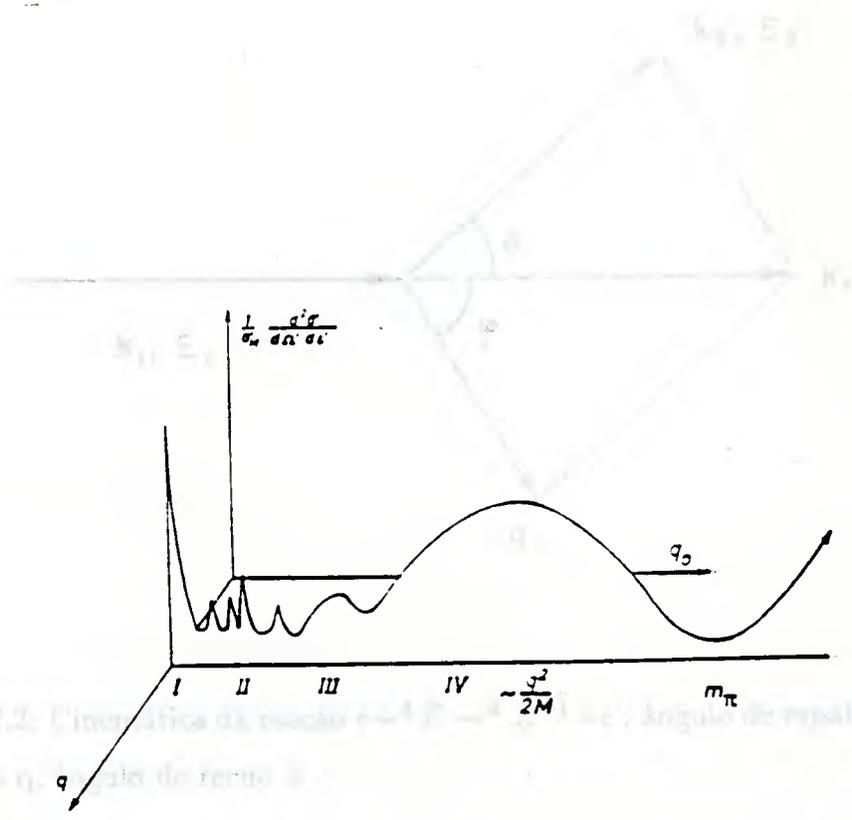


Figura 2.2: Cinemática da reação $e \rightarrow A + e'$, θ - ângulo de espalhamento θ' - ângulo de reculo q - módulo do vetor \vec{q} .

Figura 2.1: Gráfico esquemático da resposta nuclear para o espalhamento nuclear para um dado momento transferido

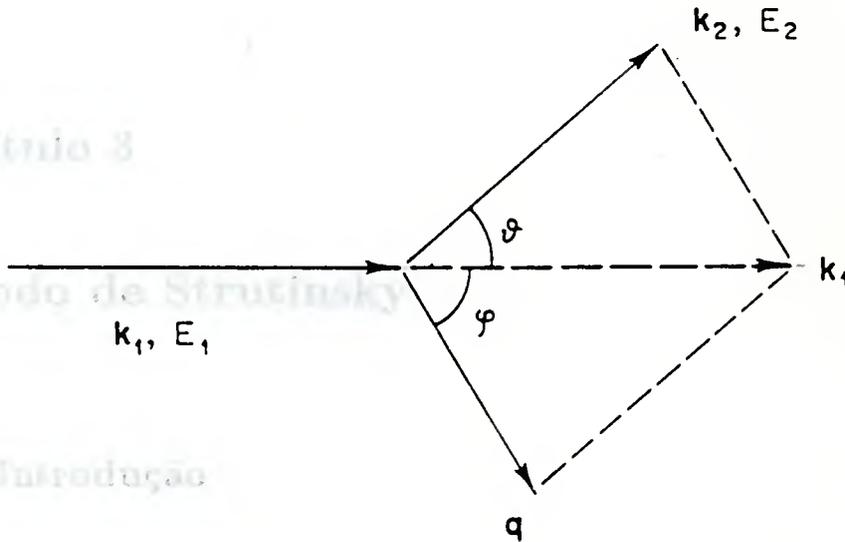


Figura 2.2: Cinemática da reação $e + {}^A Z \rightarrow {}^A Z^{(*)} + e'$; ângulo de espalhamento θ , momento de recuo q , ângulo de recuo ϕ .

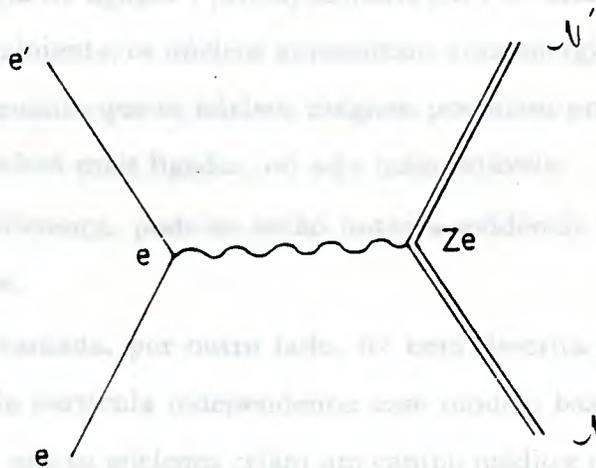


Figura 2.3: Gráfico de troca de um fóton no espalhamento de elétrons.

Capítulo 3

Método de Strutinsky

3.1 Introdução

Para se explicar as diferentes propriedades do núcleo, muitos modelos foram propostos, sendo que, cada um desses modelos enfatizava uma certa característica do núcleo. Um dos primeiros modelos elaborados foi o chamado modelo da gota líquida (LDM) [7]. Esse modelo permitia estudar as propriedades decorrentes da saturação e da baixa compressibilidade da matéria nuclear, tendo sido usado, primeiramente, para descrever os processos de fissão [8]. Porém, verificou-se que esse modelo não reproduzia muito bem certas quantidades, como por exemplo a energia de ligação, principalmente para os chamados núcleos mágicos, pois verificou-se que, geralmente, os núcleos apresentam uma energia de ligação por nucleon em torno de 8MeV , enquanto que os núcleos mágicos possuíam uma energia da ligação maior, sendo, portanto, núcleos mais ligados, ou seja mais estáveis.

Devido a essa diferença, pode-se então notar a evidência dos efeitos da estrutura de camadas nos núcleos.

A estrutura de camada, por outro lado, foi bem descrita no chamado modelo de camadas ou modelo de partícula independente; esse modelo baseou-se na idéia, confirmada experimentalmente, que os núcleons criam um campo médio e movimentam-se neste campo independentemente uns dos outros. Suas energias e funções de onda foram obtidas através da solução do correspondente problema quanto-mecânico de partícula única com o potencial dado de forma empírica. Fenomenologicamente, o modelo de camadas não reproduz

bem propriedades do núcleo no qual todos ou quase todos nucleons contribuem, como por exemplo a energia de ligação total.

Strutinsky [9, 10] elaborou um método que nos permite unir as boas características dessas duas descrições do núcleo. Este método é o chamado método de correção de camadas de Strutinsky, que será exposto em maiores detalhes neste capítulo.

3.2 Definição e Origens das Camadas

No modelo de partícula única, a distribuição de níveis de energia é descrita em termos de camadas e subcamadas. Adaptada da estrutura atômica, a noção de camada está geralmente associada a agrupamento de níveis fixos e marcadamente espaçados entre si.

Strutinsky [9] define o aparecimento de camadas como uma não-uniformidade em larga escala na distribuição de energia dos estados de partícula; um potencial de campo médio realístico gera uma distribuição dos estados de energia a qual não é uniforme nem tão pouco fortemente agrupadas ao ponto de caracterizar hiatos de energia tão pronunciados como ocorre na estrutura atômica. Embora isso seja verdade, a distribuição dos estados de energia oscila entre regiões densas e regiões de baixa densidade. O aparecimento de um camada passa a ser compreendido, então, como uma não-uniformidade em larga escala nesta distribuição.

Esta formulação do conceito de camada nuclear é importante não apenas para justificar a própria prescrição de Strutinsky, mas também é fundamental na análise da estabilidade nuclear, pois, para a energia de ligação, a distribuição de níveis de energia próximos a energia de Fermi possui uma importância especial. Com isso vamos tentar ilustrar, na figura (3.1), o vínculo entre a variação da densidade local de estados de partícula independente próximos a energia de Fermi e a energia de ligação nuclear.

Da figura (3.1) temos que para o caso de baixa densidade de níveis próximos a E_F (energia de Fermi), teremos os nucleons ocupando estados mais ligados tornando o núcleo mais estável. Assim, o estado fundamental nuclear corresponde a uma menor densidade de níveis próximos a energia de Fermi; disto segue uma nova definição de núcleos mágico (ou

de camada completa): são aqueles cuja densidade de estado próximo a E_F é mais baixa.

Pode-se perceber que, nem nesta discussão sobre estabilidade, nem na discussão sobre a existência de camadas foi em algum momento levada em conta qualquer suposição a respeito da forma nuclear. Como a distribuição de níveis é uma função da forma nuclear, como visto no modelo de Nilsson [7], e camadas pronunciadas podem ser também identificadas em núcleos deformados, deve-se também generalizar, de alguma maneira, o conceito de "mágicidade" no que se refere à estabilidade. Ao invés de estar conectada apenas a um número de nucleons definido, mágicidade, associada a estabilidade, deverá ser caracterizada por ambos o número de nucleons e alguma deformação particular de equilíbrio do núcleo. Ou seja, um núcleo mágico não é necessariamente esférico, e em adição aos familiares números mágicos de nucleons associados a núcleos esféricos, pode-se igualmente falar de núcleos mágicos para sistemas deformados.

3.3 Deformação e Estabilidade

Sabe-se que existe uma certa não-homogeneidade na distribuição dos níveis dos nucleons no núcleo e isso nos guia então para o estudo da deformação do núcleo no estado fundamental.

Belyaev [9, 11] mostrou que para pequenas deformações, da ordem de $\alpha = 0.05$, onde α é um parâmetro de deformação do potencial nuclear [7], já se pode encontrar um número significativo de cruzamentos de níveis de energia dentro de uma subcamada. Mas, para essas pequenas deformações, as subcamadas continuam agrupadas dentro de camadas, as quais estão separadas entre si por energias da ordem de $h\omega_0 = E_F/A^{1/3}$.

Estas camadas caracterizam o núcleo como tendo uma distribuição de níveis consideravelmente não-homogêneas. Portanto, para deformações dessa ordem, ainda não existe uma tendência a homogeneidade na distribuição de níveis e, conseqüentemente, a aproximação do espectro contínuo do LDM não é adequada.

A mistura de níveis entre camadas vizinhas aparece em deformações da ordem de $A^{1/3}(\alpha \simeq 0,15)$ e, nestas, deve-se então incluir a influência de outros efeitos como a in-

teração spin-órbita. Para os núcleos de camadas incompletas, o cruzamento de subcamadas, descrito acima, faz com que o espectro próximo ao nível de Fermi altere-se significativamente, resultando em novas subcamadas e diminuição da densidade de níveis nesta região, o que provoca uma diminuição na energia total destes núcleos (veja figura (3.2)). Já para os núcleos de camadas completas, o número de níveis existentes imediatamente acima do nível de Fermi que cruzam este patamar é praticamente igual ao daqueles vindos da região de energia mais baixa que E_F ; desse modo o valor da energia de Fermi é quase constante.

Em geral, nas deformações desta ordem, o resultado do reagrupamento de níveis privilegia a situação (a) da figura (3.2), proporcionando um ligeiro aumento na energia das partículas dos núcleos mágicos, tornando-os mais estáveis.

Finalmente, nas deformações ainda mais acentuadas, $\alpha > A^{1/3}$, as não-homogeneidades tendem a desaparecer. Nestas circunstâncias, a dependência da energia total com a deformação é bem descrita por modelos clássicos. Podemos então concluir que a estabilidade nuclear está diretamente relacionada com a baixa densidade de níveis próximos da energia de Fermi e independente do potencial do campo médio que governa o núcleo ter ou não simetria esférica.

Por outro lado, se construirmos um gráfico de variação da energia total, figura (3.3), com o número de massa (A) para núcleos pesados, percebemos que os pontos sugerem uma curva média monotonicamente crescente. Esta variação lenta e contínua coincide com os resultados obtidos pela LDM.

Juntando a isso a evidência de camadas, Strutinsky sugeriu uma nova formulação para observáveis nucleares [10],[12]-[14]. Grandezas nucleares tais como energia, densidade espacial e outros, devem ser expressas essencialmente por dois termos: uma grande contribuição de variação suave e uma correção de camadas oscilante.

3.4 O Formalismo de Strutinsky

3.4.1 Extração da parte atenuada da densidade de níveis

A densidade de níveis de um espectro de energias discretas ε_i pode ser escrita como a

soma de funções δ :

$$g(E) = \sum_i \delta(E - \varepsilon_i). \quad (3.1)$$

Segundo Strutinsky, num modelo mais realístico, $g(E)$ pode ser decomposta em uma parte oscilante, que reflete os efeitos de camada devido a distribuição não-uniforme das energias de partícula única ε_i , e em uma parte suave $g_o(E)$, que descreve o comportamento médio da distribuição de níveis. Então, desse modo temos que:

$$g(E) = g_o(E) + \delta g(E), \quad (3.2)$$

onde $\delta g(E)$ deve oscilar com valores em torno do valor médio, entre as camadas (6 a 10 MeV).

A grande virtude do método de Strutinsky está no fato de que ele permite extrair uma quantidade suave $\tilde{g}(E)$, conhecendo-se um espectro de partícula ε_i , a qual comporta-se como $g_o(E)$. Para conseguir isto, basta modular suavemente a densidade real com funções do tipo gaussiana de largura γ ;

$$\tilde{g}(E) = \frac{1}{\gamma\pi^{1/2}} \sum_i \left[e^{-\left[\frac{E-\varepsilon_i}{\gamma}\right]^2} + \sum_{u=1}^M a_{2u} \gamma^{2u} \frac{d^{2u}}{dE^{2u}} e^{-\left[\frac{E-\varepsilon_i}{\gamma}\right]^2} \right], \quad (3.3)$$

onde

$$a_{2u} = \frac{(-1)^u}{2^{2u} u!}. \quad (3.4)$$

Escolhendo-se γ de forma a estar entre 6 – 10 MeV, obtém-se uma função atenuada $\tilde{g}(E)$ que não é necessariamente idêntica à parte atenuada $g_o(E)$ da densidade de níveis exata dada pela equação (3.2). Então escolhem-se os coeficientes a_{2u} do segundo termos da equação (3.3), onde se encontram as chamadas correções de curvatura, de tal modo que não somente $g_o(E)$, mas todas as suas $2M$ derivadas são reproduzidas corretamente. Este procedimento será melhor explicado na próxima seção.

3.4.2 Determinação das Correções de Curvatura.

Definindo um operador integral G_{OP} , que age na densidade dada pela equação (3.1) na forma

$$G_{OP}[g(E)] = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} g(E') f\left(\frac{E - E'}{\gamma}\right) dE', \quad (3.5)$$

substituindo $g(E)$ na equação (3.5) e realizando a integração temos que:

$$G_{OP}[g(E)] = G(E) \equiv \frac{1}{\gamma} \sum_i f\left(\frac{E - E_i}{\gamma}\right). \quad (3.6)$$

Em princípio, muitos tipos diferentes de funções médias $f(x)$ podem ser usadas, entretanto iremos, seguindo Strutinsky, nos restringir a uma classe de funções simétricas especificadas pelas seguintes propriedades:

i) A função $f(x)$ é uma função par, contínua que é positiva entre $-\infty$ a ∞ :

$$f(x) > 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (3.7)$$

$$f(-x) = f(x) \quad (\text{função par}) \quad (3.8)$$

ii) A função $f(x)$ tem seu valor máximo para $x = 0$ e cai rapidamente, indo mais rápido a zero do que qualquer potência de x^{-1} se $x \rightarrow \pm\infty$:

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) < 0 \quad (3.9)$$

$$f(x) \leq f(0) \quad (3.10)$$

$$x^m f(x)_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.11)$$

iii) Todas as derivadas de $f(x)$ existem e vão a zero para $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0 \quad (n=1,2,3,\dots). \quad (3.12)$$

Segue-se então que todos os momentos pares são finitos e existem :

$$c_{2m} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} f(x) dx, \infty \quad (m=0,1,2,\dots), \quad (3.13)$$

e os momentos c_{2m+1} são nulos, pois $f(x)$ é par.

O operador G_{OP} foi definido de tal maneira que, quando atua sobre $g(E)$, retira deste a parte suave, $G(E)$. Contudo mostraremos que é possível estabelecer uma relação sem ambiguidades com $G(E)$, tornando esta igual a $g_0(E)$, apenas nos casos em que podemos separar exatamente $g(E)$, com $g_0(E)$ sendo polinomial em E . Nos demais casos $G(E)$ será uma certa $\tilde{g}(E)$ diferente de $g_0(E)$. Assim, entenderemos que os coeficientes a_{2u} , parâmetros de correção de curvatura, aproximam tanto quanto possível $\tilde{g}(E)$ de $g_0(E)$.

Para deduzir a expressão (3.3), vamos representar o operador G_{OP} na forma de um operador diferencial.

Expandindo $g(E')$ em torno de E :

$$g(E') = g(E + \delta E) \quad \text{com} \quad \delta E = E' - E \quad (3.14)$$

$$g(E + \delta E) = g(E) + \frac{dg(E + \delta E)}{dE} + \frac{d^2 g(E + \delta E)}{2! dE^2} \quad (3.15)$$

$$= g(E) + \delta E \frac{dg(E)}{dE} + \frac{\delta E}{2!} \frac{d^2 g(E)}{dE^2} + \dots \quad (3.16)$$

$$= \left(1 + \delta E \frac{d}{dE} + \frac{\delta E}{2!} \frac{d^2}{dE^2} + \dots \right) g(E) \quad (3.17)$$

$$= \exp \left[\delta E \frac{d}{dE} \right] g(E) \quad (3.18)$$

temos então que:

$$g(E + \delta E) = e^{\delta E \frac{d}{dE}} g(E). \quad (3.19)$$

Usando a equação (3.19) na equação (3.5) e ainda usando o fato de que:

$$\delta E = E' - E \quad (3.20)$$

temos:

$$G_{OP}[g(E)] = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{\delta E \frac{d}{dE}} g(E)] f\left(\frac{E - E'}{\gamma}\right) dE' \quad (3.21)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{(E-E') \frac{d}{dE}} g(E)] f\left(\frac{E - E'}{\gamma}\right) dE' \quad (3.22)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_u \frac{E - E'}{u!} \left[\frac{d^u g(E')}{dE^u} \right]_E f\left(\frac{E - E'}{\gamma}\right) dE'. \quad (3.23)$$

Como $f(x)$ é par, somente os termos com $u = 2m$ não se anulam, então a equação (3.23)

fica:

$$G_{OP}[g(E)] = \sum_{u=0}^{\infty} \left[\frac{d^{2u} g(E')}{dE'^{2u}} \right]_E \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(E' - E)^{2u}}{(2u)!} f\left(\frac{E - E'}{\gamma}\right) \frac{dE'}{\gamma}. \quad (3.24)$$

Definindo $c_{2u} = \int \frac{(E' - E)^{2u}}{\gamma^{2u}} f\left(\frac{E' - E}{\gamma}\right) d\left(\frac{E' - E}{\gamma}\right)$ temos que:

$$G_{OP}[g(E)] = \sum_{u=0}^{\infty} \left[\frac{d^{2u} g(E)}{dE^{2u}} \right] \frac{c_{2u} \gamma^{2u}}{(2u)!} \quad (3.25)$$

e fazendo $b_{2u} = \frac{c_{2u}}{(2u)!}$ temos:

$$G_{OP}[g(E)] = \sum_{u=0}^{\infty} b_{2u} \gamma^{2u} \frac{d^{2u} g(E)}{dE^{2u}}; \quad (3.26)$$

então o operador G_{OP} é:

$$G_{OP} = \sum_{u=0}^{\infty} b_{2u} \gamma^{2u} \frac{d^{2u}}{dE^{2u}}. \quad (3.27)$$

Vimos, porém, que $G_{OP}[g(E)] = G(E)$.

Podemos definir o operador inverso:

$$G_{OP}^{-1}[G(E)] \equiv g(E), \quad (3.28)$$

que pode também ser escrito na forma:

$$G_{OP}^{-1} = \sum_{u=0}^{\infty} a_{2u} \gamma^{2u} \frac{d^{2u}}{dE^{2u}} \quad (3.29)$$

visto que $G_{OP}G_{OP}^{-1} = 1$, então, igualando todos os coeficientes das potências das derivadas a zero, encontramos a_{2u} em função de b_{2u} .

Se $g_0(E)$ é um polinômio de grau $2M + 1$ a função $G(E)$ obtida por esta técnica é exata:

$$G(E) = G_{OP}[g_0(E)] = \sum_{u=0}^{\infty} b_{2u} \gamma^{2u} \frac{d^{2u}}{dE^{2u}} g_0(E) \quad (3.30)$$

$$G(E) = \sum_{u=0}^M b_{2u} \gamma^{2u} \frac{d^{2u}}{dE^{2u}} g_0(E) + \text{zeros} \quad (3.31)$$

de maneira que G_{OP}^{-1} conterá apenas os primeiros M termos tal que:

$$G_{OP}^{(-1)M} G(E) = g_0(E). \quad (3.32)$$

Para qualquer densidade de níveis, $g(E)$, independentemente de sua parte $g_0(E)$ ser ou não um polinômio, construímos uma densidade de níveis uniforme, $\tilde{g}(E)$, como:

$$\tilde{g}(E) = \sum_{u=0}^M a_{2u} \gamma^{2u} \frac{d^{2u}}{dE^{2u}} G(E), \quad (3.33)$$

onde

$$G(E) = \frac{1}{\gamma} \sum_i f \left[\frac{E - E_i}{\gamma} \right] \quad (3.34)$$

e $f\left[\frac{E-E_i}{\gamma}\right]$ é uma função para modulação suave que possui as características anteriormente citadas.

Se o sistema a ser tratado tem um espectro $\{\varepsilon_i\}$, tal que a parte suave da densidade é um polinômio, então $\tilde{g}(E) = g_0(E)$, caso contrário podemos obter uma boa simulação de $g_0(E)$.

Usando-se, então, a equação (3.34), temos que:

$$\tilde{g}(E) = \frac{1}{\gamma} \sum_i \left[\sum_{u=0}^M a_{2u} f^{2u} \left[\frac{E - \varepsilon_i}{\gamma} \right] \right], \quad (3.35)$$

com

$$f^{2u} \left[\frac{E - \varepsilon_i}{\gamma} \right] = \frac{d^{2u}}{d(E/\gamma)^{2u}} f \left[\frac{E - \varepsilon_i}{\gamma} \right]. \quad (3.36)$$

Escolhendo-se $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\pi^{1/2}}$, que satisfaz todas as propriedades mencionadas anteriormente, obtemos:

$$\tilde{g}(E) = \frac{1}{\gamma \pi^{(1/2)}} \sum_i \left[e^{-[(E-\varepsilon_i)/\gamma]^2} + \sum_{u=1}^M a_{2u} \gamma^{2u} \frac{d^{2u} e^{-[(E-\varepsilon_i)/\gamma]^2}}{dE^{2u}} \right], \quad (3.37)$$

onde $a_{2u} = \frac{(-1)^u}{2^{2u} u!}$.

3.4.3 Correções de camadas e o número de ocupação

Vamos considerar um sistema de N nucleons onde os níveis do espectro têm degenerescência a e cuja energia de Fermi é λ .

A equação do número de partículas em função do número de estados pode ser usada para definirmos o número de ocupação médio \tilde{n}_i :

$$N = a \int_{-\infty}^{\lambda} g(E) dE \quad (3.38)$$

Substituindo $g(E)$ por $\tilde{g}(E)$, e alterando o nível de Fermi de tal maneira que o número de nucleons seja conservado, temos:

$$N = a \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(E) dE = a \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_i(E) dE, \quad (3.39)$$

onde

$$\tilde{g}(E) = \sum_i \tilde{g}_i(E) \quad (3.40)$$

e

$$N = a \sum_i \tilde{n}_i. \quad (3.41)$$

Substituindo a equação (3.35) na equação (3.39) temos que:

$$\sum_i \tilde{n}_i = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \left[\sum_{u=0}^M a_{2u} f^{2u} \left[\frac{E - \varepsilon_i}{\gamma} \right] \right] dE \quad (3.42)$$

$$\sum_i \tilde{n}_i = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} f \left[\frac{E - \varepsilon_i}{\gamma} \right] dE + \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}_i} \left[\sum_{u=1}^M a_{2u} f^{2u} \left[\frac{E - \varepsilon_i}{\gamma} \right] \right] dE \quad (3.43)$$

Chamando $x = \frac{E - \varepsilon_i}{\gamma}$ e $\tilde{\lambda}_i = \frac{\tilde{\lambda} - \varepsilon_i}{\gamma}$, temos que a equação (3.43) fica:

$$\tilde{n}_i = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} f(x) dx + \sum_{u=1}^M a_{2u} \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}_i} f^{2u}(x) dx. \quad (3.44)$$

Das propriedades de $f(x)$, e como suas derivadas se anulam em $x \rightarrow \pm\infty$, integrando-se o segundo termo, obtemos:

$$\tilde{n}_i = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} f(x) dx + \sum_{u=1}^M a_{2u} f^{2u-1}(\tilde{\lambda}_i) \quad (3.45)$$

com

$$f^{2u-1}(\tilde{\lambda}_i) = \frac{d^{2u-1}}{dx^{2u-1}} f(x) \Big|_{x=\tilde{\lambda}_i} \quad (3.46)$$

Temos, também, que a correção de camadas δU consiste de uma parte de prótons e de uma parte de neutrons. Cada uma dessas partes é calculada, tomando-se a diferença entre a soma das energias dos níveis ocupados do núcleo em questão, e seus valores médio, ou seja:

$$\delta U = 2 \sum_i \varepsilon_i^{(\tau)} - 2 \int_{-\infty}^{\lambda} E \tilde{g}_{\tau}(E) dE, \quad (3.47)$$

onde $\tau = n, p$.

Com a definição da equação (3.47), temos que a energia uniforme é :

$$\tilde{U} = 2 \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} E \tilde{g}(E) dE = 2 \sum_i \varepsilon_i \tilde{n}_i + F, \quad (3.48)$$

onde F é explicitamente dado por:

$$F = 2\gamma^2 \sum_i \int_{-\infty}^{t_i} x \tilde{g}_i(x) dx. \quad (3.49)$$

Praticamente, a contribuição do termo F da energia uniforme \tilde{U} é zero. Isto pode ser mostrado da seguinte forma, Diferenciando-se as equações (3.39) e (3.48) com respeito a γ , achamos, depois da eliminação de $\frac{d\lambda}{d\gamma}$,

$$\frac{d\tilde{U}}{d\gamma} = 2 \int_{-\infty}^{\lambda} (E - \lambda) \frac{\partial \tilde{g}(E)}{\partial \gamma} dE. \quad (3.50)$$

Da definição de $\tilde{g}(E)$, nós obtemos a seguinte identidade:

$$\frac{\partial \tilde{g}(E)}{\partial \gamma} \equiv \frac{d}{dE} \left[\sum_i \left(\frac{E - \varepsilon_i}{\gamma} \right) \tilde{g}_i(E) \right] \quad (3.51)$$

De (3.50) e (3.51) temos:

$$\frac{d\tilde{U}}{d\gamma} = 2\gamma \sum_i \int_{-\infty}^{t_i} x \tilde{g}_i(x) dx \equiv \frac{1}{\gamma} F. \quad (3.52)$$

Então a energia uniforme torna-se igual a

$$\tilde{U} = 2 \sum_i \varepsilon_i \tilde{n}_i + \gamma \frac{d\tilde{U}}{d\gamma}. \quad (3.53)$$

Nesta forma, temos que o segundo termo desaparece para todos os valores de γ_0 do parâmetro de atenuação, para os quais:

$$\left(\frac{d\tilde{U}}{d\gamma} \right)_{\gamma=\gamma_0} = 0. \quad (3.54)$$

Se a função tem um platô, a equação (3.54) é verificada para todos os pontos γ_0 desse platô, que é o intervalo de valores do parâmetro de atenuação γ onde as oscilações de camadas não se alteram. Neste caso, o número de ocupações \tilde{n}_i pode conter todas as informações necessárias para a energia uniforme \tilde{U} . Podemos então escrever a correção de camadas δU , equação (3.47) como:

$$\delta U(\gamma_0) = 2 \sum_i \varepsilon_o \delta_{ni} \quad (3.55)$$

onde

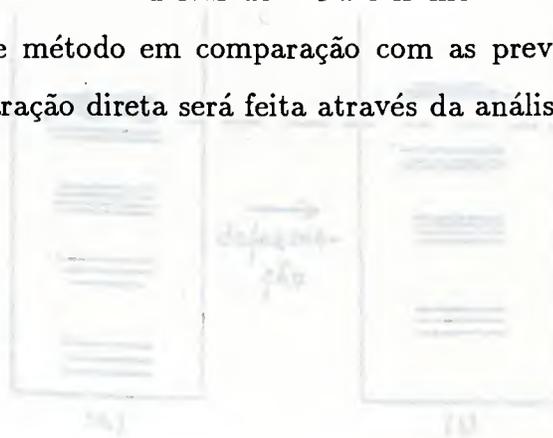
$$\delta_{ni} = n_i - \tilde{n}_i. \quad (3.56)$$

O método de Strutinsky apresentado nesse capítulo é uma maneira de estender a técnica oriunda do modelo de camadas para a obtenção da energia de ligação e o estudo da estabilidade. Fazendo uso dos efeitos quânticos provenientes da presença de agrupamentos ou espaçamentos dos níveis de energia no entorno da energia de Fermi como função da deformação nuclear, o método de Strutinsky se transforma também numa energia de deformação nuclear; é essa característica do método que permite a análise da estabilidade

nuclear. Assim, com esse método não só se obtém as deformações de equilíbrio em núcleos permanentemente deformados (que deveriam ser zero no modelo da gota líquida), como também se verifica que os núcleos mágicos, que são esféricos, são mais ligados do que o modelo da gota líquida prediz. Desta forma, a descrição das propriedades gerais de um núcleo pelo método de Strutinsky é mais realística que aquela obtida por um modelo mais básico.

Nesse trabalho estaremos interessados em usar a descrição de Strutinsky para analisar a densidade de massa/carga nuclear. O objetivo básico dessa análise consiste em introduzirmos os efeitos de camada na descrição da densidade nuclear e compararmos com a descrição obtida pelo modelo de camadas simples construído com o potencial de oscilador harmônico. Os efeitos de camadas serão introduzidos através do número de ocupação efetiva na definição da densidade de um corpo, introduzindo assim correlações adicionais àquelas de campo médio na expressão final. Na medida em que ajustamos as propriedades de um núcleo pela descrição de Strutinsky, estaremos calculando o melhor número de ocupação efetivo para esse sistema nuclear e assim esperamos melhorar também a descrição da densidade de massa/carga do sistema.

No capítulo que segue iremos apresentar os resultados do método de Strutinsky referentes à análise da densidade nuclear do ^{40}Ca e iremos estudar os efeitos das correlações introduzidas por esse método em comparação com as previsões do modelo de camadas simples. Uma comparação direta será feita através da análise dos dados de espalhamento de elétrons.



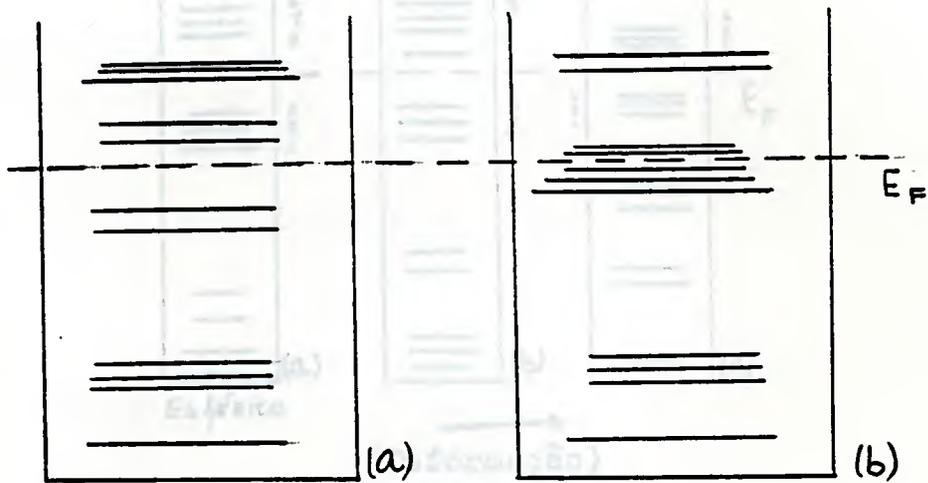


Figura 3.1: Distribuição de níveis de energia próximo a energia de Fermi

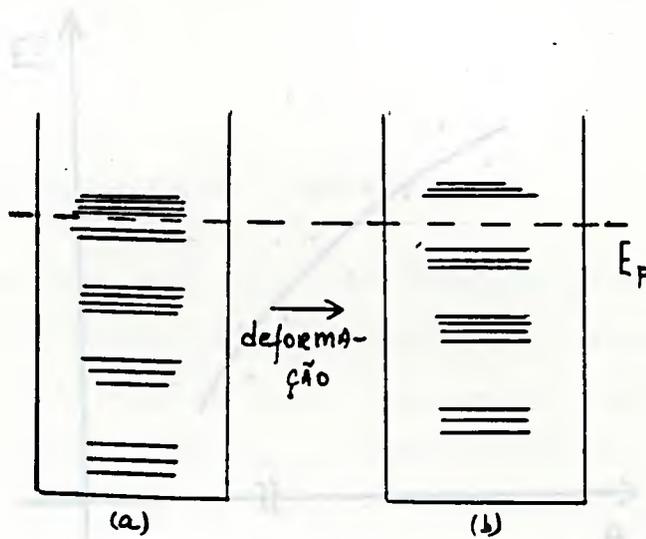


Figura 3.2: Distribuição de níveis de energia para núcleos de camada incompleta

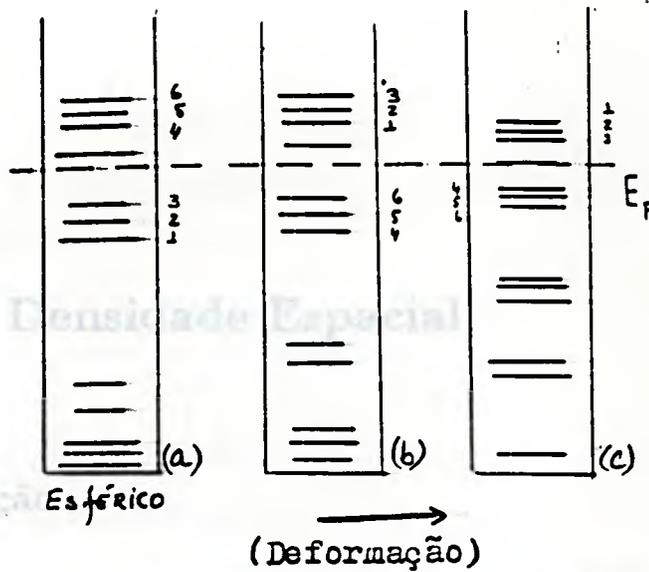


Figura 3.3: Distribuição de níveis de energia para núcleos de camada completa

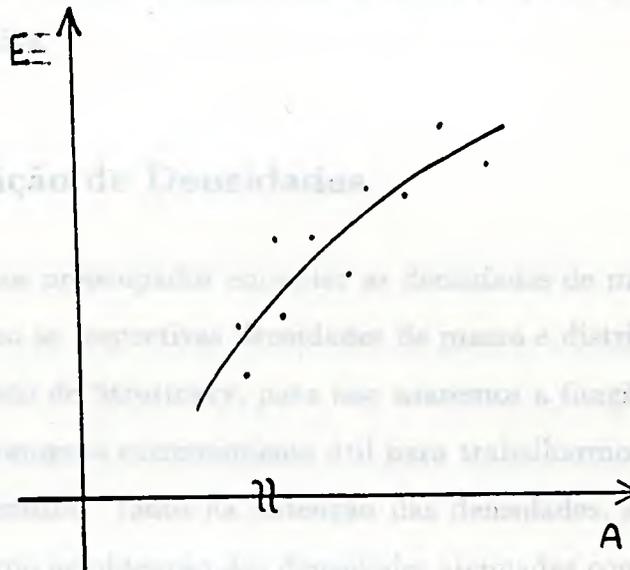


Figura 3.4: Gráfico da variação da energia total com o número de massa (A) para núcleos pesados

Capítulo 4

Cálculo da Densidade Espacial

4.1 Introdução

Neste capítulo estamos interessados em aplicar o método de Strutinsky [15], visto anteriormente no capítulo três, principalmente para a obtenção da densidade de massa/carga e seu uso no cálculo da distribuição angular do núcleo ^{40}Ca e compará-las com dados experimentais.

Será mencionado também o comportamento dessa propriedade ao utilizarmos o método de temperatura efetiva.

4.2 Distribuição de Densidades

Nesta seção estamos preocupados em obter as densidades de massa e as distribuições de momento, bem como as respectivas densidades de massa e distribuições de momento atenuadas com o método de Strutinsky; para isso usaremos a função distribuição de Wigner [15], que é uma ferramenta extremamente útil para trabalharmos em funções de variáveis de posição e momentum. Tanto na obtenção das densidades, sem utilizar o método de atenuação, bem como na obtenção das densidades atenuadas com o método de Strutinsky, usaremos o potencial do oscilador harmônico, pois, como sabemos, é um potencial de fácil compreensão e resolução, permitindo-nos respostas analíticas, além de ser bastante bom para cálculos de campo médio em núcleos leves, como o ^{40}Ca [21].

A função distribuição de Wigner, $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, é dada pela transformação da matriz densidade

geral de um corpo $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int ds \ e^{-i(\frac{1}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{s})} \rho(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{s}, \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{s}), \quad (4.1)$$

onde, no presente caso, $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ será obtida da aproximação de campo médio do oscilador harmônico, e pode ser escrita por:

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \Psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}'). \quad (4.2)$$

Aqui, n_{α} são os números de ocupação e tomaremos $\Psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ como sendo as funções de onda de partícula única no campo médio do oscilador harmônico. Assim, com o potencial do oscilador harmônico, a função distribuição $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ na equação (4.1) também pode ser calculada analiticamente [16]. Para núcleos mágicos, sem considerarmos a interação spin-órbita, a função distribuição $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, na aproximação de potencial do oscilador harmônico, somente depende de um parâmetro adimensional ϵ , ou seja :

$$\epsilon = \frac{p^2}{(\hbar m \omega)} + \frac{m \omega r^2}{\hbar} = \frac{2E}{\hbar \omega} \quad (4.3)$$

e é dada por

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv \frac{4e^{-\epsilon}}{(\hbar\pi)^3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^2(2\epsilon) n_k, \quad (4.4)$$

onde $\hbar\omega$ está relacionado com o parâmetro do oscilador, E é a energia clássica do oscilador, k é o número quântico principal e $L_k^{\alpha}(x)$ são os polinômios de Laguerre. O fator 4 na equação (4.4) leva em conta a degenerescência spin-isospin e o número de ocupação n_k está definido por:

$$n_k = \theta(E_F - E_k). \quad (4.5)$$

onde $E_k = (k + \frac{3}{2}\hbar\omega)$ são as energias de partícula única. Utilizando, agora o método de Strutinsky desenvolvido no capítulo três, obtemos que a função distribuição de Wigner é:

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv \tilde{f}(\varepsilon) = \frac{4e^{-\varepsilon}}{(\hbar\pi)^3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^2(2\varepsilon) \tilde{n}_k, \quad (4.6)$$

onde podemos notar que a única diferença entre as equações (4.6) e (4.4) está localizada no número de ocupação, pois, como já vimos no capítulo três, \tilde{n}_k é o número de ocupação atenuado com o método de Strutinsky.

Das equações (4.4) e (4.6) para a função distribuição de Wigner, podemos obter as densidades de massa e a distribuição de momentos, usando os números de ocupação do modelo de camadas, bem como essas mesmas densidades, só que para os números de ocupação atenuados pelo método de Strutinsky.

Vamos então começar pelo cálculo da densidade de massa e da densidade de massa atenuada pelo método de Strutinsky. Esse cálculo está descrito em maiores detalhes no apêndice A.

A densidade de nucleons não atenuada é dada por:

$$\rho(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (4.7)$$

$$= 4 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} E^{-q^2} \sum_{k=0}^{\infty} n_k \sum_{k_1=0}^k (-1)^{k_1} L_{k_1}^{\frac{1}{2}}(2q^2) L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}}(0) \quad (4.8)$$

onde $q^2 = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right) r^2$.

A densidade de nucleons atenuada com o método de Strutinsky é :

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{p} \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (4.9)$$

$$= 4 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} E^{-q^2} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{n}_k \sum_{k_1=0}^k (-1)^{k_1} L_{k_1}^{\frac{1}{2}}(2q^2) L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}}(0) \quad (4.10)$$

onde \tilde{n}_k é o número de ocupação atenuado pelo método de Strutinsky, descrito no capítulo três.

Para obtermos a distribuição de momentos e a distribuição de momentos atenuada com o método de Strutinsky, basta integrarmos as equações (4.4) e (4.6) nas coordenadas espaciais; também nesse caso o cálculo mais detalhado pode ser visto no apêndice B. Temos então a densidade de momentos não atenuada

$$\rho(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (4.11)$$

$$= 4 \left(\frac{1}{m\omega\pi\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-1}{\hbar m\omega} p^2} \sum_{k=0}^{\infty} n_k \sum_{k_1=0}^k (-1)^{k_1} L_{\frac{1}{2}}^{k_1} \left(\frac{2p^2}{\hbar m\omega} \right) L_{\frac{1}{2}}^{k-k_1}(0). \quad (4.12)$$

Sendo a densidade de momento atenuada com o método de Strutinsky dada por

$$\tilde{\rho}(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{r} \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (4.13)$$

$$= 4 \left(\frac{1}{m\omega\pi\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-1}{\hbar m\omega} p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{n}_k \sum_{k_1=0}^k (-1)^{k_1} L_{\frac{1}{2}}^{k_1} \left(\frac{2p^2}{\hbar m\omega} \right) L_{\frac{1}{2}}^{k-k_1}(0). \quad (4.14)$$

Podemos verificar na figura 4.1 o gráfico do número de ocupação atenuado por Strutinsky e na figura 4.2 o mesmo gráfico com a localização dos níveis de energia do modelo de camadas do ^{40}Ca .

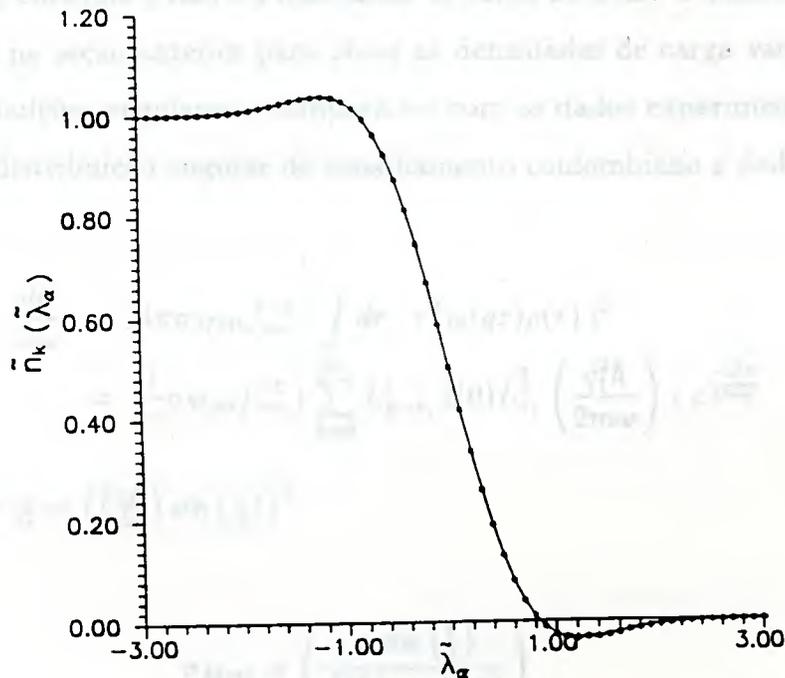


Figura 4.1: Gráfico do número de ocupação atenuado com o método de Strutinsky para o ^{40}Ca ; usou-se $\tilde{\lambda} = 4,06\hbar\omega$ (potencial químico).

Já a figura (4.3) mostra-nos as duas densidades de massa, $\rho(r)$ e $\tilde{\rho}(r)$, onde $\rho(r)$ é a densidade de massa não atenuada que, portanto, incorpora a existência dos efeitos de camadas do oscilador harmônico existentes no modelo usado na descrição do núcleo: já na

descrição da densidade de massa atenuada com o método de Strutinsky, $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$, nós atenuamos os efeitos de camada do oscilador harmônico e, portanto, as correlações quânticas de campo médio no interior do núcleo são modificadas, resultando numa nova descrição espacial. Em ambos os casos, porém, vemos que a superfície do núcleo não é substancialmente afetada.

Na figura (4.4), temos a distribuição momentos $\rho(\mathbf{p})$ e a distribuição de momentos $\tilde{\rho}(\mathbf{p})$ atenuada com o método de Strutinsky, que também apresentam um comportamento semelhante ao das densidades de massa.

4.3 Distribuição Angular

Como vimos no capítulo dois, o espalhamento de elétrons permite-nos estudar a estrutura do núcleo [4, 3]; algumas propriedades do núcleo podem ser vistas através da distribuição angular, como por exemplo o raio e a densidade de carga nuclear. Utilizando as densidades de massa obtidas na seção anterior para obter as densidades de carga vamos encontrar as respectivas distribuições angulares e compará-las com os dados experimentais [2].

Temos que a distribuição angular do espalhamento coulombiano é dado por:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = 4\pi\sigma_{Mott}f_{rec}^{-1} \left| \int dr r^2 j_0(qr)\rho(r) \right|^2 \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{\pi}\sigma_{Mott}f_{rec}^{-1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} L_{k-k_1}^1 2(0)L_{k_1}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q_1^2\hbar}{2m\omega} \right) \right| e^{-\frac{q_1^2\hbar}{2m\omega}} \quad (4.16)$$

onde $q^2 = \frac{m\omega r^2}{\hbar}$ e $q_1^2 = \left(\left(\frac{2E}{\hbar c} \right) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^2$,

$$\sigma_{Mott} = \left(\frac{\alpha \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\left(\frac{2E}{\hbar c} \right) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right)^2 \quad (4.17)$$

e

$$f_{rec} = 1 + \frac{2E \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}{m_\tau c^2}, \quad (4.18)$$

onde E é a energia do elétron incidente e m_τ é a massa do núcleo alvo.

Maiores detalhes podem ser vistos no apêndice C.

Como fizemos para as densidades de massa e distribuição de momentos, aqui podemos obter também a distribuição angular atenuada pelo método de Strutinsky. E desse modo temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}}{d\omega} &= 4\pi\sigma_{Mott}f_{rec}^{-1} \left| \int dr r^2 j_0(qr)\tilde{\rho}(r) \right|^2 \quad (4.19) \\ &= \frac{1}{\pi^2}\sigma_{Mott}f_{rec}^{-1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{n}_k \sum_{k_1=0}^k L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}}(0)L_{k_1}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{q_1^2\hbar}{2m\omega}\right) \right. \\ &\quad \times \left. e^{-\frac{q_1^2\hbar}{2m\omega}} \right|^2 \end{aligned}$$

Podemos ver na figura (4.5) tanto a distribuição angular calculada com a densidade de massa não atenuada quanto a distribuição angular calculada com a densidade de massa atenuada pelo método de Strutinsky. Na figura (4.6) temos as curvas correspondentes à distribuição angular calculada com a densidade de massa atenuada e os dados experimentais.

4.4 Dependência da Temperatura nas Funções Distribuições

Nessa seção esboçaremos qualitativamente um outro método de atenuação dos efeitos de camada.

Temos que um acréscimo da temperatura no sistema de Fermi finito leva-nos a um decréscimo dos efeitos de camadas, quando então se espera que as propriedades nucleares variem de forma atenuada com o número de partículas, e esses efeitos de camada desaparecem para temperaturas, $T_s = \left(\frac{1}{\pi}\right) E_F A^{\frac{-1}{3}}$ [17, 18].

Consideramos a função distribuição de Wigner $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, equação (4.4), para uma temperatura finita T como dada pela equação abaixo [15];

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int ds e^{-\frac{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{\hbar}} \rho\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}, \mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}\right) \quad (4.20)$$

e, de novo, tomamos a matriz densidade como sendo:

$$\rho_{\tau}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_k n_k(T) \Phi_k(\mathbf{r}) \phi_k(\mathbf{r}') \quad (4.21)$$

O número de ocupação agora é

$$n_k(T) = \left[1 + \exp \left(\frac{E_k + \lambda}{T} \right) \right]^{-1}, \quad (4.22)$$

onde λ é o potencial químico determinado pela condição de conservação do número de partículas A

$$\sum_k n_k(T) = A. \quad (4.23)$$

Utilizando então o número de ocupação dado pela equação (4.22), nós estudamos as distribuições já descritas nas seções anteriores.

Ao analisarmos os gráficos de $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$ e $\frac{d\tilde{\sigma}}{d\omega}(\theta)$ obtidos com as expressões desta seção, vemos que eles estão em bom acordo com os dados experimentais. Verificamos que conseguimos reproduzir $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$, em acordo com o experimental, obtemos em $\frac{d\tilde{\sigma}}{d\omega}(\theta)$ um terceiro mínimo, o qual não é obtido ao se calcular $\frac{d\sigma}{d\omega}(\theta)$; verificamos também que o primeiro mínimo que dá o raio nuclear, está em bom acordo com o resultado experimental. Iremos no próximo capítulo concluir nosso trabalho analisando os efeitos de atenuação de camadas de Strutinsky sobre a descrição da densidade de massa e distribuição de momentos como descritos pelo modelo simples de camada.

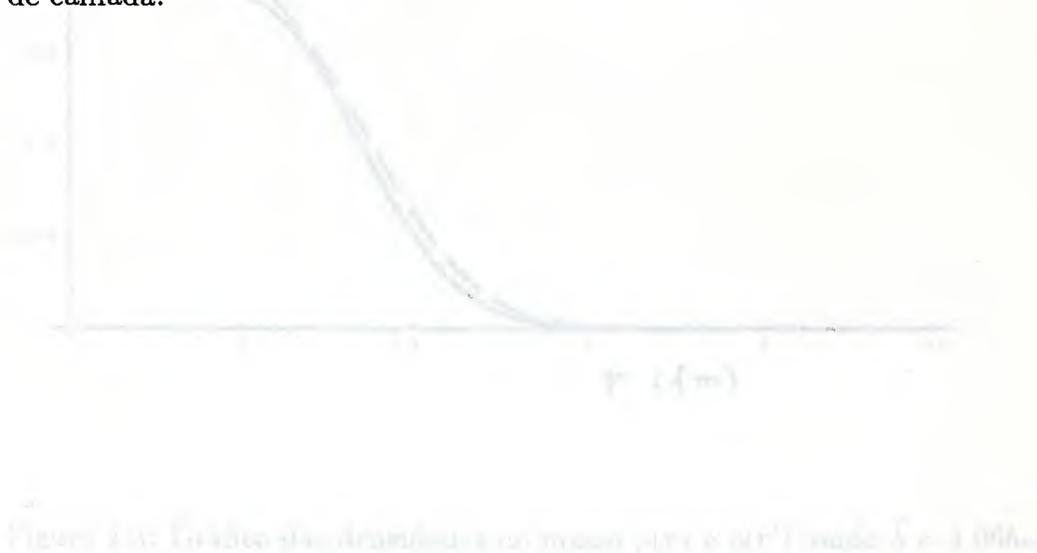


Figura 4.1: Gráfico da densidade de massa $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$ e $\frac{d\tilde{\sigma}}{d\omega}(\theta)$ para $T = 1$ MeV.

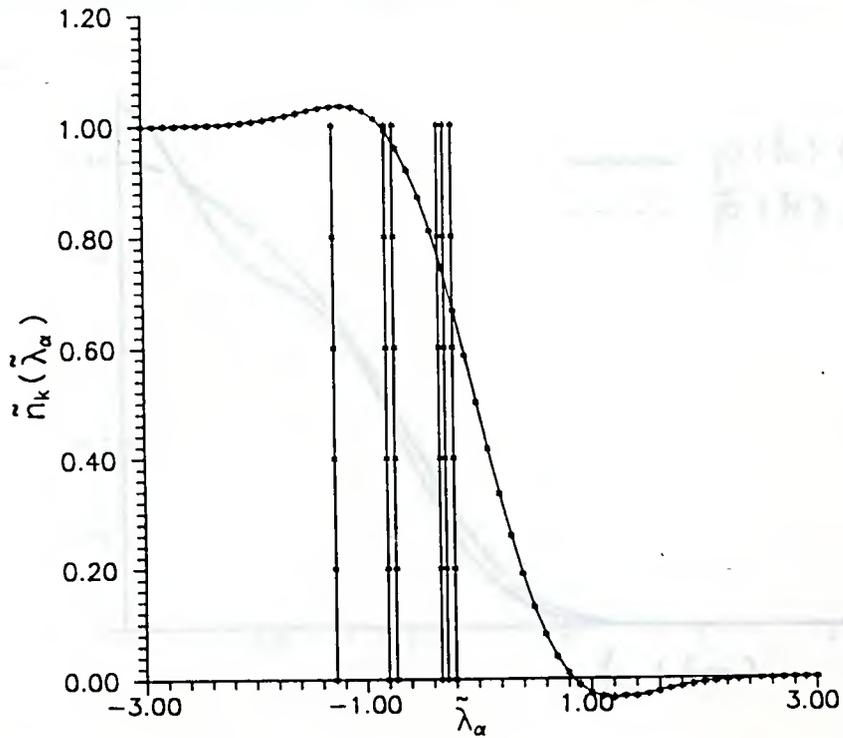


Figura 4.2: Gráfico dos números de ocupação atenuados com o espectro do ^{40}Ca .

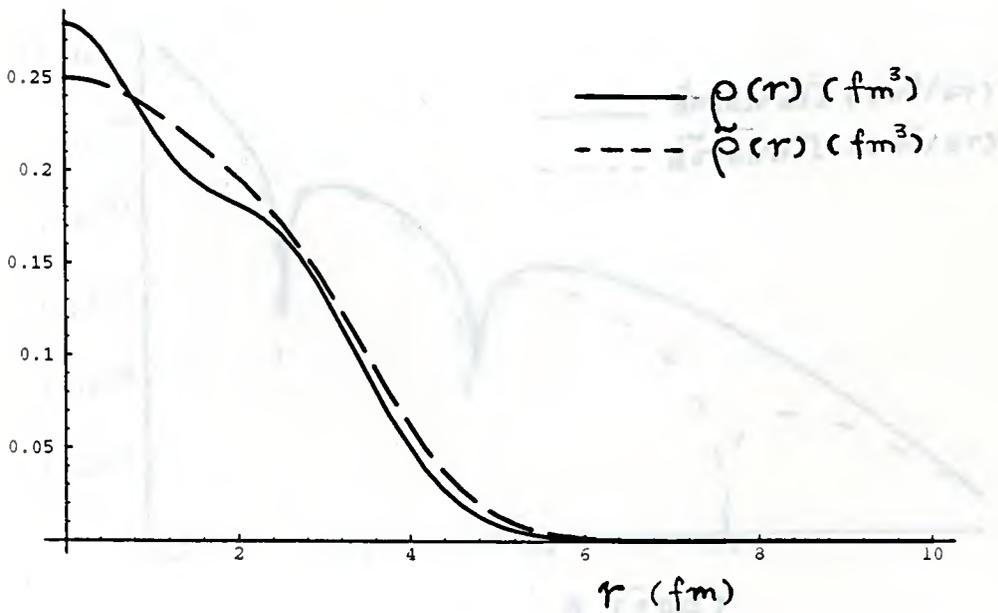


Figura 4.3: Gráfico das densidades de massa $\rho(r)$ e $\tilde{\rho}(r')$, onde $\tilde{\lambda} = 4.06\hbar\omega$

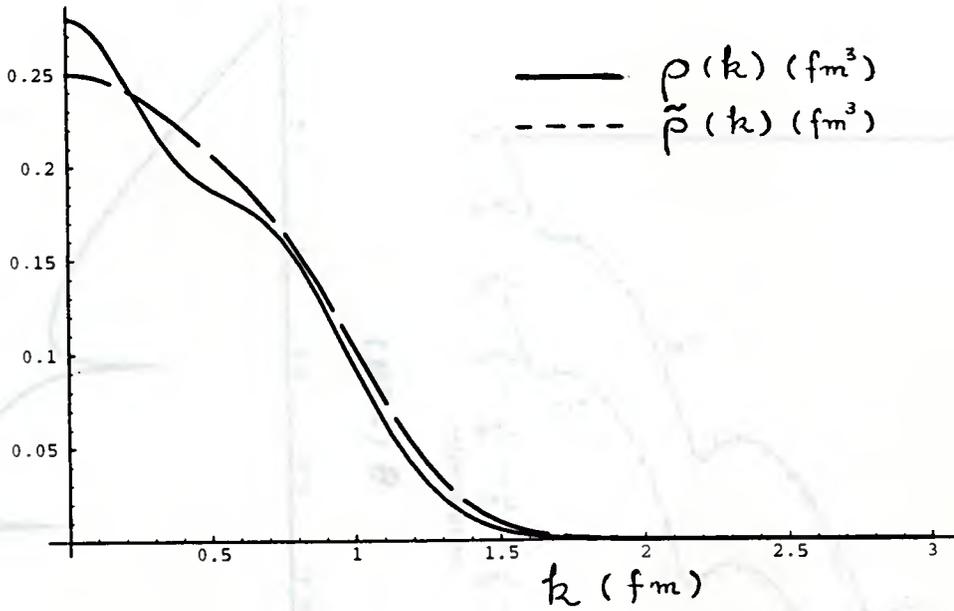


Figura 4.4: Gráficos de $\rho(k)$ e $\tilde{\rho}(k)$ em função de $k = \frac{p}{\hbar}$. Usou-se $\tilde{\lambda} = 4.06\hbar\omega$

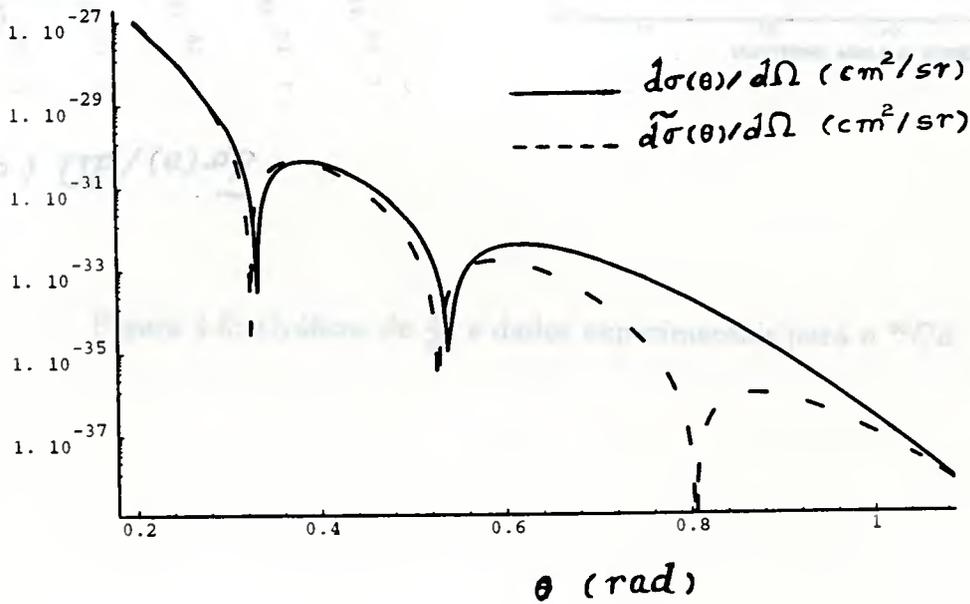


Figura 4.5: Gráficos de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ e $\frac{d\tilde{\sigma}}{d\Omega}$ para o ^{40}Ca

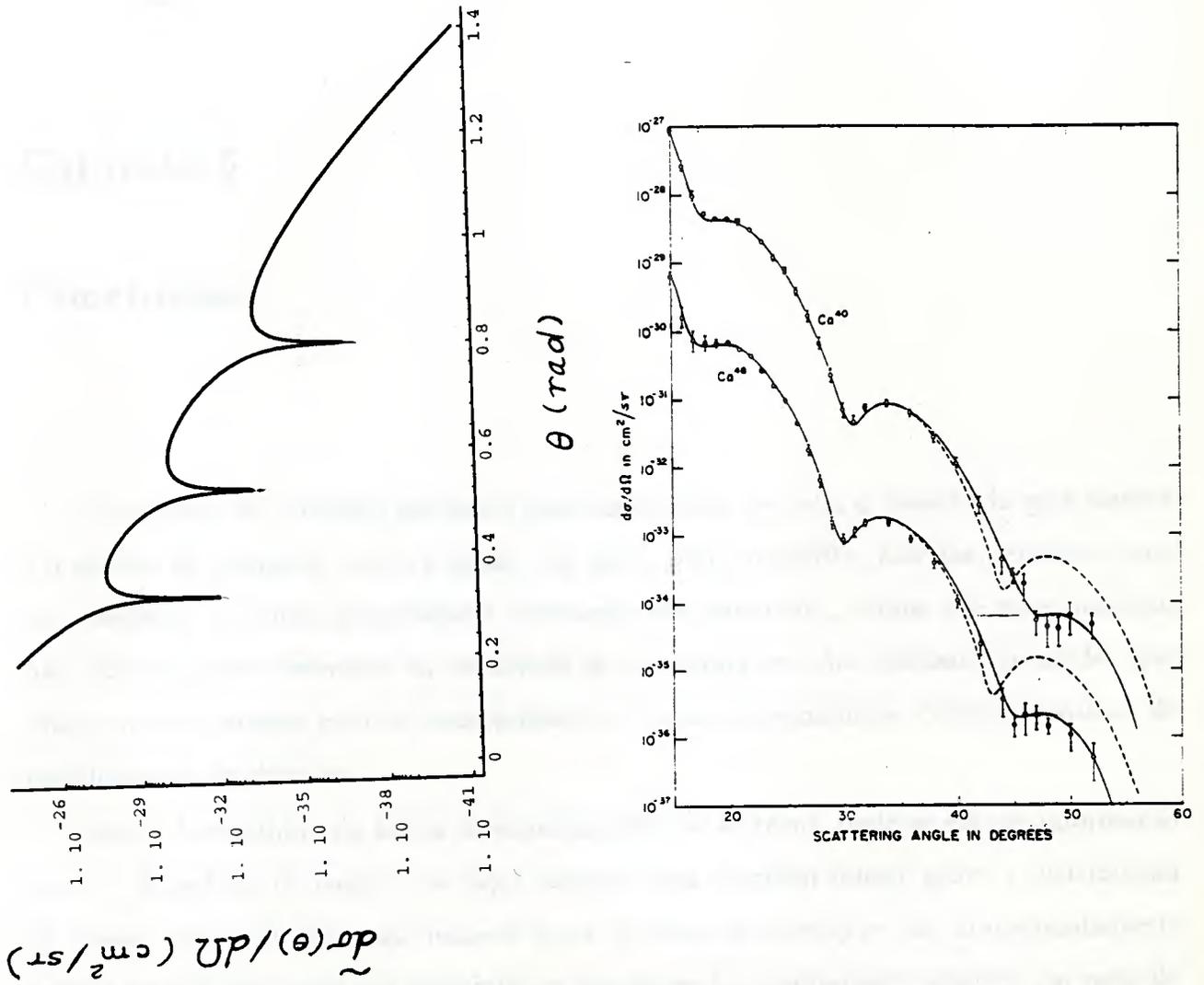


Figura 4.6: Gráficos de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ e dados experimentais para o ^{40}Ca

Capítulo 5

Conclusões

As previsões dos modelos nucleares mais conhecidos, ou seja, o modelo da gota líquida e o modelo de camadas, embora sejam, em geral, bem sucedidas, não nos permitem uma boa descrição de todas as propriedades nucleares; em particular, vimos que esses modelos não fornecem uma descrição da densidade de matéria/carga dos nucleons no núcleo que esteja em bom acordo com os correspondentes dados experimentais, conforme obtidos de espalhamento de elétrons.

Como é bem sabido da teoria de espalhamento de elétrons, pode-se extrair informação sobre a densidade de carga (que aqui usamos para também inferir sobre a distribuição de massa, uma vez que para núcleos leves as duas distribuições são aproximadamente iguais) através dos dados das distribuições angulares do espalhamento elástico por meio de um processo de desdobramento da integral que governa a expressão teórica que descreve aquela seção de choque. No presente trabalho, comparamos os resultados obtidos para a distribuição de massa, conforme calculados inicialmente através do modelo de camadas simples baseado no potencial de partícula independente do oscilador harmônico simples, para o ^{40}Ca , e também a distribuição angular teórica com os correspondentes dados experimentais. Como já antecipamos, não há bom acordo. Em particular, nota-se uma discrepância na região mais interna do núcleo onde o resultado do modelo de camadas prevê uma densidade de massa maior do que a observada, enquanto que na região da superfície nuclear o acordo é bom. Simultaneamente, observa-se que as distribuições angulares até a região do primeiro mínimo, que, como é bem sabido, caracteriza o raio nuclear, apresentam um

acordo razoável; para ângulos maiores nota-se o desacordo já observado na distribuição de massa.

Como observamos, no modelo de camadas simples as funções de onda de partícula independente refletem somente as correlações de campo médio e esse fato deve ser o responsável pela previsão superestimada da densidade de massa nas regiões internas do núcleo.

Nessa dissertação, procuramos introduzir correlações adicionais às de campo médio do modelo de camadas através da prescrição de Strutinsky. Com essa descrição, somos levados a incorporar os efeitos de atenuação de camadas em um número de ocupação efetivo (que pode inclusive assumir valores negativos) que será agora o responsável pelas correlações adicionais introduzidas. Dessa forma, a densidade espacial de massa fica redefinida por esse número de ocupação efetivo e passa a incorporar os efeitos das correlações nele embutidos. Vemos que essa nova densidade espacial consegue então reproduzir o que é visto experimentalmente [5, 19]. A distribuição angular, também redefinida com o método de Strutinsky, através do número de ocupação, nos proporciona um bom acordo com os dados experimentais [2]. Podemos verificar ainda o acordo do primeiro mínimo, que, como já explicamos, nos dá uma previsão do raio nuclear. e pode-se notar também que, utilizando o método de Strutinsky para a distribuição angular, nós conseguimos obter um terceiro mínimo, como pode ser visto na figura (4.6), o que não acontece quando fazemos cálculos de campo médio simples.

Devemos ressaltar também que, para todos os cálculos apresentados aqui com o método de Strutinsky, foi utilizado o parâmetro $\gamma = 2\hbar\omega$. Esse valor de γ é padrão nos cálculos de Strutinsky e se refere ao valor do platô das correções de camada; no nosso cálculo, ele garante a boa descrição da energia de ligação do ^{40}Ca e de sua forma de equilíbrio (esférica), o que irá implicar num número de ocupação efetivo com mais informações relevantes sobre a estrutura nuclear que aquele do modelo de camadas. De fato verificamos que $\gamma = 2\hbar\omega$ se constitui no melhor valor daquele parâmetro, uma vez que cálculos com valores de γ no entorno de $2\hbar\omega$ exibiram discrepâncias maiores.

Verificamos também que ao usarmos o método de temperatura efetiva, não obtivemos resultados tão satisfatório quanto àqueles obtidos pelo método de Strutinsky.

Apêndice A

Cálculo das Densidades de Massa

Temos que:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ &= \int d\Omega \int dr p^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ &= 4\pi \int dp p^2 \frac{4e^{-\varepsilon}}{(\hbar\pi)^3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^2(2\varepsilon) n_k \\ &= \frac{16\pi}{(\hbar\pi)^3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k n_k \int dp p^2 e^{-\varepsilon} L_k^2(2\varepsilon)\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\text{com } \varepsilon = \frac{1}{\hbar m\omega} p^2 + \frac{m\omega}{\hbar} r^2.$$

Usando a seguinte relação, encontrada na referência [20]

$$L_k^{\alpha+\beta+1}(x+y) = \sum_{k_1=0}^k L_{k_1}^{\alpha}(x) L_{k-k_1}^{\beta}(y)\tag{A.2}$$

e observando que no nosso caso temos $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, então:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{16\pi}{\hbar^3 \pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{m\omega r^2}{\hbar}} (-1)^k n_k \sum_{k_1=0}^k L_{k_1}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2m\omega r^2}{\hbar a}\right) \int dr p^2 e^{-\frac{p^2}{\hbar m\omega}} L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2p^2}{\hbar m\omega}\right).\tag{A.3}$$

Vamos agora nos concentrar na resolução da integral da equação (A.3)

$$\int dp p^2 e^{-\frac{p^2}{\hbar m\omega}} L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2p^2}{\hbar m\omega}\right) = \int dp p^2 e^{-\frac{p^2}{\hbar m\omega}} L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}}(2ap^2)\tag{A.4}$$

onde $a = \frac{1}{\hbar m \omega}$. Utilizando a relação abaixo [20]

$$\int dp \ p^2 e^{-\frac{p^2}{\hbar m \omega}} L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}}(2ap^2) = 2^{-\frac{5}{2}} a^{-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + (k - k_1) + 1) (\frac{1}{2} - 1)^{k-k_1}}{(k - k_1)! \frac{1}{2}^{\frac{1}{2} + (k-k_1) + 1}} \quad (\text{A.5})$$

$$= 2^{-\frac{5}{2}} a^{-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma((k - k_1) + \frac{3}{2}) (-1)^{(k-k_1)}}{(k - k_1)! \frac{1}{2}^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.6})$$

e sabendo que [20]

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n), \quad (\text{A.7})$$

então

$$\begin{aligned} \Gamma(k - k_1 + \frac{3}{2}) &= \left(\frac{1}{2} + (k - k_1)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + (k - k_1)\right) \quad (\text{A.8}) \\ &= \left(\frac{1}{2} + (k - k_1)\right) \left[\left(\frac{1}{2} + (k - k_1 - 1)\right) \left(\frac{1}{2} + (k - k_1 - 2)\right) \dots \left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\left[\frac{1}{2} + (k - k_1)\right] (2(k - k_1) - 1)!! \pi^{\frac{1}{2}}}{2^{k-k_1}}. \end{aligned}$$

Então a equação (A.6) pode ser escrita como

$$\int dr p^2 e^{-\frac{p^2}{\hbar m \omega}} L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}}(2ap^2) = \frac{2^{-\frac{5}{2}} a^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{2} + (k - k_1)\right] (2k - k_1 - 1)!! (-1)^{(k-k_1)} \pi^{\frac{1}{2}}}{2^{k-k_1} (k - k_1)! \frac{1}{2}^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{A.9})$$

Agora, sabemos que os polinômios de Hermite possuem a seguinte propriedade [20]:

$$H_{2(k-k_1)}(0) = \frac{(-1)^{k-k_1} 2^{2(k-k_1)} (k - k_1)! L_{k-k_1}^{-\frac{1}{2}}(0)}{(-1)^{k-k_1} 2^{2(k-k_1)} (k - k_1)! [L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}}(0) - L_{k-k_1-1}^{\frac{1}{2}}(0)]}, \quad (\text{A.10})$$

onde também usamos [20]:

$$L_n^{\frac{1}{2}-1}(0) = L_n^{\frac{1}{2}}(0) - L_{n-1}^{\frac{1}{2}}(0) \quad (\text{A.11})$$

e

$$xL_n^{\alpha+1}(x) = (n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x) - (n - x)L_n^\alpha(x). \quad (\text{A.12})$$

No nosso caso temos $x = 0$, então

$$0 = \left((k - k_1) + \frac{1}{2} \right) L_{\frac{1}{2} - k_1 - 1}^{\frac{1}{2}}(0) - (k - k_1) L_{k - k_1}^{\frac{1}{2}}(0) L_{\frac{1}{2} - k_1 - 1}^{\frac{1}{2}}(0) = \frac{(k - k_1) L_{k - k_1}^{\frac{1}{2}}(0)}{\left[\frac{1}{2} + (k - k_1) \right]} \quad (\text{A.13})$$

de tal forma que

$$H_{2(k - k_1)}(0) = (-1)^{k - k_1} 2^{2(k - k_1)} (k - k_1)! L_{k - k_1}^{\frac{1}{2}}(0) \left(\frac{-k + k_1}{\frac{1}{2} + (k - k_1)} + 1 \right). \quad (\text{A.14})$$

Igualando-se as expressões (A.10) e (A.14), obtemos

$$\begin{aligned} (-1)^{k - k_1} 2^{k - k_1} [2(k - k_1) - 1]!! &= (-1)^{k - k_1} 2^{2(k - k_1)} (k - k_1)! \\ &\times \left(\frac{-(k - k_1)}{\frac{1}{2} + (k - k_1)} + 1 \right) L_{k - k_1}^{\frac{1}{2}}(0), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

e, portanto,

$$L_{k - k_1}^{\frac{1}{2}}(0) = \frac{[2(k - k_1) - 1]!! \left(\frac{1}{2} + (k - k_1) \right)}{2^{k - k_1} (k - k_1)!}. \quad (\text{A.16})$$

Substituindo a equação (A.16) na equação (A.9), obtemos

$$\int dr p^2 e^{-\frac{p^2}{\hbar m \omega}} L_{k - k_1}^{\frac{1}{2}}(2ap^2) = \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} L_{k - k_1}^{\frac{1}{2}}(0) (-1)^{k - k_1} \pi^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.17})$$

E, substituindo (A.17) na equação (A.3), temos:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{16\pi^{\frac{1}{2}}}{\hbar^3 \pi^2} e^{-q^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k n_k \sum_{k_1=0}^k 2q^2 \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} L_{k - k_1}^{\frac{1}{2}}(0) (-1)^{k - k_1} \quad (\text{A.18})$$

$$= 4 \left(\frac{m\omega}{\hbar \pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-q^2} \sum_{k=0}^{\infty} n_k \sum_{k_1=0}^k (-1)^{k_1} L_{k_1}^{\frac{1}{2}}(2q^2) L_{k - k_1}^{\frac{1}{2}}(0). \quad (\text{A.19})$$

Para obtermos as densidades de massa calculadas usando-se, respectivamente, as ocupações atenuadas devido aos métodos de Strutinsky e de temperaturas, basta apenas trocarmos n_k por \tilde{n}_k e \tilde{n}_{k_r} .

Apêndice B

Cálculo das Distribuições de Momentos

$$\rho(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (\text{B.1})$$

$$= \int d\Omega \int dr r^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (\text{B.2})$$

$$= 4\pi \int dr r^2 \frac{4e^{-\varepsilon}}{(\hbar\pi)^3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^2(2\varepsilon) n_k; \quad (\text{B.3})$$

como $\varepsilon = \frac{1}{\hbar m \omega} p^2 + \frac{m\omega}{\hbar} r^2$, então, fazendo essa substituição na equação (B.3), temos:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}) &= \frac{16\pi}{(\hbar\pi)^3} e^{\frac{-p^2}{\hbar m \omega}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k n_k \sum_{k_1=0}^k L_{\frac{1}{2}K}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2p^2}{\hbar m \omega} \right) \int dr r^2 e^{-\frac{m\omega r^2}{\hbar}} \\ &\times L_{\frac{1}{2}k-k_1}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} r^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

No apêndice A já foi verificado como é feita a resolução da integral da equação (B.5), desse modo temos que:

$$\rho(\mathbf{p}) = 4 \left(\frac{1}{\pi \hbar m \omega} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-p^2}{\hbar m \omega}} \sum_{k=0}^{\infty} n_k \sum_{k_1}^k (-1)^{k_1} L_{\frac{1}{2}k_1}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2p^2}{\hbar m \omega} \right) L_{\frac{1}{2}k-k_1}^{\frac{1}{2}}(0). \quad (\text{B.5})$$

Para obtermos as densidades de momentos calculadas usando as ocupações atenuadas devido aos métodos, de Strutinsky e de temperatura, basta trocarmos, respectivamente, n_k por \tilde{n}_k e $\tilde{n}_{k\tau}$.

Apêndice C

Cálculo da Distribuição Angular

Seguindo a referência [4], vamos calcular a distribuição angular dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\pi\sigma_{Mott}f_{rec}^{-1} \left| \int dr r^2 j_0(q_1 \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \right|^2, \quad (C.1)$$

onde $\rho(\mathbf{r})$ na equação acima é a densidade de massa dada por

$$\rho(\mathbf{r}) = 4 \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-q^2} \sum_{k=0}^{\infty} n_k \sum_{k_1=0}^k (-1)^{k_1} L_{k_1}^{\frac{1}{2}}(2q^2) L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}(0)} \quad (C.2)$$

e ainda

$$q^2 = \frac{m\omega r^2}{\hbar}, \quad (C.3)$$

e

$$q_1^2 = \left[\left(\frac{2E}{\hbar c} \right) \sin \left[\frac{\theta}{2} \right] \right]^2. \quad (C.4)$$

Vamos primeiramente calcular a integral existente na equação (C.1).

$$\int dr r^2 j_0(q_1 \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) = 4 \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} n_k \sum_{k_1=0}^k (-1)^{k_1} \int dr r^2 j_0(q_1 \mathbf{r}) e^{-q^2} L_{k_1}^{\frac{1}{2}}(2q^2) L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}(0)} \quad (C.5)$$

Usando as relações abaixo [20],

$$j_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (C.6)$$

e

$$j_0(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x), \quad (C.7)$$

vamos resolver a integral existente na equação (C.5),

$$\int drr^2 j_0(q_1 r) e^{-\frac{m\omega r^2}{\hbar}} L_{k_1}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2m\omega r^2}{\hbar}\right) = \left(\frac{\pi}{2q_1}\right)^{\frac{1}{2}} \int drr^{\frac{3}{2}} e^{-ar^2} J_{\frac{1}{2}}(q_1 r) L_{k_1}^{\frac{1}{2}}(2ar^2) \quad (C.8)$$

onde $a = \frac{m\omega}{\hbar}$.

Usando a seguinte relação [20]:

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\beta x^2} L_n^\nu(\alpha x^2) J_\nu(xy) dx = 2^{-\nu-1} \beta^{-\nu-n-1} (\beta - \alpha)^n \gamma^\nu e^{-\frac{y^2}{4\beta}} L_n^\nu \left[\frac{\alpha y^2}{4\beta(\alpha - \beta)} \right], \quad (C.9)$$

na equação (C.8) temos:

$$\begin{aligned} \int drr^2 j_0(q_1 r) e^{-\frac{m\omega r^2}{\hbar}} L_{k_1}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2m\omega r^2}{\hbar}\right) &= \left(\frac{\pi}{2q_1}\right)^{\frac{1}{2}} [2^{\frac{-1}{2}-1}] a^{\frac{-1}{2}-k_1-1} (a - 2a)^{k_1} q_1^{\frac{1}{2}} \quad (C.10) \\ &\times e^{-\frac{q_1^2}{4a}} L_{k_1}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2aq_1^2}{4a(2a - a)} \right] \\ &= \left(\frac{\pi}{2q_1}\right)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{-3}{2}} a^{\frac{-3}{2}} (-1)^{k_1} q_1^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{q_1^2}{4a}} L_{k_1}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{q_1^2}{2a} \right]. \end{aligned}$$

Substituindo a equação (C.11) na equação (C.5), obtemos

$$\int drr^2 j_0(q_1 r) \rho(r) = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \sum_{k_1=0}^k \pi^{-1} L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}}(0) L_{k_1}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{q_1^2 \hbar}{2m\omega} \right] e^{-\frac{q_1^2 \hbar}{4m\omega}} \quad (C.11)$$

e então;

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\pi \sigma_{Mott} f_{rec}^{-1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} n_k \sum_{k_1=0}^k \pi^{-1} L_{k-k_1}^{\frac{1}{2}}(0) L_{k_1}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{q_1^2 \hbar}{2m\omega} \right] \right|^2 e^{-\frac{q_1^2 \hbar}{2m\omega}} \quad (C.12)$$

Usando-se agora a seguinte relação [20]:

$$\sum_{m=0}^n L_n^\alpha(x) L_{n-m}^\beta(y) = L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y) \tag{C.13}$$

temos finalmente que a equação (C.12) fica:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4}{\pi} \sigma_{Mott} f_{rec}^{-1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} n_k L_k^2 \left(\frac{q_1^2 \hbar}{2m\omega} \right) \right|^2 e^{-\frac{q_1^2 \hbar}{2m\omega}} \tag{C.14}$$

Para se obter a distribuição angular dependente da ocupação atenuada, devido ao método de Strutinsky ou de temperatura, basta apenas trocar n_k da equação (C.12) por \tilde{n}_k ou \tilde{n}_{k_t} .

[1] R. Eidelberger & R. ...

[2] A.M. Lallena, *Int. Journal of Modern Phys.*, **15**(1) (1991)

[3] R. Frits and C.N. Papadimitrakis, *Ann. Phys.*, **167** (1987)

[4] Herbert Ullrich, *Electron Scattering from Low-Z Solids*, Academic Press, (1971)

[5] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag (1980)

[6] N. Bohr and J.A. Wheeler, *Phys. Rev.*, **58** (1950)

[7] M. Brack et al, *Ann. Phys.*, **14**, 320 (1972)

[8] V.M. Kalmanov et al, *Soviet Journal of Part. and Nucl.*, **3**, 23 (1974)

[9] V.M. Strutinsky, *Soviet Journal of Nucl. Phys.*, **3**, 41 (1973)

[10] A.S. Tjapin, *Soviet Journal of Nucl. Phys.*, **11**, 1 (1970)

[11] M. Brack and B.F. Bunker, *Nucl. Phys.*, **A207** (1973)

[12] G.G. Bounie et al, *Nucl. Phys.*, **A185** (1972)

[13] M. Prakash, *S. Shastri, Ann. Phys.*, **A270** (1981)

[14] S. Shastri and M. Prakash, *Ann. Phys.*, **A272** (1981)

Referências Bibliográficas

- [1] R.Eiseberg e R.Resnick, in *Física Quântica*. Ed. Campus(1988).
- [2] J.B.Belicard et al, *Phys. Rev. Letters*, **19**, 527(1967).
- [3] C.Ciofi Degli Atti, *Prog.Part.Nucl.Phys.*, **3**, 163(1980).
- [4] A.M.Lallena, *Inter.Journal of Modern Phys.*, **A6**,13,2213 (1991).
- [5] B.Frois and C.N.Papanicolas, *Ann.Rev.Nucl.Part.*, **37**,133(1987).
- [6] Hebert Uberall, *Electron Scattering From Complex Nuclei*, Academic Press, (1971).
- [7] P.Ring and P.Schuck, *The Nuclear Many Body Problem*, Springer Verlag(1980).
- [8] N.Bohr and J.A.Wheeler, *Phys.Rev.*, **56**, 426 (1939).
- [9] M.Brack et al, *Rev.Mod.Phys.*, **44**, 320 (1972) .
- [10] V.M.Kolomietz et al, *Soviet Journal of Part. and Nucl.*, **3**, 2 (1972).
- [11] V.M.Strutinsky, *Soviet Journal of Nucl.Phys.*, **3**,4(1966).
- [12] A.S.Tyapin, *Soviet Journal of Nucl.Phys.*, **11**, 1 (1970).
- [13] M.Brack and H.C.Pauli, *Nucl.Phys.*, **A207**, 401(1973).
- [14] G.G.Bunatian et al, *Nucl.Phys.*, **A188**, 225(1972).
- [15] M.Prakash, S.Sholomo and V.M.Kolomietz, *Nucl.Phys.*, **A370**. 30(1981).
- [16] S.Sholomo and M.Prakash, *Nucl.Phys.*. **A357**, 157 (1981).

-
- [17] A.Bohr and B.Mottelson, *Nuclear Structure*.vol 2.(Benjamim, N.Y.) pp 601,607-615 (1975).
- [18] V.S.Ramamunthy, S.S.Kapoor and S.K.Kataria. *Phys.Rev.Lett.* **25**, 386 (1970) .
- [19] I.Sick et al. *Phys.Lett.*, **88B**.3.245 (1979).
- [20] I.S.Gradshteyn and I:M.Ryzhik. *Table of Integrals Series and Products*. Academic Press, (1972).
- [21] G.F.Bertsch, *The Practitioner's Shell Model*. North-Holland, (1981).

