Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Jefferson David Alves

Sequências Recorrentes de Números Fuzzy Interativos: Aplicações em Biomatemática

Rio Claro - SP
2023

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Sequências Recorrentes de Números Fuzzy Interativos: Aplicações em Biomatemática

Jefferson David Alves

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques

Rio Claro - SP
2023

A474s

Alves, Jefferson David
Sequências Recorrentes de Números Fuzzy Interativos: : Aplicações em Biomatemática / Jefferson David Alves. -- Rio Claro, 2023
238 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Vinícius Francisco Wasques

1. Conjuntos Fuzzy. 2. Aritmética Fuzzy. 3. Sequências Recorrentes. 4. Métodos Matemáticos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Impacto potencial desta pesquisa

Esta pesquisa tem dois focos principais. O primeiro deles é fornecer um material didático para novas turmas da área da matemática ou afins, que tenham interesse em estudar os conteúdos iniciais da teoria de conjuntos fuzzy. O texto fornece exemplos e imagens para fixar os conhecimentos. Além disso, fornece alguns códigos na plataforma de acesso livre Octave, de modo a reproduzir alguns dos resultados trazidos aqui. O segundo foco tem como objetivo ilustrar como a teoria de conjuntos fuzzy pode ser utilizada para modelar problemas da natureza que contenham incerteza, seja ela atribuída a imprecisão de dados ou relacionadas ao próprio fenômeno. De modo prático, o texto apresenta aplicações, interpretações e consequências da modelagem fuzzy que podem ser utilizadas não só na área de Biomatemática, mas também nas Engenharias, Química, Física, entre outras áreas da ciência.

Potential impact of this research

This research has two main focus. The first is to provide didactic material for new student in the area of the exact sciences, more precisely in mathematics, who are interested in studying the initial concepts of fuzzy set theory. The text provides examples and figures to the better understating of this theory. In addition, it provides some codes on the open access Octave platform, in order to reproduce some of the results presented here. The second focus aims to illustrate how fuzzy set theory can be used to model problems of nature that contain uncertainty, whether attributed to data imprecision or related to the phenomenon itself. In a practical way, the text presents applications, interpretations and consequences of fuzzy modeling that can be used not only in the area of Biomathematics, but also in Engineering, Chemistry, Physics, among other areas of science.

TERMO DE APROVAÇÃO

Jefferson David Alves

Sequências Recorrentes de Números Fuzzy Interativos: Aplicações em Biomatemática

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques
Orientador

Profa. Dra. Silvia Dias de Souza
ICE/UFAM/Manaus (AM)

Profa. Dr. Francielle Santo Pedro Simões
UNIFESP/Osasco (SP)

Rio Claro, 27 de janeiro de 2023

Aos meus pais,
irmão, e minha esposa.

Agradecimentos

À minha esposa Joice Mara Antonholi, pelo incentivo e compreensão ao longo desta caminhada.

Aos meus pais, Antonio Alves e Rita de Cássia de Souza Alves, e ao meu irmão Jeisson David Alves.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques, por ter me aceitado como orientando, por tudo o que me ensinou sobre matemática fuzzy, pelas contribuições de todas as formas para a realização deste dissertação, pela paciência, dedicação, compreensão e conselhos. Também dedico a ele este trabalho. Saiba que tem um amigo a disposição.

Ao meu antigo orientador e amigo, Prof. Dr. Thiago de Melo, por toda a ajuda com LaTeX e o pacote Ti*k*Z, além do incentivo para que concluísse esta dissertação e no incentivo para a continuidade de meus estudos.

Aos meus colegas do PROFMAT que juntos passamos momentos difíceis e felizes ao longo desta caminhada e também aos colegas do PGMAT que devido a pandemia de Covid-19 nos impossibilitou de termos mais contatos presenciais, porém o incentivo, a troca de experiências e as vídeo chamadas para discussões com a participação de todos fez com que o desanimo de estudar sozinho em casa não caísse sobre nós.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP campus de Rio Claro que contribuíram para minha formação.

Gostaria de agradecer a todos os professores que tive ao longo desta vida, que muitas vezes não são valorizados da forma como merecem pela sociedade.

Aos membros da banca examinadora Profa. Dra. Silvia Dias de Souza e Profa. Dra. Francielle Santo Pedro Simões por terem aceitado o convite de participar da banca e pelas contribuições para a dissertação.

À Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira pelas correções na versão de qualificação e ensinamentos durante o curso.

À UNESP, aos profissionais e professores do Departamento de Matemática de Rio Claro que promovem o PGMAT – Programa de Pós-Graduação em Matemática.

A equipe de profissionais, professores, coordenadores, gestão e administração da escola ETEC Pedro Ferreira Alves que me ajudaram em tudo o que foi possível para a realização de meus estudos concomitante ao meu trabalho.

Ao Centro Paula Souza que administra a ETEC (Escola Técnica) que permitiu afastar-me de parte de minhas aulas para desenvolver meus estudos.

"É um negócio perigoso, Frodo, sair pela sua porta. Você dá um passo na Estrada e, se não cuidar dos seus pés, não há como saber para onde você poderá ser arrastado." –
Bilbo Bolseiro.
A Sociedade do anel
J. R. R. Tolkien

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre sequências de números fuzzy interativos em que o termo atual da sequência depende dos seus termos antecessores. As condições iniciais dessas sequências são dadas por números fuzzy e a associação entre seus termos será modelada pela interatividade proveniente das t-normas. Os resultados obtidos são aplicados na sequência de Fibonacci e em modelos biológicos, a fim de ilustrar as vantagens de se utilizar a relação de interatividade.

Palavras-chave: Conjuntos Fuzzy, Aritmética Fuzzy, Sequências Recorrentes, Métodos Matemáticos.

Abstract

This work presents a study on sequences of interactive fuzzy numbers in which the current term of the sequence depends on its predecessor terms. The initial conditions of these sequences are given by fuzzy numbers and the association between terms will be modeled by the interactivity associated with t-norms. The obtained results are applied in the Fibonacci sequence and in biological models, in order to illustrate the advantages of using the interactivity relationship.

Keywords: Fuzzy Sets, Fuzzy Aritmetic, Recurring Sequences, Mathematical Methods.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Muitas vezes é necessário prever determinados acontecimentos do mundo físico, seja para prever qual o melhor momento para efetuar o lançamento de um satélite ou para determinar a forma como uma doença se comporta.

Para descrever tais fenômenos em linguagem matemática, pode-se utilizar equações que relacionam taxas de variações (descritas por derivadas) com as variáveis de estado (descritas em função do tempo). Tais equações são chamadas de equações diferenciais, e com estas equações pode-se elaborar modelos matemáticos [1].

Como ferramenta matemática para o estudo destes fenômenos tem-se a chamada matemática clássica. No entanto, incertezas inerentes a tais fenômenos não são contempladas pela matemática clássica. Em contrapartida, a teoria de conjuntos fuzzy pode ser utilizada para modelar tais incertezas, que por muitas vezes são atreladas a variáveis linguísticas. Por exemplo, para determinar expressões como "próximo de 5" ou "em torno de 5", os termos "próximo" e "em torno de" podem ser modelados por conjuntos fuzzy [2, 3].

A teoria dos conjuntos fuzzy [2] é uma área completamente interdisciplinar pois nela é possível inserir incertezas no cotidiano, na tomada de decisões e compreensão de fatos. Atualmente esta teoria vem sendo aplicada em diversas áreas, seja para a automação de máquinas, processos físicos [4] ou em modelagem nas áreas de Ecologia, Biomatemática e Medicina [2].

Entende-se por Biomatemática a área da matemática que desenvolve modelos que permitem descrever e prever situações biológicas. Por exemplo, como uma doença pode evoluir com o tempo, mesmo com incerteza nos dados das condições iniciais.

Este trabalho se dedica a estudar fenômenos em que as variáveis ou parâmetros de estado são incertos e descritos por números fuzzy. Esses fenômenos serão descritos por modelos discretos (sequências recorrentes) cujas operações aritméticas envolvidas são adaptadas para números fuzzy via princípio de extensão. O objetivo é analisar como a incerteza evolui considerando relações intrínsecas como por exemplo a noção de interatividade (dependência) [5].

Para o estudo serão utilizadas as t-normas que são uma generalização de conectivos da lógica clássica. As t-normas utilizadas foram do mínimo, produto, Lukasiewicz, drástica, Hamacher e Yu [6]. Para a realização do estudo foi utilizado o software GNU Octave, e o algoritmo foi desenvolvido pelos autores do trabalho.

Nas aplicações das t-normas utilizou-se a sequência de Fibonacci por ser uma sequência bem conhecida, e optou-se por utilizar também um modelo biológico para verificar o comportamento de cada t-norma em um estudo real e conhecido nos estudos de biomatemática.

2 Sobre a teoria de conjuntos fuzzy

Com o recente avanço das novas tecnologias, novas formas para realizar tomadas de decisões, fazer previsões e otimização de sistemas e ações vem sendo desenvolvidas. Seja na aplicação de controladores lógicos de equipamentos automatizados, em eletrodomésticos, em estudos relacionados a inteligência artificial e redes neurais, ou no modelamento matemático de situações cotidianas ou de pandemias, a matemática fuzzy vem ganhando destaque.

Para que setores tão diversos estejam interessados no estudo de conjuntos e lógica fuzzy, é esperado que estejam alcançando retorno financeiro e resultados em pesquisas. Deste modo, este presente capítulo realizará uma introdução ao leitor sobre o que é, e a importância do estudo dos conjuntos fuzzy.

2.1 Lotfi Asker Zadeh

A **Teoria de Conjuntos Fuzzy** foi inicialmente desenvolvida por Lotfi Asker Zadeh (1921–2017) em 1965 em seu artigo intitulado **Fuzzy sets** [7]. Zadeh foi um matemático e engenheiro nascido no Azerbaijão, tendo se graduado nos Estados Unidos onde foi professor da Universidade da Califórnia em Berkeley.

Devido à sua contribuição no desenvolvimento desta nova área de estudo, recebeu diversos prêmios.

Figura 2.1: Lotfi Asker Zadeh, fonte: Wikipedia [1]

[1]Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Lotfi_Zadeh_Berkeley_c.jpg>. Acesso em: 20 de jul de 2022.

2.2 Modelagem matemática

Na busca por compreender os fenômenos ao seu redor, o ser humano tenta explicar acontecimentos, obter respostas, e realizar previsões, seja para quando for a melhor época para um plantio, a determinação de um eclipse, etc.

Para o estudo destas situações reais, necessita-se de uma modelagem, sendo esta baseada em um **método experimental**, que consiste em realizar experimentos e tomadas de dados; **método eurístico** que leva em conta experiências prévias; e o **modelamento matemático** ou analítico que utiliza-se de equações diferenciais e equações de diferença.

A modelagem matemática atualmente é utilizada nas mais diversas áreas do conhecimento, seja na Física, Química, Biologia, Economia, Engenharia, Medicina, etc. Em todos estes casos os fenômenos são descritos matematicamente e, permitindo assim a realização de previsões.

Algo importante de se frisar é que existem diversas formas de modelamento matemático, e que assim não é possível saber "o melhor modelo" matemático para uma determinada situação. Na verdade o melhor modelo é aquele em que é possível sempre se realizar ajustes que o torna cada vez melhor, mais confiável, e consequentemente mais preciso.

2.3 Teoria de conjuntos fuzzy

Em diversas situações do cotidiano é comum se referir a certas informações de maneira imprecisa. Um exemplo deste tipo de informação é quando alguém é questionado a respeito de qual o tempo necessário para ir de uma determinada cidade a outra vizinha e obtêm-se como resposta algo do tipo "Em torno de uma hora" ou "Aproximadamente uma hora". Observe que em ambas as respostas o interlocutor não diz exatamente o tempo necessário, mas sim um valor que baseado em experiências anteriores é o mais próximo do real que ele pode propor com um certo grau de certeza.

Pode-se notar diversas outras situações do cotidiano onde a resposta não é algo único, mas algo que carrega em si alguma informação que se utiliza de variáveis linguísticas, por exemplo, se um indivíduo está com febre, ele pode ter pouca, média ou muita febre. A sensação térmica em um determinado local pode ser, quente, normal, frio.

A dificuldade em inserir estas variáveis linguísticas, e valores imprecisos em um modelo matemático, foi o que levou Zadeh a desenvolver a Teoria de Conjuntos Fuzzy. A matemática criada por Zadeh nos permite trabalhar com a modelagem de variáveis linguísticas do tipo "em torno de", "aproximadamente", "alto", "baixo" dentre outras de modo a permitir um relaxamento da propriedade atribuída à variável.

Neste novo modo de se trabalhar com variáveis, diferentemente do conceito já conhecido por todos na matemática, onde um determinado elemento pertence ou não a um conjunto, na matemática fuzzy tem-se na verdade um grau de pertencimento a este conjunto, deste modo, um elemento pode ora pertencer mais a um determinado conjunto ou ora pertencer menos.

Nos dias atuais, o termo "lógica fuzzy" é usado de duas formas diferentes [2, 3], sendo a primeira na teoria conjuntista a fim de manipular informações inexatas, através de uma teoria de conjunto fuzzy geral, e de uma segunda forma no sentido de "cálculo proposicional", de modo a estender a lógica clássica.

A lógica fuzzy incorpora a forma humana de pensar pois faz deduções e chega a conclusões baseando-se em informações já conhecidas. Os conjuntos fuzzy são classificados de duas formas diferentes: os conjuntos fuzzy ônticos e epistêmicos. Os conjuntos fuzzy ônticos representam objetos que são construídos originalmente como conjuntos, mas para expressar subjetividade. Enquanto que os conjuntos fuzzy epistêmicos representam a ideia de informação parcial ou imprecisa [8].

3 Conjuntos fuzzy

Este capítulo apresenta o conceito de conjuntos fuzzy e sua formalização, e para aprofundamento o leitor pode consultar [2]. Para uma leitura sobre as definições, propriedades e demonstrações de conjuntos clássicos matemáticos, pode-se consultar [9].

Nas literaturas de matemática, é comum que intervalos sejam denotados por dois números separados por vírgula. Tal notação pode causar confusão para o caso de os números serem decimais, pois não é possível fazer distinção se a vírgula está sendo utilizada como separador do número e das casas decimais ou se é um separador dos números que compõem o intervalo. Deste modo, para facilitar o entendimento deste trabalho, todos os intervalos serão separados por ponto e vírgula, assim o intervalo $[1, 5]$ será denotado por $[1; 5]$. O mesmo será feito para denotar conjuntos expressos de maneira extensa, ou seja, $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ será $\{1; 2; 3; 4; \dots\}$.

A maior parte das figuras deste trabalho foram desenvolvidas pelos autores. As figuras que não sejam de autoria própria serão referenciadas.

Inicialmente define-se uma função para os conjuntos já conhecidos na matemática.

Definição 3.1. Seja U um conjunto e $A \subset U$. A função $\chi_A \colon U \to \{0; 1\}$ chamada de **função característica ou indicadora** é dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ , se } x \in A \\ 0 \text{ , se } x \notin A \end{cases} .$$

Com a função característica é possível descrever por completo o conjunto A, pois ela indica quais elementos do conjunto universo U são também elementos de A.

Quando se utiliza a linguagem de conjuntos fuzzy é feita uma distinção entre estes conjuntos e os já conhecidos pelo leitor através da teoria clássica dos conjuntos. Os conjuntos já estudados nos cursos de matemática são os conjuntos clássicos também chamados de **conjuntos crisp** [3].

Exemplo 3.2. O conjunto clássico $A = [1; 5]$ é definido pela seguinte função característica:

$$\chi_{[1;5]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ , se } x \in [1; 5] \\ 0 \text{ , se } x \notin [1; 5] \end{cases} ,$$

ou também

$$\chi_{[1;5]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ , se } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 \text{ , se } x < 1 \text{ ou } x > 5 \end{cases} .$$

A Figura 3.1 mostra uma representação gráfica do subconjunto clássico $A = [1; 5]$ com função característica $\chi_A \colon \mathbb{R} \to \{0; 1\}$.

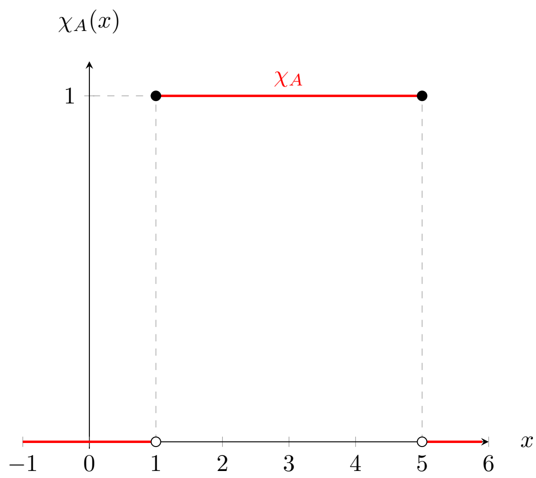


Figura 3.1: Representação de um conjunto clássico.

Exemplo 3.3. Tem-se que o conjunto clássico $B = [-1; 1]$ é definido pela seguinte função característica:

$$\chi_{[-1;1]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ , se } x \in [-1; 1] \\ 0 \text{ , se } x \notin [-1; 1] \end{cases} \quad ,$$

ou

$$\chi_{[-1;1]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ , se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ , se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases} \quad .$$

A Figura 3.2 mostra uma representação gráfica do subconjunto clássico $B = [-1; 1]$ com função característica $\chi_B \colon \mathbb{R} \to \{0; 1\}$.

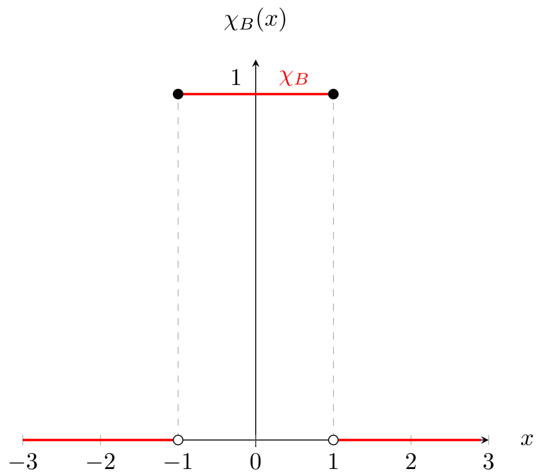


Figura 3.2: Representação do conjunto clássico B.

Exemplo 3.4. Considere o conjunto:

$$C = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ é par}\}.$$

A função característica será:

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 \text{ , se } x = 2k \\ 0 \text{ , se } x \neq 2k \end{cases} \text{ , com } k \in \mathbb{N}.$$

A Figura 3.3 mostra uma representação gráfica do subconjunto clássico $C = \{x \in \mathbb{N} \colon x \text{ é par}\}$, com função característica $\chi_C \colon \mathbb{R} \to \{0;1\}$.

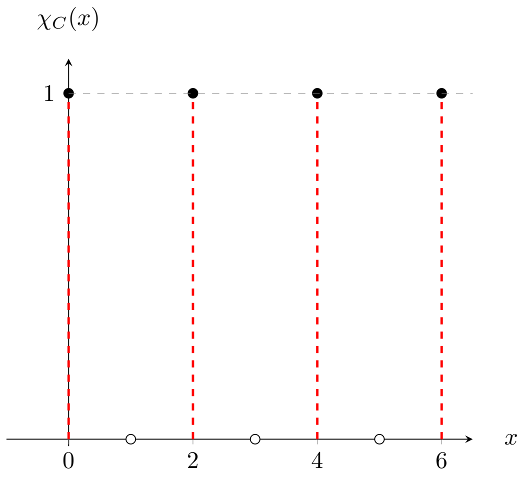


Figura 3.3: Representação do conjunto clássico C.

3.1 Subconjuntos fuzzy

Na linguagem cotidiana são utilizados diversos termos como "aproximadamente", "em torno de", "próximo de", sendo que estes servem muito bem para o seu propósito, sendo a compreensão e comunicação entre indivíduos. Porém não é tão simples exprimir tais termos em um contexto matemático, como por exemplo, "a temperatura está próxima de 20° C", primeiramente é preciso determinar o que é próximo. Note que "próximo de 20° C" pode ser $19,999$ ou $20,001$ e sabe-se que ambos os valores são mais próximos de 20 do que 25. Deste modo, para determinar quais valores seriam mais próximos do que outros utiliza-se os conjuntos fuzzy, pois torna-se possível a caracterização de termos imprecisos e linguísticos em uma linguagem matemática de possível manipulação, que permitirá realizar operações e previsões de eventos.

Definição 3.5. Seja U um conjunto (clássico), um **subconjunto fuzzy** F de U é caracterizado pela função

$$\varphi_F \colon U \to [0;1]$$

chamada de **função de pertinência** do subconjunto F.

Note que a diferença entre a função característica da Definição 3.1 e a função de pertinência da Definição 3.5 é que o contradomínio $\{0;1\}$ passa a ser o intervalo $[0;1]$ e com isso tem-se um espectro de valores possíveis para $\varphi_F(x)$. Observa-se que para um determinado elemento x quanto mais próximo de 1 for seu valor de $\varphi_F(x)$, maior é o grau de pertinência deste elemento ao conjunto F, e quanto mais próximo de 0, menor sua pertinência.

Um conjunto fuzzy F de U é formado por um conjunto clássico de pares ordenados

$$F = \{(x; \varphi_F(x));\ x \in U\}.$$

Algumas literaturas sobre conjuntos fuzzy não fazem distinção entre a função de pertinência φ_F do subconjunto fuzzy F, se referindo ao conjunto apenas por F. Neste texto também não será feita tal distinção, sendo que o contexto deixará a cargo do leitor.

Quando se refere a conjuntos clássicos, um conjunto A é na verdade um subconjunto de um conjunto universo U. O mesmo será feito para subconjuntos fuzzy F de U, sendo apenas chamados de conjunto fuzzy F.

Exemplo 3.6. A Figura 3.4 mostra uma representação gráfica do subconjunto fuzzy para valores próximos de 3, com função de pertinência $\varphi_F \colon \mathbb{R} \to [0; 1]$ dada por

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & , \text{ se } 1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{-x+5}{2} & , \text{ se } 3 < x \leq 5 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

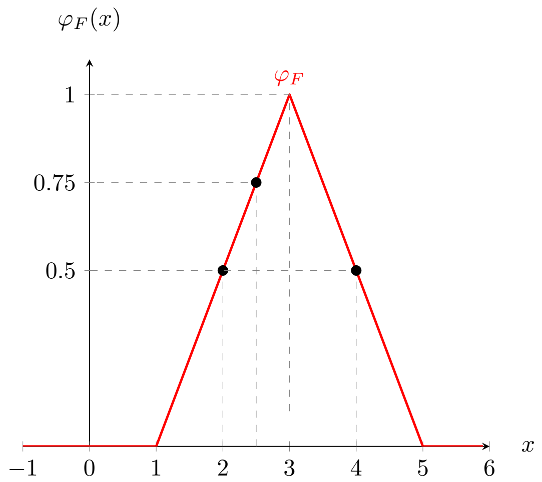


Figura 3.4: Representação de um conjunto fuzzy.

A forma de representar $F = (1; 3; 5)$, é chamada de **forma triangular** e será melhor desenvolvida mais adiante. Por enquanto observe que a representação possui a forma de um triângulo sendo que o primeiro número do trio, no caso $x = 1$, indica o início da base esquerda do triângulo com pertinência $\varphi_F(1) = 0$; o segundo número do trio, ou seja, o valor $x = 3$, indica o topo do triângulo onde tem-se o valor máximo de pertinência $\varphi_F(3) = 1$; e o terceiro número indica a base direita do triângulo, no caso o número $x = 5$ possui pertinência $\varphi_F(5) = 0$.

Neste exemplo, o número $x = 2,5$ é mais próximo de $x = 3$ do que o número $x = 2$, pois $\varphi_F(2,5) = 0,75$ e que $\varphi_F(2) = 0,5$. Deste modo, pode-se dizer que o grau de pertinência de $x = 2,5$ é maior do que $x = 2$ no conjunto F.

Note também que $x = 2$ e $x = 4$ possuem o mesmo grau de pertinência para com o conjunto F, pois $\varphi_F(2) = 0,5 = \varphi_F(4)$.

Exemplo 3.7. Considere o conjunto universo U da idade das pessoas. Determinar o conjunto fuzzy que caracteriza os jovens, isto é, determinar a função de pertinência de D, sendo:

$$D = \{x \in U;\ x \text{ é jovem}\}.$$

Para fins de simplificação assume-se que uma pessoa pode ser classificada apenas em jovem ou idosa. Deste modo realiza-se uma análise para as idades.

Quando uma pessoa nasce ela é o mais jovem possível, sendo assim esta pessoa possui grau de pertinência 1.

A medida que a criança cresce ela fica mais velha, e ao passar dos 10 anos podemos considerar como adolescente, porém não tem-se esta classificação nesta modelagem, sendo assim, inicia-se a diminuição no grau de pertinência.

Define-se uma idade limite, onde acima desta idade a pessoa é considerada idosa. Seguindo o senso comum, uma pessoa que possui 60 anos é idosa, e podemos pensar que pessoas que, estão abaixo desta idade estão se tornando idosas, ou deixando de ser jovens.

Note que pessoas com mais de 60 anos serão consideradas idosas (não jovens), deste modo o grau de pertinência será 0.

Tem-se a representação conforme a Figura 3.5, com

$$\varphi_D(x) = \text{grau de pertinência em } D,$$
$$x = \text{idade em anos.}$$

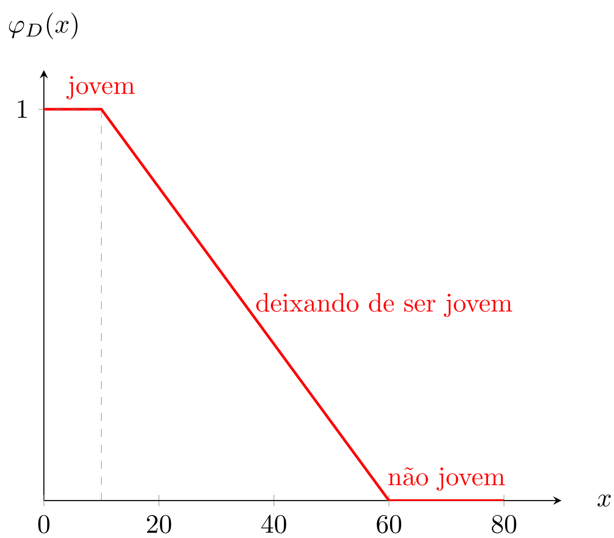


Figura 3.5: Representação do conjunto fuzzy dos jovens.

De acordo com o gráfico,

$$\varphi_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } \ 0 \leq x \leq 10 \\ \dfrac{-x+60}{50} & \text{, se } 10 < x \leq 60 \\ 0 & \text{, se } \qquad x > 60 \end{cases}.$$

Observe que o conjunto clássico é um caso particular de um conjunto fuzzy sendo que sua função de pertinência φ_F é a função característica χ_A, deste modo tem-se a definição a seguir.

Definição 3.8. Seja U um conjunto (clássico), e F um subconjunto fuzzy de U. O **suporte de** F é definido por

$$\text{supp }(F) = \{x \in U;\ \varphi_F(x) > 0\}.$$

É importante se atentar que para os conjuntos crisp (clássicos) o suporte do conjunto é o próprio conjunto, e que o mesmo não acontece com conjuntos fuzzy.

Exemplo 3.9. Na Figura 3.6 tem-se a representação do subconjunto crisp $A = [1; 5]$ e o subconjunto fuzzy $F = (1; 3; 5)$ dos Exemplos 3.2 e 3.6, acompanhados dos seus conjuntos suportes. Note que $A = [1; 5] = \text{supp }(A)$ e que $F = (1; 3; 5) \neq (1; 5) = \text{supp }(F)$.

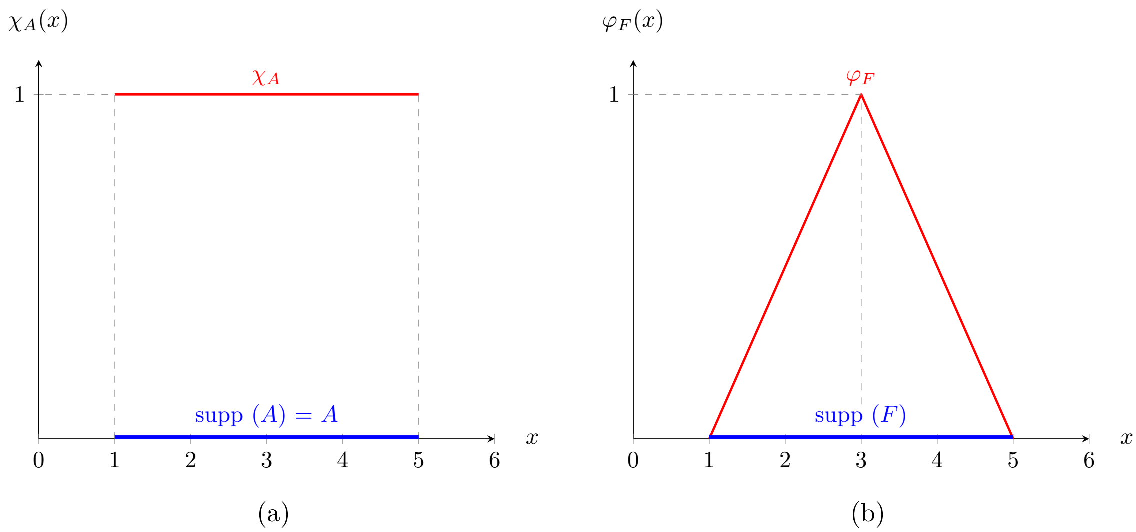


Figura 3.6: (a) Conjunto clássico (crisp) $A = [1; 5]$ e seu suporte; (b) Conjunto fuzzy $F = (1; 3; 5)$ (números próximos de 3) e seu suporte.

O leitor pode se questionar sobre como é determinada a função de pertinência, e a resposta para tal questão está no modelador. Para que uma informação subjetiva, em linguagem verbal possa ser transformada em uma linguagem matemática, muitas vezes é necessário a ajuda de profissionais da área cujo problema esteja sendo modelado para que se determine os intervalos necessários e o grau de importância de cada variável. Deste modo com a ajuda do profissional da área determina-se a função de pertinência.

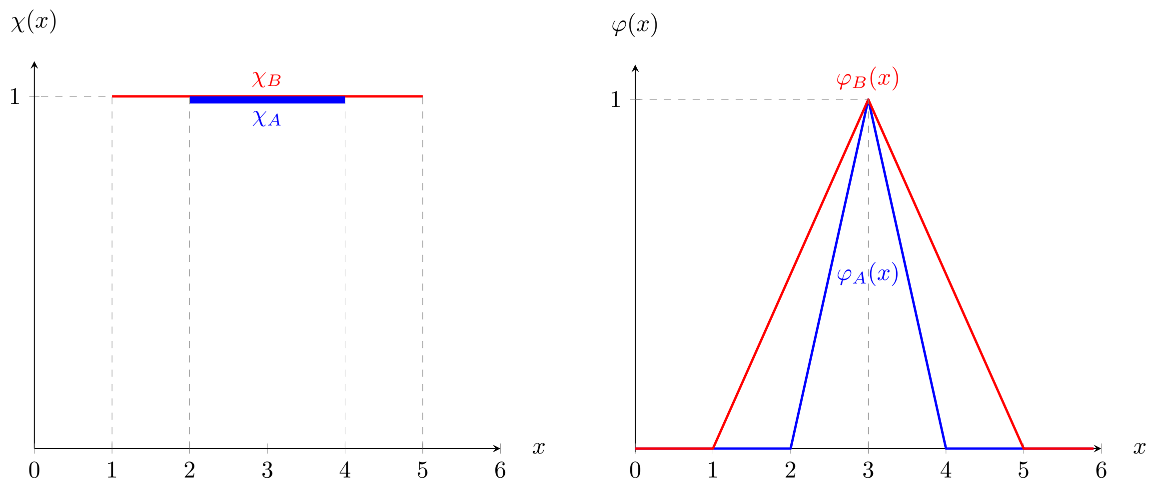
3.2 Operações com subconjuntos fuzzy

Define-se operações entre subconjuntos fuzzy e alguns resultados. Para as demonstrações de operações e propriedades dos conjuntos clássicos, o leitor pode consultar [9, 10, 11].

3.2.1 Relação de inclusão

Para conjuntos clássicos tem-se que dados dois conjuntos A e B diz-se que A é subconjunto de B quando todo elemento de A também é elemento de B, e denota-se por $A \subset B$. Esta relação é chamada de **relação de inclusão**, e comumente dizemos que A está contido em B. Para verificar que a relação de inclusão é **reflexiva, antissimétrica e transitiva** consulte [10].

Já para conjuntos fuzzy tem-se que sendo A e B subconjuntos fuzzy de U, com funções de pertinência indicadas respectivamente por φ_A e φ_B, diz-se que A é **subconjunto fuzzy** de B, ou $A \subset B$ se, e somente se, se $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$ para todo $x \in U$. Observe a Figura 3.7.



(a) (b)

Figura 3.7: (a) Conjunto clássico $A = [2; 4] \subset B = [1; 5]$ e suportes; (b) Conjunto fuzzy $A = (2; 3; 4) \subset B = (1; 3; 5)$.

3.2.2 Conjunto vazio e universo

Nos conjuntos clássicos tem-se que o **conjunto vazio** pode ser interpretado como um "conjunto sem elementos", e representado por $\varnothing$.

Para conjuntos fuzzy tem-se que o conjunto vazio $\varnothing$ tem função de pertinência $\varphi_\varnothing(x) = 0$ enquanto que o conjunto universo U tem função de pertinência $\varphi_U(x) = 1$, para todo $x \in U$. Deste modo, assim como nos conjuntos clássicos tem-se que $\varnothing \subset A \subset U$, para qualquer que seja o conjunto fuzzy A.

3.2.3 Igualdade de conjuntos

Quando tem-se conjuntos clássicos A e B, a **igualdade de conjuntos** escrita por $A = B$ é equivalente a dizer que os conjuntos A e B possuem os mesmos elementos. A prova de tal fato é feita mostrando que $A \subset B$, isto é, que todo elemento de A pertence necessariamente a B, e que $B \subset A$.

Em conjuntos fuzzy tem-se a definição seguinte.

Definição 3.10. Os subconjuntos fuzzy A e B de U são iguais se suas funções de pertinência coincidem, isto é

$$\varphi_A(x) = \varphi_B(x), \forall x \in U.$$

3.2.4 União

Em conjuntos clássicos, dados os conjuntos A e B, a **união ou reunião** é representada e definida por

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Note que a função de pertinência (indicadora) será:

$$\chi_{A\cup B}(x) = \begin{cases} 1 \text{ , se } x \in A\cup B \\ 0 \text{ , se } x \notin A\cup B \end{cases} .$$

i) Se $x \in A \cup B$ então $x \in A$ ou $x \in B$, consequentemente $\chi_A(x) = 1$ ou $\chi_B(x) = 1$. Deste modo, $\max\{\chi_A(x); \chi_B(x)\} = 1$.

ii) Se $x \notin A \cup B$ então $x \notin A$ ou $x \notin B$, consequentemente $\chi_A(x) = 0$ e $\chi_B(x) = 0$. Deste modo, $\max\{\chi_A(x); \chi_B(x)\} = 0$.

Assim, de i) e ii) definimos a função de pertinência da união por

$$\chi_{A\cup B}(x) = \max\{\chi_A(x); \chi_B(x)\}.$$

Com esta motivação tem-se a definição da união para conjuntos fuzzy.

Definição 3.11 (União)**.** Seja U o conjunto universo, com A e B subconjuntos fuzzy de U. A **união** entre os subconjuntos fuzzy A e B é a função de pertinência dada por

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}.$$

Exemplo 3.12. Considerando os conjuntos fuzzy A e B dados por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x & \text{, se } x \in [0;1] \\ 2-x & \text{, se } x \in (1;2] \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi_B(x) = \begin{cases} x-1 & \text{, se } x \in [1;2] \\ 3-x & \text{, se } x \in (2;3] \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases} .$$

Na Figura 3.8 tem-se a representação das funções de pertinência de A e B e a função de pertinência de $A \cup B$ de acordo com a Definição 3.11.

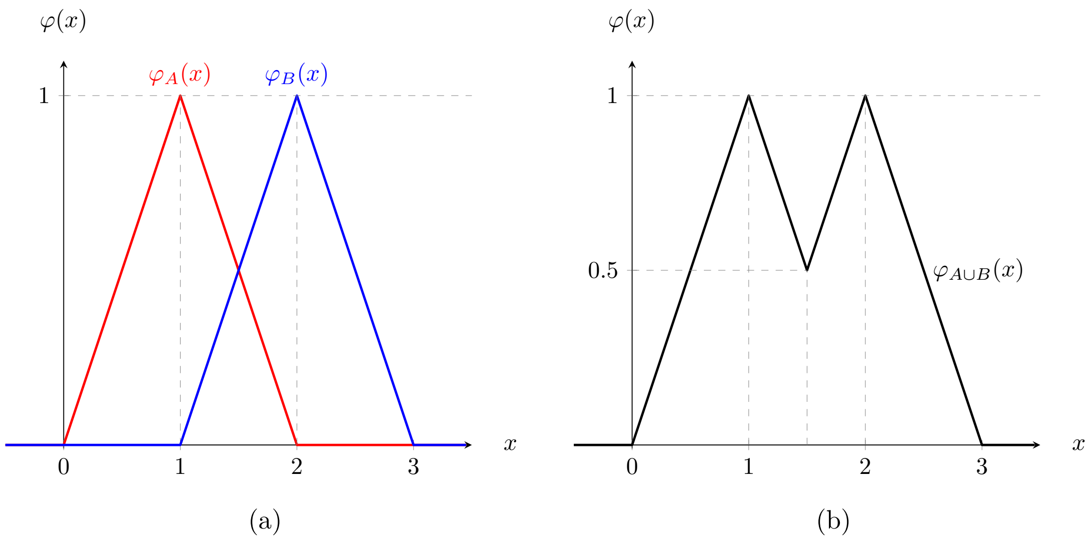


Figura 3.8: (a) Representação dos conjuntos fuzzy A e B; (b) Representação da união dos conjuntos fuzzy A e B.

De acordo com a Figura 3.8 podemos escrever a função de pertinência da união como

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \in [0;1] \\ 2-x & , \text{ se } x \in (1;1,5] \\ x-1 & , \text{ se } x \in (1,5;2] \\ 3-x & , \text{ se } x \in (2;3] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

3.2.5 Intersecção

Para conjuntos clássicos A e B, tem-se que a **intersecção** de tais conjuntos é definida e representada por

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Observe que a função de pertinência será

$$\chi_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 \text{ , se } x \in A \cap B \\ 0 \text{ , se } x \notin A \cap B \end{cases}.$$

i) Se $x \in A \cap B$ então $x \in A$ e $x \in B$, consequentemente $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 1$. Deste modo, $\min\{\chi_A(x); \chi_B(x)\} = 1$.

ii) Se $x \notin A \cap B$ então $x \notin A$ ou $x \notin B$, consequentemente $\chi_A(x) = 0$ ou $\chi_B(x) = 0$. Deste modo, $\min\{\chi_A(x); \chi_B(x)\} = 0$.

Logo de i) e ii) define-se a função de pertinência da intersecção por

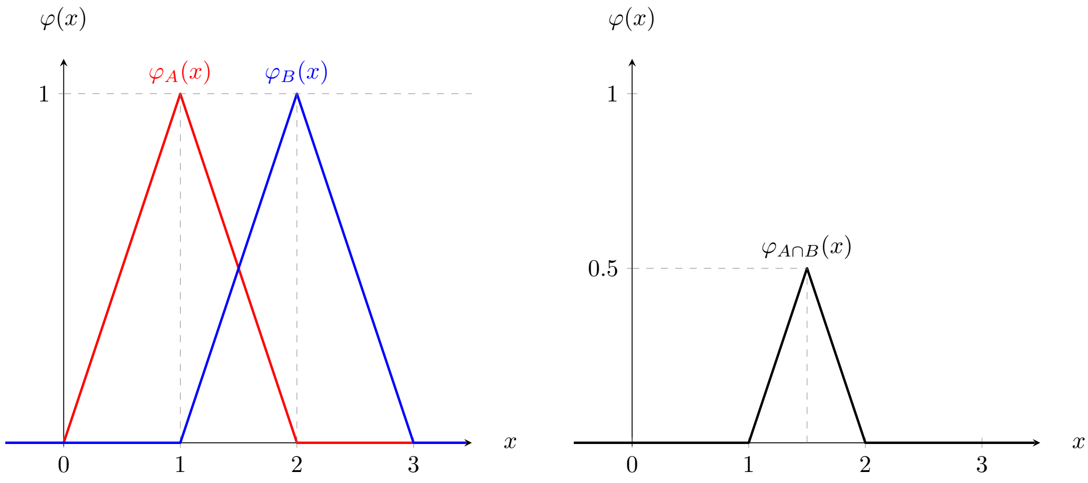
$$\chi_{A\cap B}(x) = \min\{\chi_A(x); \chi_B(x)\}.$$

Assim, motiva-se a definição de intersecção para conjuntos fuzzy.

Definição 3.13 (Intersecção)**.** Seja U o conjunto universo, com A e B subconjuntos fuzzy de U. A **intersecção** entre os subconjuntos fuzzy A e B é a função de pertinência dada por

$$\varphi_{A\cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}.$$

Exemplo 3.14. Considerando os conjuntos fuzzy A e B do Exemplo 3.12, a Figura 3.9, apresenta a representação destes conjuntos e a função de pertinência de $A \cap B$ de acordo com a Definição 3.13.



(a) (b)

Figura 3.9: (a) Representação dos conjuntos fuzzy A e B; (b) Representação da intersecção dos conjuntos fuzzy A e B.

De acordo com a Figura 3.9 podemos escrever a função de pertinência da intersecção como

$$\varphi_{A\cap B}(x) = \begin{cases} x-1 & , \text{ se } x \in [1;3/2] \\ 2-x & , \text{ se } x \in (3/2;2] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

3.2.6 Complementar

A definição clássica de conjuntos define a diferença entre dois conjuntos como

$$A - B = \{x;\; x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

No caso em que tem-se $B \subset A$ a diferença $A - B$ chama-se **complementar** de B em relação a A, que pode ser representada por

$$A - B = A \setminus B = \complement_A B = B^{\complement}.$$

Tem-se que $\chi_U(x) = 1$ para todo $x \in U$, e como nenhum elemento pertence ao conjunto vazio, tem-se $\chi_\varnothing(x) = 0$ para todo $x \in U$. Deste modo é possível afirmar que

$$\begin{aligned} \chi_A(x) + \chi_{A^\complement}(x) &= \chi_U(x) \\ \chi_{A^\complement}(x) &= \chi_U(x) - \chi_A(x) \\ \chi_{A^\complement}(x) &= 1 - \chi_A(x). \end{aligned}$$

Isso leva a seguinte definição para conjuntos fuzzy.

Definição 3.15. (Complementar) O complementar de A é o subconjunto fuzzy $A^\complement$ de U cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A^\complement}(x) = 1 - \varphi_A(x)$$

Algumas literaturas utilizam também o símbolo A' para representar o conjunto complementar.

Exemplo 3.16. Utilizando o conjunto fuzzy A do Exemplo 3.12, a Figura 3.10 mostra o complementar do conjunto A de acordo com a Definição 3.15.

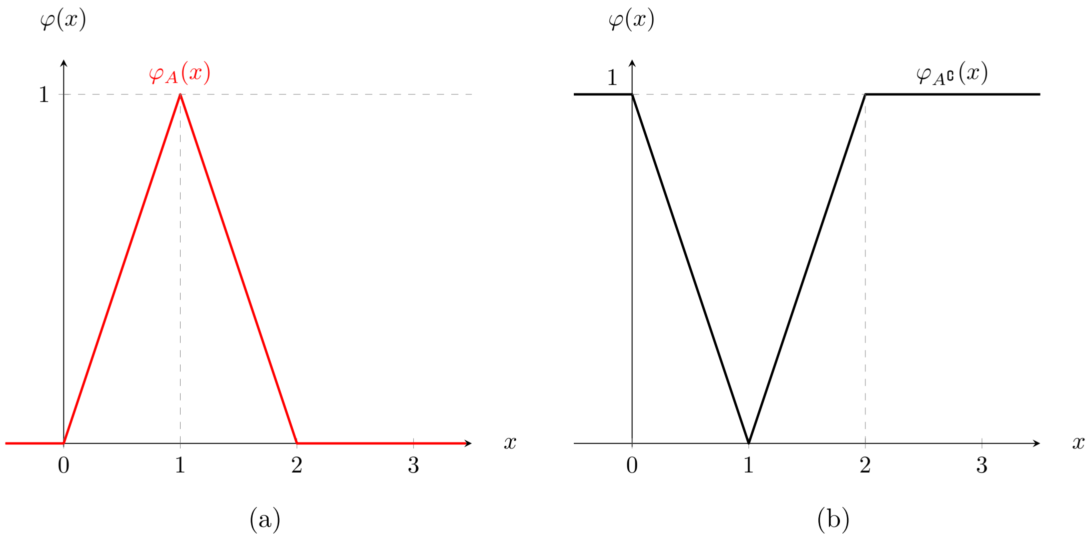


Figura 3.10: (a) Representação do conjunto fuzzy A; (b) Representação do complementar do conjunto fuzzy A.

Utilizando a Figura 3.10 podemos escrever a função de pertinência do complementar de A como:

$$\varphi_{A^\complement}(x) = \begin{cases} -x+1 & , \text{ se } x \in [0;1] \\ x-1 & , \text{ se } x \in (1;2] \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

Observação 3.17. Em conjuntos clássicos tem-se que $A \cup A^\complement = U$, o que não necessariamente ocorre com cojuntos fuzzy, ou seja, podemos ter $\varphi_{A\cup A^\complement} \neq \varphi_U$, veja a Figura 3.11.

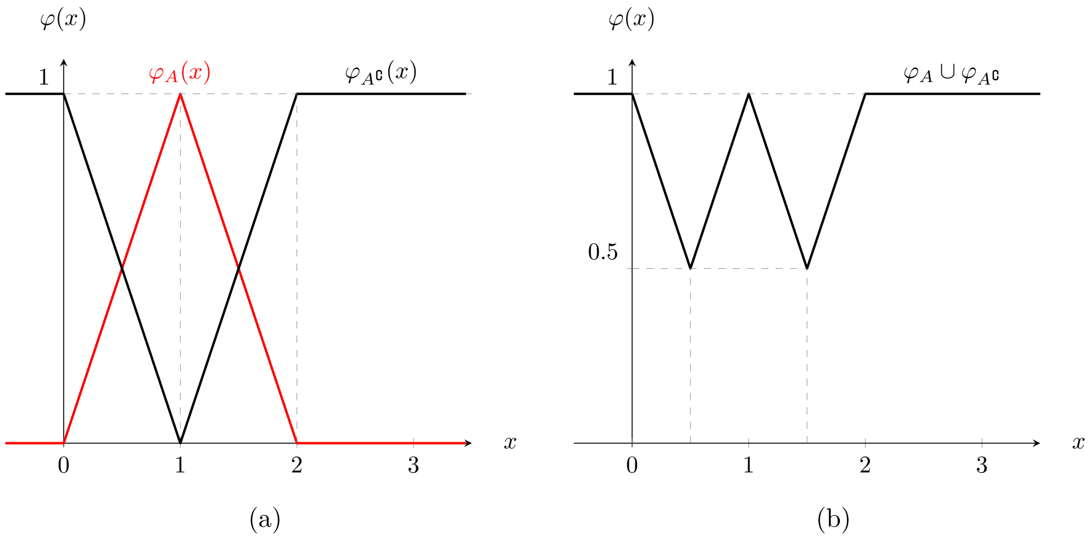


Figura 3.11: (a) Representação do conjunto fuzzy A e do seu complementar; (b) Representação da união do conjunto fuzzy A e seu complementar.

Observação 3.18. Na teoria dos conjuntos clássicos tem-se sempre garantido o princípio do terceiro excluído, ou seja, sempre é válido $A \cap A^\complement = \varnothing$. Veja que o mesmo não necessariamente ocorre com conjuntos fuzzy, ou seja, pode-se ter $\varphi_{A\cap A^\complement} \neq \varphi_\varnothing$, veja a Figura 3.12.

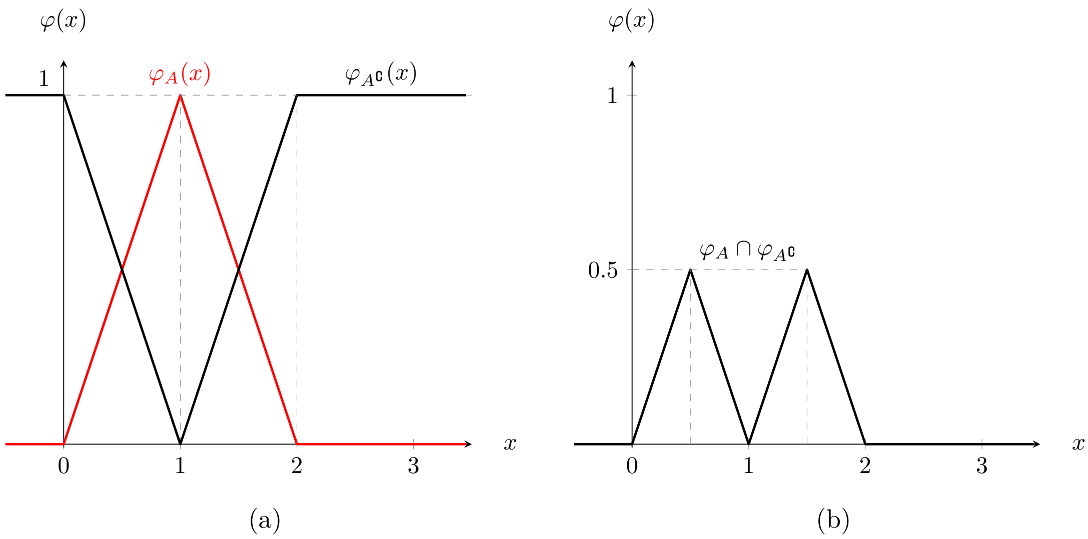
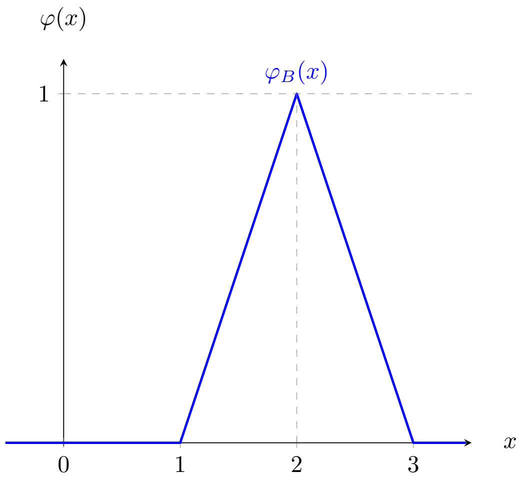
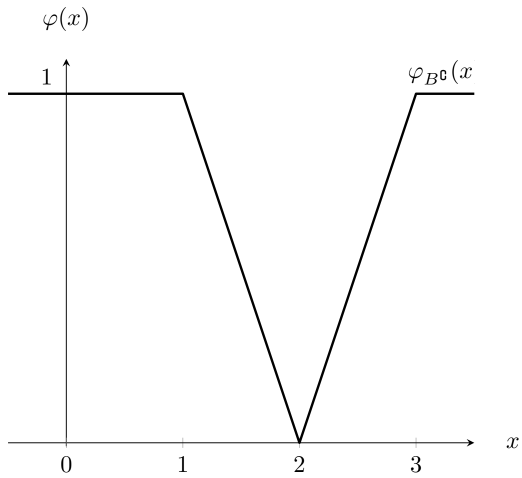


Figura 3.12: (a) Representação do conjunto fuzzy A e do seu complementar; (b) Representação da intersecção do conjunto fuzzy A e seu complementar.

Exemplo 3.19. Utilizando o conjunto fuzzy B do Exemplo 3.12, a Figura 3.13 mostra o complementar do conjunto B de acordo com a Definição 3.15



(a)



(b)

Figura 3.13: (a) Representação do conjunto fuzzy B; (b) Representação do complementar do conjunto fuzzy B.

Da Figura 3.13 podemos escrever a função de pertinência do complementar de B como:

$$\varphi_{B^\complement}(x) = \begin{cases} -x+2 & , \text{ se } x \in [1;2] \\ x-2 & , \text{ se } x \in (2;3] \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Exemplo 3.20. Considere os seguintes conjuntos fuzzy A (jovens), B (idosos) do universo $U = [0, 120]$ em anos, uma das inúmeras possibilidades para as funções de pertinência pode ser

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in [0;30] \\ \frac{50-x}{20} & , \text{ se } x \in (30;50] \\ 0 & , \text{ se } x \in (50;120] \end{cases}, \quad \varphi_B(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \in [0;30] \\ \frac{x-30}{20} & , \text{ se } x \in (30;50] \\ 1 & , \text{ se } x \in (50;120] \end{cases}.$$

A Figura 3.14 representa as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy A e B no mesmo plano cartesiano com x sendo a idade em anos.

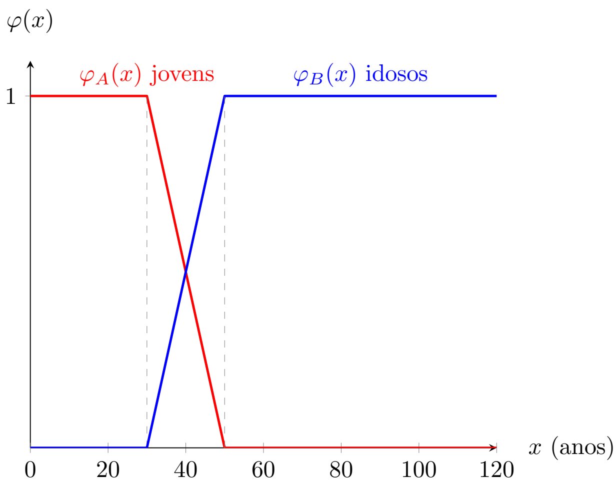


Figura 3.14: Representação dos conjuntos fuzzy dos jovens e idosos.

Note que para uma pessoa que possui 34 anos tem-se graus de pertinência diferentes para $\varphi_A(x)$ e $\varphi_B(x)$.

Para $\varphi_A(34)$ (jovens) tem-se que $x \in (30; 50]$, deste modo

$$\varphi_A(34) = \frac{50 - (34)}{20} = \frac{16}{20} = 0,8.$$

Considerando $\varphi_B(34)$ (idosos) tem-se que 34 está novamente no intervalo de $(30; 50]$, assim

$$\varphi_B(34) = \frac{(34) - 30}{20} = \frac{4}{20} = 0,2.$$

Assim, $\varphi_A(34) = 0,8$ (jovens) e $\varphi_B(34) = 0,2$ (idosos), veja a Figura 3.15.

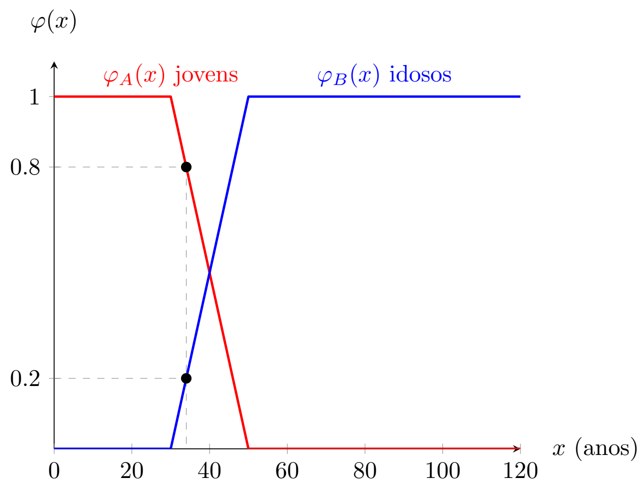


Figura 3.15: Representação dos conjuntos fuzzy dos jovens, idosos e pertinência para 34 anos.

Determinando a função de pertinência de $\varphi_{A\cup B}(x)$ utilizando a Definição 3.11, e obtemos a Figura 3.16.

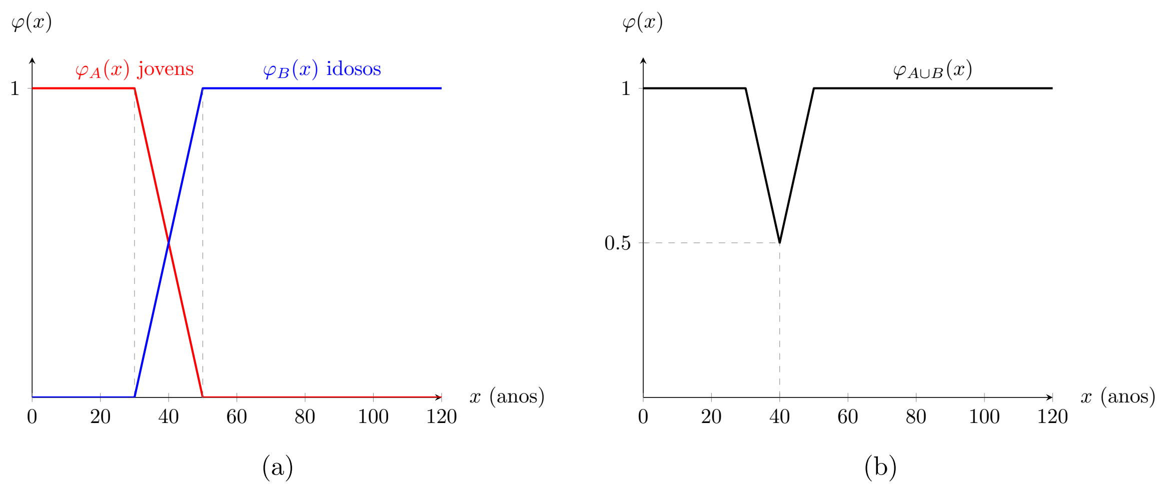


Figura 3.16: (a) Representação dos conjuntos fuzzy dos jovens e idosos; (b) União dos conjuntos dos jovens e dos idosos.

De acordo com a Figura 3.16 podemos escrever a função de pertinência da união como

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \begin{cases} \frac{50-x}{20} & , \text{ se } x \in [20;40] \\ \frac{x-30}{20} & , \text{ se } x \in (40;50] \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Note que de de acordo com a Figura 3.16 (b), nos mostra que se ao escolher uma pessoa tento em vista a sua pertinência no conjunto dos jovens ou idosos, o menor valor possível será $0,5$ aos 40 anos, sendo assim, sempre teremos que a pessoa é mais próxima de ser classificada como jovem ou idosa.

Exemplo 3.21. Sejam os conjuntos fuzzy C das pessoas de estatura baixa e D das pessoas de estatura alta, do universo $V = [0;3]$ em metros, uma das inúmeras possibilidades para as funções de pertinência pode ser

$$\varphi_C(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in [0;1,4] \\ \frac{2-x}{0,6} & , \text{ se } x \in (1,4;2] \\ 0 & , \text{ se } x \in (2;3] \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi_D(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \in [0;1,4] \\ \frac{x-1,4}{0,6} & , \text{ se } x \in (1,4;2] \\ 1 & , \text{ se } x \in (2;3] \end{cases}.$$

A representação gráfica para as funções de pertinência de $\varphi_C(x)$ (baixos) e $\varphi_D(x)$ (altos) está representada na Figura 3.17, com x sendo a altura em metros.

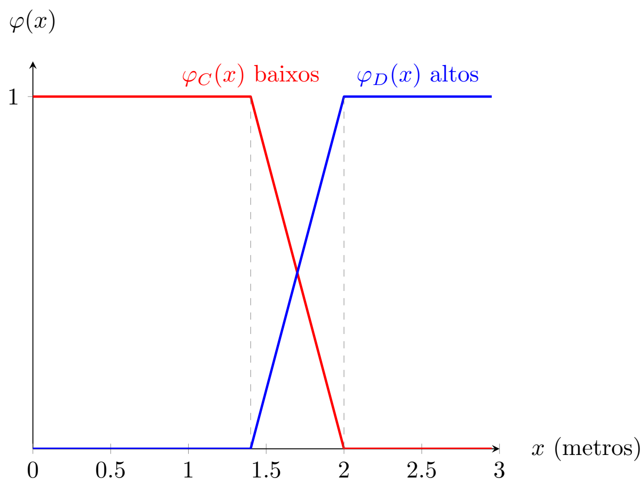


Figura 3.17: Representação dos conjuntos fuzzy das pessoas de estatura baixa e alta.

Uma pessoa com altura $1,60$ m possui graus diferentes de pertinência para $\varphi_C(x)$ (baixos) e $\varphi_D(x)$ (altos).

Considerando $\varphi_C(1,6)$ (baixos), tem-se que $x \in (1,4;2]$, assim

$$\varphi_C(1,6) = \frac{2-(1,6)}{0,6} = \frac{0,4}{0,6} = 0,67.$$

Já no conjunto $\varphi_D(1,6)$ (baixos) novamente tem-se o intervalo $(1,4;2]$, então

$$\varphi_D(1,6) = \frac{(1,6)-1,4}{0,6} = \frac{0,2}{0,6} = 0,33.$$

Logo, $\varphi_C(1,6) = 0,67$ (baixos), $\varphi_B = D(1,6) = 0,33$ (altos) e a Figura 3.18 mostra a representação gráfica.

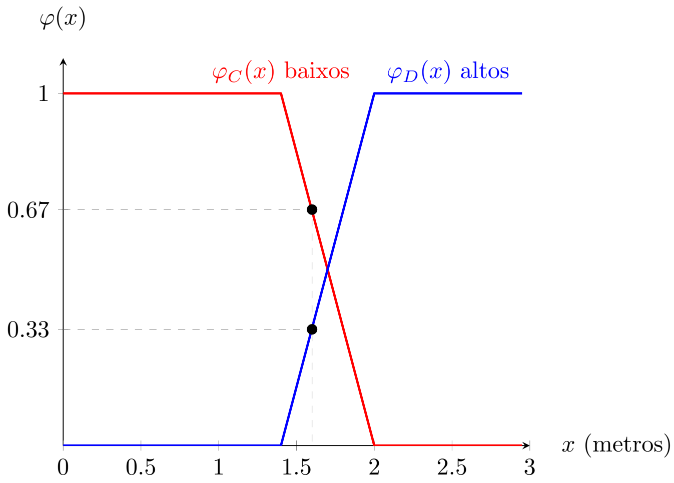


Figura 3.18: Representação dos conjuntos fuzzy das pessoas de estatura baixa e alta para $x = 1,6$.

Utilizando a Definição 3.13 obtem-se a função de pertinência de $\varphi_{C\cap D}$ apresentada na Figura 3.19.

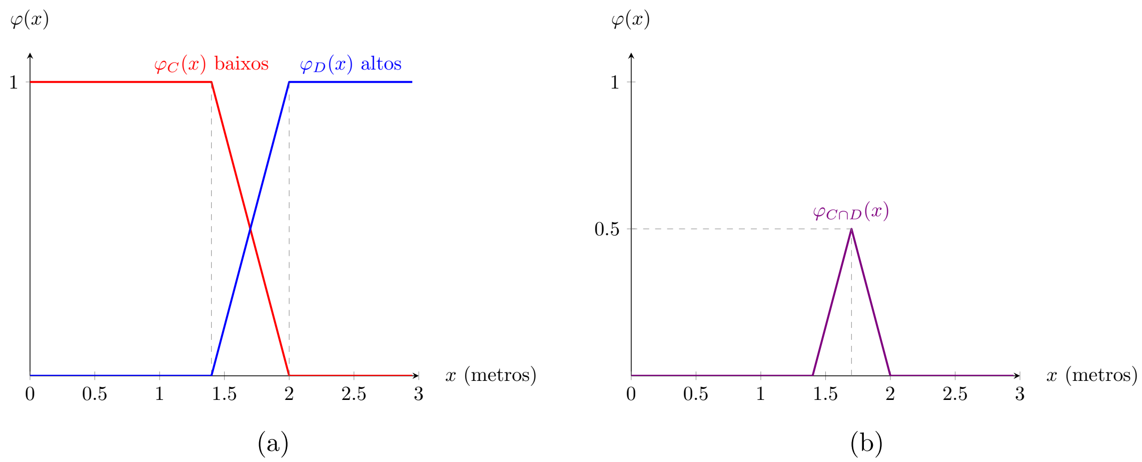


Figura 3.19: (a) Representação dos conjuntos fuzzy dos baixos e dos altos; (b) Intersecção dos conjuntos das pessoas de estatura baixa e alta.

Deste modo, com a Figura 3.19 tem-se a função de pertinência

$$\varphi_{C\cap D}(x) = \begin{cases} \frac{x-1,4}{0,6} & , \text{ se } x \in [1,4;1,7] \\ \frac{2-x}{0,6} & , \text{ se } x \in (1,7;2] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

Observe que de acordo com a Figura 3.19 (b), as pessoas que estão no intervalo $[1,4;2]$ são classificadas como baixa e alta de forma simultânea, ou seja, nem muito alta, nem baixa, e desta maneira uma pessoa com $1,7$ m seria a de maior pertinência quando se busca a intersecção dos conjuntos.

Proposição 3.22. *Sejam os subconjuntos fuzzy A, B e C do conjunto fuzzy U. Os subconjuntos fuzzy satisfazem as seguintes propriedades*

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $\varnothing \subseteq A \subseteq U$
4. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
7. $A \cup A = A$
8. $A \cap A = A$
9. $\varnothing \cup A = A$
10. $U \cap A = A$
11. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
12. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
13. $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$ e $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$ (Leis de DeMorgan)

Demonstração. [12]
1. Utilizando a Definição 3.11

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} = \max\{\varphi_B(x); \varphi_A(x)\} = \varphi_{B\cup A}(x).$$

Portanto $A \cup B = B \cup A$.
2. Da Definição 3.13 tem-se

$$\varphi_{A\cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} = \min\{\varphi_B(x); \varphi_A(x)\} = \varphi_{B\cap A}(x).$$

Assim $A \cap B = B \cap A$.
3. Sabemos que $\varphi_{\varnothing}(x) = 0$ e $\varphi_U(x) = 1$ para todo $x \in U$. Da Definição 3.5 tem-se que $\varphi_A : U \to [0; 1]$ e assim

$$\begin{aligned} &0 \le \varphi_A(x) \le 1 \\ \Rightarrow\ &\varphi_{\varnothing}(x) \le \varphi_A(x) \le \varphi_U(x). \end{aligned}$$

Logo, $\varnothing \subseteq A \subseteq U$.
4. Do fato que $A \subseteq B$ tem-se que $\varphi_A(x) \le \varphi_B(x)$ para todo $x \in U$, e de $B \subseteq C$ tem-se que $\varphi_B(x) \le \varphi_C(x)$ para todo $x \in U$, então, (por transitividade) tem-se que

$$\begin{aligned} &\varphi_A(x) \le \varphi_B(x) \le \varphi_C(x) \\ \Rightarrow\ &\varphi_A(x) \le \varphi_C(x). \end{aligned}$$

Portanto, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.
5. Pela Definição 3.11 pode escrever

$$\varphi_{A\cup(B\cup C)}(x) = \max\{\varphi_A(x); \varphi_{B\cup C}(x)\} = \max\{\varphi_A(x); \max\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\}\}.$$

E também

$$\varphi_{(A\cup B)\cup C}(x) = \max\{\varphi_{A\cup B}(x); \varphi_C(x)\} = \max\{\max\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}; \varphi_C(x)\}.$$

Devemos então considerar os seis possíveis casos:

a) $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_C(x)$

b) $\varphi_A(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_B(x)$

c) $\varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_C(x)$

d) $\varphi_B(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_A(x)$

e) $\varphi_C(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$

f) $\varphi_C(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$

Resolvendo para o caso a)

$$\begin{aligned} &\varphi_{A\cup(B\cup C)}(x) = \max\{\varphi_A(x); \max\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\}\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{A\cup(B\cup C)}(x) = \max\{\varphi_A(x); \varphi_C(x)\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{A\cup(B\cup C)}(x) = \varphi_C(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

E tem-se também

$$\begin{aligned} &\varphi_{(A\cup B)\cup C}(x) = \max\{\max\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}; \varphi_C(x)\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{(A\cup B)\cup C}(x) = \max\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{(A\cup B)\cup C}(x) = \varphi_C(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Da Equação (3.1) e Equação (3.2) tem-se

$$\begin{aligned} &\varphi_{A\cup(B\cup C)}(x) = \varphi_C(x) = \varphi_{(A\cup B)\cup C}(x) \\ \Rightarrow\ &\varphi_{A\cup(B\cup C)}(x) = \varphi_{(A\cup B)\cup C}(x). \end{aligned}$$

Note que os demais casos são análogos sempre resultando no conjunto fuzzy de maior pertinência.

Portanto, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
6. Utilizando a Definição 3.13 tem-se

$$\varphi_{A\cap(B\cap C)}(x) = \min\{\varphi_A(x); \varphi_{B\cap C}(x)\} = \min\{\varphi_A(x); \min\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\}\}.$$

E também

$$\varphi_{(A\cap B)\cup C}(x) = \min\{\varphi_{A\cap B}(x); \varphi_C(x)\} = \min\{\min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}; \varphi_C(x)\}.$$

Deve-se considerar os seis casos possíveis vistos em 5 novamente, resolvendo para o caso a) $\varphi_A \leq \varphi_B \leq \varphi_C$

$$\begin{aligned} & \varphi_{A\cap(B\cap C)}(x) = \min\{\varphi_A(x); \min\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\}\} \\ \Rightarrow\ & \varphi_{A\cap(B\cap C)}(x) = \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} \\ \Rightarrow\ & \varphi_{A\cap(B\cap C)}(x) = \varphi_A(x). \end{aligned} \tag{3.3}$$

E tem-se também

$$\begin{aligned} & \varphi_{(A\cap B)\cap C}(x) = \min\{\min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}; \varphi_C(x)\} \\ \Rightarrow\ & \varphi_{(A\cap B)\cap C}(x) = \min\{\varphi_A(x); \varphi_C(x)\} \\ \Rightarrow\ & \varphi_{(A\cap B)\cap C}(x) = \varphi_A(x). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Da Equação (3.3) e Equação (3.4) tem-se

$$\begin{aligned} & \varphi_{A\cap(B\cap C)}(x) = \varphi_A(x) = \varphi_{(A\cap B)\cap C}(x) \\ \Rightarrow\ & \varphi_{A\cap(B\cap C)}(x) = \varphi_{(A\cap B)\cap C}(x). \end{aligned}$$

Note que os demais casos são análogos sempre resultando no conjunto fuzzy de menor pertinência.

Portanto, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

7. Da Definição 3.11 podemos escrever

$$\varphi_{A\cup A}(x) = \max\{\varphi_A(x); \varphi_A(x)\} = \varphi_A(x).$$

Assim, $A \cup A = A$.

8. Da Definição 3.13 podemos escrever

$$\varphi_{A\cap A}(x) = \min\{\varphi_A(x); \varphi_A(x)\} = \varphi_A(x).$$

Assim, $A \cap A = A$.

9. Da Definição 3.11 e do fato que $\varphi_\varnothing(x) = 0$ para todo $x \in U$ podemos escrever

$$\varphi_{\varnothing\cup A}(x) = \max\{\varphi_\varnothing(x); \varphi_A(x)\} = \max\{0; \varphi_A(x)\} = \varphi_A(x).$$

Assim, $\varnothing \cup A = A$.

10. Da Definição 3.13 e do fato que $\varphi_U(x) = 1$ podemos escrever

$$\varphi_{U\cap A}(x) = \min\{\varphi_U(x); \varphi_A(x)\} = \min\{1; \varphi_A(x)\} = \varphi_A(x).$$

Assim, $U \cap A = A$.

11. Pela Definição 3.11 e Definição 3.13 podemos escrever

$$\begin{aligned} & \varphi_{A\cup(B\cap C)}(x) = \max\{\varphi_A(x); \varphi_{B\cap C}(x)\} \\ \Rightarrow\ & \varphi_{A\cup(B\cap C)}(x) = \max\{\varphi_A(x); \min\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\}\}. \end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned} & \varphi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x) = \min\{\varphi_{A\cup B}(x); \varphi_{A\cup C}(x)\} \\ \Rightarrow\ & \varphi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x) = \min\{\max\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}; \max\{\varphi_A(x); \varphi_C(x)\}\}. \end{aligned}$$

Novamente devemos considerar os seis casos possíveis vistos em 5, resolvendo para o caso a) $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_C(x)$

$$\begin{aligned} &\varphi_{A\cup(B\cap C)}(x) = \max\{\varphi_A(x); \min\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\}\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{A\cup(B\cap C)}(x) = \max\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{A\cup(B\cap C)}(x) = \varphi_B(x). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Consequentemente também tem-se

$$\begin{aligned} &\varphi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x) = \min\{\max\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}; \max\{\varphi_A(x); \varphi_C(x)\}\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x) = \min\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x) = \varphi_B(x). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Da Equação (3.5) e Equação (3.6) tem-se

$$\begin{aligned} &\varphi_{A\cup(B\cap C)}(x) = \varphi_B(x) = \varphi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x) \\ \Rightarrow\ &\varphi_{A\cup(B\cap C)}(x) = \varphi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x). \end{aligned}$$

Note que os demais casos são análogos, portanto $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

12. Utilizando a Definição 3.11 e a Definição 3.13 tem-se

$$\begin{aligned} &\varphi_{A\cap(B\cup C)}(x) = \min\{\varphi_A(x); \varphi_{B\cup C}(x)\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{A\cap(B\cup C)}(x) = \min\{\varphi_A(x); \max\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\}\}. \end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned} &\varphi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x) = \max\{\varphi_{A\cup B}(x); \varphi_{A\cup C}(x)\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x) = \max\{\min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}; \min\{\varphi_A(x); \varphi_C(x)\}\}. \end{aligned}$$

Devemos considerar os seis casos possíveis vistos em 5, resolvendo para o caso a) $\varphi_A \leq \varphi_B \leq \varphi_C$

$$\begin{aligned} &\varphi_{A\cap(B\cup C)}(x) = \min\{\varphi_A(x); \max\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\}\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{A\cap(B\cup C)}(x) = \min\{\varphi_A(x); \varphi_C(x)\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{A\cap(B\cup C)}(x) = \varphi_A(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Também tem-se

$$\begin{aligned} &\varphi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x) = \max\{\min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}; \min\{\varphi_A(x); \varphi_C(x)\}\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x) = \max\{\varphi_A(x); \varphi_A(x)\} \\ \Rightarrow\ &\varphi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x) = \varphi_A(x). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Da Equação (3.7) e Equação (3.8) tem-se

$$\begin{aligned} &\varphi_{A\cap(B\cup C)}(x) = \varphi_A(x) = \varphi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x) \\ \Rightarrow\ &\varphi_{A\cap(B\cup C)}(x) = \varphi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x). \end{aligned}$$

Sendo os demais casos são análogos, tem-se $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

13. Para quaisquer funções com valores reais f e g, tem-se [13]

$$\min[f(x); g(x))] = \frac{1}{2}[f(x) + g(x)- \mid f(x) - g(x)],$$
$$\max[f(x); g(x))] = \frac{1}{2}[f(x) + g(x)+ \mid f(x) - g(x) \mid].$$

Deste modo

$$\begin{aligned}
&\varphi_{A^{\complement}\cap B^{\complement}} = \min\{\varphi_{A^{\complement}}(x); \varphi_{B^{\complement}}(x)\}\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cap B^{\complement}} = \min\{1 - \varphi_A(x); 1 - \varphi_B(x)\}\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cap B^{\complement}} = \frac{1}{2}[(1 - \varphi_A(x)) + (1 - \varphi_B(x))- \mid (1 - \varphi_A(x)) - (1 - \varphi_B(x)) \mid]\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cap B^{\complement}} = \frac{1}{2}[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x)+ \mid -\varphi_A(x) + \varphi_B(x) \mid)]\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cap B^{\complement}} = 1 - \frac{1}{2}[\varphi_A(x) + \varphi_B(x)+ \mid -(\varphi_A(x) - \varphi_B(x)) \mid]\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cap B^{\complement}} = 1 - \frac{1}{2}[(\varphi_A(x) + \varphi_B(x)+ \mid \varphi_A(x) - \varphi_B(x) \mid)]\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cap B^{\complement}} = 1 - \max\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cap B^{\complement}} = 1 - \varphi_{A\cup B}(x)\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cap B^{\complement}} = \varphi_{(A\cup B)^{\complement}}(x).
\end{aligned}$$

Logo, $A^{\complement} \cap B^{\complement} = (A \cup B)^{\complement}$.
Tem-se também que

$$\begin{aligned}
&\varphi_{A^{\complement}\cup B^{\complement}} = \max\{\varphi_{A^{\complement}}(x); \varphi_{B^{\complement}}(x)\}\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cup B^{\complement}} = \max\{1 - \varphi_A(x); 1 - \varphi_B(x)\}\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cup B^{\complement}} = \frac{1}{2}[(1 - \varphi_A(x)) + (1 - \varphi_B(x))+ \mid (1 - \varphi_A(x)) - (1 - \varphi_B(x)) \mid]\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cup B^{\complement}} = \frac{1}{2}[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x)- \mid -\varphi_A(x) + \varphi_B(x) \mid)]\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cup B^{\complement}} = 1 - \frac{1}{2}[\varphi_A(x) + \varphi_B(x)- \mid -(\varphi_A(x) - \varphi_B(x)) \mid]\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cup B^{\complement}} = 1 - \frac{1}{2}[(\varphi_A(x) + \varphi_B(x)- \mid \varphi_A(x) - \varphi_B(x) \mid)]\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cup B^{\complement}} = 1 - \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cup B^{\complement}} = 1 - \varphi_{A\cap B}(x)\\
\Rightarrow\ &\varphi_{A^{\complement}\cup B^{\complement}} = \varphi_{(A\cap B)^{\complement}}(x).
\end{aligned}$$

Assim, $A^{\complement} \cup B^{\complement} = (A \cap B)^{\complement}$, mostrando portanto a validade das **Leis de DeMorgan**.
$\square$

3.3 O conceito de α-nível

Considere um subconjunto fuzzy A de U, é possível classificar seus elementos de acordo com o grau de pertinência desejado.

Sendo os graus de pertinência indicados por α, com $0 < \alpha \leq 1$, podemos dizer que um elemento $x \in U$ está em um nível se seu grau de pertinência for maior que um certo nível α.

Tomando o Exemplo 3.12, suponha que para um determinado estudo um modelador se interesse apenas por valores de x que possuam um grau de pertinência $\varphi(x) \geq 0,5$. Deste modo é feito um corte horizontal na altura $\alpha = 0,5$ e considera-se apenas os valores de x que possuam tal propriedade, denotado por $[A]^{0,5}$. Veja a Figura 3.20.

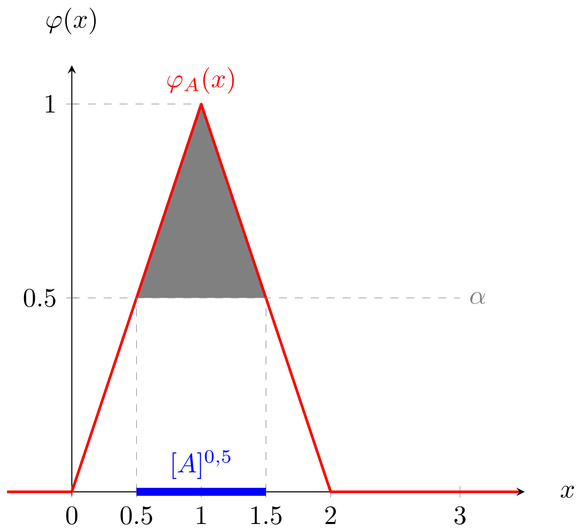


Figura 3.20: Exemplo de representação de um α-nível.

Deste modo, podemos generalizar o conjunto clássico de tais elementos.

Definição 3.23 (α-nível)**.** Seja A um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0;1]$. O α-nível de A é o subconjunto clássico de U definido por

$$\begin{aligned} [A]^{\alpha} = &\{x \in U \colon \varphi_A(x) \geq \alpha\} \text{ com } 0 < \alpha \leq 1, \\ \text{e } [A]^{0} = &\overline{\{x \in U \colon \varphi_A(x) > 0\}}. \end{aligned}$$

em que a notação $\overline{Y}$ representa o fecho de um subconjunto Y.

Observação 3.24. Note que para 0-nível a Definição 3.23 foi estabelecida de maneira diferente que para valores de $\alpha \in (0,1]$ para que não se tenha todo o conjunto universo U como solução. Algumas literaturas definem também

$$[A]^0 = \overline{\text{ supp } (A)}.$$

Para o caso acima, $[A]^0$ é definido pelo menor subconjunto clássico fechado de U que contém o suporte de A.

É importante deixar claro que do modo como foi definido o 0-nível tem-se consistência apenas se U for um espaço topológico. Para definições de espaços topológicos consulte [14].

A Figura 3.21 generaliza a representação de um α-nível.

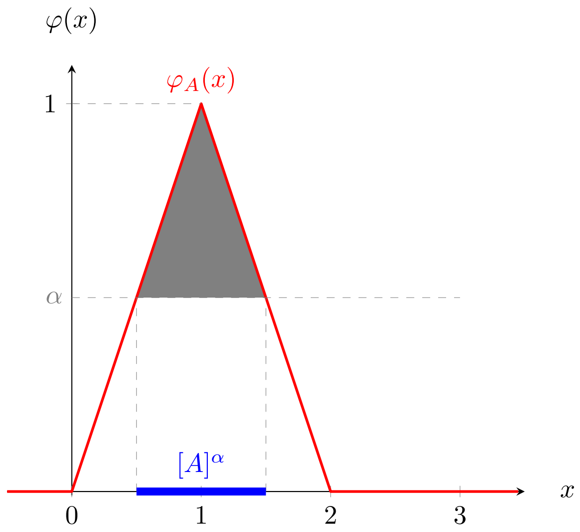


Figura 3.21: Representação geral de um α-nível.

Exemplo 3.25. Considere os subconjuntos fuzzy A e B do Exemplo 3.12

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \in [0;1] \\ 2-x & , \text{ se } x \in (1;2] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi_B(x) = \begin{cases} x-1 & , \text{ se } x \in [1;2] \\ 3-x & , \text{ se } x \in (2;3] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

Determina-se os α-níveis de A utilizando a Definição 3.23, assim $\varphi_A(x) \geq \alpha$ com $0 < \alpha \leq 1$, logo:

i) Se $x \in [0;1]$ tem-se

$$\begin{aligned} &\varphi_A(x) \geq \alpha \\ &\Rightarrow x \geq \alpha. \end{aligned} \tag{3.9}$$

ii) Se $x \in (1;2]$,

$$\begin{aligned} &\varphi_A(x) \geq \alpha \\ &\Rightarrow 2-x \geq \alpha \\ &\Rightarrow -x \geq \alpha - 2 \\ &\Rightarrow x \leq -\alpha + 2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Comparando as Equações (3.9) e (3.10)

$$\begin{aligned} &\alpha \leq x \leq -\alpha + 2 \\ &\Rightarrow x \in [\alpha; -\alpha + 2]. \end{aligned}$$

Escreve-se,

$$[A]^\alpha = [\alpha; -\alpha + 2]. \tag{3.11}$$

A Figura 3.22 apresenta a representação gráfica.

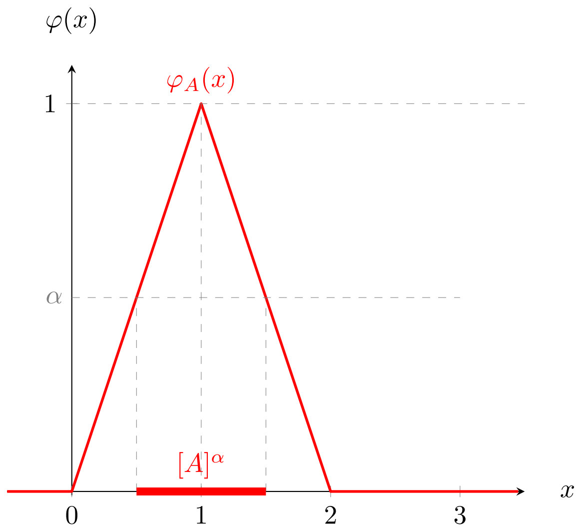


Figura 3.22: Representação gráfica do α-nível do conjunto fuzzy A.

Note que dado um valor para α é possível determinar o intervalo procurado, por exemplo, se $\alpha = 0,5$ tem-se

$$[A]^{0,5} = [0,5; 1,5],$$

ou seja, todos os α-níveis de valores maiores do que ou iguais a $0,5$ estão contidos neste intervalo.

Podemos determinar os α-níveis de B de maneira análoga, utilizando novamente a Definição 3.23. Assim

i) Se $x \in [1; 2]$

$$\begin{aligned} \varphi_B(x) &\geq \alpha \\ \Rightarrow x - 1 &\geq \alpha \\ \Rightarrow x &\geq \alpha + 1. \end{aligned} \tag{3.12}$$

ii) Se $x \in (2; 3]$

$$\begin{aligned} \varphi_B(x) &\geq \alpha \\ \Rightarrow 3 - x &\geq \alpha \\ \Rightarrow -x &\geq \alpha - 3 \\ \Rightarrow x &\leq -\alpha + 3. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Comparando as Equações (3.12) e (3.13)

$$\begin{aligned} \alpha + 1 \leq &x \leq -\alpha + 3 \\ \Rightarrow &x \in [\alpha + 1; -\alpha + 3]. \end{aligned}$$

Logo

$$[B]^\alpha = [\alpha + 1; -\alpha + 3]. \tag{3.14}$$

A representação gráfica é apresentada na Figura 3.23.

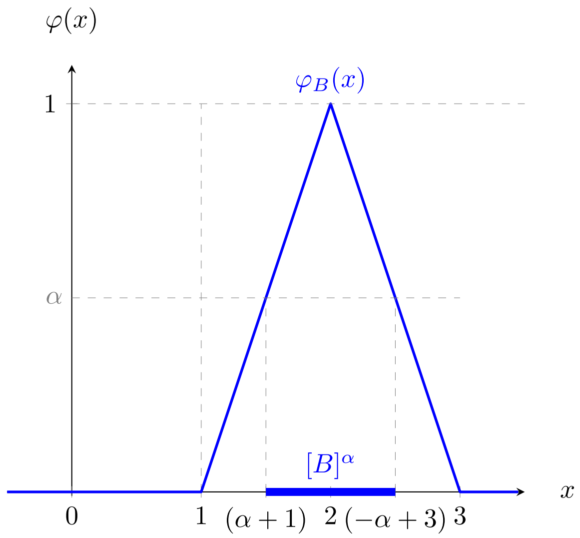


Figura 3.23: Representação gráfica do α-nível do conjunto fuzzy B.

Observe que para $\alpha = 0,3$ tem-se

$$[B]^{0,3} = [1,3; 2,7].$$

O Exemplo 3.26 apresenta o caso em que $[A]^0 = U$.

Exemplo 3.26. Determinemos os α-níveis do subconjunto fuzzy A de $U = [0;1]$ com função de pertinência

$$\varphi_A(x) = 4(x - x^2).$$

Podemos reescrever a função de pertinência como

$$\varphi_A(x) = -4x^2 + 4x. \tag{3.15}$$

E utilizando a Definição 3.23 tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_A(x) &\geq \alpha \\ \Rightarrow -4x^2 + 4x &\geq \alpha \\ \Rightarrow -x^2 + x &\geq \frac{\alpha}{4} \\ \Rightarrow -x^2 + x - \frac{\alpha}{4} &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Determinando as raízes da Equação (3.16) tem-se

$$\begin{aligned} x =& \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot (-\alpha/4)}}{2 \cdot (-1)} \\ \Rightarrow x =& \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha}\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Para $\alpha = 0$ tem-se

$$\begin{aligned} x =& \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1}\right) \\ \Rightarrow x \in& \{0; 1\}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Determinando as coordenadas do vértice da Equação (3.15) para $\alpha = 0$ tem-se

$$x_V = \frac{-4}{2 \cdot (-4)} = \frac{1}{2}, \tag{3.19}$$

e

$$y_V = \frac{-16}{4 \cdot (-4)} = 1. \tag{3.20}$$

Logo das Equações (3.19) e (3.20) tem-se a coordenada do vértice $V = (1/2; 1)$.

Como o termo quadrático da Equação (3.15) é menor do que zero, a concavidade do gráfico será para baixo, da Equação (3.18) tem-se as raízes e das Equações (3.19) e (3.20) tem-se o vértice da parábola. A Figura 3.24 mostra a solução.

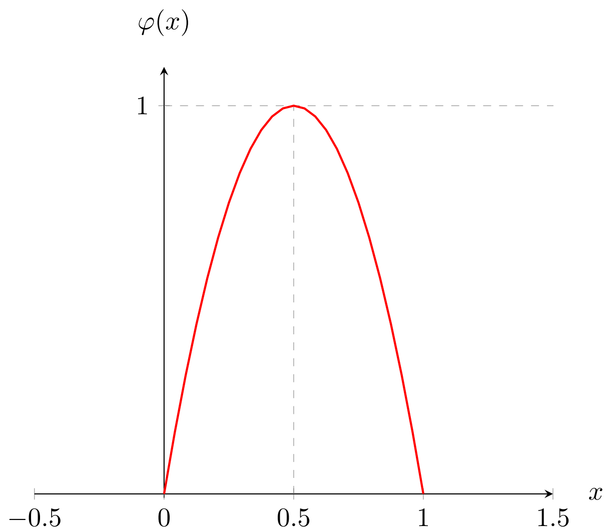


Figura 3.24: Representação gráfica de φ_A quadrática.

Deste modo, das Equações (3.16) e (3.17) e da solução da Equação (3.17) tem-se

$$\frac{1 - \sqrt{1-\alpha}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{1-\alpha}}{2}.$$

Logo

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1 - \sqrt{1-\alpha}}{2}; \frac{1 + \sqrt{1-\alpha}}{2}\right]. \tag{3.21}$$

A representação gráfica é apresentada na Figura 3.25.

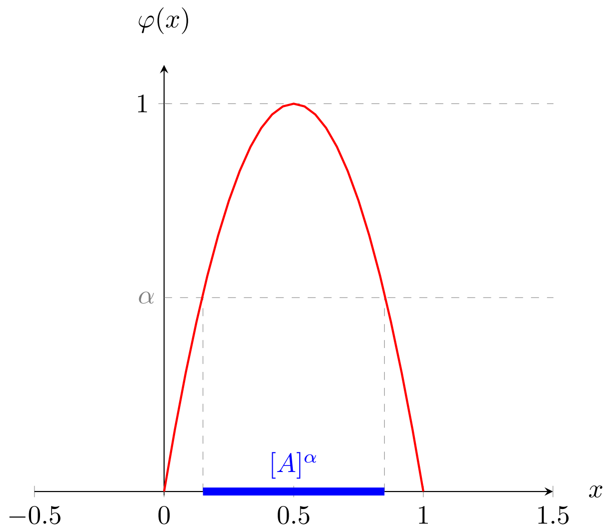


Figura 3.25: Representação gráfica do α-nível para uma função quadrática.

Deste modo, utilizando o resultado da Equação (3.21) para $\alpha = 0,36$ tem-se

$$\begin{aligned}
[A]^{0,36} &= \left[\frac{1-\sqrt{1-0,36}}{2}; \frac{1+\sqrt{1-0,36}}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^{0,36} &= \left[\frac{1-\sqrt{0,64}}{2}; \frac{1+\sqrt{0,64}}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^{0,36} &= \left[\frac{1-0,8}{2}; \frac{1+0,8}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^{0,36} &= \left[\frac{0,2}{2}; \frac{1,8}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^{0,36} &= [0,1; 0,9].
\end{aligned}$$

Observe que neste exemplo considerando $\alpha = 0$ tem-se

$$[A]^0 = \overline{\text{supp }(A)} = \overline{(0;1)} = [0;1] = U.$$

Logo, $[A]^0 = U$.

Proposição 3.27. *Seja A um subconjunto fuzzy de U. Assim para todo α e β tal que $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ tem-se*

$$[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha.$$

Demonstração. Separando em dois casos:

i) Primeiramente supor que $\alpha > 0$. Se $x \in [A]^\beta$ da Definição 3.23 a função de pertinência deve ser maior que o α-nível, ou seja, $\varphi_A(x) \geq \beta$.

   Por hipótese tem-se $\alpha \leq \beta$, então é possível escrever

$$\alpha \leq \beta \leq \varphi_A(x).$$

   Assim, $\varphi_A(x) \geq \alpha$ o que implica que $x \in [A]^\alpha$.

ii) Supor que $\alpha = 0$.

i') Se $\beta = 0$ então o resultado segue de imediato já que por definição os suportes são iguais.

ii') Se $\beta > 0$, novamente utilizando a Definição 3.23 tem-se que $x \in [A]^\beta$, assim $\varphi_A(x) \geq \beta > 0$. Logo, em particular, $\varphi_A(x) > 0$, e assim, x pertence ao suporte de A, e consequentemente x pertence ao zero-nível de A pois supp (A) está contido em $\overline{\text{supp }(A)} = [A]^0$. Portanto, segue que $[A]^\beta$ está contido em $[A]^0$.

Assim, $\varphi_A(x) \geq 0$, lembre-se de que para $\alpha = 0$ tem-se $[A]^0 = \overline{\{x \in U \colon \varphi_A(x) > 0\}}$ ou $[A]^0 = \overline{\text{supp }(A)}$, ou seja, $x \in [A]^\beta$.

Portanto de i) e ii') tem-se que $[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$. □

A Figura 3.26 ilustra a Proposição 3.27.

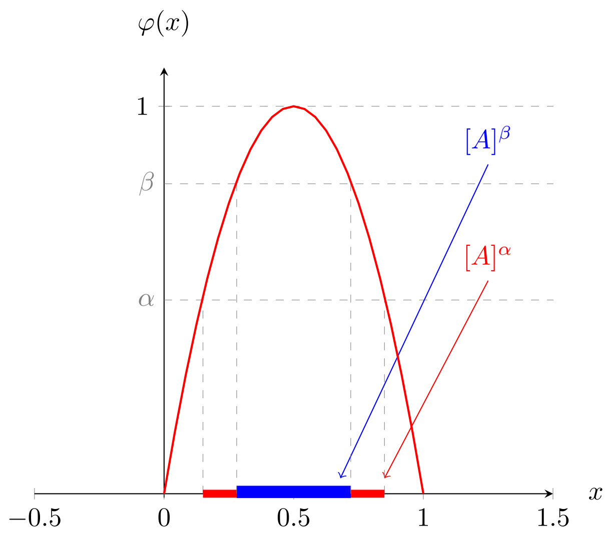


Figura 3.26: Representação gráfica da inclusão de α-níveis.

Proposição 3.28. *Para o caso em que A for um conjunto clássico, tem-se que para todo $\alpha \in (0; 1]$ implica que $[A]^\alpha = A$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $x \in [A]^\alpha$ então $\chi_A(x) \geq \alpha > 0$, ou seja $\chi_A(x) > 0$ e como A é um conjunto clássico, $\chi_A(x) = 1$ o que implica que $x \in A$, para todo $\alpha \in [0; 1]$.

($\Leftarrow$) Se $x \in A$, como tem-se um conjunto clássico podemos escrever $\chi_A = 1$, o que implica que $x \in [A]^\alpha$.

Portanto $[A]^\alpha = A$. □

Exemplo 3.29. Considere conjunto clássico $A = [1; 5]$ do Exemplo 3.2. Na Figura 3.27 nota-se que $[A]^\alpha = A$ para todo $\alpha \in (0; 1]$.

$$\chi_{[1,5]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ , se } x \in [1; 5] \\ 0 \text{ , se } x \notin [1; 5] \end{cases} ,$$

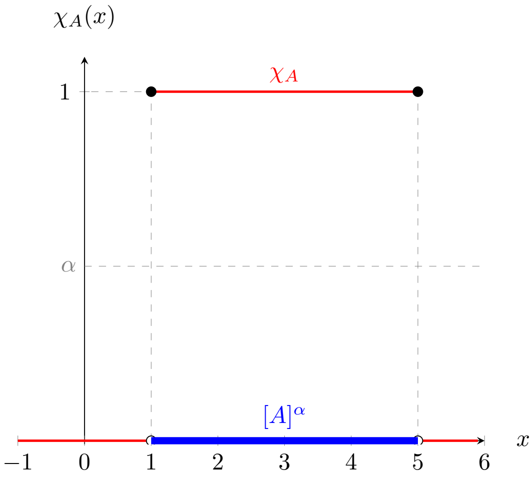


Figura 3.27: Representação do α-nível de um conjunto clássico.

Teorema 3.30. *Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U. Então $A = B$ se, e somente se, $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) [15] Supondo que $A = B$ tem-se então $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$ para todo $x \in U$, e utilizando a Definição 3.23 tem-se

i) Para $\alpha > 0$,

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} = \{x \in U : \varphi_B(x) \geq \alpha\} = [B]^\alpha$$
$$\Rightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha.$$

ii) Para $\alpha = 0$, tem-se

$$[A]^0 = \overline{\{x \in U : \varphi_A(x) \geq 0\}} = \overline{\{x \in U : \varphi_B(x) \geq 0\}} = [B]^0$$
$$\Rightarrow [A]^0 = [B]^0.$$

Assim, por i) e ii) tem-se $[A]^\alpha = [B]^\alpha$.

($\Leftarrow$) Assumindo $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ suponha por absurdo que $A \neq B$, deste modo, existe algum $x_0 \in U$ tal que $\varphi_A(x_0) \neq \varphi_B(x_0)$. Desta maneira tem-se que $\varphi_A(x_0) < \varphi_B(x_0)$ ou $\varphi_A(x_0) > \varphi_B(x_0)$.

Tomando sem perda de generalidade [2], $\varphi_A(x_0) < \varphi_B(x_0)$, considerando $\varphi_B(x_0) = \alpha$ tem-se $\varphi_A(x_0) < \alpha$. Note que se $x_0 \in [B]^\alpha = [B]^{\varphi_B(x_0)}$ como $\varphi_A(x_0) < \varphi_B(x_0)$ então $x_0 \notin [A]^\alpha = [A]^{\varphi_B(x_0)}$. Deste modo, existe um α-nível $\varphi_B(x_0)$ tal que $[A]^{\varphi_B(x_0)} \neq [B]^{\varphi_B(x_0)}$, ou seja $[A]^\alpha \neq [B]^\alpha$, o que contradiz a hipótese que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$. A Figura 3.28 apresenta uma representação.

Portanto, $A = B$.

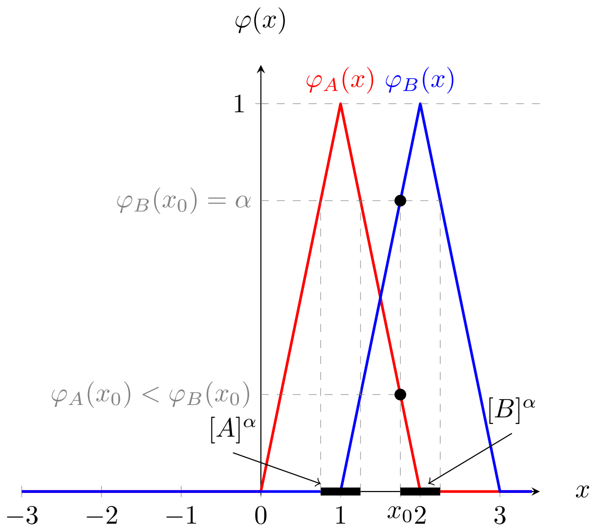


Figura 3.28: Representação da diferença de alfa níveis.

$\square$

Definição 3.31. Um subconjunto fuzzy A é chamado **normal** se todos os seus α-níveis forem não vazios, ou seja, $[A]^1 \neq \varnothing$.

Definição 3.32. O **núcleo** de conjunto fuzzy A é definido pelos elementos que possuem total associação com o conjunto fuzzy A, isto é,

$$\text{Nuc }(A) = [A]^1.$$

Lembre-se que de acordo com a Definição 3.8, o **suporte** de um conjunto fuzzy A é formado pelos elementos que possuem associação não nula com o conjunto.

Definição 3.33. O **diâmetro** ou **largura** de um conjunto fuzzy é definido pelo tamanho de seu $0-$nível, ou seja, $\alpha = 0$, e está associado com a maior incerteza.

Exemplo 3.34. Seja o conjunto fuzzy D com função de pertinência dada por

$$\varphi_D(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \in [0;1] \\ 1 & , \text{ se } x \in (1;3] \\ 4-x & , \text{ se } x \in (3;4] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

A Figura 3.29 apresenta a representação gráfica da função de pertinência $\varphi_D(x)$.

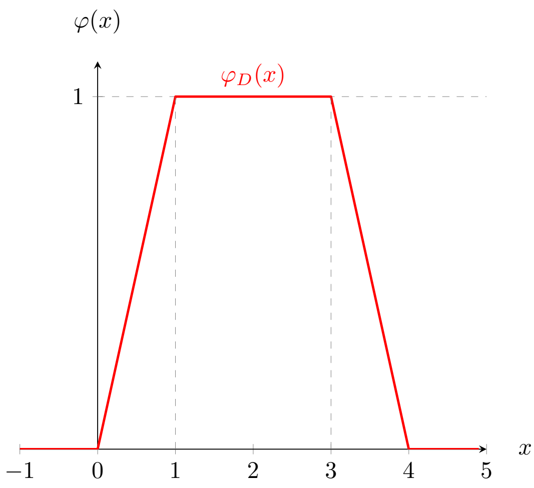


Figura 3.29: Representação do conjunto fuzzy $\varphi_D(x)$.

Utilizando a Figura 3.29 e as Definições 3.8 (Suporte), 3.32 (Núcleo) e 3.33 (Diâmetro), tem-se

$$\text{supp } (D) = (0;4), \;\; \text{Nuc } (D) = [1;3] \text{ e } \;\text{Diam } (D) = 4.$$

Na Figura 3.30 tem-se as representações do suporte, núcleo e diâmetro de $\varphi_D(x)$.

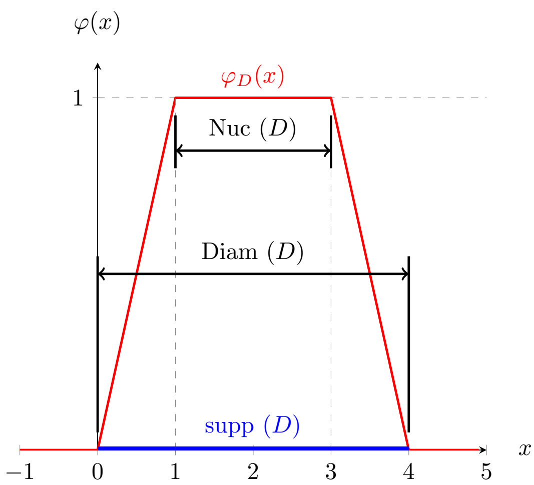


Figura 3.30: Representação do suporte, núcleo e diâmetro conjunto fuzzy $\varphi_D(x)$.

Exemplo 3.35. Tomando os conjuntos fuzzy A e B do Exemplo 3.12, e considerando a união e intersecção, tem-se a Figura 3.31.

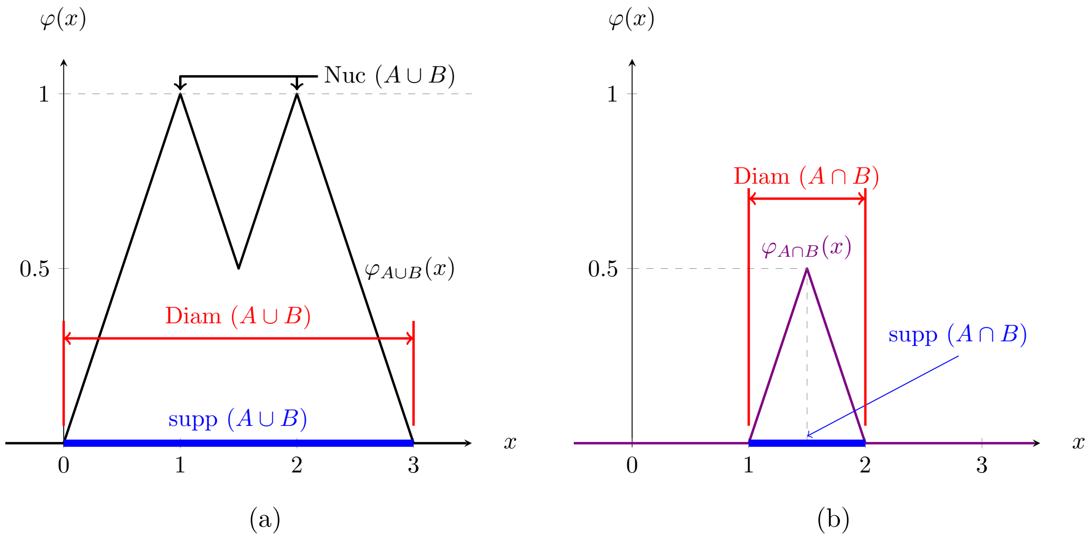


Figura 3.31: (a) Representação da união dos conjuntos fuzzy A e B; (b) Representação da intersecção dos conjuntos fuzzy A e B.

Da Figura 3.31 e das Definições 3.8 (Suporte), 3.32 (Núcleo) e 3.33 (Diâmetro), tem-se

i) Para a união

$$\text{supp } (A \cup B) = (0;3), \; \text{Nuc } (A \cup B) = \{1;2\} \text{ e } \; \text{Diam } (A \cup B) = 3.$$

ii) Para a intersecção

$$\text{supp } (A \cap B) = (1;2), \; \text{Nuc } (A \cap B) = \varnothing \text{ e } \; \text{Diam } (A \cap B) = 1.$$

Os exemplos deste trabalho são apresentados utilizando conjuntos fuzzy convexos. O Exemplo 3.36 é o único em que é apresentado um conjunto não convexo. Para o leitor que deseja se aprofundar na definição deste tipo de conjunto, consulte [2, 3, 19].

Exemplo 3.36. Note que da maneira como a Definição 3.33 (Diâmetro) foi apresentada, para conjuntos como a Figura 3.32 o diâmetro não estaria definido porque a união não é um intervalo. Para casos deste tipo, alguns autores utilizam uma técnica chamada complementação ou envelopamento [16].

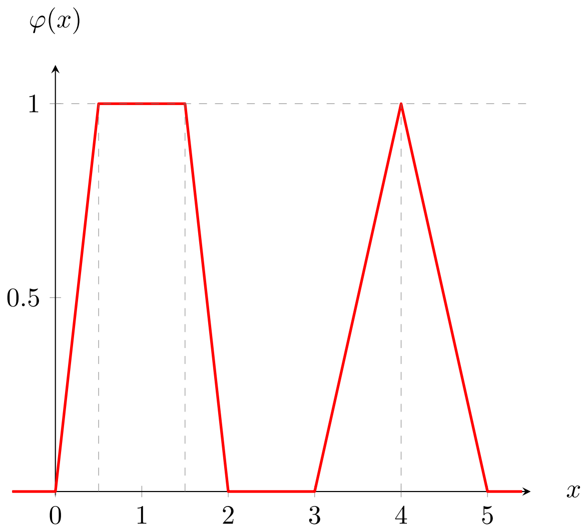


Figura 3.32: Conjunto fuzzy sem diâmetro.

Proposição 3.37 ([15]). *Sejam A e B subconjuntos fuzzy. Então são válidas as seguintes propriedades para os α-níveis:*

1. $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$.
2. $[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$.

Demonstração.
1. Para $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$, tem-se

i) Se $x \in [A \cup B]^\alpha$ tem-se que pelas Definições 3.11 e 3.23 que

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\},$$

ou seja,

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \begin{cases} \varphi_A(x), & \text{se } \varphi_A(x) > \varphi_B(x) \\ \varphi_B(x), & \text{se } \varphi_A(x) < \varphi_B(x) \end{cases}.$$

Deste modo, $\varphi_A(x) \geq \alpha$ ou $\varphi_B(x) \geq \alpha$, então $x \in [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$.

Logo, $[A \cup B]^\alpha \subset [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$.

ii) Se $x \in [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$ utilizando as Definições 3.11 e 3.23, tem-se $x \in [A]^\alpha$ ou $x \in [B]^\alpha$. Logo, $\varphi_A(x) \geq \alpha$ ou $\varphi_B(x) \geq \alpha$. Assim, tem-se $\max\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} \geq \alpha$, então $\varphi_{A\cup B}(x) \geq \alpha$ implicando que $x \in [A \cup B]^\alpha$.

Assim $[A]^\alpha \cup [B]^\alpha \subset [A \cup B]^\alpha$.

Portanto, por i) e ii) tem-se que $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$.

2. No caso em que $A \cap B = \varnothing$ não há nada a se provar. Supondo $A \cap B \neq \varnothing$.

i) Se $x \in [A \cap B]^\alpha$ tem-se que pelas Definições 3.13 e 3.23 que

$$\varphi_{A\cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\},$$

ou seja,

$$\varphi_{A\cap B}(x) = \begin{cases} \varphi_A(x), & \text{se } \varphi_A(x) < \varphi_B(x) \\ \varphi_B(x), & \text{se } \varphi_A(x) > \varphi_B(x) \end{cases} .$$

Deste modo,

$$\varphi_A(x) \geq \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} \geq \alpha \Rightarrow \varphi_A(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in [A]^\alpha,$$

e

$$\varphi_B(x) \geq \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} \geq \alpha \Rightarrow \varphi_B(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in [B]^\alpha.$$

Tem-se que $x \in [A]^\alpha$ e $x \in [B]^\alpha$, assim $x \in [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$

Logo, $[A \cap B]^\alpha \subset [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$.

Se $x \in [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$ utilizando as Definições 3.13 e 3.23, tem-se que $\varphi_A(x) \geq \alpha$ e $\varphi_B(x) \geq \alpha$. Logo,

$$\varphi_{A\cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} \geq \alpha.$$

Deste modo, $x \in [A \cap B]^\alpha$.

Assim $[A]^\alpha \cap [B]^\alpha \subset [A \cap B]^\alpha$.

Portanto, por i) e i) tem-se que $[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$.

□

Exemplo 3.38. Utilizando a união dos conjuntos fuzzy A e B do Exemplo 3.12 nota-se que o α-nível pode ser formado pela união de conjuntos disjuntos. Na Figura 3.33 verifica-se este fato para $\alpha = 0,6$.

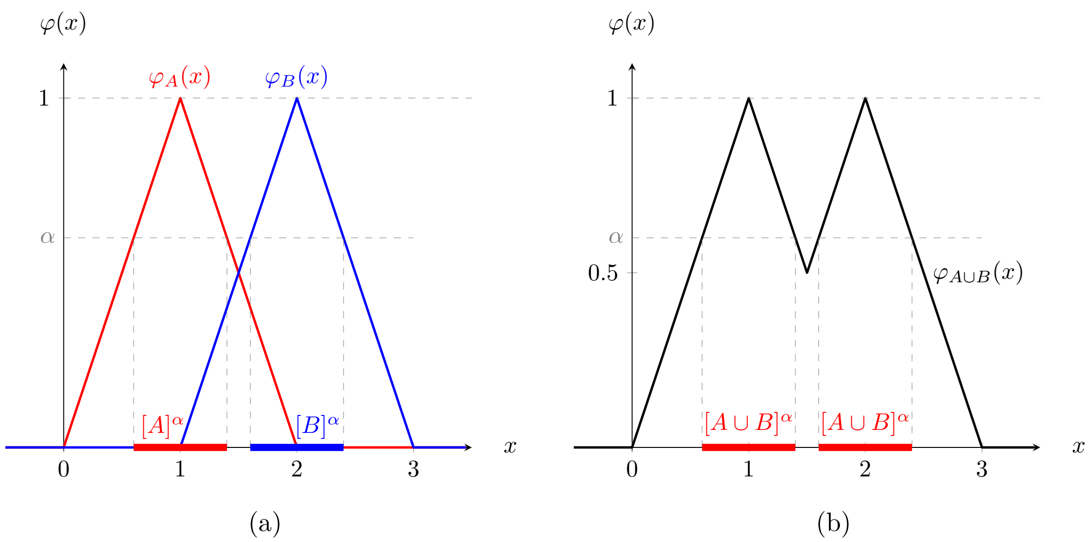


Figura 3.33: (a) Representação dos α-níveis dos conjuntos fuzzy A e B; (b) Representação do α-nível como união disjunta.

Utilizando as Equações (3.11) e (3.14) e considerando $\alpha = 0,6$ tem-se:

$$\begin{aligned} &[A]^\alpha = [\alpha; -\alpha + 2] \\ \Rightarrow\ &[A]^{0,6} = [0,6; -0,6 + 2] \\ \Rightarrow\ &[A]^{0,6} = [0,6; 1,4], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[B]^{\alpha} =& [\alpha+1; -\alpha+3] \\
\Rightarrow [B]^{0,6} =& [0,6+1; -0,6+3] \\
\Rightarrow [B]^{0,6} =& [1,6; 2,4].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[A \cup B]^{0,6} = [0,6; 1,4] \cup [1,6; 2,4].$$

Note também que $[A \cup B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} \cup [B]^{\alpha}$, que está de acordo com a Proposição 3.37.

Exemplo 3.39. Novamente utilizando os conjuntos A e B do Exemplo 3.12, agora para a intersecção como pode-se notar na Figura 3.34.

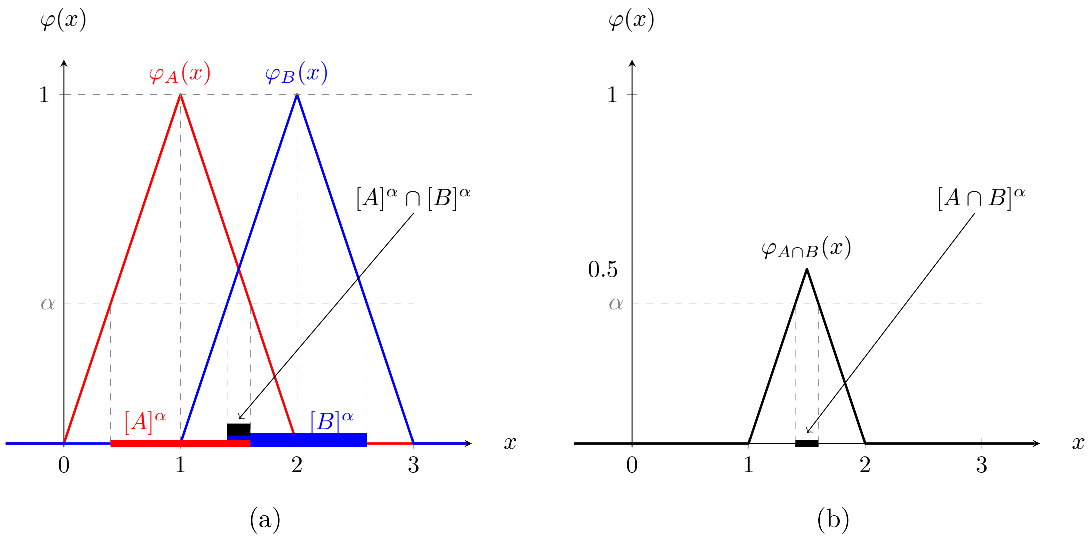


Figura 3.34: (a) Representação dos conjuntos fuzzy A e B e sua intersecção; (b) Representação do α-nível como intersecção.

Considerando $\alpha = 0,4$ e utilizando as Equações (3.11) e (3.14) tem-se

$$\begin{aligned}
[A]^{\alpha} =& [\alpha; -\alpha+2] \\
[A]^{0,4} =& [0,4; -0,4+2] \\
[A]^{0,4} =& [0,4; 1,6].
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[B]^{\alpha} =& [\alpha+1; -\alpha+3] \\
[B]^{0,4} =& [0,4+1; -0,4+3] \\
[B]^{0,4} =& [1,4; 2,6].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[A \cap B]^{0,4} = [0,4; 1,6] \cap [1,4; 2,6] = [1,4; 1,6].$$

Veja que $[A \cap B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} \cap [B]^{\alpha}$, que está de acordo com a Proposição 3.37.

No próximo Capítulo, será apresentado um dos princípios mais importantes na Teoria dos Conjuntos Fuzzy, o princípio da extensão de Zadeh que mostra como aplicar os conjuntos fuzzy utilizando funções.

4 O princípio da extensão de Zadeh

Constantemente estende-se os conceitos da teoria de conjuntos clássicos para a teoria de conjuntos fuzzy, e o método geralmente utilizado foi proposto por Lotfi Asker Zadeh (1921–2017) sendo chamado de **Princípio de Extensão de Zadeh**. De maneira geral pode-se pensar que este princípio leva conceitos matemáticos não fuzzy para conceitos fuzzy. Para mais definições a respeito de funções da teoria clássica, consulte [9, 11].

Uma função clássica, $f\colon A \to B$ é formada por três partes, sendo A o **domínio**, B o **contradomínio** e uma regra ou **lei de formação** que permite associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $f(x) = y \in B$, este por sua vez chamado **imagem**. Escreve-se geralmente $x \mapsto f(x)$ para indicar que f leva x em $f(x)$. A Figura 4.1 apresenta uma representação por diagrama.

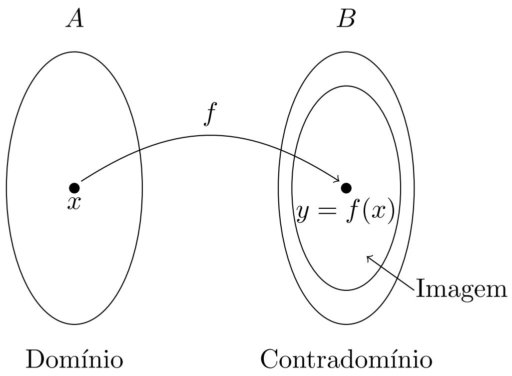


Figura 4.1: Diagrama para uma função clássica.

O **gráfico** de uma função $f\colon A \to B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in A$ [9]. Assim,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B;\ y = f(x)\},$$

tem-se também que duas funções serão **iguais** se, e somente se, possuem o mesmo gráfico.

Uma função $f\colon A \to B$ é chamada **injetiva** quando, dados quaisquer $x, y \in A$, tivermos que $f(x) = f(y)$ implicar $x = y$. Ou o mesmo que para $x, y \in A$, se $x \neq y$ implicar que $f(x) \neq f(y)$ com $f(x), f(y) \in B$.

Já uma função $f\colon A \to B$ chama-se **sobrejetiva** quando para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Quando uma função $f\colon A \to B$ for ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva será chamada **bijetiva**.

Dada uma função $f\colon A \to B$, considerando $Y \subset B$ a **imagem inversa de** Y pela função f é o conjunto $f^{-1}(Y)$, formado por todos os $x \in A$ tais que $f(x) = y \in Y$. Logo

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X;\ f(x) \in Y\}.$$

Tendo em vista a função clássica $f\colon X \to Y$ o **Princípio de Extensão de Zadeh** é descrito da seguinte forma [17]:

i) O grau de pertinência de $f(x) = y \in Y$ (contradomínio), é o mesmo de x (domínio).

ii) Se um $f(x) = y \in Y$ for imagem de mais de um valor x do domínio, o seu grau de pertinência será o maior dos graus dentre os x que levam a $f(x)$.

Antes de realizarmos a definição formal para o princípio da extensão, veja o Exemplo 4.1.

Exemplo 4.1. Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Considere o subconjunto fuzzy $A \subset X$ com função de pertinência

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x-1 & \text{, se } x \in [1;2] \\ 3-x & \text{, se } x \in (2;3] \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}.$$

Analisando a Figura 4.2 e a Tabela 4.1 nota-se que

i) A Tabela 4.1 mostra na primeira coluna os valores de x (domínio); a segunda coluna apresenta o valor da pertinência $\varphi_A(x)$ calculados de acordo com o intervalo de x e os casos descritos no enunciado do Exemplo 4.1; a terceira coluna mostra os valores de $f(x)$; e a última coluna apresenta a pertinência de $f(x)$ tendo em vista que o grau de pertinência de x é o mesmo para $f(x)$.

x	$\varphi_A(x)$	$f(x)$	$\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$
0	0	0	0
1	0	1	0
1,5	0,5	1,5	0,5
2	1	2	1
2,5	0,5	2,5	0,5
3	0	3	0
4	0	4	0

Tabela 4.1: Extensão de Zadeh para $f(x) = x$.

ii) A Figura 4.2 (a) representa a função de pertinência para $\varphi_A(x)$, que representa os números próximos de 2. Nota-se que o quando $x = 2$ tem-se a maior pertinência possível, e a medida que x se afasta do número 2 a pertinência diminui, sendo a menor possível em $x = 1$ e $x = 3$.

iii) Já a Figura 4.2 (b) representa a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, e o domínio foi restrito em $[0; 4,5]$ de maneira ao eixo x da Figura 4.2 (a) ficasse alinhado com o eixo x da Figura 4.2 (b).

iv) Na Figura 4.2 (c) tem-se a função de pertinência para $f(x)$ respeitando o fato de que a pertinência de $f(x)$ é igual a pertinência de x.

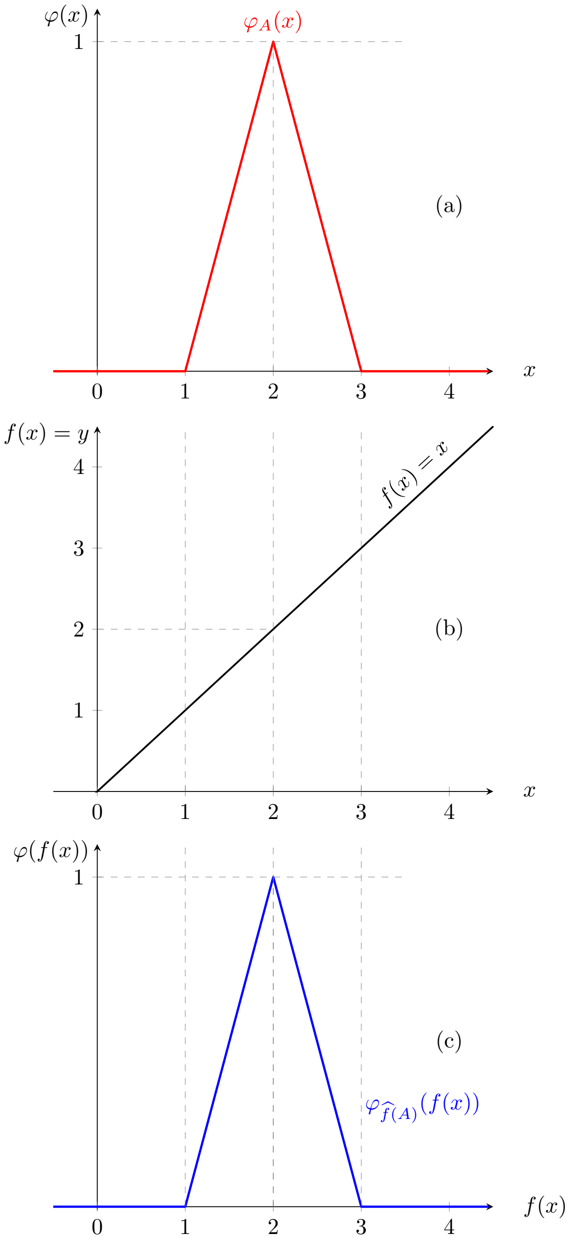


Figura 4.2: Princípio de extensão de Zadeh. (a) Função de pertinência de $\varphi_A(x)$; (b) Representação para $f(x)$; (c) Função de pertinência para $\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$.

A Figura 4.2 não é a forma usual de se apresentar o princípio de extensão nas literaturas sobre matemática fuzzy. Normalmente é apresentado o gráfico de $x \times f(x)$, e a função de pertinência para x, ou seja, $\varphi_A(x)$ fica representada abaixo do eixo horizontal enquanto que a função de pertinência de $f(x)$ denotada como $\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$ fica representada a esquerda do eixo vertical. Veja o Exemplo 4.1 representado da forma usual na Figura 4.3.

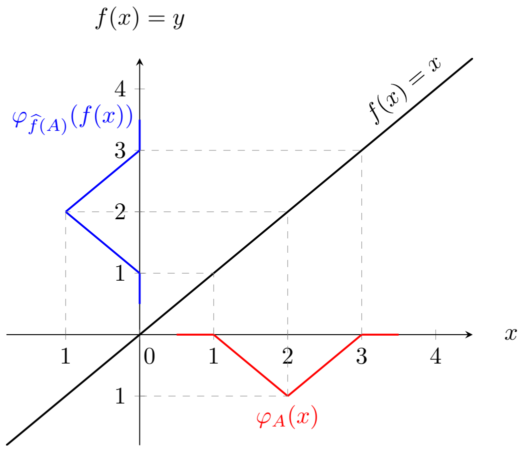


Figura 4.3: Princípio de extensão de Zadeh modo usual.

Definição 4.2 (Princípio de extensão de Zadeh)**.** Seja $f\colon X \to Y$ e A um subconjunto fuzzy de X. A **extensão de Zadeh** de f é a função $\widehat{f}$ que, aplicada a A, fornece o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$ de Y, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\widehat{f}(A)}(Y) = \begin{cases} \sup\limits_{f^{-1}(y)} \varphi_A(x) & , \text{ se } f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & , \text{ se } f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases},$$

com $f^{-1} = \{x; f(x) = y\}$ é a pré imagem de y e o símbolo sup representa o operador supremo.

Observe que se f for bijetiva, a função de pertinência de $\widehat{f}(A)$ é dado por $\varphi_{\widehat{f}(A)}(y) = \sup\limits_{f^{-1}(y)} \varphi_A(x)$, já que dado $y \in Y$ existe um único $x \in X$ com $f(x) = y$, e assim $f^{-1}(z) \neq \varnothing$. Observe que desta unicidade tem-se a garantia de que $\sup_{f^{-1}(y)}\varphi_A(x) = \varphi_A(f^{-1}(y))$ e assim $\varphi_{\widehat{f}(A)}(y) = \varphi_A(f^{-1}(y))$.

Os Exemplos 4.3 e 4.4 apresentam funções bijetivas onde foi aplicado o **Princípio de Extensão de Zadeh**.

Exemplo 4.3. Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$. Considere o subconjunto fuzzy $A \subset X$ com função de pertinência

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x - 1 & , \text{ se } x \in [1;2] \\ 3 - x & , \text{ se } x \in (2;3] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

A Tabela 4.2 apresenta alguns valores para $\varphi_{\widehat{f}(A)}(f(x))$ utilizando o princípio da extensão de Zadeh.

x	$\varphi_A(x)$	$f(x)$	$\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$
0	0	0	0
1	0	2	0
1,5	0,5	3	0,5
2	1	4	1
2,5	0,5	5	0,5
3	0	6	0
4	0	8	0

Tabela 4.2: Extensão de Zadeh para $f(x) = 2x$.

A Figura 4.4 mostra a representação gráfica.

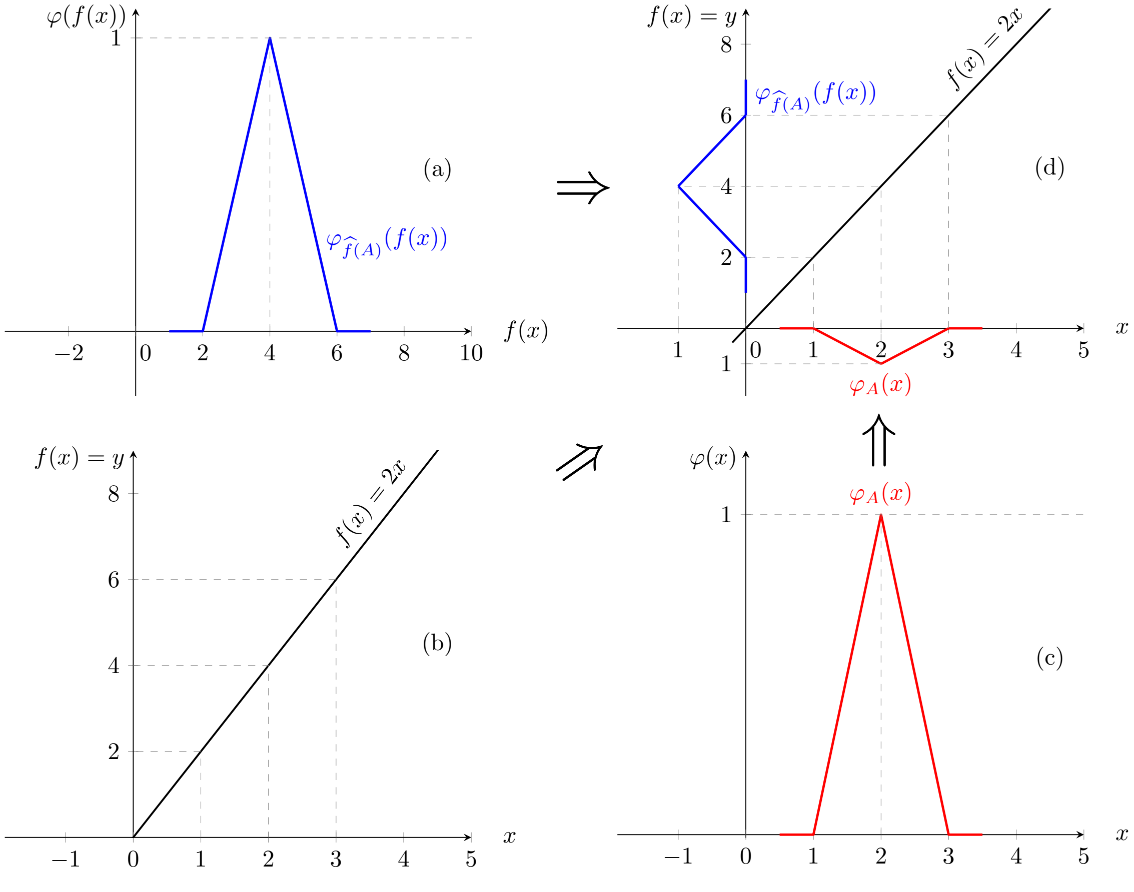


Figura 4.4: Princípio de extensão de Zadeh. (a) Função de pertinência para $\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$; (b) Função $f(x) = 2x$; (c) Função de pertinência de $\varphi_A(x)$; (d) Representação do princípio da extensão de Zadeh.

Exemplo 4.4. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 1$. Considere o subconjunto fuzzy $A \subset X$ com função de pertinência

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x - 1 & , \text{ se } x \in [1; 2] \\ 3 - x & , \text{ se } x \in (2; 3] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

A Tabela 4.3 apresenta alguns valores para $\varphi_{\widehat{f}(A)}(f(x))$ utilizando o princípio da extensão de Zadeh.

x	$\varphi_A(x)$	$f(x)$	$\varphi_{\widehat{f}(A)}(f(x))$
0	0	1	0
1	0	4	0
1,5	0,5	5,5	0,5
2	1	7	1
2,5	0,5	8,5	0,5
3	0	10	0
4	0	13	0

Tabela 4.3: Extensão de Zadeh para $f(x) = 3x + 1$.

A Figura 4.5 mostra a representação gráfica.

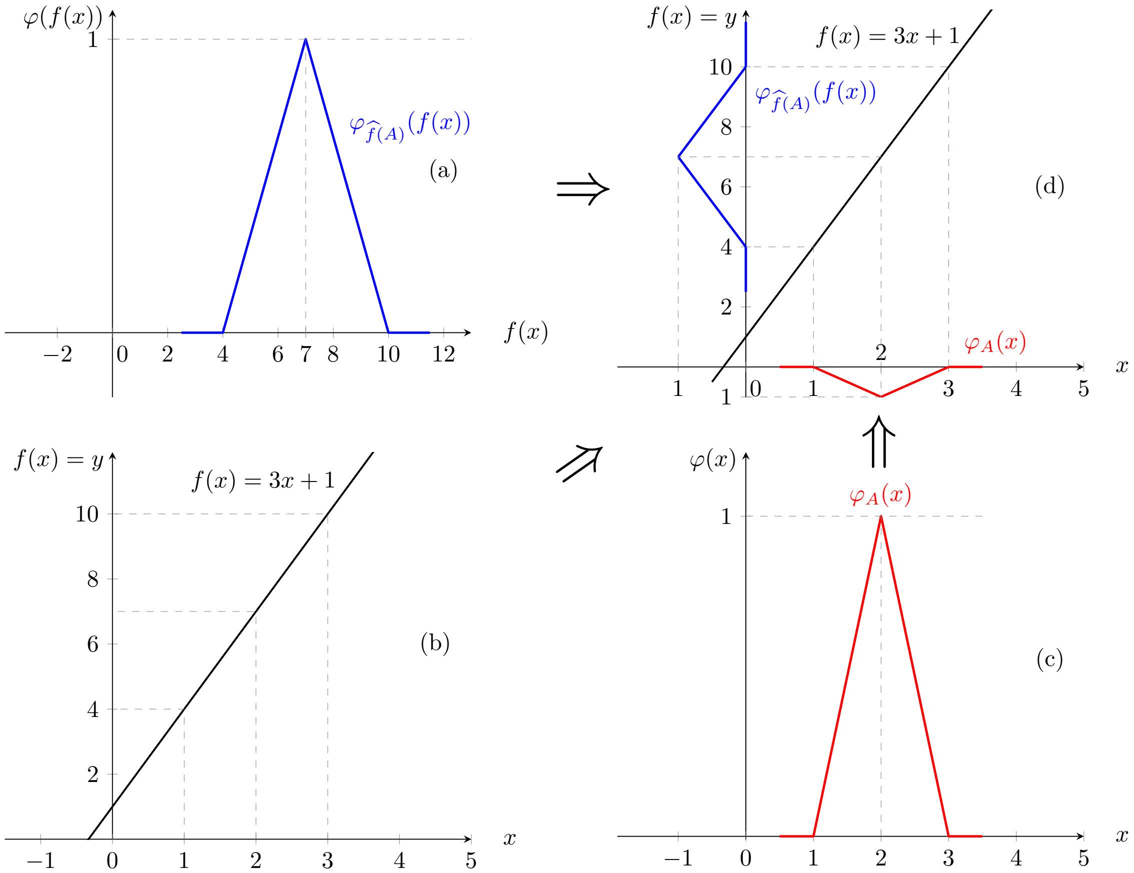


Figura 4.5: Princípio de extensão de Zadeh. (a) Função de pertinência para $\varphi_{\widehat{f}(A)}(f(x))$; (b) Função $f(x) = 3x + 1$; (c) Função de pertinência de $\varphi_A(x)$; (d) Representação do princípio da extensão de Zadeh.

O Exemplo 4.5 apresenta f não bijetiva.

Exemplo 4.5. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Considere o subconjunto fuzzy $A \subset X$ com função de pertinência

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x-1 & , \text{ se } x \in [1;2] \\ 3-x & , \text{ se } x \in (2;3] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

A Tabela 4.4 apresenta alguns valores para $\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$ utilizando o princípio da extensão de Zadeh.

x	$\varphi_A(x)$	$f(x)$	$\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$
0	0	0	0
-1	0	1	0
$-1,5$	0	$2,25$	0
-2	0	4	0
$-2,5$	0	$6,5$	0
-3	0	9	0
-4	0	16	0

x	$\varphi_A(x)$	$f(x)$	$\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$
0	0	0	0
1	0	1	0
$1,5$	$0,5$	$2,25$	$0,5$
2	1	4	1
$2,5$	$0,5$	$6,5$	$0,5$
3	0	9	0
4	0	16	0

Tabela 4.4: Extensão de Zadeh para $f(x) = x^2$.

Note que na tabela da esquerda os valores de $\varphi_A(x)$ são todos iguais a zero, e consequentemente os valores de $\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$ também são zero. Já no lado direito, os valores de $\varphi_A(x)$ assumem valores de acordo com a função de pertinência do conjunto fuzzy A, e deste modo, conserva-se o valor da pertinência para $f(x)$. Como tem-se dois valores diferentes de x que levam a valores iguais para $f(x)$ conforme a Definição 4.2 devemos escolher o $\sup_{f^{-1}(y)} \varphi_A(x)$, ou seja, o maior valor para a pertinência de x no domínio, veja a Figura 4.6.

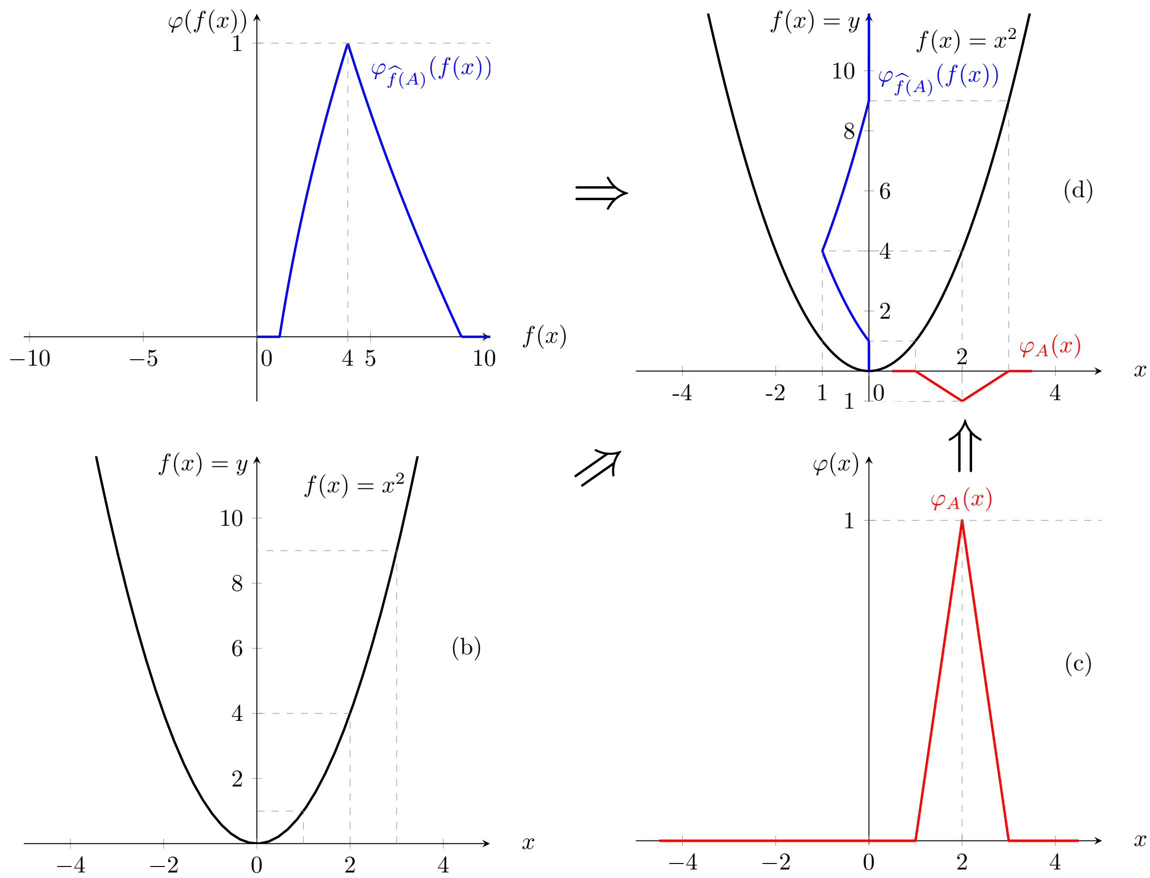


Figura 4.6: Princípio de extensão de Zadeh. (a) Função de pertinência para $\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$; (b) Função $f(x) = x^2$; (c) Função de pertinência de $\varphi_A(x)$; (d) Representação do princípio da extensão de Zadeh.

É importante notar também que diferente dos Exemplos 4.1, 4.3 e 4.4 a pertinência de $\varphi_A(x)$ é da forma triangular abaixo do eixo x, e que a pertinência de $\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$ apresenta uma certa curvatura, que tem a ver com o formato da parábola formada por $f(x) = x^2$.

Os Exemplos 4.6 e 4.7 apresentam exemplos interessantes em que a função de pertinência de $\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$ apresenta formas diferentes da triangular.

Exemplo 4.6. [3] Aplicação do princípio de extensão para o conjunto fuzzy triangular $A = (3; 5; 8)$ com função

$$f(x) = \begin{cases} -0,2(x-5)^2 + 5 & , \text{ se } 0 \leq x \leq 5 \\ 0,2(x-5)^2 + 5 & , \text{ se } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}.$$

De acordo com a forma triangular do conjunto fuzzy A tem-se a função de pertinência

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} (x-3)/2 & , \text{ se } x \in [3; 5] \\ (-x+8)/3 & , \text{ se } x \in (5; 8] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

A Tabela 4.5 apresenta alguns valores “aproximados” para $\varphi_A(x)$ e $\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$ utilizando o princípio de extensão.

x	$\varphi_A(x)$	$f(x)$	$\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$
0	0	0	0
1	0	1.8	0
2	0	3,2	0
3	0	4,2	0
4	0,5	4,8	0,5
5	1	5	1
6	0,66	5,2	0,66
7	0,33	5,8	0,33
8	0	6,8	0
9	0	8,2	0
10	0	10	0

Tabela 4.5: Princípio da extensão.

A Figura 4.7 mostra a representação gráfica.

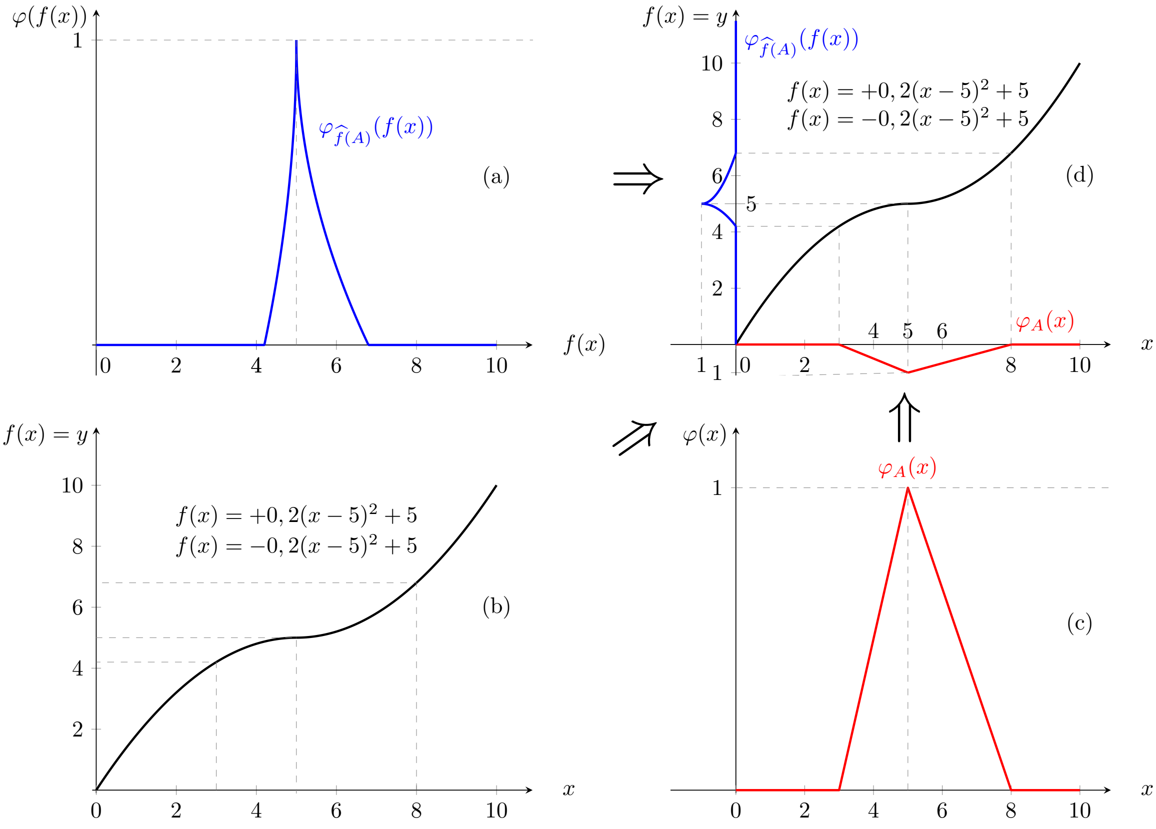


Figura 4.7: Princípio de extensão de Zadeh exemplo; (a) Função de pertinência para $\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$; (b) Função $f(x)$; (c) Função de pertinência de $\varphi_A(x)$; (d) Representação do princípio da extensão de Zadeh.

Exemplo 4.7. [3] Aplicação do princípio de extensão para o conjunto fuzzy triangular $A = (-2; 2; 3)$ com função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com lei de formação $f(x) = x^2$.

De acordo com a forma triangular do conjunto fuzzy A tem-se a função de pertinência

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} (x+2)/4 & , \text{ se } x \in [-2;2] \\ (-x+3) & , \text{ se } x \in (2;3] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

A Tabela 4.6 apresenta alguns valores para $\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$ utilizando o princípio da extensão.

x	$\varphi_A(x)$	$f(x)$	$\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$
0	$0,5$	0	$0,5$
-1	$0,25$	1	$0,25$
$-1,5$	$0,125$	$2,25$	$0,125$
-2	0	4	0
$-2,5$	0	$6,5$	0
-3	0	9	0
-4	0	16	0

x	$\varphi_A(x)$	$f(x)$	$\varphi_{\widehat{f(A)}}(f(x))$
0	$0,5$	0	$0,5$
1	$0,75$	1	$0,75$
$1,5$	$1,75$	$2,25$	$1,75$
2	1	4	1
$2,5$	$0,5$	$6,5$	$0,5$
3	0	9	0
4	0	16	0

Tabela 4.6: Princípio de extensão $f(x) = x^2$.

Novamente, como no Exemplos 4.5 tem-se que valores diferentes de x nos levam ao mesmo valor de $f(x)$, deste modo, de acordo com a Definição 4.2 serão utilizados os valores de x com maior pertinência no domínio, ou seja $\sup_{f^{-1}(y)}\varphi_A(x)$. A Figura 4.8 apresenta a representação gráfica.

A Figura 4.7 mostra a representação gráfica.

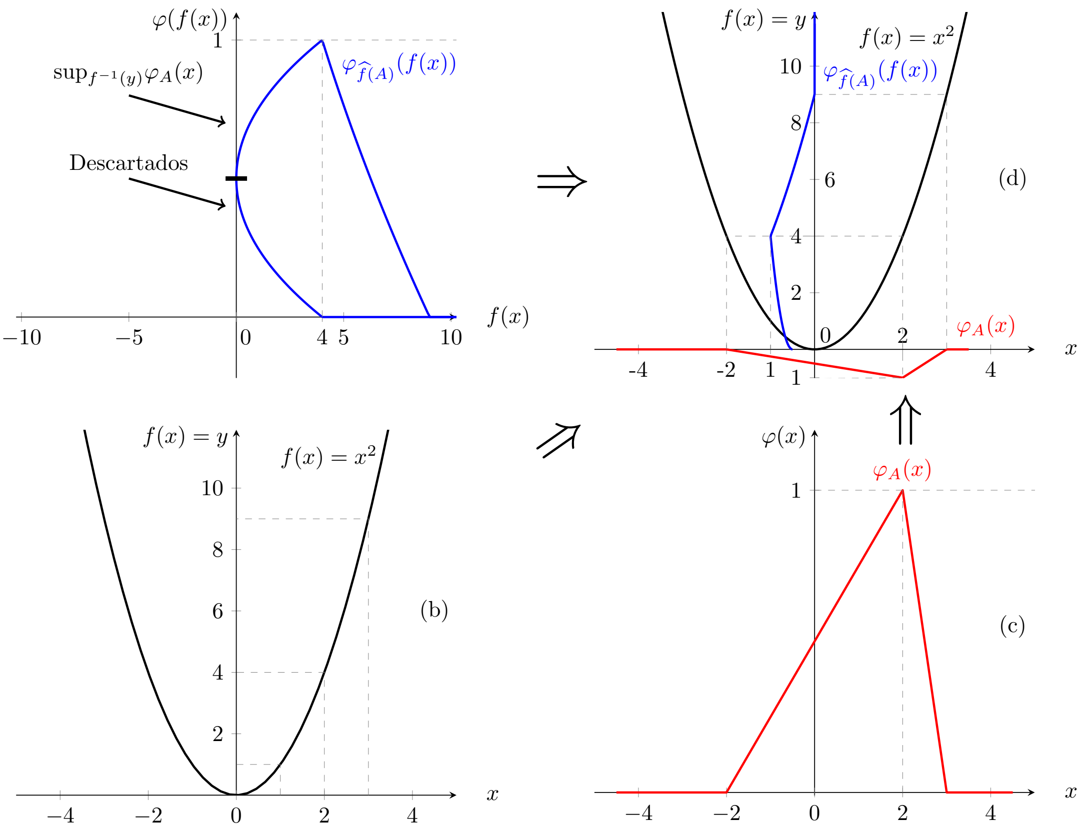


Figura 4.8: Princípio de extensão de Zadeh para função quadrática; (a) Função de pertinência para $\varphi_{\widehat{f}(A)}(f(x))$; (b) Função $f(x)$; (c) Função de pertinência de $\varphi_A(x)$; (d) Representação do princípio da extensão.

Conforme pode-se observar nos Exemplos 4.1, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7, quando a função é bijetiva $y = f(x)$ possui mesmo grau de pertinência de x. Deste modo considerando f^{-1} a função inversa de f, se a função é bijetiva tem-se

$$f^{-1}(y) = \{x; f(x) = y\}.$$

Tomando A como um subconjunto fuzzy de X, com função de pertinência $\varphi_A(x)$, sendo f bijetiva tem-se a função de pertinência $\widehat{f}(A)$ dada por

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\widehat{f}(A)}(y) = \sup_{f^{-1}(y)}\varphi_A(x)\\
\Rightarrow\ &\varphi_{\widehat{f}(A)}(y) = \sup_{\{x; f(x)=y\}}\varphi_A(x)\\
\Rightarrow\ &\varphi_{\widehat{f}(A)}(y) = \sup_{\{x\in f^{-1}(y)\}}\varphi_A(x)\\
\Rightarrow\ &\varphi_{\widehat{f}(A)}(y) = \varphi_A(f^{-1}(y)).
\end{aligned}$$

Tem-se que para um subconjunto fuzzy enumerável de X o princípio da extensão de

f aplicado a A, é o subconjunto $\widehat{f}(A)$ de Y [2], tendo função característica

$$\begin{aligned}
\varphi_{\widehat{f}(A)}(y) =& sup_{f^{-1}(y)}\chi_A(x) \\
\Rightarrow \varphi_{\widehat{f}(A)}(y) =& \begin{cases} 1 & \text{, se } f^{-1}(y) \in A \\ 0 & \text{, se } f^{-1}(y) \notin A \end{cases} \\
\Rightarrow \varphi_{\widehat{f}(A)}(y) =& \begin{cases} 1 & \text{, se } y \in f(A) \\ 0 & \text{, se } y \notin f(A) \end{cases} \\
\Rightarrow \varphi_{\widehat{f}(A)}(y) =& \chi_{f(A)}(y).
\end{aligned}$$

Assim, tem-se que a função de pertinência do conjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$ coincide com a função característica do conjunto clássico (crisp) $f(A)$,

$$\widehat{f}(A) = f(A).$$

No caso em que A for um conjunto clássico $[A]^\alpha = A$ para todo $\alpha \in [0;1]$ conforme visto na Proposição 3.28 e o Exemplo 3.29. Logo

$$\begin{aligned}
[\widehat{f}(A)]^\alpha =& [f(A)]^\alpha \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^\alpha =& f(A) \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^\alpha =& f([A]^\alpha).
\end{aligned}$$

Teorema 4.8. *[18] Sejam $f\colon X \to Y$ uma função contínua de A um subconjunto fuzzy de X. Então, para todo $\alpha \in [0,1]$ tem-se*

$$[\widehat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha).$$

Note que, em termos gerais, é possível determinar os α-níveis da seguinte maneira [15]

$$[\widehat{f}(A)]^\alpha = \left[\inf_{x\in[A]^\alpha} f(x);\ \sup_{x\in[A]^\alpha} f(x)\right].$$

Demonstração. [12] Seja $y \in f([A]^\alpha)$ então existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = y$ e $\varphi_A(x_0) \geq \alpha$, como x_0 pertence ao conjunto das imagens inversas de y, tem-se

$$\varphi_{\widehat{f}(A)}(y) = \ \sup_{f^{-1}(y)}\varphi_A(x) \geq \varphi_A(x_0) \geq \alpha,$$

logo, $y \in [\widehat{f}(A)]^\alpha$.

Tem-se também que, seja $x \in [\widehat{f}(A)]^\alpha$, isto é, $\varphi_{\widehat{f}(A)}(x) \geq \alpha$. Assim $f^{-1}(x) \neq \varnothing$ e $[A]^0 \cap f^{-1}(x) \neq \varnothing$.

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\widehat{f}(A)}(x) &= \sup_{y\in f^{-1}(x)}\varphi_A(y) \\
\varphi_{\widehat{f}(A)}(x) &= \sup_{y\in f^{-1}(x)\cap[A]^0}\varphi_A(y).
\end{aligned}$$

Existe $y_0 \in f^{-1}(x) \cap [A]^0$ tal que

$$\sup_{y\in f^{-1}(x)\cap[A]^0}\varphi_A(y) = \varphi_A(y_0).$$

Deste modo, $\varphi_A(y_0) \geq \alpha$, e como $f(y_0) = x$ segue que $x \in f([A]^\alpha)$. □

Do Teorema 4.8 tem-se que os α-níveis de um conjunto fuzzy obtidos pelo princípio de extensão coincidem com as imagens dos α-níveis da função clássica (crisp).

Exemplo 4.9. [2] Do Exemplo 3.26 tem-se o subconjunto fuzzy A de $U = [0;1]$ com função de pertinência

$$\varphi_A(x) = 4(x - x^2).$$

Os α-níveis são dados pela Equação (3.21) e podem ser vistos na Figura 3.25

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}; \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}\right].$$

Considere a função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ com lei de formação dada por $f(x) = x^2$. Aplicando o princípio de extensão do Teorema 4.8 tem-se

$$\begin{aligned}
[\widehat{f}(A)]^\alpha =& f([A]^\alpha) \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^\alpha =& \left[\inf_{x\in[A]^\alpha} f(x); \sup_{x\in[A]^\alpha} f(x)\right] \\
\Rightarrow f([A]^\alpha) =& f\left(\left[\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}; \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}\right]\right) \\
\Rightarrow f([A]^\alpha) =& \left[f\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}\right); f\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}\right)\right] \\
\Rightarrow f([A]^\alpha) =& \left[\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}\right)^2; \left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}\right)^2\right] \text{(aplicando } f(x) = x^2\text{)} \\
\Rightarrow f([A]^\alpha) =& [\widehat{f}(A)]^\alpha.
\end{aligned}$$

Logo,

$$[\widehat{f}(A)]^\alpha = \left[\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}\right)^2; \left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}\right)^2\right]. \tag{4.1}$$

Utilizando a Equação (4.1) tem-se os α-nívies:

i) $\alpha = 0$;

$$\begin{aligned}
[\widehat{f}(A)]^0 =& \left[\left(\frac{1-\sqrt{1-0}}{2}\right)^2; \left(\frac{1+\sqrt{1-0}}{2}\right)^2\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^0 =& \left[\left(\frac{1-\sqrt{1}}{2}\right)^2; \left(\frac{1+\sqrt{1}}{2}\right)^2\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^0 =& \left[\left(\frac{1-1}{2}\right)^2; \left(\frac{1+1}{2}\right)^2\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^0 =& \left[\left(\frac{0}{2}\right)^2; \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^0 =& [0^2; 1^2] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^0 =& [0; 1].
\end{aligned}$$

Tem-se também,

$$
\begin{aligned}
[A]^0 &= \left[\frac{1-\sqrt{1-0}}{2}; \frac{1+\sqrt{1-0}}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^0 &= \left[\frac{1-\sqrt{1}}{2}; \frac{1+\sqrt{1}}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^0 &= \left[\frac{1-1}{2}; \frac{1+1}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^0 &= [0/2; 2/2] \\
\Rightarrow [A]^0 &= [0; 1].
\end{aligned}
$$

Portanto, para $\alpha = 0$ tem-se $[\widehat{f}(A)]^0 = [0;1]$ e $[A]^0 = [0;1]$.

ii) $\alpha = 3/4$;

$$
\begin{aligned}
[\widehat{f}(A)]^{3/4} &= \left[\left(\frac{1-\sqrt{1-3/4}}{2}\right)^2; \left(\frac{1+\sqrt{1-3/4}}{2}\right)^2\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^{3/4} &= \left[\left(\frac{1-\sqrt{1/4}}{2}\right)^2; \left(\frac{1+\sqrt{1/4}}{2}\right)^2\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^{3/4} &= \left[\left(\frac{1-2\cdot 1\cdot\sqrt{1/4}+(\sqrt{1/4})^2}{4}\right); \left(\frac{1+2\cdot 1\cdot\sqrt{1/4}+(\sqrt{(1/4)})^2}{4}\right)\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^{3/4} &= \left[\left(\frac{1-1+1/4}{4}\right); \left(\frac{1+1+1/4}{4}\right)\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^{3/4} &= \left[\left(\frac{0+1/4}{4}\right); \left(\frac{2+1/4}{4}\right)\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^{3/4} &= \left[\left(\frac{1/4}{4}\right); \left(\frac{9/4}{4}\right)\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^{3/4} &= [1/16; 9/16]\,.
\end{aligned}
$$

E,

$$
\begin{aligned}
[A]^{3/4} &= \left[\frac{1-\sqrt{1-3/4}}{2}; \frac{1+\sqrt{1-3/4}}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^{3/4} &= \left[\frac{1-\sqrt{1/4}}{2}; \frac{1+\sqrt{1/4}}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^{3/4} &= \left[\frac{1-0,5}{2}; \frac{1+0,5}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^{3/4} &= \left[\frac{1/2}{2}; \frac{3/2}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^{3/4} &= [1/4; 3/4].
\end{aligned}
$$

Portanto, para $\alpha = 3/4$ tem-se $[\widehat{f}(A)]^{3/4} = [1/16; 9/16]$ e $[A]^{3/4} = [1/4; 3/4]$.

iii) $\alpha = 1$;

$$
\begin{aligned}
[\widehat{f}(A)]^1 &= \left[\left(\frac{1-\sqrt{1-1}}{2}\right)^2; \left(\frac{1+\sqrt{1-1}}{2}\right)^2\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^1 &= \left[\left(\frac{1-\sqrt{0}}{2}\right)^2; \left(\frac{1+\sqrt{0}}{2}\right)^2\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^1 &= \left[\left(\frac{1-0}{2}\right)^2; \left(\frac{1+0}{2}\right)^2\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^1 &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2; \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \\
\Rightarrow [\widehat{f}(A)]^1 &= [1/4; 1/4].
\end{aligned}
$$

Também,

$$
\begin{aligned}
[A]^1 &= \left[\frac{1-\sqrt{1-1}}{2}; \frac{1+\sqrt{1-1}}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^1 &= \left[\frac{1-\sqrt{0}}{2}; \frac{1+\sqrt{0}}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^1 &= \left[\frac{1-0}{2}; \frac{1+0}{2}\right] \\
\Rightarrow [A]^1 &= [1/2; 1/2].
\end{aligned}
$$

Portanto, para $\alpha = 1$ tem-se $[\widehat{f}(A)]^1 = \{1/4\}$ e $[A]^1 = \{1/2\}$.

Na Figura 4.9, é possível ver os valores de α para o Exemplo 4.9.

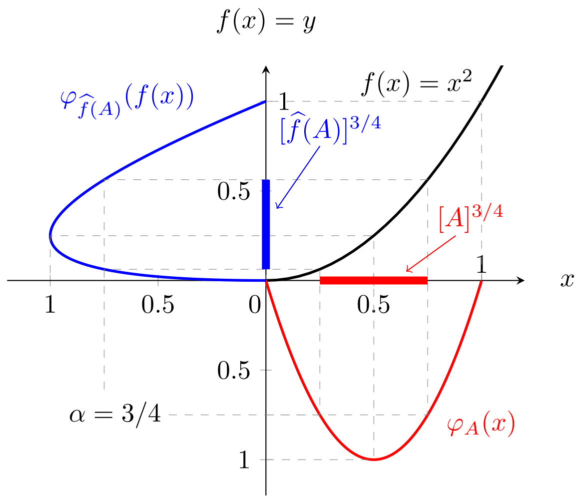


Figura 4.9: Princípio de extensão de Zadeh por α-nível.

Definição 4.10. Sejam $f\colon X \times Y \to Z$ e, A e B subconjuntos fuzzy de X e Y, respectivamente. A **extensão** $\widehat{f}$ de f aplicada a A e B, é o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A, B)$ de Z, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\widehat{f}(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y)\in f^{-1}(z)} [\min\{\varphi_A(x);\varphi_B(y)\}] & , \text{ se } f^{-1}(z) \neq \varnothing \\ 0 & , \text{ se } f^{-1}(z) = \varnothing \end{cases},$$

com $f^{-1}(z) = \{(x,y); f(x,y) = z\}$.

Observação 4.11. No Exemplo 4.12 a notação utilizada apresenta um subconjunto fuzzy com elementos na forma "**pertinência / elemento**". Tal notação é utilizada em algumas literaturas sobre conjuntos fuzzy, e não deve ser confundida com uma divisão como normalmente o símbolo "/" indica.

Exemplo 4.12. [2] Seja $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x,y) = x + y$. Considere os subconjuntos fuzzy finitos de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} A =& 0,4/3 + 0,5/4 + 1/5 + 0,5/6 + 0,2/7, \\ B =& 0,2/6 + 0,5/7 + 1/8 + 0,5/9 + 0,2/10. \end{aligned}$$

Determinar o grau de pertinência de $z = 10$ em $\widehat{f}(A,B)$.

Para a determinação de $z = 10$ a Tabela 4.7 apresenta um resumo dos valores das pertinências dos elementos cuja soma é 10.

x	y	$x+y=z$	$\varphi_A(x)$	$\varphi_B(x)$	$\min\{\varphi_A(x);\varphi_B(y)\}$
3	7	$3+7=10$	$0,4$	$0,5$	$0,4$
4	6	$4+6=10$	$0,5$	$0,2$	$0,2$

Tabela 4.7: Pertinência de elementos.

Utilizando a Definição 4.10 tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_{\widehat{f}(A,B)}(10) =& \sup[\min\{\varphi_A(x);\varphi_B(y)\}] \\ \Rightarrow \varphi_{\widehat{f}(A,B)}(10) =& \max\{0,4;0,2\} \\ \Rightarrow \varphi_{\widehat{f}(A,B)}(10) =& \{0,4\}. \end{aligned}$$

Portanto, $\varphi_{\widehat{f}(A,B)}(10) = 0,4$.

Exemplo 4.13. [12] Utilizando os subconjuntos fuzzy finitos de $\mathbb{R}$ do Exemplo 4.12, seja $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y$, determinar a função de pertinência dos elementos $z = 10$ e $z = 25$ em $\widehat{f}(A,B)$.

i) Para $z = 10$, note que não se tem valores nos subconjuntos fuzzy A e B tal que $f(x,y) = x^2 + y$ seja igual a 10, assim utilizando a Definição 4.10,

$$\begin{aligned} f^{-1}(10) =& \varnothing \\ \Rightarrow \varphi_{\widehat{f}(A,B)}(10) =& 0. \end{aligned}$$

ii) Para $z = 25$, tem-se a Tabela 4.8,

x	y	$x^2+y=z$	$\varphi_A(x)$	$\varphi_B(x)$	$\min\{\varphi_A(x);\varphi_B(y)\}$
4	9	$4^2+9=25$	$0,5$	$0,5$	$0,5$

Tabela 4.8: Pertinência de elementos.

Da Definição 4.10 tem-se

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\widehat{f(A,B)}}(25) = \sup[\min\{\varphi_A(x);\varphi_B(y)\}] \\
\Rightarrow\ &\varphi_{\widehat{f(A,B)}}(25) = \max\{0,5;0,5\} \\
\Rightarrow\ &\varphi_{\widehat{f(A,B)}}(25) = \{0,5\}.
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi_{\widehat{f(A,B)}}(25) = 0,5$.

No próximo Capítulo será desenvolvido a noção de número fuzzy e como são realizadas as operações aritméticas com estes números.

5 Aritmética fuzzy

Este capítulo apresenta as definições a respeito de números fuzzy, tipos de número fuzzy e apresenta as formas de realizar operações aritméticas com estes números.

5.1 Número fuzzy

Definição 5.1. Um conjunto fuzzy A é chamado de **número fuzzy** se as seguintes condições são satisfeitas [2, 15]:

i) A é subconjunto fuzzy de $U = \mathbb{R}$;

ii) O núcleo (Definição 3.32) de A é diferente de vazio

$$\text{Nuc }(A) = [A]^1 \neq \varnothing.$$

iii) Os $\alpha-$níveis (Definição 3.23) de A são intervalos limitados e fechados, para todo $\alpha \in [0;1]$;

iv) O suporte (Definição 3.8) de A é limitado.

Os $\alpha-$níveis de A são denotados por

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha].$$

Observe que para um número real r tem-se que sua função característica é sua função de pertinência,

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1 \text{ , se } x = r \\ 0 \text{ , se } x \neq r \end{cases} .$$

Assim, todo número real r é um número fuzzy que é denotado por $\widehat{r}$.

Exemplo 5.2. O número real 2 é representado pelo número fuzzy $\widehat{2}$, que graficamente é representado na Figura 5.1.

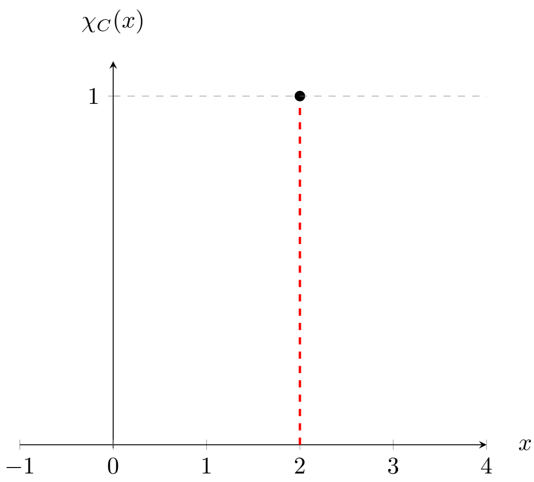


Figura 5.1: Representação número real (crisp) 2.

5.2 Tipos de número fuzzy

Dependendo do tipo de aplicação para a qual se deseja realizar um modelo matemático, algumas formas para a função de pertinência podem ser melhores do que outras, pois podem transmitir os fenômenos linguísticos de uma maneira mais abrangente. Entretanto, geralmente as formas mais utilizadas são as que serão descritas nesta seção.

Antes de apresentar alguns tipos de números fuzzy, seguem algumas definições que serão utilizadas no decorrer deste capítulo.

De [11] tem-se as seguintes definições.

Definição 5.3. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **afim** quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como pode ser visto na Figura 5.2, o gráfico da função afim é uma linha reta e pode-se determinar o valor de a que é chamado **taxa de variação** utilizando

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{5.1}$$

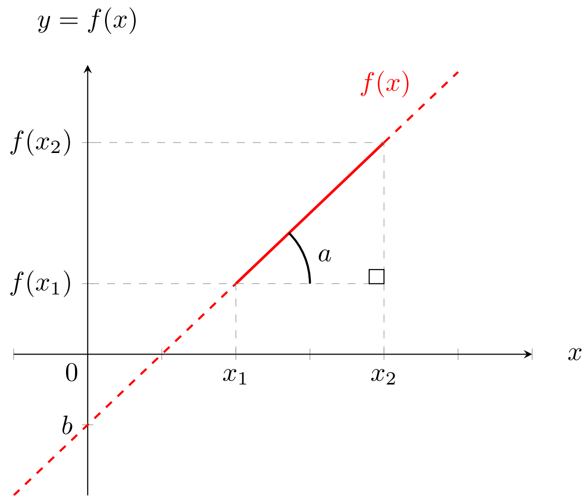


Figura 5.2: Gráfico da função afim.

As funções de pertinência que possuem mais de uma forma triangular, podem ser chamadas de funções poligonais.

Definição 5.4. Diz-se que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função poligonal** quando existem $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ tais que, para $x \leq t_0$, para $x \geq t_n$ e em cada um dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, f coincide com uma função afim f_i.

Seguem alguns tipos de números fuzzy e para outros tipos não citados neste trabalho consulte [2, 3, 19, 20].

5.2.1 Número fuzzy triangular

Definição 5.5. Um número fuzzy $F = (m; n; p)$ é dito **triangular** se sua função de pertinência é do tipo

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-m}{n-m} & \text{, se } m \leq x \leq n \\ \dfrac{-x+p}{p-n} & \text{, se } n < x \leq p \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases} . \tag{5.2}$$

E seus $\alpha-$níveis são da forma

$$[F]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] = [\alpha(n-m) + m; \alpha(n-p) + p]. \tag{5.3}$$

Os números fuzzy triangulares são geralmente representados na terna $(m; n; p)$. A representação gráfica é apresentada na Figura 5.3.

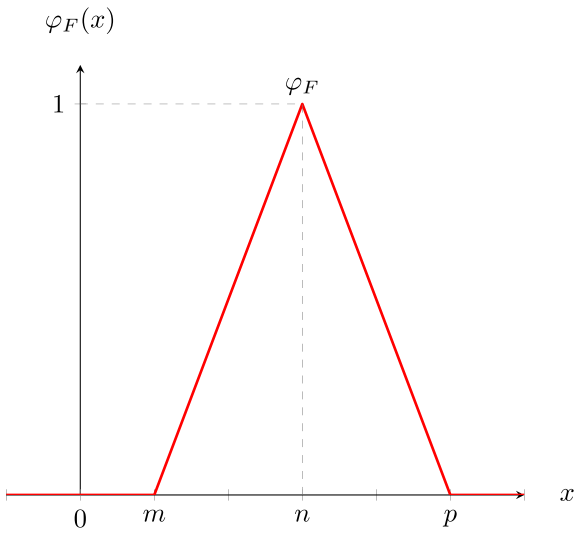


Figura 5.3: Gráfico de um número fuzzy triangular.

Dedução 5.6. Utilizando a Definição 5.3, a Figura 5.4 e a Equação (5.1) pode-se tomar os pares ordenados $(m, 0)$ e $(n, 1)$ considerando $x_1 = m, x_2 = n, f(x_1) = 0$ e $f(x_2) = 1$, tem-se

$$a = \frac{1-0}{n-m} = \frac{1}{n-m}. \tag{5.4}$$

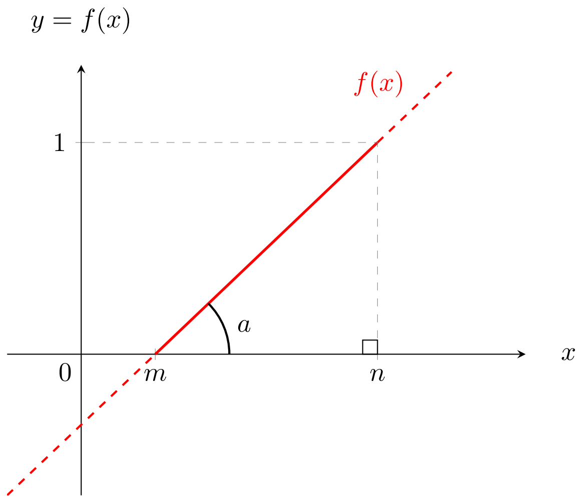


Figura 5.4: Gráfico da forma triangular crescente.

Utilizando a Definição 5.3 junto com o par ordenado $(m, 0)$

$$b = -am. \tag{5.5}$$

Desta maneira, utilizando novamente a Definição 5.3 e as Equações (5.4) e (5.5)

$$\begin{aligned} & f(x) = ax + b \\ \Rightarrow\ & f(x) = ax - am \\ \Rightarrow\ & f(x) = a(x - m) \\ \Rightarrow\ & f(x) = \left(\frac{1}{n - m}\right) \cdot (x - m) \\ \Rightarrow\ & f(x) = \frac{x - m}{n - m}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Considerando a Equação (5.6) no intervalo $(m, n]$ temos a parte **crescente** da função.

De maneira análoga, utilizando a Figura 5.5 e considerando $x_1 = n, x_2 = p, g(x_1) = 1$ e $g(x_2) = 0$, tem-se os pares ordenados $(n, 1)$ e $(p, 0)$ e assim

$$a = \frac{0 - 1}{p - n} = \frac{-1}{p - n}. \tag{5.7}$$

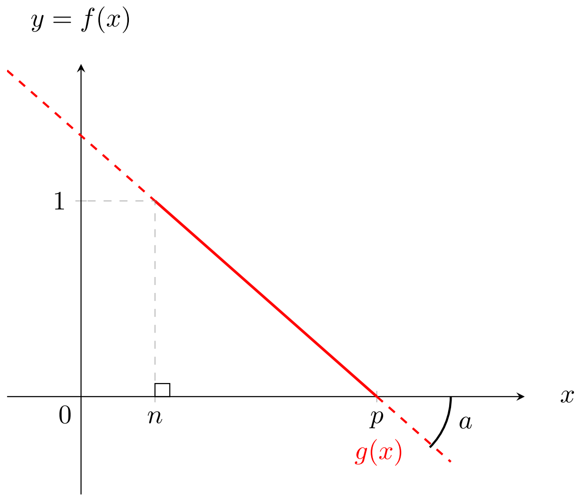


Figura 5.5: Gráfico da forma triangular decrescente.

Com o par ordenado $(p, 0)$ e a Definição 5.3 tem-se

$$b = -ap. \tag{5.8}$$

Utilizando a Definição 5.3 e as Equações (5.7) e (5.8)

$$\begin{aligned} & g(x) = ax + b \\ \Rightarrow\ & g(x) = ax - ap \\ \Rightarrow\ & g(x) = a(x - p) \\ \Rightarrow\ & g(x) = \left(\frac{-1}{p - n}\right) \cdot (x - p) \\ \Rightarrow\ & g(x) = \frac{-x + p}{p - n}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Toma-se a Equação (5.9) no intervalo (n, p), sendo a parte **decrescente** da função.

Considerando que o valor da função desejada seja 0 nos intervalos, $(-\infty, m)$ e (p, ∞), tem-se a função de pertinência (5.2) da Definição 5.5, e a representação gráfica da Figura 5.3.

Utilizando a Definição 3.23 e lembrando que $0 < \alpha \leq 1$, seus $\alpha-$níveis são dados por

i) Se $x \in (m; n]$

$$\begin{aligned} \varphi_F(x) &\geq \alpha \\ \Rightarrow \frac{x-m}{n-m} &\geq \alpha \\ \Rightarrow x - m &\geq \alpha(n-m) \\ \Rightarrow x &\geq \alpha(n-m) + m. \end{aligned} \tag{5.10}$$

ii) Se $x \in (n; p)$

$$\begin{aligned} \varphi_F(x) &\geq \alpha \\ \Rightarrow \frac{-x+p}{p-n} &\geq \alpha \\ \Rightarrow -x + p &\geq \alpha(p-n) \\ \Rightarrow -x &\geq \alpha(p-n) - p \\ \Rightarrow x &\leq -\alpha(p-n) + p \\ \Rightarrow x &\leq \alpha(n-p) + p \end{aligned} \tag{5.11}$$

De 5.10 e 5.11 temos

$$\alpha(n-m) + m \leq x \leq \alpha(n-p) + p,$$

que está de acordo com a Equação (5.3).

Exemplo 5.7. Do Exemplo 3.12 temos o número fuzzy triangular $A = (0; 1; 2)$, a representação gráfica é apresentada na Figura 5.6.

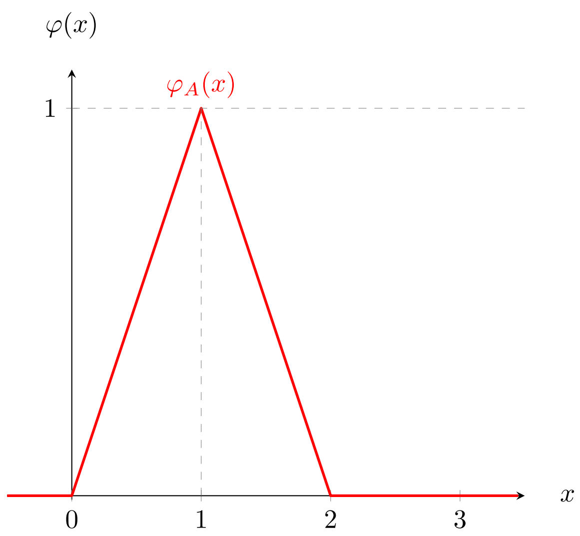


Figura 5.6: Representação do número fuzzy triangular.

Utilizando a Definição 5.5 para $F = (m; n; p)$ e substituindo os valores para $A = (0; 1; 2)$ tem-se

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-m}{n-m} & \text{, se } m \leq x \leq n \\ \dfrac{-x+p}{p-n} & \text{, se } n < x \leq p \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases},$$

$$\Rightarrow \varphi_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-0}{1-0} & \text{, se } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{-x+2}{2-1} & \text{, se } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}.$$

Logo,

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x & \text{, se } x \in [0; 1] \\ 2-x & \text{, se } x \in (1; 2] \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Para os α-níveis tem-se

$$\begin{aligned} [F]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] &= [\alpha(n-m)+m; \alpha(n-p)+p] \\ \Rightarrow [A]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] &= [\alpha(1-0)+0; \alpha(1-2)+2] \\ \Rightarrow [A]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] &= [\alpha; -\alpha+2]. \end{aligned}$$

Assim, para $\alpha = 0,5$, tem-se

$$\begin{aligned} [A]^\alpha &= [a_1^\alpha; a_2^\alpha] = [\alpha; -\alpha+2] \\ \Rightarrow [A]^{0,5} &= [a_1^{0,5}; a_2^{0,5}] = [(0,5); -(0,5)+2] \\ \Rightarrow [A]^{0,5} &= [a_1^{0,5}; a_2^{0,5}] = [0,5; 1,5]. \end{aligned}$$

A representação de $[A]^{0,5}$ é apresentada na Figura 5.7.

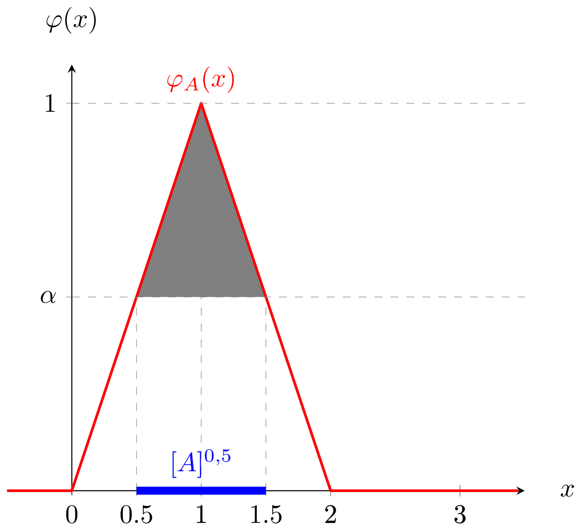


Figura 5.7: Representação do α-nivel de um número fuzzy triangular.

5.2.2 Número fuzzy trapezoidal

Definição 5.8. Um número fuzzy $F = (m; n; o; p)$ é chamado de **trapezoidal** se sua função de pertinência é da forma

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-m}{n-m} & , \text{se } m \leq x \leq n \\ 1 & , \text{se } n < x \leq o \\ \dfrac{-x+p}{p-o} & , \text{se } o < x \leq p \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} . \tag{5.12}$$

E seus α-níveis são da forma

$$[F]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] = [\alpha(n-m) + m; \alpha(o-p) + p]. \tag{5.13}$$

Os números fuzzy trapezoidais são geralmente representados na quaterna $(m; n; o; p)$ e a representação gráfica é apresentada na Figura 5.8.

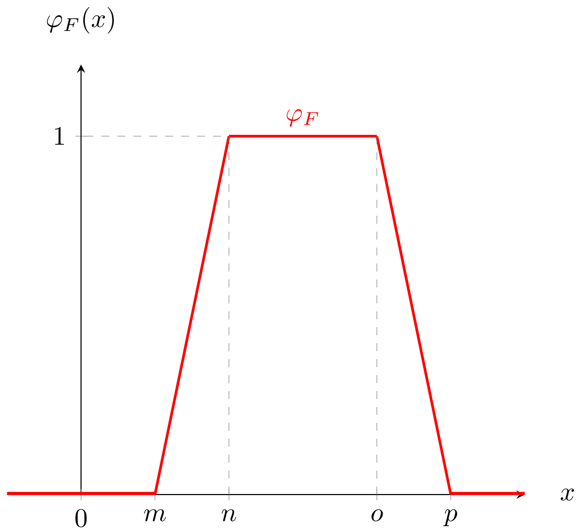


Figura 5.8: Forma trapezoidal.

Dedução 5.9. Analogamente ao caso da forma triangular, bastando apenas considerar que a função de pertinência assume o valor de 1 no intervalo $(n, o]$.

Utilizando a Definição 3.23 e lembrando que $0 < \alpha \leq 1$, seus $\alpha-$níveis são dados por

i) Se $x \in (m; n]$

$$\begin{aligned} \varphi_F(x) &\geq \alpha \\ \Rightarrow \frac{x-m}{n-m} &\geq \alpha \\ \Rightarrow x - m &\geq \alpha(n-m) \\ \Rightarrow x &\geq \alpha(n-m) + m. \end{aligned} \tag{5.14}$$

ii) Se $x \in (o; p)$

$$\begin{aligned}
\varphi_F(x) \geq& \alpha \\
\Rightarrow \frac{-x+p}{p-o} \geq& \alpha \\
\Rightarrow -x+p \geq& \alpha(p-o) \\
\Rightarrow -x \geq& \alpha(p-o)-p \\
\Rightarrow x \leq& -\alpha(p-o)+p \\
\Rightarrow x \leq& \alpha(o-p)+p
\end{aligned} \tag{5.15}$$

De (5.14) e (5.15) temos

$$\alpha(n-m)+m \leq x \leq \alpha(o-p)+p,$$

que está de acordo com a Equação (5.13).

A **forma trapezoidal** para uma função de pertinência é utilizada quando se deseja que certo intervalo de x tenha sempre o valor máximo $\varphi_F(x) = 1$.

Exemplo 5.10. [12] Considere o número fuzzy trapezoidal $T = (-2; 0; 3; 5)$, de representação gráfica conforme a Figura 5.9.

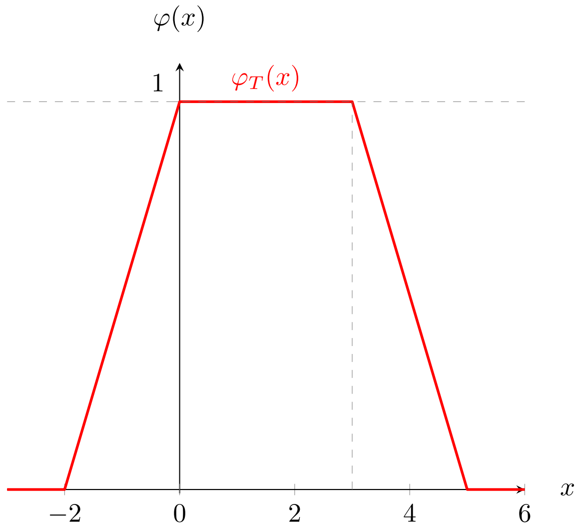


Figura 5.9: Representação do número fuzzy trapezoidal.

Da Definição 5.8 para $T = (-2; 0; 3; 5)$, tem-se

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-m}{n-m} & , \text{se } m \leq x \leq n \\ 1 & , \text{se } n < x \leq o \\ \dfrac{-x+p}{p-o} & , \text{se } o < x \leq p \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} ,$$

$$\Rightarrow \varphi_T(x) = \begin{cases} \dfrac{x-(-2)}{0-(-2)} & , \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & , \text{se } 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{-x+5}{5-3} & , \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Logo,

$$\varphi_T(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} & , \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & , \text{se } 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{-x+5}{2} & , \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Para os α-níveis tem-se

$$\begin{aligned} [F]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] &= [\alpha(n-m)+m; \alpha(o-p)+p] \\ \Rightarrow [T]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] &= [\alpha(0-(-2))+(-2); \alpha(3-5)+5] \\ \Rightarrow [T]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] &= [2\alpha-2; -2\alpha+5]. \end{aligned}$$

Deste modo, para $\alpha = 0,5$, tem-se

$$\begin{aligned} [T]^\alpha &= [a_1^\alpha; a_2^\alpha] = [2\alpha-2; -2\alpha+5] \\ \Rightarrow [T]^{0,5} &= [a_1^{0,5}; a_2^{0,5}] = [2\cdot(0,5)-2; -2\cdot(0,5)+5] \\ \Rightarrow [T]^{0,5} &= [a_1^{0,5}; a_2^{0,5}] = [-1; 4]. \end{aligned}$$

A Figura 5.10 apresenta a representação gráfica de $[A]^{0,5}$.

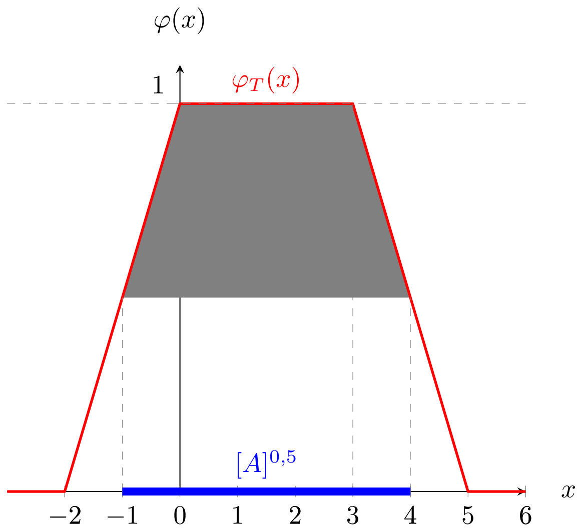


Figura 5.10: Representação do α-nível do número fuzzy trapezoidal.

5.2.3 Número fuzzy forma de sino

Definição 5.11. Um número fuzzy F é chamado de **forma de sino** (ou **Gaussiana** [3, 20]) se sua função de pertinência for "suave" e simétrica em relação a um número real com função de pertinência dada por

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\dfrac{x-u}{a}\right)^2\right) & , \text{se } u-\delta \leq x \leq u+\delta \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{5.16}$$

Assumindo um $\alpha-$nível fixado $\overline{\alpha}$, seus $\alpha-$níveis são da forma

$$[F]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] = \begin{cases} \left[u - \sqrt{\ln\left(\dfrac{1}{\alpha^{a^2}}\right)}; u + \sqrt{\ln\left(\dfrac{1}{\alpha^{a^2}}\right)}\right] & , \text{se } \alpha \geq \overline{\alpha} \\ [u-\delta; u+\delta] & , \text{se } \alpha < \overline{\alpha} \end{cases}. \tag{5.17}$$

A representação gráfica é apresentada na Figura 5.11.

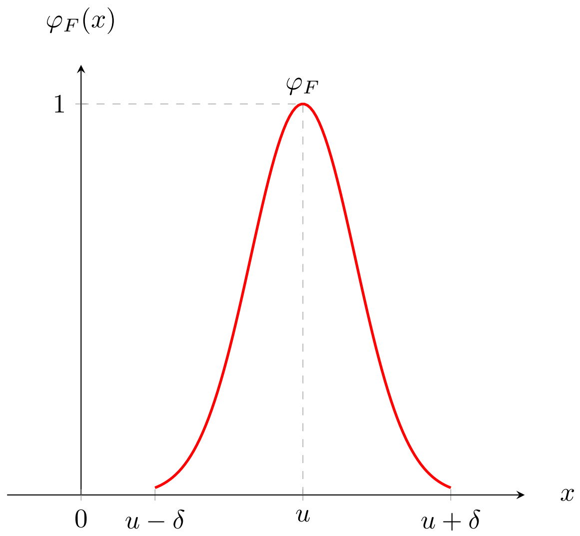


Figura 5.11: Forma de sino (Gaussiana).

Dedução 5.12. O número na forma de sino possui a função de pertinência por definição.

Para os $\alpha-$níveis, considere um $\alpha-$nível fixo representado por $\overline{\alpha}$, assim para todo

$x \geq \alpha$,

$$
\begin{aligned}
\varphi_F(x) &= \exp\left(-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2\right)\\
\Rightarrow \alpha &= \exp\left(-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2\right)\\
\Rightarrow \ln\alpha &= -\left(\frac{x-u}{a}\right)^2\\
\Rightarrow \left(\frac{x-u}{a}\right)^2 &= -\ln\alpha\\
\Rightarrow \left(\frac{x-u}{a}\right)^2 &= \ln(\alpha^{-1})\\
\Rightarrow \left(\frac{x-u}{a}\right)^2 &= \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\\
\Rightarrow \left|\left(\frac{x-u}{a}\right)\right| &= \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\\
\Rightarrow \left(\frac{x-u}{a}\right) &= \pm\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\\
\Rightarrow x-u &= \pm\,\alpha\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\\
\Rightarrow x &= u \pm \alpha\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\\
\Rightarrow x &= u \pm \sqrt{\alpha^2\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\\
\Rightarrow x &= u \pm \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha^2}}\\
\Rightarrow x &= u \pm \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{\alpha^2}}\right)}.
\end{aligned}
$$

Já para $x < \overline{\alpha}$ tem-se que $\varphi_F(x) > 0$ para todo $x \in [u-\delta; u+\delta]$. Portanto

$$
[\alpha_1^\alpha;\alpha_2^\alpha] = \begin{cases} \left[u - \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{\alpha^2}}\right)}; u + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{\alpha^2}}\right)}\right] & \text{, se } \alpha \geq \overline{\alpha} \\ [u-\delta; u+\delta] & \text{, se } \alpha < \overline{\alpha} \end{cases}.
$$

Exemplo 5.13. Seja o número fuzzy S na forma de sino dado por $u = 3, a = 1$ e $\delta = 2$. Assim, utilizando a Definição 5.11

$$
\begin{aligned}
\varphi_F(x) &= \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2\right) & \text{, se } u-\delta \leq x \leq u+\delta \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}\\
\Rightarrow \varphi_S(x) &= \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-3}{1}\right)^2\right) & \text{, se } 3-2 \leq x \leq 3+2 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\varphi_S(x) = \begin{cases} \exp(-x^2 + 6x - 9) & , \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}.$$

A representação gráfica é apresentada na Figura 5.12.

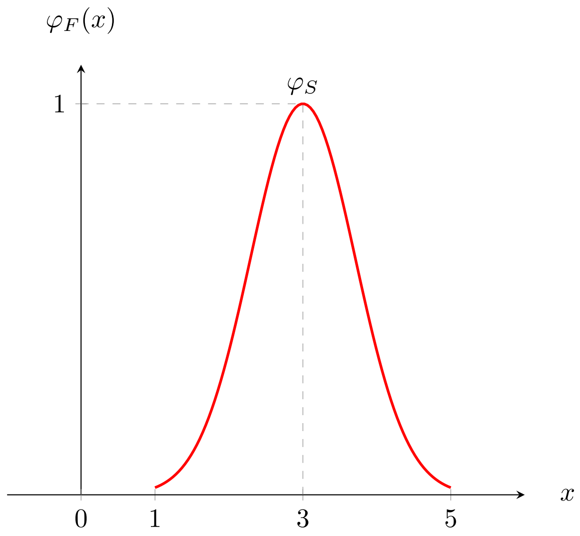


Figura 5.12: Forma de sino (Gaussiana) exemplo.

Determinando os α-níveis considerando $\overline{\alpha} = 0,02$ tem-se

$$[F]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] = \begin{cases} \left[u - \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{a^2}}\right)}; u + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{a^2}}\right)}\right] & , \text{se } \alpha \geq \overline{\alpha} \\ [u - \delta; u + \delta] & , \text{se } \alpha < \overline{\alpha} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [S]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] = \begin{cases} \left[3 - \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{1^2}}\right)}; 3 + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{1^2}}\right)}\right] & , \text{se } \alpha \geq 0,02 \\ [3 - 2; 3 + 2] & , \text{se } \alpha < 0,02 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [S]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] = \begin{cases} \left[3 - \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}; 3 + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\right] & , \text{se } \alpha \geq 0,02 \\ [1; 5] & , \text{se } \alpha < 0,02 \end{cases}$$

Determinando o α-nível para $\alpha = 0,5$, tem-se

$$[F]^{0,5} = [a_1^{0,5}; a_2^{0,5}] = \left[3 - \sqrt{\ln\left(\frac{1}{(0,5)}\right)}; 3 + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{(0,5)}\right)}\right] \qquad , \text{pois } 0,5 \geq 0,02$$

$$\Rightarrow [F]^{0,5} = [a_1^{0,5}; a_2^{0,5}] = [2,16; 3,83].$$

A representação gráfica de $[A]^{0,5}$ é apresentada na Figura 5.13.

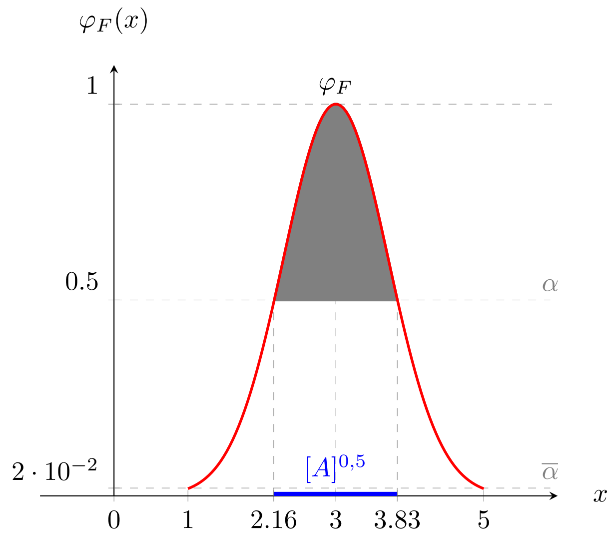


Figura 5.13: Representação do α-nível do número fuzzy forma de sino.

Nas literaturas sobre matemática fuzzy o leitor pode encontrar demais formas de números fuzzy [2, 3, 19, 20].

5.3 Operações aritméticas

Para a realização das operações aritméticas entre números fuzzy, define-se as operações nos intervalos fechados da reta real, e estende-se tal conceito a números fuzzy.

5.3.1 Operações aritméticas em intervalos

Definição 5.14. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e A, B intervalos fechados da reta dados por $A = [a_1; a_2]$ e $B = [b_1; b_2]$. Define-se:

1. A **adição** entre A e B é o intervalo fechado

$$A + B = [a_1; a_2] + [b_1; b_2] = [a_1 + b_1; a_2 + b_2].$$

2. A **subtração** entre A e B é o intervalo fechado

$$A - B = [a_1; a_2] - [b_1; b_2] = [a_1 - b_2; a_2 - b_1].$$

   Note que, $A - B$ é na verdade $A + (-B)$.

3. A **multiplicação por um escalar**, A por λ é o intervalo fechado

$$\lambda \cdot A = \lambda[a_1; a_2] = \begin{cases} [\lambda a_1; \lambda a_2] & , \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2; \lambda a_1] & , \text{se } \lambda < 0 \end{cases}.$$

4. A **multiplicação** de A por B é o intervalo fechado

$$A \cdot B = [a_1; a_2] \cdot [b_1; b_2] = [\min\{a_1b_1; a_1b_2; a_2b_1; a_2b_2\}; \max\{a_1b_1; a_1b_2; a_2b_1; a_2b_2\}].$$

5. A **divisão** de A por B, desde que $0 \notin B = [b_1; b_2]$ é intervalo fechado

$$A/B = [a_1; a_2]/[b_1; b_2] = \left[\min\left\{\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_1}{b_2}; \frac{a_2}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}\right\}; \max\left\{\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_1}{b_2}; \frac{a_2}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}\right\}\right].$$

Exemplo 5.15. Dados os intervalos da reta real $A = [2; 5]$, $B = [1, 3]$ e os números reais $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$ efetuando as operações da Definição 5.14 tem-se:

1. Adição

$$\begin{aligned} A + B =& [a_1; a_2] + [b_1; b_2] = [a_1 + b_1; a_2 + b_2] \\ \Rightarrow A + B =& [2; 5] + [1; 3] = [2 + 1; 5 + 3] = [3; 8]. \end{aligned}$$

A representação gráfica é apresentada na Figura 5.14.

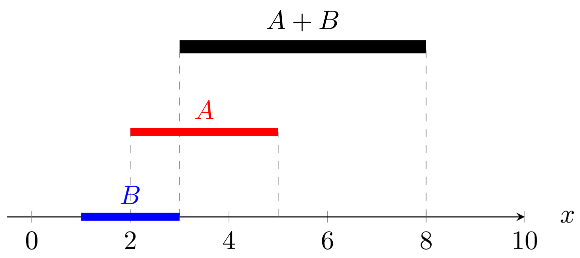


Figura 5.14: Adição de intervalos.

2. Subtração

$$\begin{aligned} A - B =& [a_1; a_2] - [b_1; b_2] = [a_1 - b_2; a_2 - b_1] \\ \Rightarrow A - B =& [2; 5] - [1; 3] = [2 - 3; 5 - 1] = [-1; 4], \end{aligned}$$

e

$$\Rightarrow B - A = [1; 3] - [2; 5] = [1 - 5; 3 - 2] = [-4; 1].$$

Note que $B - A$ teve as extremidades trocadas para manter a forma de intervalo. A representação gráfica é apresentada na Figura 5.15.

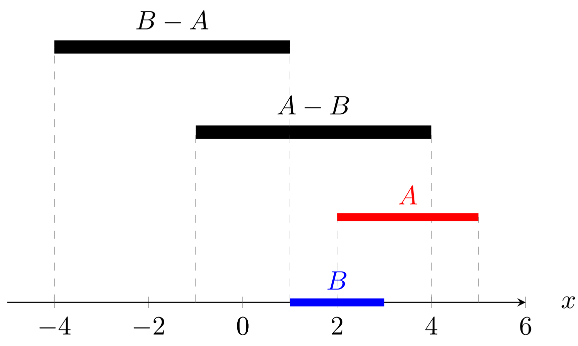


Figura 5.15: Subtração de intervalos.

3. Multiplicação por um escalar

$$\lambda \cdot A = \lambda[a_1; a_2] = \begin{cases} [\lambda a_1; \lambda a_2] & \text{, se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2; \lambda a_1] & \text{, se } \lambda < 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 \cdot A = 2 \cdot [2; 5] = [2 \cdot 2; 2 \cdot 5] = [4; 10],$$
$$\Rightarrow \lambda_1 \cdot B = 2 \cdot [1; 3] = [2 \cdot 1; 2 \cdot 3] = [2; 6],$$

e

$$\Rightarrow \lambda_2 \cdot A = -3 \cdot [2; 5] = [-3 \cdot 5; -3 \cdot 2] = [-15; -6],$$
$$\Rightarrow \lambda_2 \cdot B = -3 \cdot [1; 3] = [-3 \cdot 3; -3 \cdot 1] = [-9; -3].$$

A representação gráfica é apresentada na Figura 5.16.

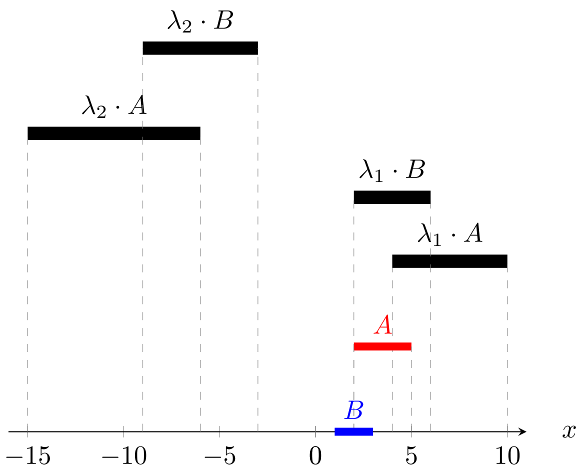


Figura 5.16: Multiplicação por escalar de intervalos.

4. Multiplicação

$$
\begin{aligned}
A \cdot B =& [a_1; a_2] \cdot [b_1; b_2] = [\min\{a_1b_1; a_1b_2; a_2b_1; a_2b_2\}; \max\{a_1b_1; a_1b_2; a_2b_1; a_2b_2\}] \\
A \cdot B =& [2; 5] \cdot [1; 3] \\
\Rightarrow A \cdot B =& [\min\{2 \cdot 1; 2 \cdot 3; 5 \cdot 1; 5 \cdot 3\}; \max\{2 \cdot 1; 2 \cdot 3; 5 \cdot 1; 5 \cdot 3\}] \\
\Rightarrow A \cdot B =& [\min\{2; 6; 5; 15\}; \max\{2; 6; 5; 15\}] \\
\Rightarrow A \cdot B =& [2; 15].
\end{aligned}
$$

A representação gráfica é apresentada na Figura 5.17.

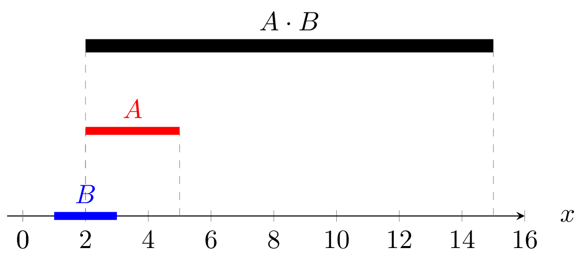


Figura 5.17: Multiplicação de intervalos.

5. Divisão

$$
\begin{aligned}
A/B =& [a_1; a_2]/[b_1; b_2] = \left[\min\left\{\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_1}{b_2}; \frac{a_2}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}\right\}; \max\left\{\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_1}{b_2}; \frac{a_2}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}\right\}\right] \\
A/B =& [2; 5]/[1; 3] \\
\Rightarrow A/B =& \left[\min\left\{\frac{2}{1}; \frac{2}{3}; \frac{5}{1}; \frac{5}{3}\right\}; \left\{\max\frac{2}{1}; \frac{2}{3}; \frac{5}{1}; \frac{5}{3}\right\}\right] \\
\Rightarrow A/B =& \left[\frac{2}{3}; 5\right].
\end{aligned}
$$

E também,

$$
\begin{aligned}
B/A =& [1; 3]/[2; 5] \\
\Rightarrow A/B =& \left[\min\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{3}{2}; \frac{3}{5}\right\}; \left\{\max\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{3}{2}; \frac{3}{5}\right\}\right] \\
\Rightarrow A/B =& \left[\frac{1}{5}; \frac{3}{2}\right].
\end{aligned}
$$

A representação gráfica é apresentada na Figura 5.18.

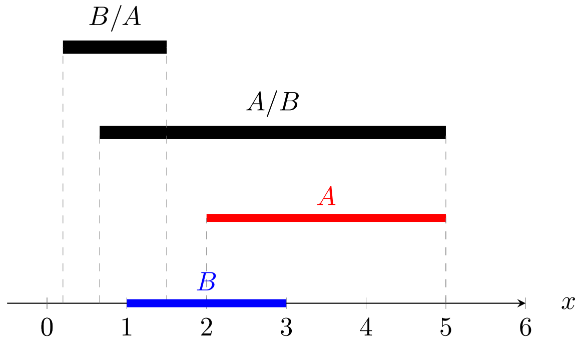


Figura 5.18: Divisão de intervalos.

Teorema 5.16 (Princípio da extensão de Zadeh para intervalos da reta)**.** *Sejam A e B intervalos fechados de $\mathbb{R}$ e $\otimes$ uma das operações aritméticas entre os números reais (Definição 5.14), deste modo*

$$\chi_{A\otimes B}(x) = \sup_{\{(y;z);y\otimes z=x\}} \min[\chi_A(y);\chi_B(z)].$$

Demonstração. Note para o $\min\{\chi_A(y);\chi_B(z)\}$ tem-se da Definição 3.1

$$\min\{\chi_A(y);\chi_B(z)\} = \begin{cases} 1 & \text{, se } y \in A \text{ e } z \in B \\ 0 & \text{, se } y \notin A \text{ ou } z \notin B \end{cases}.$$

Tomando então os elementos x tais que $y \otimes z = x$ obtêm-se o supremo do mínimo, ou seja,

$$\sup_{\{(y;z);y\otimes z=x\}} \min\{\chi_A(y);\chi_B(z)\} = \begin{cases} 1 & \text{, se } y \in A \text{ e } z \in B \\ 0 & \text{, se } y \notin A \text{ ou } z \notin B \end{cases}.$$

Logo,

$$\chi_{A\otimes B}(x) = \sup_{\{(y;z);y\otimes z=x\}} \min\{\chi_A(y);\chi_B(z)\} = \begin{cases} 1 & \text{, se } x \in A\otimes B \\ 0 & \text{, se } x \notin A\otimes B \end{cases}.$$

□

Do Teorema 5.16 temos que as operações aritméticas para intervalos são estendidas para operações com números reais no caso em que o intervalo é degenerado, ou seja, fechado com extremos iguais.

Consequentemente as funções características de cada intervalo obtida através das operações aritméticas em intervalos também é obtida com as respectivas operações em números reais.

Corolário 5.17. *Os α-níveis do conjunto clássico (crisp) $A+B$, com função característica $\chi_{(A+B)}$ para todo $\alpha \in [0;1]$ são dados por*

$$[A+B]^{\alpha} = A+B.$$

Demonstração. Note que os intervalos A e B são subconjuntos da reta real, deste modo tem-se como consequência a função característica de um conjunto clássico, ou seja, a Definição 3.1. □

5.3.2 Operações aritméticas com números fuzzy

As operações aritméticas para números fuzzy são definidas a partir do Princípio da extensão de Zadeh para conjuntos fuzzy.

Definição 5.18. Sejam A e B dois números fuzzy e λ um número real.

1. A soma dos números fuzzy A e B é o número fuzzy, $A+B$, com função de pertinência

$$\varphi_{A+B}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} & , \text{ se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \phi(z) = 0 \end{cases},$$

com $\phi(z) = \{(x; y); x + y = z\}$.

2. A diferença $A - B$ é o número fuzzy de função de pertinência

$$\varphi_{A-B}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} & , \text{ se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \phi(z) = 0 \end{cases},$$

com $\phi(z) = \{(x; y); x - y = z\}$.

3. A multiplicação de λ por A é o número fuzzy λA, com função de pertinência

$$\varphi_{\lambda A}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\{x; \lambda x = z\}} \varphi_A(x) & , \text{ se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(Z) & , \text{ se } \lambda = 0 \end{cases},$$

com $\chi_{\{0\}}$ sendo a função característica de $\{0\}$.

4. A multiplicação de A por B é o número fuzzy $A \cdot B$, com função de pertinência

$$\varphi_{A.B}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} & , \text{ se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \phi(z) = 0 \end{cases},$$

com $\phi(z) = \{(x; y); x \cdot y = z\}$.

5. A divisão de A por B é o número fuzzy A/B com função de pertinência

$$\varphi_{A/B}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} & , \text{ se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \phi(z) = 0 \end{cases},$$

com $\phi(z) = \{(x; y); x/y = z\}$.

Teorema 5.19. *Os α-níveis do conjunto fuzzy $A \otimes B$ para todo $\alpha \in [0; 1]$ e com $\otimes$ sendo umas das operações aritméticas fuzzy, são dados por*

$$[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha.$$

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [2, 3, 19, 20].

A combinação dos Teoremas 4.8 e 5.19 fornecem um método eficaz para se obter as operações entre números fuzzy, sendo descritos no Proposição 5.20.

Proposição 5.20. *Sejam A e B números fuzzy com α-níveis dados por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_1^\alpha; b_2^\alpha]$, respectivamente, e λ um número real. São válidas as seguintes propriedades:*

1. A **adição** entre A e B é o número fuzzy $A + B$ com α-níveis
$$[A+B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha; a_2^\alpha + b_2^\alpha].$$

2. A **subtração** entre A e B é o número fuzzy $A - B$ com α-níveis α-níveis
$$[A-B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha; a_2^\alpha - b_1^\alpha].$$

3. A **multiplicação por um escalar** de λ por A é o número fuzzy λA com α-níveis
$$[\lambda A] = \lambda[A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha; \lambda a_2^\alpha] & , \text{ se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha; \lambda a_1^\alpha] & , \text{ se } \lambda < 0 \end{cases}.$$

4. A **multiplicação** de A por B é o número fuzzy $A \cdot B$ com α-níveis
$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha b_1^\alpha; a_1^\alpha b_2^\alpha; a_2^\alpha b_1^\alpha; a_2^\alpha b_2^\alpha\}; \max\{a_1^\alpha b_1^\alpha; a_1^\alpha b_2^\alpha; a_2^\alpha b_1^\alpha; a_2^\alpha b_2^\alpha\}].$$

5. A **divisão** de A por B, é o número fuzzy A/B com α-níveis
$$[A/B]^\alpha = [A]^\alpha/[B]^\alpha = \left[\min\left\{\frac{a_1^\alpha}{b_1^\alpha}; \frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}; \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha}; \frac{a_2^\alpha}{b_2^\alpha}\right\}; \max\left\{\frac{a_1^\alpha}{b_1^\alpha}; \frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}; \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha}; \frac{a_2^\alpha}{b_2^\alpha}\right\}\right],$$
com $0 \notin \text{supp } B$.

Corolário 5.21. *Sejam A e B números fuzzy triangulares, e seja λ um número real. A **adição, subtração** e **multiplicação por escalar** resulta em um número fuzzy triangular.*

Demonstração. Utilizando a Definição 5.5 e a Equação (5.3), para um número fuzzy triangular $F = (m; n; p)$ tem-se
$$[F]^\alpha = [a_1^\alpha; a_2^\alpha] = [\alpha(n-m) + m; \alpha(n-p) + p].$$

Tomando $A = (a_1; a; a_2)$ e $B = (b_1; b; b_2)$
$$\begin{aligned} [A]^\alpha =& [a_1^\alpha; a_2^\alpha] = [\alpha(a - a_1) + a_1; \alpha(a - a_2) + a_2], \\ [B]^\alpha =& [b_1^\alpha; b_2^\alpha] = [\alpha(b - b_1) + b_1; \alpha(b - b_2) + b_2]. \end{aligned}$$

Considere o número fuzzy triangular
$$T_1 = (a_1 + b_1; a + b; a_2 + b_2), \tag{5.18}$$
$$T_1 = (a_1 - b_2; a - b; a_2 - b_1). \tag{5.19}$$

Utilizando a Proposição 5.20, tem-se

1. Adição

$$\begin{aligned}
[A+B]^\alpha =& [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha ; a_2^\alpha + b_2^\alpha] \\
\Rightarrow [A+B]^\alpha =& [(\alpha(a-a_1)+a_1) + (\alpha(b-b_1)+b_1); \\
& (\alpha(a-a_2)+a_2) + (\alpha(b-b_2)+b_2)] \\
\Rightarrow [A+B]^\alpha =& [\alpha\{(a+b)-(a_1+b_1)\} + (a_1+b_1); \\
& (\alpha\{(a+b)-(a_2+b_2)\} + (a_2+b_2))]. \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

Note que a Equação (5.20) é na verdade os α-níveis da Equação (5.18)

$$[T_1]^\alpha = [A+B]^\alpha.$$

2. Subtração

$$\begin{aligned}
[A-B]^\alpha =& [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha ; a_2^\alpha - b_1^\alpha] \\
\Rightarrow [A-B]^\alpha =& [(\alpha(a-a_1)+a_1) - (\alpha(b-b_2)+b_2); \\
& (\alpha(a-a_2)+a_2) - (\alpha(b-b_1)+b_1)] \\
\Rightarrow [A-B]^\alpha =& [\alpha\{(a-b)-(a_1-b_2)\} + (a_1-b_2); \\
& (\alpha\{(a-b)-(a_2-b_1)\} + (a_2-b_1))]. \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

Note que a Equação (5.21) é na verdade os α-níveis da Equação (5.19)

$$[T_2]^\alpha = [A-B]^\alpha.$$

3. Multiplicação por escalar

$$[\lambda A] = \lambda[A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha ; \lambda a_2^\alpha] & , \text{ se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha ; \lambda a_1^\alpha] & , \text{ se } \lambda < 0 \end{cases}$$

Utilizando $\lambda \geq 0$ e A tem-se

$$\lambda[A]^\alpha = [\lambda(a_1^\alpha);\lambda(a_2^\alpha)] = [\lambda(\alpha(a-a_1)+a_1);\lambda(\alpha(a-a_2)+a_2)]. \qquad (5.22)$$

E para $\lambda < 0$ e A

$$\lambda[A]^\alpha = [\lambda(a_1^\alpha);\lambda(a_2^\alpha)] = [\lambda(\alpha(a-a_2)+a_2);\lambda(\alpha(a-a_1)+a_1)]. \qquad (5.23)$$

Observe que as Equação (5.22) são os α-níveis de

$$A = (\lambda a_1; \lambda a; \lambda a_2) \text{ , com } \lambda \geq 0,$$

E que a Equação (5.23) são os α-níveis de

$$A = (\lambda a_2; \lambda a; \lambda a_1) \text{ , com } \lambda < 0,$$

□

O Exemplo 5.22 mostra uma aplicação do Corolário 5.21.

Exemplo 5.22. [2] Considere os números fuzzy triangulares A e B que indicam, respectivamente, os números próximos de 2 e aproximadamente 4, dados por

$$A = (1; 2; 3) \text{ e } B = (3; 4; 5).$$

A Figura 5.19 mostra a representação gráfica de A e B.

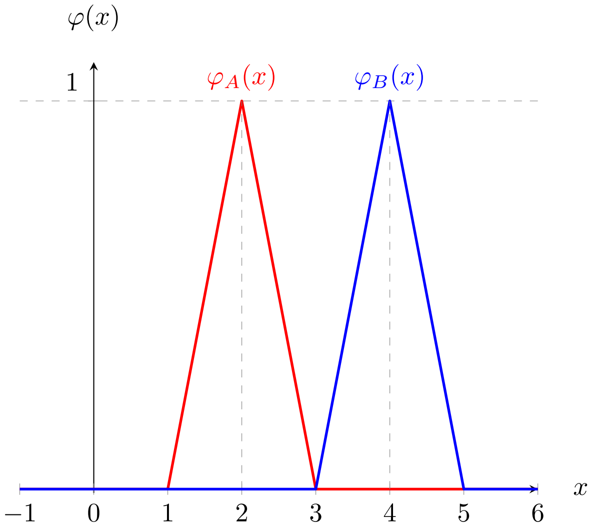


Figura 5.19: Representação de números fuzzy triangulares.

1. Adição

$$\begin{aligned} A + B =& [a_1; a_2] + [b_1; b_2] = [a_1 + b_1; a_2 + b_2] \\ \Rightarrow A + B =& [1 + 3; 2 + 4; 3 + 5] \\ \Rightarrow A + B =& [4; 6; 8]. \end{aligned}$$

A representação gráfica é apresentada na Figura 5.20.

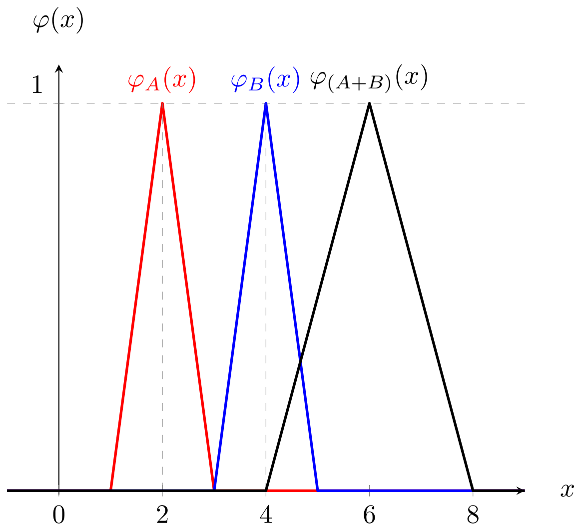


Figura 5.20: Adição de números fuzzy triangulares.

2. Subtração

$$\begin{aligned}A - B =& [a_1; a_2] - [b_1; b_2] = [a_1 - b_2; a_2 - b_1]\\ \Rightarrow A - B =& [1 - 5; 2 - 4; 3 - 3]\\ \Rightarrow A - B =& [-4; -2; 0].\end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned}B - A =& [b_1; b_2] - [a_1; a_2] = [b_1 - a_2; b_2 - a_1]\\ \Rightarrow B - A =& [3 - 3; 4 - 2; 5 - 1]\\ \Rightarrow B - A =& [0; 2; 4].\end{aligned}$$

A representação gráfica é apresentada na Figura 5.21.

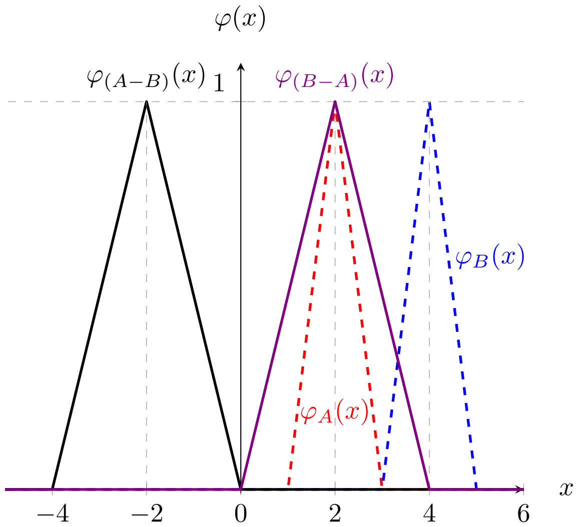


Figura 5.21: Subtração de números fuzzy triangulares.

3. Multiplicação por escalar considerando $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_1 = -3$

$$\begin{aligned}\lambda \cdot A =& \lambda[a_1; a_2] = \begin{cases}[\lambda a_1; \lambda a_2] & \text{, se } \lambda \geq 0\\ [\lambda a_2; \lambda a_1] & \text{, se } \lambda < 0\end{cases}\\ \Rightarrow \lambda_1 A =& \lambda_1[\lambda_1 a_1; \lambda_1 a_2] = [2 \cdot 1; 2 \cdot 2; 2 \cdot 3] = [2; 4; 6],\\ \Rightarrow \lambda_2 A =& \lambda_2[\lambda_2 a_2; \lambda_2 a_1] = [-3 \cdot 3; -3 \cdot 2; -3 \cdot 1] = [-9; -6; -3].\end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lambda_1 B =& \lambda_1[\lambda_1 b_1; \lambda_1 b_2] = [2 \cdot 3; 2 \cdot 4; 2 \cdot 5] = [6; 8; 10],\\ \Rightarrow \lambda_2 B =& \lambda_2[\lambda_2 b_2; \lambda_2 b_1] = [-3 \cdot 5; -3 \cdot 4; -3 \cdot 3] = [-15; -12; -9].\end{aligned}$$

A Figura 5.22 apresenta a representação gráfica para o número fuzzy A.

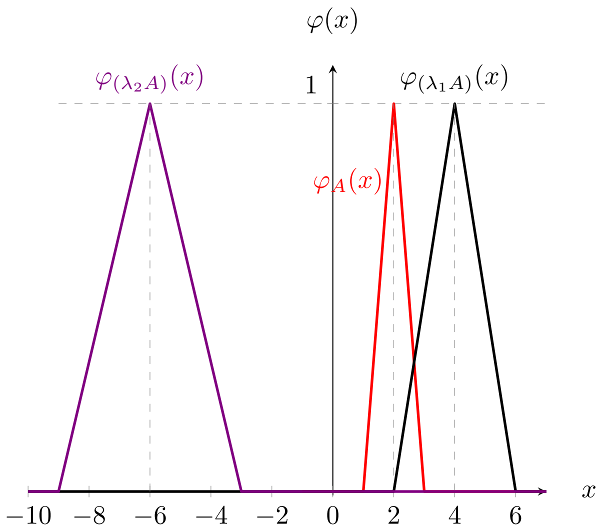


Figura 5.22: Multiplicação por escalar de números fuzzy triangulares para A.

A Figura 5.23 apresenta a representação gráfica para o número fuzzy B.

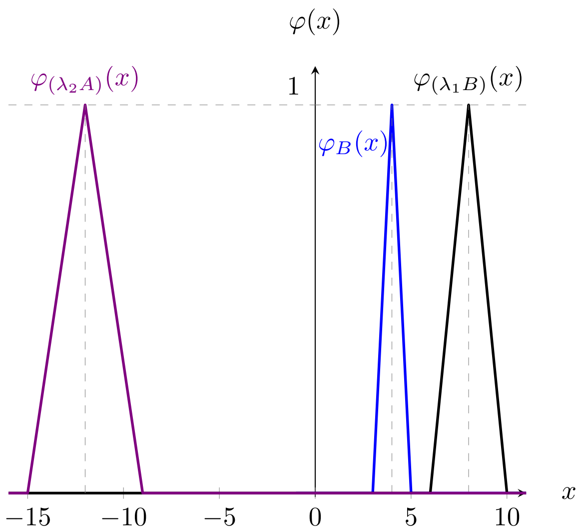


Figura 5.23: Multiplicação por escalar de números fuzzy triangulares para B.

O Exemplo 5.23 apresenta todas as operações utilizando a Proposição 5.20, note que para a multiplicação e divisão entre números fuzzy triangulares não temos como solução números triangulares.

Exemplo 5.23. [2] Considere novamente os números fuzzy triangulares A e B que indicam, respectivamente, os números próximos de 2 e aproximadamente 4, dados por

$$A = (1; 2; 3) \text{ e } B = (3; 4; 5).$$

Utilizando a Definição 5.5 para $F = (m, n, p)$

$$\begin{aligned} [F]^\alpha =& [a_1^\alpha; a_2^\alpha] = [\alpha(n-m)+m; \alpha(n-p)+p] \\ \Rightarrow [A]^\alpha =& [\alpha(2-1)+1; \alpha(2-3)+3] \\ \Rightarrow [A]^\alpha =& [\alpha+1; -\alpha+3]. \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \Rightarrow [B]^\alpha =& [\alpha(4-3)+3; \alpha(4-5)+5] \\ \Rightarrow [B]^\alpha =& [\alpha+3; -\alpha+5]. \end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 5.20:

1. Adição

$$\begin{aligned} [A+B]^\alpha =& [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha; a_2^\alpha + b_2^\alpha] \\ \Rightarrow [A+B]^\alpha =& [(\alpha+1)+(\alpha+3); (-\alpha+3)+(-\alpha+5)] \\ \Rightarrow [A+B]^\alpha =& [2\alpha+4; -2\alpha+8]. \end{aligned}$$

Assim, considerando $\alpha = 0$ tem-se

$$A + B = (4; 5; 8),$$

que está de acordo com o Exemplo 5.22 e a Figura 5.20.

2. Subtração

$$\begin{aligned} [A-B]^\alpha =& [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha; a_2^\alpha + b_1^\alpha] \\ \Rightarrow [A-B]^\alpha =& [(\alpha+1)-(-\alpha+5); (-\alpha+3)-(\alpha+3)] \\ \Rightarrow [A-B]^\alpha =& [2\alpha-4; -2\alpha]. \end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned} \Rightarrow [B-A]^\alpha =& [(\alpha+3)-(-\alpha+3); (-\alpha+5)-(\alpha+1)] \\ \Rightarrow [B-A]^\alpha =& [2\alpha; -2\alpha+6]. \end{aligned}$$

Considerando $\alpha = 0$ tem-se

$$\begin{aligned} A - B =& (-4; -2; 0), \\ B - A =& (0; 2; 4). \end{aligned}$$

que estão de acordo com o Exemplo 5.22 e a Figura 5.21.

3. Multiplicação por escalar considerando $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_1 = -3$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot A =& \lambda[a_1; a_2] = \begin{cases} [\lambda a_1; \lambda a_2] & \text{, se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2; \lambda a_1] & \text{, se } \lambda < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow 2 \cdot A =& [2 \cdot (\alpha+1); 2 \cdot (-\alpha+3)] \\ \Rightarrow 2 \cdot A =& [2\alpha+2; -2\alpha-6]. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Rightarrow -3\cdot A =&[-3\cdot(-\alpha+3);-3\cdot(\alpha+1)]\\ \Rightarrow -3\cdot A =&[3\alpha-9;-3\alpha-3].\end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2\cdot B =&[2\cdot(\alpha+3);2\cdot(-\alpha+5)]\\ \Rightarrow 2\cdot B =&[2\alpha+6;-2\alpha+10].\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Rightarrow -3\cdot B =&[-3\cdot(-\alpha+5);-3\cdot(\alpha+3)]\\ \Rightarrow -3\cdot B =&[3\alpha-15;-3\alpha-9].\end{aligned}$$

Considerando $\alpha = 0$ tem-se

$$\begin{aligned}2\cdot A =&(2;4;6),\\ -3\cdot A =&(-9;-6;-3),\\ 2\cdot B =&(6;8;10),\\ -3\cdot B =&(-15;12;-9).\end{aligned}$$

que estão de acordo com o Exemplo 5.22 e as Figuras 5.22 e 5.23.

4. Multiplicação

$$\begin{aligned}[A\cdot B]^\alpha =&[A]^\alpha\cdot[B]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha b_1^\alpha;a_1^\alpha b_2^\alpha;a_2^\alpha b_1^\alpha;a_2^\alpha b_2^\alpha\};\\ &\max\{a_1^\alpha b_1^\alpha;a_1^\alpha b_2^\alpha;a_2^\alpha b_1^\alpha;a_2^\alpha b_2^\alpha\}]\\ \Rightarrow [A\cdot B]^\alpha =&[\min\{(\alpha+1)\cdot(\alpha+3);(\alpha+1)\cdot(-\alpha+5);\\ &(-\alpha+3)\cdot(\alpha+3);(-\alpha+3)\cdot(-\alpha+5)\};\\ &\max\{(\alpha+1)\cdot(\alpha+3);(\alpha+1)\cdot(-\alpha+5);\\ &(-\alpha+3)\cdot(\alpha+3);(-\alpha+3)\cdot(-\alpha+5)\}].\end{aligned}$$

Para a determinação do mínimo e máximo é necessário avaliar como os valores de α se comportam em cada subintervalo em que $\alpha \in (0;1]$.

Na Tabela 5.1 tem-se os valores para análise, onde a primeira coluna numera as funções, já a segunda e terceira apresentam estas funções. A quarta e sexta coluna apresentam as raízes das funções denominadas x_1 e x_2, já a quinta e sétima coluna apresentam respectivamente os valores do vértice da parábola, sendo x_v o ponto de máximo ou mínimo, ou seja, y_v.

n°	Função	Forma quadrática	x_1	x_v	x_2	y_v
I	$(\alpha+1)(\alpha+3)$	$\alpha^2+4\alpha+3$	-1	-2	-3	-1
II	$(\alpha+1)(-\alpha+5)$	$-\alpha^2+4\alpha+5$	-2	2	5	9
III	$(-\alpha+3)(\alpha+3)$	$-\alpha^2+9$	-3	0	3	9
IV	$(-\alpha+3)(-\alpha+5)$	$\alpha^2-8\alpha+15$	3	4	5	-1

Tabela 5.1: Valores para análise da multiplicação de A por B.

Os gráficos das funções da Tabela 5.1 são apresentados na Figura 5.24.

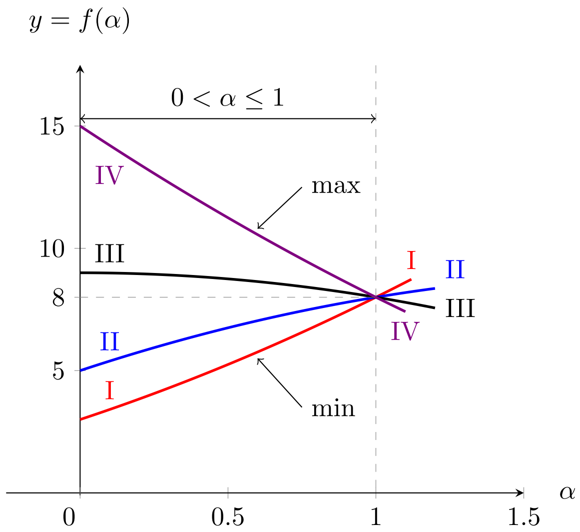


Figura 5.24: Funções para análise dos valores de α para a multiplicação de A por B.

Note que para o $\min f(\alpha)$ tem-se a função I e para o $\max f(\alpha)$ temos apenas a função IV para todo $\alpha \in (0;1]$, assim

$$[A \cdot B]^{\alpha} = [\text{ I };\ \text{IV}],$$

ou seja,

$$[A \cdot B]^{\alpha} = [\alpha^2 + 4\alpha + 3; \alpha^2 - 8\alpha + 15]. \tag{5.24}$$

Para $\alpha = 0,5$ tem-se

$$[A \cdot B]^{0,5} = [5,25; 11,25].$$

As funções de pertinência são determinadas utilizando os α-níveis da Equação (5.24). Determina-se as desigualdades necessárias e isola-se o α de acordo com a Definição 3.23.

i) Para a função I (mínimo)

$$\begin{aligned}
\varphi_{(A \cdot B)}(x) \geq & \alpha \\
\Rightarrow x \geq & \alpha^2 + 4\alpha + 3 \\
\Rightarrow x + 1 \geq & \alpha^2 + 4\alpha + 3 + 1 \\
\Rightarrow x + 1 \geq & \alpha^2 + 4\alpha + 4 \\
\Rightarrow x + 1 \geq & (\alpha + 2)^2 \\
\Rightarrow (x+1)^{1/2} \geq & \alpha + 2 \\
\Rightarrow (x+1)^{1/2} - 2 \geq & \alpha.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

De acordo com a Figura 5.24 é possível notar que $\alpha \in (0;1]$ e $f(\alpha) \in [3;8]$.

ii) Para a função IV (máximo)

$$
\begin{aligned}
\varphi_{(A \cdot B)}(x) \geq & \alpha \\
\Rightarrow x \geq & \alpha^2 - 8\alpha + 15 \\
\Rightarrow x + 1 \geq & \alpha^2 - 8\alpha + 15 + 1 \\
\Rightarrow x + 1 \geq & \alpha^2 - 8\alpha + 16 \\
\Rightarrow x + 1 \geq & (-\alpha + 4)^2 \\
\Rightarrow (x+1)^{1/2} \geq & -\alpha + 4 \\
\Rightarrow (x+1)^{1/2} - 4 \geq & -\alpha \\
\Rightarrow -(x+1)^{1/2} + 4 \leq & \alpha.
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Observe na Figura 5.24 que $\alpha \in (0; 1]$ e que $f(\alpha) = [8; 15]$.

Das Equações (5.25) e (5.26) temos a função de pertinência

$$
\varphi_{(A \cdot B)}(x) = \begin{cases} (x+1)^{1/2} - 2 & , \text{ se } x \in [3; 8] \\ -(x+1)^{1/2} + 4 & , \text{ se } x \in (8; 15] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} .
$$

A Figura 5.25 apresenta a representação gráfica.

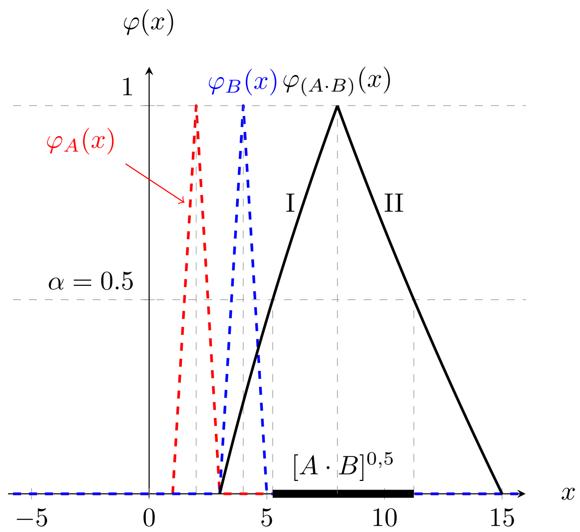


Figura 5.25: Representação da multiplicação de números fuzzy triangulares por α-nível.

Note que na Figura 5.25 é possível notar que a multiplicação dos números triangulares fuzzy A e B não resulta em um número triangular fuzzy.

5. Divisão

$$[A/B]^\alpha = [A]^\alpha/[B]^\alpha = \left[\min\left\{\frac{a_1^\alpha}{b_1^\alpha}; \frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}; \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha}; \frac{a_2^\alpha}{b_2^\alpha}\right\}; \max\left\{\frac{a_1^\alpha}{b_1^\alpha}; \frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}; \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha}; \frac{a_2^\alpha}{b_2^\alpha}\right\}\right]$$
$$\Rightarrow [A/B]^\alpha = \left[\min\left\{\frac{\alpha+1}{\alpha+3}; \frac{\alpha+1}{-\alpha+5}; \frac{-\alpha+3}{\alpha+3}; \frac{-\alpha+3}{-\alpha+5}\right\};\right.$$
$$\left.\max\left\{\frac{\alpha+1}{\alpha+3}; \frac{\alpha+1}{-\alpha+5}; \frac{-\alpha+3}{\alpha+3}; \frac{-\alpha+3}{-\alpha+5}\right\}\right].$$

Considerando a Tabela 5.2, a Figura 5.26 apresenta a solução gráfica das funções.

n°	Função
I	$(\alpha+1)/(\alpha+3)$
II	$(\alpha+1)/(-\alpha+5)$
III	$(-\alpha+3)/(\alpha+3)$
IV	$(-\alpha+3)/(-\alpha+5)$

Tabela 5.2: Valores para análise da divisão de A por B.

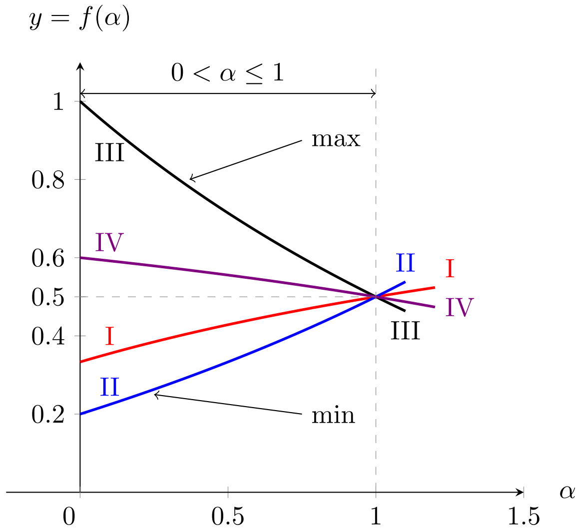


Figura 5.26: Funções para análise dos valores de α para a divisão de A por B.

Observando Figura 5.26 é possível verificar que o min $f(\alpha)$ é definido pela função II no intervalo de $\alpha \in (0; 1]$, e para o max temos a função III no intervalo $\alpha \in [0; 1]$.

$$[A/B]^\alpha = [\ \text{II}\ ;\ \text{III}\ ],$$

ou seja,

$$[A/B]^\alpha = \left[\frac{\alpha+1}{-\alpha+5}; \frac{-\alpha+3}{\alpha+3}\right]. \tag{5.27}$$

Para $\alpha = 0,5$ tem-se

$$[A/B]^{0,5} = [1/3; 5/7].$$

As funções de pertinência são determinadas utilizando os α-níveis da Equação (5.27). Determina-se as desigualdades necessárias e isola-se o α de acordo com a Definição 3.23.

i) Para a função II (mínimo)

$$\begin{aligned}
\varphi_{(A/B)}(x) \geq& \alpha \\
\Rightarrow x \geq& (\alpha+1)/(-\alpha+5) \\
\Rightarrow x \cdot (-\alpha+5) \geq& \alpha+1 \\
\Rightarrow -\alpha x + 5x \geq& \alpha+1 \\
\Rightarrow 5x - 1 \geq& \alpha x + \alpha \\
\Rightarrow 5x - 1 \geq& \alpha(x+1) \\
\Rightarrow \frac{5x-1}{x+1} \geq& \alpha.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Observa na Figura 5.26 que tem-se que $\alpha \in (0;1]$ e que $f(\alpha) \in [0,2;0,5]$.

ii) Para a função III (máximo)

$$\begin{aligned}
\varphi_{(A/B)}(x) \geq& \alpha \\
\Rightarrow x \geq& (-\alpha+3)/(\alpha+3) \\
\Rightarrow x \cdot (\alpha+3) \geq& -\alpha+3 \\
\Rightarrow \alpha x + 3x \geq& -\alpha+3 \\
\Rightarrow 3x - 3 \geq& -\alpha - \alpha x \\
\Rightarrow 3x - 3 \geq& -\alpha(1+x) \\
\Rightarrow \frac{3x-3}{x+1} \geq& -\alpha \\
\Rightarrow \frac{-3x+3}{x+1} \leq& \alpha.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Observe na Figura 5.24 que $\alpha \in (0;1]$ e $f(\alpha) \in [0,5;1]$.

Das Equações (5.28) e (5.29) temos a função de pertinência

$$\varphi_{(A/B)}(x) = \begin{cases} (5x-1)/(x+1) & , \text{ se } x \in [0,2;0,5] \\ (-3x+3)/(x+1) & , \text{ se } x \in (0,5;1] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

A Figura 5.27 apresenta a representação gráfica.

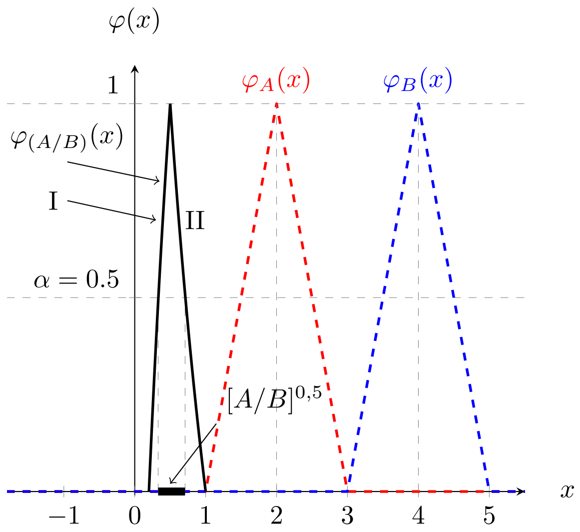


Figura 5.27: Representação da divisão de números fuzzy triangulares por α-nível.

Note que na Figura 5.27 é possível notar que a divisão dos números triangulares fuzzy A e B não resulta em um número triangular fuzzy.

Observação 5.24. Do Exemplo 5.22 nos itens 4 e 5 é possível notar que $A \cdot B$ e A/B não são números fuzzy triangulares, seja pela forma gráfica, e também porque seus α-níveis não podem ser obtidos por uma terna do tipo $F = (m, n, p)$ da Definição 5.5. Observe que deveria-se ter

$$[\alpha(n-m)+m; \alpha(n-p)+p] = [(\alpha+1)(\alpha+3); (-\alpha+3)(-\alpha+5)].$$

Assim, tem-se o sistema

$$\begin{cases} \alpha(n-m)+m = & \alpha^2+4\alpha+3 \\ \alpha(n-p)+p = & \alpha^2-8\alpha+15 \end{cases}.$$

Este sistema é impossível. De forma análoga verifica-se que para a divisão também tem-se um sistema impossível, e consequentemente ambos não são triangulares.

Exemplo 5.25. [19] Sejam os números triangulares fuzzy A e B com funções de pertinência definidas por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} (x+1)/2 & , \text{ se } x \in [-1;1] \\ (-x+3)/2 & , \text{ se } x \in (1;3] \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad , \text{ e } \varphi_B(x) = \begin{cases} (x-1)/2 & , \text{ se } x \in [1;3] \\ (-x+5)/2 & , \text{ se } x \in (3;5] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

Para determinar os α-níveis utiliza-se a Definição 3.23, assim:

i) Para $x \in [1;3]$

$$\begin{aligned} \varphi_A(x) \geq & \alpha \\ \Rightarrow (x+1)/2 \geq & \alpha \\ \Rightarrow (x+1) \geq & 2\alpha \\ \Rightarrow x \geq & 2\alpha - 1. \end{aligned} \tag{5.30}$$

ii) Para $x \in (1;3]$

$$\begin{aligned} \varphi_A(x) \geq& \alpha \\ \Rightarrow (-x+3)/2 \geq& \alpha \\ \Rightarrow -x+3 \geq& 2\alpha \\ \Rightarrow -x \geq& 2\alpha - 3 \\ \Rightarrow x \leq& -2\alpha + 3. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Comparando as Equações (5.30) e (5.31)

$$\begin{aligned} 2\alpha - 1 \leq x \leq -2\alpha + 3 \\ \Rightarrow x \in [2\alpha - 1; -2\alpha + 3]. \end{aligned} \tag{5.32}$$

iii) Para $x \in [1;3]$

$$\begin{aligned} \varphi_B(x) \geq& \alpha \\ \Rightarrow (x-1)/2 \geq& \alpha \\ \Rightarrow x - 1 \geq& 2\alpha \\ \Rightarrow x \geq& 2\alpha + 1. \end{aligned} \tag{5.33}$$

iv) Para $x \in (3;5]$

$$\begin{aligned} \varphi_B(x) \geq& \alpha \\ \Rightarrow (-x+5)/2 \geq& \alpha \\ \Rightarrow -x+5 \geq& 2\alpha \\ \Rightarrow -x \geq& 2\alpha - 5 \\ \Rightarrow x \leq& -2\alpha + 5. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Comparando as Equações (5.33) e (5.34)

$$\begin{aligned} 2\alpha + 1 \geq x \geq -2\alpha + 5 \\ \Rightarrow x \in [2\alpha + 1; -2\alpha + 5]. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Comparando as Equações (5.32) e (5.35) tem-se os α-níveis

$$[A]^\alpha = [2\alpha - 1; -2\alpha + 3], \tag{5.36}$$
$$[B]^\alpha = [2\alpha + 1; -2\alpha + 5]. \tag{5.37}$$

A Figura 5.28 apresenta a representação gráfica dos números fuzzy

$$\begin{aligned} A =& (-1;1;3), \\ B =& (1;3;5). \end{aligned}$$

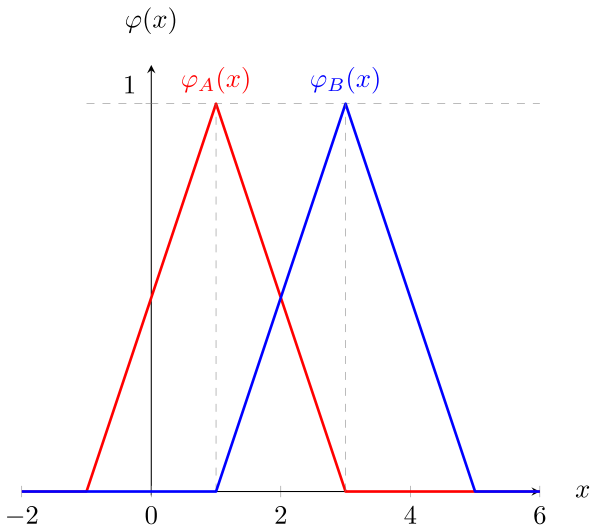


Figura 5.28: Representação dos números fuzzy triangulares.

Utilizando a Definição 5.5, Proposição 5.20 e o Corolário 5.21:

1. Adição

$$
\begin{aligned}
[A+B]^\alpha =&[A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha; a_2^\alpha + b_2^\alpha]\\
\Rightarrow [A+B]^\alpha =&[(2\alpha-1)+(2\alpha+1); (-2\alpha+3)+(-2\alpha+5)]\\
\Rightarrow [A+B]^\alpha =&[4\alpha; -4\alpha+8] \text{ para } \alpha \in (0;1].
\end{aligned}
$$

Para $\alpha = 0,5$

$$[A+B]^{0,5} = [2;6].$$

E para a representação na forma triangular

$$
\begin{aligned}
A+B =&(-1;1;3)+(1;3;5)\\
\Rightarrow A+B =&(-1+1;1+3;3+5)\\
\Rightarrow A+B =&(0;4;8).
\end{aligned}
$$

E função de pertinência

$$
\varphi_F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-m}{n-m} & \text{, se } m < x \leq n \\ \dfrac{-x+p}{p-n} & \text{, se } n < x \leq p \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases} \text{, com } F = (m;n;p),
$$

$$
\Rightarrow \varphi_{(A+B)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-0}{4-0} & \text{, se } 0 < x \leq 4 \\ \dfrac{-x+8}{8-4} & \text{, se } 4 < x \leq 8 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases},
$$

$$
\Rightarrow \varphi_{(A+B)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} & \text{, se } 0 < x \leq 4 \\ \dfrac{-x+8}{4} & \text{, se } 4 < x \leq 8 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}.
$$

A Figura 5.29 mostra a representação gráfica.

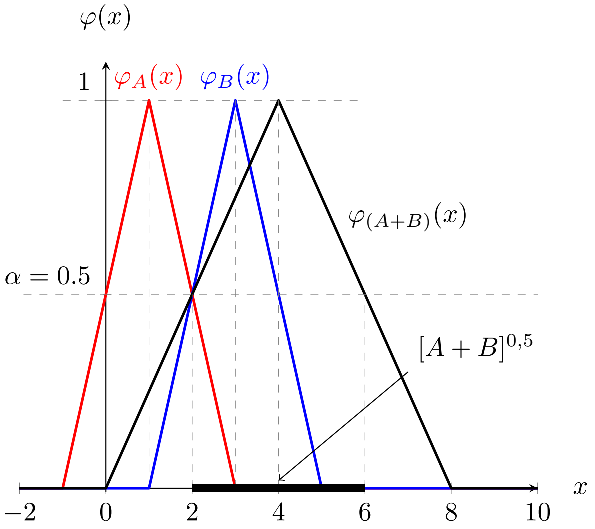


Figura 5.29: Representação da adição de números fuzzy triangulares por α-nível

2. Subtração

   i) Para $A - B$:

$$\begin{aligned} [A-B]^\alpha =& [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha; a_2^\alpha + b_1^\alpha] \\ \Rightarrow [A-B]^\alpha =& [(2\alpha - 1) - (-2\alpha + 5); (-2\alpha + 3) - (2\alpha + 1)] \\ \Rightarrow [A-B]^\alpha =& [4\alpha - 6; -4\alpha + 2] \text{ para } \alpha \in (0;1]. \end{aligned}$$

Para $\alpha = 0,5$

$$[A-B]^{0,5} = [-4; 0].$$

E também a representação na forma triangular

$$\begin{aligned} A - B =& (-1;1;3) - (1;3;5) \\ \Rightarrow A - B =& (-1-5; 1-3; 3-1) \\ \Rightarrow A - B =& (-6; -2; 2). \end{aligned}$$

E função de pertinência

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-m}{n-m} & \text{, se } m < x \leq n \\ \dfrac{-x+p}{p-n} & \text{, se } n < x \leq p \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases} \text{, com } F = (m;n;p),$$

$$\Rightarrow \varphi_{(A-B)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-(-6)}{-2-(-6)} & \text{, se } -6 < x \leq -2 \\ \dfrac{-x+2}{2-(-2)} & \text{, se } -2 < x \leq 2 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases},$$

$$\Rightarrow \varphi_{(A-B)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+6}{4} & \text{, se } -6 < x \leq -2 \\ \dfrac{-x+2}{4} & \text{, se } -2 < x \leq 2 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}.$$

A Figura 5.30 mostra a representação gráfica.

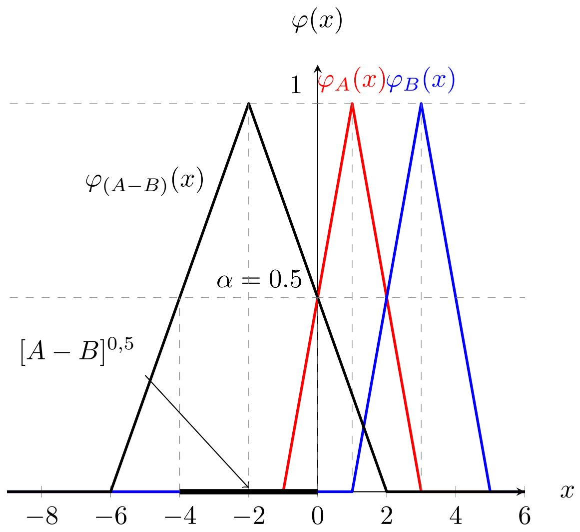


Figura 5.30: Representação da subtração de números fuzzy triangulares por α-nível $A-B$

ii) Para $B - A$:

$$\begin{aligned} [B-A]^\alpha &= [B]^\alpha - [A]^\alpha = [b_1^\alpha - a_2^\alpha; b_2^\alpha + a_1^\alpha] \\ \Rightarrow [B-A]^\alpha &= [(2\alpha+1) - (-2\alpha+3); (-2\alpha+5) - (2\alpha-1)] \\ \Rightarrow [B-A]^\alpha &= [4\alpha-2; -4\alpha+6] \text{ para } \alpha \in (0;1]. \end{aligned}$$

Para $\alpha = 0,5$

$$[A-B]^{0,5} = [0;4].$$

E também tem-se a representação na forma triangular

$$\begin{aligned} B - A =& (1;3;5) - (-1;1;3) \\ \Rightarrow B - A =& (1-3;3-1;5-(-1)) \\ \Rightarrow B - A =& (-2;2;6). \end{aligned}$$

E função de pertinência

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-m}{n-m} & \text{, se } m < x \leq n \\ \dfrac{-x+p}{p-n} & \text{, se } n < x \leq p \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases} \text{, com } F = (m;n;p),$$

$$\Rightarrow \varphi_{(B-A)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-(-2)}{2-(-2)} & \text{, se } -2 < x \leq 2 \\ \dfrac{-x+2}{6-2} & \text{, se } 2 < x \leq 6 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases},$$

$$\Rightarrow \varphi_{(B-A)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{4} & \text{, se } -2 < x \leq 2 \\ \dfrac{-x+2}{4} & \text{, se } 2 < x \leq 6 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}.$$

A Figura 5.31 mostra a representação gráfica.

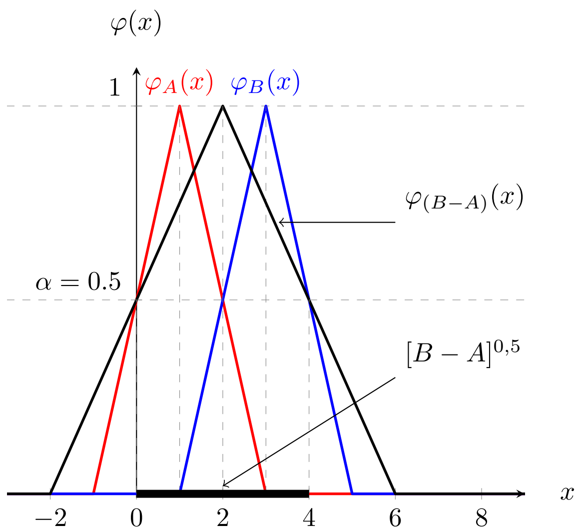


Figura 5.31: Representação da subtração de números fuzzy triangulares por α-nível $B-A$

3. Multiplicação por escalar considerando $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$

$$[\lambda A] = \lambda[A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha; \lambda a_2^\alpha] & \text{, se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha; \lambda a_1^\alpha] & \text{, se } \lambda < 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \cdot A =& [2 \cdot (2\alpha - 1); 2 \cdot (-2\alpha + 3)] \\ \Rightarrow A =& [4\alpha - 2; -4\alpha + 6]. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Rightarrow -3\cdot A =& [-3\cdot(-2\alpha+3); -3\cdot(2\alpha-1)]\\ \Rightarrow -3\cdot A =& [6\alpha-9; -6\alpha+3].\end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2\cdot B =& [2\cdot(2\alpha+1); 2\cdot(-2\alpha+5)]\\ \Rightarrow 2\cdot B =& [4\alpha+2; -4\alpha+10].\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Rightarrow -3\cdot B =& [-3\cdot(-2\alpha+5); -3\cdot(2\alpha+1)]\\ \Rightarrow -3\cdot B =& [6\alpha-15; -6\alpha-3].\end{aligned}$$

Para $\alpha = 0,5$

$$\begin{aligned}2\cdot A =& [0;4],\\ -3\cdot A =& [-6;0],\\ 2\cdot B =& [4;8],\\ -3\cdot B =& [-12;-6].\end{aligned}$$

E também tem-se a representação na forma triangular

$$\begin{aligned}2\cdot A =& (-2;2;6),\\ -3\cdot A =& (-9;-3;3),\\ 2\cdot B =& (2;6;10),\\ -3\cdot B =& (-15;-9;-3).\end{aligned}$$

As funções de pertinência são

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-m}{n-m} & , \text{se } m < x \leq n \\ \dfrac{-x+p}{p-n} & , \text{se } n < x \leq p \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} \quad , \text{ com } F = (m; n; p),$$

$$\Rightarrow \varphi_{(2 \cdot A)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{4} & , \text{se } -2 < x \leq 2 \\ \dfrac{-x+6}{4} & , \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} ,$$

$$\Rightarrow \varphi_{(-3 \cdot A)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+9}{6} & , \text{se } -9 < x \leq -3 \\ \dfrac{-x+3}{6} & , \text{se } -3 < x \leq 3 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} ,$$

$$\Rightarrow \varphi_{(2 \cdot B)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{4} & , \text{se } 2 < x \leq 6 \\ \dfrac{-x+10}{4} & , \text{se } 6 < x \leq 10 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} ,$$

$$\Rightarrow \varphi_{(-3 \cdot B)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+15}{6} & , \text{se } -15 < x \leq -9 \\ \dfrac{-x-3}{6} & , \text{se } -9 < x \leq -3 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} .$$

As Figuras 5.32 e 5.33 apresentam as representações gráficas.

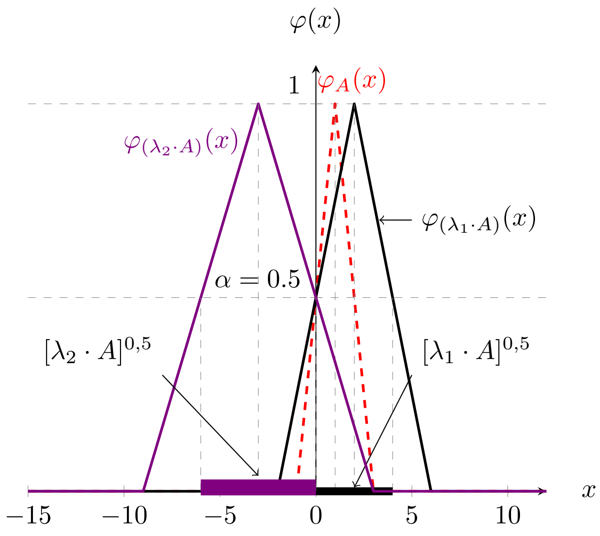


Figura 5.32: Representação da multiplicação por escalar de números fuzzy triangulares por α-nível para A.

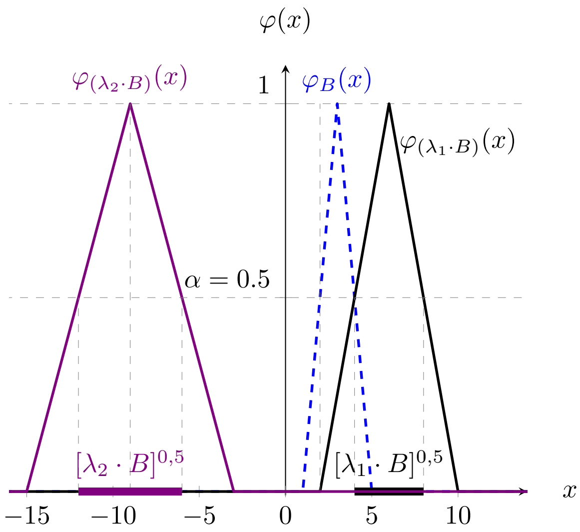


Figura 5.33: Representação da multiplicação por escalar de números fuzzy triangulares por α-nível para B

4. Multiplicação

$$\begin{aligned}[A \cdot B]^\alpha =& [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha b_1^\alpha; a_1^\alpha b_2^\alpha; a_2^\alpha b_1^\alpha; a_2^\alpha b_2^\alpha\}; \\ & \max\{a_1^\alpha b_1^\alpha; a_1^\alpha b_2^\alpha; a_2^\alpha b_1^\alpha; a_2^\alpha b_2^\alpha\}] \\ \Rightarrow [A \cdot B]^\alpha =& [\min\{(2\alpha-1)(2\alpha+1); (2\alpha-1)(-2\alpha+5); \\ & (-2\alpha+3)(2\alpha+1); (-2\alpha+3)(-2\alpha+5)\}; \\ & \max\{(2\alpha-1)(2\alpha+1); (2\alpha-1)(-2\alpha+5); \\ & (-2\alpha+3)(2\alpha+1); (-2\alpha+3)(-2\alpha+5)\}].\end{aligned}$$

Para a determinação do mínimo e máximo é necessário avaliar como os valores de α se comportam em cada subintervalo em que $\alpha \in (0; 1]$.

A Tabela 5.3 apresenta os valores para análise, onde a primeira coluna numera as funções, já a segunda e terceira apresentam estas funções. A quarta e sexta coluna apresentam as raízes das funções denominadas x_1 e x_2, já a quinta e sétima coluna apresentam respectivamente os valores do vértice da parábola, sendo x_v o ponto de máximo ou mínimo, ou seja, y_v.

n°	Função	Forma quadrática	x_1	x_v	x_2	y_v
I	$(2\alpha-1)(2\alpha+1)$	$4\alpha^2-1$	$-0,5$	0	$0,5$	-1
II	$(2\alpha-1)(-2\alpha+5)$	$-4\alpha^2+12\alpha-5$	$0,5$	$1,5$	$2,5$	4
III	$(-2\alpha+3)(2\alpha+1)$	$-4\alpha^2+4\alpha+3$	$-0,5$	$0,5$	$1,5$	4
IV	$(-2\alpha+3)(-2\alpha+5)$	$4\alpha^2-16\alpha+15$	$1,5$	2	$2,5$	-1

Tabela 5.3: Valores para análise da multiplicação de A por B.

A Figura 5.34 apresenta os gráficos para as funções da Tabela 5.3.

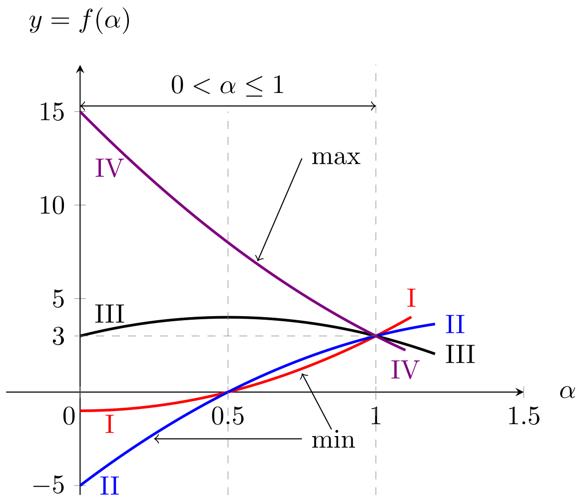


Figura 5.34: Funções para análise dos valores de α para a multiplicação de A por B.

Note que para o min $f(\alpha)$ tem-se a função II no intervalo $\alpha \in (0; 0,5]$ e a função I no intervalo $\alpha \in (0,5; 1]$. Já para o max $f(\alpha)$ temos apenas a função IV para todo o intervalo $\alpha \in (0; 1]$, assim

$$[A \cdot B]^\alpha = \begin{cases} [\mathrm{II}; \mathrm{IV}] & , \text{ se } \alpha \in (0; 0,5] \\ [\mathrm{I}; \mathrm{IV}] & , \text{ se } \alpha(0,5; 1] \end{cases},$$

ou seja,

$$[A \cdot B]^\alpha = \begin{cases} [-4\alpha^2 + 12\alpha - 5; 4\alpha^2 - 16\alpha + 15] & , \text{ se } \alpha \in (0; 0,5] \\ [4\alpha^2 - 1; 4\alpha^2 - 16\alpha + 15] & , \text{ se } \alpha(0,5; 1] \end{cases}. \tag{5.38}$$

Para $\alpha = 0,5$ tem-se

$$[A \cdot B]^{0,5} = [0; 8].$$

As funções de pertinência são determinadas utilizando os α-níveis da Equação (5.38). Determina-se as desigualdades necessárias e isola-se o α de acordo com a Definição 3.23.

i) Para a função I (mínimo)

$$\begin{aligned} \varphi_{(A \cdot B)}(x) \geq& \alpha \\ \Rightarrow x \geq& 4\alpha^2 - 1 \\ \Rightarrow x + 1 \geq& 4\alpha^2 \\ \Rightarrow (x+1)/4 \geq& \alpha^2 \\ \Rightarrow (x+1)^{1/2}/2 \geq& \alpha. \end{aligned} \tag{5.39}$$

De acordo com a Figura 5.34 é possível notar que $\alpha \in (0,5; 1]$ e $f(\alpha) \in [0; 3]$.

ii) Para a função II (mínimo)

$$\begin{aligned}
\varphi_{(A\cdot B)}(x) \geq & \alpha \\
\Rightarrow x \geq & -4\alpha^2+12\alpha-5 \\
\Rightarrow -x \leq & 4\alpha^2-12\alpha+5 \\
\Rightarrow -x+4 \leq & 4\alpha^2-12\alpha+5+4 \\
\Rightarrow -x+4 \leq & (-2\alpha+3)^2 \\
\Rightarrow (-x+4)^{1/2} \leq & -2\alpha+3 \\
\Rightarrow -(-x+4)^{1/2} \geq & 2\alpha-3 \\
\Rightarrow -(-x+4)^{1/2}+3 \geq & 2\alpha \\
\Rightarrow [-(-x+4)^{1/2}+3]/2 \geq & \alpha.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Observe na Figura 5.34 que $\alpha \in (0; 0,5]$ e que $f(\alpha) = [-5; 0]$.

iii) Para a função IV (máximo)

$$\begin{aligned}
\varphi_{(A\cdot B)}(x) \geq & \alpha \\
\Rightarrow x \geq & 4\alpha^2-16\alpha+15 \\
\Rightarrow x+1 \geq & 4\alpha^2-16\alpha+15+1 \\
\Rightarrow x+1 \geq & 4\alpha^2-16\alpha+16 \\
\Rightarrow x+1 \geq & (-2\alpha+4)^2 \\
\Rightarrow (x+1)^{1/2} \geq & -2\alpha+4 \\
\Rightarrow (x+1)^{1/2}-4 \geq & -2\alpha \\
\Rightarrow -(x+1)^{1/2}+4 \leq & 2\alpha \\
\Rightarrow [-(x+1)^{1/2}+4]/2 \leq & \alpha.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Deste modo, observando a Figura 5.34 tem-se que $\alpha \in [0; 1]$ e $f(\alpha) \in [3; 15]$.

Das Equações (5.39), (5.40) e (5.41) temos a função de pertinência

$$\varphi_{(A\cdot B)}(x) = \begin{cases} [-(-x+4)^{1/2}+3]/2 & , \text{ se } x \in [-5; 0] \\ (x+1)^{1/2}/2 & , \text{ se } x \in (0; 3] \\ [-(x+1)^{1/2}+4]/2 & , \text{ se } x \in (3; 15] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

A Figura 5.35 apresenta a representação gráfica.

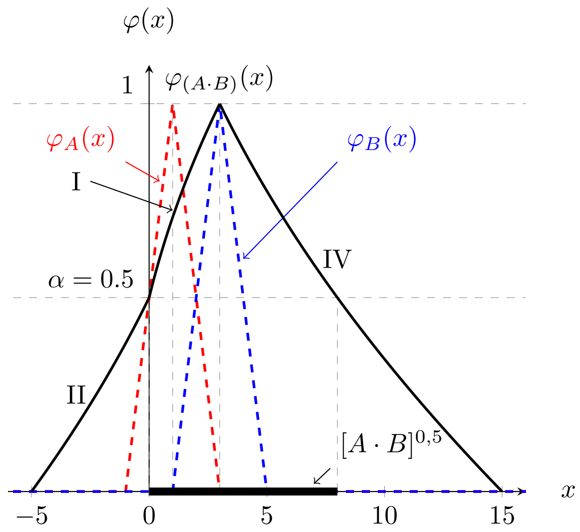


Figura 5.35: Representação da multiplicação de números fuzzy triangulares por α-nível.

Note que na Figura 5.35 é possível notar que a multiplicação dos números triangulares fuzzy A e B não resulta em um número triangular fuzzy.

5. Divisão

$$[A/B]^\alpha = [A]^\alpha/[B]^\alpha = \left[\min\left\{\frac{a_1^\alpha}{b_1^\alpha}; \frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}; \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha}; \frac{a_2^\alpha}{b_2^\alpha}\right\}; \max\left\{\frac{a_1^\alpha}{b_1^\alpha}; \frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}; \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha}; \frac{a_2^\alpha}{b_2^\alpha}\right\}\right]$$

$$\Rightarrow [A/B]^\alpha = \left[\min\left\{\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}; \frac{2\alpha-1}{-2\alpha+5}; \frac{-2\alpha+3}{2\alpha+1}; \frac{-2\alpha+3}{-2\alpha+5}\right\};\right.$$
$$\left.\max\left\{\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}; \frac{2\alpha-1}{-2\alpha+5}; \frac{-2\alpha+3}{2\alpha+1}; \frac{-2\alpha+3}{-2\alpha+5}\right\}\right].$$

Considerando a Tabela 5.4, a Figura 5.36 apresenta a solução gráfica das funções.

n°	Função
I	$(2\alpha-1)/(2\alpha+1)$
II	$(2\alpha-1)/(-2\alpha+5)$
III	$(-2\alpha+3)/(2\alpha+1)$
IV	$(-2\alpha+3)/(-2\alpha+5)$

Tabela 5.4: Valores para análise da divisão de A por B.

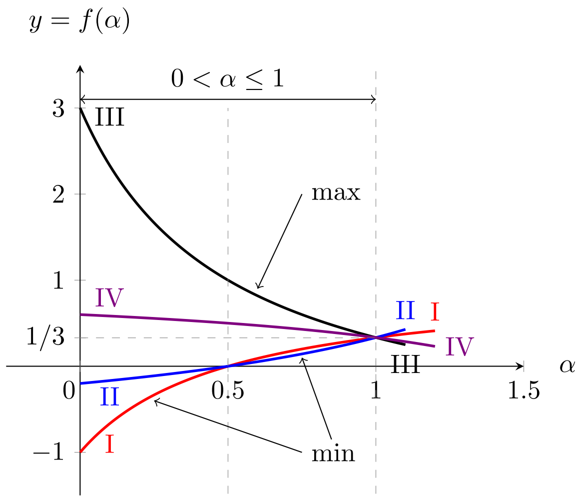


Figura 5.36: Funções para análise dos valores de α para a divisão de A por B.

Na Figura 5.36 é possível verificar que o $\min f(\alpha)$ é definido pela função II no intervalo de $\alpha \in (0; 0,5]$ e pela função I no intervalo de $\alpha \in [0,5; 1]$, e para o max temos a função IV no intervalo $\alpha \in [0; 1]$.

$$[A/B]^\alpha = \begin{cases} [\text{I}; \text{III}] & , \text{ se } \alpha \in (0; 0,5] \\ [\text{II}; \text{III}] & , \text{ se } \alpha(0,5; 1] \end{cases},$$

ou seja,

$$[A/B]^\alpha = \begin{cases} \left[\dfrac{2\alpha - 1}{2\alpha + 1}; \dfrac{-2\alpha + 3}{2\alpha + 1}\right] & , \text{ se } \alpha \in (0; 0,5] \\ \left[\dfrac{2\alpha - 1}{-2\alpha + 5}; \dfrac{-2\alpha + 3}{2\alpha + 1}\right] & , \text{ se } \alpha(0,5; 1] \end{cases}. \tag{5.42}$$

Para $\alpha = 0,5$ tem-se
$$[A/B]^{0,5} = [0; 1].$$

As funções de pertinência são determinadas utilizando os α-níveis da Equação (5.42). Determina-se as desigualdades necessárias e isola-se o α de acordo com a Definição 3.23.

i) Para a função I (mínimo)

$$\begin{aligned} \varphi_{(A/B)}(x) &\geq \alpha \\ \Rightarrow x &\geq (2\alpha - 1)/(2\alpha + 1) \\ \Rightarrow x \cdot (2\alpha + 1) &\geq 2\alpha - 1 \\ \Rightarrow 2\alpha x + x + 1 &\geq 2\alpha \\ \Rightarrow x + 1 &\geq 2\alpha - 2\alpha x \\ \Rightarrow x + 1 &\geq 2\alpha(1 - x) \\ \Rightarrow \frac{x + 1}{-2x + 2} &\geq \alpha. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Observa na Figura 5.36 que tem-se que $\alpha \in (0; 0,5]$ e que $f(\alpha) \in [-1; 0]$.

ii) Para a função II (mínimo)

$$
\begin{aligned}
\varphi_{(A/B)}(x) \geq& \alpha \\
\Rightarrow x \geq& (2\alpha - 1)/(-2\alpha + 5) \\
\Rightarrow x \cdot (-2\alpha + 5) \geq& 2\alpha - 1 \\
\Rightarrow -2\alpha x + 5x \geq& 2\alpha - 1 \\
\Rightarrow 5x + 1 \geq& 2\alpha x + 2x \\
\Rightarrow 5x + 1 \geq& 2\alpha(x + 1) \\
\Rightarrow \frac{5x+1}{2x+2} \geq& \alpha.
\end{aligned} \tag{5.44}
$$

Observe na Figura 5.34 que $\alpha \in (0,5;1]$ e $f(\alpha) \in [0;1/3]$.

iii) Para a função III (máximo)

$$
\begin{aligned}
\varphi_{(A/B)}(x) \geq& \alpha \\
\Rightarrow x \geq& (-2\alpha + 3)/(2\alpha + 1) \\
\Rightarrow x \cdot (2\alpha + 1) \geq& -2\alpha + 3 \\
\Rightarrow 2\alpha x + x \geq& -2\alpha + 3 \\
\Rightarrow x - 3 \geq& -2\alpha x - 2\alpha \\
\Rightarrow x - 3 \geq& -2\alpha(x + 1) \\
\Rightarrow \frac{x-3}{-2(x+1)} \geq& \alpha \\
\Rightarrow \frac{-x+3}{2x+2} \geq& \alpha.
\end{aligned} \tag{5.45}
$$

Deste modo, observando a Figura 5.36 tem-se $\alpha \in [0;1]$ e $f(\alpha) \in (1/3;3]$.

Das Equações (5.43), (5.44) e (5.45) temos a função de pertinência

$$
\varphi_{(A/B)}(x) = \begin{cases} (x+1)/(-2x+2) & , \text{ se } x \in [-1;0] \\ (5x+1)/(2x+2) & , \text{ se } x \in (0;1/3] \\ (-x+3)/(2x+2) & , \text{ se } x \in (1/3;3] \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.
$$

A Figura 5.37 apresenta a representação gráfica.

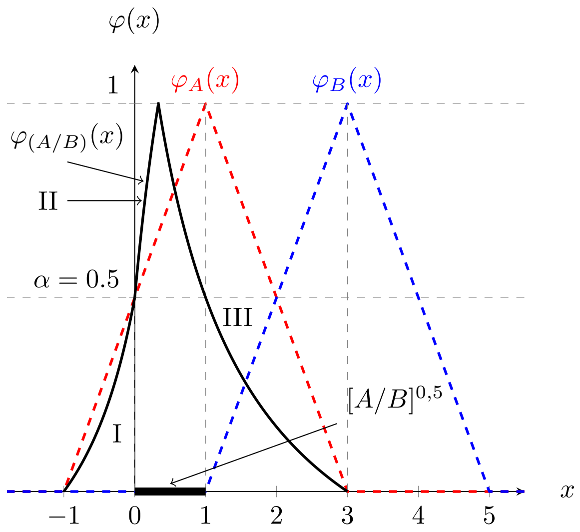


Figura 5.37: Representação da divisão de números fuzzy triangulares por α-nível.

Note que na Figura 5.37 é possível notar que a divisão dos números triangulares fuzzy A e B não resulta em um número triangular fuzzy.

O próximo capítulo apresenta as relações fuzzy e as formas de representação.

6 Relações fuzzy

Em matemática, o conceito de relação é formalizado a partir da teoria de conjuntos, e nos diz se há ou não alguma associação entre objetos.

Definição 6.1. [21] Dados dois conjuntos X e Y, não vazios, chama-se **produto cartesiano** de X por Y o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) com $x \in X$ e $y \in Y$, de representação

$$X \times Y = \{(x; y); x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

Definição 6.2. [2] Uma **relação** (clássica) $\mathcal{R}$, sobre $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$, é qualquer subconjunto (clássico) do produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$. Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos $U_1 \times U_2$, a relação é denominada **relação binária** sobre $U_1 \times U_2$. Se $U_1 = U_2 = \cdots = U_n = U$, diz-se que $\mathcal{R}$ é uma **relação** sobre U.

Dado que a relação $\mathcal{R}$ é um subconjunto do produto cartesiano, pode-se representar sua **função característica** por

$$\chi_{\mathcal{R}} \colon U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \to \{0, 1\},$$

com

$$\chi_{\mathcal{R}}(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \begin{cases} 1 & \text{, se } (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{, se } (x_1; x_2; \ldots; x_n) \notin \mathcal{R} \end{cases}.$$

No caso de uma relação binária $\mathcal{R}$ do produto cartesiano $X \times Y$ tem-se a coleção de pares ordenados $(x; y)$ com $x \in X$ e $y \in Y$, assim

$$\mathcal{R} \colon X \times Y \to \{0; 1\}.$$

Observe que a função de característica $\chi_{\mathcal{R}}(x; y) = 1$ se os elementos x e y estão relacionados, e $\chi_{\mathcal{R}}(x; y) = 0$ se estes dois elementos não estão relacionados.

Quando os conjuntos $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ são finitos, e portanto existe um isomorfismo entre $X \times Y$ e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, isto é, pode-se representar a relação binária clássica (ou fuzzy) $\mathcal{R}$ sobre $X \times Y$ com função de pertinência $\varphi_{\mathcal{R}}(x_i; y_i) = r_{ij}$ para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, pode-se utilizar uma representação na forma de tabela ou matriz

$\mathcal{R}$	y_1	y_2	$\ldots$	y_n
x_1	r_{11}	r_{12}	$\ldots$	r_{1n}
x_2	r_{21}	r_{22}	$\ldots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_m	r_{m1}	r_{m2}	$\ldots$	r_{mn}

ou $$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{mn} \end{bmatrix}.$$

6.1 Representação de relação binária

Existem várias maneiras para representar relações binárias. Para apresentar algumas destas maneiras será utilizado o Exemplo 6.3.

Exemplo 6.3. [3] Considere os conjuntos $X = \{2; 4; 6; 8\}$ e $Y = \{2; 4; 6; 8\}$.

1. Representação de X **cartesiano** Y de maneira **extensa**

$$\begin{aligned} X \times Y = &\{(2;2); (2;4); (2;6); (2;8); \\ &(4;2); (4;4); (4;6); (4;8); \\ &(6;2); (6;4); (6;6); (6;8); \\ &(8;2); (8;4); (8;6); (8;8)\}. \end{aligned}$$

2. Representação **extensa** da **relação** x **igual a** y,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = &\{(x;y) \in X \times Y; x = y\} = \\ &\{(2;2); (4;4); (6;6); (8;8)\}. \end{aligned}$$

   Como neste caso $X = Y$ pode-se representar o cartesiano $X \times Y$ como $X \times X$, e graficamente esta relação poderia ser visto como todos os pontos de X que pertencem a reta identidade, conforme Figura 6.1.

3. Representação por **tabela** da **relação** x **igual a** y.

$\mathcal{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	0	0	1

Tabela 6.1: Tabela da relação x igual a y.

4. Representação por **matriz** da **relação** x **igual a** y. Observe que utilizou-se a Tabela do item anterior como base para orientação,

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Representação **gráfica** da **relação** x **igual a** y.

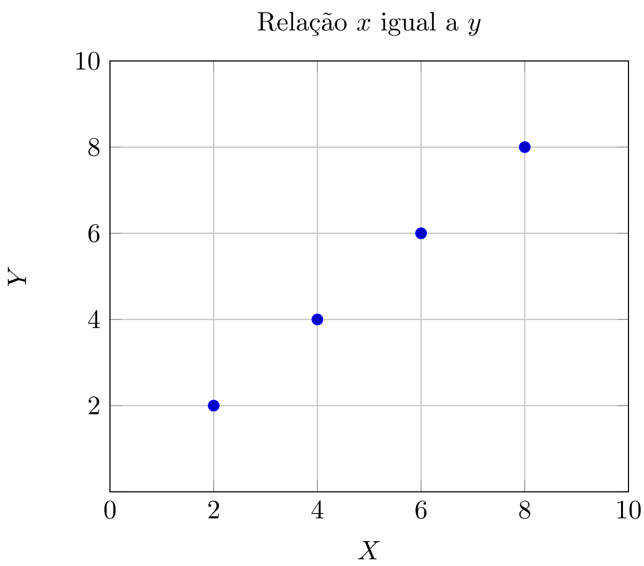


Figura 6.1: Representação da relação $x = y$.

6. Representação **gráfica** da **função de pertinência (característica)** x **igual a** y.

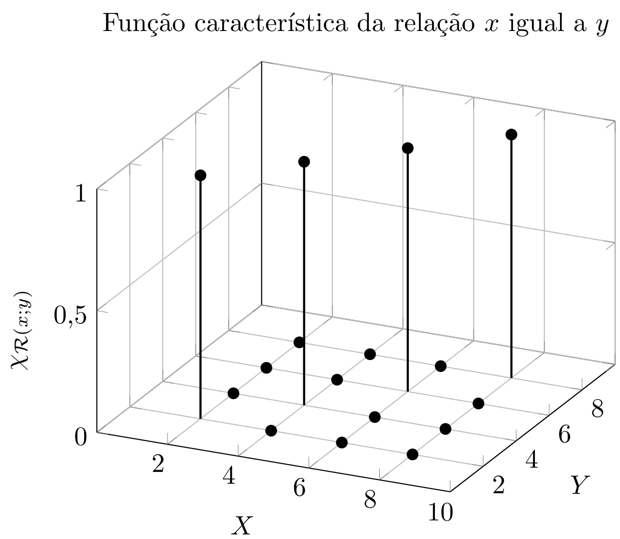


Figura 6.2: Representação da função característica da relação $x = y$.

Uma **relação binária clássica** indica apenas se há alguma associação entre os dois objetos, já uma **relação binária fuzzy**, além de indicar se existe alguma relação entre os objetos, também indica o grau desta relação.

Definição 6.4. Uma **relação fuzzy** $\mathcal{R}$ sobre $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ é qualquer subconjunto fuzzy de $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$. Assim, uma relação F fuzzy $\mathcal{R}$ é definida por uma função de pertinência $\varphi_{\mathcal{R}} \colon U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \to [0; 1]$.

Observação 6.5.

1. Se o produto cartesiano for formado por dois elementos, por exemplo X e Y, a relação é chamada **relação binária** sobre $X \times Y$

2. Se $U_i = U$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ então é dito que $\mathcal{R}$ é uma relação n-ária sobre U.

3. Se $\varphi_{\mathcal{R}}$ é função de pertinência da relação fuzzy $\mathcal{R}$, então o número $\varphi_{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\in [0; 1]$, indica o grau de pertinência com que os elementos x_i da n-upla $(x_1, x_2, \ldots,$ $x_n)$ estão relacionados segundo a relação $\mathcal{R}$.

Definição 6.6. O **produto cartesiano fuzzy** dos subconjuntos fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $U_1, U_2, \ldots, U_n$, respectivamente é a relação fuzzy $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \ldots A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{\varphi_{A_1}(x_1); \varphi_{A_2}(x_2); \ldots; \varphi_{A_n}(x_n)\},$$

algumas literaturas utilizam o símbolo $\wedge$ para representar o mínimo [2, 12].

Exemplo 6.7. [2] Suponha um determinado ecossistema U, no qual interagem populações de **águias** (a), **cobras** (c), **insetos** (i), **lebres** (l) e **sapos** (s). Um estudo de interesse, entre os indivíduos destas populações, é o processo de predação, isto é, a relação do tipo **presa-predador**.

Para o estudo da relação entre dois indivíduos deste ecossistema, a relação pode ser modelada matematicamente por uma **relação binária** $\mathcal{R}$, em que $\varphi_{\mathcal{R}}(x; y) = 0$ se y não é predador de x, e $\varphi_{\mathcal{R}}(x; y) \neq 0$ se y é predador de x, sendo x e y indivíduos do conjunto U.

1. Para uma **relação clássica** $\mathcal{R}$, atribui-se o valor 1 se o predador alimenta-se da presa, ou seja, se possui algum interesse pela presa, sem levar em conta o seu interesse comparado a outras presas, deste modo tem-se as seguintes representações:

   (a) Representação por tabela.

		Presa				
	$\mathcal{R}$	a	c	i	l	s
Predador	a	0	1	1	1	1
	c	0	1	0	1	1
	i	0	0	1	0	0
	l	0	0	0	0	0
	s	0	0	1	0	1

Tabela 6.2: Representação por tabela da relação presa-predador.

   (b) Representação por matriz. Observe que utilizou-se a Tabela 6.2 do item anterior como base para orientação,

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Representação gráfica.

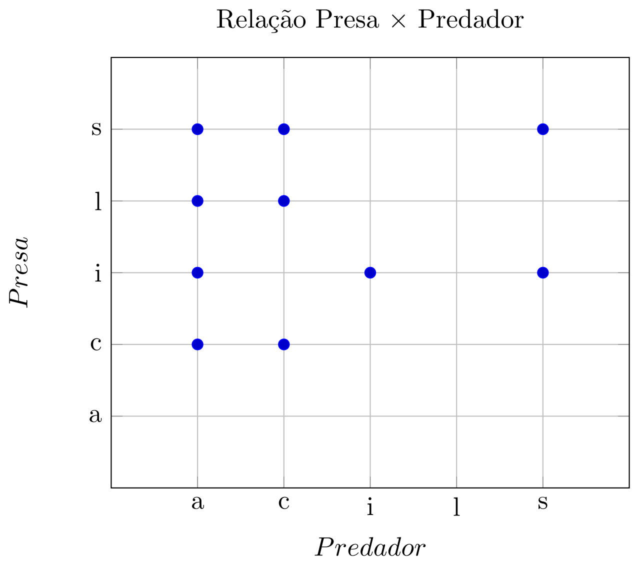


Figura 6.3: Representação da relação entre presa e predador.

(d) Representação gráfica da função de pertinência.

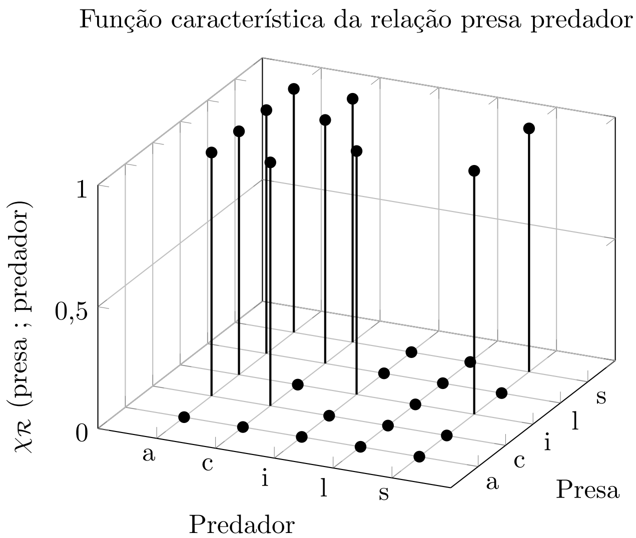


Figura 6.4: Representação da função característica da relação entre presa e predador.

2. Para uma **relação fuzzy** $\mathcal{R}$ pode-se atribuir a preferência que o predador possui em relação a uma determinada presa, deste modo se a presa é mais atrativa ao predador pode-se atribuir o valor 1 e a medida que a presa não é a alimentação preferida do predador diminui-se esse valor até o caso em que o predador não se interesse por aquela presa, atribuindo-se então o valor 0. Assim tem-se:

   (a) Representação por tabela.

		Presa				
	$\mathcal{R}$	a	c	i	l	s
Predador	a	0	1	0,1	1	0,2
	c	0	0,2	0	0,8	1
	i	0	0	0,3	0	0
	l	0	0	0	0	0
	s	0	0	1	0	0,1

Tabela 6.3: Representação por tabela da relação presa-predador fuzzy.

(b) Representação por matriz utilizando a Tabela 6.3 do item anterior,

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,1 & 1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 & 1 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

(c) Representação gráfica da função de pertinência.

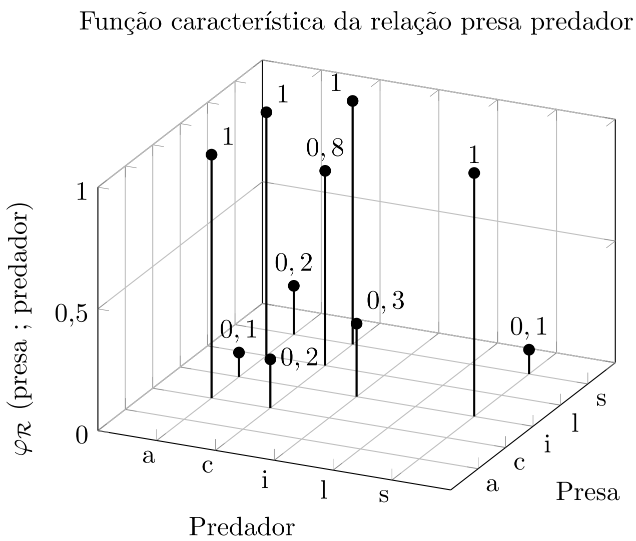
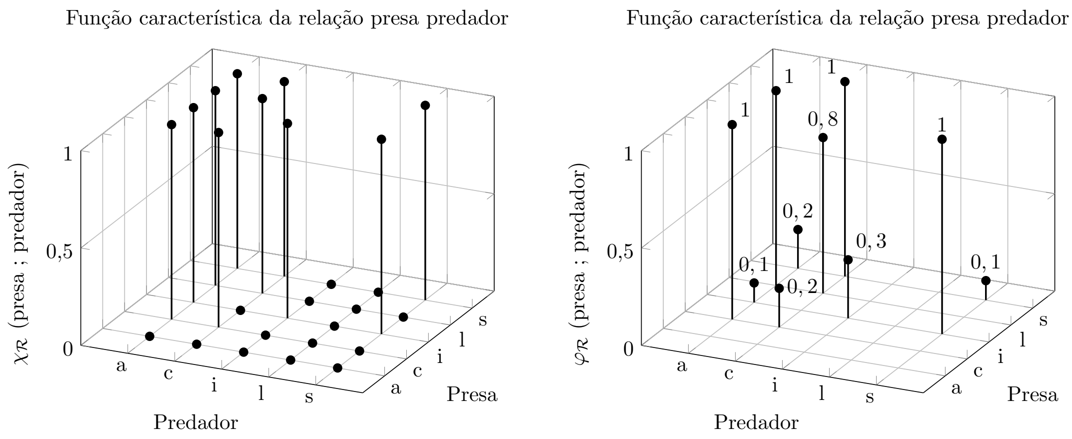


Figura 6.5: Representação da função característica da relação fuzzy entre presa e predador.

A Figura 6.6 apresenta o comparativo entre relação clássica e a relação fuzzy para o modelo presa-predador.



(a) (b)

Figura 6.6: Comparação gráfica da relação presa-predador: (a) Representação clássica; (b) Representação fuzzy.

Definição 6.8. Seja $\mathcal{R}$ uma relação binária definida em $X \times Y$. A relação fuzzy binária **inversa**, representada por $\mathcal{R}^{-1}$, definida em $Y \times X$, tem função de pertinência $\varphi_{\mathcal{R}^{-1}} : Y \times X \to [0, 1]$ dada por

$$\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y; x) = \varphi_{\mathcal{R}}(x; y).$$

Observe que da forma como foi definida a inversa, tem-se que a forma matricial da relação $\mathcal{R}^{-1}$ é a matriz transposta da relação $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & \dots & r_{m1} \\ r_{12} & r_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1n} & r_{m2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix}.$$

Observação 6.9. Note que na Definição 6.8 apresenta a inversa da relação binária fuzzy e não a inversa da matriz, mesmo que na matemática clássica seja utilizada a mesma notação $\mathcal{R}^{-1}$.

Exemplo 6.10. Utilizando os dados do Exemplo 6.7 a relação $\mathcal{R}^{-1}$, ou seja, inversa de $\mathcal{R}$ é dada por

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 & 0 & 1 \\ 1 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6.11. [12] Sejam $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ e $Y = \{3; 4; 5; 6\}$ conjuntos e $\mathcal{R}$ uma relação binária fuzzy em $X \times Y$ representada por "x é muito menor que y", onde $\mathcal{R}$ é dada pela seguinte função de pertinência

$$\varphi_{\mathcal{R}}(x; y) = \begin{cases} 1 - x/y & , \text{ se } x \leq y \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

A Tabela 6.4 apresenta os valores de x e y fornecidos para a relação $\mathcal{R}$.

x	y	$x \leq y$	$1 - x/y$	$\varphi_{\mathcal{R}}(x; y)$
1	3	$1 \leq 3$	$1 - 1/3$	$0,67$
1	4	$1 \leq 4$	$1 - 1/4$	$0,75$
1	5	$1 \leq 5$	$1 - 1/5$	$0,80$
1	6	$1 \leq 6$	$1 - 1/6$	$0,83$
2	3	$2 \leq 3$	$1 - 2/3$	$0,33$
2	4	$2 \leq 4$	$1 - 2/4$	$0,50$
2	5	$2 \leq 5$	$1 - 2/5$	$0,60$
2	6	$2 \leq 6$	$1 - 2/6$	$0,67$
3	3	$3 \leq 3$	$1 - 2/3$	$0,00$
3	4	$3 \leq 4$	$1 - 3/4$	$0,25$
3	5	$3 \leq 5$	$1 - 3/5$	$0,40$
3	6	$3 \leq 6$	$1 - 3/6$	$0,50$
4	3	$4 \not\leq 3$	$---$	0
4	4	$4 \leq 4$	$1 - 4/4$	0
4	5	$4 \leq 5$	$1 - 4/5$	$0,20$
4	6	$4 \leq 6$	$1 - 4/6$	$0,33$
5	3	$5 \not\leq 3$	$---$	0
5	4	$5 \not\leq 4$	$---$	0
5	5	$5 \leq 5$	$1 - 5/5$	0
5	6	$5 \leq 6$	$1 - 5/6$	$0,17$
6	3	$6 \not\leq 3$	$---$	0
6	4	$6 \not\leq 4$	$---$	0
6	5	$6 \not\leq 5$	$---$	0
6	6	$6 \leq 6$	$1 - 6/6$	0

Tabela 6.4: Valores para análise da relação fuzzy.

1. Representação por tabela.

$\mathcal{R}$	3	4	5	6
1	$0,67$	$0,75$	$0,80$	$0,83$
2	$0,33$	$0,50$	$0,60$	$0,67$
3	0	$0,25$	$0,40$	$0,50$
4	0	0	$0,20$	$0,33$
5	0	0	0	$0,17$
6	0	0	0	0

Tabela 6.5: Representação da relação $\mathcal{R}$.

2. Representação por matriz,

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,75 & 0,80 & 0,83 \\ 0,33 & 0,50 & 0,60 & 0,67 \\ 0 & 0,25 & 0,40 & 0,50 \\ 0 & 0 & 0,20 & 0,33 \\ 0 & 0 & 0 & 0,17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Representação da relação inversa,

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0,50 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,80 & 0,60 & 0,40 & 0,20 & 0 & 0 \\ 0,83 & 0,67 & 0,50 & 0,33 & 0,17 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Representação gráfica da função de pertinência.

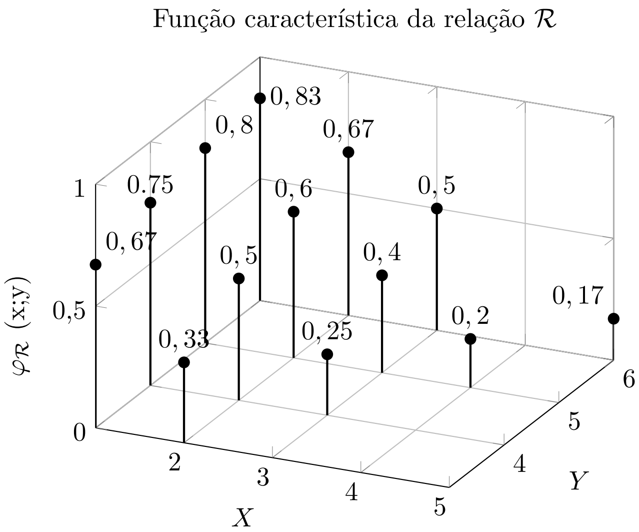


Figura 6.7: Representação da função característica da relação fuzzy $\mathcal{R}$.

6.2 Composição entre relações fuzzy binárias

As composições entre relações fuzzy são de grande importância para as aplicações [2]. Neste capítulo é apresentada apenas a composição tradicional de lógica fuzzy, para demais composições o leitor pode consultar [2, 3, 19].

Definição 6.12. Considere $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ duas relações fuzzy binárias em $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente. A **composição** $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é uma relação fuzzy binária em $U \times W$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}}(x;z) = \sup_{y\in V}[\min\{\varphi_{\mathcal{R}}(x;y);\varphi_{\mathcal{S}}(y;z)\}],$$

esta composição é chamada de $[\max - \min]$.

Suponha os conjuntos finitos

$$\begin{aligned} U =& \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}, \\ V =& \{v_1, v_2, \ldots, u_n\}, \\ W =& \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}. \end{aligned}$$

Considerando as relações $\mathcal{R}$ sobre $U \times V$ e $\mathcal{S}$ sobre $V \times W$ dadas por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}, \text{ e } \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mn} \end{bmatrix}.$$

A composição $[\max - \min]$ para esta relação fuzzy binária tem a forma

$$\mathcal{T} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} t_{ij} &= \sup_{1 \le k \le n} [\min[\varphi_{\mathcal{R}}(u_i; v_k); \varphi_{\mathcal{S}}(v_k; w_j)]] \\ \Rightarrow t_{ij} &= \sup_{1 \le k \le n} [\min[r_{ik}; s_{kj}]] \\ \Rightarrow t_{ij} &= \max_{1 \le k \le n} [\min[r_{ik}; s_{kj}]]. \end{aligned}$$

Ou seja, compara-se o mínimo entre a linha da primeira relação $\mathcal{R}$ com a primeira coluna da relação $\mathcal{S}$ e toma-se o máximo dentre esta comparação, e assim por diante com as demais linhas e colunas de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ para obter a matriz da relação $\mathcal{T}$. Em outras palavras, a composição na forma matricial pode ser vista como o produto usual entre matrizes, trocando-se o produto dos termos pelo mínimo entre cada um e a soma pelo máximo.

Exemplo 6.13. [12] Sejam os conjuntos fuzzy $X = \{x_1; x_2; x_3; x_4\}, Y = \{y_1; y_2; y_3\}$ e $Z = \{z_1; z_2; z_3; z_4; z_5\}$, e as relações $\mathcal{R}$ sobre $X \times Y$ e $\mathcal{S}$ sobre $Y \times Z$. Com

$$\mathcal{R}(x; y) = \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,7 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathcal{S}(y; z) = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 & 0,3 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 & 1 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,2 & 0,9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para determinar a relação $\mathcal{T} = \mathcal{R} \times \mathcal{S}$, realiza-se as comparações das linhas da primeira com as colunas da segunda. Assim,

$$\begin{aligned} t_{11} &= \max[\min[r_{ik}; s_{kj}]] \\ \Rightarrow t_{11} &= \max[\min\{0; 0,7\}; \min\{0,3; 0,5\}; \min\{0,4; 0\}] \\ \Rightarrow t_{11} &= \max[0; 0,3; 0] \\ \Rightarrow t_{11} &= 0,3. \end{aligned}$$

Realizando este procedimento para todos os elementos das matrizes das relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ tem-se a Tabela 6.6.

t_{ij}	$\min[r_{ik}; s_{kj}]$	$\min[r_{ik}; s_{kj}]$	$\min[r_{ik}; s_{kj}]$	$\max[\min[r_{ik}; s_{kj}]]$	t_{ij}
t_{11}	$\{0; 0,7\}$	$\{0,3; 0,5\}$	$\{0,4; 0\}$	$\{0; 0,3; 0\}$	$0,3$
t_{12}	$\{0; 0\}$	$\{0,3; 0,5\}$	$\{0,4; 0,7\}$	$\{0; 0,3; 0,4\}$	$0,4$
t_{13}	$\{0; 0\}$	$\{0,3; 1\}$	$\{0,4; 0,2\}$	$\{0; 0,3; 0,2\}$	$0,3$
t_{14}	$\{0; 0,3\}$	$\{0,3; 0,4\}$	$\{0,4; 0,9\}$	$\{0; 0,3; 0,4\}$	$0,4$
t_{15}	$\{0; 0,6\}$	$\{0,3; 0\}$	$\{0,4; 0\}$	$\{0; 0; 0\}$	0
t_{21}	$\{0,2; 0,7\}$	$\{0,5; 0,5\}$	$\{0,3; 0\}$	$\{0,2; 0,5; 0,3\}$	$0,5$
t_{22}	$\{0,2; 0\}$	$\{0,5; 0,5\}$	$\{0,3; 0,7\}$	$\{0; 0,5; 0,3\}$	$0,5$
t_{23}	$\{0,2; 0\}$	$\{0,5; 1\}$	$\{0,3; 0,2\}$	$\{0; 0,5; 0,2\}$	$0,5$
t_{24}	$\{0,2; 0,3\}$	$\{0,5; 0,4\}$	$\{0,3; 0,9\}$	$\{0,2; 0,4; 0,3\}$	$0,4$
t_{25}	$\{0,2; 0,6\}$	$\{0,5; 0\}$	$\{0,3; 0\}$	$\{0,2; 0; 0\}$	$0,2$
t_{31}	$\{0,8; 0,7\}$	$\{0; 0,5\}$	$\{0; 0\}$	$\{0,7; 0; 0\}$	$0,7$
t_{32}	$\{0,8; 0\}$	$\{0; 0,5\}$	$\{0; 0,7\}$	$\{0; 0; 0\}$	0
t_{33}	$\{0,8; 0\}$	$\{0; 1\}$	$\{0; 0,2\}$	$\{0; 0; 0\}$	0
t_{34}	$\{0,8; 0,3\}$	$\{0; 0,4\}$	$\{0; 0,9\}$	$\{0,3; 0; 0\}$	$0,3$
t_{35}	$\{0,8; 0,6\}$	$\{0; 0\}$	$\{0; 0\}$	$\{0,6; 0; 0\}$	$0,6$
t_{41}	$\{0,7; 0,7\}$	$\{0,7; 0,5\}$	$\{1; 0\}$	$\{0,7; 0,5; 0\}$	$0,7$
t_{42}	$\{0,7; 0\}$	$\{0,7; 0,5\}$	$\{1; 0,7\}$	$\{0; 0,5; 0,7\}$	$0,7$
t_{43}	$\{0,7; 0\}$	$\{0,7; 1\}$	$\{1; 0,2\}$	$\{0; 0,7; 0,2\}$	$0,7$
t_{44}	$\{0,7; 0,3\}$	$\{0,7; 0,4\}$	$\{1; 0,9\}$	$\{0,3; 0,4; 0,9\}$	$0,9$
t_{45}	$\{0,7; 0,6\}$	$\{0,7; 0\}$	$\{1; 0\}$	$\{0,6; 0; 0\}$	$0,6$

Tabela 6.6: Valores para análise da composição de relações fuzzy.

Obtém-se a matriz da relação composta $\mathcal{T} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$,

$$\mathcal{T} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,3 & 0,4 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0,3 & 0,6 \\ 0,7 & 0,7 & 0,7 & 0,9 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Note que, assim como o produto de matrizes usuais, a composição das relações não é comutativa, este exemplo ilustra esse fato, já que nem seria possível computar $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Definição 6.14 (Regra de composição de inferência)**.** Sejam U e V dois conjuntos, e $F(U)$ e $F(V)$ as classes dos subconjuntos fuzzy de U e V respectivamente. Considere $\mathcal{R}$ uma relação sobre $U \times V$, então:

1. A **regra da composição de inferência** é definida pela relação $\mathcal{R}$ define funcional de $F(U)$ em $F(V)$ que cada elemento $A \in F(U)$ faz corresponder o elemento $B \in F(V)$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_B(y) = \varphi_{\mathcal{R}(A)}(y) = \sup_{x \in U}[\min(\varphi_A(x; y); \varphi_{\mathcal{R}}(x))].$$

Ou seja, $B = \mathcal{R}(A) = A \circ \mathcal{R}$, pois

$$\sup_{x \in U}[\min(\varphi_{\mathcal{R}}(x; y); \varphi_A(x))] = \sup_{x \in U}[\min(\varphi_A(x); \varphi_{\mathcal{R}}(x; y))].$$

2. A **imagem inversa** de B por $\mathcal{R}$ é a relação $\mathcal{R}$ que também define um funcional de $F(V)$ em $F(U)$, fazendo corresponder cada $B \in F(V)$ em um elemento $A \in F(U)$ cuja função de pertinência é

$$\varphi_A(x) = \varphi_{\mathcal{R}^{-1}(B)}(x) = \sup_{y \in V}[\min(\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y;x); \varphi_B(y))].$$

Ou seja, $A = \mathcal{R}^{-1}(B) = B \circ \mathcal{R}^{-1}$, pois

$$\sup_{x \in V}[\min(\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y;x); \varphi_B(y))] = \sup_{x \in V}[\min(\varphi_B(y); \varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y;x))].$$

Da matemática clássica temos que as relações possuem as seguintes propriedades.

Propriedade 6.15. [21] Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre o conjunto E, são válidas as seguintes propriedades:

1. **Reflexiva.**

   A relação $\mathcal{R}$ é reflexiva quando todo elemento de E se relaciona consigo mesmo, ou seja, quando, para todo $x \in E$, vale $x\mathcal{R}x$.

2. **Simétrica.**

   A relação $\mathcal{R}$ é simétrica se vale $y\mathcal{R}x$ sempre que vale $x\mathcal{R}y$, ou seja, se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$.

3. **Transitiva.**

   A relação $\mathcal{R}$ é transitiva se vale $x\mathcal{R}z$ sempre que vale $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, ou seja, se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$.

4. **Anti-simétrica.**

   A relação $\mathcal{R}$ é anti-simétrica se $x = y$ sempre que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$, ou seja, se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$, então $x = y$.

Caso sejam válidas as Propriedades 1, 2, 3 tem-se uma **relação de equivalência**.

Utilizando a Propriedade 6.15 tem-se então a Definição 6.16 para conjuntos fuzzy.

Definição 6.16. Seja $\mathcal{R}$ uma relação fuzzy binária sobre U, cuja função de pertinência é $\varphi_{\mathcal{R}}$. Então, para quaisquer x, y e z de U, a relação $\mathcal{R}$ é:

1. Reflexiva se $\varphi_{\mathcal{R}}(x;y) = 1$.
2. Simétrica se $\varphi_{\mathcal{R}}(x;y) = \varphi_{\mathcal{R}}(y;x)$.
3. Transitiva se $\varphi_{\mathcal{R}}(x;z) \geq \min[\varphi_{\mathcal{R}}(x;y); \varphi_{\mathcal{R}}(y;z)]$.
4. Anti-simétrica se $\varphi_{\mathcal{R}}(x,y) > 0$ e $\varphi_{\mathcal{R}}(y;x) > 0 \Rightarrow x = y$.

Caso sejam válidas 1, 2, 3 tem-se uma **relação de equivalência**.

Exemplo 6.17. [12] Seja $\mathcal{R}$ uma relação fuzzy em $X \times X$, onde X é o conjunto de todas as disciplinas de um curso e $\mathcal{R}$ representa a relação **"é pré-requisito para"**.

Analisando a relação, tem-se:

1. Verifica-se que a relação $\mathcal{R}$ não é reflexiva pois uma disciplina nunca é pré-requisito de si mesma, assim $\varphi_{\mathcal{R}}(x;x) = 0$.

2. A relação $\mathcal{R}$ não é simétrica, pois para uma disciplina x que é pré-requisito de y não se tem válido que y seja pré-requisito de x. Assim $\varphi_{\mathcal{R}}(x;y) \neq \varphi_{\mathcal{R}}(y;x)$.

3. A relação $\mathcal{R}$ é transitiva pois se uma disciplina x é pré-requisito de uma disciplina y, e se a disciplina y é pré-requisito da disciplina z, então x é pré-requisito da disciplina z. Assim, temos que $\varphi_{\mathcal{R}}(x;y) = 1$ e $\varphi_{\mathcal{R}}(y;z) = 1$, logo, $\varphi_{\mathcal{R}}(x;z) \geq \min[\varphi_{\mathcal{R}}(x;y); \varphi_{\mathcal{R}}(y;z)]$.

4. A relação $\mathcal{R}$ não é anti-simétrica, pois mesmo que uma disciplina x seja pré requisito da disciplina y e como a disciplina y não pode ser pré requisito de x como visto em 1, pois não é reflexiva. Assim $\varphi_{\mathcal{R}}(x;y) = 1$ porém $\varphi_{\mathcal{R}}(y;x) = 0$.

Exemplo 6.18. [12] Seja o conjunto $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ e a relação $\mathcal{R}$ uma relação em $X \times X$ tal que dois elementos estão relacionados se possuem o mesmo resto na divisão por 3, ou seja, a relação $\mathcal{R}$ simula a relação que dá origem ao conjunto do $\mathbb{Z}_3$.

A Tabela 6.7 apresenta as pertinências entre os elementos da relação $\mathcal{R}$.

Elemento	Resto na divisão por 3
1	1
2	2
3	0
4	1
5	2
6	0
7	1
8	2
9	0
10	1

Tabela 6.7: Restos na divisão por 3 do conjunto X.

Tem-se então que:

i) Para resto 0 na divisão por 3,

$$\begin{aligned} 1 =& \varphi_{\mathcal{R}}(3;3) = \varphi_{\mathcal{R}}(3;6) = \varphi_{\mathcal{R}}(3;9) = \\ =& \varphi_{\mathcal{R}}(6;3) = \varphi_{\mathcal{R}}(6;6) = \varphi_{\mathcal{R}}(6;9) = \\ =& \varphi_{\mathcal{R}}(9;3) = \varphi_{\mathcal{R}}(9;6) = \varphi_{\mathcal{R}}(9;9). \end{aligned}$$

ii) Para resto 1 na divisão por 3,

$$\begin{aligned} 1 =& \varphi_{\mathcal{R}}(1;1) = \varphi_{\mathcal{R}}(1;4) = \varphi_{\mathcal{R}}(1;7) = \varphi_{\mathcal{R}}(1;10) \\ =& \varphi_{\mathcal{R}}(4;1) = \varphi_{\mathcal{R}}(4;4) = \varphi_{\mathcal{R}}(4;7) = \varphi_{\mathcal{R}}(4;10) = \\ =& \varphi_{\mathcal{R}}(7;1) = \varphi_{\mathcal{R}}(7;4) = \varphi_{\mathcal{R}}(7;7) = \varphi_{\mathcal{R}}(7;10) = \\ =& \varphi_{\mathcal{R}}(10;1) = \varphi_{\mathcal{R}}(10;4) = \varphi_{\mathcal{R}}(10;7) = \varphi_{\mathcal{R}}(10;10). \end{aligned}$$

iii) Para resto 2 na divisão por 3,

$$\begin{aligned}1 =&\varphi_{\mathcal{R}}(2;2) = \varphi_{\mathcal{R}}(2;5) = \varphi_{\mathcal{R}}(2;8) = \\ =&\varphi_{\mathcal{R}}(5;2) = \varphi_{\mathcal{R}}(5;5) = \varphi_{\mathcal{R}}(5;8) = \\ =&\varphi_{\mathcal{R}}(8;2) = \varphi_{\mathcal{R}}(8;5) = \varphi_{\mathcal{R}}(8;8).\end{aligned}$$

iv) Observe que para as demais combinações de $\varphi_{\mathcal{R}}(x_i;x_j) = 0$ com $x_i, x_j \in X = \{x_1, \ldots, x_{10}\}$.

Verifica-se então:

1. A relação $\mathcal{R}$ é reflexiva pois um elemento x possui o mesmo resto que x (ele mesmo) na divisão por 3. Logo $\varphi_{\mathcal{R}}(x;x) = 1$.
2. A relação $\mathcal{R}$ é simétrica, pois se um elemento x possui mesmo resto que um elemento y na divisão por 3, temos que o elemento y possui o mesmo resto que x na divisão por 3. Assim $\varphi_{\mathcal{R}}(x;y) = \varphi_{\mathcal{R}}(y;x) = 1$.
3. A relação $\mathcal{R}$ é transitiva, pois se x e y possuem o mesmo resto na divisão por 3 e que se y e z também possuem o mesmo resto na divisão por 3, então x e z possuem o mesmo resto na divisão por 3. Logo $\varphi_{\mathcal{R}}(x;y) = 1$ e $\varphi_{\mathcal{R}}(y;z) = 1$ então $\varphi(x;z) = 1$.
4. A relação $\mathcal{R}$ não é anti-simétrica, pois mesmo que um elemento x possua o mesmo resto na divisão por y e vice-versa, não implica que $x = y$.

   Como são válidas as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, tem-se que a relação $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

No próximo capítulo serão apresentadas noções de lógica fuzzy, e as t-normas e t-conormas que serão utilizadas nas aplicações.

7 Noções da lógica fuzzy

Neste Capítulo será tratado o conceito de lógica fuzzy, e tal conceito é descrito como uma extensão da lógica clássica.

Na lógica fuzzy as premissas e conclusões são subjetivas, e quanto maior a incerteza nas premissas, maior a incerteza nas conclusões.

Como nos demais Capítulos, é apresentado o conceito como é normalmente desenvolvido na matemática clássica, e logo em seguida é apresentado na matemática fuzzy.

7.1 Conectivos básicos da lógica clássica

Para definições e exemplos de conceitos como proposições, conectivos, tabela verdade, notações, dentre outros da lógica matemática clássica, indica-se ao leitor [22].

Considere as proposições p e q, e que para cada uma a única possibilidade é de que seja **verdadeira** (V) ou **falsa** (F). Caso a afirmação seja verdadeira, atribui-se o valor 1, e no caso de ser falsa, atribui-se o valor 0.

7.1.1 Negação ($\sim$)

Definição 7.1. [22] Chama-se **negação** de uma proposição p a proposição representada por "**não** p", cujo valor lógico é verdadeiro (V ou 1) quando p é falsa e a falsidade (F ou 0) quando p é verdadeira.

Conclui-se então que "não p" tem o valor oposto daquele atribuído a p. Assim, o valor lógico da negação de uma proposição é definido pela tabela verdade, apresentada na Tabela 7.1.

p	$\sim p$
1	0
0	1

Tabela 7.1: Tabela verdade da negação.

Exemplo 7.2. Considere a proposição e sua negação:

$$p\colon \text{Antonio toca violão.}$$
$$\sim p\colon \text{Antonio não toca violão.}$$

7.1.2 Conjunção, conectivo e ($\wedge$)

Definição 7.3. [22] Chama-se **conjunção** de duas proposições p e q a proposição representada por "p **e** q", cujo valor lógico é verdadeiro (V ou 1) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade (F ou 0) nos demais casos.

Simbolicamente, representa-se a conjunção das proposições com a notação $p \wedge q$ e lê-se "p e q", e com a tabela verdade, apresentada na Tabela 7.2.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabela 7.2: Tabela verdade do conectivo e.

Pode-se definir o conectivo **e** através da seguinte função,

$$\begin{aligned} \wedge \colon \{0;1\} \times \{0;1\} &\rightarrow \{0;1\} \\ (p \wedge q) &\mapsto \wedge(p;q) = p \wedge q = \min\{p;q\}. \end{aligned}$$

Exemplo 7.4.

1. Considere as proposições:

$$\begin{aligned} &p\colon \text{O Sol é uma estrela.} \\ &q\colon 1 < 2. \end{aligned}$$

   Como ambas as proposições são verdadeiras, tem-se que $p \wedge q = 1$.

2. Sejam as proposições

$$\begin{aligned} &p\colon \text{O Sol é uma estrela.} \\ &q\colon 2 < 1. \end{aligned}$$

   Como as primeira proposição é verdadeira e a segunda falsa, tem-se $p \wedge q = 0$.

7.1.3 Disjunção, conectivo ou ($\vee$)

Definição 7.5. [22] Chama-se **disjunção** de duas proposições p e q a proposição representada por "p **ou** q", cujo valor lógico é verdadeiro (V ou 1) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeiras e a falsidade (F ou 0) quando as proposições p ou q são ambas falsas.

Simbolicamente, representa-se a disjunção das proposições com a notação $p \vee q$ e lê-se "p ou q", e com a tabela verdade, apresentada na Tabela 7.3.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabela 7.3: Tabela verdade do conectivo ou.

Pode-se definir o conectivo **ou** através da seguinte função,

$$\begin{aligned} \vee \colon \{0;1\} \times \{0;1\} &\rightarrow \{0;1\} \\ (p \vee q) &\mapsto \vee(p;q) = p \vee q = \max\{p;q\}. \end{aligned}$$

Exemplo 7.6.

1. Considere as proposições:

$$\begin{aligned} &p\colon \text{O Sol é uma estrela.} \\ &q\colon 1 < 2. \end{aligned}$$

   Como ambas as proposições são verdadeiras, tem-se que $p \vee q = 1$.

2. Sejam as proposições

$$\begin{aligned} &p\colon \text{O Sol é um planeta.} \\ &q\colon 2 < 1. \end{aligned}$$

   Como ambas as proposições são falsas, tem-se $p \vee q = 0$.

Para a disjunção exclusiva consulte [22].

7.1.4 Condicional, implicação ($\Rightarrow$)

Definição 7.7. [22] Chama-se proposição **condicional** ou apenas **condicional** uma proposição representada por "se p então q", cujo valor lógico é falsidade (F ou 0) no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a verdade (V ou 1) nos demais casos.

Simbolicamente, representa-se a condicional das proposições com a notação $p \Rightarrow q$ e lê-se "p implica q", "p é condição suficiente para q" ou "q é condição necessária para p", e com tabela verdade, conforme a Tabela 7.4.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabela 7.4: Tabela verdade da implicação.

Pode-se definir a **implicação** através da seguinte função,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \colon \{0;1\} \times \{0;1\} &\to \{0;1\} \\ (p \vee q) &\mapsto \Rightarrow (p;q) = (p \Rightarrow q). \end{aligned}$$

Para exemplos de implicação, e definições como bi-implicação e demais, consulte [22].

7.2 Conectivos básicos da lógica fuzzy

Na lógica clássica os valores obtidos nas tabelas verdade são 0 ou 1, o que está de acordo com o fato de serem conjuntos clássicos. Já para a lógica fuzzy admite-se que os conjuntos serão fuzzy e deste modo teremos valores no intervalo $[0;1]$ que serão atribuídos as premissas.

Para estender o conceito de lógica clássica para lógica fuzzy, utiliza-se as t-normas e s-normas.

7.2.1 t-norma

É importante deixar claro que algumas literaturas utilizam o símbolo $\triangle$ ou T quando se referem a t-norma, neste trabalho é utilizado t tendo em vista que em estudos recentes utilizam-se a notação t para t-norma e T para transformada fuzzy [23].

Definição 7.8. O operador

$$\begin{aligned} t \colon [0;1] \times [0;1] &\to [0;1] \\ t(x;y) &= xty, \end{aligned}$$

é uma **t-norma**, se cumprir as seguintes condições:

1. Elemento neutro
$$t(1;x) = 1tx = x.$$
2. Comutativa
$$t(x;y) = xty = ytx = t(y;x).$$
3. Associativa
$$xt(ytz) = (xty)tz.$$
4. Monotocidade
$$\text{Se } x \leq y \text{ e } u \leq v, \text{ então } xtu \leq ytv.$$

Proposição 7.9. *Os seguintes operadores são t-normas:*

1. $t_M(x;y) = \min\{x;y\} = x \wedge y$. *(Mínimo)*

2. $t_P(x;y) = xy$. *(Produto)*

3. $t_L(x;y) = \max\{0; x+y-1\}$. *(Lukasiewicz)*

4. $t_D(x;y) = \begin{cases} x & , \text{ se } y = 1 \\ y & , \text{ se } x = 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$. *(Drástica)*

Observação 7.10. A t-norma t_D também pode ser definida como [6],

$$t_D(x;y) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } (x;y) \in [0;1)^2 \\ \min(x;y) & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

A demonstração desses fatos é apresentada e foram consultadas na seguinte referência [12].

Demonstração.
1. t-norma do mínimo:

i) Do fato que $x \in [0;1]$, tem-se

$$t_M(1;x) = \min\{1;x\} = x.$$

ii) Note que independente de se ter $x \leq y$ ou $y \leq x$, sempre tem-se o menor valor como resposta,

$$t_M(x;y) = \min\{x;y\} = \min\{y;x\} = t_M(y;x).$$

iii) Sem perda, supor $x < y < z$,

$$xt_M(yt_Mz) = xt_M(\min\{y;z\}) = xt_My = \min\{x;y\} = x. \tag{7.1}$$

Por outro lado

$$(xt_My)t_Mz = \min\{x;y\}t_Mz = xt_Mz = \min\{x;z\} = x. \tag{7.2}$$

Portanto, por (7.1) e (7.2) tem-se $xt_M(yt_Mz) = (xt_My)t_Mz$.

iv) Novamente sem perda, supor $x < y < u < v$,

$$\begin{aligned} xt_My &= \min\{x;y\} = x, \\ ut_Mv &= \min\{u;v\} = u. \end{aligned}$$

Assim, tem-se

$$xt_Mu = \min\{x;u\} = x.$$

Deste modo

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &\leq y \\ \Rightarrow \min\{x;u\} &\leq \min\{y;v\} \\ xt_Mu &\leq yt_Mv. \end{aligned}$$

Observe que para demais casos a demonstração é análoga.

Portanto, por i), ii), iii) e iv) tem-se que $t_M = (x; y) = \min\{x; y\}$ é uma t-norma.
2. t-norma do produto:

i) Do fato que $x \in [0; 1]$, tem-se

$$t_P(1; x) = 1 \cdot x = x.$$

ii) Como a multiplicação é comutativa, tem-se $xy = yx$, assim,

$$t_P(x; y) = xy = yx = t_P(y; x).$$

iii) Em relação a associatividade em relação ao produto, tem-se que
Sem perda, supor $x < y < z$,

$$xt_M(yt_M z) = xt_M(yz) = xt_M yz = xyz. \tag{7.3}$$

Por outro lado

$$(xt_M y)t_M z = xyt_M z = xyz. \tag{7.4}$$

Portanto, por (7.3) e (7.4) tem-se $xt_P(yt_P z) = (xt_P y)t_P z$.

iv) Novamente sem perda, supor $x < y < u < v$,

$$xt_P u = xu < yu < yv < yt_P v.$$

Deste modo

$$xt_P u \leq yt_P v.$$

Observe que para demais casos a demonstração é análoga.

Portanto, por i), ii), iii) e iv) tem-se que $t_P(x; y) = xy$ é uma t-norma.
3. t-norma de Lukasiewicz:

i) Do fato que $x \in [0; 1]$, tem-se

$$t_L(1; x) = \max\{0; 1 + x - 1\} = \max\{0; x\} = x.$$

ii) Como a adição é comutativa, tem-se $x + y = y + x$, assim,

$$t_L(x; y) = \max\{0; x + y - 1\} = \max\{0; y + x - 1\} = t_M(y; x).$$

iii) Verifica-se que

$$\begin{aligned} xt_M(yt_M z) =& xt_M \max\{0; y + z - 1\} = \max\{0; x + \max\{0; y + z - 1\} - 1\}, \\ (xt_M y)t_M z =& \max\{0; x + y - 1\}t_M z = \max\{0; \max\{0; x + y - 1\} + z - 1\}. \end{aligned}$$

Lembrando que x, y e $z \in [0; 1]$, analisando para os casos

(a) Se $0 > x + y - 1$ e $0 > y + z - 1$, tem-se

$$xt_M(yt_M z) = \max\{0; x - 1\} = 0 = \max\{0; z - 1\} = (xt_M y)t_M z.$$

(b) Se $0 < x + y - 1$ e $0 < y + z - 1$, tem-se

$$xt_M(yt_Mz) = \max\{0; x + y + z - 2\} = \max\{0; x + y + z - 2\} = (xt_My)t_Mz.$$

(c) Se $0 < x + y - 1$ e $0 > y + z - 1$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 >& y + z - 1 \\ \Rightarrow x >& x + y + z - 1 \\ \Rightarrow 0 > x - 1 >& x + y + z - 2. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$xt_M(yt_Mz) = \max\{0; x - 1\} = 0 = \max\{0; x + y + z - 2\} = (xt_My)t_Mz$$

Analogamente para o caso $0 > x + y - 1$ e $0 < y + z - 1$, e assim $xt_M(yt_Mz) = (xt_My)t_Mz$.

iv) Novamente sem perda, supor $x < y < u < v$,

(a) Se $0 > x + u - 1$,

$$xt_Lu = \max\{0; x + u - 1\} = 0 \leq \max\{0; y + v - 1\} = yt_Lv.$$

(b) Se $0 > x + u - 1$, então $0 < y + v - 1$, deste modo,

$$xt_Lu = \max\{0; x + u - 1\} = x + u - 1 \leq y + v - 1 = \max\{0; y + v - 1\} = yt_Lv.$$

Deste modo

$$xt_Lu \leq yt_Lv.$$

Observe que para demais casos a demonstração é análoga.

Portanto, por i), ii), iii) e iv) tem-se que $t_L(x; y) = \max\{0; x + y - 1\}$ é uma t-norma.
4. t-norma drástica:

i) Do fato que $x \in [0; 1]$ e da definição de t_D, tem-se

$$t_D = \begin{cases} x & , \text{ se } y = 1 \\ y & , \text{ se } x = 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Assim, $t_D(1; x) = x$.

ii) Utilizando a definição de t_D,

$$t_D(x; y) = \begin{cases} x & , \text{ se } y = 1 \\ y & , \text{ se } x = 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} y & , \text{ se } x = 1 \\ x & , \text{ se } y = 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} = t_D(y; x).$$

iii) Para mostrar que $xt_D(yt_Dz) = (xt_Dy)t_Dz$ é necessário analisar os seguintes casos:

(a) $x = 1, y = 1, z = 1,$

$$xt_D(yt_Dz) = xt_D1 = 1 = 1t_Dz = (xt_Dy)t_Dz.$$

(b) $x = 1, y = 1, z \neq 1,$

$$xt_D(yt_Dz) = xt_Dz = z = 1t_Dz = (xt_Dy)t_Dz.$$

(c) $x = 1, y \neq 1, z = 1,$

$$xt_D(yt_Dz) = xt_Dy = y = yt_Dz = (xt_Dy)t_Dz.$$

(d) $x = 1, y \neq 1, z \neq 1,$

$$xt_D(yt_Dz) = xt_D0 = 0 = yt_Dz = (xt_Dy)t_Dz.$$

(e) $x \neq 1, y = 1, z = 1,$

$$xt_D(yt_Dz) = xt_D1 = 1 = yt_Dz = (xt_Dy)t_Dz.$$

(f) $x \neq 1, y = 1, z \neq 1,$

$$xt_D(yt_Dz) = xt_Dz = 0 = xt_Dz = (xt_Dy)t_Dz.$$

(g) $x \neq 1, y \neq 1, z = 1,$

$$xt_D(yt_Dz) = xt_Dy = 0 = 0t_Dz = (xt_Dy)t_Dz.$$

(h) $x \neq 1, y \neq 1, z \neq 1,$

$$xt_D(yt_Dz) = xt_D0 = 0 = 0t_Dz = (xt_Dy)t_Dz.$$

Portanto $xt_D(yt_Dz) = (xt_Dy)t_Dz$.

iv) Considerando sem perda $x \leq y$ e $u \leq v$,

(a) Se $x = 1$ então $y = 1$, assim

$$t_D(x; u) = u \leq v = t_D(y; v).$$

(b) Se $u = 1$ então $v = 1$,

$$t_D(x; u) = x \leq y = t_D(y; v).$$

(c) Caso contrário,

$$t_D(x; u) = 0 \leq t_D(y; v).$$

Portanto, por i), ii), iii) e iv) tem-se que $t_D(x; y)$ é uma t-norma.

□

Proposição 7.11. *[6] Seja t uma t-norma qualquer, então para todo $x \in [0; 1]$ tem-se que*

$$t(x; 0) = 0.$$

Demonstração. Devido as t-normas cumprirem as condições da Definição 7.8, elemento neutro, comutatividade, monotocidade tem-se

$$t(x;y) \leq t(x,1) = x,$$
$$t(x;y) \leq t(y;1) = y.$$

Como $t(x;y) \in [0;1]$, segue

$$t(x;y) < \min\{x;y\}$$

Logo

$$t(x;0) \leq \min\{x;0\} = 0.$$

□

Teorema 7.12. *[6] Seja t uma t-norma qualquer, então*

$$t_D \leq t \leq t_M.$$

Demonstração. De acordo com a Proposição 7.11,

$$t(x;y) \leq \min\{x;y\} = t_M(x;y).$$

Deste modo,

i) Se $x = 1$, então
$$t_D(1;y) = y = t(1;y).$$

ii) Se $y = 1$, então
$$t_D(x;1) = x = t(x;1).$$

iii) Caso contrário,
$$t_D(x;y) = 0 = t(x;0) \leq t(x;y)$$
$$\Rightarrow t_D(x;y) \leq t(x;y).$$

Logo, $t_D \leq t \leq t_M$.

□

Proposição 7.13. *[6] As t-normas t_M, t_P, t_L e t_D satisfazem*

$$t_D \leq t_L \leq t_P \leq t_M.$$

Demonstração. Do Teorema 7.12 tem-se que para uma t-norma t qualquer, é válido que $t_D \leq t \leq t_M$. Basta provar então que $t_L \leq t_P$.

i) Se $0 > x + y - 1$, então
$$t_L(x;y) = \max\{0; x+y-1\} = 0.$$

Como $x, y \in [0;1]$ então $0 \leq xy \leq 1$, e assim

$$t_L(x;y) = \max\{0; x+y-1\} = 0 \leq xy = t_P(x;y),$$
$$\Rightarrow t_L(x;y) \leq t_P(x;y).$$

ii) Se $0 < x + y - 1$, então

$$t_L(x;y) = \max\{0; x+y-1\} = x+y-1.$$

Como $x, y \in [0;1]$ supondo $x \neq 1$ tem-se $x - 1 < 0$ o que irá inverter a desigualdade abaixo, logo

$$\begin{aligned} y \leq& 1 \\ \Rightarrow y \leq& \frac{x-1}{x-1} \\ \Rightarrow (x-1)y \geq& \frac{x-1}{x-1} \cdot (x-1) \\ \Rightarrow xy - y \geq& x - 1 \\ \Rightarrow xy \geq& x + y - 1 \\ \Rightarrow t_P(x;y) \geq& t_L(x;y) \\ \Rightarrow t_L(x;y) \leq& t_P(x;y). \end{aligned}$$

iii) Se $x = 1$ e $y \neq 1$, então

$$\begin{aligned} t_L(x;y) = \max\{0; x+y-1\} = \max\{0; y\} = y \leq& y = 1y = xy = t_L(x;y) \\ \Rightarrow t_P(x;y) \leq& t_L(x;y). \end{aligned}$$

iv) Se $x = 1$ e $y = 1$,

$$t_L(x;y) = \max\{0; x+y-1\} = 1 \leq 1 = xy = t_P(x;y) \Rightarrow t_P(x;y) \leq \quad t_L(x;y).$$

Portanto, tem-se a validade de $t_D \leq t_L \leq t_P \leq t_M$.

□

Exemplo 7.14. Considere os números triangulares fuzzy do Exemplo 3.12. A t-norma do mínimo é apresentada na Figura 7.1, a t-norma do produto na Figura 7.2, a t-norma de Lukasiewicz na Figura 7.3 e a t-norma drástica na Figura 7.4.

(a) t-norma do mínimo $t_M(\varphi_A(x); \varphi_B(x)) = \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} = \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(x)$.

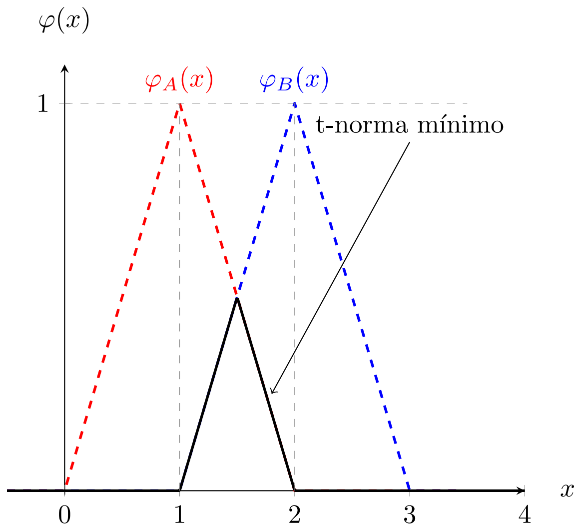


Figura 7.1: Representação da t-norma do mínimo.

(b) t-norma do produto $t_P(\varphi_A(x);\varphi_B(x)) = \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)$.

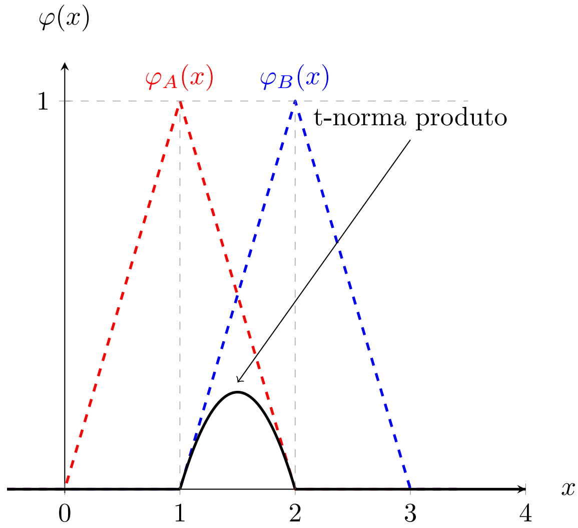


Figura 7.2: Representação da t-norma do produto.

(c) t-norma de Lukasiewicz $t_L(\varphi_A(x);\varphi_B(x)) = \max\{0;\varphi_A(x)+\varphi_B(x)-1\}$.

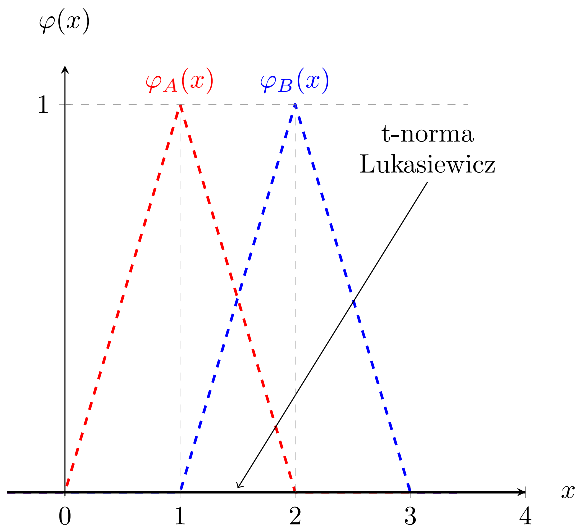


Figura 7.3: Representação da t-norma de Lukasiewicz.

Nem sempre a t-norma de Lukasiewicz é nula como na Figura 7.3, o que pode ser verificado no Exemplo 7.15.

(d) t-norma drástica $t_D(\varphi_A(x);\varphi_B(x)) = \begin{cases} \varphi_A(x) & ,\ \text{se } \varphi_B(x)=1 \\ \varphi_B(x) & ,\ \text{se } \varphi_A(x)=1 \\ 0 & ,\ \text{caso contrário} \end{cases}$.

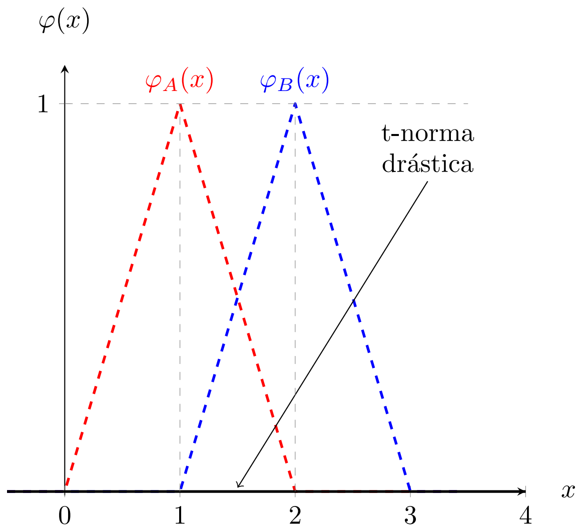


Figura 7.4: Representação da t-norma drástica.

Como visto na t-norma de Lukasiewicz, a t-norma drástica da Figura 7.4 se mostra nula, o que não é sempre válido como pode ser verificado no Exemplo 7.15.

A Figura 7.5 apresenta todas as t-normas juntas onde é possível verificar a desigualdade da Proposição 7.13.

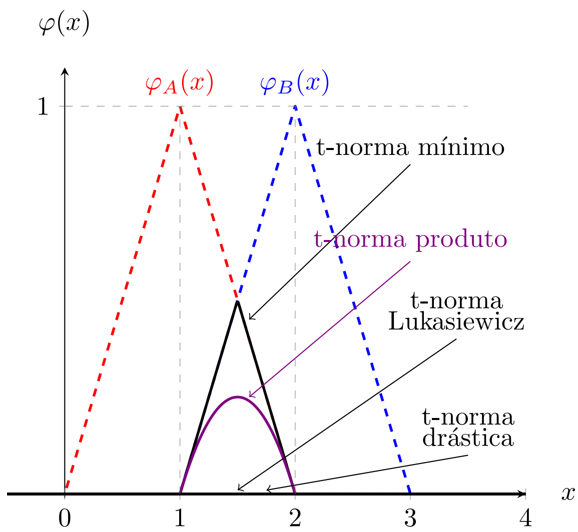


Figura 7.5: Representação da desigualdade das t-normas.

Exemplo 7.15. Considere os números fuzzy triangulares $A = (0; 1; 3)$ e $B = (-1; 2; 3)$. A t-norma do mínimo é apresentada na Figura 7.6, a t-norma do produto na Figura 7.7, a t-norma de Lukasiewicz na Figura 7.8 e a t-norma drástica na Figura 7.9.

(a) t-norma do mínimo $t_M(\varphi_A(x); \varphi_B(x)) = \min\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} = \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(x)$.

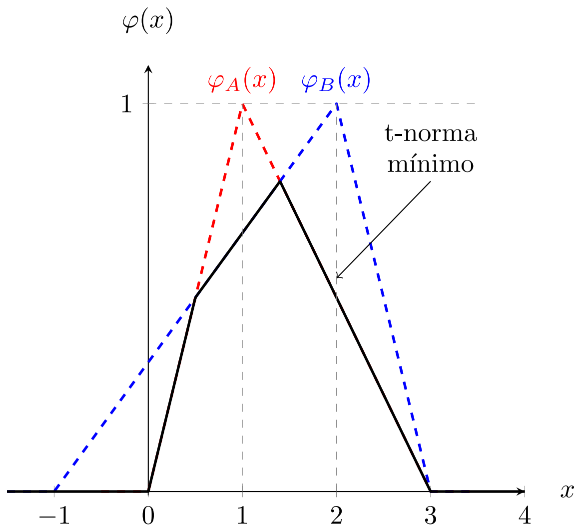


Figura 7.6: Representação da t-norma do mínimo exemplo.

(b) t-norma do produto $t_P(\varphi_A(x); \varphi_B(x)) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x)$.

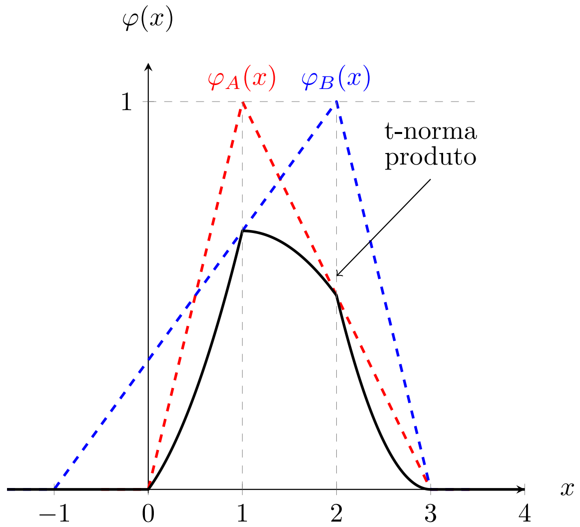


Figura 7.7: Representação da t-norma do produto exemplo.

(c) t-norma de Lukasiewicz $t_L(\varphi_A(x); \varphi_B(x)) = \max\{0; \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 1\}$.

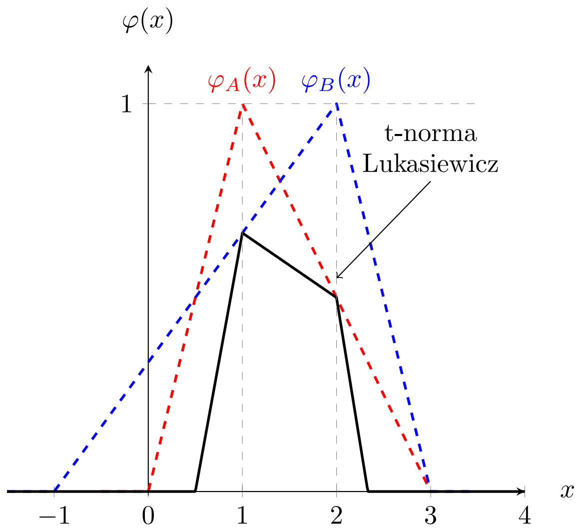


Figura 7.8: Representação da t-norma de Lukasiewicz exemplo.

(d) t-norma drástica $t_D(\varphi_A(x); \varphi_B(x)) = \begin{cases} \varphi_A(x) & , \text{ se } \varphi_B(x) = 1 \\ \varphi_B(x) & , \text{ se } \varphi_A(x) = 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$.

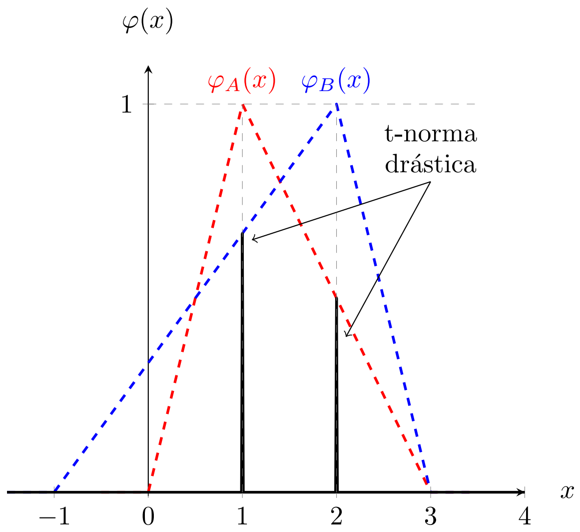


Figura 7.9: Representação da t-norma drástica exemplo.

A Figura 7.10 apresenta todas as t-normas juntas onde é possível verificar a desigualdade da Proposição 7.13.

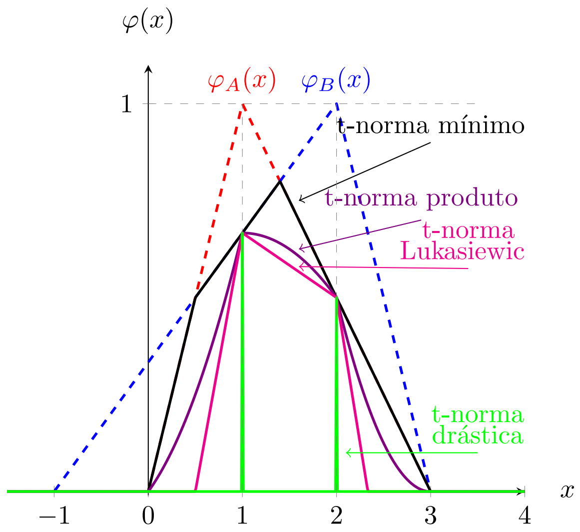


Figura 7.10: Representação da desigualdade das t-normas exemplo.

7.2.2 s-norma

É importante deixar claro que algumas literaturas chamam a s-norma de t-conorma. Neste trabalho será adotado s-norma e a notação será s tendo em vista que esta notação vem sendo utilizada em estudos recentes. Algumas literaturas como [2] utilizam também a notação $\triangledown$.

Definição 7.16. O operador

$$\begin{aligned} t\colon [0;1]\times[0;1] \to & [0;1] \\ s(x;y) = & xsy, \end{aligned}$$

é uma **s-norma** se cumprir as seguintes condições:

1. Elemento neutro
$$s(0;x) = 0sx = x.$$

2. Comutativa
$$s(x;y) = xsy = ysx = s(y;x).$$

3. Associativa
$$xs(ysz) = (xsy)sz.$$

4. Monotocidade
$$\text{Se } x \leq y \text{ e } u \leq v, \text{ então } xsu \leq ytv.$$

Proposição 7.17. *Os seguintes operadores são s-normas:*

1. $s_M(x;y) = \max\{x;y\} = x \vee y.$ *(Máximo)*
2. $s_S(x;y) = x + y - xy.$ *(Soma)*
3. $s_L(x;y) = \min\{1; x + y\}.$ *(Lukasiewicz)*

4. $s_D(x;y) = \begin{cases} x & , \ se \ y = 0 \\ y & , \ se \ x = 0 \\ 1 & , \ caso \ contrário \end{cases}$. *(Drástica)*

Observação 7.18. A s-norma s_D também pode ser definido como [6]

$$s_D(x;y) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } (x;y) \in (0;1]^2 \\ \max\{x;y\} & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

A demonstração desses fatos é apresentada e foram consultadas na seguinte referência [12].

Demonstração.
1. s-norma do máximo:

i) Do fato que $x \in [0;1]$, tem-se

$$s_M(0;x) = \max\{0;x\} = x.$$

ii) Independente de se ter $x \leq y$ ou $y \leq x$, sempre se tem-se o maior valor como resposta,

$$s_M(x;y) = \max\{x;y\} = \max\{y;x\} = s_M(y;x).$$

iii) Sem perda, supor que $x < y < z$,

$$xs_M(ys_Mz) = xs_M(\max\{y;z\}) = xs_Mz = \max\{x;z\} = z. \tag{7.5}$$

Por outro lado,

$$(xs_My)t_Mz = \min\{x;y\}s_Mz = ys_Mz = \max\{y;z\} = z. \tag{7.6}$$

Portanto, por (7.5) e (7.6) tem-se $xs_M(ys_Mz) = (xs_My)s_Mz$.

iv) Novamente sem perda, supor $x < y < u < v$,

$$\begin{aligned} xs_My &= \max\{x;y\} = y, \\ us_Mv &= \max\{u;v\} = v. \end{aligned}$$

Assim, tem-se

$$xs_Mu = \max\{x;u\} = u.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \Rightarrow u &\leq v \\ \Rightarrow \max\{x;u\} &\leq \max\{y;v\} \\ xs_Mu &\leq ys_Mv. \end{aligned}$$

Observe que para demais casos a demonstração é análoga.

Portanto, por i), ii), iii) e iv) tem-se que $s_M(x;y) = \max\{x;y\}$ é uma s-norma.
2. s-norma da soma:

i) Do fato que $x \in [0;1]$, tem-se

$$s_S(0;x) = 0 + x - 0x = x.$$

ii) Utilizando a definição da s-norma e a comutatividade da adição,

$$s_S(x;y) = x + y - xy = y + x - yx = s_S(y;x).$$

iii) Novamente utilizando a comutatividade da adição tem-se

$$\begin{aligned} x s_S(y s_S z) =& x s_S(y + z - yz) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) \\ \Rightarrow x s_S(y s_S z) =& x + y + z - xy - xz - yz + xyz. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (x s_S y) s_S z =& (x + y - xy) s_S z = (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z \\ \Rightarrow (x s_S y) s_S z =& x + y + z - xy - xz + xyz. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Portanto, por (7.7) e (7.8) tem-se $x s_S(y s_S z) = (x s_S y) s_S z$.

iv) Sem perda de generalidade, supor $x < y < u < v$, e do fato que $x, v \in [0;1]$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - x \leq 1, \\ 0 \leq 1 - v \leq 1. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} x \leq& y \\ \Rightarrow x(1 - v) \leq& y(1 - v) \\ \Rightarrow x - xv \leq& y - yv \\ \Rightarrow v + x - xv \leq& v + y - yv. \end{aligned} \tag{7.9}$$

E também,

$$\begin{aligned} u \leq& v \\ \Rightarrow u(1 - x) \leq& v(1 - x) \\ \Rightarrow u - xu \leq& v - vx \\ \Rightarrow x + u - xu \leq& x + v - xv. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Comparando (7.9) e (7.10),

$$\begin{aligned} x + u - xu \leq& x + v - xv \leq v + y - yv \\ \Rightarrow x + u - xu \leq& v + y - yv \\ \Rightarrow s_S(x;u) \leq& s_S(y;v). \end{aligned}$$

Portanto $s_S(x;y) = x + y - xy$ é uma s-norma.
3. s-norma de Lukasiewicz:

i) Do fato que $x \in [0; 1]$, tem-se

$$s_L(0; x) = \min\{1; x\} = x.$$

ii) Da comutatividade da adição e a comparação com o valor 1, sempre se tem-se o menor valor como resposta,

$$s_L(x; y) = \min\{1; x + y\} = \min\{1; y + x\} = s_L(y; x).$$

iii) Note que,

$$\begin{aligned} xs_L(ys_Lz) =& xs_L \min\{1; y + z\} = \min\{1; x + \min\{1; y + z\}\} \\ \Rightarrow xs_L(ys_Lz) =& \min\{1; x + \min\{1; y + z\}\}. \end{aligned}$$

E também,

$$\begin{aligned} (xs_Ly)s_Lz =& \min\{1; x + y\}s_Lz = \min\{1; \min\{1; x + y\} + z\} \\ \Rightarrow (xs_Ly)s_Lz =& \min\{1; \min\{1; x + y\} + z\}. \end{aligned}$$

Deste modo,

(a) Se $1 \leq y + z$ e $1 \leq x + y$,

$$\begin{aligned} xs_L(ys_Lz) =& \min\{1; x + \min\{1; y + z\}\} = \min\{1; x + 1\} = 1 \\ =& \min\{1; 1 + z\} = \min\{1; \min\{1; x + y\} + z\} = (xs_Ly)s_Lz, \\ \Rightarrow (xs_Ly)s_Lz =& (xs_Ly)s_Lz. \end{aligned}$$

(b) Se $1 > y + z$ e $1 > x + y$, então

$$\begin{aligned} xs_L(ys_Lz) =& \min\{1; x + \min\{1; y + z\}\} = \min\{1; x + y + z\} = x + y + z \\ =& \min\{1; x + y + z\} = \min\{1; \min\{1; x + y\} + z\} = (xs_Ly)s_Lz, \\ \Rightarrow (xs_Ly)s_Lz =& (xs_Ly)s_Lz. \end{aligned}$$

(c) Se $1 \leq y + z$ e $1 > x + y$, e assim $1 \leq y + z < x + y + z$, então

$$\begin{aligned} xs_L(ys_Lz) =& \min\{1; x + \min\{1; y + z\}\} = \min\{1; x + 1\} = 1 \\ =& \min\{1; x + y + z\} = \min\{1; \min\{1; x + y\} + z\} = (xs_Ly)s_Lz, \\ \Rightarrow (xs_Ly)s_Lz =& (xs_Ly)s_Lz. \end{aligned}$$

(d) Se $1 > y + z$ e $1 \leq x + y$, tem-se

$$\begin{aligned} xs_L(ys_Lz) =& \min\{1; x + \min\{1; y + z\}\} = \min\{1; x + y + z\} = 1 \\ =& \min\{1; 1 + z\} = \min\{1; \min\{1; x + y\} + z\} = (xs_Ly)s_Lz, \\ \Rightarrow (xs_Ly)s_Lz =& (xs_Ly)s_Lz. \end{aligned}$$

Portanto, é válida a associatividade $(xs_Ly)s_Lz = (xs_Ly)s_Lz$.

iv) Sem perda, supor $x < y < u < v$,

(a) Se $1 \leq x+u$ tem-se $1 \leq y+v$ assim

$$s_L(x;u) = \min\{1; x+u\} = 1 = \min\{1; y+v\} = s_L(y;v).$$

Conseguindo assim a igualdade.

(b) Se $1 > x+u$ então,

$$s_L(x;u) = \min\{1; x+u\} = x+u \leq 1 \leq y+v = \min\{1; y+v\} = s_L(y;v).$$

Portanto, $S_L(x;y) = \min\{1; x+y\}$ é um s-norma.

4. s-norma drástica:

i) Do fato que $x \in [0;1]$ e da definição de s_D, tem-se

$$s_D = \begin{cases} x & , \text{ se } y = 0 \\ y & , \text{ se } x = 0 \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Assim, $s_D(0;x) = x$.

ii) Utilizando a definição de t_D,

$$s_D(x;y) = \begin{cases} x & , \text{ se } y = 0 \\ y & , \text{ se } x = 0 \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} y & , \text{ se } x = 0 \\ x & , \text{ se } y = 0 \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases} = s_D(y;x).$$

iii) Para mostrar que $xs_D(ys_Dz) = (xs_Dy)s_Dz$ é necessário analisar os seguintes casos:

(a) $x = 0, y = 0, z = 0,$

$$xs_D(ys_Dz) = xs_D0 = x = 0 = z = 0s_Dz = (xs_Dy)s_Dz.$$

(b) $x = 0, y = 0, z \neq 0,$

$$xs_D(ys_Dz) = xs_Dz = z = 0s_Dz = (xs_Dy)s_Dz.$$

(c) $x = 0, y \neq 0, z = 0,$

$$xs_D(ys_Dz) = xs_Dy = y = ys_Dz = (xs_Dy)s_Dz.$$

(d) $x = 0, y \neq 0, z \neq 0,$

$$xs_D(ys_Dz) = xs_D1 = 1 = ys_Dz = (xs_Dy)s_Dz.$$

(e) $x \neq 0, y = 0, z = 0,$

$$xs_D(ys_Dz) = xs_D0 = x = xs_Dz = (xs_Dy)t_Dz.$$

(f) $x \neq 0, y = 0, z \neq 0,$

$$xs_D(ys_Dz) = xs_Dz = 1 = xs_Dz = (xs_Dy)s_Dz.$$

(g) $x \neq 0, y \neq 0, z = 0,$

$$xs_D(ys_Dz) = xs_Dy = 1 = 1s_Dz = (xs_Dy)s_Dz.$$

(h) $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0,$

$$xs_D(ys_Dz) = xs_D1 = 1 = 1s_Dz = (xs_Dy)s_Dz.$$

Portanto $xs_D(ys_Dz) = (xs_Dy)s_Dz$.

iv) Considerando sem perda $x \leq y$ e $u \leq v$,

(a) Se $x = 0$ e $y = 0$, assim

$$s_D(x; u) = u \leq v = s_D(y; v).$$

(b) Se $x = 0$ então $v = 0$,

$$s_D(x; u) = x \leq y = s_D(y; v).$$

(c) Se $x = 0$, $y \neq 0$ e $v \neq 0$,

$$s_D(x; u) = u \leq 1 = s_D(y; v).$$

(d) Se $x \neq 0$ e $u \neq 0$ então $y \not0$ e $v \neq 0$, assim

$$s_D(x; u) = 1 = s_D(y; v).$$

Os casos em que $u = 0$ são análogos.

Portanto, por i), ii), iii) e iv) tem-se que $s_D(x; y)$ é uma s-norma.

□

Proposição 7.19. *[6] Seja s um s-norma qualquer, então para todo $x \in [0; 1]$ tem-se que*

$$s(x; 1) = 1.$$

Demonstração. Da Definição 7.16, tem-se o elemento neutro, a comutatividade e monotocidade, assim

$$s(x; y) \geq s(x; 0) = x.$$

Também,

$$s(x; y) \geq s(0; y) = y.$$

Deste modo,

$$s(x; y) \geq \max\{x; y\}.$$

Como $x \in [0; 1]$,tem-se

$$s(x; 1) \geq \max\{x; 1\} = 1.$$

□

Teorema 7.20. *[6] Seja s uma s-norma qualquer, então*

$$s_M \leq s \leq s_D.$$

Demonstração. Pela Proposição 7.19 tem-se

$$s_M(x;y) = \max\{x;y\} \leq s(x;y).$$

Basta mostrar então que $s \leq s_D$.

i) Se $x = 0$,
$$s_D(x;y) = y = s_D(0;y) = s(x;y).$$

ii) Se $y = 0$,
$$s_D(x;y) = x = s_D(y;0) = s(x;y).$$

iii) Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$,
$$s(x;y) \leq s(x;1) = 1 = s_D(x;y).$$

Portanto, $s_M \leq s \leq s_D$. □

Proposição 7.21. *[6] As s-normas s_M, s_S, s_L e s_D satisfazem*

$$s_M \leq s_S \leq s_L \leq s_D.$$

Demonstração. Do Teorema 7.20, tem-se $s_M \leq s \leq s_D$, assim basta mostrar que $s_S \leq s_L$.

i) Se $1 < x + y$, então
$$s_L(x;y) = \min\{1; x+y\} = 1.$$

Da definição de $s_S$tem-se

$$\begin{aligned} s_S(x;y) = x + y - xy \leq & 1 = \min \min\{1; x+y\} = s_L(x;y) \\ \Rightarrow s_S(x;y) \leq & s_L(x;y). \end{aligned}$$

ii) Se $1 \geq x + y$, então
$$s_L(x;y) = x + y.$$

Do fato que $-xy \leq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} s_S(x;y) = x + y - xy \leq & x + y = \min\{1; x+y\} = s_L(x;y) \\ \Rightarrow s_S(x;y) \leq & s_L(x;y). \end{aligned}$$

Portanto, $s_S(x;y) \leq s_L(x;y)$.

□

Exemplo 7.22. Considere os números triangulares fuzzy do Exemplo 3.12. A s-norma do máximo é apresentada na Figura 7.11, a s-norma da soma na Figura 7.12, a s-norma de Lukasiewicz na Figura 7.13 e a s-norma drástica na Figura 7.14.

(a) s-norma do máximo $s_M(\varphi_A(x);\varphi_B(x)) = \max\{\varphi_A(x);\varphi_B(x)\} = \varphi_A(x) \vee \varphi_B(x)$.

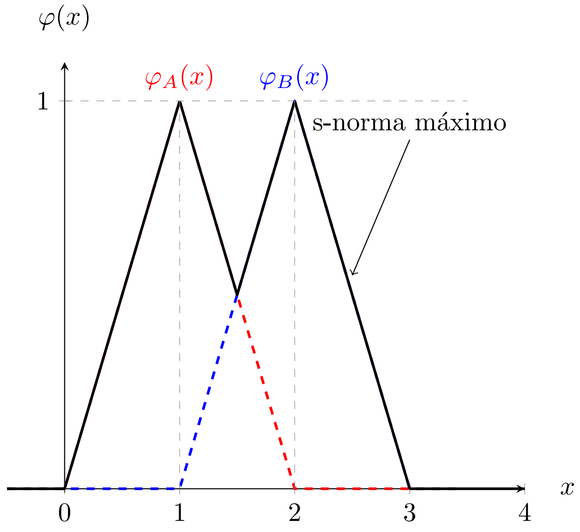


Figura 7.11: Representação da s-norma do máximo.

(b) s-norma da soma $s_S(\varphi_A(x);\varphi_B(x)) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)$.

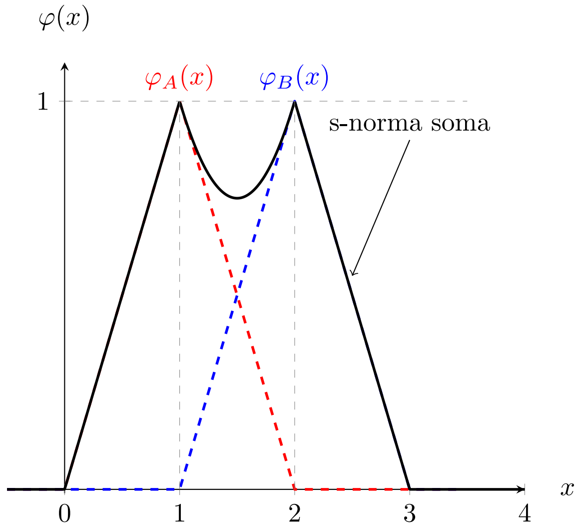


Figura 7.12: Representação da s-norma da soma.

(c) s-norma de Lukasiewicz $s_L(\varphi_A(x);\varphi_B(x)) = \min\{1;\varphi_A(x) + \varphi_B(x)\}$.

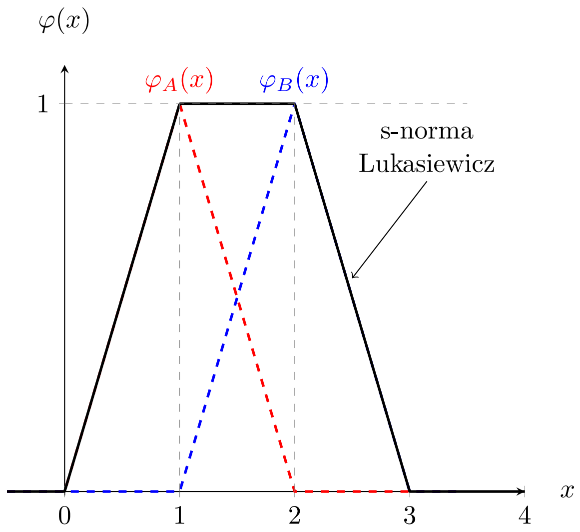


Figura 7.13: Representação da s-norma de Lukasiewicz.

(d) s-norma drástica $s_D(\varphi_A(x);\varphi_B(x)) = \begin{cases} \varphi_A(x) & , \text{ se } \varphi_B(x) = 0 \\ \varphi_B(x) & , \text{ se } \varphi_A(x) = 0 \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$.

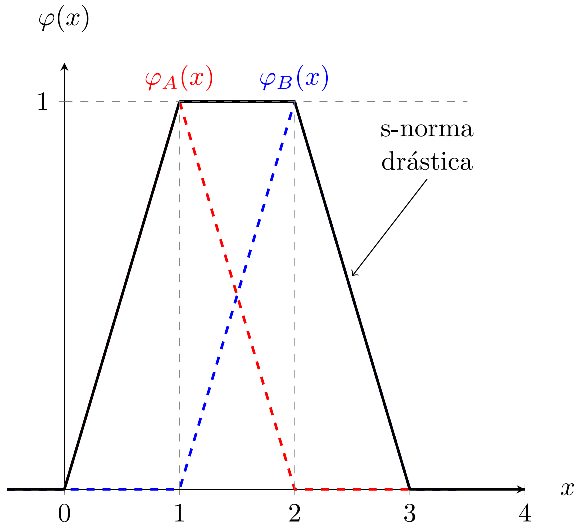


Figura 7.14: Representação da s-norma drástica.

Note que no caso das últimas duas s-normas temos como resultado a combinação convexa (ou também chamado de envelopamento) dos números fuzzy triangulares. Isso nem sempre ocorre, como será ilustrado nos exemplos a seguir.

A Figura 7.15 apresenta todas as s-normas juntas onde é possível verificar a desigualdade da Proposição 7.21.

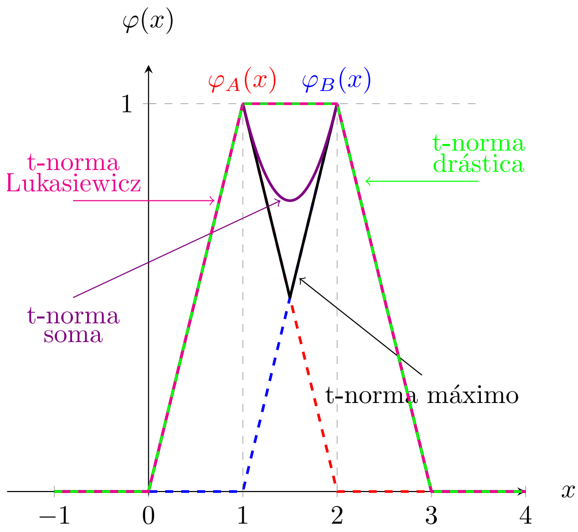


Figura 7.15: Representação da desigualdade das s-normas.

Exemplo 7.23. Considere os números fuzzy triangulares $A = (0; 1; 3)$ e $B = (-1; 2; 3)$. A s-norma do máximo é apresentada na Figura 7.16, a s-norma da soma na Figura 7.17, a s-norma de Lukasiewicz na Figura 7.18 e a s-norma drástica na Figura 7.19.

(a) s-norma do máximo $s_M(\varphi_A(x); \varphi_B(x)) = \max\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\} = \varphi_A(x) \vee \varphi_B(x)$.

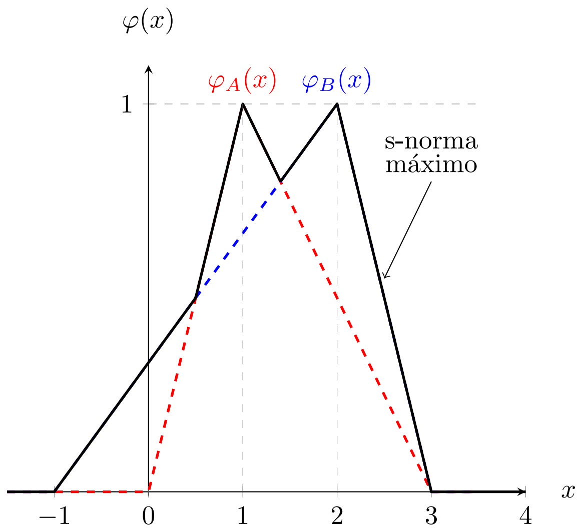


Figura 7.16: Representação da s-norma do máximo exemplo.

(b) s-norma da soma $s_S(\varphi_A(x); \varphi_B(x)) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x)$.

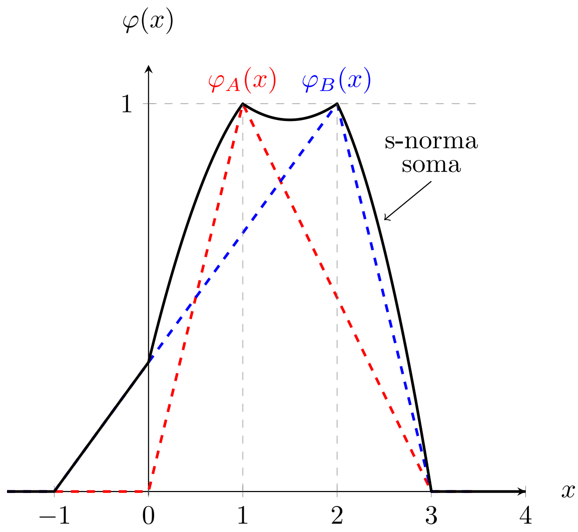


Figura 7.17: Representação da s-norma da soma exemplo.

(c) s-norma de Lukasiewicz $s_L(\varphi_A(x); \varphi_B(x)) = \min\{1; \varphi_A(x) + \varphi_B(x)\}$.

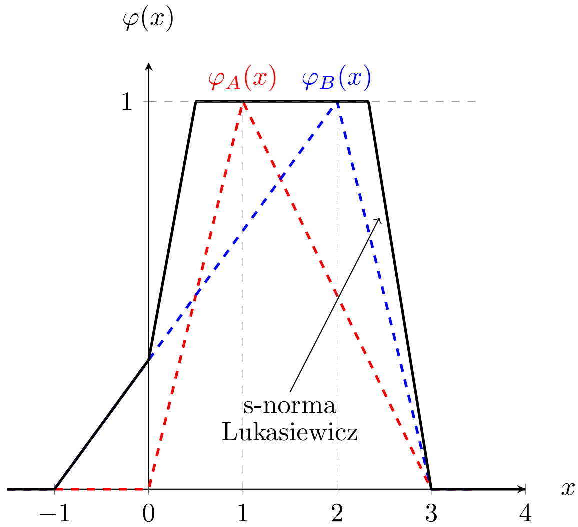


Figura 7.18: Representação da s-norma de Lukasiewicz exemplo.

(d) s-norma drástica $s_D(\varphi_A(x); \varphi_B(x)) = \begin{cases} \varphi_A(x) & , \text{ se } \varphi_B(x) = 0 \\ \varphi_B(x) & , \text{ se } \varphi_A(x) = 0 \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$.

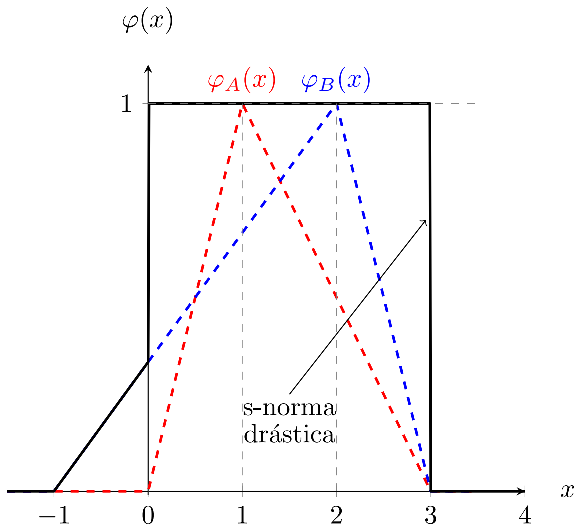


Figura 7.19: Representação da s-norma drástica exemplo.

A Figura 7.20 apresenta todas as s-normas juntas onde é possível verificar a desigualdade da Proposição 7.21.

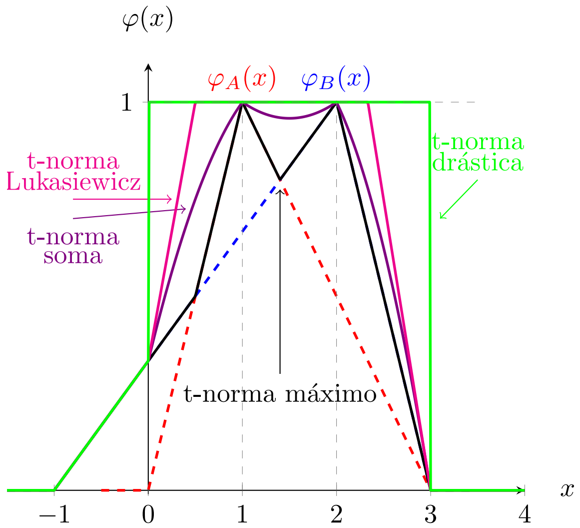


Figura 7.20: Representação da desigualdade das s-normas exemplo.

Definição 7.24. Uma aplicação $\eta\colon [0;1] \to [0;1]$ é uma **negação** se cumprir as seguintes condições:

1. $\eta(0) = 1$ e $\eta(1) = 0$. (Fronteira)

2. $\eta(\eta(x)) = x$. (Involução)

3. η é decrescente. (Monotonicidade)

Proposição 7.25. *As seguintes aplicações são de negação:*

1. $\eta_1(x) = 1 - x$. *(Complementar)*

2. $\eta_2(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

Demonstração.

1 Verificando se a Definição 7.24 se aplica a $\eta_1(x)$:

i) Tem-se,

$$\begin{aligned} \eta_1(x) =& 1-x \\ \Rightarrow \eta_1(0) =& 1-0 \\ \Rightarrow \eta_1(0) =& 1. \end{aligned}$$

E também,

$$\begin{aligned} \eta_1(x) =& 1-x \\ \Rightarrow \eta_1(1) =& 1-1 \\ \Rightarrow \eta_1(1) =& 0. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \eta_1(\eta_1(x)) =& 1-(1-x) \\ \Rightarrow \eta_1(\eta_1(x)) =& 1-1+x) \\ \Rightarrow \eta_1(\eta_1(x)) =& x. \end{aligned}$$

iii) Supondo $x \leq y$,

$$\begin{aligned} x \leq& y \\ \Rightarrow -x \geq& -y \\ \Rightarrow 1-x \geq& 1-y \\ \Rightarrow \eta_1(x) \geq& \eta_1(y). \end{aligned}$$

2 Da Definição 7.24, aplicando a $\eta_2(x)$:

i) Tem-se,

$$\begin{aligned} \eta_2(x) =& \frac{1-x}{1+x} \\ \Rightarrow \eta_2(0) =& \frac{1-0}{1+0} \\ \Rightarrow \eta_2(0) =& \frac{1}{1} \\ \Rightarrow \eta_2(0) =& 1. \end{aligned}$$

E também,

$$\begin{aligned} \eta_2(x) =& \frac{1-x}{1+x} \\ \Rightarrow \eta_2(1) =& \frac{1-1}{1+1} \\ \Rightarrow \eta_2(1) =& \frac{0}{2} \\ \Rightarrow \eta_2(x) =& 0. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\eta_2(\eta_2(x)) =& \frac{1 - \dfrac{1-x}{1+x}}{1 + \dfrac{1-x}{1+x}} \\
\Rightarrow \eta_2(\eta_2(x)) =& \frac{\dfrac{1+x-1+x}{1+x}}{\dfrac{1+x+1-x}{1+x}} \\
\Rightarrow \eta_2(\eta_2(x)) =& \frac{\dfrac{2x}{1+x}}{\dfrac{2}{1+x}} \\
\Rightarrow \eta_2(\eta_2(x)) =& \frac{2x}{1+x} \cdot \frac{1+x}{2} \\
\Rightarrow \eta_2(\eta_2(x)) =& x.
\end{aligned}$$

iii) Supondo $x \leq y$,

$$\begin{aligned}
x \leq& y \\
\Rightarrow x \leq& y \\
\Rightarrow 1 + x \leq& 1 + y \\
\Rightarrow \frac{1}{1+x} \geq& \frac{1}{1+y}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Multiplicando a terceira desigualdade abaixo pela Desigualdade (7.11),

$$\begin{aligned}
x \leq& y \\
\Rightarrow -x \geq& -y \\
\Rightarrow 1 - x \geq& 1 - y \\
\Rightarrow \frac{1-x}{1+x} \geq& \frac{1-y}{1+y} \\
\Rightarrow \eta_2(x) \geq& \eta_2(y)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 7.26. A aplicação $\eta_1 \colon [0;1] \to [0;1]$ com relação $\eta_1(x) = 1 - x$ efetuada no número fuzzy $A = (0;1;2)$ do Exemplo 3.12 é apresentada na Figura 7.21.

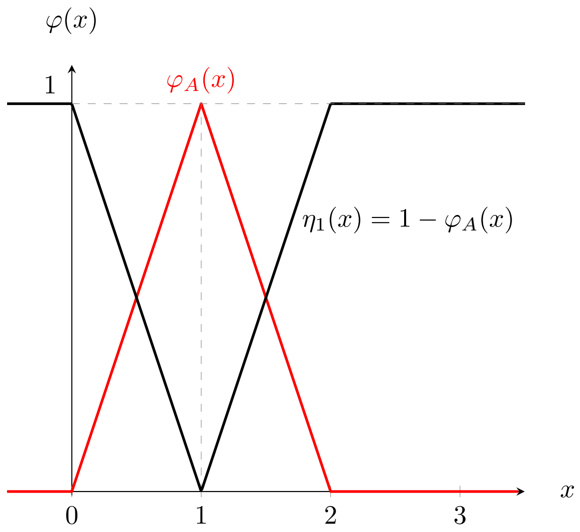


Figura 7.21: Aplicação da negação η_1.

Exemplo 7.27. A aplicação $\eta_2\colon [0;1] \to [0;1]$ com relação $\eta_2(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ efetuada no número fuzzy $A = (0;1;2)$ do Exemplo 3.12 é apresentada na Figura 7.22.

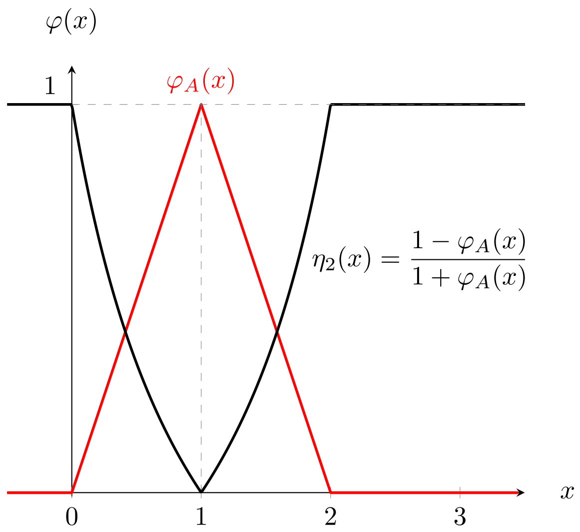


Figura 7.22: Aplicação da negação η_2.

Para finalizar este capítulo vamos apresentar um último conceito que relaciona relações fuzzy com o operador t-norma. Esse conceito é chamado de interatividade e está atrelada a uma distribuição de possibilidade conjunta, que nada mais é que um exemplo de relação fuzzy, assim como veremos a seguir.

Ao leitor que desejar um aprofundamento de alguns dos conceitos apresentados neste final de capítulo, pode consultar [8].

Definição 7.28. Uma relação fuzzy $\mathcal{J} \in F(\mathbb{R}^2)$ é uma **distribuição de possibilidade conjunta** entre os números fuzzy A_1 e A_2 se

$$A_1(x_1) = \sup\{\mathcal{J}(x_1;x_2)\} \text{ e } A_2(x_2) = \sup\{\mathcal{J}(x_1;x_2).\}$$

Em outras palavras, uma relação fuzzy é uma distribuição de possibilidade conjunta entre dois números fuzzy se a projeção de $\mathcal{J}$ na direção x_1 resulta em A_1 e a projeção de $\mathcal{J}$ na direção x_2 resulta em A_2. Nesse sentido, A_1 e A_2 são chamadas de marginais [24].

Definição 7.29. [25, 26] Os números fuzzy A_1 e A_2 são ditos **não interativos** se a distribuição de possibilidade conjunta entre eles é dada por

$$\mathcal{J}_M(x_1; x_2) = \min\{A_1(x_1); A_2(x_2)\}.$$

Caso $\mathcal{J} \neq \mathcal{J}_M$, então A_1 e A_2 são ditos **iterativos**. A conjunta $\mathcal{J}_M$ é também denotada na literatura por $\mathcal{J}_\wedge$ [25].

Definição 7.30. Seja a distribuição de possibilidade conjunta $\mathcal{J} \in F(\mathbb{R}^2)$ dos números A_1 e A_2, e $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. **A extensão sup-$\mathcal{J}$** da função f aplicada em $(A_1; A_2)$ é definida por

$$f_{\mathcal{J}}(A_1; A_2)(y) = \sup_{f(x_1;x_2)=y} \{\mathcal{J}(x_1; x_2)\}.$$

No próximo capítulo serão apresentados os conceitos de sequências recorrentes, porém apresenta-se a seguir um teorema que será útil mas que faz mais sentido estruturalmente colocá-lo aqui devido a ser um assunto relacionado a distribuição de possibilidade conjunta.

Teorema 7.31. *[25] Sejam $\{X_n\}^{\mathcal{J}}$ e$\{X_n\}^{\mathcal{J}_M}$ sequências recorrentes de números fuzzy com condições iniciais $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathbb{R}_F$ e $\mathcal{J}$ uma distribuição de possibilidade conjunta entre os elementos da sequência. Então $\{X_n\}^{\mathcal{J}} \subseteq \{X_n\}^{\mathcal{J}_M}$*

O Teorema 7.31 estabelece uma relação entre elementos das sequências fuzzy obtidos por meio de distribuições de possibilidades conjunta. Especificamente, as sequências produzidas pela t-norma do mínimo produz elementos mais "largos" que os elementos produzidos por qualquer outra conjunta.

A demonstração do Teorema 7.31 pode ser consultada em [25]. Para mais detalhes e discussões sobre distribuições de possibilidade conjunta e suas aplicações, o leitor pode consultar as referências [8, 27].

Neste capítulo foram abordados alguns conceitos da lógica fuzzy com o intuito de preparar o leitor para uma discussão sobre distribuições de possibilidade conjunta e aplicações em aritmética baseadas em t-normas, no próximo capítulo serão apresentadas aplicações envolvendo a sequência de Fibonacci e um modelo biológico, tendo em vista como os modelos se comportam quando realizadas as iterações.

8 Aplicações

Neste capítulo serão desenvolvidas aplicações dos assuntos desenvolvidos e das t-normas estudadas no Capítulo 7. Escolheu-se sequências recorrentes, ou seja, sequências em que os termos são definidos utilizando-se os seus antecessores, para mais detalhes veja o Anexo B e [28]. A sequência de Fibonacci também foi estudada no artigo [29], onde utilizou-se a t-norma do mínimo, e a Modelagem de insetos e a Propagação anual de plantas são exemplos da literatura [30].

Os algoritmos utilizados foram escritos pelos autores deste trabalho no programa **Octave** [31], o Anexo A apresenta alguns comando úteis para utilização do programa e alguns *scripts* de exemplo. Os dados obtidos foram transportados para arquivos que pudessem ser utilizados com o pacote Ti*k*Z do processador de textos LaTeX.

É importante salientar que para o estudo, análise e posterior construção dos gráficos se faz necessário diversos aspectos computacionais. Dentre alguns, pode-se citar o algoritmo, a quantidade de pontos processados, e principalmente a aritmética de ponto flutuante, que pode influenciar em pequenas variações (desvios ou erros) de aproximações devida a limitações, sejam de hardware ou software.

8.1 A sequência de Fibonacci

Leonardo Pisano, mais conhecido como **Leonardo Fibonacci** (1170 – 1250) publicou em 1202 sua obra intitulada *"Liber abaci"*, onde relatou uma sequência que mesmo conhecida anteriormente levaria seu nome [32].

Tal sequência foi ilustrada para o seguinte exemplo:

> "Um homem colocou um casal de coelhos em um recinto fechado. Quantos casais serão concebidos em um ano, se supusermos que cada casal gera outro por mês a partir de seu segundo mês de vida?".

O número de casais segue a sequência:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233.$$

A sequência de Fibonacci pode então ser definida recursivamente, onde cada novo termo é a soma dos dois anteriores:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

O interesse por esta sequência se deve não apenas a este exemplo, mas devido ao fato de que ela aparece nos mais diversos estudos, sejam estudos relacionados a natureza, flores, animais, galáxias e outros.

A sequência de Fibonacci também tem relação com o chamado **número de ouro**, também chamado de **proporção áurea** ou **divina proporção**[33], sendo a razão entre os lados de um retângulo o número irracional

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618.$$

A relação entre a sequência e o número de ouro se torna evidente a medida que se divide um termo pelo anterior, o que mostra que cada vez mais o resultado se aproxima de ϕ.

Existem muitas outras propriedades conhecidas e muitas outras em estudos a respeito desta sequência, como os estudos publicado em revistas específicas para o assunto [34].

A Tabela 8.1 apresenta os números da sequência de Fibonacci até F_{34}

F_1	1	F_{18}	2584
F_2	1	F_{19}	4181
F_3	2	F_{20}	6765
F_4	3	F_{21}	10946
F_5	5	F_{22}	17711
F_6	8	F_{23}	28657
F_7	13	F_{24}	46368
F_8	21	F_{25}	75025
F_9	34	F_{26}	121393
F_{10}	55	F_{27}	196418
F_{11}	89	F_{28}	317811
F_{12}	144	F_{29}	514229
F_{13}	233	F_{30}	832040
F_{14}	377	F_{31}	1346269
F_{15}	610	F_{32}	2178309
F_{16}	987	F_{33}	3524578
F_{17}	1597	F_{34}	5702887

Tabela 8.1: Tabela com os números de Fibonacci de F_1 até F_{34}.

8.1.1 Sequência de Fibonacci de números fuzzy

Determinação da t-norma do mínimo

Como comentado anteriormente, a sequência de Fibonacci parte de duas condições iniciais $x_0 = x_1 = 1$. No entanto, do ponto de vista de prático, esta aplicação poderia partir de números maiores que esse, sendo que não necessariamente seriam fáceis de ser estimados. Por exemplo, poderíamos considerar que nos instantes iniciais se tem *em torno* de 50 pares de coelhos. A variável linguística *em torno* incorpora uma incerteza atribuída na contagem dos coelhos. Essa incerteza é então descrita por números fuzzy. Assim, o objetivo desta seção é explorar a sequência de Fibonacci levando em conta uma incerteza atribuída às condições iniciais do problema.

Apresenta-se a forma como foram determinados os processos computacionais para se calcular a sequência de Fibonacci em números fuzzy utilizando a t-norma do mínimo da

Proposição 7.9 e utilizando 5 pontos para domínio a fim de que seja compreensível ao leitor.

Utilizando a sequência de Fibonacci clássica

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,$$

tomando a Tabela 8.2, procedeu-se do seguinte modo:

1. Tomou-se os números triangulares fuzzy $F_1 = F_2 = (0; 1; 2)$ da Figura 8.1, colunas 1 e 2.

   Utiliza-se a notação $F_n(x)$ para identificar os pontos no domínio do número de Fibonacci F_n, no exemplo, tem-se os pontos $F_1(x) = F_2(x) = \{0; 0,5; 1; 1,5; 2\}$, este conjunto é formado por 5 pontos para que seja simples ao leitor acompanhar os cálculos iniciais.

2. Calculou-se $F_3(x)$ somando termo a termo de $F_1(x)$ e $F_2(x)$, ou seja a coluna 3 foi obtida somando os termos da anteriores da linha em questão,

   $$F_3(x) = F_2(x) + F_1(x).$$

3. As colunas 4 e 5 apresentam as respectivas pertinências de cada termo de $F_1(x)$ e $F_2(x)$.

4. Utilizando o **Princípio da extensão de Zadeh** da Definição 4.2 e a extensão da Definição 4.10, verifica-se **todos os possíveis valores** para os quais a soma de $F_1(x)$ e $F_2(x)$ resulta em $F_3(x)$, coluna 6, ou seja,

   $$F_{n+2}(x) = F_{n+1}(x') + F_n(x'').$$

   Observe que para determinar um $F_{n+2}(x)$ não tem-se necessariamente que x' e x'' são iguais, por este motivo é feita distinção entre estes valores.

5. Na t-norma do mínimo como visto na Proposição 7.9, é definida tomando-se o mínimo da pertinência de $\varphi_{F_1}(x)$ e $\varphi_{F_2}(x)$, deste modo, na coluna 7 é comparado o valor mínimo das pertinências de todas as possíveis somas determinadas na coluna 6.

6. Novamente utilizando o Princípio da extensão de Zadeh, a coluna 8 apresenta a pertinência de F_3 tomando o supremo do mínimo das pertinências da coluna 7.

De maneira análoga determina-se F_4, F_5 e F_6, conforme as Tabelas 8.3, 8.4, 8.5 e as Figuras 8.2, 8.3, 8.4 respectivamente.

$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$\varphi_{F_1}(x)$	$\varphi_{F_2}(x)$	$F_3(x) = F_2(x') + F_1(x'')$	$\min\{\varphi_{F_1}(x'); \varphi_{F_2}(x'')\}$	$\sup[\min\{\varphi_{F_1}(x'); \varphi_{F_2}(x'')\}] = \varphi_{F_3}(x)$
0	0	0	0	0	$0+0$	$\min\{0;0\} = 0$	0
$0,5$	$0,5$	1	$0,5$	$0,5$	$0+1$ $0,5+0,5$ $1+0$	$\min\{0;1\} = 0$ $\min\{0,5;0,5\} = 0,5$ $\min\{1;0\} = 0$	$0,5$
1	1	2	1	1	$0+2$ $0,5+1,5$ $1+1$ $1,5+0,5$ $2+0$	$\min\{0;0\} = 0$ $\min\{0,5;0,5\} = 0,5$ $\min\{1;1\} = 1$ $\min\{0,5;0,5\} = 0,5$ $\min\{0;0\} = 0$	1
$1,5$	$1,5$	3	$0,5$	$0,5$	$1+2$ $1,5+1,5$ $2+1$	$\min\{1;0\} = 0$ $\min\{0,5;0,5\} = 0,5$ $\min\{0;1\} = 0$	$0,5$
2	2	4	0	0	$2+2$	$\min\{0;0\} = 0$	0

Tabela 8.2: Tabela para o cálculo da pertinência de F_3.

$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$	$\varphi_{F_2}(x)$	$\varphi_{F_3}(x)$	$F_4(x) = F_3(x') + F_2(x'')$	$\min\{\varphi_{F_2}(x'); \varphi_{F_3}(x'')\}$	$\sup[\min\{\varphi_{F_2}(x'); \varphi_{F_3}(x'')\} = \varphi_{F_4}(x)]$
0	0	0	0	0	$0+0$	$\min\{0; 0\} = 0$	0
$0,5$	1	$1,5$	$0,5$	$0,5$	$0,5+1$ $1,5+0$	$\min\{0,5; 0,5\} = 0,5$ $\min\{0,5; 0\} = 0$	$0,5$
1	2	3	1	1	$0+3$ $2+1$ $1+2$	$\min\{0; 0,5\} = 0$ $\min\{1; 1\} = 1$ $\min\{0; 0,5\} = 0$	1
$1,5$	3	$4,5$	$0,5$	$0,5$	$0,5+4$ $1+3$ $2+2$	$\min\{0,5; 0\} = 0$ $\min\{1; 0,5\} = 0,5$ $\min\{0; 1\} = 0$	$0,5$
2	4	6	0	0	$2+4$	$\min\{0; 0\} = 0$	0

Tabela 8.3: Tabela para o cálculo da pertinência de F_4.

$F_3(x)$	$F_4(x)$	$F_5(x)$	$\varphi_{F_3}(x)$	$\varphi_{F_4}(x)$	$F_5(x) = F_4(x') + F_3(x'')$	$\min\{\varphi_{F_3}(x'); \varphi_{F_4}(x'')\}$	$\sup[\min\{\varphi_{F_3}(x'); \varphi_{F_4}(x'')\}] = \varphi_{F_5}(x)$
0	0	0	0	0	$0+0$	$\min\{0;0\} = 0$	0
1	1,5	2,5	0,5	0,5	$1+1,5$	$\min\{0,5;0,5\} = 0,5$	0,5
2	3	5	1	1	$2+3$	$\min\{1;1\} = 1$	1
3	4,5	7,5	0,5	0,5	$3,5+4$	$\min\{0,5;0,5\} = 0,5$	0,5
4	6	10	0	0	$4+6$	$\min\{0;0\} = 0$	0

Tabela 8.4: Tabela para o cálculo da pertinência de F_5.

$F_4(x)$	$F_5(x)$	$F_6(x)$	$\varphi_{F_4}(x)$	$\varphi_{F_5}(x)$	$F_6(x) = F_5(x') + F_4(x'')$	$\min\{\varphi_{F_4}(x'); \varphi_{F_5}(x'')\}$	$\sup[\min\{\varphi_{F_4}(x'); \varphi_{F_5}(x'')\}] = \varphi_{F_6}(x)$
0	0	0	0	0	$0+0$	$\min\{0;0\} = 0$	0
$1,5$	$2,5$	4	$0,5$	$0,5$	$1,5+2,5$	$\min\{0,5;0,5\} = 0,5$	$0,5$
3	5	8	1	1	$3+5$	$\min\{1;1\} = 1$	1
$4,5$	$7,5$	12	$0,5$	$0,5$	$4,5+7,5$	$\min\{0,5;0,5\} = 0,5$	$0,5$
6	10	16	0	0	$6+10$	$\min\{0;0\} = 0$	0

Tabela 8.5: Tabela para o cálculo da pertinência de F_6.

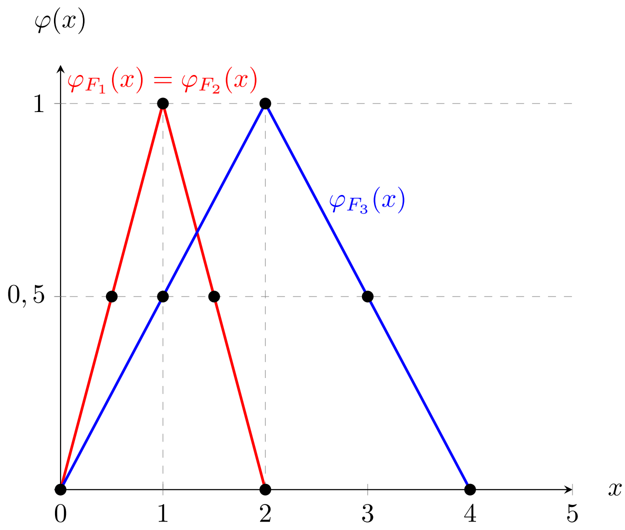


Figura 8.1: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1, F_2 e F_3.

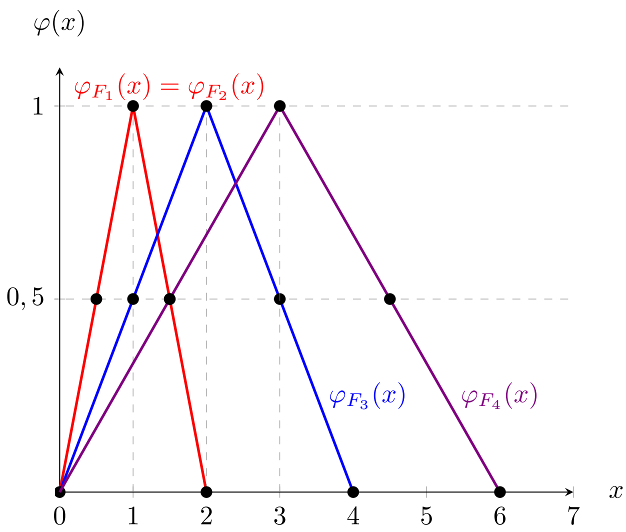


Figura 8.2: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1, F_2, F_3 e F_4.

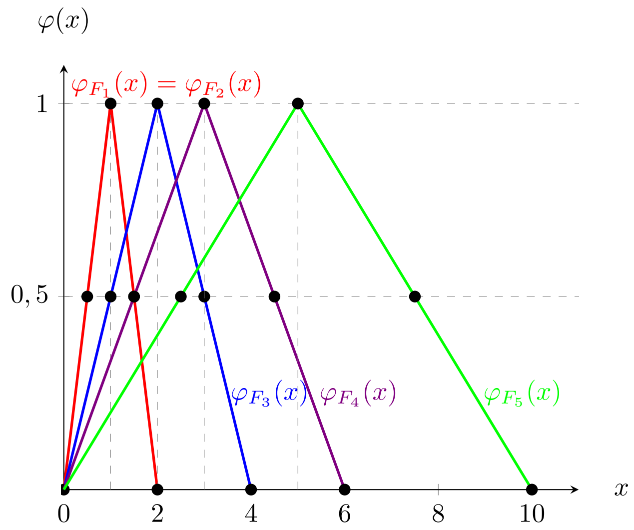


Figura 8.3: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1, F_2, F_3, F_4 e F_5.

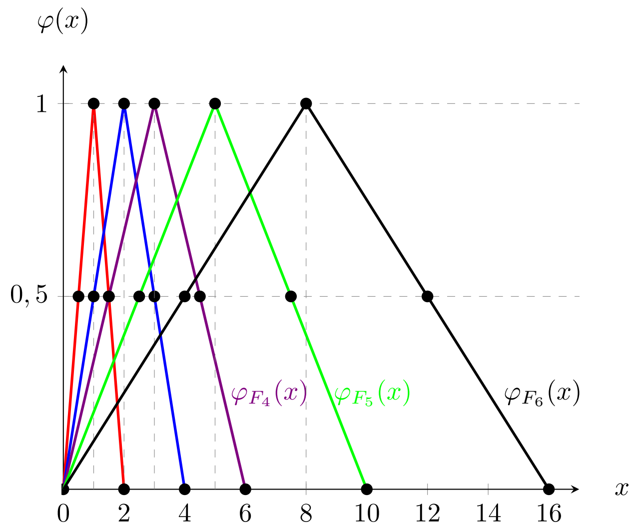


Figura 8.4: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 e F_6.

8.2 Simulações da sequência de Fibonacci utilizando t-normas

Motivados no estudo da sequência de Fibonacci no caso fuzzy, queremos agora explorar como essa incerteza, atribuída na condição inicial, evolui ao longo do processo. Isto é, temos como objetivo simular diferentes cenários de modo a saber se a incerteza aumenta, diminui ou se mantem ao longo do processo. Para este estudo mais específico, vamos considerar o uso de uma ferramenta chamada de interatividade fuzzy, que consiste em estudar possíveis relações intrínsecas entre variáveis fuzzy. Especificamente, vamos considerar o uso de t-normas por se tratarem de um exemplo de interatividade e serem mais conhecidas na literatura. Além disso, as t-normas podem ser relacionadas entre si, da seguinte forma, toda t-norma está contida na t-norma do mínimo e contém a t-norma drástica. Lembrando que a t-norma do mínimo é importante pois é o único caso em que não se considera interatividade. Pois bem, já que existem tais relações, busca-se explorar como elas evoluem em processos como o de Fibonacci, a fim de entender melhor como a incerteza pode evoluir. A partir disso, busca-se considerar a t-norma que pode auxiliar no controle da incerteza, já que resultados com grandes incertezas podem não ter significado algum [8].

Apresenta-se as simulações obtidas para a sequência de Fibonacci $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $n \in \mathbb{N}$, para os números triangulares fuzzy $F_1 = (0, 1, 2)$ e $F_2 = (0, 1, 2)$.

8.2.1 Sequência de Fibonacci utilizando a t-norma do mínimo

Sequência até F_8

Observe que como a t-norma do mínimo é equivalente a intersecção de números fuzzy, e que é realizada a soma de números triangulares pela definição da sequência, tem-se pelo Colorário 5.21 que os números serão triangulares como pode ser verificado na Figura 8.5.

$F_1 = F_2$	$(0; 1; 2)$
Pontos do domínio	53
t-norma	$t_M(x; y) = \min\{x; y\} = x \wedge y$

Tabela 8.6: Dados para a t-norma do mínimo.

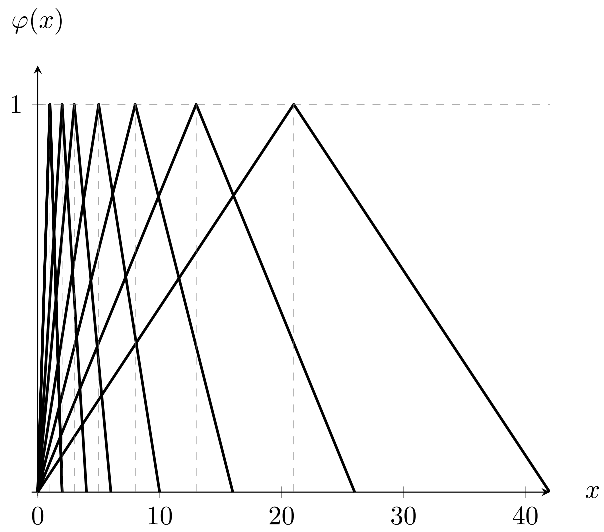


Figura 8.5: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_8 utilizando a t-norma do mínimo.

Sequência até F_{21}

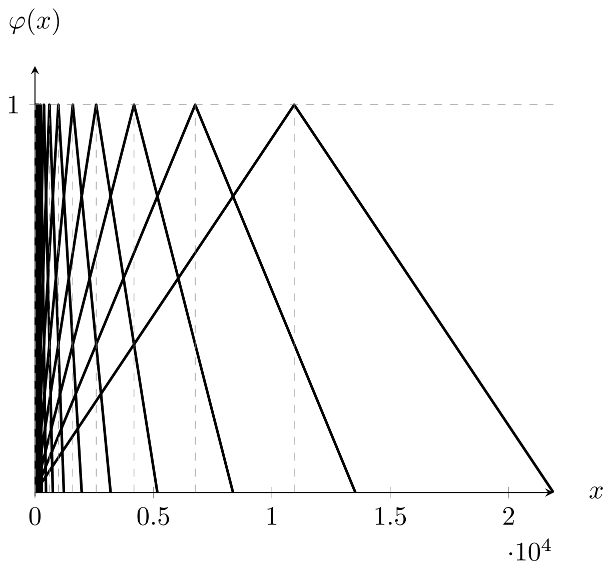


Figura 8.6: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{21} utilizando a t-norma do mínimo.

Sequência até F_{34}

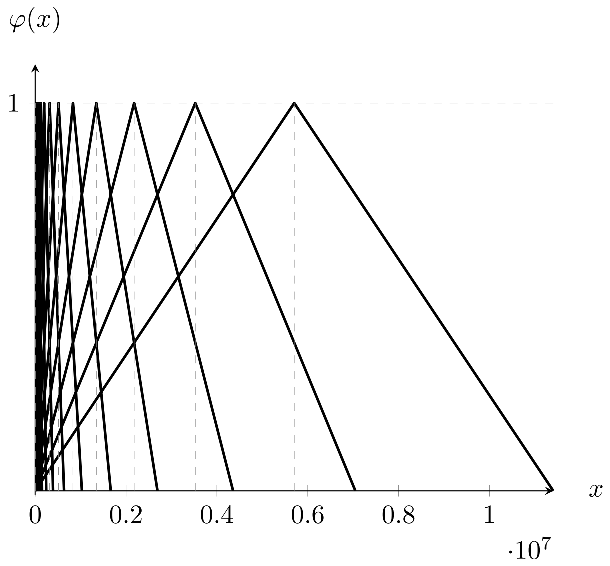


Figura 8.7: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{34} utilizando a t-norma do mínimo.

8.2.2 Sequência de Fibonacci utilizando a t-norma do produto

$F_1 = F_2$	$(0; 1; 2)$
Pontos do domínio	53
t-norma	$t_P(x; y) = xy$

Tabela 8.7: Dados para a t-norma do produto.

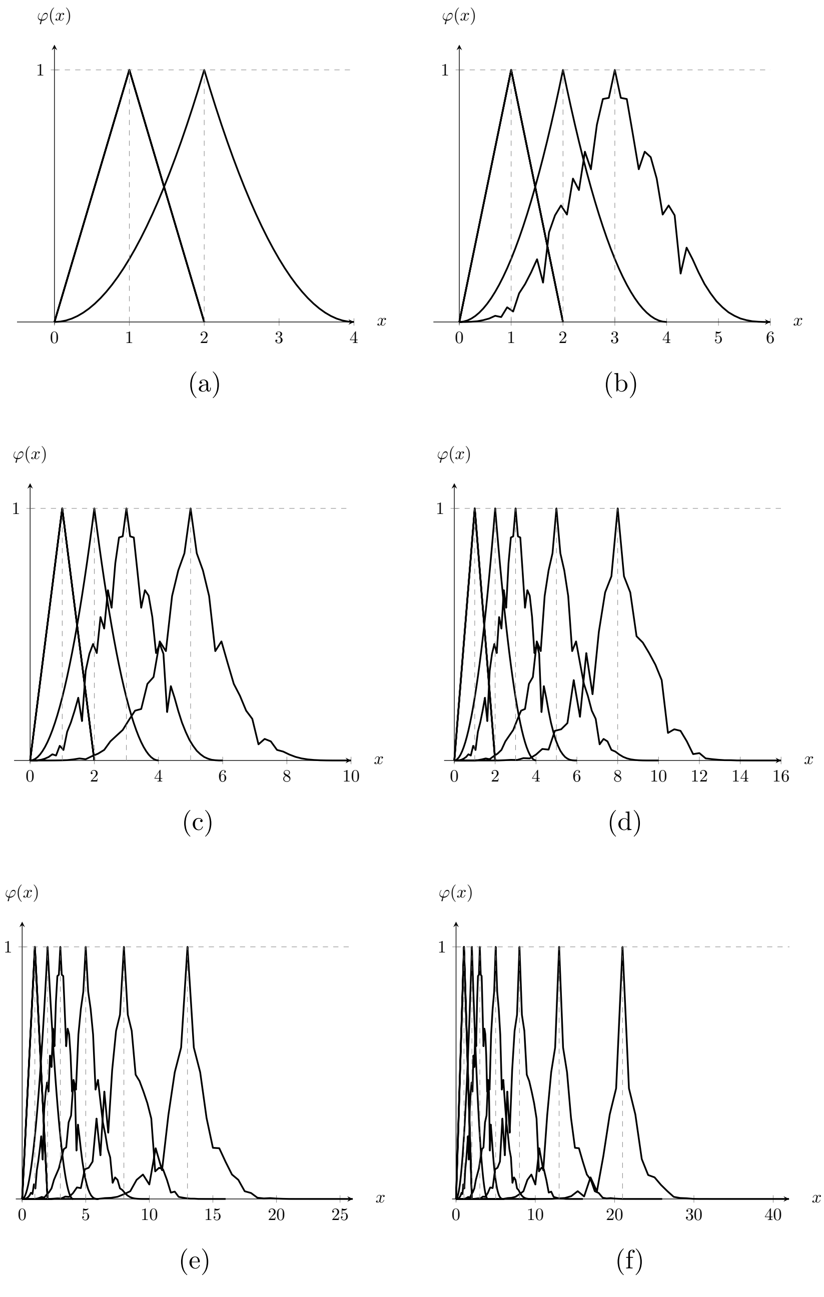


Figura 8.8: (a) F_1 até F_3; (b) F_1 até F_4; (c) F_1 até F_5; (d) F_1 até F_6; (e) F_1 até F_7; (f) F_1 até F_8; t-norma do produto.

Sequência até F_{21}

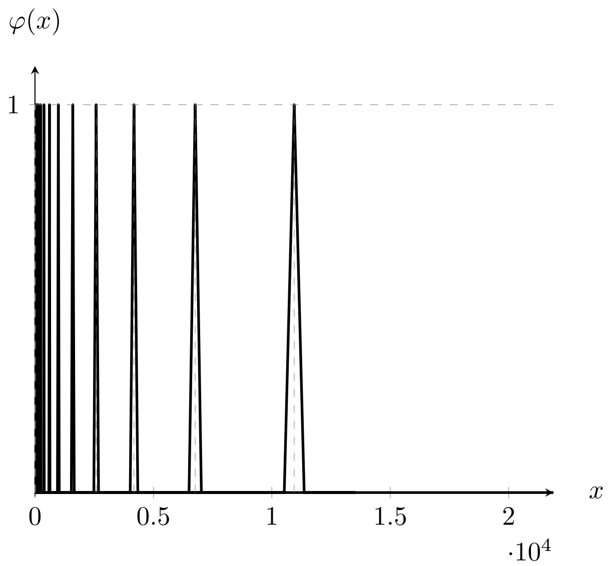


Figura 8.9: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{21} utilizando a t-norma do produto.

Sequência até F_{34}

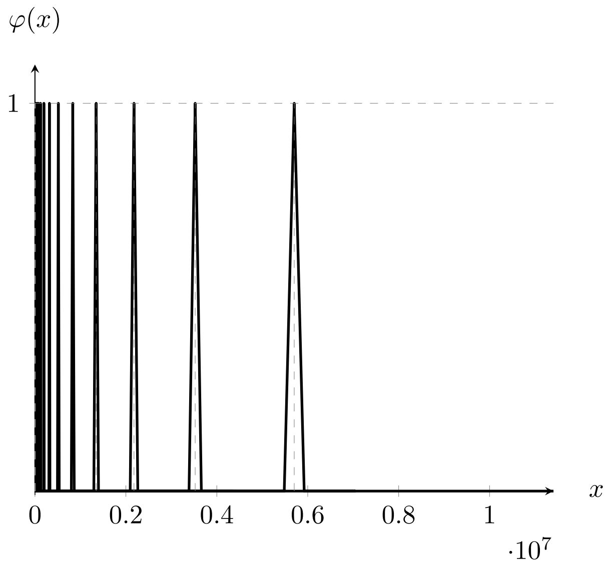


Figura 8.10: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{34} utilizando a t-norma do produto.

8.2.3 Sequência de Fibonacci utilizando a t-norma de Lukasiewicz

$F_1 = F_2$	$(0; 1; 2)$
Pontos do domínio	53
t-norma	$t_L(x; y) = \max\{0; x + y - 1\}$

Tabela 8.8: Dados para a t-norma do lukasiewicz.

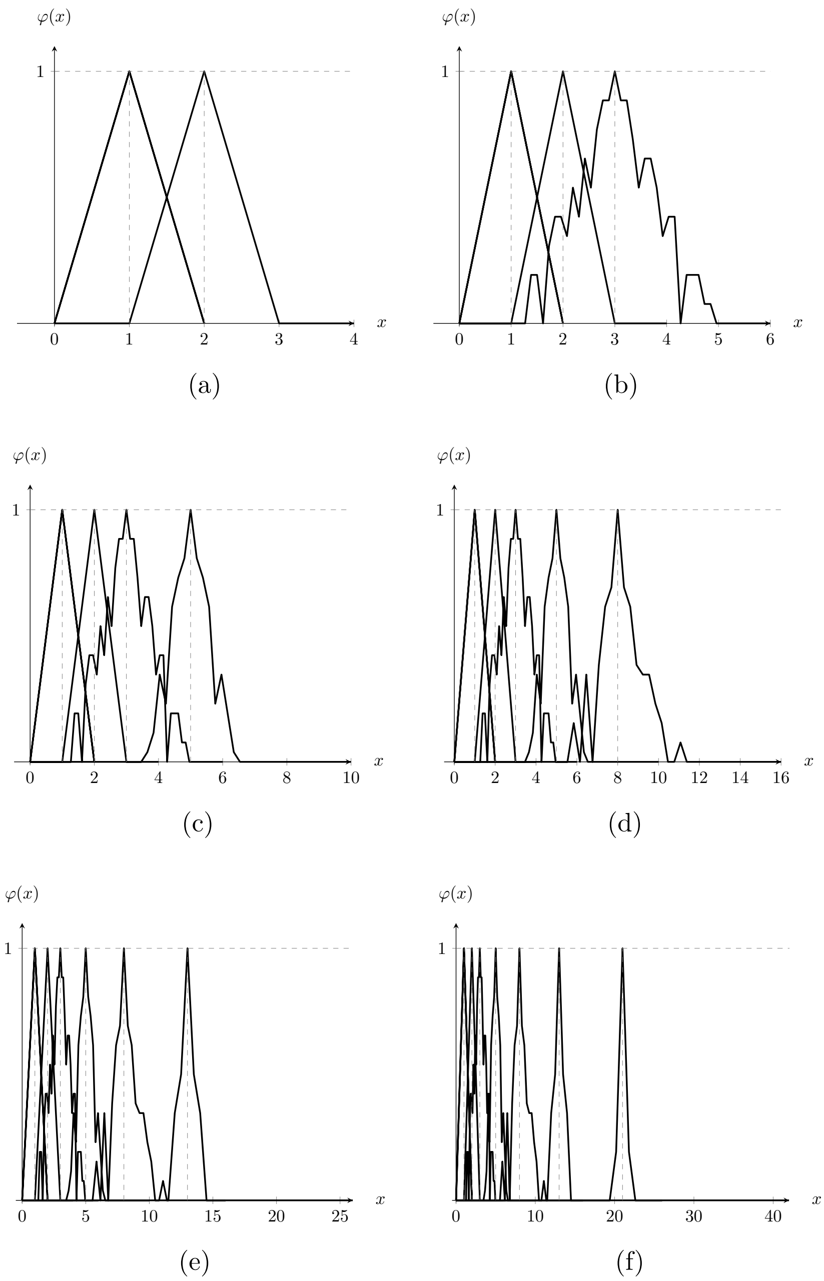


Figura 8.11: (a) F_1 até F_3; (b) F_1 até F_4; (c) F_1 até F_5; (d) F_1 até F_6; (e) F_1 até F_7; (f) F_1 até F_8; t-norma de Lukasiewicz.

Sequência até F_{21}

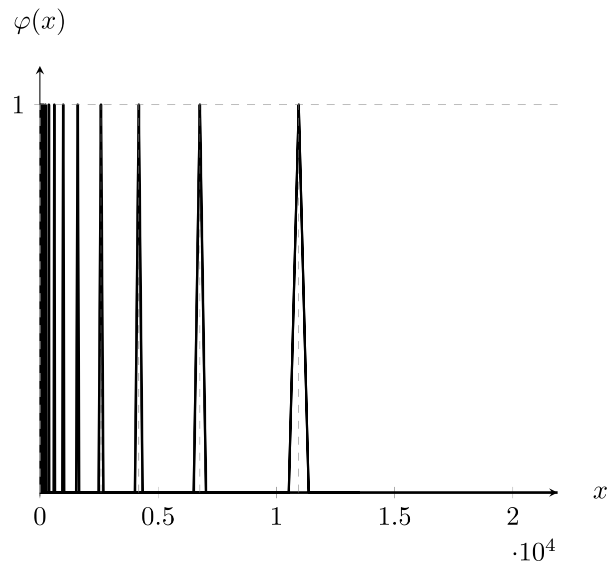


Figura 8.12: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{21} utilizando a t-norma de Lukasiewicz.

Sequência até F_{34}

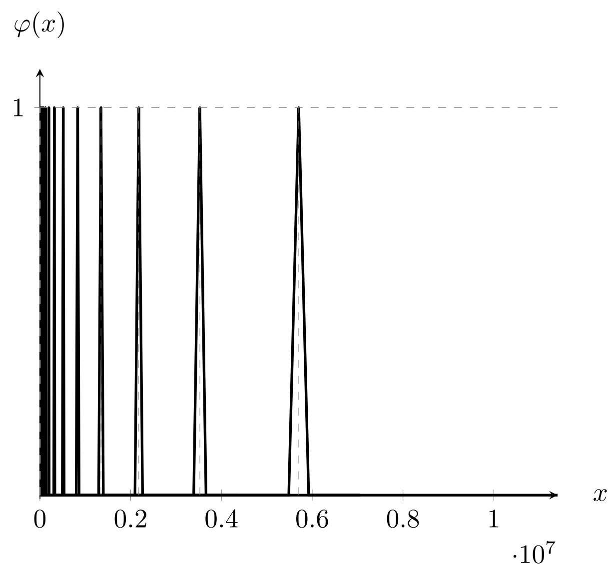


Figura 8.13: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{34} utilizando a t-norma de Lukasiewicz.

8.2.4 Sequência de Fibonacci utilizando a t-norma drástica

$F_1 = F_2$	$(0;1;2)$
Pontos do domínio	53
t-norma	$t_D(x;y) = \begin{cases} x & , \text{ se } y = 1 \\ y & , \text{ se } x = 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$

Tabela 8.9: Dados para a t-norma drástica.

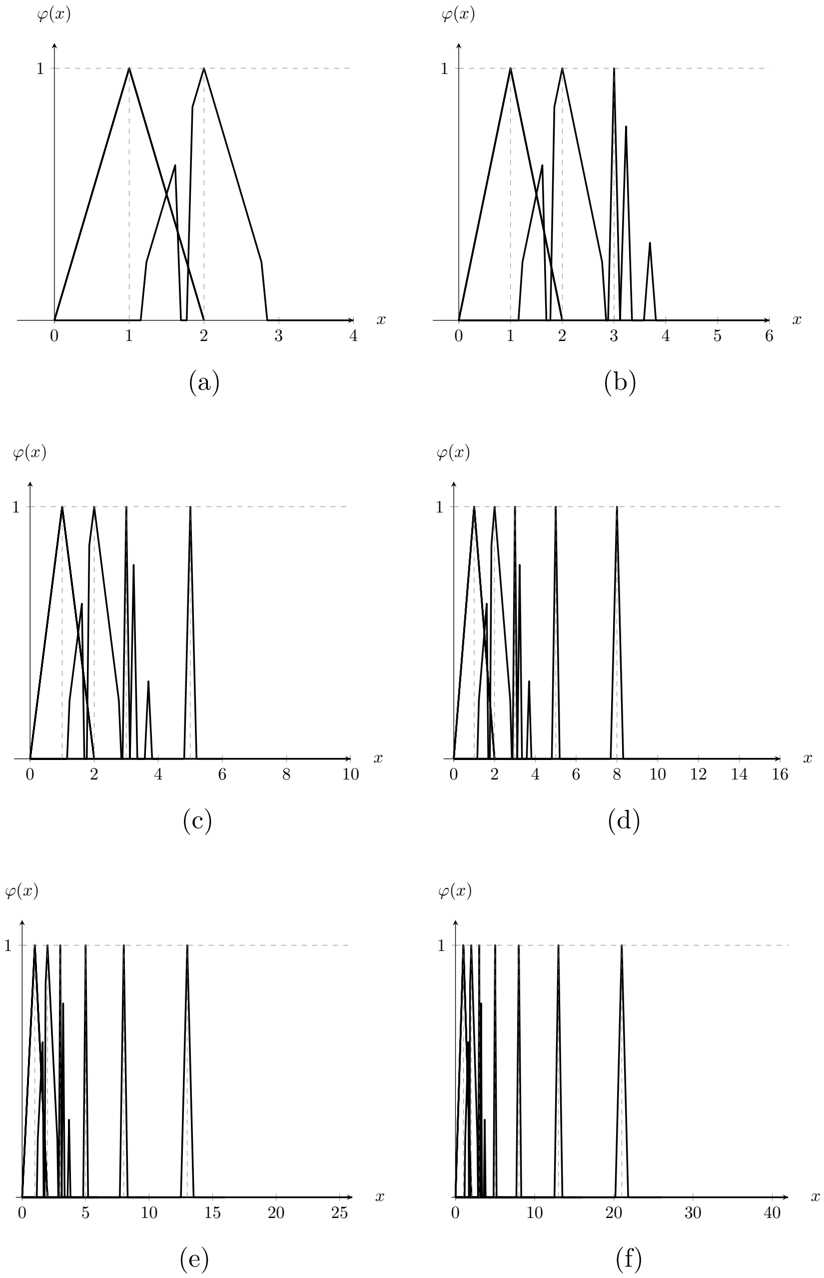


Figura 8.14: (a) F_1 até F_3; (b) F_1 até F_4; (c) F_1 até F_5; (d) F_1 até F_6; (e) F_1 até F_7; (f) F_1 até F_8; t-norma drástica.

Sequência até F_{21}

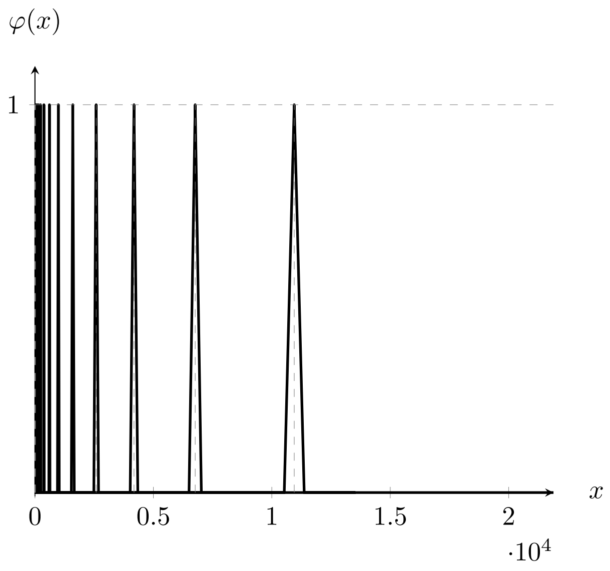


Figura 8.15: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{21} utilizando a t-norma drástica.

Sequência até F_{34}

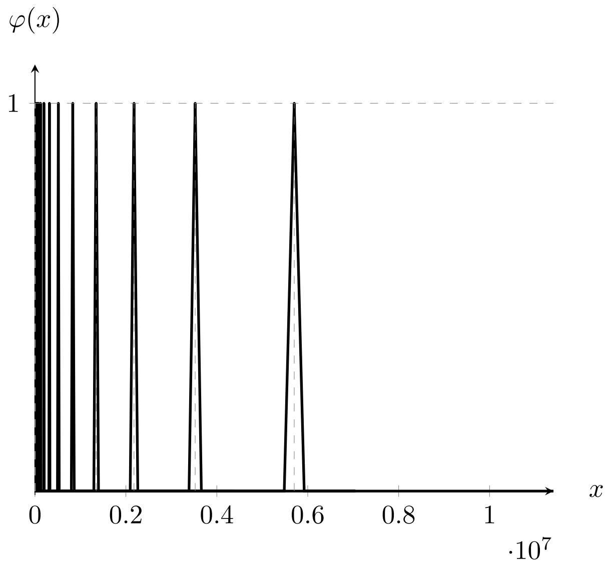


Figura 8.16: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{34} utilizando a t-norma drástica.

8.2.5 Comparação entre as t-normas

F_1 até F_8

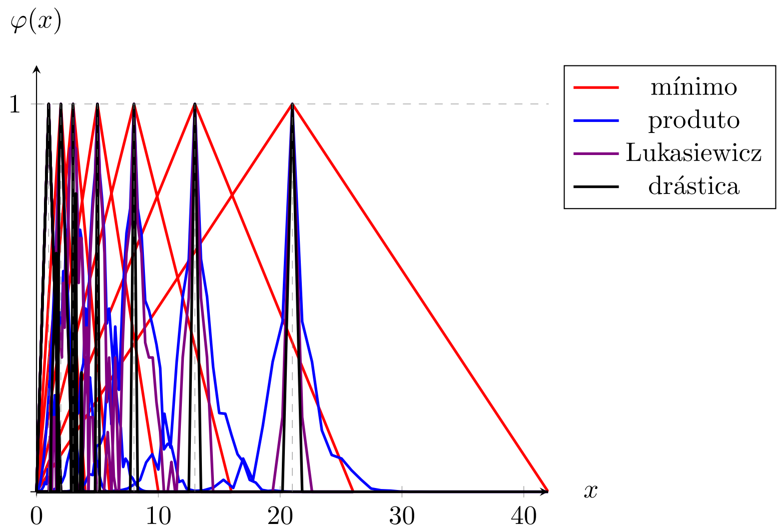


Figura 8.17: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_8 comparando t-normas.

F_1 até F_{21}

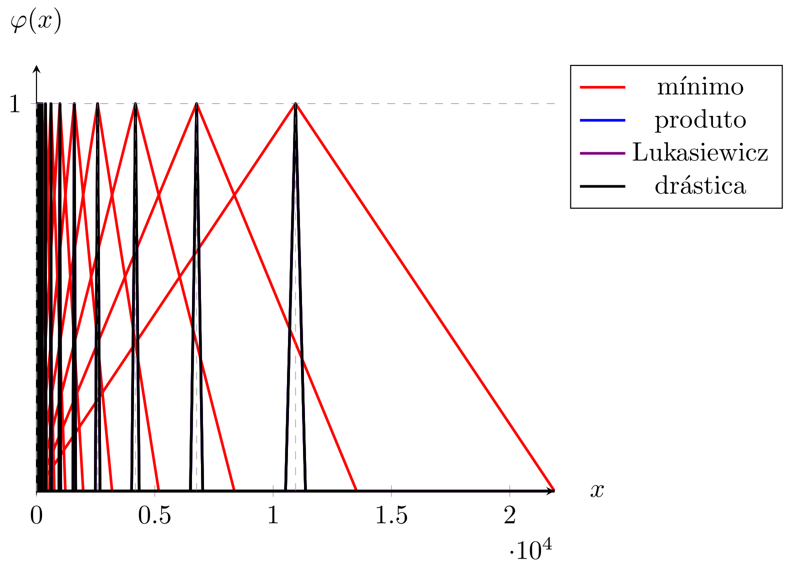


Figura 8.18: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{21} comparando t-normas.

Na Figura 8.18 as t-normas do produto, Lukasiewicz e drástica aparentemente se sobrepõem para valores maiores de F_n.

F_1 **até** F_{34}

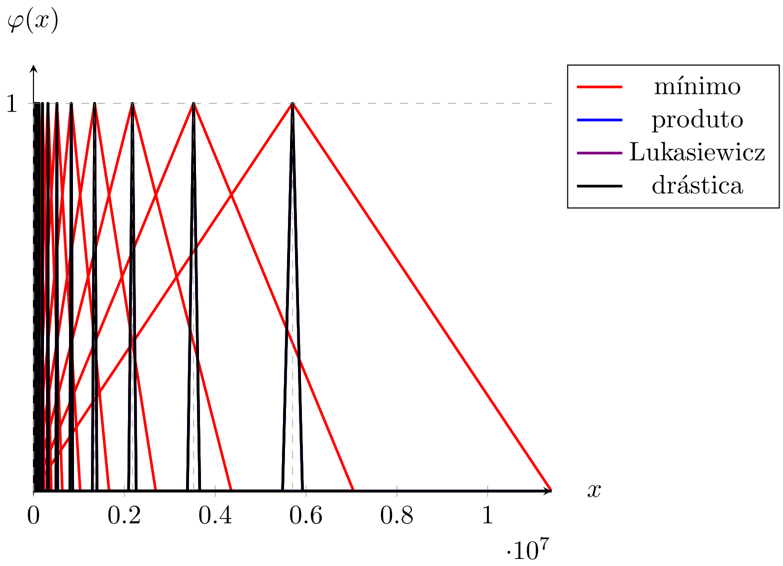


Figura 8.19: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{34} comparando t-normas.

Novamente, na Figura 8.19 as t-normas do produto, Lukasiewicz e drástica aparentemente se sobrepõem para valores maiores de F_n.

8.3 t-normas de Hamacher e Yu

Apresenta-se agora duas t-normas para a análise da sequência de Fibonacci sendo a t-norma de Hamacher e a t-norma de Yu. A demonstração de que tais operadores são t-normas pode ser consultada em [19], e as escolhas destas t-normas se deu devido a serem utilizadas em trabalhos recentes.

A escolha dos valores para parâmetros r, λ foram arbitrárias.

8.3.1 Sequência de Fibonacci utilizando a t-norma de Hamacher

$F_1 = F_2$	$(0;1;2)$
Pontos do domínio	53
t-norma	$t_H(x;y) = \dfrac{xy}{r + (1-r)(x+y-xy)}$, com $r > 0$
r	$0,5$

Tabela 8.10: Dados para a t-norma de Hamacher.

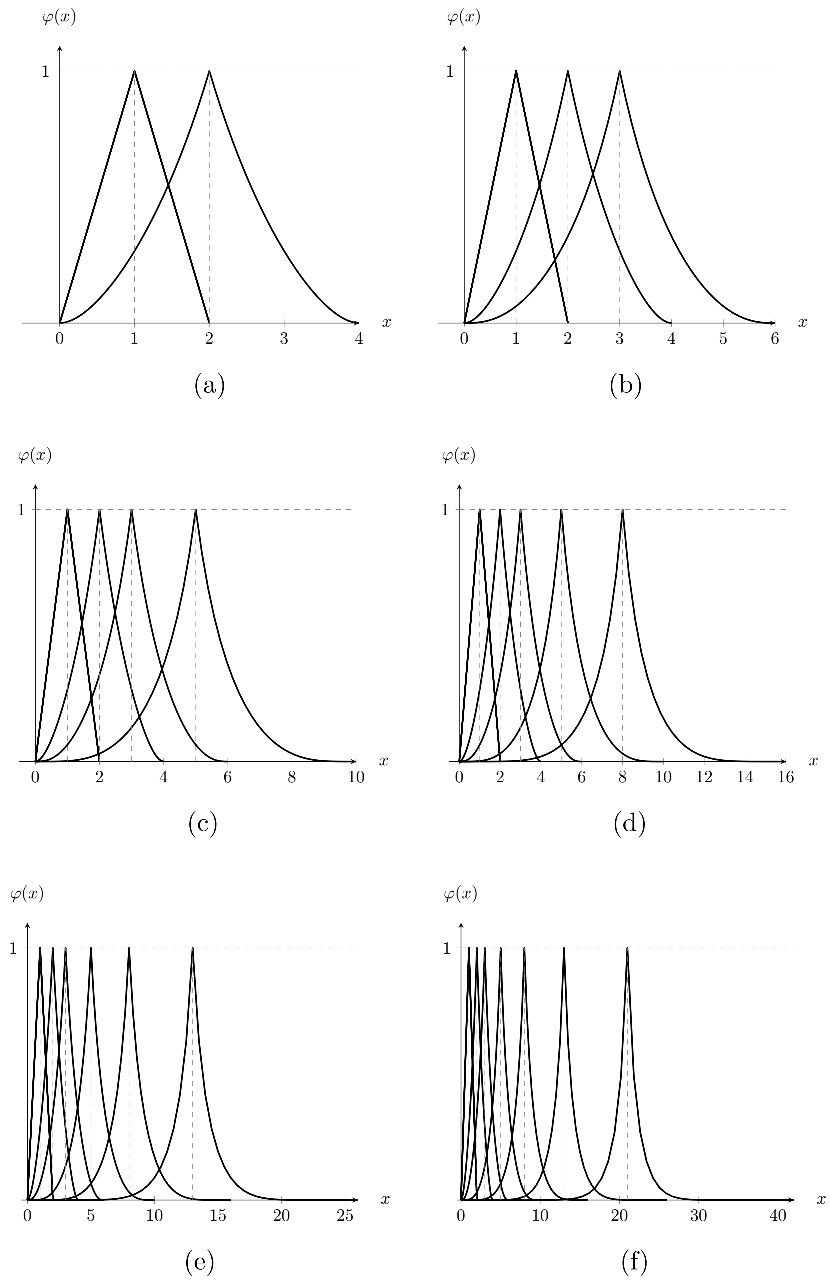


Figura 8.20: (a) F_1 até F_3; (b) F_1 até F_4; (c) F_1 até F_5; (d) F_1 até F_6; (e) F_1 até F_7; (f) F_1 até F_8; t-norma de Hamacher para $r = 0,5$.

Sequência até F_{21}

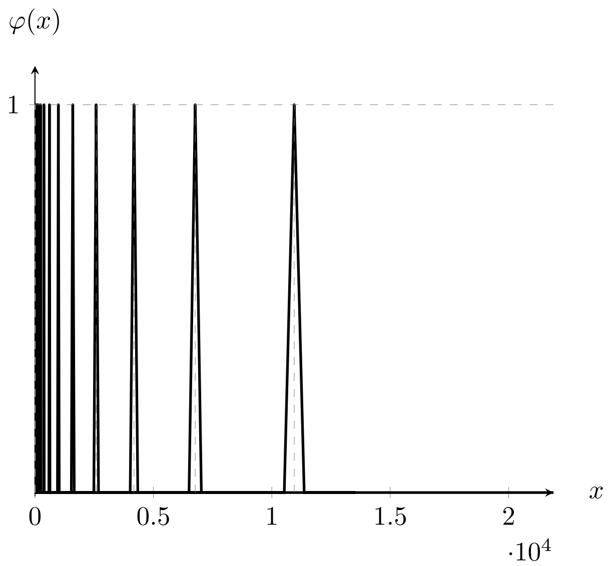


Figura 8.21: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{21} utilizando a t-norma de Hamacher.

Sequência até F_{34}

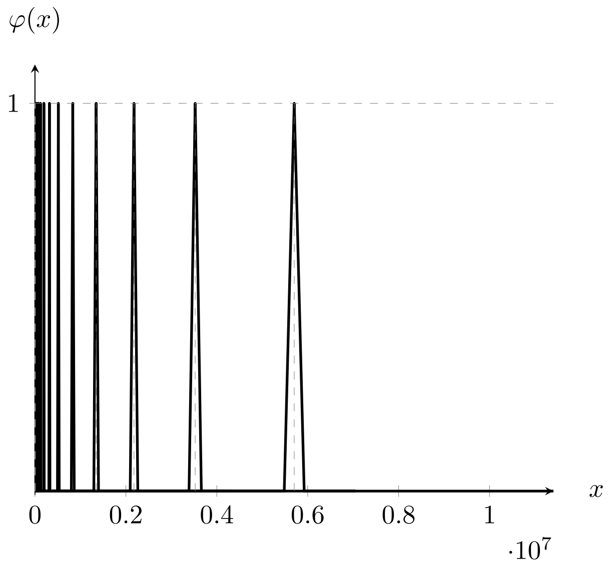


Figura 8.22: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{34} utilizando a t-norma de Hamacher.

8.3.2 Sequência de Fibonacci utilizando a t-norma de Yu

$F_1 = F_2$	$(0; 1; 2)$
Pontos do domínio	53
t-norma	$t_Y(x; y) = \max\{0, (1+\lambda)(x+y-1) - \lambda xy\}$, com $\lambda > -1$
λ	300

Tabela 8.11: Dados para a t-norma de Yu.

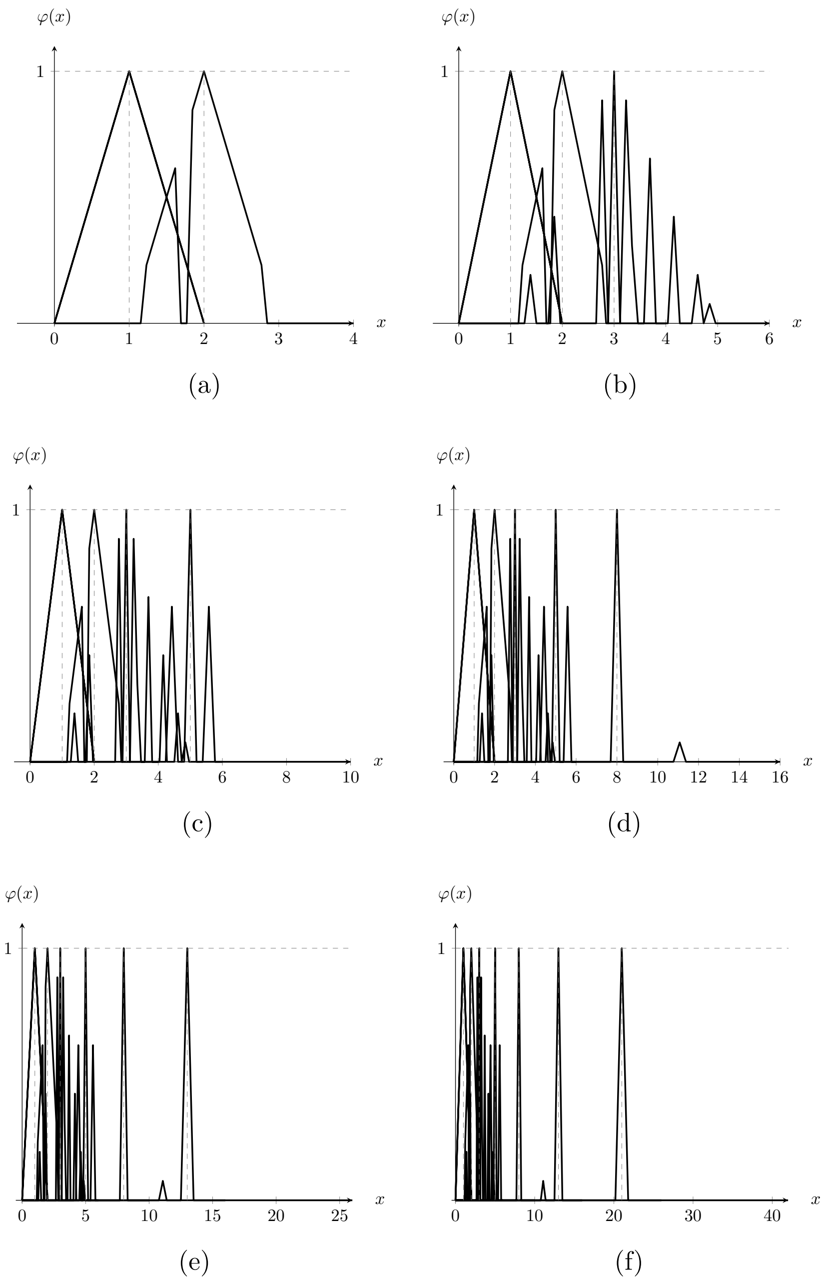


Figura 8.23: (a) F_1 até F_3; (b) F_1 até F_4; (c) F_1 até F_5; (d) F_1 até F_6; (e) F_1 até F_7; (f) F_1 até F_8; t-norma de Yu.

Sequência até F_{21}

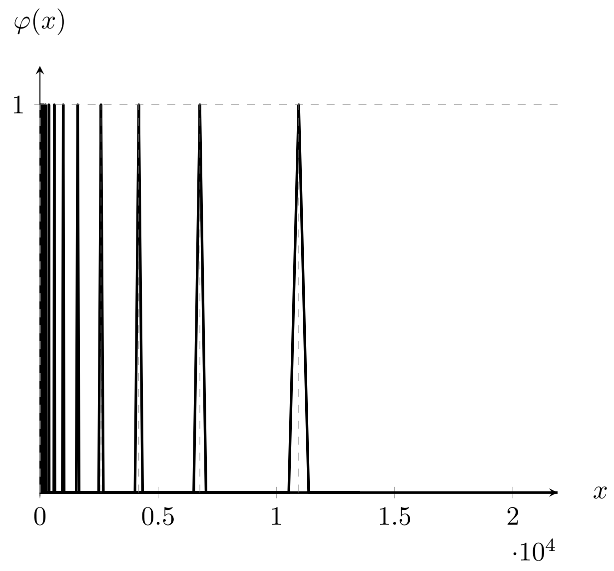


Figura 8.24: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{21} utilizando a t-norma de Yu.

Sequência até F_{34}

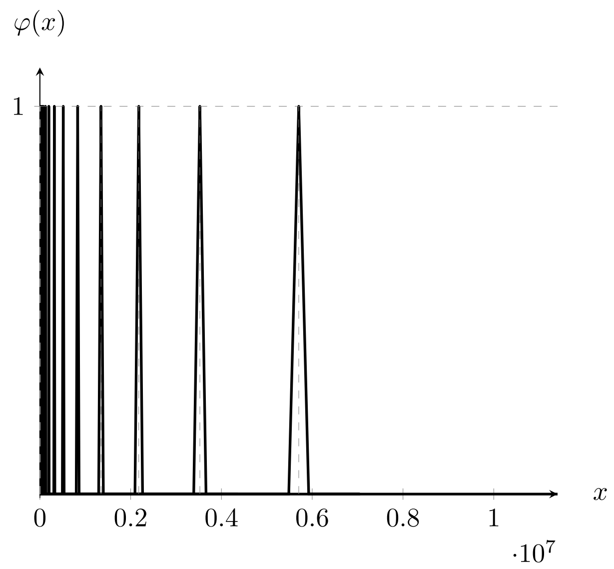


Figura 8.25: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{21} utilizando a t-norma de Yu.

8.3.3 Comparação entre as t-normas

F_1 até F_8

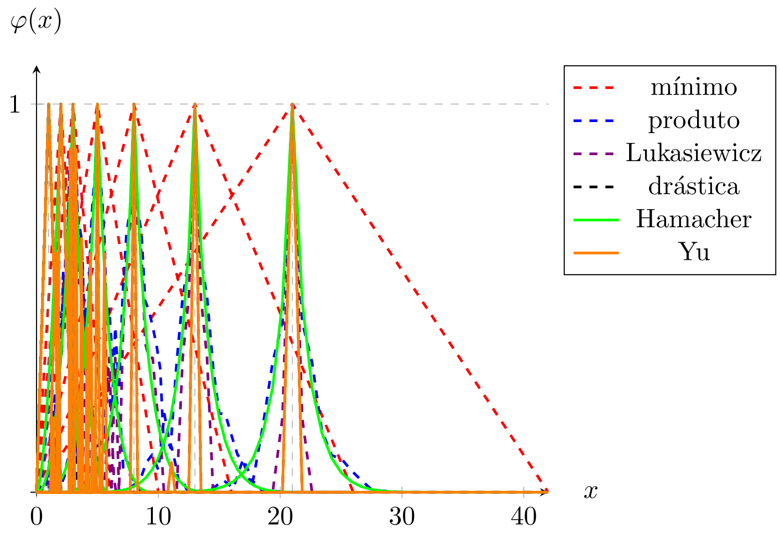


Figura 8.26: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_8 comparando t-normas.

F_8

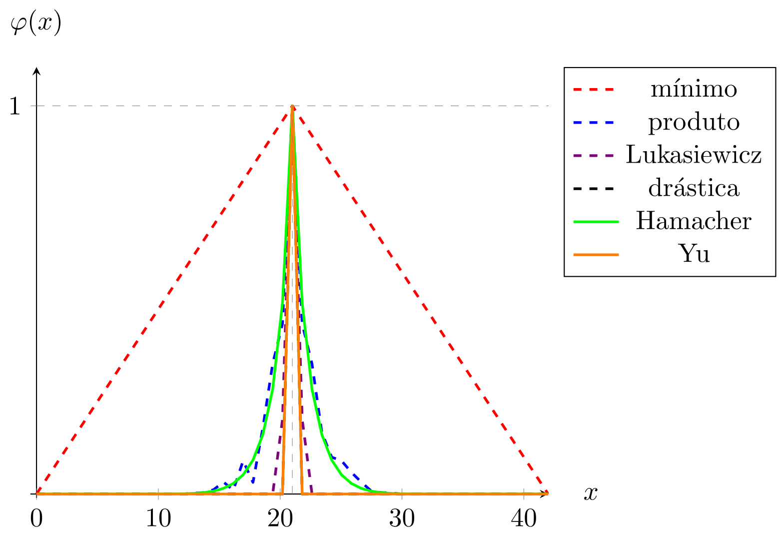


Figura 8.27: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_8 comparando t-normas.

F_1 até F_{21}

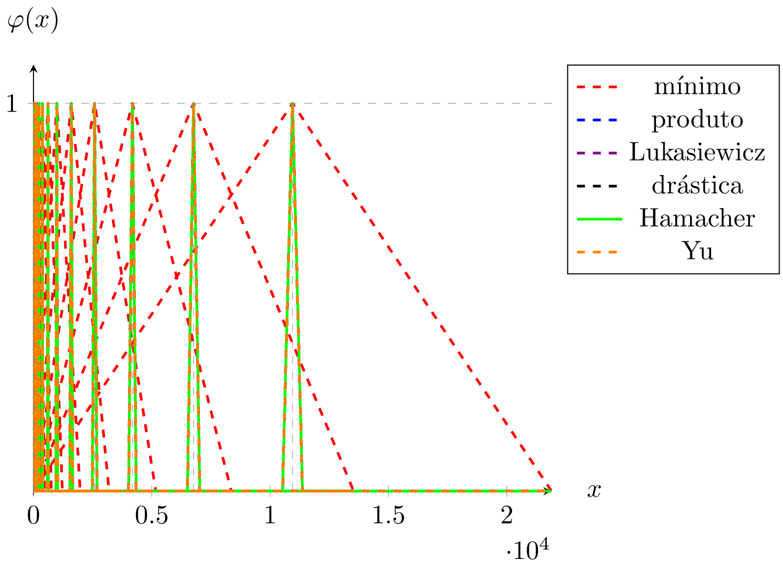


Figura 8.28: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{21} comparando t-normas.

Na Figura 8.28 as t-normas do produto, Lukasiewicz, drástica, Hamacher e Yu aparentemente se sobrepõem para valores maiores de F_n.

F_1 até F_{34}

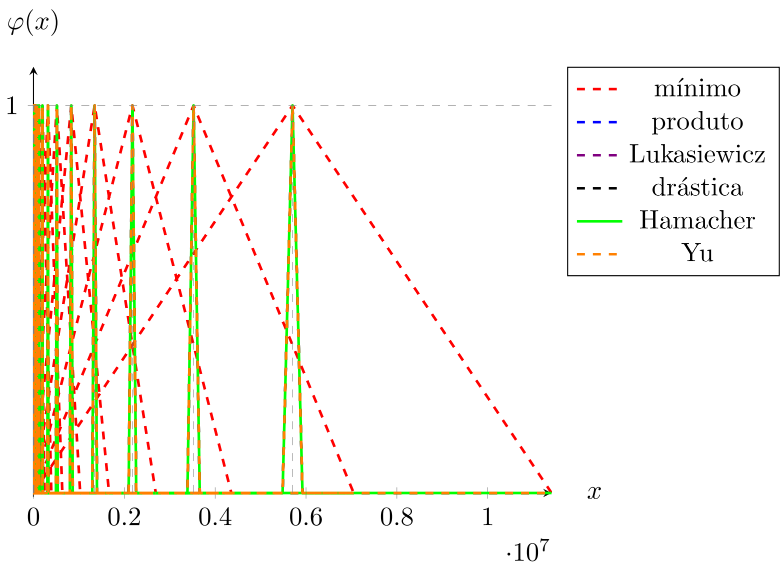


Figura 8.29: Sequência de Fibonacci de números fuzzy F_1 até F_{34} comparando t-normas.

Novamente, na Figura 8.29 as t-normas do produto, Lukasiewicz, drástica, Hamacher e Yu se sobrepõem para valores maiores de F_n.

8.4 População de insetos

Insetos possuem vários estágios em sua vida sendo que estes estágios variam de dias até anos. Devido a estes estágios terem tempos diferentes convenciona-se utilizar como unidade de tempo uma geração simplificando assim a modelagem para o crescimento da população [30].

Como os insetos possuem vários estágios estes podem ser representados por equações de diferença, condensando assim diversas informações em poucas equações.

Como exemplo, utilizaremos a reprodução do pulgão, sendo que todos os descendentes (prole) de um pulgão é contida em uma galha que são tecidos vegetais que foram induzidos por substâncias produzidas pelos pulgões, sendo estruturas esféricas, fechadas e que em seu interior os pulgões se alimentam protegidos de predadores e do clima.

A capacidade de sobreviver até a vida adulta e de produzir descendentes está ligada ao clima, qualidade de alimentos, tamanho da população, dentre outros. Para fins de simplificação tomaremos esses efeitos constantes.

Define-se então as variáveis:

$$\begin{aligned}
a_n &= \text{número de pulgões fêmeas adultas na } n\text{-ésima geração.}\\
p_n &= \text{número de progenitores (pais) da } n\text{-ésima geração.}\\
m &= \text{mortalidade fracionada dos pulgões jovens.}\\
f &= \text{número de progenitores (pais) por pulgões fêmea.}\\
r &= \text{proporção de pulgões fêmeas em relação ao total de pulgões adultos.}
\end{aligned}$$

Descreve-se então a equação para representar as populações sucessivas de pulgões e utiliza-se para obter o número de fêmeas adultas na n-ésima geração, considerando a_0 fêmeas inicialmente, sendo que cada fêmea produz uma quantidade f de progenitores. Assim:

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \text{número de progenitores (pais) na } n+1\text{-ésima geração (próxima geração).}\\
f &= \text{número de progenitores por pulgões fêmea.}\\
a_n &= \text{número de pulgões fêmeas adultas na } n\text{-ésima geração (geração anterior).}
\end{aligned}$$

Deste modo, tem-se

$$p_{n+1} = f \cdot a_n. \tag{8.1}$$

Destes pulgões, apenas uma fração $(1-m)$ sobrevive a vida adulta, produzindo uma proporção final r de fêmeas. Logo,

$$a_{n+1} = r(1-m)p_{n+1}. \tag{8.2}$$

Das Equações (8.1) e (8.2), tem-se

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= r(1-m)f \cdot a_n,\\
\Rightarrow a_{n+1} &= f \cdot r(1-m)a_n. \qquad (8.3)
\end{aligned}$$

Considerando um caso teórico em que f, r e m são constantes, assumindo um valor para a_0, e considerando $n = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
a_1 &= f \cdot r(1-m)a_0 \\
a_2 &= f \cdot r(1-m)a_1 = [f \cdot r(1-m)]^2 a_0 \\
a_3 &= f \cdot r(1-m)a_2 = [f \cdot r(1-m)]^3 a_0 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_n &= [f \cdot r(1-m)]^n a_0
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Note que a Equação (8.3) é uma equação diferença de primeira ordem e possui como solução a Equação (8.4), demais métodos podem ser vistos no Anexo B. Note também que a constante $f \cdot r(1-m)$ é o número de fêmeas adultas que cada mãe pulgão produz.

8.5 Modelagem fuzzy da população de insetos

Para a modelagem da população de insetos, utiliza-se o **Princípio da extensão de Zadeh** da Definição 4.2, para a Equação (8.3), que fornece o número de pulgões fêmeas adultas na n-ésima geração.

Note que devido ao fato de se ter uma sequência recorrente de primeira ordem não é necessário utilizar as t-normas, bastando apenas conservar o grau de pertinência de $f(x)$ como o mesmo de x.

Número de pulgões até a sétima geração

f	10
r	$0,5$
m	$0,2$
a_0	$(25;50;75)$
Pontos do domínio	53

Tabela 8.12: Dados para a modelagem.

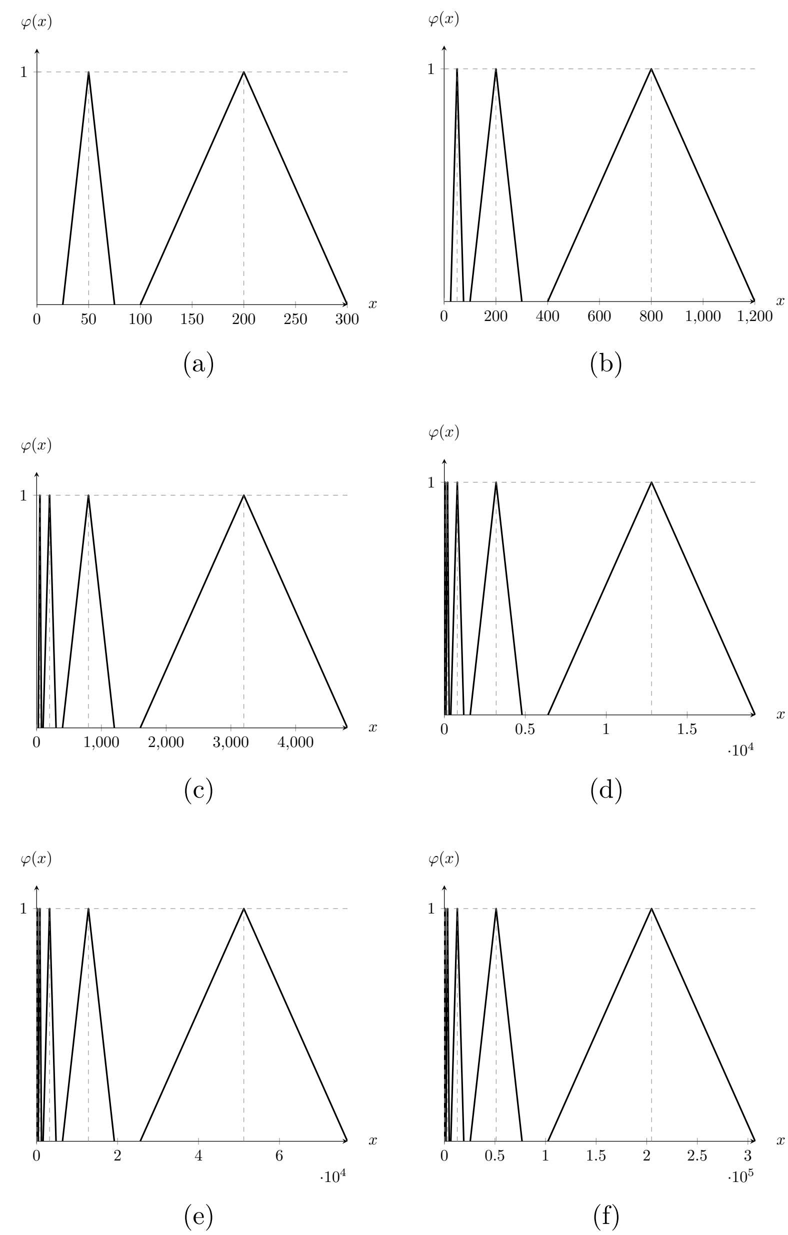


Figura 8.30: (a) Segunda geração; (b) Terceira geração; (c) Quarta geração; (d) Quinta geração; (e) Sexta geração; (f) Sétima geração.

8.6 População anual de plantas

Anualmente as plantas produzem flores e sementes. No final do verão as flores murcham e morrem, enquanto parte das sementes sobrevivem ao inverno para dar origem a uma nova geração de plantas na próxima primavera. Algumas sementes podem sobreviver por um ano ou mais antes de reviver. Algumas destas sementes se perdem devido a predação, doenças ou efeitos do clima. Deste modo para que uma planta sobreviva como uma espécie, uma grande população deve ser renovada a cada ano [30].

Para formular um modelo matemático que descreva a propagação destas plantas deve-se levar em conta o fato de que algumas sementes acabam permanecendo dormentes por um ano ou mais antes de germinar. Assim, além de levar em conta a população de plantas, deve se atentar as reservas de sementes com idades diferentes que ficam dormentes.

1. Problema.

   As plantas produzem sementes no final da estação de crescimento (meados de agosto no hemisfério norte) e depois morrem. Sabe-se que uma parte destas sementes sobrevive ao inverno e germina no início da estação seguinte (meados de maio) dando origem a nova geração, sendo que a fração que germina depende da idade das sementes.

2. Definições e suposições

   Determina-se então todos os parâmetros e constantes que serão utilizados na modelagem, e depois as variáveis. A Figura 8.31 apresenta um modelo simples de como seria a propagação.

   Note que anualmente as plantas produzem uma quantidade γ de sementes a cada verão. As sementes podem germinar em até dois anos, deste modo, uma fração α de sementes de um ano atrás e uma fração β de dois anos germinam no ano seguinte, e ao longo do inverno algumas sementes acabam morrendo.

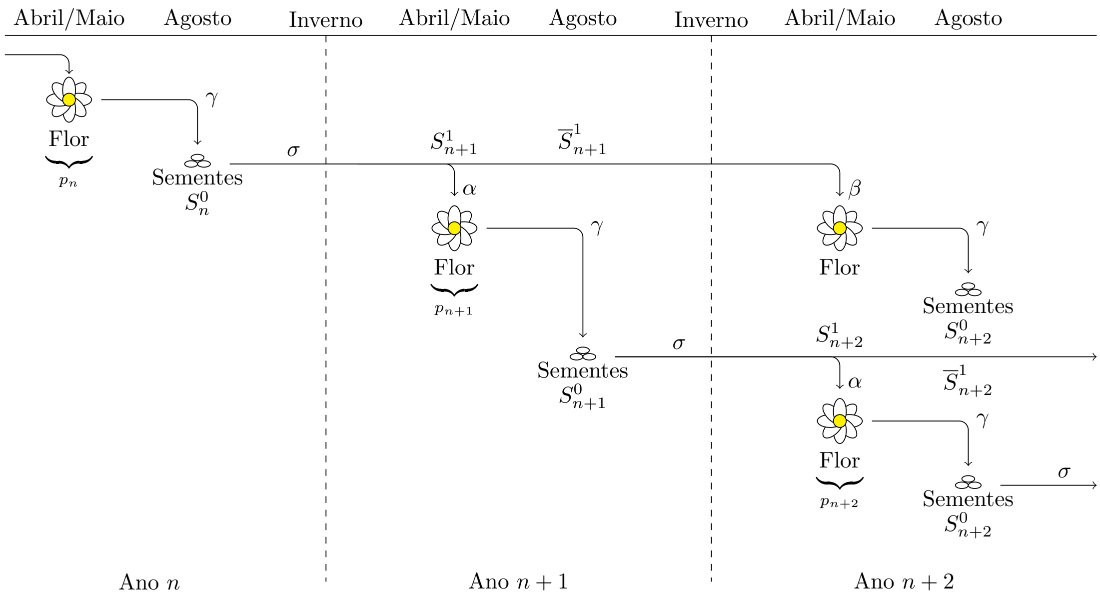


Figura 8.31: Modelo simples da população de plantas.

Assim tem-se:

$$\gamma = \text{número de sementes produzidas por planta.}$$
$$\alpha = \text{fração de sementes de um ano atrás.}$$
$$\beta = \text{fração de sementes de dois anos atrás.}$$
$$\sigma = \text{fração de sementes que sobrevivem ao inverno.}$$

Definindo as variáveis nota-se que para encontrar a quantidade de sementes que germina em determinado ano, necessita-se levar em conta alguns pontos importantes, sendo: a quantidade de novas sementes produzidas; a quantidade que efetivamente germina; o envelhecimento e mortalidade parcial das sementes. Este último ponto nos leva a uma simplificação do modelo, sendo que sementes com dois anos não são viáveis para produzir novas sementes, sendo assim serão descartadas do modelo.

Continuando, tem-se:

$$p_n = \text{número plantas na geração } n.$$
$$S_n^0 = \text{número de novas sementes produzidas.}$$
$$S_n^1 = \text{número de sementes de um ano atrás (Abril).}$$
$$S_n^2 = \text{número de sementes de dois anos atrás (Abril).}$$
$$\overline{S}_n^1 = \text{número de sementes de um ano atrás (Maio).}$$
$$\overline{S}_n^2 = \text{número de sementes da um ano atrás (Maio).}$$

A princípio toma-se todas estas variáveis como úteis, porém mais adiante algumas serão eliminadas. Observe que o número sobrescrito indica a idade da semente, e o número subscrito indica o ano.

3. Equações

No mês de maio, uma fração α de sementes de um ano atrás e uma fração β de dois anos atrás produzirão novas plantas, assim

$$p_n = \alpha S_n^1 + \beta S_n^2. \tag{8.5}$$

O número de sementes para o próximo ano será reduzido devido a germinação. Deste modo, para as sementes de diferentes anos, leva-se em conta a quantidade que não foi germinada e a quantidade de sementes de Abril. Assim,

$$\overline{S}_n^1 = (1-\alpha)S_n^1, \tag{8.6}$$
$$\overline{S}_n^2 = (1-\beta)S_n^2. \tag{8.7}$$

Em Agosto, novas sementes (do mesmo ano) em quantidade γ são produzidas por planta. Logo,

$$S_n^0 = \gamma p_n. \tag{8.8}$$

Depois do inverno o números de sementes para a próxima geração muda devido a mortalidade e o envelhecimento. Sementes novas na geração n terão um ano na próxima geração, ou seja, a geração $n+1$. Assim,

$$S^1_{n+1} = \sigma S^0_n, \tag{8.9}$$

$$S^2_{n+1} = \sigma \overline{S}^1_n. \tag{8.10}$$

4. Condensando as equações

   Observando as Equações (8.5), (8.6), (8.7), (8.8), (8.9), e (8.10), pode-se utilizar as Equações (8.8) e (8.9) para relacionar gerações sucessivas de plantas, deste modo,

$$S^1_{n+1} = \sigma(\gamma p_n) \tag{8.11}$$

   Das Equações (8.6) e (8.10),

$$S^2_{n+1} = \sigma(1-\alpha)S^1_n. \tag{8.12}$$

   Reescrevendo a Equação (8.5) para a geração $n+1$,

$$p_{n+1} = \alpha S^1_{n+1} + \beta S^2_{n+1}. \tag{8.13}$$

   Das Equações (8.11),(8.12) e (8.13) tem-se o sistema de duas equações que relaciona plantas e sementes de um ano,

$$p_{n+1} = \alpha\sigma\gamma p_n + \beta\sigma(1-\alpha)S^1_n, \tag{8.14}$$

$$S^1_{n+1} = \sigma\gamma p_n. \tag{8.15}$$

   Reescrevendo a Equação (8.15), tem-se

$$S^1_n = \sigma\gamma p_{n-1}. \tag{8.16}$$

   Substituindo a Equação (8.16) na Equação (8.14),

$$p_{n+1} = \alpha\sigma\gamma p_n + \beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma p_{n-1}. \tag{8.17}$$

   Um modelo matemático pode ser feito de várias maneiras, e pode levar em conta diversas outras informações, ou até mesmo eliminar algumas. Tais modelos podem ser equações recorrentes de primeira ordem, de segunda ordem, linear ou não, e assim por diante. No caso, determinou-se uma equação recorrente de segunda ordem linear, a Equação (8.17).

5. Verificando o modelo

   Observe que para a geração n, tem-se

$$p_n = \alpha\sigma\gamma p_{n-1} + \beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma p_{n-2}. \tag{8.18}$$

Pode-se interpretar cada parte da Equação (8.18) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\gamma p_{n-2} &= \text{número de sementes produzidas dois anos atrás.}\\
\sigma\gamma p_{n-2} &= \text{número de sementes que sobreviveram ao primeiro inverno.}\\
(1-\alpha)\sigma\gamma p_{n-2} &= \text{número de sementes que não germinaram no último ano.}\\
\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma p_{n-2} &= \text{número de sementes que não germinaram no último inverno.}\\
\beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma p_{n-2} &= \text{número de sementes de dois anos que germinaram.}\\
\gamma p_{n-1} &= \text{número de sementes produzidas um ano atrás.}\\
\sigma\gamma p_{n-1} &= \text{número de sementes que sobreviveram ao inverno.}\\
\alpha\sigma\gamma p_{n-1} &= \text{número de sementes de um ano que germinaram.}
\end{aligned}$$

Em [30], a Equação (8.18) é desenvolvida a fim de se encontrar um par de equações. Neste trabalho para fins de simulação, será resolvida de outra maneira, como pode ser vista no Anexo B e [35].

Determina-se a solução da Equação (8.18) reescrevendo da seguinte maneira,

$$p_n - \alpha\sigma\gamma p_{n-1} - \beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma p_{n-2} = 0. \tag{8.19}$$

A Equação (8.19) pode ser simplificada ainda mais assumindo algumas constantes. Considerando $s = \alpha\sigma\gamma$ e $q = \beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma$, tem-se,

$$p_n - sp_{n-1} - qp_{n-2} = 0. \tag{8.20}$$

Utilizando os Teoremas B.8, B.9 e B.12 do Anexo B tem-se

$$r^2 - sr - q = 0. \tag{8.21}$$

Resolvendo as raízes,

$$r_1 = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4q}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{s - \sqrt{s + 4q}}{2}.$$

Analisando os casos possíveis para r_1 e r_2, tem-se:

i) Se $r_1 \neq r_2$ tem-se a solução,

$$p_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n. \tag{8.22}$$

Com C_1 e C_2 constantes arbitrárias. Note que se $C_1 \geq 1$ e $C_2 \geq 1$, a população cresce, e no caso em que $| C_1 |< 1$ e $| C_2 |< 1$ a população decresce.

ii) Se $r_1 = r_2 = r$ tem-se a solução,

$$p_n = C_1 r^n + C_2 nrn. \tag{8.23}$$

Com C_1 e C_2 constantes arbitrárias. Observe que se $r \geq 1$ a população cresce e se $| \alpha |< 1$ a população decresce.

iii) No caso em que $s^2 + 4q < 0$, tem-se que r_1 e r_2 são complexos e podem ser escritos na forma trigonométrica a fim de evitar cálculos complexos, como este não é o caso procurado, ao leitor interessado pode consultar [28].

8.7 Modelagem fuzzy da população de plantas

Para a realização da simulação na modelagem, utiliza-se a Equação (8.20) e o **Princípio da extensão de Zadeh** da Definição 4.2 juntamente com a Definição 4.10 a respeito de extensão, da mesma maneira como foi feita para o caso da sequência de Fibonacci conforme descrita na sessão 8.1.1, com a diferença de que se tem valores constantes multiplicando os termos recorrentes. Deste modo, tem-se

$$p_{n+2} = sp_{n+1} + qp_n, \text{ com } n \in \mathbb{N}, \tag{8.24}$$

com s e q constantes arbitrárias.

Para as simulações, a Equação (8.24) pode ser interpretada como:

$$q = \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma p_{n-2} = \text{número de sementes de dois anos que germinaram.}$$
$$s = \alpha\sigma\gamma p_{n-1} = \text{número de sementes de um ano que germinaram.}$$

A Figura 8.32 representa um exemplo simples da população das plantas num período de 3 anos, que pode ser interpretada da seguinte maneira:

1. Inicialmente tem-se uma população de 10 plantas e supõe-se por fins de simplificação que cada planta possui uma única flor.

2. Cada planta (flores) irá gerar 10 sementes, deste modo antes do inverno tem-se um total de $\gamma = 100$ sementes no final do primeiro ano.

3. Após o inverno, supor que apenas 50% das sementes sobreviveram, deste modo tem-se $\sigma = 50$.

4. No segundo ano, das 50 sementes que sobreviveram ao inverno, aproximadamente 75% germina, ou seja, $\alpha \approx 37$, sendo que o restante, $\beta = 13$ permanece sem germinar até o próximo ano.

5. Ainda no segundo ano, as $\alpha = 37$ sementes que germinaram geraram novas plantas com novas flores, e estas por sua vez, geram novamente 10 sementes cada, assim antes no inverno tem-se um total de $\gamma = 375$ sementes.

6. Após o segundo inverno, cerca de 50% das sementes do ano anterior sobrevivem para o terceiro ano, assim, $\sigma = 187$.

7. Nota-se também que a quantidade de sementes do primeiro ano que não germinaram no segundo ano, ou seja, $\beta = 13$ passa por um novo inverno e novamente tem-se que 50% destas sementes chegam ao terceiro ano, resultando na verdade em $\beta = 6$.

8. No terceiro ano tem-se que as $\beta = 6$ sementes remanescente do primeiro ano irão germinar, porém não irão gerar novas sementes devido a idade.

9. Das $\sigma = 187$ sementes que sobreviveram ao inverno, apenas 75% irão germinar no terceiro ano, ou seja, $\alpha = 140$, e as demais $\beta = 37$ sementes irão para o quarto ano.

10. Note que a população de plantas no terceiro ano é na verdade a soma das $\beta = 6$ plantas das sementes de dois anos atrás com as $\alpha = 140$ plantas das sementes do ano anterior, resultando em 146 plantas.

11. E assim, o processo continua.

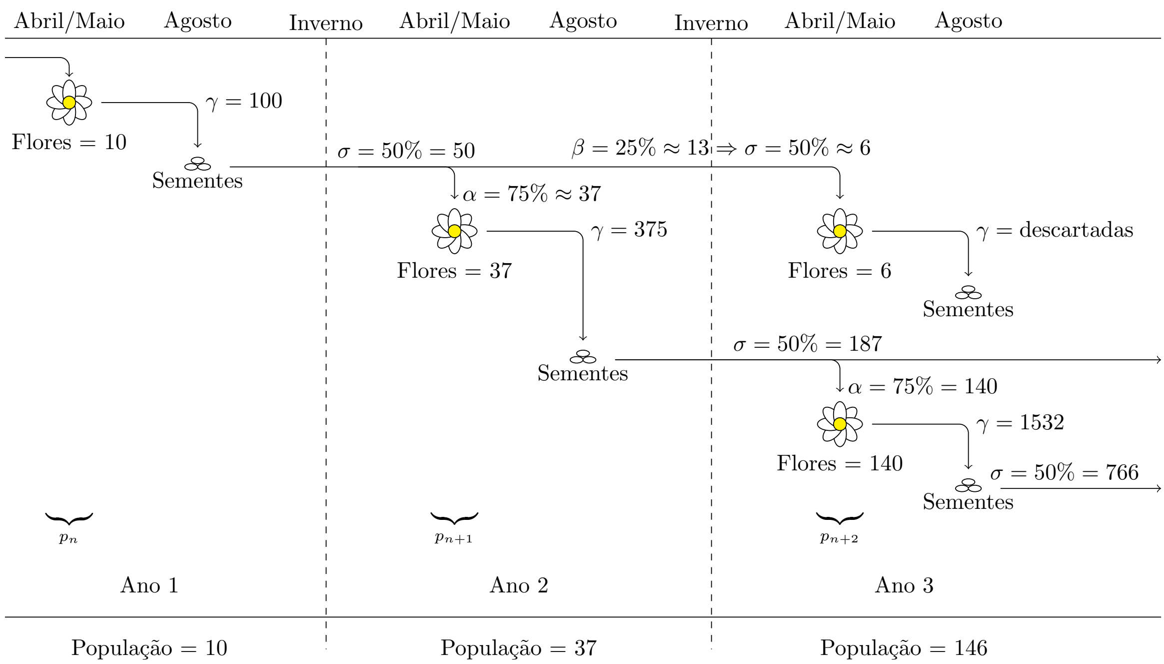


Figura 8.32: Exemplo simples de propagação de plantas.

Deste modo, pode-se determinar as constantes s e p da Equação (8.24),

$$\begin{aligned} s =& \alpha\sigma\gamma \\ \Rightarrow s =& 0,75 \cdot 0,5 \cdot 10 \\ \Rightarrow s =& 3,75. \end{aligned} \tag{8.25}$$

E também,

$$\begin{aligned} q =& \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma \\ \Rightarrow q =& 0,25 \cdot 0,5 \cdot (1-0,75) \cdot 0,5 \cdot 10 \\ \Rightarrow q =& 0,15625. \end{aligned} \tag{8.26}$$

Observação 8.1. Como $(1-\alpha) = \beta$, pode-se simplificar ainda mais a Equação (8.19), resultando em,

$$p_{n+2} = \alpha\sigma\gamma p_{n+1} + (\beta\sigma)^2\gamma p_n. \tag{8.27}$$

Deste modo, para o exemplo da Figura 8.32, utilizando as Equações (8.25), (8.26) e (8.24) ou neste caso a Equação (8.27), tem-se a equação recorrente de segunda ordem,

$$p_{n+2} = 3,75 p_{n+1} + 0,15625 p_n, \tag{8.28}$$

com $p_1 = 10$ e $p_2 = 37$.

8.8 Simulações da população anual de plantas utilizando t-normas

Apresentam-se agora as simulações obtidas para a população anual de plantas utilizando a Equação (8.28), porém para fins de simplificação computacionais os parâmetros utilizados foram $s = 3$ e $q = 1$, resultando em

$$p_{n+2} = 3p_{n+1} + 1p_n, \text{ com } n \in \mathbb{N}, \tag{8.29}$$

para os números fuzzy $p_1 = (5; 10; 15)$ e $p_2 = (32; 37; 42)$.

A escolha de números fuzzy se deve ao fato de que a população inicial de plantas é uma variável aproximada, e a utilização de iteração se deve a maioria dos processos que descrevem tais populações.

8.8.1 Modelagem utilizando a t-norma do mínimo

p_1	$(5; 10; 15)$
p_2	$(32; 37; 42)$
Pontos do domínio	53
t-norma	$t_M(x; y) = \min\{x; y\} = x \wedge y$

Tabela 8.13: Dados para a t-norma do mínimo.

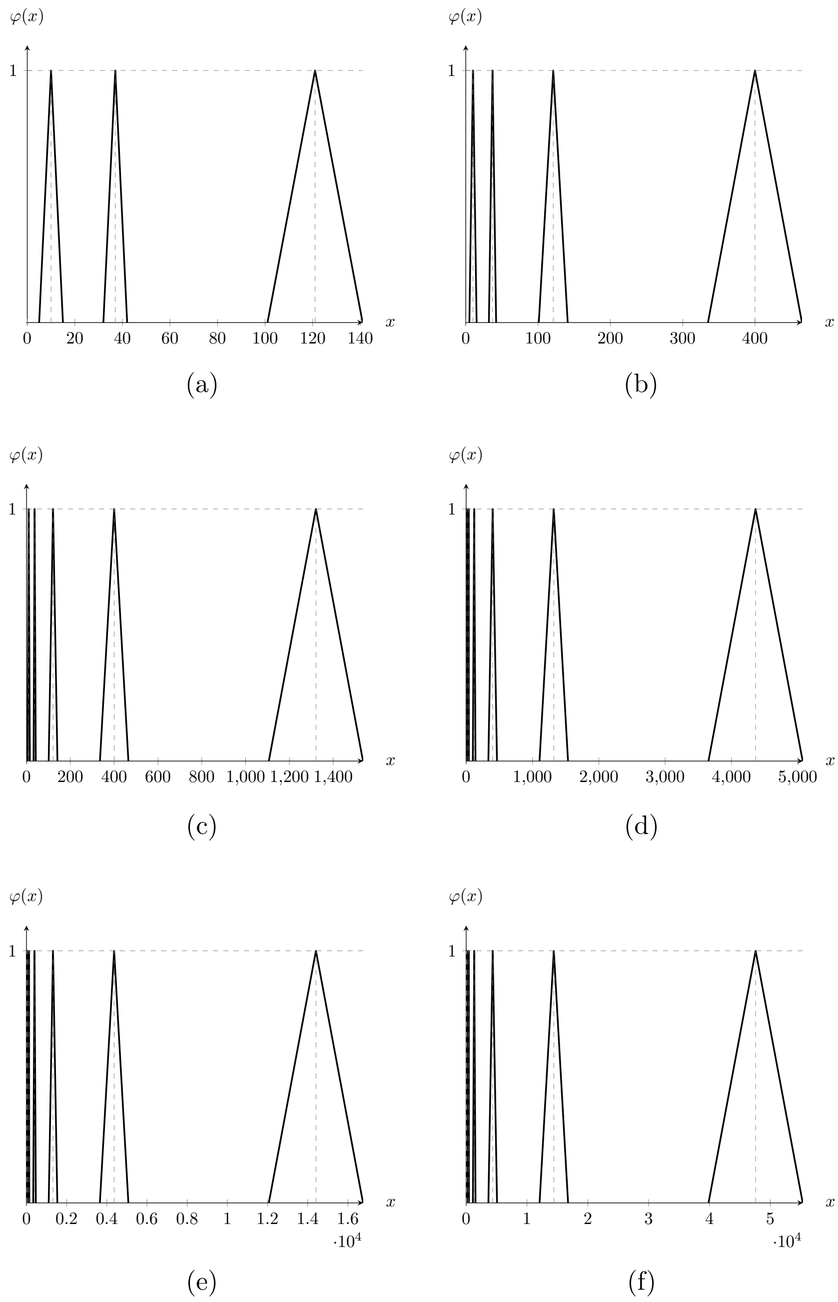


Figura 8.33: (a) p_1 até p_3; (b) p_1 até p_4; (c) p_1 até p_5; (d) p_1 até p_6; (e) p_1 até p_7; (f) p_1 até p_8; t-norma do mínimo.

8.8.2 Modelagem utilizando a t-norma do produto

p_1	$(5; 10; 15)$
p_2	$(32; 37; 42)$
Pontos do domínio	53
t-norma	$t_P(x; y) = xy$

Tabela 8.14: Dados para a t-norma do produto.

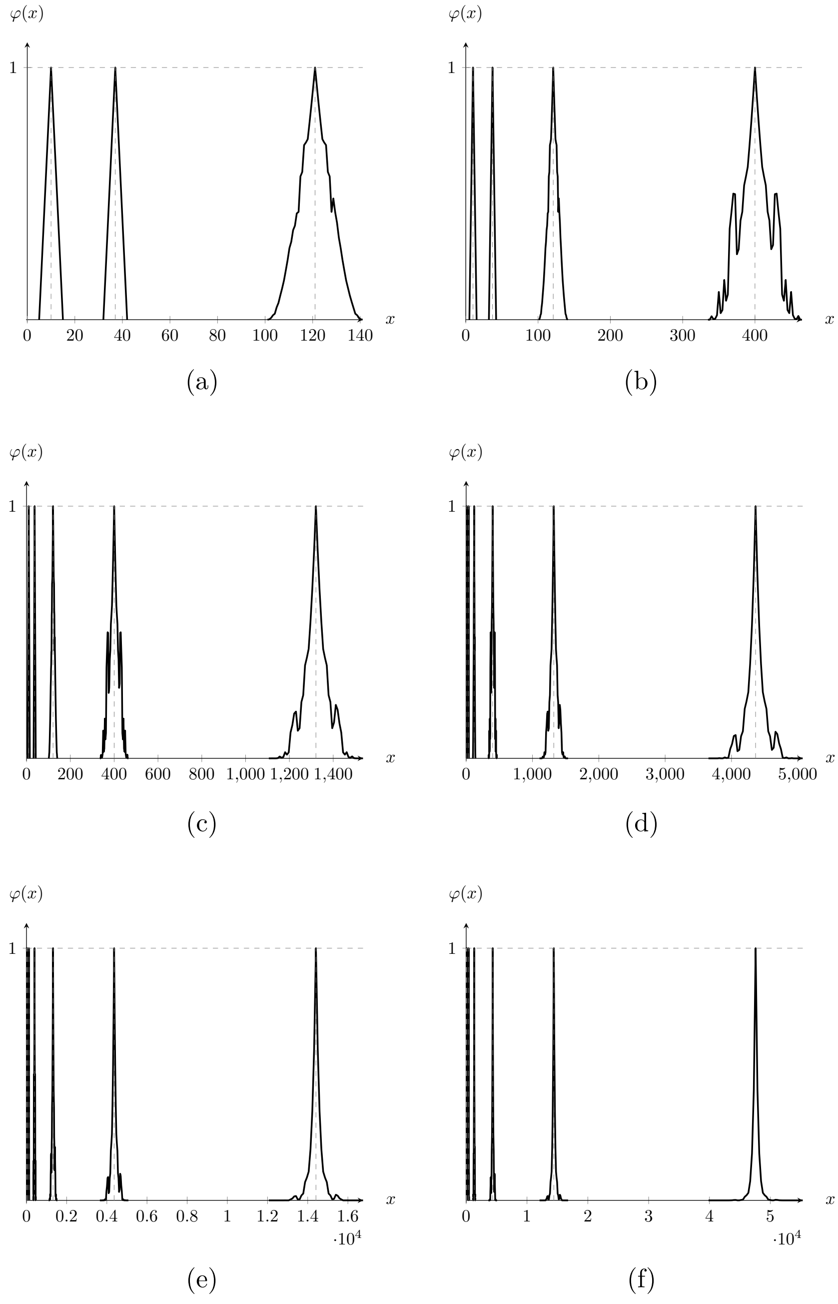


Figura 8.34: (a) p_1 até p_3; (b) p_1 até p_4; (c) p_1 até p_5; (d) p_1 até p_6; (e) p_1 até p_7; (f) p_1 até p_8; t-norma do produto.

8.8.3 Modelagem utilizando a t-norma do Lukasiewicz

p_1	$(5; 10; 15)$
p_2	$(32; 37; 42)$
Pontos do domínio	53
t-norma	$t_L(x; y) = \max\{0; x + y - 1\}$

Tabela 8.15: Dados para a t-norma de Lukasiewicz.

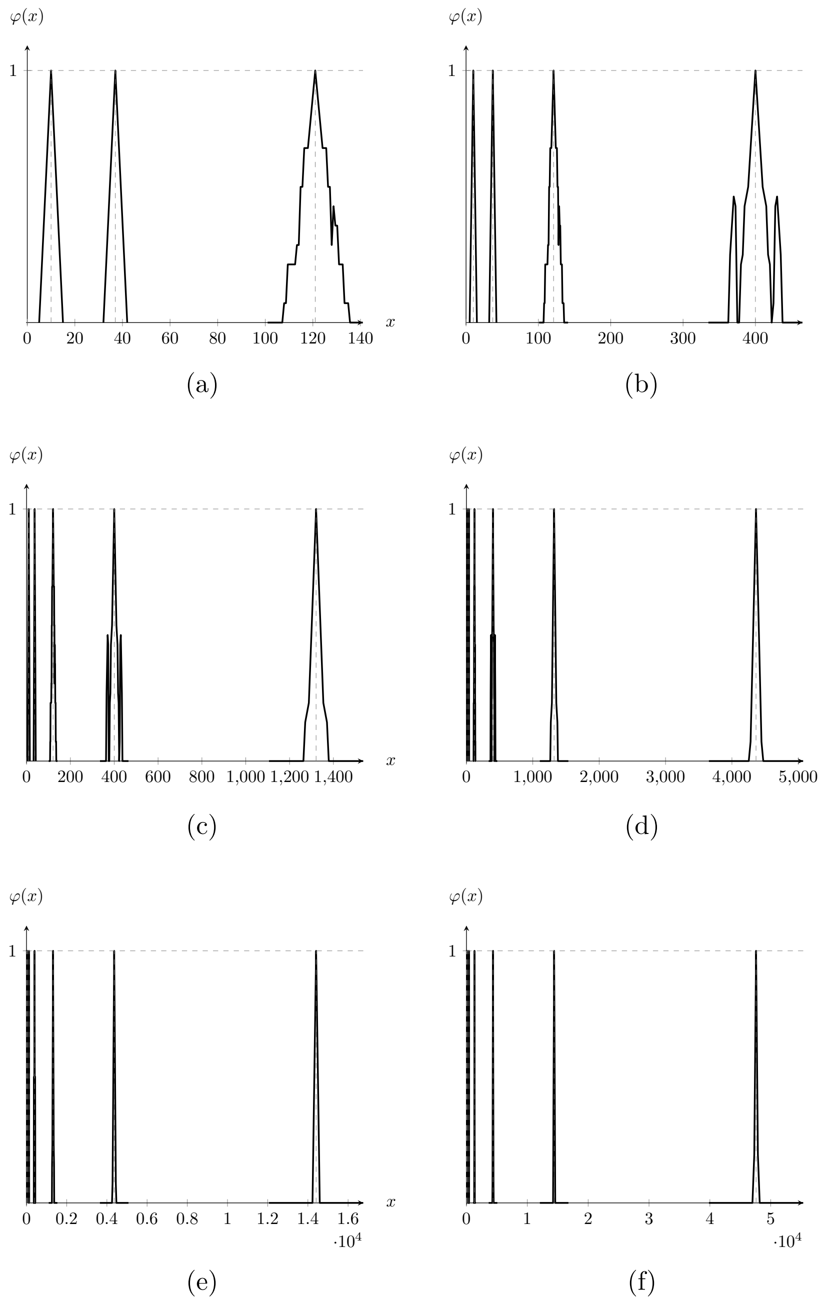


Figura 8.35: (a) p_1 até p_3; (b) p_1 até p_4; (c) p_1 até p_5; (d) p_1 até p_6; (e) p_1 até p_7; (f) p_1 até p_8; t-norma de Lukasiewicz.

8.8.4 Modelagem utilizando a t-norma do drástica

p_1	$(5; 10; 15)$
p_2	$(32; 37; 42)$
Pontos do domínio	53
t-norma	$t_D(x; y) = \begin{cases} x & , \text{ se } y = 1 \\ y & , \text{ se } x = 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$

Tabela 8.16: Dados para a t-norma drástica.

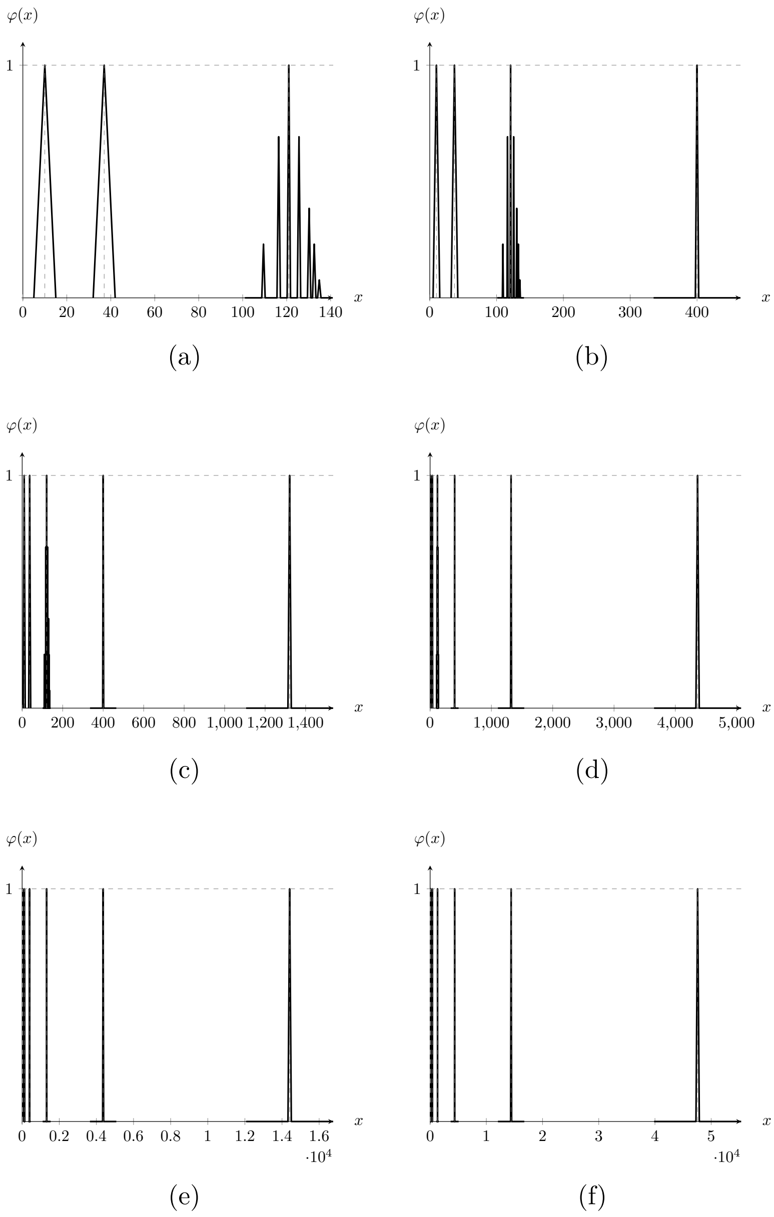


Figura 8.36: (a) p_1 até p_3; (b) p_1 até p_4; (c) p_1 até p_5; (d) p_1 até p_6; (e) p_1 até p_7; (f) p_1 até p_8; t-norma drástica.

8.8.5 Modelagem utilizando a t-norma de Hamacher

p_1	$(5; 10; 15)$
p_2	$(32; 37; 42)$
Pontos do domínio	53
t-norma	$t_H(x;y) = \dfrac{xy}{r + (1-r)(x+y-xy)}$, com $r > 0$
r	$0,5$

Tabela 8.17: Dados para a t-norma de Hamacher.

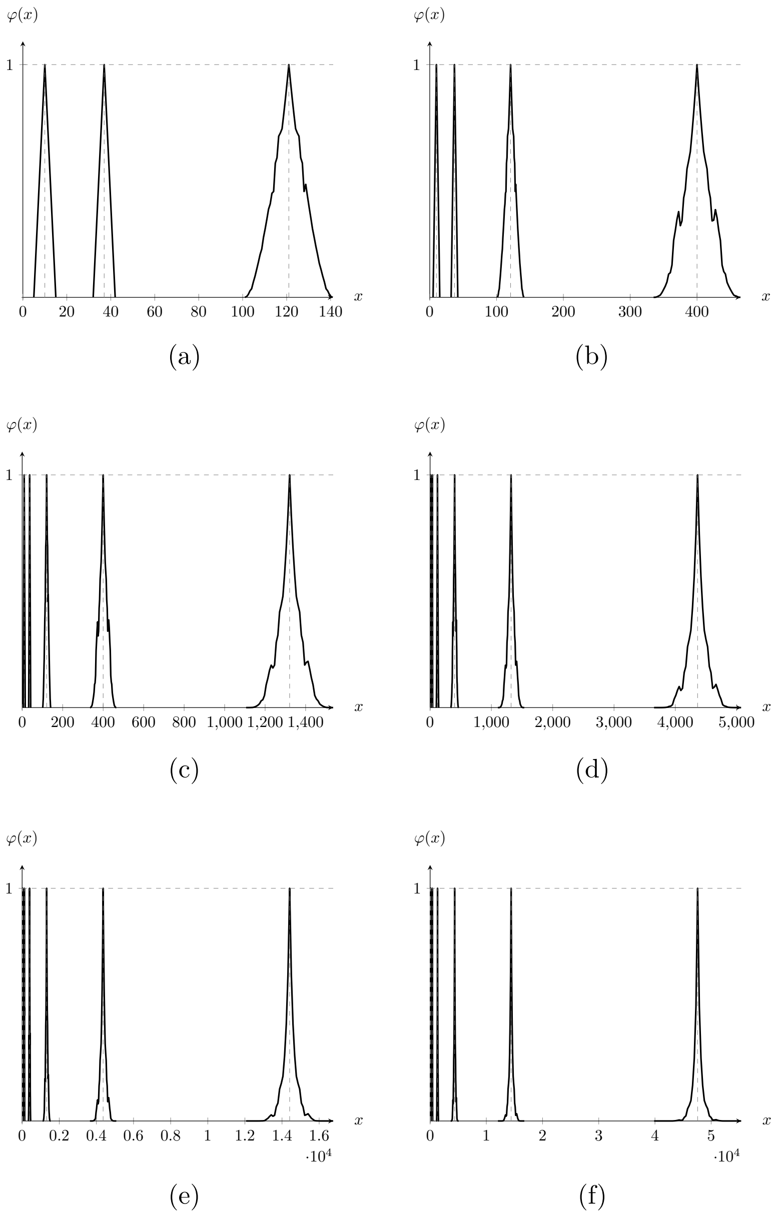


Figura 8.37: (a) p_1 até p_3; (b) p_1 até p_4; (c) p_1 até p_5; (d) p_1 até p_6; (e) p_1 até p_7; (f) p_1 até p_8; t-norma de Hamacher.

8.8.6 Modelagem utilizando a t-norma de Yu

p_1	$(5; 10; 15)$
p_2	$(32; 37; 42)$
Pontos do domínio	53
t-norma	$t_Y(x; y) = \max\{0, (1+\lambda)(x+y-1) - \lambda xy\}$, com $\lambda > -1$
λ	300

Tabela 8.18: Dados para a t-norma de Yu.

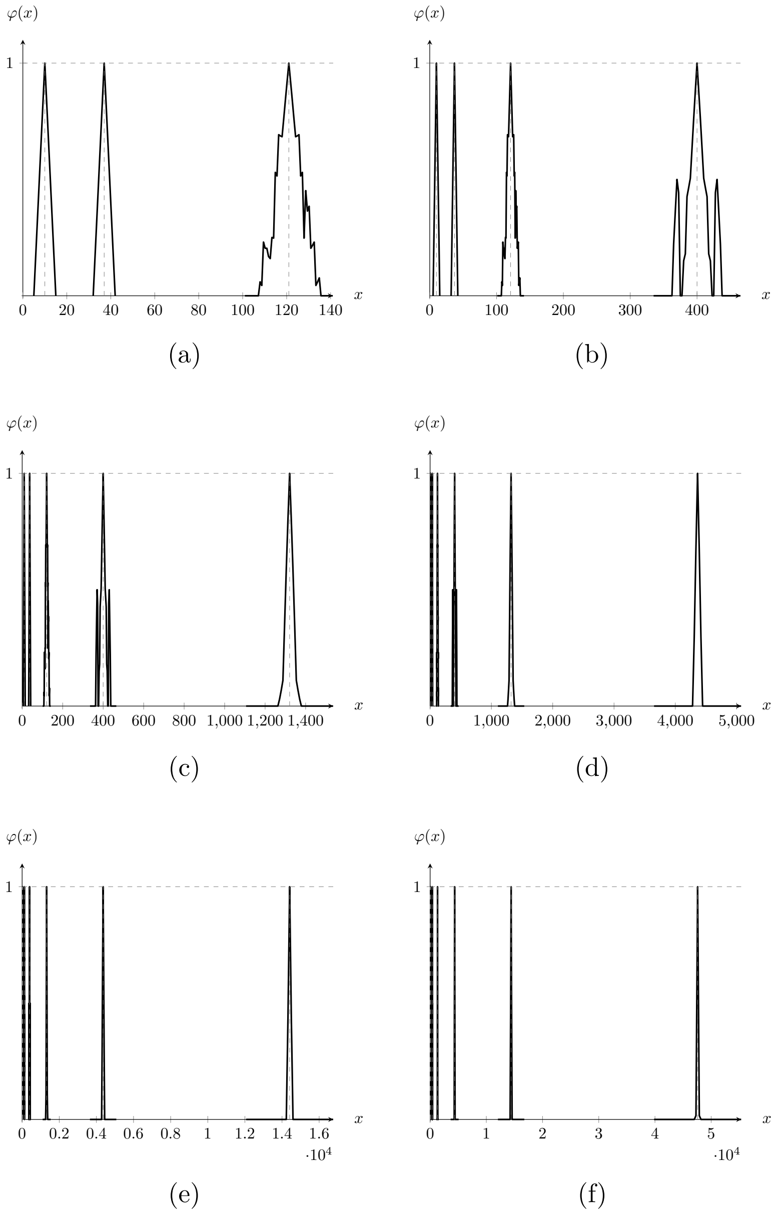


Figura 8.38: (a) p_1 até p_3; (b) p_1 até p_4; (c) p_1 até p_5; (d) p_1 até p_6; (e) p_1 até p_7; (f) p_1 até p_8; t-norma de Yu.

8.8.7 Comparação entre as t-normas

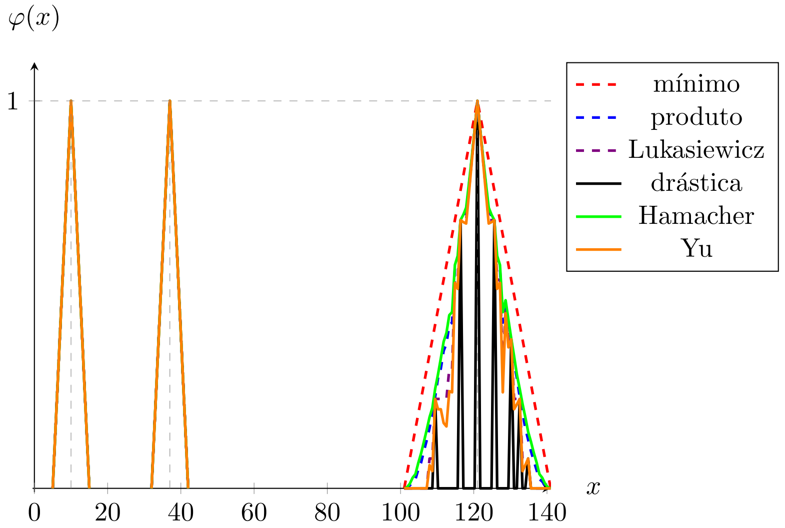


Figura 8.39: População anual de plantas fuzzy da geração p_1 até p_3 comparando as t-normas.

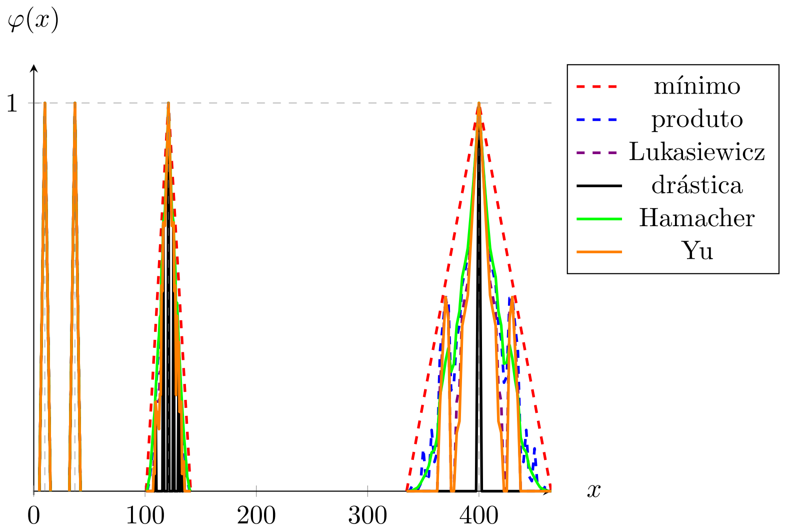


Figura 8.40: População anual de plantas fuzzy da geração p_1 até p_4 comparando as t-normas.

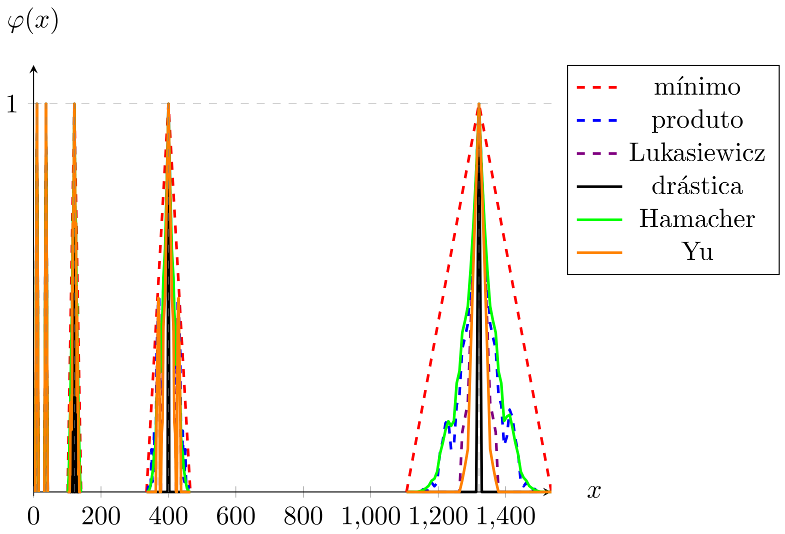


Figura 8.41: População anual de plantas fuzzy da geração p_1 até p_5 comparando as t-normas.

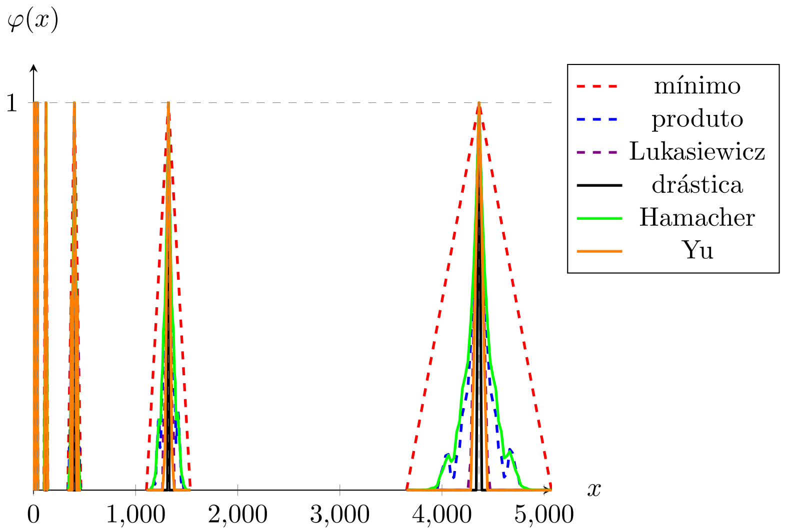


Figura 8.42: População anual de plantas fuzzy da geração p_1 até p_6 comparando as t-normas.

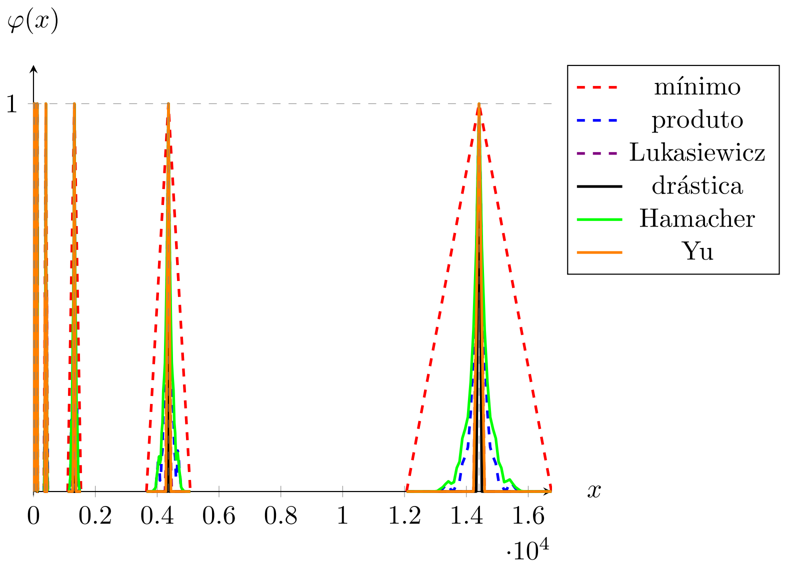


Figura 8.43: População anual de plantas fuzzy da geração p_1 até p_7 comparando as t-normas.

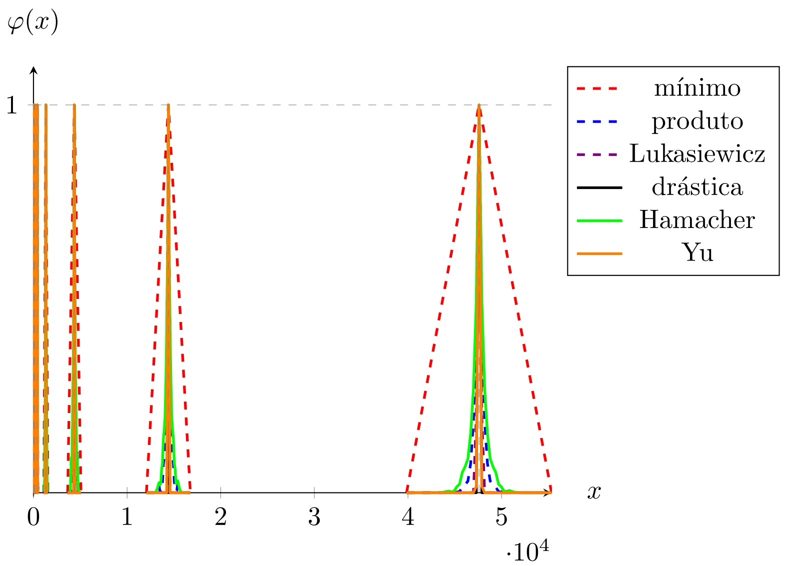


Figura 8.44: População anual de plantas fuzzy da geração p_1 até p_8 comparando as t-normas.

9 Considerações finais

Ao final deste trabalho espera-se que o leitor tenha compreendido um pouco mais sobre as diferenças da matemática clássica e a matemática fuzzy, além do fato de compreender como a matemática fuzzy pode ajudar na modelagem de problemas envolvendo as variáveis linguísticas presentes no cotidiano.

Espera-se que este trabalho seja utilizado em cursos introdutórios como material de consulta de exemplos e relações entre as matemáticas clássica e fuzzy.

Neste trabalho foram estudadas recorrências lineares e a aplicação do Princípio de extensão de Zadeh. No caso de recorrências lineares de segunda ordem, levou-se em conta a iteratividade explorando diferentes t-normas.

Dentre os tipos de t-normas apresentadas pode-se notar no Capítulo 8 que em recorrências lineares de primeira ordem como no caso da aplicação da população de insetos da Sessão 8.4 não é necessário o uso de tais relações, porém em recorrências lineares de segunda ordem como nas aplicações da sequência de Fibonacci da Sessão 8.1 e na aplicação da população de plantas da Sessão 8.6 é de extrema importância a aplicação para que o Princípio da xtensão de Zadeh seja aplicado da maneira correta.

É interessante notar que as t-normas apresentadas na Sessão 7.2.1, sendo a t-norma do mínimo, do produto, de Lukasiewicz e drástica, respeitam as desigualdade demonstradas na Proposição 7.13 e verificadas nos Exemplos 7.14 e 7.15, respectivamente nas Figuras 7.5 e 7.10, e também nas aplicações da população de insetos e população de plantas como pode ser verificado nas Sessões 8.2.5, 8.3.3 e 8.8.7.

A t-norma do mínimo apresenta em todos os casos a maior incerteza, tendo em vista que o suporte (Definição 3.8) é sempre o maior dentre as demais t-normas, mesmo que não esteja explícito nos exemplos. Já a t-norma drástica sempre apresenta a menor incerteza possível possuindo assim o menor suporte dentre as t-normas apresentadas neste trabalho.

As t-normas de Hamacher e Yu da Sessão 8.3 com os parâmetros utilizados se mostraram intermediárias entre a t-noma do mínimo e a t-norma drástica, sendo assim, podem ser utilizadas quando se quer analisar um valor intermediário entre a maior e a menor incerteza fuzzy.

Outro fator importante é a escolha de um α-nível (Definição 3.23) apropriado, fazendo com que o grau de incerteza relacionado a pertinência do conjunto diminua consideravelmente.

Nas aplicações apresentadas, ou seja, a sequência de Fibonacci, a população de insetos, e a população de plantas, verificou-se que ao elevar o número de iterações as t-normas apresentam uma sobreposição, o que mostra que faz sentido estudar para um número menor de iterações, o que não compromete o estudo pois apenas a sequência de Fibonacci pode ser estudada pensando em um número n de iterações tendendo ao infinito, sem limite, pois para o caso da população de insetos e plantas, não faz sentido, já que é um sistema mais complexo, e que fatores não previstos na modelagem podem interferir drasticamente em sistemas com mais iterações como por exemplo o clima, predadores que antes não se apresentavam no estudo, e até mesmo a interferência humana, e todos sabemos que ambas populações não crescem infinitamente. Deste modo, é sempre interessante estudar os sistemas para um número de iterações pequenos e sempre realizar ajustes ao modelo matemático quando necessário.

O número de iterações e o número de pontos utilizados para construir a simulação é importante, pois quanto maior a quantidade de pontos no domínio dos números fuzzy, melhor o estudo em níveis menores de iterações, e consequentemente melhores aproximações em grandes iterações, porém existe uma contrapartida, o custo computacional, pois aumentando o número de pontos do domínio, quando se necessita aplicar o princípio da extensão de Zadeh e sup-J da maneira como foi descrita na Sessão 8.1.1, isso consome um tempo muito grande para que as simulações possam ser realizadas por um computador. Deste modo, para que se tenha simulações mais precisas se faz necessário o uso de um *hardware* adequado, e também um algoritmo que consuma menos tempo de execução.

Cabe reforçar também que não existe "o melhor modelo matemático" para tal aplicação. Na verdade o melhor modelo é aquele que pode ser modificado a medida que se vê a necessidade de efetuar correções. Sempre levando em conta as vantagens e desvantagens de cada modelo.

Como trabalho futuro, pretende-se aplicar os métodos apresentados para sequências recorrentes não lineares, estendendo a operação de multiplicação. Além disso, tem-se como objetivo comparar as mesmas sequências estudadas neste trabalho utilizando outros tipos de interatividades que não são associadas a t-normas, como por exemplo interatividade a partir de relações lineares [27] ou relações paramétricas [8].

Referências

[1] BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C.; MAEDA, D. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020. ISBN 978-85-216-3694-6.

[2] BARROS, L. C. de; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. Campinas: Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2010. ISBN 85-87185-05-5.

[3] PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. *Fuzzy systems engineering: toward human-centric computing*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. ISBN 978-0-471-78857-7.

[4] SÁNCHEZ, D. E. et al. On interactive fuzzy solutions for mechanical vibration problems. *Applied Mathematical Modelling*, v. 96, p. 304–314, 2021.

[5] WASQUES, V. F. et al. Numerical solutions for bidimensional initial value problem with interactive fuzzy numbers. *North American Fuzzy Information Processing Society Annual Conference*, p. 84–95, 2018. Disponível em: <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-95312-0_8>. Acesso em: 27 dez. 2022.

[6] KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E. *Triangular norms*. 1. ed. Poland: Springer Science+Business Media Dordrecht, 2000. ISBN 978-90-481-5507-1.

[7] ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, p. 338–353, 1965. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001999586590241X>. Acesso em: 10 jun. 2022.

[8] WASQUES, V. F. *Fuzzy Differential Equations via Interactive Arithmetic: Applications in Biomathematics*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2019. Disponível em: <https://viniciuswasques.github.io/home/Disciplinas/Wasques_ViniciusFrancisco_D.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2022.

[9] LIMA, E. L. *Curso de análise – Volume 1*. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2017. ISBN 978-85-244-0118-3.

[10] DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra moderna*. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2018. ISBN 978-85-472-2305-2.

[11] LIMA, E. L. *Números e funções reais*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. ISBN 978-85-85818-81-4.

[12] WASQUES, V. F. *Lógica fuzzy aplicada à geologia*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Unesp, Câmpus de Rio Claro, 2015. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/132722/000855574.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 08 jun. 2022.

[13] KALMAN, D. The maximum and minimum of two numbers using the quadratic formula. *College Mathematics Journal*, v. 15, p. 329 – 330, 1984. Disponível em: <https://www.maa.org/sites/default/files/0746834259921.di020713.02p0009e.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2022.

[14] LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral.* 1. ed. Rio de Janeiro: Editora da Universidade de São Paulo, 1970. ISBN 978-85-858-1843-2.

[15] WASQUES, V. F. *Notas de aula Sistemas p-fuzzy*. 2022. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Unesp. Disponível em: <https://viniciuswasques.github.io/home/Disciplinas/PGMAT/Notasaulaspfuzzy.pdf>. Acesso em: 27 mai. 2022.

[16] BEDE, B. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic (Studies in Fuzziness and Soft Computing).* 1. ed. Berlin: Springer, 2013. ISBN 978-3-642-35221-8.

[17] JAFELICE, R. S. d. M.; BARROS, L. d. C.; BASSANEZI, R. C. *Teoria dos conjuntos fuzzy com aplicações - Notas em Matemática Aplicada*. 2012. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC. Disponível em: <https://proceedings.science/series/23/proceedings_non_indexed/22>. Acesso em: 10 jun. 2022.

[18] BARROS, L. C. de. *Sobre sistemas dinâmicos fuzzy - teoria e aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 1997. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~laeciocb/tese_doutorado.pdf>. Acesso em: 22 jun. 2022.

[19] KLIR, G. J.; YUAN, B. *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1995. ISBN 0-13-101171-5.

[20] NGUYEN, H. T.; WALKER, C. L.; WALKER, E. A. *A first course in fuzzy logic*. 4. ed. Boca Raton: Taylor & Francis, CRC Press, 2019. ISBN 978-11-38585-08-9.

[21] DOMINGUES, H. H.; IEZZY, G. *Álgebra Moderna*. 4. ed. São Paulo: Editora Atual, 2003. ISBN 85-357-0401-9.

[22] FILHO, E. d. A. *Iniciação à lógica matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Nobel, 2002. ISBN 85-213-0403-X.

[23] PERFILIEVA, I. Fuzzy transforms: Theory and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 157, p. 993–1023, 2006. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0165011405005804>. Acesso em: 29 nov. 2022.

[24] FULLÉR, R.; MAJLENDER, P. On interactive fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 143, p. 355–369, 2004. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0165011403001805>. Acesso em: 29 nov. 2022.

[25] WASQUES, V. F. Sequência de números fuzzy interativos: uma aplicação à sequência de fibonacci. *Biomatemática - Uma Publicação do Grupo de Matemática IMECC - UNICAMP*, v. 30, p. 141–158, 2020. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~biomat/Bio30_art6.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2022.

[26] ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. *Information Sciences*, v. 8, p. 199–249, 1975. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0020025575900365>. Acesso em: 29 nov. 2022.

[27] SIMÕES, F. S. P. *Sobre Equações Diferenciais para Processos Fuzzy Linearmente Correlacionados: Aplicações em Dinâmica de População*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2017. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/pos-graduacao/matematica-aplicada/dissertacoes-teses>. Acesso em: 20 nov. 2022.

[28] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática discreta*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. ISBN 978-85-8337-015-4.

[29] WASQUES, V. F.; ESMI, E.; BARROS, L. C. Sequências recorrentes lineares de primeria e segunda ordem de números fuzzy interativos. *Biomatemática - Uma Publicação do Grupo de Matemática IMECC - UNICAMP*, v. 30, p. 159–176, 2020. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~biomat/Bio30_art7.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2022.

[30] EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical models ins biology*. 2. ed. Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 2005. ISBN 0-89871-554-7.

[31] GNU Octave. 2022. Https://octave.org/. Acesso em: 1 nov. 2022.

[32] OS mistérios da sequência de Fibonacci. 2022. Https://impa.br/noticias/os-misterios-da-sequencia-de-fibonacci/. Acesso em: 1 nov. 2022.

[33] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. 2. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2008. ISBN 978-85-268-0754-9.

[34] FIBONACCI Quarterly. 2022. Https://www.fq.math.ca/list-of-issues.html. Acesso em: 1 nov. 2022.

[35] BARROS, L. C. de et al. *Notas de aula MT 624 - Biomatemática I*. 2007. Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

A Programa GNU Octave

A.1 Instalação

Site para download: `https://www.gnu.org/software/octave/index`
Utilizar o Octave (GUI) pois possui a interface gráfica.

A.2 Operações básicas

Octave	Descrição
`clc`	limpar janela de comando
`+`	adição
`-`	subtração
`*`	multiplicação
`/`	divisão
`^` ou `**`	exponenciação
`e`	número de Euler
`pi`	número π

O Octave utiliza (.) e não (,) como no sistema brasileiro.
Para limpar a janela de comandos, utilize o menu "Editar, Limpar janela de comando".

A.2.1 Ordem de precedência

Octave	Descrição
1	parenteses mais internos
2	exponenciação
3	multiplicação e divisão
4	adição e subtração

A.3 Formatação de dados numéricos

Octave	Descrição
`format␣short`	4 dígitos decimais
`format␣long`	14 dígitos decimais
`format␣short` e	notação científica com 4 dígitos decimais
`format␣long` e	notação científica com 15 dígitos decimais
`format␣short␣g`	5 dígitos no total
`format␣long␣g`	16 dígitos no total
`format␣bank`	2 dígitos decimais

É realizado arredondamento na última casa decimal.

A.4 Funções

No lugar de x ou y coloque o número desejado.

Octave	Descrição
`sqrt(x)`	raiz quadrada, $\sqrt{x}$
`exp(x)`	exponencial, $\exp(x) = e^x$
`e^x`	exponencial, $\exp(x) = e^x$
`abs(x)`	módulo de x, $\mid x \mid$
`log(x)`	logaritmo natural de x, $\log_e x$
`logy(x)`	logaritmo de x na base y, $log_y x$
`factorial(x)`	fatorial de x, $x!$
`format␣bank`	2 dígitos decimais

A.4.1 Funções trigonométricas

No lugar de x coloque o número em radianos.

Octave	Descrição
`sin(x)`	seno de x, $\operatorname{sen} x$
`cos(x)`	cosseno de x, $\cos x$
`tan(x)`	tangente de x, $\operatorname{tg} x$
`cot(x)`	cotangente de x, $\operatorname{cotg} x$
`asin(x)`	inverso de seno de x, $\operatorname{arcsen} x$
`acos(x)`	inverso de cosseno de x, $\arccos x$
`atan(x)`	inverso da tangente de x, $\operatorname{arctg} x$
`acot(x)`	inverso da cotangente de x, `arccot` x
`sinh(x)`	seno hiperbólico de x, $\operatorname{senh} x$
`cosh(x)`	cosseno hiperbólico de x, $\cosh x$
`tanh(x)`	tangente hiperbólico de x, $\operatorname{tgh} x$
`coth(x)`	cotangente hiperbólico de x, $\coth x$

A.4.2 Funções de arredondamnto

No lugar de x ou y coloque o número desejado.

Octave	Descrição
`round(x)`	arredonda para o inteiro mais próximo
`fix(x)`	arredonda para o menor inteiro, $\lfloor x \rfloor$
`ceil(x)`	arredonda para o maior inteiro, $\lceil x \rceil$
`floor(x)`	arredonda para o menor inteiro menor do que zero
`rem(x,y)`	resto da divisão de x por y
`sign(x)`	sinal de x, reposta $\{-1, 0, 1\}$

A.5 Variáveis

A.5.1 Definição

Os nomes das variáveis podem conter **letras, números** e _, porém sempre deve iniciar com uma letra. O Octave faz distinção entre letras maiúsculas e minúsculas.

Octave	Descrição
`x=8`	atribui o valor 8 para a variável x
`x=8;`	atribui o valor 8 para a variável x e não mostra na tela

A.5.2 Variáveis pré-definidas

Octave	Descrição
`ans`	assume o valor da última expressão não atribuída a uma variável especificada
`pi`	aproximação para o número π
`e`	aproximação para o número e
`inf`	infinito, ∞
`i`	complexo $0 + 1i$
`j`	complexo $0 + 1i$
`NaN`	abreviação de *not a number*, utilizado quando não é possível determinar um valor numérico válido

A.5.3 Comandos úteis

Octave	Descrição
`clear`	apaga todos os valores de variáveis na memória
`clear␣x␣y␣z`	apaga os valores das variáveis x, y e z
`who`	exibe as variáveis declaradas e ativas na memória
`whos`	exibe as variáveis declaradas e ativas na memória e tamanho em bytes

A.6 Arranjos

Arranjos são listas, vetores, matrizes.

A.6.1 Vetores

Vetores terão apenas um linha e o número de colunas desejado.

Octave	Descrição
`[x␣y␣z]`	vetor separado por espaços, $[xyz]$
`[x,y,z]`	vetor separado por vírgula $[xyz]$
`[x:y:z]`	vetor iniciando em x, somando y até o valor de z
`[x:y:z];`	vetor iniciando em x, somando y até o valor de z o ; não exibe na tela
`linspace(x,y,z)`	vetor iniciando em x, terminando em y, e com z números de x até y
`linspace(x,y)`	vetor iniciando em x, terminando em y, e com 100 números de x até y

A.6.2 Matrizes

Matrizes terão o número de linhas e colunas desejados.

Octave	Descrição
`[␣x␣y␣z␣;␣u␣v␣w]`	matriz separada por espaços e linhas por ;
`[x,y,z;u,v,w]`	matriz separada por vírgula e linhas por ;
`[x:y:z]`	vetor iniciando em x, somando y até o valor de z
`linspace(x,y,z)`	vetor iniciando em x, terminando em y, e com z números de x até y
`linspace(x,y)`	vetor iniciando em x, terminando em y, e com 100 números de x até y

A.6.3 Comandos básicos para matrizes

Octave	Descrição
`zeros(x,y)`	matriz com x linhas e y colunas com os elementos 0
`ones(x,y)`	matriz com x linhas e y colunas com os elementos 1
`eye(x)`	matriz identidade de ordem x

A.6.4 Referenciando matrizes

Dada a matriz A e o vetor v.

Octave	Descrição
`A'`	transposta da matriz u
`A(x)`	busca o elemento $(1, x)$
`A(x,y)`	busca o elemento da linha x e coluna y
`v(x:z)`	busca os elementos de x até y na linha
`A(x,:)`	busca os elementos de da linha x
`A(:,y)`	busca os elementos de da coluna y
`A(x:y,:)`	busca todos os elementos das linas x até y
`A(:,y:z)`	busca todos os elementos das colunas y até z
`A(x:y,z:w)`	busca os elementos da linha x até linha y das colunas z até w

A.6.5 Adicionar e excluir elementos em matrizes

Dada a matriz A e o vetor v.

Octave	Descrição
`v(x)=y`	adiciona o valor y na posição $(1, x)$ do vetor v
`v(x:y)=[x_1,x_2,...,x_y]`	adiciona os elementos da coluna x até y
`A(:,x)=[x_1,x_2,...,x_y]`	adiciona a coluna x com os elementos $x_1, x_2, \ldots, x_y$
`A(x,:)=[x_1,x_2,...,x_y]`	adiciona a linha x com os elementos $x_1, x_2, \ldots, x_y$
`v(x)=[]`	exclui o elemento $(1, x)$ do vetor v
`v(x:y)=[]`	exclui os elementos $(1, x)$ até $(1, y)$ do vetor v
`A(:,x)=[]`	exclui a coluna x da matriz
`A(x,:)=[]`	exclui a linha x da matriz

A.6.6 Informações em matrizes

Dada a matriz A e o vetor v.

Octave	Descrição
`lengt(v)`	mostra o número de elementos do vetor
`size(A)`	mostra o número de linhas e colunas da matriz
`reshap(A,x,y)`	reorganiza a matriz desde que $x \cdot y = m \cdot n$ da matriz original
`diag(v)`	constrói uma matriz com os valores de v na diagonal principal
`diag(A)`	constrói um vetor com os elementos da diagonal principal de u

A.7 String

String são caracteres, ou seja, uma forma de escrever textos.

Octave	Descrição
`x='teste'`	escreve o "teste"
`x=char('texto1','texto2','texto3')`	constrói uma matriz com as linhas sendo os textos

Classes

número	`double`
letras (string)	`char`

A.8 Operações

A.8.1 Adição e subtração em arranjos

Dados os vetores de mesma ordem u e v, e as matrizes de mesma ordem A e B.

Octave	Descrição
`u+v`	soma elemento a elemento os vetores $u + v$
`v+2`	soma 2 em cada elemento do vetor v
`u+v`	subtrai elemento a elemento os vetores $u + v$
`v+2`	subtrai 2 em cada elemento do vetor v
`A+B`	soma elemento a elemento as matrizes r e s
`A+2`	soma 2 em cada elemento da matriz r
`A-B`	subtrai elemento a elemento as matrizes r e s
`A-2`	subtrai 2 em cada elemento da matriz r

A.8.2 Multiplicação em arranjos

Dados os vetores u e v e as matrizes A e B.

Octave	Descrição
`S=dot(u,v)`	realiza o produto escalar entre u e v
`v*2`	multiplica todos os elementos do vetor v por 2
`A*2`	multiplica todos os elementos do vetor A por 2
`A*B`	multiplica a matriz A pela matriz B

A.8.3 Divisão em arranjos

Lembrando que $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ para modelos em colunas utiliza-se \ e para modelos em linha utiliza-se /.

Dadas as matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times 1}$.

Octave	Descrição
`inv(A)`	inversa da matriz A
`X=inv(A)*B`	resolve $X = A^{-1}B$ sendo X uma matriz coluna
`X=A\B`	resolve $X = A^{-1}B$ sendo X uma matriz coluna
`X=B/A`	resolve $X = A^{-1}B$ sendo X uma matriz linha
`C=A/2`	divide todos os elementos da matriz A por 2
`C=A.^2`	eleva todos os elementos da matriz A por 2
`C=A./B`	divide os elementos da matriz A termo a termo dos elementos de B
`C=A.*B`	multiplica os elementos da matriz A termo a termo de B

A.8.4 Operações com escalares

Dados os vetores u e v.

Octave	Descrição
`w=u.*v`	multiplica os elementos do vetor u termo a termo dos elementos de v
`w=u.^v`	eleva os elementos da matriz u termo a termo dos elementos de v
`w=u./v`	divide os elementos do vetor u termo a termo dos elementos de v
`y=x.^2-4*x`	realiza a cada termo do vetor a função $y = x^2 - 4x$

A.9 Funções para vetores e listas

A.9.1 Funções nativas

Dados os vetores u e v e as matrizes A e B.

Octave	Descrição
`mean(v)`	calcula a média aritmética dos elementos de v
`max(v)`	retorna o maior valor de v
`min(v)`	retorna o menor valor de v
`[n,p]=max(v)`	retorna como n o maior valor de v e p a posição de n
`[n,p]=min(v)`	retorna como n o menor valor de v e p a posição de n
`sum(v)`	realiza a soma dos elementos de v
`sort(v)`	reorganiza em ordem crescente os elementos de v
`median(v)`	retorna a mediana dos elementos de v
`std(v)`	retorna o desvio padrão dos elementos de v
`std(u,v)`	calcula o produto escalar de u e v
`cross(u,v)`	determina o produto vetorial de u e v apenas para ordem 3
`det(A)`	calcula o determinante da matriz A
`inv(A)`	inversa da matriz A

A.9.2 Números aleatórios

Octave	Descrição
`rand`	gera um número aleatório no intervalo $[0, 1]$
`rand(m,n)`	gera uma matriz de ordem $m \times n$ com números aleatórios no intervalo $[0, 1]$
`rand(m)`	gera uma matriz quadrada de ordem m com números aleatórios no intervalo $[0, 1]$
`randperm(x)`	gera um vetor com x elementos aleatórios
`randi(x)`	gera um número inteiro aleatório no intervalo $[0, x]$
`randi(x,m,n)`	gera uma matriz de ordem $m \times n$ de números inteiros aleatórios no intervalo $[0, x]$, podendo haver repetições

A.10 Gráficos

A.10.1 Gráficos 2D

Octave	Descrição
`plot(x,y)`	plota um gráfico num sistema cartesiano (x, y)
`plot(x,y,'-')`	tracejado
`plot(x,y,'m')`	cor magenta
`plot(x,y,'o', 'markersize',12, 'markerfacecolor','y')`	marcadores tamanho 12, pintados de amarelo (yellow)
`plot(x,y,'-mo', 'linewidth',3, 'markersize',12, 'markerfacecolor','y')`	tracejado, magenta, marcadores tamanho 12, pintados de amarelo (yellow)
`plot(x,y,':b', 'linewidth',5)`	pontilhado (:), azul (b = blue), linha de espessura 5

A.10.2 Gráfico 2D de função

Octave	Descrição
`fplot␣('x^2+4*sin(2*x)-1',[-3,3])`	constrói o gráfico da função $f(x) = x^2 + 4\,\mathrm{sen}(2x) - 1$ no intervalo $[-3,3]$

A.10.3 Multiplos gráficos

Octave	Descrição
`plot(x,y,u,v,t,h)`	constrói os gráficos $(x,y),(u,v)$ e (t,h)

A.10.4 Formatando gráficos

Octave	descrição
`title('Título␣do␣gráfico')`	título do gráfico
`xlabel('Eixo␣x')`	nome do eixo x
`ylabel('Eixo␣y')`	nome do eixo y
`'';displayname;''`	legenda

A.10.5 Outras formatações

Estilos de linha

Octave	Descrição
`‘-’`	linha (default)
`‘--’`	tracejado
`‘:’`	pontos
`‘-.’`	ponto tracejado

Marcadores

Octave	Descrição
`'+'`	cruz +
`'o'`	círculo
`'*'`	estrela
`'.'`	ponto
`'x'`	cruz x
`'s'`	quadrado
`'d'`	diamante
`'^'`	triangulo cima
`'v'`	triangulo baixo
`'>'`	triangulo direito
`'<'`	triangulo esquerda
`'p'`	pentagrama
`'h'`	hexágono

Cores

Octave	Descrição
`'k'`	blacK
`'r'`	Red
`'g'`	Green
`'b'`	Blue
`'y'`	Yellow
`'m'`	Magenta
`'c'`	Cyan
`'w'`	White

A.10.6 Outros tipos de gráficos

Octave	Descrição
`bar(x,y)`	constrói o gráfico de barras verticais (x, y)
`barh(x,y)`	constrói o gráfico de barras horizontais (x, y)
`stairs(x,y)`	constrói o gráfico de escadas (x, y)
`stem(x,y)`	constrói o gráfico de hastes (x, y)
`pie(x,y)`	constrói o gráfico de setores (pizza) (x, y)

A.11 Scripts e rotinas

Octave	Descrição
`%` ou `#`	(comentário) a linha não é lida pelo programa
`%{Comentário}`	bloco de comentário
`;`	não mostra na tela o comando após a execução
`x=input('Digite␣aqui')`	solicita ao usuário um valor para x
`disp('Digite␣aqui')`	escreve na tela
`fprintf('Digite␣algo␣%f',x)`	escreve na tela a frase e no lugar de %f coloca a variável x
`fprintf('Digite␣algo␣%1.2␣f',x)`	escreve na tela a frase e no lugar de % 1.2f coloca a variável x com 2 casas decimais
`%f`	casas decimais
`%d`	mostra números inteiros
`%s`	mostra uma string
`\n`	pula uma linha para a próxima exibição

A.12 Exemplo de um programa simples

```
%Cálculo do volume de um cone
%Colocar o comando clear para limpar a memória
clear
%Colocoar o comando clc para o programa limpar a tela da janela de
comandos
clc
%Solicitar ao usuário o raio r do cone
r=input('Digite o raio da base do cone: ');
%Solicitar a altura h do cone
h=input('Digite a altura do cone: ');
%Equação do volume do cone
V=(3.14*r \wedge 2*h)/3;
%Comando de saída
disp('O volume do cone eh: ')
disp(V)
%Exemplo de saída com strings e números
fprintf('O volume do cone eh %f',V)
%Linha vazia de espaço
disp('')
%Exemplo de saída com strings e números controlando as casas decimais
no caso duas casas
fprintf('O volume do cone eh %1.2f',V)
%Linha vazia de espaço
disp('')
%Outro exemplo
fprintf('O volume do cone de raio %1.2f e altura %1.2f eh %1.2f',r,h,V)
```

A.13 Operadores

A.13.1 Operadores relacionais

Devolvem 1 se verdadeiro e 0 se falso.

`<`	maior
`>`	menor
`<=`	menor do que ou igual
`>=`	maior do que ou igual
`==`	igual
`~=`	diferente

A.14 Operadores de incremento

Operadores de incremento aumentam ou diminuem em uma unidade o valor da variável. Estes operadores podem ser do tipo pré-incremento ou pós-incremento.

`x++`	retorna o valor de x depois incrementa
`++x`	incrementa, depois retorna o valor de x
`x--`	retorna o valor de x depois incrementa
`--x`	incrementa, depois retorna o valor de x

A.14.1 Operadores lógicos

Devolvem 1 se verdadeiro e 0 se falso.

`'Sentença1'␣&␣'Sentença2'`	e
`'Sentença1'␣` | `'Sentença2'`	ou
`~('Sentença1'` e/ou `'Sentença2')`	negação

A.15 Pausar pause

O comando "pause", para o programa e continua após o usuário apertar qualquer tecla. Também é possível parar o programa por algum tempo. O exemplo abaixo para o programa por 5 segundos.

```
clear
clc
disp ("espere, por favor...");
pause (5);
clc;
```

A.16 Sentenças condicionais if

`if␣'Sentença'`	se
`elseif␣'Sentença'`	se não
`endif`	fecha o comando if

A.16.1 Exemplo de um programa com sentenças

```
clear
clc
x = input('Digite um numero: ');
if x>5
    disp ('O numero eh maior que 5')
elseif x<5
    disp ('O numero eh menor que 5')
else
    disp ('O numero eh igual a 5')
endif
```

A.17 Comandos de escolha switch

A.17.1 Exemplo de um programa com sentenças

```
clear
clc
x = input('Digite um numero de 1 a 4: ');
switch x
    case 1
        disp ('Amarelo')
    case 2
        disp ('Verde')
    case 3
        disp ('Azul')
    case 4
        disp ('Vermelho')
otherwise
\hspace{1 cm}  disp ('O valor esta fora do intervalo')
endswitch
```

A.18 Comandos de repetição ou laço for

A.18.1 Exemplo

```
clear
clc
for k=2:2:20
    x=k$\wedge$2;
    fprintf ('O quadrado de %d é %d \ n ',k,x)
endfor
```

A.19 Contador

A.19.1 Exemplo

```
clear
clc
S=0;
for k=1:100
    S=S+k;
endfor
S
```

A.19.2 Exemplo solicitando ao usuário

```
clear
clc
S=0;
n=input('Digite o número desejado: ');
for k=1:n
    S=S+k;
endfor
fprintf('O somatório de 1 até %d é igual a %d \ n',n,S)
```

A.20 Loops while

Enquanto a condição for satisfeita, continue rodando.

A.20.1 Exemplo

```
clear
clc
x=1;
while x<=20
    x=2*x
endwhile
```

A.20.2 Exemplo solicitando ao usuário

```
clear
clc
x=1;
n=input('Digite o valor desejado: ');
while x<=n
    x=2*x
endwhile
```

A.20.3 Exemplo de loop infinito

O programa ficará rodando infinitamente. Abra o gerenciador de tarefas e finalize o programa.

```
clear
clc
x=1;
while x>0
    x=2*x
endwhile
```

A.21 **Até** do-until

O programa faz determinada ação até que aconteça algo.

```
clear
clc
fib = ones (1, 10);
i = 2;
do
    i++;
    fib (i) = fib (i-1) + fib (i-2);
until (i == 10)
```

A.22 Definir funções matemáticas

Para definir uma função matemática:

```
Nome da função = @ (variável) corpo da função
```

Exemplo:

```
f=@(x)x^2+1
```

Basta digitar o valor procurado para `f(x)` por exemplo, digite: `f(2)` e terá o resultado.

A.23 Exemplo de script para um número fuzzy triangular

```
clc %Limpa a janela de comandos
clear all %Limpa a memória
close all %Fecha todas as figuras
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                        VARIÁVEIS PARA ALTERAR
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%Domínio no intervalo [a,b] = [dominioesquerda1,dominiodireita1]
dominioesquerda1=0;
dominiodireita1=4;
%
%Número de partições no intervalo, número de pontos para o gráfico
particoes1=500;
%
%Número fuzzy Triangular na forma (a,b,c) = (triangularesqerda1,
%triangularcentro1,triangularesqerda1)
triangularesqerda1=1;
triangularcentro1=2;
triangulardireita1=3;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                        FIM DAS VARIÁVEIS PARA ALTERAR
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% DETERMINAÇÃO DA FUÇÃO DE PERTINÊNCIA E CÁLCULO PARA O GRÁFICO
%
%Pertinência do lado esquerdo, função crescente
pertinenciaesquerda1=@(x) (x - triangularesqerda1)/(triangularcentro1 -
triangularesqerda1);
%
%Pertinência do lado direito, função decrescente
pertinenciadireita1=@(x) (x - triangulardireita1)/(triangularcentro1 -
triangulardireita1);
%
%Vetor particionado no intervalo [a,b] em n partes, ou seja, (a,b,n)
V1 = linspace(dominioesquerda1,dominiodireita1,particoes1);
%
%Cria um vetor de uma coluna e o número de linhas igual o número de
%partições definido acima, todos os elementos são zeros (linha,coluna)
pertinenciatriangular1 = zeros (length(V1),1);
%
%Comando para gerar os pares ordenados para o gráfico
for i = 1:length(V1)
  if ( V1(i) >= triangularesqerda1 && V1(i) <= triangularcentro1 )
```

```
    pertinenciatriangular1 (i,1) = pertinenciaesquerda1 ( V1(i) );
  elseif ( V1(i) > triangularcentro1 && V1(i) <= triangulardireita1 )
    pertinenciatriangular1 (i,1) = pertinenciadireita1 ( V1(i) );
  else
    pertinenciatriangular1 (i,1) = 0;
  endif
endfor
%Cria um vetor com elementos todos zeros para o
%COMPLEMENTAR DO NÚMERO FUZZY TRIANGULAR
pertinenciatriangular1complementar = zeros (length(V1),1);
%
%Completa o vetor complementar
for i = 1:length(V1)
  pertinenciatriangular1complementar (i,1) = (1 -
 pertinenciatriangular1 (i,1) );
endfor
%Gerar o gráfico combinando o vetor criado no comando for acima com
%(x,y,cor,espessura,valor da espessura)
plot(V1,pertinenciatriangular1,'r','linewidth',2)
hold on; %ESTA LINHA NÃO DEIXA O OCTAVE APAGAR O GRÁFICO DE CIMA,
%PLOTA POR CIMA.
plot(V1,pertinenciatriangular1complementar,'b','linewidth',2)
%
%Título do gráfico
title('Gráfico de um número fuzzy triangular');
%
%Nome do eixo x
xlabel('x');
%
%Nome o eixo y
ylabel('phi (x)');
%
%Legenda no gráfico
legend('phi A (x)','phi A^-1(x)');
```

O *script* da Sessão A.23 gera a Figura A.1.

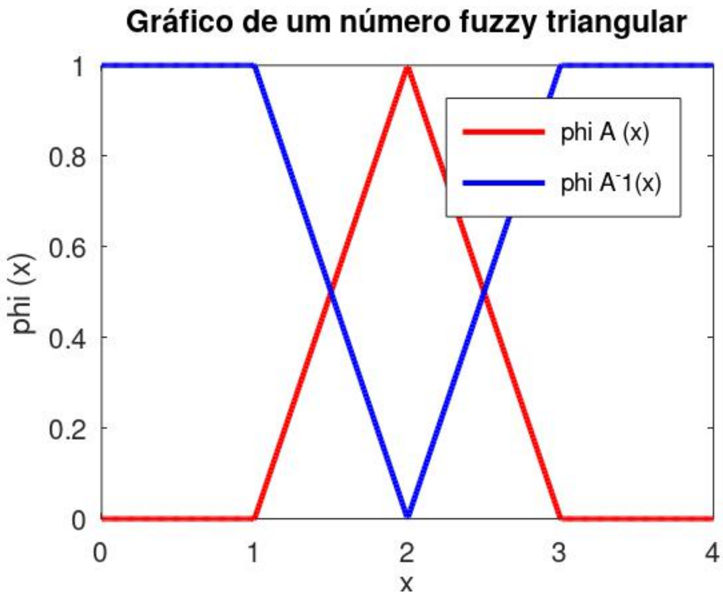


Figura A.1: Figura de um número triangular fuzzy obtida com programa Octave.

B Recorrências

Certas sequências são definidas recursivamente, ou seja, por meio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função dos antecessores imediatos [28].

Para todos os exemplos apresentados neste Capítulo considere como n a posição do termo, e $n \in \mathbb{N}$.

B.1 Tipos de recorrência

A Tabela B.1 apresenta alguns tipos de recorrência.

Recorrência	Descrição	Exemplos
Linear	O termo dependente é de potência 1.	$x_{n+1} = 2x_n - n^2$ $x_{n+1} = nx_n$
Não linear	O termo dependente não é de potência 1.	$x_{n+1} = x_n^2$ $x_{n+1} = x_n!$
Primeira ordem	Depende do termo antecessor imediato.	$x_{n+1} = x_n - 3n^2$ $x_{n+1} = nx_n$
Segunda ordem	Depende de seus dois antecessores imediatos.	$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ $x_{n+2} = x_{n+1} + 4x_n + 2$
Ordem k	Depende de seus k termos antecessores.	$x_n = x_{n-1} + 3x_{n-2} - 4x_{n-k}$ $x_n = x_{n-k}^k + x_{n-k+1}^{k-1} + \cdots + x_{n-2}^2 + x_{n-1}$
Homogênea	Não possui termo independente de x_n	$x_{n+1} = nx_n$ $x_{n+1} = x_n^2$
Não homogênea	Possui termo independente de x_n	$x_{n+1} = 2x_n - n^2$ $x_{n+1} = nx_n + f(x)$

Tabela B.1: Tipos de recorrência.

B.2 Recorrências lineares de primeira ordem

Seguem alguns exemplos de resolução de recorrências lineares de primeira ordem.

Exemplo B.1. [28] Resolva a recorrência $x_{n+1} = nx_n$, com $x_1 = 1$.

Observe que partindo de $n = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
x_2 =& 1x_1 \\
x_3 =& 2x_2 \\
x_4 =& 3x_3 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
x_{n-1} =& (n-2)x_{n-2} \\
x_n =& (n-1)x_{n-1}.
\end{aligned}$$

Multiplicando verticalmente, tem-se

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdots x_{n-1} \cdot x_n = 1x_1 \cdot 2x_2 \cdot 3x_3 \cdots (n-2)x_{n-2} \cdot (n-1)x_{n-1}.$$

Reescrevendo, tem-se

$$\begin{aligned}
x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdots x_{n-1} \cdot x_n =& x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \\
\Rightarrow \frac{x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdots x_{n-1} \cdot x_n}{x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdots x_{n-1}} =& x_1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \\
\Rightarrow x_n =& (n-1)! x_1.
\end{aligned}$$

Como a condição inicial fornecida indicava $x_1 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
x_n =& (n-1)! x_1 \\
\Rightarrow x_n =& (n-1)!.
\end{aligned}$$

Portanto, a solução da recorrência é $x_n = (n-1)!$.

Exemplo B.2. [28] Resolva a recorrência $x_{n+1} = 2x_n$.

Tem-se que para $n = 1$,

$$\begin{aligned}
x_2 =& 2x_1 \\
x_3 =& 2x_2 \\
x_4 =& 2x_3 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
x_{n-1} =& 2x_{n-2} \\
x_n =& 2x_{n-1}.
\end{aligned}$$

Multiplicando verticalmente,

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdots x_{n-1} \cdot x_n = 2x_1 \cdot 2x_2 \cdot 2x_3 \cdots 2x_{n-2} \cdot 2x_{n-1}.$$

Reescrevendo, tem-se

$$\begin{aligned}
x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdots x_{n-1} \cdot x_n =& \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2}_{n-1 \text{ vezes}} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_{n-2} \cdot x_{n-1} \\
\Rightarrow \frac{x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdots x_{n-1} \cdot x_n}{x_2 \cdot x_3 \cdots x_{n-2} \cdot x_{n-1}} =& 2^{n-1} x_1 \\
\Rightarrow x_n =& 2^{n-1} x_1.
\end{aligned}$$

Como não foi especificado o valor de x_1 atribui-se um valor C arbitrário, deste modo a solução da recorrência é $x_n = C \cdot 2^{n-1}$.

Exemplo B.3. [28] Resolva a recorrência linear de primeira ordem não homogênea $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Para $n = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} x_2 =& x_1 + f(1) \\ x_3 =& x_2 + f(2) \\ x_4 =& x_3 + f(3) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ x_{n-1} =& x_{n-2} + f(n-2) \\ x_n =& x_{n-1} + f(n-1). \end{aligned}$$

Somando na vertical,

$$\begin{aligned} x_2+& x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \\ =& x_1 + f(1) + x_2 + f(2) + x_3 + f(3) + \cdots + x_{n-2} + f(n-2) + x_{n-1} + f(n-1). \end{aligned}$$

Reescrevendo,

$$\begin{aligned} x_2+& x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1} + x_n - x_2 + x_3 - \cdots - x_{n-2} - x_{n-1} = \\ =& x_1 + f(1) + f(2) + f(3) \cdots + f(n-2) + f(n-1) \\ \Rightarrow x_n =& x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \end{aligned}$$

Exemplo B.4. [28] Resolva a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n$, com $x_1 = 1$.

Tomando $n = 1$,

$$\begin{aligned} x_2 =& x_1 + 2 \\ x_3 =& x_2 + 2^2 \\ x_4 =& x_3 + 2^3 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ x_{n-1} =& x_{n-2} + 2^{n-2} \\ x_n =& x_{n-1} + 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Somando na vertical,

$$\begin{aligned} x_2+& x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1} + x_n \\ =& x_1 + 2 + x_2 + 2^2 + x_3 + 2^3 + \cdots + x_{n-2} + 2^{n-2} + x_{n-1} + 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Reescrevendo,

$$\begin{aligned} x_2+& x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1} + x_n - x_2 - x_3 - \cdots - x_{n-2} - x_{n-1} \\ =& x_1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}. \\ \Rightarrow x_n =& x_1 + \underbrace{2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}}_{\text{Progressão geométrica de razão 2}} \end{aligned}$$

Realizando a soma da progressão geométrica utilizando $S_n = a_1 \cdot \left(\dfrac{q^n - 1}{q - 1}\right)$,

$$\begin{aligned} x_n =& x_1 + 2 \cdot \left(\frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}\right) \\ \Rightarrow x_n =& x_1 + 2^n - 2. \end{aligned}$$

Como $x_1 = 1$,

$$\begin{aligned} x_n =& x_1 + 2^n - 2 \\ \Rightarrow x_n =& 1 + 2^n - 2 \\ \Rightarrow x_n =& 2^n - 1. \end{aligned}$$

Exemplo B.5. [28] Resolva a recorrência $x_{n+1} = x_n + n$ com $x_1 = 0$.

Partindo de $n = 1$,

$$\begin{aligned} x_2 =& x_1 + 1 \\ x_3 =& x_2 + 2 \\ x_4 =& x_3 + 3 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ x_{n-1} =& x_{n-2} + (n-2) \\ x_n =& x_{n-1} + (n-1). \end{aligned}$$

Somando na vertical,

$$\begin{aligned} x_2 +& x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1} + x_n \\ =& x_1 + 1 + x_2 + 2 + x_3 + 3 + \cdots + x_{n-2} + (n-2) + x_{n-1} + (n-1). \end{aligned}$$

Reescrevendo,

$$\begin{aligned} x_2 +& x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1} + x_n - x_2 - x_3 - \cdots - x_{n-2} - x_{n-1} \\ =& x_1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1). \end{aligned}$$

Reescrevendo novamente,

$$x_n = x_1 + \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1)}_{\text{Progressão aritmética de razão 1}}$$

Realizando a soma da progressão aritmética utilizando $S_n = n \cdot \left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} x_n =& x_1 + (n-1) \cdot \left(\frac{1 + (n-1)}{2}\right) \\ \Rightarrow x_n =& x_1 + \left(\frac{n - 1 + (n-1)(n-1)}{2}\right) \\ \Rightarrow x_n =& x_1 + \left(\frac{n - 1 + n^2 - 2n + 1}{2}\right) \\ \Rightarrow x_n =& x_1 + \left(\frac{n^2 - n}{2}\right) \\ \Rightarrow x_n =& x_1 + \left(\frac{n \cdot (n-1)}{2}\right). \end{aligned}$$

Como $x_1 = 0$,

$$
\begin{aligned}
x_n =& x_1 + \left(\frac{n \cdot (n-1)}{2}\right) \\
\Rightarrow x_n =& 0 + \left(\frac{n \cdot (n-1)}{2}\right) \\
\Rightarrow x_n =& \frac{n \cdot (n-1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Teorema B.6. *Se a_n é uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}$.*

A demonstração do Teorema B.6 pode ser consultada em [28].

Exemplo B.7. [28] Resolva a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com $x_1 = 2$.

Do Exemplo B.2 tem-se que uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = 2x_n$ é

$$x_n = 2^{n-1} x_1.$$

Note que como esse x_n não é a recorrência geral que estamos procurando e sim solução de parte dela, podemos assumir qualquer valor para x_1, no caso escolheu-se $x_1 = 1$, assim

$$x_n = 2^{n-1} = a_n.$$

Utilizando o Teorema B.6, tem-se

$$
\begin{aligned}
x_n =& a_n y_n \\
\Rightarrow x_n =& 2^{n-1} y_n. \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}
$$

Tem-se também para $n+1$

$$x_{n+1} = 2^n y_{n+1}. \qquad \text{(B.2)}$$

Deste modo, substituindo as Equações (B.1) e (B.2) na recorrência do enunciado, e isolando y_{n+1} tem-se

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} =& 2x_n + 1 \\
\Rightarrow (2^n y_{n+1}) =& 2 \cdot (2^{n-1} y_n) + 1 \\
\Rightarrow y_{n+1} =& \frac{2^n y_n + 1}{2^n} \\
\Rightarrow y_{n+1} =& y_n + 2^{-n}. \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

Resolve-se então a recorrência da Equação (B.3), iniciando em $n = 1$

$$
\begin{aligned}
y_2 =& y_1 + 2^{-1} \\
y_3 =& y_2 + 2^{-2} \\
y_4 =& y_3 + 2^{-3} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
y_{n-1} =& y_{n-2} + 2^{-n+2} \\
y_n =& y_{n-1} + 2^{-n+1}.
\end{aligned}
$$

Somando na vertical,

$$\begin{aligned} y_2+&y_3+y_4+\cdots+y_{n-1}+y_n \\ &=y_1+2^{-1}+y_2+2^{-2}+y_3+2^{-3}+\cdots+y_{n-2}+2^{-n+2}+y_{n-1}+2^{-n+1}. \end{aligned}$$

Reescrevendo,

$$\begin{aligned} y_2+&y_3+y_4+\cdots+y_{n-1}+y_n \\ &=y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-2}+y_{n-1}+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\cdots+2^{-n+2}+2^{-n+1}. \end{aligned}$$

Reescrevendo novamente,

$$y_n = y_1 + \underbrace{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}\cdots+2^{-n+2}+2^{-n+1}}_{\text{Progressão geométrica de razão } 1/2}$$

Realizando a soma da progressão geométrica utilizando $S_n = a_1 \cdot \left(\dfrac{q^n-1}{q-1}\right)$, observe que $2^{-n+1} = (2^{-1})^{n-1}$,

$$\begin{aligned} y_n =& y_1 + 2^{-1}\cdot\left(\frac{(2^{-1})^{n-1}-1}{2^{-1}-1}\right) \\ \Rightarrow y_n =& y_1 + 2^{-1}\cdot\left(\frac{2^{-n+1}-1}{-2^{-1}}\right) \\ \Rightarrow y_n =& y_1 + \left(\frac{2^{-n}-2^{-1}}{-2^{-1}}\right) \\ \Rightarrow y_n =& y_1 - 2^{-n+1}+1. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Substitui-se então a solução encontrada na Equação (B.4) na Equação $x_n = a_n y_n$,

$$\begin{aligned} x_n =& a_n y_n \\ \Rightarrow x_n =& (2^{n-1})(y_1 - 2^{-n+1}+1) \end{aligned} \tag{B.5}$$

Sabe-se do enunciado que $x_1 = 2$, assim substituindo na Equação (B.5),

$$\begin{aligned} x_n =& (2^{n-1})(y_1 - 2^{-n+1}+1) \\ \Rightarrow x_1 =& (2^{1-1})(y_1 - 2^{-1+1}+1) \\ \Rightarrow 2 =& (2^0)(y_1 - 2^0+1) \\ \Rightarrow 2 =& (1)(y_1 - 1+1) \\ \Rightarrow y_1 =& 2. \end{aligned}$$

Deste modo, substituindo $y_1 = 2$ na solução da recorrência encontrada na Equação (B.5), tem-se

$$\begin{aligned} x_n =& (2^{n-1})(y_1 - 2^{-n+1}+1) \\ \Rightarrow x_n =& (2^{n-1})(2 - 2^{-n+1}+1) \\ \Rightarrow x_n =& (2^{n-1})(3 - 2^{-n+1}) \\ \Rightarrow x_n =& 3\cdot 2^{n-1} - 2^{n-1}\cdot 2^{-n+1} \\ \Rightarrow x_n =& 3\cdot 2^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

B.3 Recorrências lineares de segunda ordem

Teorema B.8. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Teorema B.9. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes arbitrárias.*

A demonstração dos Teorema B.8 e B.9 pode ser consultada em [28].

Exemplo B.10. Resolva a recorrência $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$.

Noque que a recorrência possui a equação característica $r^2 + 3r - 4 = 0$. As raízes desta equação são 1 e -4. Portanto, utilizando o Teorema B.8 todas as sequências da forma $a_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n$ são soluções da recorrência.

Exemplo B.11. Determinar o número de *Fibonacci* F_n definido por

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ com } F_1 = F_2 = 1.$$

A equação característica é $r^2 = r + 1$, ou seja, $r^2 - r - 1 = 0$ e possui as raízes

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Então pelo Teorema B.9 tem-se

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para calcular as constantes C_1 e C_2 pode-se utilizar $F_1 = F_2 = 1$, porém é mais conveniente utilizar $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, deste modo obtem-se o sistema,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema tem-se $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, assim

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Teorema B.12. *Se as raízes de $r^2 + pq + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então, $a_n = C_1 r_n + C_2 n r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} p x_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Teorema B.13. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $C_1 r^n + C_2 n r^n$, com C_1 e C_2 constantes arbitrárias.*

Teorema B.14. *Se a_n é solução da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação em $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.*

A demonstração dos Teoremas B.12, B.13 eB.14 pode m ser consultadas em [28].

Exemplo B.15. Resolva a recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$.

A recorrência possui equação característica $r^2 - 4r + 4 = 0$, e suas raízes são $r_1 = r_2 = 2$, assim, a solução da recorrência é $x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$.