



Um Universo Eterno no Contexto da Gravitação com Campo Escalar Conforme

21

Cláudio Manoel Gomes de Sousa

Dissertação de Mestrado
apresentada no
Instituto de Física Teórica da UNESP.

Orientador: Prof. Dr. Antônio José Accioly



São Paulo
setembro/92

Dedico este trabalho à minha esposa, Lucienne,
e ao nosso pequeno bebê, Lucas.
Também dedico-o aos meus pais, Manoel e Mary,
e à minha avó, Dolores †.

Agradecimentos

Ao Criador, que nos deu o Universo para ser desvendado.

Àqueles que por longos anos renunciaram a quase tudo para sempre me apoiar, meus pais, Manoel e Mary. Também sempre estiveram a me incentivar minha avó, Dolores Teotônia do Espírito Santo, a quem perdi enquanto estive aqui, e minha tia, Francisca da Silva. Ainda cabe ressaltar o apoio e conselhos dados pelos meus tios Germana Eustáquia e Antônio Efigênio, por Vânia e Renato Costa, e também por Flávio Henrique e Antônio Carlos.

À minha esposa, pela considerável quantidade de compreensão e carinho dispensados.

A Francisco Eugênio Mendonça da Silveira, meu primeiro amigo em São Paulo e a quem tenho hoje como a um irmão.

A Kwok Sau Fa e Fernando Kokubun, pelas longas conversas em torno da física e da vida.

A Miguel Russo, pela fortuita amizade e dinamismo transmitidos, a Jeferson Tomaselli, que tanto ajudou no editor de textos, a Eduardo Gregores e Hatsumi Mukai, todos grandes amigos da sala 1.

Ao companheiro de trabalho, Ubirajara Wichoski.

Aos amigos de Londrina, Felice Pisano, Jonas Sobrinho e Silvio Baez Escobar.

Aos demais amigos do IFT, entre eles, Fábio Braghin, Cláudia Barbosa, Franz Miller, Walter Miguel, Gustavo Adolfo Alvarez, Marco Antônio Ribeiro, Luiz Barreiro, J.N. Maki, Dimiter Hadjimichief, Orlando Peres, Leandro de Souza, Cláudio de Conti e Andreia, Clóvis Peres, Deise Agrello, Maria Caballero Tijero, Ricardo Canalonga, Joel Pupin, Osvaldo

Negrini, Clisthenis Constantinidis, Pablo Devechi, George Matsas, Jaime da Veiga, Mauro Donizetti, Antonio Amorim e Samuel Kurchat.

Ao orientador A. J. Accioly, pela amizade, apoio e compreensão nos momentos difíceis.

Ao prof. Gerhard Wilhelm Bund, quem primeiro me recebeu no IFT e que, juntamente com a profa Iracema, foram sustentáculo para nossa estada em São Paulo.

Aos demais professores do IFT, em especial a Ariovaldo F. Camargo F^o, Diógenes Galetti, e a José Geraldo Pereira e Ruben Aldrovandi pela pretensa futura orientação.

Não poderia deixar de agradecer ao Sr. Antonio Rubbi, eterno professor de etiqueta que, com seu diálogo agradável, trazia de volta a temperança.

Agradeço, também, aos demais funcionários do Instituto, em especial à Luzinete e à Rosane, pela paciência, ao Marcelo, ao Alexandre, grande amigo, e à Marina, que com sua alegria contagiava a todos; ao Susumo e ao Laércio, ao Francisco, ao Édison e à Maria José.

Ao IFT como um todo agradeço pelo 'aconchego' que oferece àqueles que o procuram.

Finalmente, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro.

Resumo

Usando a teoria dos sistemas dinâmicos, investigamos modelos homogêneos e isotrópicos no contexto da teoria de Einstein-Campo Escalar Conforme. Baseados nesta análise, encontramos que na classe dos modelos abertos existem modelos não-singulares. A solução analítica para esta particular topologia foi, então, determinada. Tal solução descreve um universo eterno e não-singular, que mostra-se estável com relação à adição de pequenas quantidades de matéria.

Abstract

Using dynamical system theory homogeneous and isotropic models in the framework of Einstein–Conformal Scalar Field theory are investigated. Based on this analysis, non-singular models are found that belong to the class of open models. An analytical solution for this particular topology is then exhibited. Such a solution describes a non-singular eternal universe, which is stable under small injection of matter.

Índice

Resumo	iii
Abstract	iv
Convenções	vii
Introdução	1
1 A Singularidade como Função do Processo que Descreve o Acoplamento	
Matéria-Gravitação	4
1.1 Cosmologia Singular	4
1.2 Cosmologia Não-Singular	7
1.3 Princípio de Equivalência Fraco versus Acoplamento Não-Mínimo	9
1.4 O Teorema de Bekenstein	11
2 Um Universo Eterno e Não-Singular	14
2.1 As Equações de Campo	14
2.2 Diagramas de Fase e a Esfera de Poincaré	16
2.2.1 Sistemas Dinâmicos e Linearização	17
2.2.2 Projeção Sobre a Esfera de Poincaré	29
2.2.3 Projeção Estereográfica	34
2.3 Análise Qualitativa das Soluções Cosmológicas	36
2.4 Solução Analítica para o Universo com Campo Escalar Conforme	39

2.5	O Campo Escalar Conforme como um Fluido Perfeito	43
3	Compatibilidade entre as Previsões da Teoria com Campo Escalar Conforme e as da Relatividade Geral	45
3.1	Solução Esfericamente Simétrica da Teoria Einstein–Campo Escalar Conforme	45
3.2	Os Parâmetros PPN	53
	Epílogo	55
	Apêndices	
A	Rudimentos de Cosmologia	57
A.1	Tensor de Projeção	57
A.2	Decomposição do Tensor de Energia–Momentum	58
A.3	A Equação de Raychaudhuri	59
B	O Formalismo de Tetradas	60
B.1	Formas Diferenciais, Produto exterior e Derivada Exterior	60
B.2	Tetradas	62
B.3	Cálculo com Formas Diferenciais em Variedades Riemannianas	63
C	A Geometria de Robertson–Walker	66
D	A Forma Conformemente Plana da Métrica de Robertson–Walker	71
E	A Métrica de Schwarzschild em Forma Isotrópica	74
F	Variedades Conformemente Relacionadas	77
G	Equações Acopladas de Einstein–Campo Escalar Conforme	80
	Referências	83

Convenções

Adotamos as convenções de Papapetrou [11] para a métrica (+ - - -) e as definições dos tensores de Riemann e de Ricci. As unidades são escolhidas de modo tal que $\hbar = c = 1$, e portanto $\frac{\kappa}{8\pi} = G = M_{Pl}^{-2}$ é a constante gravitacional Newtoniana.

Índices gregos variam de 0 a 3. Índices latinos variam de 1 a 3.

Derivada parcial:

$$\partial_\alpha \phi \equiv \phi_{,\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$$

Símbolo de Christoffel:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\beta\lambda,\gamma} + g_{\gamma\lambda,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda})$$

Tensor de Riemann:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha_{\sigma\delta} + \Gamma^\sigma_{\beta\delta} \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma}$$

Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\nu\alpha}$$

$$R = R^\alpha_{\alpha}$$

Derivada Covariante:

$$A^\beta_{;\alpha} \equiv \nabla_\alpha A^\beta = \partial_\alpha A^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\sigma} A^\sigma$$

$$A_{\alpha;\beta} \equiv \nabla_\alpha A_\beta = \partial_\alpha A_\beta - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} A_\sigma$$

Simetrização:

$$A_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})$$

Anti-simetrização:

$$A_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha})$$

Introdução

Este livro trata da teoria dos grupos, com ênfase na aplicação da teoria dos grupos de Lie à física. O autor apresenta uma abordagem clara e concisa dos conceitos fundamentais, incluindo a teoria dos grupos de Lie, a teoria dos grupos de simetria e a teoria dos grupos de gauge. O livro é adequado para estudantes de graduação e pós-graduação em física teórica.

O conteúdo do livro é dividido em capítulos que abordam os seguintes tópicos:

- 1. Grupos e álgebras de Lie
- 2. Grupos de simetria
- 3. Grupos de gauge
- 4. Aplicações da teoria dos grupos de Lie à física

O livro contém numerosos exemplos e problemas para serem resolvidos pelo leitor. Além disso, há uma bibliografia extensa no final do livro.

Introdução

A concepção de uma origem singular explosiva para o Universo (*Big Bang*), tal como preconizada pelo modelo padrão, tem sido alvo de grandes debates no seio da comunidade científica. Para muitos esta idéia é filosoficamente desagradável, pois a presença da singularidade inicial demarcaria uma fronteira irremediavelmente intransponível para a aplicação de quaisquer das leis físicas que supomos válidas em nosso mundo; um limite fatal no qual cessaria toda a possibilidade de conhecimento. A própria criação da matéria a partir da singularidade inicial violaria o princípio de conservação da energia — que no entanto, deveria entrar em vigor instantaneamente após o momento da criação.

Uma das maneiras de contornar esta dificuldade é a adoção de formas de acoplamentos mais complexos para representar a interação entre a gravitação e outros campos existentes na natureza. De fato, tem sido demonstrado em anos recentes [1] que a utilização de acoplamentos “não-mínimos” acarreta profundas modificações na descrição habitual das propriedades da matéria e do campo gravitacional, que levam a toda uma série de conseqüências cosmológicas como a geração de gravitação repulsiva, a violação das condições de energia ¹ e por conseguinte a obtenção de “Universos Eternos”, não-singulares.

As conseqüências do uso do acoplamento não-mínimo entre a gravitação e o campo escalar conforme em temas cosmológicos, constituem o escopo das investigações desenvolvidas nesta tese.

¹As chamadas condições de energia constituem restrições genéricas impostas *ad hoc* com o objetivo de assegurar comportamentos “razoáveis” para a matéria, garantindo, por exemplo, sua estabilidade física, ou a atratividade dos efeitos gravitacionais por ela gerados. Esses condicionamentos exteriores ao comportamento da matéria são usualmente expressos através de desigualdades matemáticas a que devem estar submetidas à gravitação e às grandezas constituintes do fluido material [2].

No Capítulo 1 apresentamos os rudimentos da teoria tensorial–escalar (Einstein–Campo Escalar Conforme) que descreve o acoplamento não–mínimo entre a gravitação e o campo escalar conforme, e mostramos que a lagrangeana da mesma é uma lagrangeana Pseudamente Acoplada Não–Minimamente à gravitação [3]. Em seguida fornecemos uma demonstração trivial [4] de um teorema originalmente formulado por Bekenstein [5], onde é apresentado um algoritmo para a obtenção de soluções das equações de Einstein–Campo Escalar Conforme via as soluções das equações de Einstein–Campo Escalar Ordinário.

No Capítulo 2 consideramos universos do tipo Friedmann–Robertson–Walker, tendo como fonte o campo escalar conforme. Na forma isotrópica, o elemento de linha de FRW é dado por:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - d\Omega_3^2 \right]$$

onde $a(\eta)$ é o fator de escala cósmico e $d\Omega_3^2$ é a métrica do R^3 , S^3 ou H^3 , conforme a constante de curvatura $\varepsilon = 0, +1, -1$, respectivamente. Estudamos o comportamento global destes modelos no espaço de fase do sistema dinâmico obtido das correspondentes equações de campo, e desta análise qualitativa concluímos que na classe dos universos abertos ($\varepsilon = -1$) existem modelos não–singulares. De posse desta informação, partimos para a determinação analítica das soluções das equações de campo relativas à citada topologia, obtendo então um modelo cosmológico livre de singularidade inicial, assintoticamente plano, cuja evolução consiste de um período infinito de contração, terminando num ponto de curvatura máxima (onde os invariantes geométricos não divergem), seguido por outro período infinito, agora de expansão [6].

Em seqüência apresentamos uma interpretação tipo fluido perfeito para o campo escalar conforme, fonte do modelo, e mostramos que este modelo é estável com relação à adição de pequenas quantidades de matéria.

O Capítulo 3 é devotado ao cálculo dos parâmetros PPN da teoria [7]. Os valores encontrados concordam bastante bem com os da Relatividade Geral.

Terminamos este trabalho apresentando no Epílogo uma apreciação crítica sobre os resultados anteriormente obtidos, bem como uma discussão a respeito dos problemas observacionais e conceituais da teoria. Incluímos também um esboço concernente a futuras aplicações.

Capítulo 1

A Singularidade como Função do Processo que Descreve o Acoplamento Matéria–Gravitação

1.1 Cosmologia Singular

A idéia de que o Universo é uma totalidade representada por uma variedade pseudo-Riemanniana quadri-dimensional caracterizada pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, leva, de modo natural, a uma questão essencial: qual seria a métrica mais adequada para representar o Universo observável? Para respondermos à esta indagação, precisamos, antes de mais nada, conhecer os dados observacionais disponíveis sobre o assunto. De acordo com a Cosmologia observacional, o Universo em que vivemos apresenta, a grosso modo, as seguintes características:

- (i) é espacialmente homogêneo;
- (ii) é isotrópico;
- (iii) passou por uma fase quente e densa;
- (iv) encontra-se em expansão.

Será que existe algum modelo cosmológico que, em linhas gerais, se enquadre no esquema acima? A resposta é afirmativa: o modelo de Robertson–Walker.

A geometria deste modelo, num sistema de coordenadas $(t, \psi, \theta, \varphi)$, é especificada pelo elemento de linha (cf. apêndice C):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\psi^2 + \sigma^2(\psi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \quad (1.1)$$

onde $a(t)$ é uma função a ser determinada e $\sigma(\psi)$ fornece a curvatura da seção espacial $t = \text{cte}$:

$$\sigma(\psi) = \psi \rightarrow \text{seção espacial euclidiana } (\varepsilon = 0);$$

$$\sigma(\psi) = \sin \psi \rightarrow \text{seção espacial fechada } (\varepsilon = 1);$$

$$\sigma(\psi) = \sinh \psi \rightarrow \text{seção espacial aberta } (\varepsilon = -1).$$

No modelo de Robertson–Walker o conteúdo material do universo é um fluido perfeito, o que implica em um tensor de energia–momentum da forma (cf. apêndice A):

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

Um cálculo imediato mostra que para um observador que se move conjuntamente com o fluido — ou seja, tal que $V^\mu = \delta^\mu_0$ — $\sigma_{\mu\nu} \equiv 0 \equiv \omega_{\mu\nu}$ e $a_\mu \equiv 0$. Isto significa que a métrica (1.1) descreve, de fato, um modelo isotrópico e sem rotação. Por outro lado, o escalar de expansão $\Theta = 3\dot{a}/a$, o que indica um modelo expansivo.

As equações de Einstein (com $\Lambda = 0$) para a métrica (1.1) reduzem-se ao sistema (cf. apêndice C):

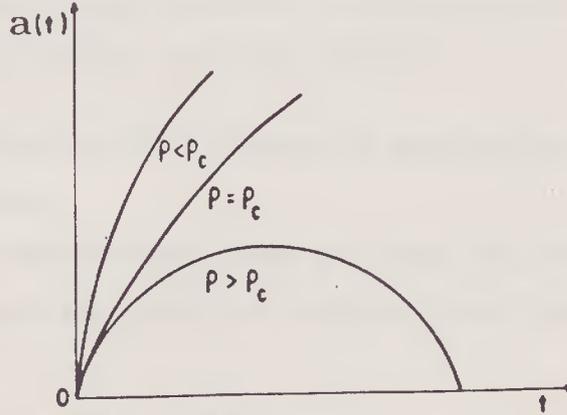
$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3\varepsilon}{a^2} = \kappa\rho \quad (1.3)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{a^2} = -\kappa p \quad (1.4)$$

Se definirmos uma densidade crítica $\rho_c = \frac{3}{\kappa} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2$, a equação (1.3) nos fornece o resultado:

$$\varepsilon = \frac{a^2(t)\kappa(\rho - \rho_c)}{3} \quad (1.5)$$

Portanto, é o sinal de $(\rho - \rho_c)$ que determina a curvatura espacial do modelo de Robertson-Walker.



No diagrama acima representamos o comportamento de $a(t)$ para $\rho < \rho_c$, $\rho = \rho_c$ e $\rho > \rho_c$.¹

A densidade de massa presente nas galáxias ($\sim 10^{-31} \text{g/cm}^3$) é bastante inferior ao valor estimado atualmente para a densidade crítica $\rho_c (\sim 10^{-29} \text{g/cm}^3)$ [9]. O que, no entanto, não nos permite concluir que vivemos em um universo aberto ($\varepsilon = -1$), já que nessas estimativas não foi levada em conta a contribuição da “matéria escura”, não detectável.

A equação de Raychaudhuri aplicada à métrica de Robertson-Walker nos dá (cf. apêndice A):

$$\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3} = -\frac{\kappa}{2}(\rho + 3p), \quad (1.6)$$

ou, equivalentemente:

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{2}(\rho + 3p). \quad (1.7)$$

No caso de um fluido perfeito, $\rho + 3p \geq 0$, implicando que $a(t)$ vai a zero em um tempo finito, com a densidade tornando-se infinita (vide eq. 1.7), o que nos leva a concluir que a

¹A solução do sistema formado pelas equações (1.3) e (1.4) pode ser encontrada em Kramer *et al*[8].

singularidade cosmológica é inevitável em um universo de Robertson–Walker. Este resultado pode ser generalizado para geometrias mais complexas, através do seguinte teorema [2]:

Teorema 1.1 ² *O espaço-tempo desenvolve, necessariamente, uma singularidade desde que $T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq T/2$ para qualquer vetor tipo-tempo V^μ .*

Este teorema parece indicar que a presença da singularidade é inevitável no contexto da cosmologia convencional.

Vamos mostrar que esta dificuldade pode, no entanto, ser evitada se adotarmos formas de acoplamento mais gerais para descrever a interação entre a gravitação e a matéria.

1.2 Cosmologia Não–Singular

O primeiro passo a caminho da descrição da interação matéria–gravitação é tentar responder à questão: como a gravitação modifica a equação de movimento da matéria?

À primeira vista a resposta à esta indagação parece ser trivial se, como é de praxe, apelarmos para o assim chamado princípio do acoplamento mínimo.

Consideremos, para exemplificar, o caso de um campo escalar real $\phi(x)$. Na ausência da gravitação sua dinâmica é dada pela ação:

$$S_0 = \int d^4x \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (1.8)$$

De acordo com o princípio do acoplamento mínimo, a interação gravitação–campo escalar é feita efetuando-se a substituição $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ e $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ na densidade de lagrangeana que descreve a dinâmica do campo ϕ na teoria da relatividade especial.

Utilizando este princípio mínimo, obtemos a forma de S modificada:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (1.9)$$

²Estamos admitindo que sejam válidas as equações de Einstein com $\Lambda \leq 0$.

Esta ação, por sua vez, não é conformemente invariante (cf. apêndice F). Podemos, porém, acoplar ϕ diretamente com a gravitação de modo a torná-la conformemente invariante (cf. apêndice G):

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{R}{6} \phi^2 \right). \quad (1.10)$$

A ação S total que descreve a dinâmica do campo ϕ e do campo gravitacional, passa, então, a ser:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{\kappa} + \left(\phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - \frac{R}{6} \phi^2 \right) \right]. \quad (1.11)$$

Note que o termo $R\phi^2$ na eq.(1.11) é o único termo local possível envolvendo um acoplamento adimensional entre o campo escalar e a curvatura [10].

As equações de movimento que decorrem de (1.11) se escrevem (cf. apêndice G):

$$\square \phi + \frac{R}{6} \phi = 0 \quad (1.12)$$

$$G_{\mu\nu} \left(1 - \frac{\kappa \phi^2}{6} \right) = -\kappa \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} + \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{1}{6} (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \phi^2 \right] \quad (1.13)$$

A equação (1.13) pode ser colocada na forma einsteiniana:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (1.14)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momentum modificado, o qual contém os termos provenientes do acoplamento conforme. Segue-se daí que a positividade da energia (convenionalmente associada à condição $R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \leq 0$) não pode mais ser identificada com $T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq T/2$. Em outras palavras, o sinal de $R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$ passa a ser uma função do modelo adotado para a geometria.

Um tal resultado, aqui apresentado no contexto de um modelo bastante particular, pode ser facilmente generalizado. Logo, podemos concluir que a existência ou não de singularidade vai depender da maneira como se processa o acoplamento matéria-gravitação.

1.3 Princípio de Equivalência Fraco versus Acoplamento Não-Mínimo

É crença generalizada que o acoplamento gravitacional não-mínimo viola o princípio de equivalência fraco. Esta idéia é na realidade falaz. Accioly e Wichoski [3] mostraram que todas as teorias envolvendo campos escalares reais ou campos eletromagnéticos não-minimamente acoplados à gravitação einsteiniana em quatro dimensões, são teorias “pseudamente acopladas não-minimamente à gravitação”—elas não violam o princípio de equivalência fraco e permitem que o acoplamento não-mínimo seja totalmente eliminado das equações de movimento associadas aos campos de matéria.

Vamos mostrar que isto é de fato verdade no caso da teoria de Einstein-Campo Escalar Conforme apresentada na seção anterior.

Seja a ação:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{\kappa} + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - \frac{R}{6} \phi^2 \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m \quad (1.15)$$

onde \mathcal{L}_m é a densidade de lagrangeana da matéria.

As equações de campo relativas a (1.15) são:

$$G^{\mu\nu} \left(1 - \frac{\kappa \phi^2}{6} \right) = -\kappa [T^{\mu\nu} + t_{(\phi)}^{\mu\nu}] \quad (1.16)$$

$$t_{(\phi)}^{\mu\nu} = \left[\phi^{,\mu} \phi^{,\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} + \frac{1}{6} (g^{\mu\nu} \square - \nabla^\mu \nabla^\nu) \phi^2 \right] \quad (1.17)$$

$$\square \phi + \frac{R}{6} \phi = 0 \quad (1.18)$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momentum da matéria ³ ($\delta \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m = \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$).

Para que o princípio de equivalência fraco não seja violado é preciso que $\nabla_\nu T^{\mu\nu} \equiv 0$ [11]. Na relatividade geral, este resultado é uma consequência da identidade de Bianchi. No nosso caso, esta identidade nos fornece a equação:

³Matéria significa, aqui, tudo exceto o campo gravitacional e o campo escalar

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = \frac{1}{3} \phi \phi_{,\nu} G^{\mu\nu} - \nabla_{\nu} t^{\mu\nu} \quad (1.19)$$

Levando em conta que $[\nabla_{\nu}, \nabla_{\mu}] A^{\nu} = -R_{\nu\mu} A^{\nu}$, obtemos:

$$\nabla_{\nu} t^{\mu\nu}_{(\phi)} = -\frac{R}{6} \phi \phi^{,\mu} + \frac{1}{3} R^{\mu\nu} \phi \phi_{,\nu} \quad (1.20)$$

Substituindo (1.20) em (1.19), chegaremos ao resultado desejado:

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} \equiv 0.$$

Vamos mostrar em seqüência, que a equação de movimento para ϕ não contém nenhum acoplamento direto entre a gravitação (R) e o campo escalar (ϕ). Para tanto, tomemos o traço de (1.16). Lembrando que $Tr(G^{\mu}_{\nu}) = -R$, vem:

$$\kappa T = R \quad (1.21)$$

Levando (1.21)) em (1.18), obtemos o resultado desejado:

$$\square \phi + \frac{\kappa T}{6} \phi = 0 \quad (1.22)$$

Consideremos, agora, a situação em que $T_{\mu\nu} \equiv 0$, ou seja, a gravitação é gerada pelo campo escalar. De (1.21) segue-se imediatamente que:

$$R = 0 \quad (1.23)$$

Utilizando este vínculo, podemos simplificar bastante as equações de campo da teoria. Fazendo $S = \sqrt{\frac{\kappa}{6}} \phi$ e levando em conta que:

$$\square S^2 = 2S^{,\alpha} S_{,\alpha}$$

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} S^2 = 2(S_{,\mu} S_{,\nu} + S \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} S)$$

obtemos as equações de campo numa forma que facilita enormemente os cálculos operacionais:

$$R_{\mu\nu}f(S) = S^{,\alpha}S_{,\alpha}g_{\mu\nu} - 4S_{,\mu}S_{,\nu} + 2S\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}S \quad (1.24)$$

$$\square S = 0 \quad (1.25)$$

$$R = 0 \quad (1.26)$$

onde:

$$f(S) = 1 - S^2, \quad S = \sqrt{\frac{\kappa}{6}}\phi \quad (1.27)$$

1.4 O Teorema de Bekenstein

A não-linearidade das equações de Einstein torna o processo de determinação de soluções analíticas dessas equações extremamente difícil. No caso de teorias contendo acoplamentos não-mínimos o processo é ainda mais complicado. Reconhecendo este fato, Bekenstein [5] construiu um algoritmo que permite determinar as soluções das equações de Einstein-Campo Escalar Conforme a partir das soluções das equações de Einstein-Campo Escalar Ordinário. Vamos apresentar aqui este resultado [4], utilizando um caminho bem mais simples – e portanto envolvendo uma quantidade menor de cálculos algébricos – que aquele originalmente utilizado por Bekenstein.

Seja a ação correspondente à teoria de Einstein-Campo Escalar Ordinário:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{\kappa} + \phi_{,\mu}\phi^{,\mu} \right\} \quad (1.28)$$

Seja, agora, a ação que fornece a dinâmica da teoria de Einstein-Campo Escalar Conforme:

$$S_c = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{\kappa} \left(1 - \frac{\kappa\phi^2}{6} \right) + \phi_{,\mu}\phi^{,\mu} \right] \quad (1.29)$$

A fim de transformar (1.29) em uma ação minimamente acoplada, vamos submetê-la à transformação conforme:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^{2F} g_{\mu\nu} \quad (1.30)$$

onde:

$$e^{2F} = \left(1 - \frac{\kappa\phi^2}{6}\right), \quad \frac{\kappa\phi^2}{6} < 1 \quad (1.31)$$

Utilizando os resultados do apêndice F, podemos escrever:

$$S_c \longrightarrow S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{\bar{R}}{\kappa} + \frac{6e^{-2F} F_{,\alpha} F^{,\alpha}}{\kappa} + e^{-4F} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} \right\} \quad (1.32)$$

Derivando (1.31), obtemos:

$$e^{2F} F_{,\alpha} = -\frac{\kappa\phi\phi_{,\alpha}}{6}. \quad (1.33)$$

Levando (1.33) em (1.32), resulta:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{\kappa} + e^{-6F} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} \right]. \quad (1.34)$$

Porém:

$$\phi_{,\mu} \phi^{,\mu} = g^{\mu\nu} \phi_{,\nu} \phi_{,\mu} = e^{2F} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\phi}_{,\nu} \bar{\phi}_{,\mu} = e^{2F} \bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}^{,\mu}.$$

Logo:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{\kappa} + \left(1 - \frac{\kappa\phi^2}{6}\right)^{-2} \bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}^{,\mu} \right]. \quad (1.35)$$

Se redefinirmos o campo escalar por meio da transformação:

$$\phi = \sqrt{\frac{6}{\kappa}} \tanh \left(\sqrt{\frac{\kappa}{6}} \varphi \right) \quad (1.36)$$

a ação (1.35) assume a forma correspondente à da ação para o campo escalar ordinário:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{\kappa} + \bar{\varphi}_{,\mu} \bar{\varphi}^{,\mu} \right] \quad (1.37)$$

onde:

$$\bar{\varphi}_{,\mu}\bar{\varphi}^{,\mu} = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\varphi}_{,\nu}\bar{\varphi}_{,\mu} = e^{-2F}g^{\mu\nu}\varphi_{,\nu}\varphi_{,\mu} = e^{-2F}\varphi_{,\mu}\varphi^{,\mu}. \quad (1.38)$$

Em resumo, podemos afirmar:

Teorema 1.2 *Se $(g_{\mu\nu}, \phi)$ é uma solução das equações de Einstein-Campo Escalar Ordinário, então:*

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \cosh^2\left(\sqrt{\frac{\kappa}{6}}\phi\right)g_{\mu\nu}, \quad \bar{\phi} = \sqrt{\frac{6}{\kappa}}\tanh\left(\sqrt{\frac{\kappa}{6}}\phi\right)$$

é a solução correspondente das equações de Einstein-Campo Escalar Conforme.

Capítulo 2

Um Universo Eterno e Não-Singular

2.1 As Equações de Campo

No capítulo anterior mostramos que a singularidade cosmológica é uma função do modo como se dá o acoplamento entre a matéria e a gravitação. Baseados nesta premissa, vamos tentar encontrar soluções cosmológicas homogêneas e isotrópicas — não-singulares — geradas pelo acoplamento de um campo escalar conforme com a gravitação. A densidade de lagrangeana que descreve a dinâmica desta teoria, bem como as correspondentes equações de campo, são dadas, respectivamente, por:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{R}{\kappa} + \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - \frac{R}{6} \phi^2 \right] \quad (2.1)$$

$$R^\mu{}_\nu f(S) = \delta^\mu{}_\nu S_{,\alpha} S^{,\alpha} - 4S^{,\mu} S_{,\nu} + 2S \nabla^\mu \nabla_\nu S \quad (2.2)$$

$$\square S = 0 \quad (2.3)$$

$$R = 0 \quad (2.4)$$

onde $S = \sqrt{\frac{\kappa}{6}} \phi$ e $f(S) = 1 - S^2$.

Vamos trabalhar com a forma conformemente plana da métrica de Robertson-Walker (D.1) e admitir que $S = S(\eta)$, *i.e.*, o campo escalar depende somente do tempo conforme η . Desta feita, (2.3) gera a seguinte igualdade:

$$(a^2 \dot{S})' = 0$$

onde o “ponto” significa derivada total com relação a η . Esta relação pode ser escrita como duas equações equivalentes:

$$\dot{S} = \frac{Q}{a^2} \tag{2.5}$$

$$\ddot{S} + \frac{2\dot{a}\dot{S}}{a} = 0$$

onde Q é uma constante.

Passemos agora à determinação das componentes da eq.(2.2).

$$\begin{aligned} R^0_0 f &= S_{,\alpha} S^{,\alpha} - 4S^{,0} S_{,0} + 2S \nabla^0 \nabla_0 S \\ &= g^{0\alpha} S_{,\alpha} S_{,0} - 4g^{00} S_{,0} S_{,0} + 2S g^{00} \nabla_0 S_{,0} \end{aligned}$$

onde devemos usar $S_{,\alpha} \equiv 0$ para $\alpha \neq 0$.

Mas:

$$\nabla_0 S_{,0} = \ddot{S} - \Gamma^0_{00} S_{,0}$$

Como $\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{a}}{a}$, obteremos:

$$R^0_0 f = -\frac{3\dot{S}^2}{a^2} + \frac{3f\dot{a}}{a^3}$$

onde usamos (2.5).

Para $R^1_1 f$, teremos:

$$\begin{aligned} R^1_1 f &= g^{\alpha\beta} S_{,\alpha} S_{,\beta} + 2S g^{1\alpha} \nabla_\alpha \nabla_1 S \\ &= \frac{\dot{S}^2}{a^2} - \frac{f\dot{a}}{a^3} \end{aligned}$$

pois, $\Gamma_{11}^0 = -\frac{\dot{a}}{a}$.

Como sabemos, R^2_2 e R^3_3 se identificam com R^1_1 , e a expressão acima é a mesma para $R^2_2 f$ e $R^3_3 f$. Logo, as equações para os campos com a métrica de Robertson-Walker (D.1) são:

$$R^0_0 f = -\frac{3\dot{S}^2}{a^2} + \frac{3f\dot{a}}{a^3} \quad (2.6)$$

$$R^1_1 f = R^2_2 f = R^3_3 f = \frac{\dot{S}^2}{a^2} - \frac{f\dot{a}}{a^3} \quad (2.7)$$

$$R = 0 \quad (2.8)$$

Utilizando (D.8), podemos escrever:

$$f \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = -\dot{S}^2 + \frac{f\dot{a}}{a} \quad (2.9)$$

$$f \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\varepsilon \right) = \dot{S}^2 - \frac{f\dot{a}}{a} \quad (2.10)$$

$$\ddot{a} + \varepsilon a = 0 \quad (2.11)$$

Note que estas equações não são independentes: a soma das duas primeiras resulta na última equação.

A seqüência natural seria agora partirmos para a determinação da solução analítica desse sistema de equações. Em vez disso, vamos estudar primeiro o comportamento global das soluções, utilizando a teoria dos sistemas dinâmicos. Para tanto, apresentaremos na seção seguinte, um breve resumo a respeito das técnicas de obtenção de diagramas de fase e compactificação dos infinitos, e que serão utilizadas na seção 2.3.

2.2 Diagramas de Fase e a Esfera de Poincaré

Nesta seção veremos de forma breve a teoria geral de Sistemas Dinâmicos. Este método facilita enormemente a interpretação física de muitos sistemas de equações diferenciais de segunda ordem.

Apresenta-se, também, uma tabela de soluções padrão no caso de sistemas dinâmicos linearizados.

Deste ponto, segue-se o estudo de projeções sobre a Esfera de Poincaré, que permite a visualização do comportamento do sistema 'no infinito'.

2.2.1 Sistemas Dinâmicos e Linearização

Antes de estudar a Esfera de Poincaré devemos passar pelo desenvolvimento dos chamados Sistemas Dinâmicos de ordem 2, que é o estudo das equações diferenciais ordinárias que podem ser expressas na forma:

$$\frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)) \tag{2.12}$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t))$$

Dizemos que o Sistema Dinâmico acima é não-autônomo se o tempo aparece explicitamente na eq.(2.12) e autônomo em caso contrário.

A integração do sistema (2.12) é feita pelos métodos usuais de equações diferenciais ordinárias. Na prática, esta integração é, muitas vezes, bastante complicada. Neste caso, como $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{dx}{dy}$, em geral, o sistema pode ser tratado resolvendo-se:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{2.13}$$

Sua solução pode ser escrita como uma equação do tipo $F(x, y) = 0$ e representada graficamente em um Diagrama de Fase.

A apresentação do sistema dinâmico em forma de diagramas de fase, *i. e.*, em um gráfico $y(t) \times x(t)$ obtido de $F(x, y) = 0$, é, na maioria dos casos, mais simples do que encontrar a solução integral, que seria determinar $x(t)$ e $y(t)$ a partir das equações diferenciais (2.12).

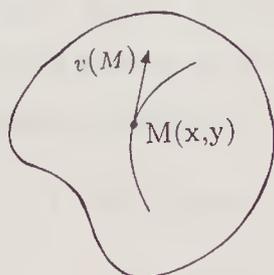
Dado um sistema dinâmico, podemos representar graficamente a solução obtida, seja ela integral ou dada através de diagramas de fase. No caso de fazermos uma representação gráfica das soluções integrais, o lugar geométrico ocupado pelas curvas $x(t)$ e $y(t)$ são as Curvas Integrais. E no caso de representarmos graficamente $F(x, y) = 0$ em um diagrama

de fase, onde o tempo não é um dos eixos, o lugar geométrico ocupado pelas curvas é a Trajetória (ou Órbita).

As representações em diagramas de fase são preferíveis sob o ponto de vista físico já que fornecem uma especificação completa do sistema dinâmico ¹ e também possibilitam uma análise imediata dos pontos de equilíbrio do sistema.

Dado um diagrama de fase, chamamos Ponto de Equilíbrio (ou Ponto Fixo) da Variedade todo ponto que é por si só uma órbita.

Na confecção dos diagramas de fase, em cada ponto $M(x, y)$ do lugar geométrico definido pelas curvas, podemos considerar um vetor v de componentes $P(x, y)$ e $Q(x, y)$. Logo, o Sistema Dinâmico define um espaço vetorial.



Pode-se mostrar que, se $M(x, y)$ é ponto fixo (cf. Arnold [13]), então temos que $v(M(x, y)) = 0$. Os pontos onde:

$$P(x, y) = 0$$

$$Q(x, y) = 0$$

definem pontos onde o comprimento do vetor é nulo. Sua direção fica indeterminada e o teorema da unicidade falha. Estes pontos singulares do campo vetorial são os Pontos de Equilíbrio do sistema dinâmico.

¹Na Mecânica Clássica o espaço de fase é definido pelas coordenadas (q, p) , e o sistema mecânico tem sua dinâmica completamente determinada. Note que, assim como na Mecânica Clássica existe uma relação diferencial entre q e p , pode-se, no caso das equações diferenciais, reduzir-se a ordem das equações impondo-se relações entre as variáveis que geram o sistema dinâmico [12].

A análise da estabilidade destes pontos de equilíbrio determina se estes são pontos de equilíbrio estável ou instável. Esta informação pode ser obtida observando-se o campo vetorial em torno do ponto de equilíbrio, já que em torno de um tal ponto o campo vetorial está sempre saindo, entrando ou circulando (como veremos no caso dos centros). Assim, se o campo está sempre 'entrando' ou circulando em torno de um ponto de equilíbrio ele é um ponto estável, e será instável em caso contrário.

Esta análise pode ser bastante simplificada mediante a utilização do método da linearização, que veremos em seguida. Se um sistema pode ser linearizado, pode-se tabelar as soluções e seus pontos de equilíbrio podem ser classificados.

Linearização

A tarefa de encontrar a solução exata para um sistema dinâmico é muitas vezes difícil. Deparando-se com um problema deste tipo, a primeira sugestão que pode advir é a de aproximar o sistema. Isto se concretiza através do método de linearização.

A idéia é simples. Dado um sistema dinâmico:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned} \tag{2.14}$$

encontramos os pontos de equilíbrio através de:

$$P(x, y) = 0$$

$$Q(x, y) = 0$$

Expandindo os polinômios P e Q em série de Taylor em torno destes pontos de equilíbrio, podemos escrever (2.14) na forma linear homogênea (desprezando-se $O(r^2)$, $r^2 = x^2 + y^2$):

$$\dot{x} = ax + by \quad \dot{y} = cx + dy \tag{2.15}$$

Note que a expansão (2.15) é em torno da origem $(0, 0)$, e identifica-se $a = P_x(0, 0)$, $b = P_y(0, 0)$, $c = Q_x(0, 0)$ e $d = Q_y(0, 0)$. Uma expansão em torno de um ponto qualquer

(x_0, y_0) implicaria em termos:

$$\dot{x} = P_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + P_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad (2.16)$$

$$\dot{y} = Q_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + Q_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

A matriz dos coeficientes do sistema (2.15) é dada por:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

É o sistema (2.16) que deve ser analisado quando estivermos fora da origem em lugar de (2.15). Entretanto, se redefinirmos a origem, podemos estudar o sistema como se aquele ponto de equilíbrio fosse a origem, e analisar a topologia das equações na forma (2.15).

Se o sistema é escrito na forma linear homogênea, as características topológicas e de estabilidade de um ponto de equilíbrio podem ser determinadas se admitimos para um sistema na forma (2.15), soluções do tipo:

$$x = Ae^{\lambda_1 t} \quad y = Be^{\lambda_2 t}$$

onde λ_1 e λ_2 representam os autovalores da matriz M , obtidos da equação secular:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (2.18)$$

Quando o determinante da matriz M não é nulo, o ponto de equilíbrio é dito isolado. Considerando-se a eq.(2.18), podemos agora classificar os tipos possíveis de diagramas [14].

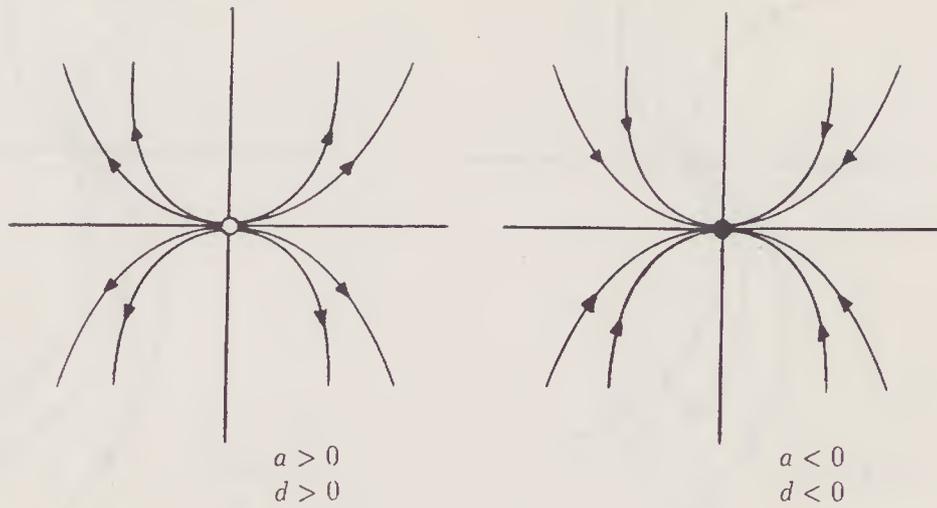


Figura 2.1: Nós Tangentes Duplos instável e estável.

(i) Nó tangente duplo

Considere o sistema (2.15) na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax \\ &\quad \text{(com } ad > 0) \\ \dot{y} &= dy \end{aligned}$$

As soluções são do tipo :

$$x = Ae^{at} \quad , \quad y = Be^{dt}$$

onde A e B são constantes arbitrárias. Os gráficos possíveis são do tipo da fig.2.1, onde a bola aberta significa que o ponto é instável, e fechada estável.

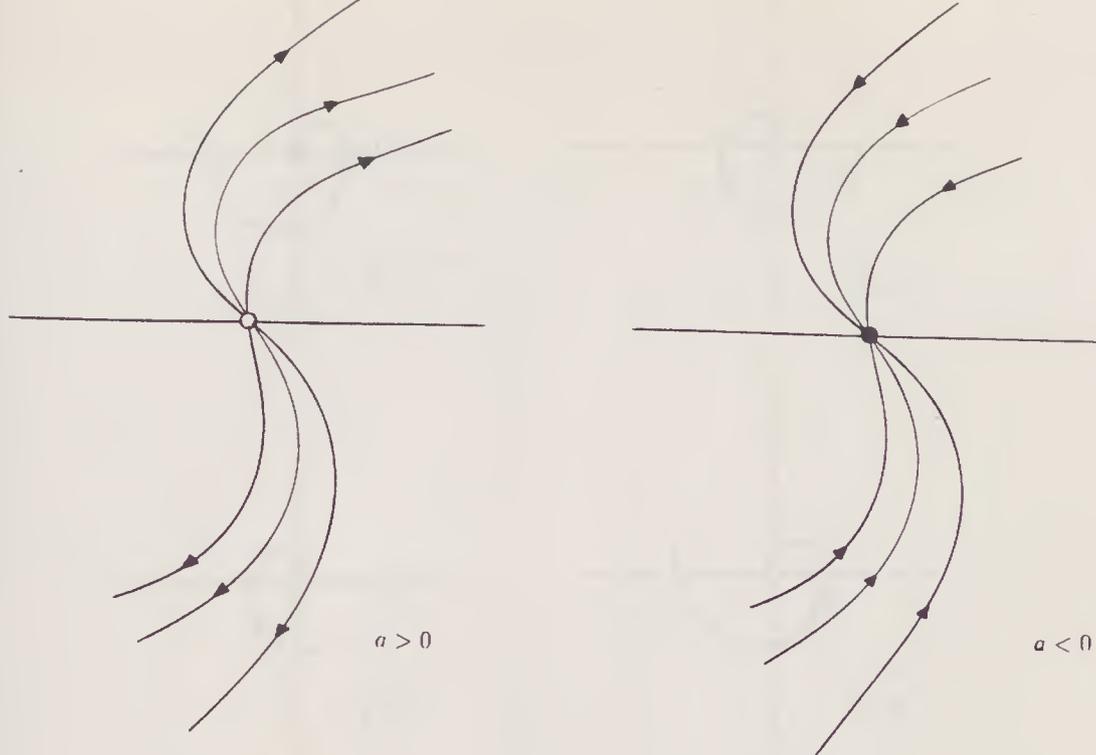


Figura 2.2: Nós Tangentes instável e estável.

(ii) Nó Tangente (Simples):

$$\dot{x} = ax + ay$$

$$\dot{y} = ay$$

As soluções são:

$$x = Ae^{at} + aBte^{at} \quad , \quad y = Be^{at}$$

e os gráficos estão na fig.2.2.

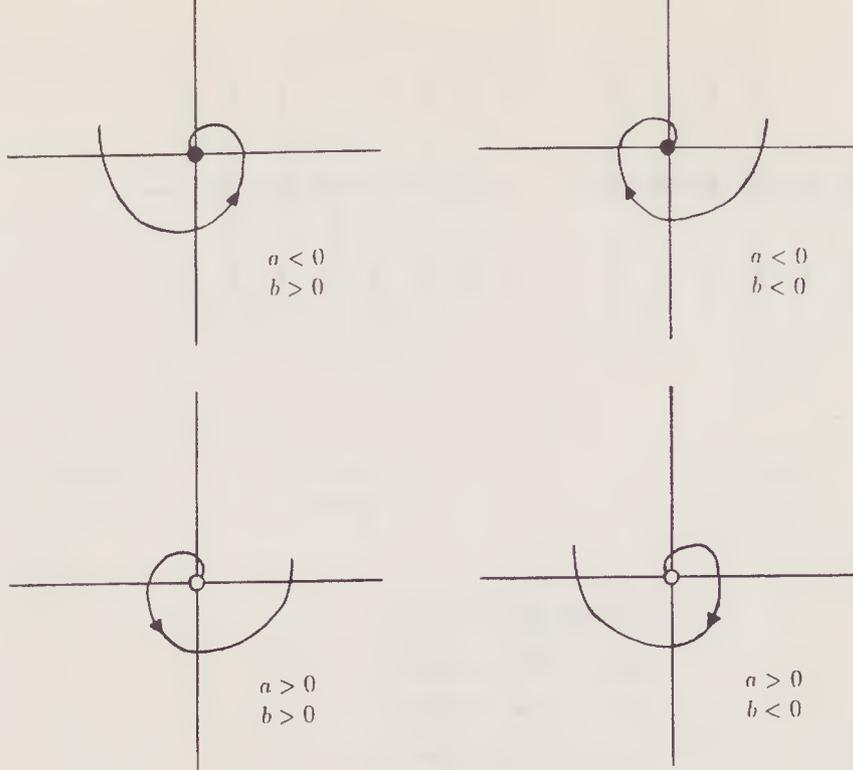


Figura 2.3: Espirais estáveis (acima) e instáveis (abaixo).

(iii) Espiral (Foco):

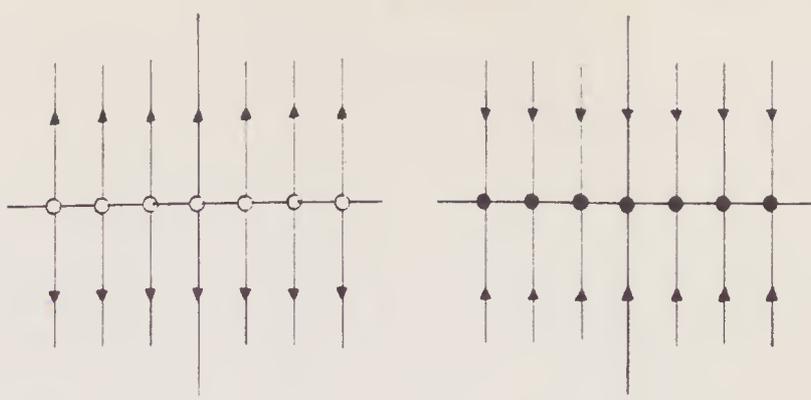
$$\dot{x} = ax - by$$

$$\dot{y} = bx + ay$$

as soluções são:

$$x = e^{at} \cos bt \quad , \quad y = e^{at} \sin bt$$

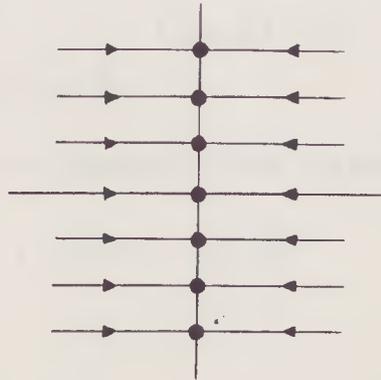
Isto dá a equação de uma espiral logarítmica em torno da origem. As quatro possibilidades mais gerais são mostradas na fig.2.3.



$$a > 0$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= ay \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= -ay \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

Figura 2.4: Alguns tipos de Nós Degenerados.

(iv) Nó degenerado:

Este é um caso em que o ponto de equilíbrio não é uma singularidade isolada, pois temos $\det(M) = 0$. Alguns casos estão na fig.2.4.

(v) Ponto de Sela:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax \\ &\quad (\text{com } ad < 0) \\ \dot{y} &= dy\end{aligned}$$

onde $ad < 0$, em contraste com o nó tangente duplo. As soluções são do tipo:

$$x = Ae^{at}, \quad y = Be^{dt}$$

Também podemos ter:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= bx \\ &\quad (\text{com } bc > 0) \\ \dot{y} &= cy\end{aligned}$$

Os gráficos possíveis são da forma apresentada na fig.2.5.

Note que os pontos de sela são sempre instáveis.

A identificação da direção das trajetórias sobre as curvas pode ser feita através das soluções obtidas, ou ainda de forma mais ágil, analisando-se o sinal de \dot{x} e \dot{y} em cada quadrante.

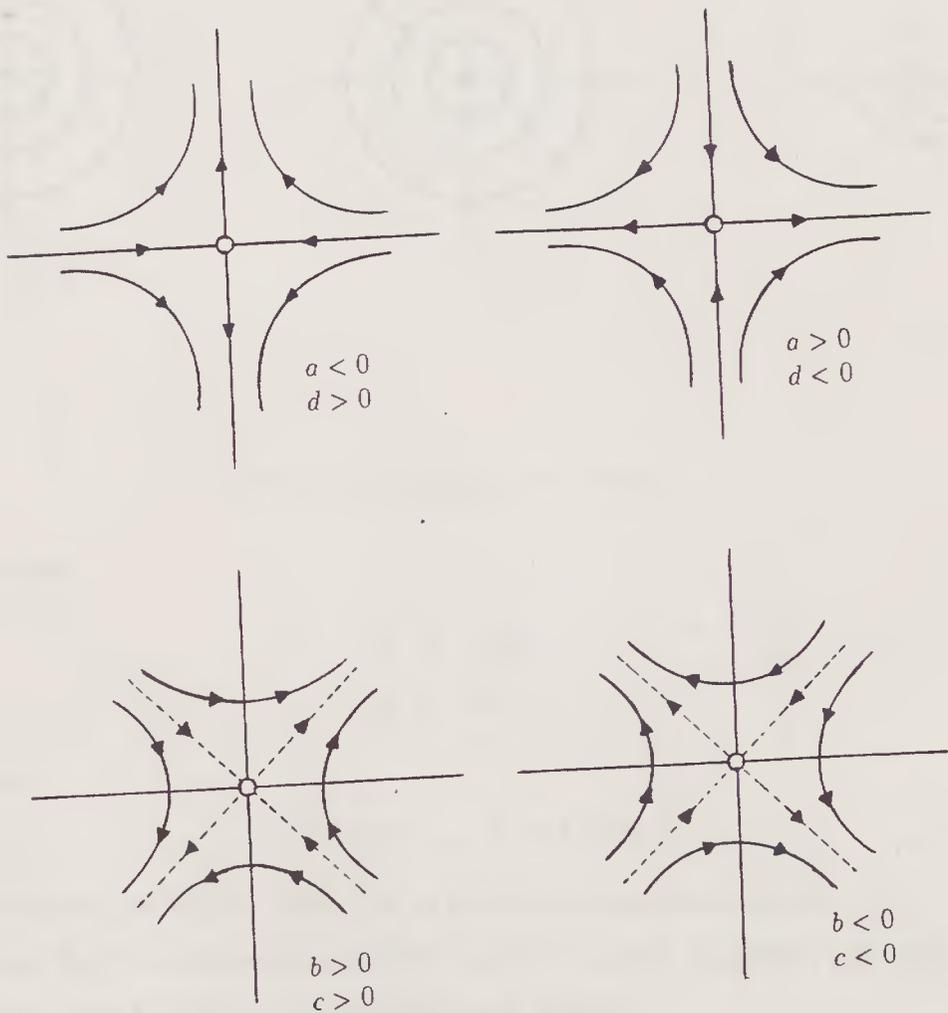


Figura 2.5: Pontos de Sela

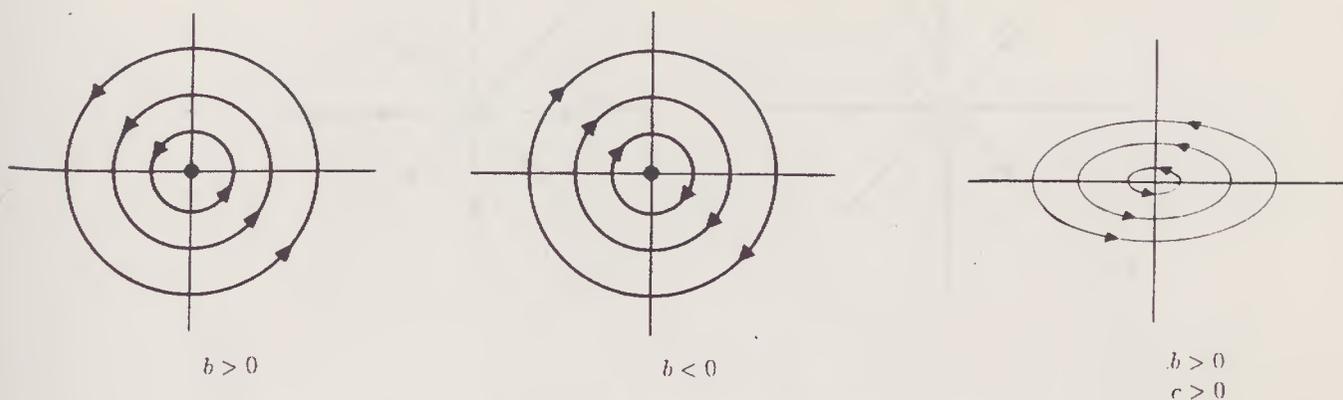


Figura 2.6: Pontos de Centro

(vi) Centros:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -by \\ \dot{y} &= bx \end{aligned}$$

as soluções são:

$$x = A \cos bt \quad , \quad y = A \sin bt$$

Os gráficos estão na fig.2.6. Note que os centros são sempre estáveis.

O gráfico na fig.2.6c representa um centro de forma geral, originado por uma distorção afim, o que gera uma família de elipses dada pelo sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -by \\ &\quad \quad \quad (\text{com } bc > 0) \\ \dot{y} &= cx \end{aligned}$$

Na fig.2.6c, temos uma rotação no sentido anti-horário quando $b > 0$ e $c > 0$. No caso de $b < 0$ e $c < 0$, a rotação é horária.

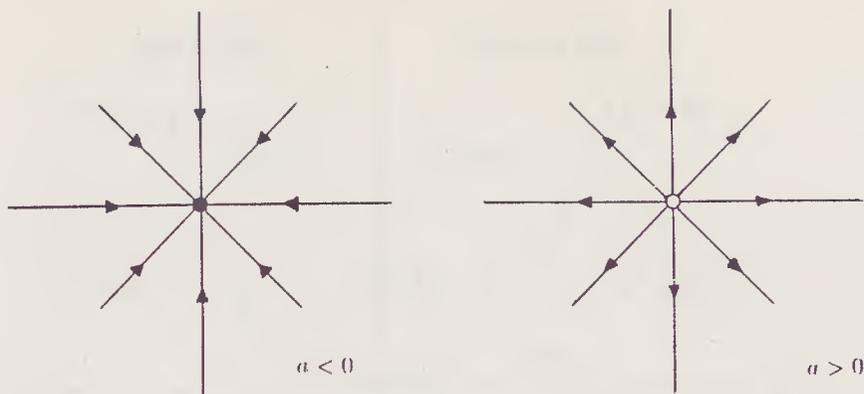


Figura 2.7: Nós Estelares estável e instável.

(vii) Nó Estelar:

$$\dot{x} = ax$$

$$\dot{y} = ay$$

As soluções são do tipo (i) quando $a = d$. Obtemos, assim, uma família de retas afins representadas na fig.2.7.

Soluções Padrão Tabeladas:

Nos itens (i) a (vii) verificamos que os sistemas dinâmicos linearizados podem ser caracterizados em grupos de padrões. O porquê está na matriz M dada por (2.17), que nos fornece informações sobre o ponto (x_0, y_0) do sistema. Aliás, este fato nos permite escrever a equação característica (2.18) como:

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0 \tag{2.19}$$

onde:

$$p = a + d \quad (\text{traço de } M) \tag{2.20}$$

$$q = ad - bc \quad (\det(M))$$

Traçando-se o gráfico $q \times p$ e a parábola $p^2 - 4q = 0$, podemos classificar todos os resultados dos item (i)-(vii), como mostra-se abaixo.

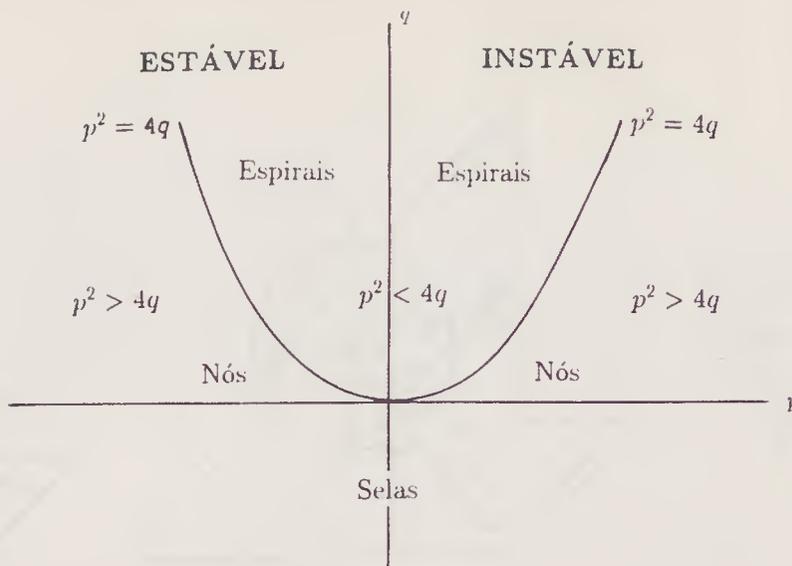


Figura 2.8: Gráfico de classificação das soluções padrão.

Tabela das Soluções Padrão

$$\dot{x} = ax + by, \dot{y} = cx + dy \quad (p = a + d = \text{tr}(M), q = ad - bc = \det(M))$$

- | | | | |
|-------|-----------------------|---------------------|---|
| (i) | Nó tangente duplo | $0 < 4q < p^2$ | |
| (ii) | Nó tangente (simples) | $0 < p^2 = 4q$ | $b^2 + c^2 > 0$ |
| (iii) | Espiral (foco) | $0 < p^2 < 4q$ | $c < 0$: horária
$c > 0$: anti-horária |
| (iv) | Nó degenerado | $0 = 4q < p^2$ | |
| (v) | Ponto de sela | $4q < 0 (\leq p^2)$ | |
| (vi) | Centro | $0 = p^2 < 4q$ | $c < 0$: horário
$c > 0$: anti-horário |
| (vii) | Nó estelar | $0 < p^2 = 4q$ | $b^2 + c^2 = 0$ |

2.2.2 Projeção Sobre a Esfera de Poincaré

No estudo da esfera de Poincaré, como no caso de sistemas dinâmicos, não iremos nos ater ao seu detalhamento. Uma abordagem mais precisa pode ser conseguida em Andronov *et al* [15].

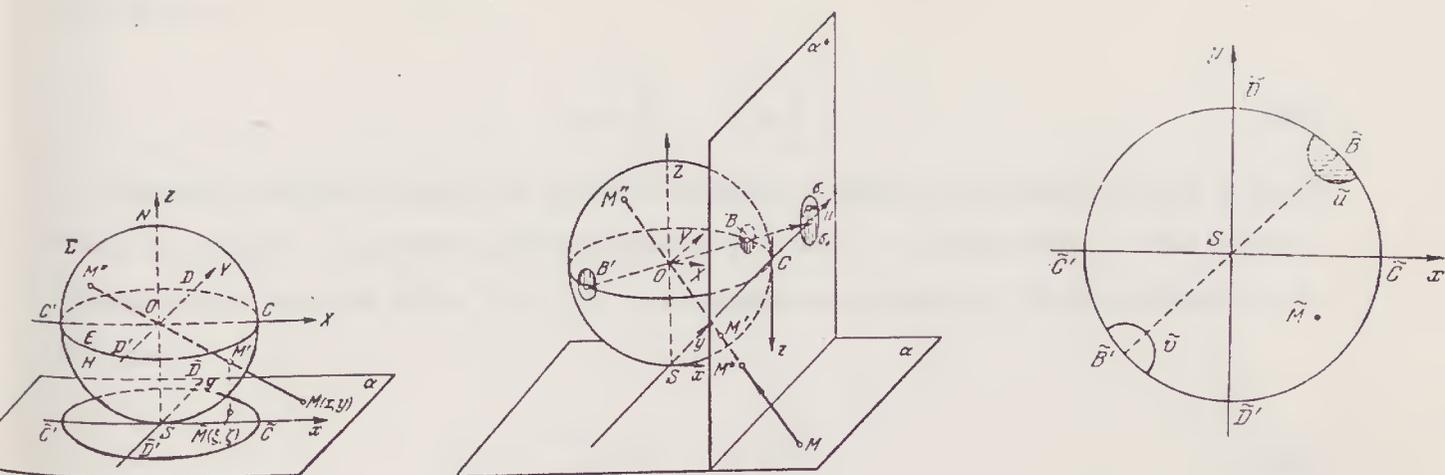


Figura 2.9: Esfera de Poincaré

Considere a esfera da fig.2.9 colocada sobre o plano- xy , este tendo por equação $Z = -1$. Na fig.2.9a podemos ver algo como que uma 'sombra' da esfera projetada sobre o plano- xy , que é indicado pelo plano α , delimitado pelos pontos \tilde{C} , \tilde{C}' , \tilde{D} e \tilde{D}' . Esta é a projeção de Poincaré. Como vemos a projeção da esfera nos dá uma visão um tanto modificada, haja visto o caso do ponto $M(x, y)$ que é projetado 'sobre a esfera' como M' e depois sobre o plano como $\tilde{M}(\xi, \zeta)$.

Retomemos a fig.2.9b e façamos a projeção sobre o plano α^* . O ponto M^* sobre α^* , que tem como eixos u e z , $z \equiv -Z$, traçará o comportamento do ponto M no infinito distante de S . O ponto M' está na mesma linha de M^* e M'' , e traçará este comportamento sobre a esfera. Já que as coordenadas espaciais de M e M^* são, respectivamente, $(x, y, -1)$ e $(1, u, -z)$, temos:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{u} = \frac{1}{z} \quad (2.21)$$

o que nos dá a 1ª transformação de Poincaré:

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z} \quad (2.22)$$

ou a inversa:

$$u = \frac{y}{x} \quad , \quad z = \frac{1}{x} \quad (2.23)$$

Podemos também colocar um plano $\hat{\alpha}$ tangente à esfera Σ no ponto D com a finalidade de estudar os possíveis infinitos do eixo- y , onde a projeção sobre α^* não alcança. Denominando os eixos sobre $\hat{\alpha}$ de v e z , analogamente obtemos a 2ª transformação de Poincaré:

$$x = \frac{v}{z} \quad , \quad y = \frac{1}{z} \quad (2.24)$$

ou:

$$v = \frac{x}{y} \quad , \quad z = \frac{1}{y} \quad (2.25)$$

Daremos agora um esquema de investigação de sistemas dinâmicos no infinito.

Investigação no Infinito ALGORITMO

Dado o sistema dinâmico:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

1) Aplique a 1ª transformação de Poincaré:

$$x = \frac{1}{z} \quad , \quad y = \frac{u}{z}$$

O resultado do sistema é:

$$\frac{du}{dt} = -uzP\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) + zQ\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = \frac{P^*(u, z)}{z^n}$$

$$\frac{dz}{dt} = -z^2P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = \frac{Q^*(u, z)}{z^n}$$

de tal forma que $P^*(u, z)$ e $Q^*(u, z)$ sejam expressos como polinômios inteiros.

2) Tome agora o sistema:

$$\frac{du}{dt} = P^*(u, z) \quad , \quad \frac{dz}{dt} = Q^*(u, z)$$

Encontre todos os pontos de equilíbrio sobre o eixo $z = 0$ (deve haver um número finito deles). Determine a topologia nas proximidades de cada ponto de equilíbrio $B^*(u, 0)$ (use as figuras 2.1-2.7), pelo método de linearização.

3) Para cada ponto $B^*(u, 0)$ construa os gráficos em torno das projeções \tilde{B} e \tilde{B}' (conforme a fig. 2.10) sobre o círculo Γ (estas são as linhas onde $\frac{y}{x} = u$ corta o círculo).

(i) A topologia obtida em σ_+ de B^* é aquela de $\tilde{\sigma}_+$ em \tilde{B} , e a topologia obtida para σ_- em B^* é a de $\tilde{\sigma}_-$ em \tilde{B}' .

(ii) A direção das trajetórias em σ_+ é mapeada para $\tilde{\sigma}_+$.

(iii) Se n é ímpar, a direção das trajetórias é invertida quando σ_- é mapeado para $\tilde{\sigma}_-$.

4) Aplique a 2ª transformação de Poincaré:

$$x = \frac{v}{z} \quad , \quad y = \frac{1}{z}$$

obtendo:

$$\frac{dv}{dt} = zP\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) - zvQ\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) = \frac{\hat{P}(v, z)}{z^m}$$

$$\frac{dz}{dt} = -z^2Q\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) = \frac{\hat{Q}(v, z)}{z^m}$$

onde $\hat{P}(v, z)$ e $\hat{Q}(v, z)$ são polinômios inteiros.

5) Tome o sistema:

$$\frac{dv}{dt} = \hat{P}(v, z) \quad , \quad \frac{dz}{dt} = \hat{Q}(v, z)$$

e determine a topologia em torno do ponto $D(0, 0)$.

6) Para o ponto $D(0, 0)$ construa os gráficos dos pontos \tilde{D} e \tilde{D}' (veja fig. 2.11).

(i) Mapeie a topologia de $\hat{\sigma}_+$ para $\tilde{\sigma}_+$ do ponto \tilde{D} e $\hat{\sigma}_-$ para $\tilde{\sigma}_-$ do ponto \tilde{D}' .

(ii) A direção das trajetórias em $\hat{\sigma}_+$ é a mesma de $\tilde{\sigma}_+$ de \tilde{D} .

(iii) Se m é ímpar, a direção das trajetórias em $\hat{\sigma}_-$ é invertida em $\tilde{\sigma}_-$ de \tilde{D}' .

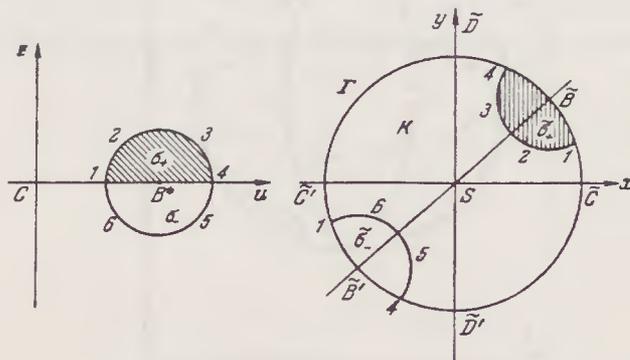


Figura 2.10:

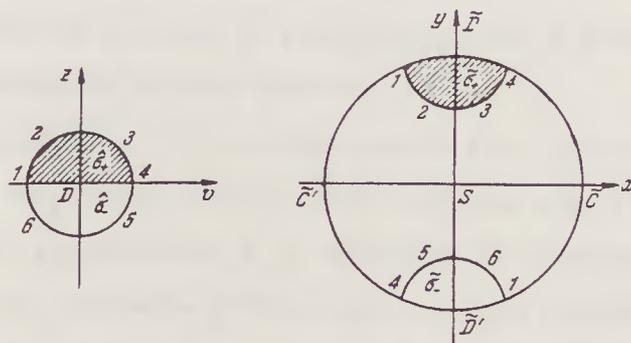


Figura 2.11:

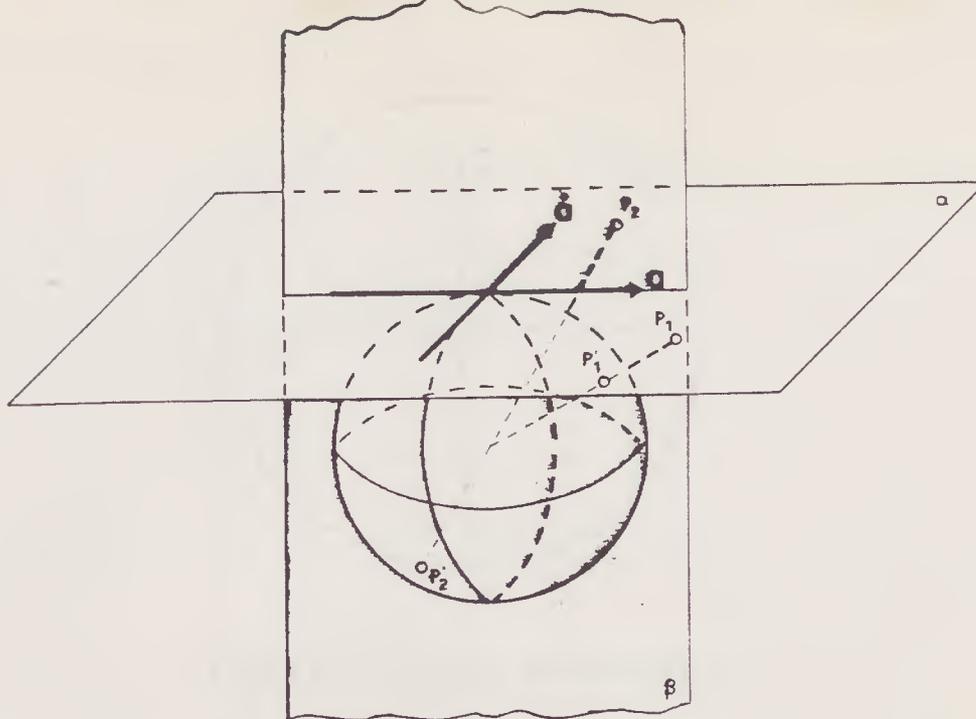


Figura 2.12: Planos ortogonais α e β , e a esfera de projeção estereográfica

2.2.3 Projeção Estereográfica

Projeções como a que fizemos na seção anterior realizam o que se denomina “compactificação do infinito”. A projeção sobre a esfera de Poincaré fornece diagramas em que os infinitos estão sobre a circunferência em torno do diagrama. Podemos imaginar outros tipos de projeção nas quais esta configuração seja modificada.

Nesta seção mostraremos um processo de projeção no qual, a partir do diagrama de fase, se compactifica os infinitos de maneira diferente.

Para a “ projeção estereográfica” de um diagrama de fase, tomamos o plano α que tangencia o topo da esfera de projeção estereográfica, conforme a fig.2.12

Um plano β é colocado perpendicular a α , contendo um meridiano da esfera. Os eixos do diagrama de fase são colocados de forma que a origem coincida com o ponto de tangência, e o eixo- x (correspondendo ao eixo- a da figura) sobre a interseção entre os planos α e β .

Na figura, tome os eixos a e \hat{a} como sendo x e y , respectivamente.

O diagrama de fase sobre o plano α é projetado estereograficamente sobre a esfera e os pontos sobre a face frontal da mesma projetados ortogonalmente sobre o plano β , sendo

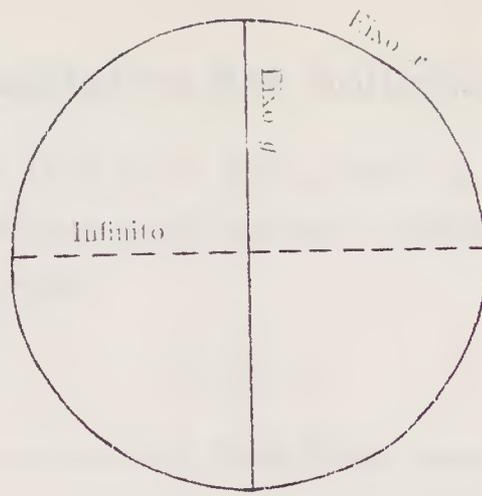


Figura 2.13: Projeção Estereográfica

que a projeção sobre o plano β é o resultado final.

Desta forma, os pontos do 3º e 4º quadrantes são projetados acima do equador, e os pontos do 1º e do 2º quadrantes abaixo. Por exemplo, a projeção estereográfica do ponto P_1 é P'_1 , que é projetado ortogonalmente sobre β acima da linha correspondente ao equador em β . O ponto P_2 tem sua projeção estereográfica P'_2 abaixo do equador (haveria um ponto antípoda P''_2 , acima e por trás da esfera. Entretanto utilizaremos somente a projeção frontal).

Com isto, o eixo- x é projetado estereograficamente como uma circunferência em β . O eixo- y , por sua vez, resulta em uma linha vertical no centro do diagrama, pois é projetado estereograficamente sobre um meridiano que é perpendicular ao plano- β .

Os pontos no infinito são projetados estereograficamente sobre o equador da esfera, resultando em pontos sobre uma linha horizontal, central ao diagrama.

A fig.2.13 mostra a estrutura de uma projeção estereográfica sobre o plano β , como definida aqui. O procedimento é, pois, colocar sobre o plano α da fig.2.12 o diagrama de fase obtido, e, mediante o procedimento acima citado, fazer o diagrama qualitativo sobre a fig.2.13.

2.3 . Análise Qualitativa das Soluções Cosmológicas

Retornemos às equações (2.9)-(2.11). Estas podem ser escritas em uma forma que caracteriza um sistema dinâmico planar autônomo. Basta, para isso, que na equação obtida do vínculo $R = 0$, a saber:

$$\ddot{a} + \varepsilon a = 0,$$

trabalhem nas variáveis $x = a$ e $y = \dot{a}$. Desta forma, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\varepsilon x \end{aligned} \tag{2.26}$$

onde ε depende da geometria espacial:

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & ; \text{ fechada} \\ 0 & ; \text{ chata} \\ -1 & ; \text{ aberta} \end{cases}$$

Os diagramas de fase obtidos encontram-se na fig.2.14.

Nas figs.2.14, para uma análise plausível, consideremos as trajetórias para os quadrantes I e IV, onde $a > 0$, *i.e.*, o raio do universo é positivo. Quando $a = 0$, *i.e.*, sobre o eixo- \dot{a} , teremos a presença de singularidades.

No caso (a), onde $\varepsilon = 1$, vemos que qualquer que seja a velocidade inicial de expansão, $\dot{a}(\eta = 0)$, o universo parte da singularidade inicial com esta velocidade, se expande, atinge um ponto onde o seu raio é máximo, e inicia um período de contração até a singularidade final.

No caso (b), onde $\varepsilon = 0$, as equações obtidas para o sistema dinâmico são análogas às de uma partícula livre. Se $\dot{a}(\eta = 0) > 0$, o universo se expande indefinidamente; o contrário ocorre se $\dot{a}(\eta = 0) < 0$. Pelo sistema dinâmico, vemos que $\dot{a} = 0$ é uma órbita (todos os pontos sobre este eixo são de equilíbrio): um universo que tem $\dot{a}(0) = 0$ fica, indefinidamente, com o mesmo $a(\eta)$ inicial.

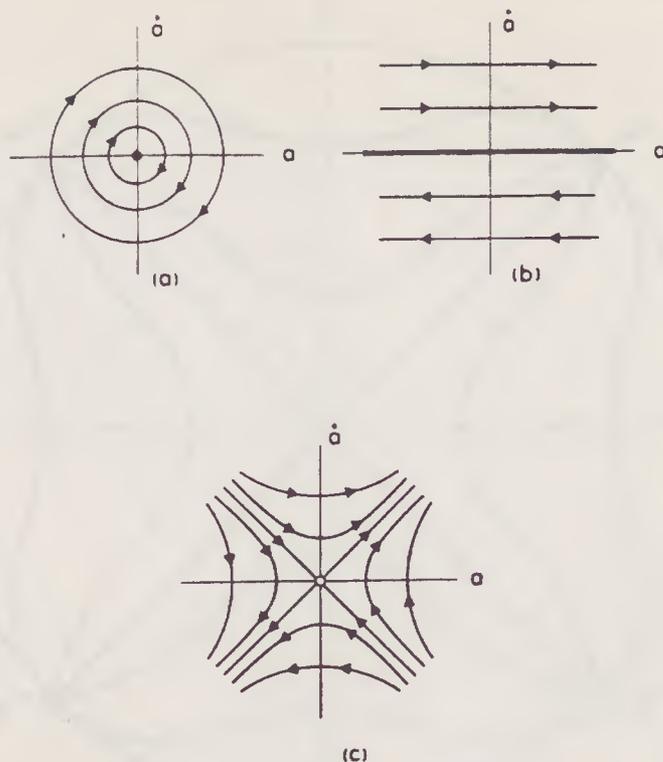


Figura 2.14: Diagramas de fase obtidos para os casos (a) fechado, (b) chato e (c) aberto.

Para o caso (c), onde $\varepsilon = -1$, tomando as trajetórias que têm seu lugar geométrico exclusivamente sobre os quadrantes I e IV, vemos que existe uma trajetória que alcança a singularidade, iniciando uma fase de expansão logo após. Há, porém, uma família de curvas que não corta o eixo $a = 0$. Universos deste tipo passam por um período de contração, atingem um estado no qual têm raio mínimo, e, logo depois, iniciam um período de expansão.

A despeito de não serem conclusivos, o estudo do Universo primitivo e as evidências observacionais [16,17] apontam para um universo aberto, *i.e.*, $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = -1$. Estes dois tipos de geometria espacial são denominados de universos abertos, pois, nestes casos, o universo se expande sempre e fica “ilimitado”, ao contrário do universo cíclico de Robertson-Walker, onde $\varepsilon = 1$.

A análise precedente nos mostrou que a singularidade cosmológica só pode ser evitada no caso do modelo hiperbólico, *i.e.*, $\varepsilon = -1$. Vamos agora investigar o seu comportamento no infinito, fazendo a projeção do plano de fase na esfera de Poincaré. O resultado obtido é mostrado na fig.2.15.

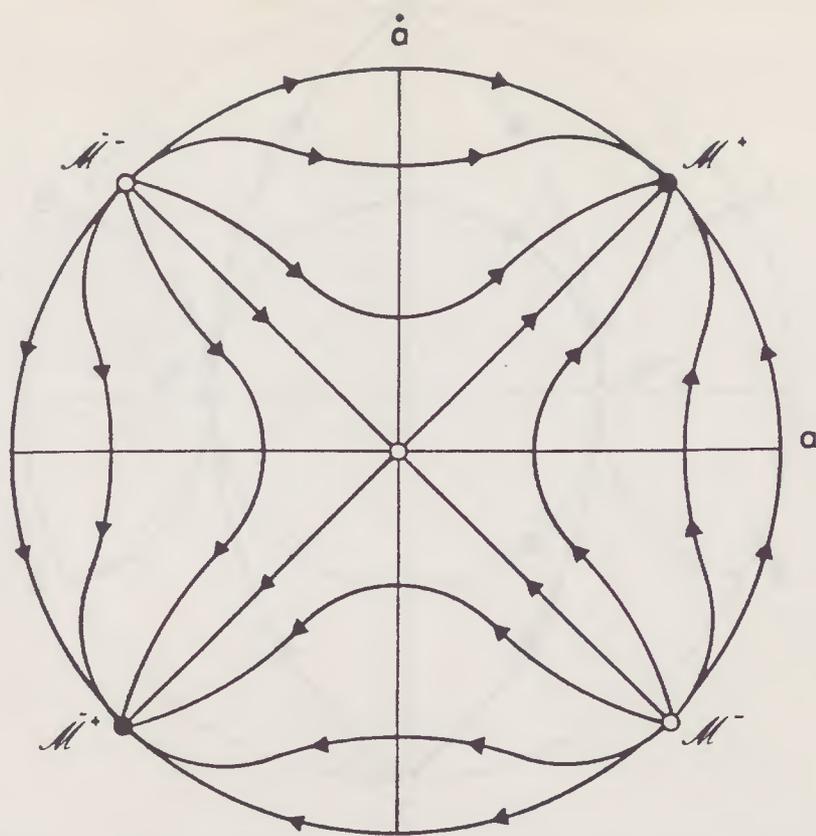


Figura 2.15: Projeção sobre a Esfera de Poincaré do universo aberto

Tomando, novamente, os quadrantes I e IV, vemos que o universo parte de um ponto \mathcal{M}^- no infinito passado, podendo passar pela singularidade ou seguir uma trajetória não-singular. Depois, tenderá a se expandir até o ponto \mathcal{M}^+ no infinito futuro. Os pontos \mathcal{M}^- e \mathcal{M}^+ representam universos de Minkowski. Note, pois, que os universos obtidos desta forma são eternos. De fato, como \mathcal{M}^+ e \mathcal{M}^- são fisicamente indistinguíveis, é possível imaginar que temos universos começando e terminando em 'vazios' Minkowskianos, num ciclo sem fim.

A presença dos pontos antípodos $\tilde{\mathcal{M}}$ pode ser eliminada utilizando-se um outro tipo de compactificação para estes infinitos.

Na fig.2.16, o eixo- x do diagrama anterior é representado pela circunferência que delimita o diagrama. O eixo- y está sobre a linha vertical onde se encontra o ponto C, que no diagrama da fig.2.15 é a origem. Os pontos no infinito estão sobre a linha horizontal.

Note que, como antes, as únicas trajetórias que neste diagrama não passam pela singularidade são duas: uma parte de \mathcal{M}^- , corta o eixo- x no ponto A e prossegue para \mathcal{M}^+ ;

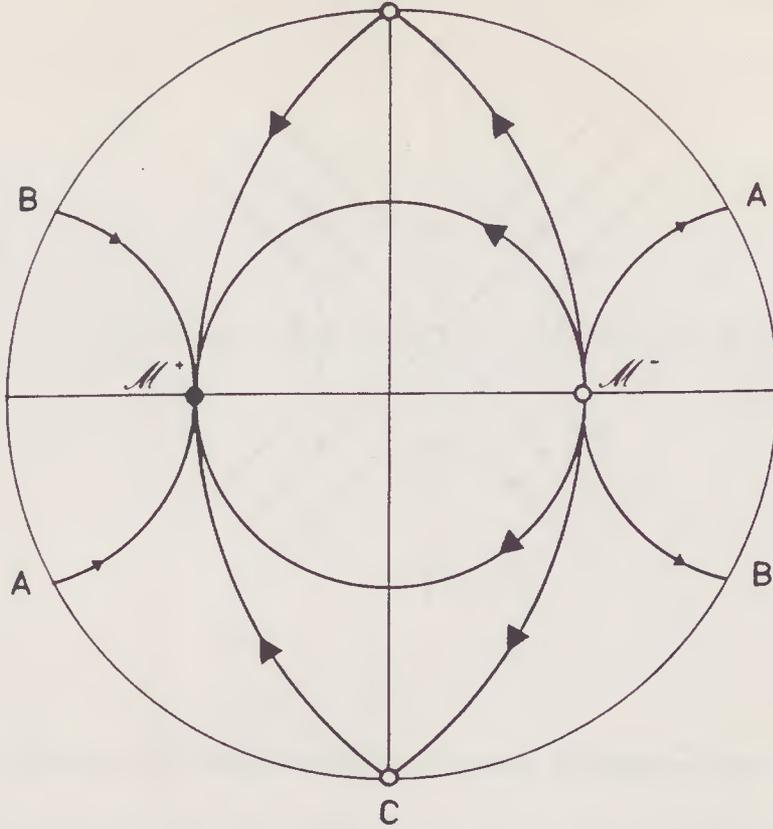


Figura 2.16: Projeção Estereográfica do universo aberto

a outra corta o eixo- x (para $a < 0$) no ponto B .

De maneira a concluir a análise dos diagramas para o universo eterno e não-singular em discussão, vamos considerar as trajetórias que têm seu lugar geométrico exclusivamente nos quadrantes I e IV da fig.2.16 (vide fig.2.17).

Seja $\alpha = \arctan \frac{a}{c}$. Na fig.2.17, quando $\alpha \geq \frac{\pi}{4}$ o universo passa pela singularidade. No caso $\alpha > \frac{\pi}{4}$ temos uma situação atípica, pois, se desconsiderarmos a possibilidade de raio negativo, o universo atinge à singularidade e pode iniciar a expansão a partir desta com qualquer velocidade inicial (por simetria, provavelmente em módulo a mesma de chegada à singularidade). Quando $\alpha < \frac{\pi}{4}$, as trajetórias não passam pela singularidade.

2.4 Solução Analítica para o Universo com Campo Escalar Conforme

Procedamos, agora, à integração das equações (2.9)-(2.11), no caso $\varepsilon = -1$. A eq.(2.11), que não contém o campo escalar, pode ser integrada facilmente, fornecendo o resultado:

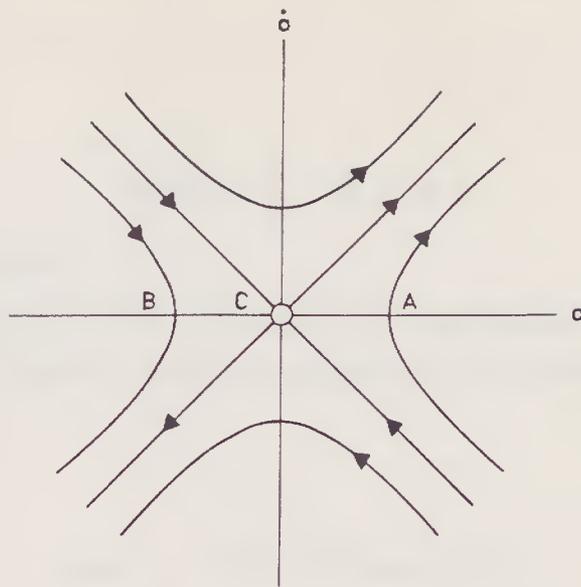


Figura 2.17: Diagrama de fase para o universo aberto

$$a(\eta) = A \cosh \eta + B \sinh \eta \quad (2.27)$$

onde A e B são constantes. Como $\dot{S} = \frac{Q}{a^2}$, podemos usar (2.27) para obter o campo escalar:²

$$S = \frac{Q}{A^2 - B^2} \tanh(\eta + \theta) + F_1$$

$$\tanh \theta = \frac{B}{A} \quad (A > |B|) \quad (2.28)$$

ou:

$$S = \frac{Q}{A^2 - B^2} \coth(\eta + \theta) + F_2$$

²A integral :

$$S = \int \frac{Q d\eta}{(A \cosh \eta + B \sinh \eta)^2}$$

pode ser calculada facilmente se observamos que se $A^2 - B^2 > 0$ (i.e., $A > |B|$), ela pode ser escrita como:

$$S = \int \frac{Q d\eta}{(A^2 - B^2)(\cosh \theta \cosh \eta + \sinh \theta \sinh \eta)^2}$$

onde $\cosh \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 - B^2}}$ e $\sinh \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 - B^2}}$. O caso $B^2 - A^2 > 0$ pode ser tratado de maneira análoga.

$$\tanh \theta = \frac{A}{B} \quad (B > |A|) \quad (2.29)$$

onde F_1 e F_2 são constantes.

Conforme foi visto na seção 2.3, as soluções não-singulares são aquelas que satisfazem à desigualdade $\frac{\dot{a}}{a} < 1$. Impondo-se esta restrição em (2.27), obtemos os modelos não-singulares:

$$\begin{aligned} a(\eta) &= \sqrt{A^2 - B^2} \cosh(\eta + \theta) \\ S &= \frac{Q}{A^2 - B^2} \tanh(\eta + \theta) + F \\ \tanh \theta &= \frac{B}{A} \quad (A > |B|) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Vamos, agora, achar a relação entre as constantes A , B , F , e Q , utilizando a equação (2.9). Se levarmos em conta que $\dot{a}^2 - a^2 = B^2 - A^2$, obteremos, após alguma álgebra:

$$(F^2 - 1)(A^2 - B^2)^2 = Q^2 \quad (2.31)$$

Sem perda de generalidade, podemos tomar $B = 0$ em (2.30) e (2.31). Nestas condições, o conjunto de equações (2.30) assume a forma:

$$a(\eta) = A \cosh \eta \quad (A > 0) \quad (2.32)$$

$$S = \sqrt{F^2 - 1} \tanh \eta + F \quad (2.33)$$

A eq.(2.32) descreve um modelo não-singular de universo, conseqüência do acoplamento não-mínimo do campo ϕ com a gravitação. A evolução cósmica deste modelo consiste de um período de contração até um ponto onde a curvatura atinge um máximo ($\eta = 0$, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{12}{A^4}$), seguida de uma fase de expansão (vide fig.2.18).

Note que este universo é assintoticamente tangente ($\eta \rightarrow \pm\infty$) a dois universos de Milne distintos [18,19], ou seja, ele é assintoticamente plano. Vamos mostrar, em seguida, que este modelo é estável com relação à adição de pequenas quantidades de matéria.

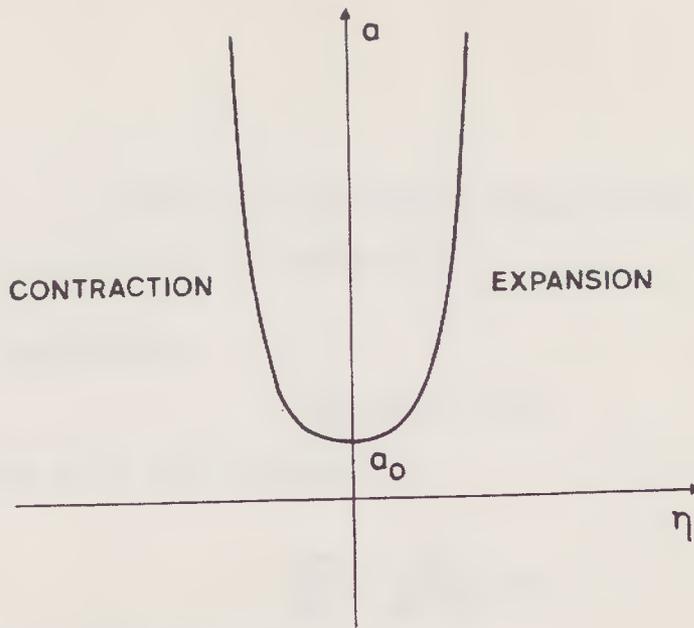


Figura 2.18: Evolução do Universo Eterno

Lembrando que $dt = a(\eta)d\eta$, podemos expressar o tempo cósmico t em função do tempo conforme η , ou seja:

$$t = A \sinh \eta$$

Logo:

$$\begin{aligned} a(\eta) &= A \cosh \operatorname{arcsinh} \frac{t}{A} \\ &= A \cosh \operatorname{arccosh} \sqrt{1 + \left(\frac{t}{A}\right)^2} \\ &= \sqrt{A^2 + t^2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Na seção 1.3, mostramos que o tensor de energia-momentum $T_{\mu\nu}$ é covariantemente conservado. Consideremos, então, um fluido (poeira) com tensor de energia-momentum dado por $T_{\mu\nu} = V_\mu V_\nu \delta\rho$, onde a densidade de energia $\delta\rho$ é infinitesimal. Seja um observador que se move conjuntamente com o fluido, *i.e.*, $V^\mu = \delta^\mu_0$. Projetando $T^{\mu\nu}$ na direção de V_μ , obtemos:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} V_\mu &= \delta\rho V^\mu V_\mu V^\nu{}_{;\nu} + (\delta\rho)_{;\nu} V^\nu V^\mu V_\mu \\ &= \Theta\delta\rho + (\delta\rho)'. \end{aligned}$$

Como $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0$, segue-se que:

$$\Theta\delta\rho + (\delta\rho)' = 0 \quad (2.35)$$

Levando em conta que $\Theta = \frac{3\dot{a}}{a}$, obtemos:

$$\frac{d\delta\rho}{dt} + \frac{3t\delta\rho}{A^2 + t^2} = 0 \quad (2.36)$$

Uma integração direta nos fornece o resultado:

$$\delta\rho = \text{cte}(A^2 + t^2)^{-3/2} \quad (2.37)$$

A perturbação diminui, portanto, com o passar do tempo, mostrando que o modelo é estável com relação a pequenas injeções de matéria.

2.5 O Campo Escalar Conforme como um Fluido Perfeito

É possível, embora seja um tanto artificial, interpretar a nossa solução não-singular como uma solução das equações de Einstein com fonte de fluido perfeito. Para tanto, vamos reescrever (G.10) como se segue:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

com $T_{\mu\nu}$ dado por:

$$T_{\mu\nu} = \left(1 - \frac{\kappa\phi^2}{6}\right)^{-1} \left[\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} - \frac{1}{6}(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square)\phi^2 \right]$$

Em geral, se o campo escalar, bem como o espaço-tempo, estão em processo de evolução dinâmica — que é exatamente a situação encontrada quando se trabalha com modelos cosmológicos realistas — é possível construir um vetor-tempo unitário relacionado ao campo escalar ϕ através da prescrição:

$$V^\mu = (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi)^{-1/2} \partial^\mu \phi$$

Utilizando a equação (A.3), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \rho &= T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \\ p &= -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \\ q_\mu &= T_{\alpha\beta} V^\alpha h^\beta{}_\mu \\ \pi_{\mu\nu} &= T_{\alpha\beta} h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu \end{aligned} \quad (2.38)$$

No caso do modelo aqui exposto,

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\psi^2 - \sigma^2(\psi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)],$$

$\phi = \phi(t)$ e $V^\mu = a^{-1} \delta^\mu_0$. De (2.38), segue-se que:

$$\rho = \frac{3}{\kappa a^4} (\dot{a}^2 - a\ddot{a}) \quad , \quad p = \frac{1}{3} \rho \quad , \quad q_\mu \equiv 0 \quad , \quad \pi_{\mu\nu} \equiv 0 \quad (2.39)$$

que é a estrutura de um fluido perfeito. Um cálculo imediato nos mostra que, para o universo não-singular ($a = A \cosh \eta$), $\rho = 3p = -\frac{3}{\kappa A^2 \cosh^4 \eta}$. Concluimos, pois, que o acoplamento não-mínimo de um campo escalar com a gravitação, torna-se equivalente a considerarmos um fluido de densidade de energia negativa.

Capítulo 3

Compatibilidade entre as Previsões da Teoria com Campo Escalar Conforme e as da Relatividade Geral

3.1 Solução Esfericamente Simétrica da Teoria Einstein–Campo Escalar Conforme

Será que a teoria de Einstein–Campo Escalar Conforme prevê alguma correção para os testes clássicos da gravitação einsteiniana? Para respondermos a esta pergunta, precisamos determinar os parâmetros PPN relativos a esta teoria e compará-los com os valores experimentais. Com este intuito, vamos determinar a solução esfericamente simétrica das equações (2.1)–(2.4), a partir das soluções correspondentes à teoria com campo escalar ordinário (teorema de Bekenstein). A ação e as equações de campo relativas à teoria de Einstein–Campo Escalar Ordinário são dadas, respectivamente, por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{\kappa} + \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} \right\}$$

$$\square \phi = 0$$

$$R^{\mu}_{\nu} = -\kappa\phi^{\prime\prime}\phi_{,\nu}$$

A forma isotrópica da métrica de Schwarzschild é dada por (E.1):

$$ds^2 = e^{2\nu(r)}dt^2 - e^{2\mu(r)} \left[dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right) \right] \quad (3.1)$$

Utilizando o *ansatz* $\phi = \phi(r)$, as equações assumem a forma:

$$\phi' = \frac{w}{r^2} e^{-(\nu+\mu)} \quad (3.2)$$

$$R^1_1 = \kappa e^{-2\mu} (\phi')^2 \quad (3.3)$$

$$R^0_0 = R^2_2 = R^3_3 = 0 \quad (3.4)$$

onde a linha significa derivação com relação a r e w é uma constante.

Igualando estes resultados com aqueles do apêndice D, obtemos:

$$\nu'' + (\nu')^2 + \nu'\mu' + \frac{2\nu'}{r} = 0 \quad (3.5)$$

$$\nu'\mu' - \nu'' - (\nu')^2 - \frac{2\mu'}{r} - 2\mu'' = \kappa(\phi')^2 \quad (3.6)$$

$$\frac{\nu'}{r} + \nu'\mu' + \frac{3\mu'}{r} + \mu'' + (\mu')^2 = 0 \quad (3.7)$$

$$\phi' = \frac{w}{r^2} e^{-(\nu+\mu)} \quad (3.8)$$

Tomando a derivada de $(\nu' e^{(\nu+\mu)} r^2)$ com relação a r , verifica-se que o resultado se identifica com o membro esquerdo de (3.5). Logo, esta expressão é uma constante, que denominaremos m^2 . Assim:

$$\nu' = \frac{m^2}{r^2} e^{-(\nu+\mu)} \quad (3.9)$$

Somando as equações (3.5) e (3.7), vê-se que a derivada de $[e^{(\nu+\mu)}(\nu' + \mu')r^3]$ se anula.

Logo:

$$e^{\nu+\mu}(\nu' + \mu')r^3 = n^2 \quad (3.10)$$

onde n^2 é uma constante. Integrando (3.10), obtemos:

$$e^{\nu+\mu} = -\frac{n^2}{2r^2} + p^2 \quad (3.11)$$

onde p^2 é, também, uma constante. Substituindo (3.11) em (3.9), e renomeando $\frac{m^2}{p^2} = a$ e $\frac{n^2}{2p^2} = b^2$, podemos integrar ν' :

$$\nu = \frac{a}{2b} \ln \left(\frac{r-b}{r+b} \right) + \tilde{C}_1 \quad (3.12)$$

E, com isto, podemos obter também μ a partir de (3.11):

$$\mu = \ln \left[p^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \left(\frac{r+b}{r-b} \right)^{\frac{a}{2b}} \right] - \tilde{C}_1 \quad (3.13)$$

Quando formos escrever a métrica de Schwarzschild (3.1) usando (3.12) e (3.13), o fator \tilde{C}_1 aparecerá em uma constante multiplicativa que pode ser eliminada por uma mudança de escala. Logo:

$$e^{2\nu} = \left(\frac{r-b}{r+b} \right)^{\frac{a}{b}}$$

$$e^{2\mu} = p^4 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)^2 \left(\frac{r+b}{r-b} \right)^{\frac{a}{b}}$$

E p^4 aparecerá também como uma constante multiplicativa, podendo ser eliminada, não figurando, pois, na métrica resultante. Fazendo $b = M/2$, obtemos:

$$e^{2\nu} = \left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r} \right)^{\frac{2a}{M}} \quad (3.14)$$

$$e^{2\mu} = \left(1 - \frac{M^2}{4r^2} \right)^2 \left(\frac{1 + M/2r}{1 - M/2r} \right)^{\frac{2a}{M}} \quad (3.15)$$

Agora, com estes resultados, podemos integrar (3.8), fazendo $\phi \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.

Assim:

$$\phi = \ln \left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r} \right)^{\frac{w}{M}} \quad (3.16)$$

A equação ainda não utilizada, *i.e.*(3.6)), nos fornecerá a relação entre as constantes. De (3.14) e (3.15), obtemos:

$$\nu' = \frac{a}{r^2 - M^2/4} \quad , \quad \nu'' = -\frac{2ar}{(r^2 - M^2/4)^2}$$

$$\mu' = \frac{M^2/2r}{r^2 - M^2/4} - \frac{a}{r^2 - M^2/4} \quad , \quad \mu'' = \frac{M^4/8r^2 - 3M^2/2 + 2ar}{(r^2 - M^2/4)^2}$$

$$e^{\nu+\mu} = 1 - \frac{M^2}{4r^2}$$

Usando estes resultados em (3.6), veremos que as constantes se relacionam segundo a equação:

$$2M^2 = 2a^2 + \kappa w^2 \tag{3.17}$$

Se removermos o campo escalar, *i.e.*, se fizermos $w = 0$, (3.17) nos dará:

$$a^2 = M^2$$

As equações (3.14) e (3.15), ficam:

$$e^{2\nu} = \left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r} \right)^2$$

$$e^{2\mu} = \left(1 + \frac{M}{2r} \right)^4$$

Estes resultados para $e^{2\nu}$ e $e^{2\mu}$, quando $w = 0$, coincidem com aqueles obtidos para a teoria sem campo escalar (cf. Wald [16], p.157).

Retornando às equações (3.14) e (3.15), a solução para o campo escalar ordinário pode ser reescrita sob a forma:

$$ds^2 = \left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r} \right)^{\frac{2a}{M}} dt^2 - \frac{(1 + M/2r)^{\frac{2a}{M}+2}}{(1 - M/2r)^{\frac{2a}{M}-2}} d\sigma^2 \tag{3.18}$$

$$\phi = \ln \left[\left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r} \right)^{\frac{w}{M}} \right] \tag{3.19}$$

onde $d\sigma^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$. Definindo:

$$Q = \sqrt{\frac{\kappa}{6}}w \quad (3.20)$$

e usando o teorema 1.1, obtemos:

$$d\bar{s}^2 = \cosh^2 \left[\ln \left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r} \right)^{\frac{Q}{M}} \right] \left\{ \left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r} \right)^{\frac{2a}{M}} dt^2 - \frac{(1 + M/2r)^{\frac{2a}{M}+2}}{(1 - M/2r)^{\frac{2a}{M}-2}} d\sigma^2 \right\} \quad (3.21)$$

$$\bar{S} = \tanh \left[\ln \left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r} \right)^{\frac{Q}{M}} \right] \quad (3.22)$$

onde definimos:

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{\kappa}{6}}\bar{\phi} \quad (3.23)$$

Note que devido à redefinição (3.20), a condição (3.17) se modifica para:

$$3Q^2 + a^2 = M^2 \quad (3.24)$$

Seria interessante, agora, obter a métrica $g_{\mu\nu}$ para o caso do campo escalar conforme, utilizando, desta vez, as equações para os campos obtidas na seção 1.3.

Tomando, pois, a métrica de Schwarzschild (E.1) e tendo em vista o *ansatz* $S = S(r)$, as equações (2.2)–(2.4) se escrevem:

$$R^0_0 f = e^{-2\mu} \left[-(S')^2 + \nu' f' \right] \quad (3.25)$$

$$R^1_1 f = e^{-2\mu} \left[3(S')^2 - \frac{2f'}{r} - \nu' f' - 2\mu' f' \right] \quad (3.26)$$

$$R^2_2 f = R^3_3 f = -e^{-2\mu} \left[(S')^2 - \frac{f'}{r} - \mu' f' \right] \quad (3.27)$$

$$S' = \frac{Q}{r^2} e^{-(\nu+\mu)} \quad , \quad S'' + \frac{2S'}{r} + (\nu' + \mu')S' = 0 \quad (3.28)$$

onde $f = 1 - S^2$, $S = \sqrt{\frac{\kappa}{6}}\phi$, Q uma constante, e sendo as duas equações em (3.28) obtidas de $\square S = 0$. Substituindo as equações para a métrica obtidas no apêndice E, teremos:

$$(S')^2 - \nu' f' = \left[\nu'' + (\nu')^2 + \nu' \mu' + \frac{2\nu'}{r} \right] f \quad (3.29)$$

$$3(S')^2 - \frac{2f'}{r} - \nu' f' - 2\mu' f' = \left[\nu' \mu' - \nu'' - (\nu')^2 - \frac{2\mu'}{r} - 2\mu'' \right] f \quad (3.30)$$

$$(S')^2 - \frac{f'}{r} - \mu' f' = \left[\frac{\nu'}{r} + \nu' \mu' + \frac{3\mu'}{r} + \mu'' + (\mu')^2 \right] f \quad (3.31)$$

$$\nu'' + (\nu')^2 + \frac{2\nu'}{r} + \frac{4\mu'}{r} + 2\mu'' + \nu' \mu' + (\mu')^2 = 0 \quad (3.32)$$

$$S' = \frac{Q}{r^2} e^{-(\nu+\mu)} \quad (3.33)$$

$$S'' + \left(\frac{2}{r} + \nu' + \mu' \right) S' = 0 \quad (3.34)$$

Tomando a derivada com relação a r de $(e^{\nu+\mu} r^2 \nu')$, a equação (3.29) se modifica para:

$$\nu' = \frac{SS'}{f} + \frac{KS'}{Qf} \quad (3.35)$$

onde K é uma constante. Esta última equação pode ser integrada resultando em:

$$\nu = \ln \left[f^{-1/2} \left(\frac{1+S}{1-S} \right)^{\frac{K}{2Q}} \right] + \tilde{C} \quad (3.36)$$

onde \tilde{C} é uma constante.

Analogamente, derivando $[e^{\nu+\mu} r^3 (\nu' + \mu')]$, o resultado pode ser comparado à equação proveniente da soma de (3.29) e (3.31), dando:

$$\nu + \mu = \ln \left[\frac{1}{f} \left(q + \frac{z}{r^2} \right) \right] \quad (3.37)$$

onde z e q são constantes de integração, e de onde obtemos:

$$\mu = \ln \left[f^{-1/2} \left(q + \frac{z}{r^2} \right) \left(\frac{1-S}{1+S} \right)^{\frac{K}{2Q}} \right] - \tilde{C} \quad (3.38)$$

De posse de (3.36) e (3.38), podemos resolver (3.33) encontrando o campo S , supondo $S \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$:

$$\frac{1+S}{1-S} = \left(\frac{1-m/qr}{1+m/qr} \right)^{\frac{Q}{m}} \quad (3.39)$$

onde $m^2 = -zq$.

De (3.39) obtemos, pois:

$$S = \tanh \left[\ln \left(\frac{1-m/qr}{1+m/qr} \right)^{\frac{Q}{2m}} \right] \quad (3.40)$$

Já que $f = 1 - S^2$, ficamos com:

$$f = \cosh^{-2} \left[\ln \left(\frac{1-m/qr}{1+m/qr} \right)^{\frac{Q}{2m}} \right] \quad (3.41)$$

ou seja:

$$f = \frac{4 \left(\frac{1-m/qr}{1+m/qr} \right)^{\frac{Q}{2m}}}{\left[1 + \left(\frac{1-m/qr}{1+m/qr} \right)^{\frac{Q}{2m}} \right]^2} \quad (3.42)$$

Podemos, agora, escrever a métrica:

$$ds^2 = \frac{1}{f} \left\{ \left(\frac{1-M/2r}{1+M/2r} \right)^{\frac{K}{m}} dt^2 - \frac{(1+M/2r)^{\frac{K}{m}+2}}{(1-M/2r)^{\frac{K}{m}-2}} d\sigma^2 \right\} \quad (3.43)$$

onde fizemos $\frac{M}{2} = \frac{m}{q}$.

Vamos determinar a relação entre as constantes, utilizando o vínculo $R = 0$, eq. (3.32). Este pode ser colocado na forma:

$$2(\nu'' + \mu'') + \frac{4}{r}(\nu' + \mu') + (\nu' + \mu')^2 = \nu'' + \nu'\mu' + \frac{2\nu'}{r} \quad (3.44)$$

Derivando (3.37) e usando a equação (3.33), obtemos:

$$\nu' + \mu' = \frac{2S'}{f} \left(S - \frac{z}{rq} \right) \quad (3.45)$$

Derivando esta última equação e usando (3.34), $(\nu'' + \mu'')$ fica:

$$\nu'' + \mu'' = -\frac{4SS'}{rf} + \frac{6zS'}{r^2Qf} + \frac{4zS(S')^2}{rQf^2} - \frac{4z^2(S')^2}{r^2Q^2f^2} + \frac{2(S')^2}{f} \quad (3.46)$$

Com estes dois últimos resultados, o membro esquerdo de (3.44) é:

$$\frac{4(S')^2}{f^2} \left(\frac{zq}{Q^2} + 1 \right) \quad (3.47)$$

Voltemos nossas atenções ao membro direito de (3.44). Precisamos saber as expressões para ν' , μ' e ν'' . A expressão para ν' é dada por (3.35). De (3.45) obtemos μ' :

$$\mu' = \frac{SS'}{f} - \frac{S'}{Qf} \left(\frac{2z}{r} + K \right)$$

Derivando (3.35) e usando (3.34), obtemos:

$$\nu'' = \frac{(S')^2}{f} - \frac{2SS'}{rf} + \frac{2zS(S')^2}{rQf^2} - \frac{2KS'}{rQf} + \frac{2zK(S')^2}{rQ^2f^2}$$

Logo, o membro direito de (3.44) é:

$$\frac{(S')^2}{f^2} - \frac{K^2(S')^2}{Qf^2} \quad (3.48)$$

Assim, de (3.47) e (3.48), obtemos:

$$3Q^2 + C^2 = -4zq$$

Note que $zq = -m^2$. Logo:

$$3Q^2 + C^2 = 4m^2$$

Tomando $m = \frac{M}{2}$, obtemos a relação final:

$$3Q^2 + C^2 = M^2 \quad (3.49)$$

A eq.(3.49) acima é idêntica à eq.(3.24), obtida através do teorema de Bekenstein. Fazendo $\frac{m}{q} = \frac{M}{2}$, a eq.(3.40) se identifica com (3.22). A métrica (3.43) se identifica com (3.21) desde que $K = a$.

3.2 Os Parâmetros PPN

No formalismo de Eddington–Robertson–Schiff, o elemento de linha de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas é dado, no caso de campos gravitacionais fracos, por:

$$ds^2 \simeq \left[1 - \frac{2M}{r} + 2\beta \left(\frac{M}{r} \right)^2 \right] dt^2 - \left(1 + 2\gamma \frac{M}{r} \right) d\sigma^2 \quad (3.50)$$

onde β e γ são os parâmetros PPN.

Teoricamente, $\beta = \gamma = 1$. Seus valores experimentais são [20]:

$$\beta_{\text{exp}} = 1,003 \pm 0,005 \quad , \quad \gamma_{\text{exp}} = 1,008 \pm 0,008$$

Vamos determinar os valores desses parâmetros para a Teoria de Einstein–Campo Escalar Conforme. Utilizando (3.21), podemos escrever:

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1-y}{1+y} \right)^{\frac{2}{M}(a+Q)} + \left(\frac{1-y}{1+y} \right)^{\frac{2}{M}(a-Q)} + 2 \left(\frac{1-y}{1+y} \right)^{\frac{2a}{M}} \right] dt^2 - \frac{1}{4} \left[\frac{(1-y)^{2(\frac{Q}{M}-\frac{a}{M}+1)}}{(1+y)^{2(\frac{Q}{M}-\frac{a}{M}-1)}} + \frac{(1-y)^{2(-\frac{Q}{M}-\frac{a}{M}+1)}}{(1+y)^{2(-\frac{Q}{M}-\frac{a}{M}-1)}} + 2 \frac{(1-y)^{2(1-\frac{a}{M})}}{(1+y)^{2(-1-\frac{a}{M})}} \right] d\sigma^2 \quad (3.51)$$

onde $y = \frac{M}{2r}$.

No caso de $y \ll 1$, a métrica isotrópica anterior pode ser escrita como:

$$d\bar{s}^2 \simeq \left[1 - 2\frac{a}{r} + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(1 + \frac{Q^2}{2a^2} \right) \right] dt^2 - \left[1 + \frac{2a}{r} \right] d\sigma^2 \quad (3.52)$$

Os parâmetros PPN desta teoria estão em boa concordância com aqueles da relatividade geral, pelo menos quando $\frac{Q}{a} \ll 1$.

É interessante observar que a massa geométrica original M sofre uma alteração, sendo seu novo valor dado por (3.24):

$$a = [M^2 - 3Q^2]^{1/2} \quad (3.53)$$

Se interpretarmos Q como uma espécie de “carga escalar”, veremos que o papel desta carga é o de provocar uma diminuição na massa geométrica primitiva. Este resultado é coerente com a interpretação para o campo escalar conforme obtida no capítulo anterior.

A desigualdade $a \gg Q$ é, também, bastante razoável, já que na Natureza a massa sempre supera a carga.

Epílogo

A constatação de que o chamado modelo padrão — que prevê um começo singular para o cosmo (*Big Bang*) — não fornece um quadro teórico totalmente satisfatório, nos levou, neste trabalho, a analisar mais de perto o acoplamento matéria-gravitação. Verificamos, em particular, que o problema da singularidade cosmológica é função da maneira como se dá este acoplamento.

Motivados por este resultado, partimos para a determinação de modelos homogêneos e isotrópicos — não-singulares — no âmbito de uma teoria onde a gravitação (R) se acopla diretamente com a matéria (campo escalar conforme). Utilizando a teoria de sistemas dinâmicos — e sem precisar resolver uma única equação diferencial — verificamos que existem modelos não-singulares na classe dos modelos abertos ($\varepsilon = -1$). Este resultado por si só é suficiente para revelar o importante papel que a teoria dos sistemas dinâmicos pode desempenhar na cosmologia teórica.

Chamamos a atenção para o fato de que dados cosmológicos recentes não conflitam com a idéia de um universo aberto. Do ponto de vista teórico, esta hipótese é até corroborada por teorias gravitacionais que incorporam o conceito de quebra espontânea de simetria [21,22].

Uma vez cientes que no conjunto dos modelos abertos existem subconjuntos não-singulares, partimos para a determinação analítica destas soluções. Uma solução foi então encontrada, que descreve um universo assintoticamente plano, cuja evolução cosmológica consiste de um período infinito de contração, terminando em um ponto onde o raio é mínimo, seguido por um período infinito de expansão. Este universo é estável com relação à injeção de pequenas quantidades de matéria. Determinamos em seqüência, os parâmetros

PPN da teoria. Estes estão em boa concordância com aqueles da Relatividade Geral, se $a \ll Q$, onde a faz o papel da massa geométrica efetiva e Q é a “carga escalar”. É interessante notar que a massa geométrica diminui pelo acoplamento com o campo escalar conforme, o que não é difícil de compreender, já que neste modelo o campo escalar conforme faz o papel de um fluido com densidade de energia negativa.

A continuação natural deste trabalho seria, no âmbito clássico, investigar se as soluções esféricamente simétricas encontradas no capítulo 3, prevêm a existência de buracos negros com carga escalar. Do ponto de vista quântico, seria extremamente interessante estudar a quantização de campos clássicos neste modelo cosmológico, bem como o mecanismo de criação de partículas, uma vez que este, além de ser não-singular, é assintoticamente plano, o que evita as dificuldades inerentes ao modelo padrão.

Apêndice A

Rudimentos de Cosmologia

Segundo a teoria da relatividade geral, o espaço-tempo é uma variedade quadri-dimensional M_4 dotada de uma métrica lorentziana $g_{\mu\nu}$. Esta métrica, por sua vez, está vinculada à distribuição de matéria do espaço-tempo por meio das equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

A.1 Tensor de Projeção

Se definirmos em M_4 um campo vetorial $V^\mu(x)$ tipo-tempo normalizado à unidade ($V^\mu V_\mu = 1$), poderemos identificá-lo com uma classe de observadores movendo-se com esta velocidade. Em cada ponto do espaço-tempo este campo vetorial determina um sub-espaço tri-dimensional H formado pelos vetores ortogonais a V^μ , o qual constitui um referencial inercial para o observador correspondente.

A partir de V^μ podemos construir o tensor $h_{\mu\nu}$ que projeta objetos geométricos (tensores) definidos no M_4 no referencial H do observador V^μ , pela relação:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu \quad (\text{A.2})$$

É simples mostrar que $h_{\mu\nu}$ tem as características de um projetor, ou seja:

(i) $h^2 = h$;

De fato,

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta}h^{\beta}_{\nu} &= (g_{\alpha\beta} - V_{\alpha}V_{\beta})(\delta^{\beta}_{\nu} - V^{\beta}V_{\nu}) \\ &= g_{\alpha\nu} - V_{\alpha}V_{\nu} \\ &= h_{\alpha\nu} \end{aligned}$$

(ii) h é perpendicular a V . Com Efeito:

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta}V^{\beta} &= (g_{\alpha\beta} - V_{\alpha}V_{\beta})V^{\beta} \\ &= V_{\alpha} - V_{\alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

A.2 Decomposição do Tensor de Energia–Momentum

O tensor de energia–momentum que aparece no lado direito das equações de Einstein, eqs.(A.1), pode ser decomposto em suas partes irreduzíveis ρ (densidade total de energia), p (pressão escalar), q_{μ} (fluxo de energia), $\pi_{\mu\nu}$ (pressão anisotrópica), para um observador qualquer (V^{μ}) através da relação:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu}V_{\nu} - ph_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} + 2q_{(\mu}V_{\nu)}, \quad (\text{A.3})$$

onde q_{μ} e $\pi_{\mu\nu}$ satisfazem os vínculos $q_{\mu}V^{\mu} = 0$, $\pi_{\mu\nu}V^{\nu} \equiv 0$, $\pi \equiv \pi^{\mu}_{\mu} = 0$ e $\pi_{\mu\nu} = \pi_{\nu\mu}$. Esta decomposição de $T_{\mu\nu}$ não se limita apenas a fluidos, ela pode ser realizada indistintamente para qualquer configuração, mesmo se estivermos tratando com energia associada a campos de radiação.

Como o lado esquerdo das equações de Einstein é função apenas da geometria, certamente existirão determinados tipos de fluidos que serão incompatíveis com uma dada geometria. É o caso, por exemplo, de modelos homogêneos e isotrópicos, onde q_{μ} e π_{ij} ($i \neq j$) são nulos. Na ausência de processos viscosos, o tensor de energia–momentum destes modelos é aquele de um fluido perfeito.

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu}V_{\nu} - ph_{\mu\nu} \quad (\text{A.4})$$

A.3 A Equação de Raychaudhuri

Dada uma congruência de curvas na variedade espaço-temporal M_4 definida pelo campo vetorial V^μ , que, por simplicidade, consideramos como associado ao fluido cósmico que gera a estrutura (curvatura) do espaço-tempo, pode-se mostrar que o parâmetro $\Theta \equiv V^\mu_{;\mu}$ —comumente denominado escalar de expansão— caracteriza a expansão do modelo. A equação de evolução de Θ ao longo da linha de universo do observador que se move conjuntamente com a matéria, é dada pela equação de Raychaudhuri:

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 - a^\alpha_{;\alpha} + 2(\sigma^2 - \omega^2) = R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \quad (\text{A.5})$$

onde o ponto significa derivação na direção V_α , $a_\mu = \dot{V}_\mu = V_{\mu;\nu}V^\nu$ é a aceleração, $\sigma_{\alpha\beta} = V_{(\alpha;\beta)} - \dot{V}_{(\alpha}V_{\beta)} - \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}\dot{\Theta}$ a deformação, $\omega_{\alpha\beta} = V_{[\alpha;\beta]} - \dot{V}_{[\alpha}V_{\beta]}$ a vorticidade, e $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$, $\omega^2 = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$.

Os tensores a_μ , $\sigma_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ pertencem a H , ou seja,

$$a_\mu V^\mu = 0 \quad , \quad \sigma_{\mu\nu}V^\nu \equiv 0 \quad , \quad \omega_{\alpha\beta}V^\beta \equiv 0.$$

Como o lado direito da equação de Raychaudhuri depende da geometria do espaço-tempo unicamente através de $R_{\mu\nu}$, podemos, quando conveniente, substituir $R_{\mu\nu}$ em (A.5) utilizando as equações de Einstein (A.1).

Apêndice B

O Formalismo de Tetradas

B.1 Formas Diferenciais, Produto exterior e Derivada Exterior

Consideremos a seguinte composição de diferenciais, denominada de **produto exterior**:

$$dx^\mu \wedge dx^\nu$$

o qual é anti-simétrico e associativo:

(i) $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$

(ii) $dx^\mu \wedge (dx^\nu \wedge dx^\alpha) = (dx^\mu \wedge dx^\nu) \wedge dx^\alpha = dx^{\mu\nu} \wedge dx^\alpha = dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\alpha$

Uma **p-forma** é um elemento do espaço vetorial gerado pelo produto exterior de p diferenciais e pode ser representado como um polinômio nos dx^μ :

$$A = A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (\text{B.1})$$

onde $A_{\mu_1 \dots \mu_p} = A_{[\mu_1 \dots \mu_p]}$ é um tensor covariante totalmente anti-simétrico de ordem p .

$$\begin{aligned} dx^{[\mu} \wedge dx^\nu \wedge dx^{\alpha]} &= C^{[\mu\nu\alpha]} = \frac{1}{3!} (C^{\mu\nu\alpha} - C^{\mu\alpha\nu} + C^{\nu\alpha\mu} - C^{\nu\mu\alpha} + C^{\alpha\mu\nu} - C^{\alpha\nu\mu}) \\ &= C^{\mu\nu\alpha} = dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\alpha \end{aligned}$$

Exemplos:

a) zero-forma: escalar

b) 1-forma: $A = A_\mu dx^\mu$

c) 2-forma: $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} = F_{[\mu\nu]}$)

Note que a diferencial usual é uma 1-forma:

$$df = f_{,\mu} dx^\mu \quad (\text{B.2})$$

O **produto exterior** de uma p -forma A com uma q -forma B é uma $(p + q)$ -forma

$$A \wedge B = A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}}] dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p+q}} \quad (\text{B.3})$$

que obedece às seguintes propriedades:

(a) distributiva: $(\alpha A + \beta B) \wedge C = \alpha A \wedge C + \beta B \wedge C$, onde α e β são escalares e A e B são formas do mesmo grau,

(b) associativa: $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$,

(c) $A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A$.

Uma consequência direta da terceira propriedade é que se A é uma forma qualquer de grau ímpar, então:

$$A^2 = A \wedge A = 0 \quad (\text{B.4})$$

Vimos em (B.2) que a diferencial df de uma função f pode ser interpretada como o operador d atuando sobre uma 0-forma f e gerando uma 1-forma df . Generalizemos esta operação para uma p -forma qualquer A :

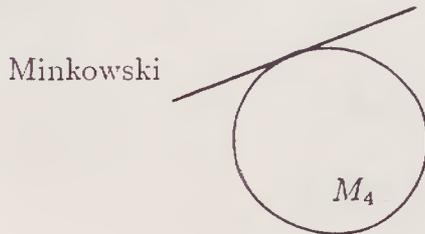
$$dA = \partial_{[\nu} A_{\mu_1 \dots \mu_p]} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (\text{B.5})$$

A operação acima é chamada **derivada exterior**. O operador d mapeia a p -forma A em uma $(p + 1)$ -forma dA . Apresentamos em seqüência alguns resultados úteis para o manuseio de derivada exterior:

- (i) $d(A + B) = dA + dB$, onde A e B são formas do mesmo grau
- (ii) $d(A \wedge B) = dA \wedge B + (-1)^p A \wedge dB$, onde A é uma p -forma e B uma forma de um grau q qualquer (Regra de Leibnitz).
- (iii) $df = f_{,\mu} dx^\mu$, sendo f uma função diferenciável
- (iv) $d(dA) = d^2 A = 0$, $\forall p$ -forma A (Lema de Poincaré)

B.2 Tetradas

Vamos introduzir em cada ponto da variedade espaço-temporal um conjunto de quatro campos vetoriais $\{e_\mu^a(x)\}$, denominados **tetradas**, que geram o espaço de Minkowski local, tangente à variedade M_4 no ponto dado. O índice a de e_μ^a denota o vetor, enquanto que o índice μ denota as componentes do vetor na variedade curva M_4 .



As seguintes relações de ortonormalidade são observadas para o campo de tetradas e_μ^a :

$$e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu} \tag{B.6}$$

$$e_\mu^a e_\nu^b g^{\mu\nu} = \eta^{ab}$$

e sua inversa e^μ_a :

$$e^\mu_a e^\nu_b \eta^{ab} = g^{\mu\nu} \tag{B.7}$$

$$e^\mu_a e^\nu_b g_{\mu\nu} = \eta_{ab}$$

onde:

$$e^{\mu}_{\ a} = g^{\mu\nu} \eta_{ab} \epsilon_{\nu}^{\ b} \quad (\text{B.8})$$

Observe que os índices latinos são levantados e abaixados pela métrica de Minkowski η_{ab} , enquanto que os índices gregos o são pela métrica $g_{\mu\nu}$ da variedade M_4 .

Em geral, dado um tensor universal $B_{\mu\nu}$, suas correspondentes componentes B_{ab} na variedade chata tangente (intuitivamente podemos imaginar o tensor $B_{\mu\nu}$ sendo “projetado” no plano tangente) podem ser obtidas diretamente, contraindo os índices dos campos das tetradas como se segue:

$$B_{ab} = e^{\mu}_{\ a} e^{\nu}_{\ b} B_{\mu\nu}$$

$$B^{ab} = \epsilon_{\mu}^{\ a} \epsilon_{\nu}^{\ b} B^{\mu\nu}$$

e vice-versa:

$$B_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu}^{\ a} \epsilon_{\nu}^{\ b} B_{ab}$$

$$B^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu}_{\ a} \epsilon^{\nu}_{\ b} B^{ab}$$

É importante observar que se $B_{\mu} B_{\nu}$ é um tensor universal, ou seja, um tensor sob transformações gerais de coordenadas, então $B_a B_b$ é um escalar universal, que, porém, se transforma como um tensor com relação às transformações de Lorentz locais que rodam o referencial de tetradas no espaço tangente local. Note que $B_{\mu} B^{\mu} = g^{\mu\nu} B_{\mu} B_{\nu} = g^{\mu\nu} \epsilon_{\mu}^{\ a} \epsilon_{\nu}^{\ b} B_a B_b = \eta^{ab} B_a B_b = B^a B_a$ é tanto um escalar universal como um escalar de Lorentz.

B.3 Cálculo com Formas Diferenciais em Variedades Riemannianas

Numa variedade riemanniana o elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Podemos reescrever este elemento de linha utilizando o campo de tetradas $\{\epsilon_\mu^a(x)\}$:

$$ds^2 = \epsilon_\mu^a dx^\mu \epsilon_\nu^b dx^\nu \eta_{ab}$$

Se definirmos agora a **base local** de 1-formas θ^a :

$$\theta^a = \epsilon_\mu^a dx^\mu$$

obteremos imediatamente:

$$ds^2 = \theta^a \theta^b \eta_{ab}.$$

Apresentamos, em seguida, um algoritmo para o cálculo das componentes do tensor de Riemann nesta base local:

- (1) Determina-se as 1-formas de rotação ω^a_b através da Primeira Equação de Estrutura de Cartan:

$$d\theta^a = -\omega^a_b \wedge \theta^b \quad (\text{B.9})$$

levando em conta que:

$$\begin{aligned} \omega^a_a &= 0 \\ \omega^0_b &= \omega^b_0 \quad (b = 1, 2, 3) \\ \omega^a_b &= -\omega^b_a \quad (a, b = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

- (2) Constrói-se, em seguida, as 2-formas de curvatura Ω^a_b através da Segunda Equação de Estrutura de Cartan:

$$\Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b \quad (\text{B.10})$$

lembrando que:

$$\begin{aligned} \Omega^a_a &= 0 \\ \Omega^0_b &= \Omega^b_0 \quad (b = 1, 2, 3) \\ \Omega^a_b &= -\Omega^b_a \quad (a, b = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

(3) As componentes do tensor de Riemann \hat{R}^a_{bcd} podem ser obtidas diretamente da equação:

$$\Omega^a_b = \frac{1}{2} \hat{R}^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d \quad (\text{B.11})$$

Recordando que \hat{R}^a_{bcd} é anti-simétrico nos índices c e d , obteremos:

$$\begin{aligned} \Omega^a_b = & \tilde{R}^a_{b01} \theta^0 \wedge \theta^1 + \tilde{R}^a_{b02} \theta^0 \wedge \theta^2 + \tilde{R}^a_{b03} \theta^0 \wedge \theta^3 \\ & + \tilde{R}^a_{b12} \theta^1 \wedge \theta^2 + \tilde{R}^a_{b13} \theta^1 \wedge \theta^3 + \tilde{R}^a_{b23} \theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Note que \hat{R}^a_{bcd} são as componentes do tensor de Riemann no referencial local de Lorentz. Para retornar à linguagem tensorial, basta lembrar que:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = e^\mu_a e_\nu^b e_\alpha^c e_\beta^d \hat{R}^a_{bcd} \quad (\text{B.13})$$

Apêndice C

A Geometria de Robertson–Walker

A Cosmologia observacional nos indica que o Universo é homogêneo e isotrópico em grande escala. O elemento de linha que exibe de forma mais geral estas propriedades é dado pela métrica de Robertson–Walker:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[d\psi^2 + \sigma^2(\psi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (\text{C.1})$$

onde $\sigma^2(\psi)$ depende de o universo ser fechado, chato ou aberto, respectivamente:

$$\sigma^2(\psi) = \begin{cases} \sin^2 \psi & , \text{ se fechado} \\ \psi^2 & , \text{ se chato} \\ \sinh^2 \psi & , \text{ se aberto} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Vamos agora encontrar as componentes do tensor de curvatura $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ usando o algoritmo apresentado na seção B.3.

(1) Como o elemento de linha em (C.1) é diagonal, uma boa escolha para θ^a é:

$$\theta^0 = dt \quad (\text{C.3})$$

$$\theta^1 = a d\psi \quad (\text{C.4})$$

$$\theta^2 = a\sigma d\theta \quad (\text{C.5})$$

$$\theta^3 = a\sigma \sin \theta d\varphi \quad (\text{C.6})$$

Lembrando que $\theta^a = \epsilon^a_\mu dx^\mu$, obtemos:

$$e^a_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a\sigma \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$e^\mu_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1}\sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1}\sigma^{-1} \sin^{-1} \theta \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Computemos agora os $d\theta^a$:

$$d\theta^0 = 0 \quad (\text{C.9})$$

$$d\theta^1 = \dot{a}dt \wedge d\psi + ad^2\psi = \frac{\dot{a}}{a}\theta^0 \wedge \theta^1 \quad (\text{C.10})$$

$$d\theta^2 = \frac{\sigma'}{a\sigma}\theta^1 \wedge \theta^2 + \frac{\dot{a}}{a}\theta^0 \wedge \theta^2 \quad (\text{C.11})$$

$$d\theta^3 = \frac{\sigma'}{a\sigma}\theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\dot{a}}{a}\theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{\cot \theta}{a\sigma}\theta^2 \wedge \theta^3 \quad (\text{C.12})$$

onde $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ e $\sigma' = \frac{d\sigma}{dt}$.

Utilizando a Primeira Equação de Estrutura de Cartan, podemos escrever:

$$d\theta^1 = -\omega^1_0 \wedge \theta^0 - \omega^1_2 \wedge \theta^2 - \omega^1_3 \wedge \theta^3,$$

$$d\theta^2 = -\omega^2_0 \wedge \theta^0 - \omega^2_1 \wedge \theta^1 - \omega^2_3 \wedge \theta^3,$$

$$d\theta^3 = -\omega^3_0 \wedge \theta^0 - \omega^3_1 \wedge \theta^1 - \omega^3_2 \wedge \theta^2.$$

Comparando estas equações com aquelas obtidas no item (1), obtemos as 1-formas de rotação não nulas:

$$\omega^0_1 = \frac{\dot{a}}{a}\theta^1, \quad \omega^0_2 = \frac{\dot{a}}{a}\theta^2, \quad \omega^0_3 = \frac{\dot{a}}{a}\theta^3,$$

$$\omega_2^1 = -\frac{\sigma'}{a\sigma}\theta^2, \quad \omega_3^1 = -\frac{\sigma'}{a\sigma}\theta^3,$$

$$\omega_3^2 = -\frac{\cot\theta}{a\sigma}\theta^3.$$

(2) Agora, usando (B.10), determinamos as componentes da 2-forma de curvatura Ω^a_b :

$$\Omega^0_1 = d\omega^0_1 + \omega^0_c \wedge \omega^c_1 = \frac{\ddot{a}}{a}\theta^0 \wedge \theta^1$$

Levando este resultado em(B.13), obtemos:

$$\tilde{R}^0_{101} = \frac{\ddot{a}}{a}.$$

Vejamos as demais componentes:

$$\Omega^0_2 = \frac{\ddot{a}}{a}\theta^0 \wedge \theta^2 \longrightarrow \tilde{R}^0_{202} = \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$\Omega^0_3 = \frac{\ddot{a}}{a}\theta^0 \wedge \theta^3 \longrightarrow \tilde{R}^0_{303} = \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$\Omega^1_2 = \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\sigma''}{a^2\sigma} \right) \theta^1 \wedge \theta^2 \longrightarrow \tilde{R}^1_{212} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\sigma''}{a^2\sigma}$$

Como:

$$\varepsilon = -\frac{\sigma''}{\sigma} = \begin{cases} +1 & ; \text{ fechado} \\ 0 & ; \text{ chato} \\ -1 & ; \text{ aberto} \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

segue-se que:

$$\tilde{R}^1_{212} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^2}$$

A mesma definição se aplica a Ω^1_3 :

$$\Omega^1_3 = \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^2} \right) \theta^1 \wedge \theta^3 \longrightarrow \tilde{R}^1_{313} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^2}$$

Para Ω^2_3 :

$$\Omega^2_3 = \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1 - (\sigma')^2}{a^2 \sigma^2} \right) \theta^2 \wedge \theta^3$$

Mas, é fácil mostrar que:

$$\varepsilon = \frac{1 - (\sigma')^2}{\sigma^2} \quad (\text{C.14})$$

Logo:

$$\tilde{R}^2_{323} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^2}$$

(3) As componentes do tensor de Riemann na base local são, pois:

$$\tilde{R}^0_{101} = \tilde{R}^0_{202} = \tilde{R}^0_{303} = \frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{C.15})$$

$$\tilde{R}^1_{212} = \tilde{R}^1_{313} = \tilde{R}^2_{323} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^2} \quad (\text{C.16})$$

De posse das componentes de \tilde{R}^a_{bcd} , vamos agora obter as componentes do tensor de Ricci:

$$\tilde{R}_{ab} = \tilde{R}^c_{abc} \quad (\text{C.17})$$

Desta forma:

$$\tilde{R}_{00} = \tilde{R}^1_{001} + \tilde{R}^2_{002} + \tilde{R}^3_{003} = \tilde{R}^0_{101} + \tilde{R}^0_{202} + \tilde{R}^0_{303} = 3 \frac{\ddot{a}}{a}$$

Como $\tilde{R}_{01} = \tilde{R}^2_{012} + \tilde{R}^3_{013} = 0 = \tilde{R}_{02} = \tilde{R}_{03} = \dots$, vemos que \tilde{R}_{ab} deve ser diagonal.

$$\tilde{R}_{11} = \tilde{R}^0_{110} + \tilde{R}^2_{112} + \tilde{R}^3_{113} = -\tilde{R}^0_{101} - \tilde{R}^1_{212} - \tilde{R}^1_{313} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\varepsilon}{a^2} \right)$$

E, dando prosseguimento aos cálculos, observa-se que $\tilde{R}_{22} = \tilde{R}_{11}$ e $\tilde{R}_{33} = \tilde{R}_{11}$.

O escalar de curvatura é dado por:

$$\begin{aligned}\tilde{R} = \tilde{R}^0_0 + \tilde{R}^1_1 + \tilde{R}^2_2 + \tilde{R}^3_3 &= \tilde{R}_{00} - \tilde{R}_{11} - \tilde{R}_{22} - \tilde{R}_{33} = \\ &= 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^2} \right)\end{aligned}\tag{C.18}$$

É fácil ver que $R = \tilde{R}$, onde R é o escalar de curvatura na base dx^μ .²

Abaixo, destacamos R e os \tilde{R}_{ab} não nulos:

$$\tilde{R}_{00} = \frac{3\ddot{a}}{a}\tag{C.19}$$

$$\tilde{R}_{11} = \tilde{R}_{11} = \tilde{R}_{11} = - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\varepsilon}{a^2} \right)\tag{C.20}$$

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^2} \right)\tag{C.21}$$

Retornemos, agora, à base dx^μ , lembrando que $R_{\mu\nu} = \epsilon_\mu^a \epsilon_\nu^b \tilde{R}_{ab}$:

$$R_{00} = \tilde{R}_{00} \longrightarrow R^0_0 = \tilde{R}_{00}$$

$$R_{11} = a^2 \tilde{R}_{11} \longrightarrow R^1_1 = -\tilde{R}_{11}$$

$$R_{22} = a^2 \sigma^2 \tilde{R}_{22} \longrightarrow R^2_2 = -\tilde{R}_{22}$$

$$R_{33} = a^2 \sigma^2 \sin^2 \theta \tilde{R}_{33} \longrightarrow R^3_3 = -\tilde{R}_{33}$$

As componentes do tensor de Ricci na base dx^μ são, pois, dadas por:

$$R^0_0 = \frac{3\ddot{a}}{a}\tag{C.22}$$

$$R^1_1 = R^2_2 = R^3_3 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\varepsilon}{a^2}\tag{C.23}$$

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^2} \right)\tag{C.24}$$

²O escalar de curvatura, como qualquer escalar, não muda na base local:

$$R = R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \epsilon_\mu^a \epsilon_\nu^b \tilde{R}_{ab} = \eta^{ab} \tilde{R}_{ab} = \tilde{R}^a_a = \tilde{R}$$

Apêndice D

A Forma Conformemente Plana da Métrica de Robertson–Walker

Como a métrica de Robertson–Walker é conformemente plana ³, podemos escrevê-la de modo tal a explicitar esta simetria, o que, em muitos casos, facilita a obtenção das soluções das equações de Einstein em forma analítica.

Consideremos, pois, a forma conformemente plana da métrica de Robertson–Walker, ou seja:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - d\psi^2 - \sigma^2(\psi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (\text{D.1})$$

onde $a(\eta)$ é função do tempo conforme η e $\sigma(\psi)$ é dado como no apêndice B.

O tempo cósmico pode ser obtido novamente a partir do tempo conforme:

$$dt = a(\eta)d\eta$$

Seguindo um procedimento análogo ao do apêndice C, vamos determinar as componentes do tensor $R_{\mu\nu}$.

³Sua métrica pode ser colocada na forma $g_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$

(1) Seja, pois, a base local de 1-formas:

$$\begin{aligned}
 \theta^0 &= a(\eta)d\eta \\
 \theta^1 &= a(\eta)d\psi \\
 \theta^2 &= a(\eta)\sigma(\psi)d\theta \\
 \theta^3 &= a(\eta)\sigma(\psi)\sin\theta d\varphi
 \end{aligned}
 \tag{D.2}$$

O campo de tetradas e seu inverso são dados por:

$$\epsilon^a{}_\mu = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a\sigma\sin\theta \end{pmatrix}
 \tag{D.3}$$

$$\epsilon^\mu{}_a = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1}\sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1}\sigma^{-1}\sin^{-1}\theta \end{pmatrix}
 \tag{D.4}$$

Utilizando (D.2), calculamos as componentes da derivada exterior $d\theta^a$:

$$\begin{aligned}
 d\theta^0 &= 0 \\
 d\theta^1 &= \frac{\dot{a}}{a^2}\theta^0 \wedge \theta^1 \\
 d\theta^2 &= \frac{\dot{a}}{a^2}\theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{\sigma'}{a\sigma}\theta^1 \wedge \theta^2 \\
 d\theta^3 &= \frac{\dot{a}}{a^2}\theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{\sigma'}{a\sigma}\theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\cot\theta}{a\sigma}\theta^2 \wedge \theta^3
 \end{aligned}
 \tag{D.5}$$

Levando (D.5) na Primeira Equação de Estrutura de Cartan, obtemos as 1-formas de rotação:

$$\omega_1^0 = \frac{\dot{a}}{a^2}\theta^1, \quad \omega_2^0 = \frac{\dot{a}}{a^2}\theta^2, \quad \omega_3^0 = \frac{\dot{a}}{a^2}\theta^3,$$

$$\omega_2^1 = -\frac{\sigma'}{a\sigma}\theta^2, \quad \omega_3^1 = -\frac{\sigma'}{a\sigma}\theta^3, \\ \omega_3^2 = -\frac{\cot\theta}{a\sigma}\theta^3.$$

As componentes da 2-forma de curvatura e do tensor de Riemann na base local são dadas por:

$$\begin{aligned} \Omega_1^0 &\longrightarrow \hat{R}^0_{101} = \frac{\ddot{a}}{a^3} - \left(\frac{\dot{a}}{a^2}\right)^2 \\ \Omega_2^0 &\longrightarrow \hat{R}^0_{202} = \frac{\ddot{a}}{a^3} - \left(\frac{\dot{a}}{a^2}\right)^2 \\ \Omega_3^0 &\longrightarrow \hat{R}^0_{303} = \frac{\ddot{a}}{a^3} - \left(\frac{\dot{a}}{a^2}\right)^2 \\ \Omega_2^1 &\longrightarrow \hat{R}^1_{212} = \frac{\dot{a}^2}{a^4} + \frac{\varepsilon}{a^2} \\ \Omega_3^1 &\longrightarrow \hat{R}^1_{313} = \frac{\dot{a}^2}{a^4} + \frac{\varepsilon}{a^2} \\ \Omega_3^2 &\longrightarrow \hat{R}^2_{323} = \frac{\dot{a}^2}{a^4} + \frac{\varepsilon}{a^2} \end{aligned} \tag{D.6}$$

(3) Logo, na base local:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{00} &= 3\left(\frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4}\right) \\ \tilde{R}_{11} &= \tilde{R}_{22} = \tilde{R}_{33} = -\frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4} - \frac{2\varepsilon}{a^2} \\ \tilde{R} &= R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a^3} + \frac{\varepsilon}{a^2}\right) \end{aligned} \tag{D.7}$$

Retornando à base original, obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} R^0_0 &= 3\left(\frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4}\right) \\ R^1_1 &= R^2_2 = R^3_3 = \frac{\ddot{a}}{a^3} + \frac{\dot{a}^2}{a^4} + \frac{2\varepsilon}{a^2} \\ R &= 6\left(\frac{\ddot{a}}{a^3} + \frac{\varepsilon}{a^2}\right) \end{aligned} \tag{D.8}$$

Apêndice E

A Métrica de Schwarzschild em Forma Isotrópica

A forma isotrópica do elemento de linha de Schwarzschild é dada por:

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\mu(r)} \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (\text{E.1})$$

onde ν e μ são funções somente da variável r .

Vamos calcular o tensor de Ricci relativo a esta métrica, utilizando o algoritmo da seção B.3.

Partindo da base local de 1-formas:

$$\begin{aligned} \theta^0 &= e^\nu dt \\ \theta^1 &= e^\mu dr \\ \theta^2 &= r e^\mu d\theta \\ \theta^3 &= r \sin \theta e^\mu d\varphi \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

calculamos as derivadas exteriores destas quantidades:

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= -e^{-\mu} \nu' \theta^0 \wedge \theta^1 \\ d\theta^1 &= 0 \\ d\theta^2 &= \frac{e^{-\mu}}{r} (1 + r\mu') \theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

$$d\theta^3 = \frac{e^{-\mu}}{r}(1+r\mu')\theta^1\wedge\theta^3 + \frac{e^{-\mu}}{r}\cot\theta\theta^2\wedge\theta^3$$

As componentes não nulas da 1-forma de rotação são dadas por:

$$\begin{aligned}\omega_1^0 &= e^{-\mu}\nu'\theta^0 \\ \omega_1^2 &= \frac{e^{-\mu}}{r}(1+r\mu')\theta^2 \\ \omega_1^3 &= \frac{e^{-\mu}}{r}(1+r\mu')\theta^3 \\ \omega_2^3 &= \frac{e^{-\mu}}{r}\cot\theta\theta^3\end{aligned}$$

A 2-forma de curvatura fornece as seguintes componentes para o tensor de Riemann na base local:

$$\begin{aligned}\tilde{R}^0_{101} &= e^{-2\mu}[\nu'\mu' - \nu'' - (\nu')^2] \\ \tilde{R}^0_{202} &= \tilde{R}^0_{303} = -e^{-2\mu}\left[\frac{\nu'}{r} + \nu'\mu'\right] \\ \tilde{R}^1_{212} &= \tilde{R}^1_{313} = -e^{-2\mu}\left[\frac{\mu'}{r} + \mu''\right] \\ \tilde{R}^2_{323} &= -e^{-2\mu}\left[\frac{2\mu'}{r} + (\mu')^2\right]\end{aligned}\tag{E.3}$$

Lembrando que:

$$e^a_{\mu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & re^{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\sin\theta e^{\mu} \end{pmatrix}\tag{E.4}$$

$$e^{\mu}_a = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1}e^{-\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-1}\sin^{-1}\theta e^{-\mu} \end{pmatrix}\tag{E.5}$$

podemos escrever finalmente:

$$\begin{aligned}R^0_0 &= -e^{-2\mu} \left[\nu'' + (\nu')^2 + \nu'\mu' + \frac{2\nu'}{r} \right] \\R^1_1 &= e^{-2\mu} \left[\nu'\mu' - \nu'' - (\nu')^2 - \frac{2\mu'}{r} - 2\mu'' \right] \\R^2_2 &= R^3_3 = -e^{-2\mu} \left[\frac{\nu'}{r} + \nu'\mu' + \frac{3\mu'}{r} + \mu'' + (\mu')^2 \right] \\R &= -2e^{-2\mu} \left[\nu'' + (\nu')^2 + \frac{2\nu'}{r} + \frac{4\mu'}{r} + 2\mu'' + \nu'\mu' + (\mu')^2 \right]\end{aligned}\tag{E.6}$$

Apêndice F

Variedades Conformemente Relacionadas

Duas variedades M e \bar{M} são ditas **conformemente relacionadas**, se seus tensores métricos $g_{\mu\nu}$ e $\bar{g}_{\mu\nu}$ obedecem à relação:

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2F} g_{\mu\nu} \quad (\text{F.1})$$

onde $F = F(x)$ é uma função real.

O mapeamento entre M e \bar{M} , ou seja:

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2F} g_{\mu\nu} \quad (\text{F.2})$$

é então denominado de **transformação conforme**. Esta transformação preserva o ângulo entre dois vetores em um dado ponto da variedade:

$$\begin{aligned} \cos \bar{\theta} &= \frac{\bar{\xi}^\alpha \bar{\eta}_\alpha}{\|\bar{\xi}\| \cdot \|\bar{\eta}\|} \\ &= \frac{\bar{g}^{\alpha\beta} \bar{\xi}_\alpha \bar{\eta}_\beta}{\sqrt{\bar{g}^{\alpha\beta} \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta} \sqrt{\bar{g}^{\alpha\beta} \bar{\eta}_\alpha \bar{\eta}_\beta}} \\ &= \frac{\xi^\alpha \eta_\alpha}{\|\xi\| \cdot \|\eta\|} \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

É importante ressaltar que não existe nenhuma relação entre transformações conforme e de coordenadas.

Pode-se determinar facilmente a ação da transformação conforme sob os elementos geométricos básicos da variedade, através de (F.2). Em particular, serão de interesse:

$$ds^2 \longrightarrow d\bar{s}^2 = e^{2F} ds^2 \quad (\text{F.3})$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \longrightarrow \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \delta^\alpha_\beta F_{,\gamma} + \delta^\alpha_\gamma F_{,\beta} - g_{\beta\gamma} F^{,\alpha} \quad (\text{F.4})$$

$$R \longrightarrow \bar{R} = e^{-2F} [R + 6(\square F + F_{,\alpha} F^{,\alpha})] \quad (\text{F.5})$$

A expressão (F.3) mostra claramente que a transformação conforme consiste em uma regradação local de réguas e relógios sobre uma das variedades.

Se atribuírmos ao campo escalar ϕ a lei de transformação

$$\phi \longrightarrow \bar{\phi} = e^{-F} \phi \quad (\text{F.6})$$

poderemos construir uma equação de Klein-Gordon conformemente invariante.

De fato:

$$\begin{aligned} \bar{\square} \bar{\phi} &= \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \left(\sqrt{-\bar{g}} \bar{\phi}^\mu \right)_{,\mu} \\ &= e^{-3F} [\square \phi - \phi (\square F + F_{,\mu} F^{,\mu})]. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Por outro lado:

$$\bar{R} \bar{\phi} = e^{-3F} [R \phi + 6\phi (\square \phi + F_{,\mu} F^{,\mu})]. \quad (\text{F.8})$$

De (F.7) e (F.8), obtemos:

$$\bar{\square} \bar{\phi} + \frac{\bar{R}}{6} \bar{\phi} = e^{-3F} \left\{ \square \phi + \frac{R}{6} \phi \right\}.$$

Este resultado nos revela que a equação modificada de Klein-Gordon:

$$\square \phi + \frac{R}{6} \phi = 0$$

é uma equação conformemente invariante, desde que ϕ siga a lei de transformação conforme $\bar{\phi} = e^{-F} \phi$.

Apêndice 12

Equações Acopladas em Bandeira Quarta Potência Conformal

Este apêndice contém as equações acopladas em conformal para a quarta potência da curvatura.

As equações são derivadas a partir da ação de Einstein-Hilbert com um termo de curvatura elevada à quarta potência.

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} R - \frac{1}{4} R^2 \right)$$

onde R é o escalar de curvatura.

As equações de campo são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (R^2)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R^2$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento e $(R^2)_{\mu\nu}$ é o tensor derivado da segunda derivada da curvatura.

Apêndice G

Equações Acopladas de Einstein–Campo Escalar Conforme

A ação que descreve um campo escalar real conformemente acoplado à gravitação einsteiniana é dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{\kappa} + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - \frac{R}{6} \phi^2 \right) \quad (\text{G.1})$$

onde $S_g = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{\kappa}$ é a ação ordinária de Einstein–Hilbert. Vamos mostrar que:

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - \frac{R}{6} \phi^2 \right)$$

é conformemente invariante.

$$\begin{aligned} \bar{S}_\phi &= \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{\phi}_{,\alpha} \bar{\phi}^{,\alpha} \frac{\bar{R}}{6} \bar{\phi}^2 \right) = \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} e^{4F} \left\{ \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{\phi}_{,\alpha} \bar{\phi}_{,\beta} - \frac{e^{-2F}}{6} [R + 6(\square F + F_{,\alpha} F^{,\alpha})] e^{-2F} \phi^2 \right\} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ F_{,\alpha} F^{,\alpha} \phi^2 + 2F^{,\alpha} \phi_{,\alpha} \phi + \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - \frac{R}{6} \phi^2 - \phi^2 \square F - F_{,\alpha} F^{,\alpha} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - \frac{R}{6} \phi^2 \right\} - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ 2F^{,\alpha} \phi_{,\alpha} \phi + \phi^2 \square F \right\} \quad (\text{G.2})$$

Porém:

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \phi^2 \square F \right\} &= \int d^4x \sqrt{-g} \phi^2 \frac{\partial_\alpha (\sqrt{-g} F^{,\alpha})}{\sqrt{-g}} = \\ &= \int d^4x \phi^2 \partial_\alpha (\sqrt{-g} F^{,\alpha}) = \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} 2\phi \phi_{,\alpha} F^{,\alpha} \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

substituindo este resultado em (G.2), vemos que:

$$\tilde{S}_\phi = S_\phi$$

As equações de campo são obtidas pela variação da ação S .

Variando S em relação a ϕ , obtemos:

$$\begin{aligned} \delta_\phi S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[2\phi_{,\alpha} \partial^\alpha (\delta\phi) - \frac{R}{6} \cdot 2\phi \delta\phi \right] = \\ &= [\sqrt{-g} 2\phi_{,\alpha} \delta\phi]_{\text{sup.}} + \int d^4x \sqrt{-g} \left[-2\phi_{,\alpha} \delta\phi - \frac{R\phi}{3} \delta\phi \right] = \\ &= -2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[\square\phi + \frac{R}{6}\phi \right] \delta\phi \end{aligned}$$

A equação de movimento para o campo ϕ é, pois:

$$\square\phi + \frac{R}{6}\phi = 0 \quad (\text{G.4})$$

Vamos agora variar S em relação a $g_{\mu\nu}$, lembrando que:

$$\delta R = (R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{G.5})$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{G.6})$$

Façamos a variação das partes da ação S , separadamente:

$$\delta_g S_g = \frac{1}{\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \delta g^{\mu\nu}$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$.

Tanto $g_{\mu\nu}$ quanto $\sqrt{-g}$ são transparentes à derivada covariante ∇_α . Usando o teorema de Gauss, obtemos:

$$\delta_g S_g = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{G_{\mu\nu}}{\kappa} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{G.7})$$

Vejamos agora a variação δ_g da parte da ação com campo escalar:

$$\begin{aligned} \delta_g S_\phi &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \frac{R}{6} \phi^2 + \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\phi^2}{6} (R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \right\} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2}g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi_{,\alpha} + \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - G_{\mu\nu} \frac{\phi^2}{6} - \frac{\phi^2}{6} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \right\} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Passemos à integração por partes do último termo obtido na integral. Usando $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} \equiv 0 \equiv \nabla^\mu g_{\mu\nu}$ e $\nabla_\mu \sqrt{-g} \equiv 0$, teremos que:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \phi^2 (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\rho) \delta g^{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} [(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \phi^2] \delta g^{\mu\nu}$$

onde ∇_μ e ∇_ν foram invertidos, já que $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \equiv 0$ quando aplicado a um escalar. Assim:

$$\delta_g S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2}g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi_{,\alpha} + \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - G_{\mu\nu} \frac{\phi^2}{6} - \frac{1}{6} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \phi^2 \right\} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{G.9})$$

De (G.7) e (G.9) obtemos finalmente:

$$G_{\mu\nu} \left(1 - \frac{\kappa \phi^2}{6} \right) = -\kappa \left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi_{,\alpha} + \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{1}{6} (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \phi^2 \right] \quad (\text{G.10})$$

Referências

- [1] M NOVELLO, Proceedings of the V School of Cosmology and Gravitation (World Scientific, Singapore, 1987).
- [2] S W HAWKING AND G F R ELLIS, The Large Structure of Spacetime (Cambridge University Press, UK, 1973).
- [3] A J ACCIOLY AND U F WICHOSKI, Pseudogravitational Non-minimally Coupled Theories, *Class. Quantum Grav.* **7**, L139–L141 (1990).
- [4] A J ACCIOLY AND B M PIMENTEL, A Theory of Gravity with Broken Symmetry, *Can. J. Phys.* **68**, 1183–1186 (1990); A J ACCIOLY, C M G DE SOUSA, U F WICHOSKI, A Non-Singular Eternal Universe (Submetido a *Fortschritte der Physik*).
- [5] J D BEKENSTEIN, Exact Solutions of Einstein-Conformal Scalar Equations, *Ann. Phys.* **82**, 535–547 (1974).
- [6] A J ACCIOLY, C M G DE SOUSA AND U F WICHOSKI, Gravitational Nonminimal Couplings III. The Cosmological Singularity and the Conformal Scalar Field (submetido a *Brazilian Journal of Physics*).
- [7] A J ACCIOLY, C M G DE SOUSA AND U F WICHOSKI, A No-Bang Universe (Submetido a *Classical and Quantum Gravity*).
- [8] D KRAMER, H STEPHANY, M MACCALLUM AND E HERLT, Exact Solutions of Einstein's Field Equations (Deustcher Verlag de Wissenchaften, Berlin, 1980).
- [9] S WEINBERG, Gravitation and Cosmology (Wiley, N.Y., 1972).

- [10] N D BIRREL AND P C W DAVIES, Quantum Fields in Curved Space (Cambridge Univ. Press, 1982).
- [11] A PAPAPETROU, Lectures on General Relativity (D Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1974).
- [12] W HUREWICS, Lectures on Ordinary Differential Equations (Dover, 1990).
- [13] V ARNOLD, Équations Différentielles Ordinaires (Éditions Mir, 1974).
- [14] C M G DE SOUSA, Estudo sobre a Esfera de Poincaré, *Monografia do Instituto de Física Teórica*, 1991.
- [15] A A ANDRONOV, E A LEONTOVICH, I I GORDON AND A G MAIER, Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems (John W& S, 1973).
- [16] R WALD, General Relativity (Univ. of Chicago Press, 1984).
- [17] E W KOLB AND M S TURNER, The Early Universe: Reprints (Addison-Wesley Publ. Co.,1988).
- [18] E A MILNE, World-Structure and the Expansion of the Universe, *Nature* (London), **269**, 41 (1932).
- [19] H BONDI, Cosmology (Cambr. Univ. Press, Cambridge, 1952).
- [20] I I SHAPIRO, C C COUNSELMAN AND R W KING, Verification of the Principle of Equivalence for Massive Bodies, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 555-558 (1976).
- [21] A A GRIB, V M MOSTEPANENKO AND V M FROLOV, Spontaneous Breaking of Gauge Symmetry in a Nonstationary Isotropic Metric, *Theor. Math. Phys.* **33**, 869-876 (1977).
- [22] H FLEMING AND V L R DA SILVEIRA, Phase Transitions in Cosmological Models: Temperature vs Curvature, *Nuovo Cimento* **58B**, 208-214 (1980).

