UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA

Marcelo Carlos de Proença

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: ANÁLISE DE UM PROCESSO DE FORMAÇÃO NO CONTEXTO DO ESTÁGIO CURRICULAR SUPERVISIONADO

Bauru-SP

2012

MARCELO CARLOS DE PROENÇA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: ANÁLISE DE UM PROCESSO DE FORMAÇÃO NO CONTEXTO DO ESTÁGIO CURRICULAR SUPERVISIONADO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, da área de concentração em Ensino de Ciências e Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", *campus* de Bauru, como requisito para obtenção do título de doutor.

Orientador: Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola.

Bauru-SP

2012

Proença, Marcelo Carlos de.
A resolução de problemas na licenciatura em matemática: análise de um processo de formação no contexto do estágio curricular supervisionado / Marcelo Carlos de Proença, 2012.
208 f. : il.

Orientador: Nelson Antonio Pirola

Tese (Doutorado)– Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2012.

1. Licenciatura em matemática. 2. Resolução de problemas. 3. Estágio curricular supervisionado. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências. II. Título.

unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE BAURU
FACULDADE DE CIENCIAS DE BAURU

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE MARCELO CARLOS DE PROENÇA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DO(A) FACULDADE DE CIENCIAS DE BAURU.

Aos 13 dias do mês de abril do ano de 2012, às 09:30 horas, no(a) Sala de Videoconferência da FAAC - STI, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA do(a) Departamento de Educação / Faculdade de Ciencias de Bauru, Profa. Dra. ANA MARIA DIAS ROQUE DE LEMOS BOAVIDA do(a) Departamento de Matemática / Instituto Politécnico de Setúbal, Profa. Dra. MARIA RAQUEL MIOTTO MORELATTI do(a) Departamento de Matemática, Estatística e Computação / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente, Profa. Dra. EDNA MAURA ZUFFI do(a) ICMC/USP/São Carlos, Profa. Dra. RAQUEL GOMES DE OLIVEIRA do(a) Departamento de Educação / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a argüição pública da TESE DE DOUTORADO de MARCELO CARLOS DE PROENÇA, intitulado "A Resolução de Problemas na Licenciatura em Matemática: Análise de um Processo de Formação no Contexto do Estágio Curricular Supervisionado". Após a exposição, o discente foi argüido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA

Profa. Dra. ANA MARIA DIAS ROQUE DE LEMOS BOAVIDA

Profa. Dra. MARIA RAQUEL MIOTTO MORELATTI

Profa. Dra. EDNA MAURA ZUFFI

Profa. Dra. RAQUEL GOMES DE OLIVEIRA

A Profª Drª Ana Maria Dias Roque de Lemos Barrada participou da defesa por videoconferência.

AGRADECIMENTOS

Ao professor doutor Nelson Antonio Pirola (FC-UNESP/Bauru), orientador e grande amigo, pela atenção e valiosas orientações, indispensáveis à realização da tese.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências da UNESP/Bauru pelo apoio às dúvidas relacionadas ao campo da pesquisa acadêmica.

À secretaria do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências – UNESP/Bauru que sempre mostrou grandiosa disposição em benefício dos pós-graduandos.

Ao professor doutor Valter Locci do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências – UNESP/Bauru pelas dicas e sugestões grandiosas na revisão da lista de problemas de matemática.

Às professoras Ana Maria Dias Roque de Lemos Boavida (Instituto Politécnico de Setúbal – Portugal) e Raquel Gomes de Oliveira (UNESP/Presidente Prudente) pelas valiosas contribuições que enriqueceram a tese no Exame de Qualificação e de Defesa.

Às professoras Edna Maura Zuffi (USP/São Carlos) e Maria Raquel Miotto Morelatti (UNESP/Presidente Prudente) pelas imensas contribuições que enriqueceram a tese no Exame de Defesa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Capes – pelo auxílio financeiro concedido (Bolsa Capes de doutorado) para a realização da pesquisa no período de março de 2009 a junho de 2011.

Ao meu amor, *Daniela Canelada Arantes*, companheira de todos os momentos e que esteve ao meu lado no percurso final da minha tese.

RESUMO

O objetivo da presente pesquisa de doutorado foi o de investigar questões relacionadas à formação inicial do futuro professor de Matemática sobre a resolução de problemas. Para isso, buscamos responder aos seguintes problemas de pesquisa: Uma intervenção, baseada em um Curso sobre Resolução de Problemas e em regências de aula, favorece a formação do futuro professor de Matemática para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar por meio da resolução de problemas? Quais as possibilidades e limites para a implementação do trabalho com a resolução de problemas nas regências de aula do estágio curricular supervisionado pelos futuros professores de Matemática? O embasamento teórico se deu por meio de autores ligados à teoria dos saberes docentes – Shulman (1986, 1987), Gauthier et al. (1998), Tardif (2007) – e à formação inicial de professores e, sobretudo, à teoria da resolução de problemas – Echeverría e Pozo (1998), Schroeder e Lester (1989) entre outros. Os sujeitos da pesquisa foram quatro licenciandos em Matemática que cursavam o último ano do curso. Os dados foram coletados por meio: (1) de entrevistas iniciais; (2) da participação em um processo de intervenção que envolveu um Curso sobre Resolução de Problemas e a atuação em regências de aula que buscavam implementar os conhecimentos aprendidos nesse curso para o ensino-aprendizagem de três conteúdos: um de aritmética, um de álgebra e um de geometria; e (3) de entrevistas finais que avaliaram o trabalho desenvolvido. A análise dos dados mostrou que, antes da intervenção, os sujeitos tinham pouco conhecimento sobre os aspectos que caracterizavam a resolução de problemas no ensino. Nas regências de aula, esses sujeitos tiveram dificuldades em desenvolver uma discussão das estratégias de resolução dos alunos. Isso se relacionou às dificuldades dos sujeitos em propor problemas com mais de uma estratégia e à falta de conhecimentos básicos de matemática dos alunos, associada à cultura escolar atual que tem baseado o ensino de Matemática em definições, fórmulas e exercícios. De modo geral, apesar da formação favorecida pelo curso e considerando os limites encontrados nas regências de aula, o sujeito S4 não evidenciou os aspectos principais da abordagem da resolução de problemas no ensino. Ao contrário disso, os sujeitos S1, S2 e S3 mostraram ter condições para ensinar Matemática por meio da resolução de problemas.

Palavras-chave: Licenciatura em Matemática; Resolução de Problemas; Formação inicial; Estágio Curricular Supervisionado; Ensino-aprendizagem da Matemática.

ABSTRACT

The aim of this doctoral research was to investigate issues related to initial training of a future mathematics teacher about problem solving. For this, the following research problems are answered: Does an intervention, based on a Course about Problem Solving and regencies in class, favor the formation of future mathematics teacher for teaching-learning of school mathematics through problem solving? What are the possibilities and limits for the work implementation with the problem solving in the class regencies of the supervised academic training program by the future mathematics teachers? The theoretical basis was given by authors linked to the teachers' knowledge theory – Shulman (1986, 1987), Gauthier et al. (1998), Tardif (2007) – and to the teachers' initial training, and specially, the problem solving theory – Echeverría and Pozo (1998), Schroeder and Lester (1989) among others. The investigation subjects were four undergraduate students in mathematics who attended the last year of the course. Data were collected through: (1) initial interviews, (2) participation in an intervention process which involved a course on problem solving and the performance in class regencies that they tried to implement the knowledge learned in this course for teaching-learning of three contents: arithmetic, algebra and geometry; and (3) the final interviews that assessed the developed work. The data analysis showed that, before the intervention, the subjects had little knowledge about the aspects that characterized the problem solving in teaching. In the class regencies, these subjects had difficulties in developing a discussion of students' solving strategies. This was related to subjects' difficulties in proposing problems with more than one strategy and lack of basic mathematical skills of students, associated with the current school culture that is based on the teaching of mathematics in definitions, formulas and exercises. Overall, despite the formation favored by the course and considering the limits found in the class regencies, subject S4 did not evidence the main aspects of the problem solving approach in teaching. In contrast, subjects S1, S2 and S3 showed to be able to teach mathematics through problem solving.

Key-words: Degree in Mathematics; Problem Solving; Initial training; Supervised Academic Training Programs; Teaching-learning of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Nesta seção, o objetivo é o de apresentar aspectos da trajetória docente e de pesquisa que levaram o pesquisador desta tese a investigar a temática relacionada à resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática.

Do ano de 2002 a 2005 o pesquisador se graduou em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP, *campus* de Bauru-SP. Desde o primeiro ano desse curso, participou de atividades ligadas à pesquisa na área da Educação Matemática. Desenvolveu trabalhos para eventos da área a respeito da formação de conceitos geométricos e sobre resolução de problemas, bem como uma pesquisa de Iniciação Científica, a qual teve financiamento da Fapesp[1].

Todos esses estudos tiveram a orientação do professor Nelson Antonio Pirola e, com a realização dessa pesquisa de Iniciação Científica e com a participação do pesquisador no Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática, coordenado pelo referido professor, foi possível, também, elaborar um projeto de pesquisa sobre a formação de conceitos geométricos de alunos do Ensino Médio, o qual se materializou em sua dissertação de mestrado (2008), obtida como discente no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da mesma universidade onde foi graduado, obtendo bolsa parcial da Capes[2].

Concomitante às atividades do mestrado, o pesquisador participou como professor formador, no período de 2006 a 2007, pelo Centro de Educação Continuada em Educação Matemática, Científica e Ambiental (CECEMCA) – um projeto do Ministério da Educação em parceira com a UNESP – destinado à formação continuada de professores da Educação Infantil e de séries iniciais do Ensino Fundamental.

Antes de ingressar como discente do curso de doutorado desse mesmo programa de pós-graduação, trabalhou como professor em um colégio particular e como professor substituto em algumas escolas públicas da cidade de Bauru no ano de 2008. Porém, foi na tentativa de realizar um ensino por meio da resolução de problemas nas escolas públicas que observou as dificuldades dos alunos, entre outros aspectos, em compreender o problema e, assim, tentar encontrar alguma estratégia para resolvê-lo.

Além disso, as conversas com os professores de Matemática que lecionavam nessas escolas públicas evidenciaram que não conheciam sobre o trabalho relacionado à resolução de

[1] Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.
[2] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

problemas. Assim, surgiu a seguinte dúvida: esses professores não tiveram, durante o curso de licenciatura, formação adequada para trabalhar com a resolução de problemas?

A partir dessas situações e das discussões feitas no grupo de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática sobre a teoria da resolução de problemas e de aspectos que envolviam o conhecimento dos professores para abordá-la no ensino é que o pesquisador elaborou um projeto de pesquisa de doutorado, envolvendo essa teoria na formação inicial de professores de Matemática, o qual teve início em 2009 pelo mesmo programa de pós-graduação, sendo contemplado com Bolsa Capes.

No que se refere à formação inicial de professores, o pesquisador teve interesse em relacionar a investigação não apenas fornecendo um curso sobre resolução de problemas, mas que o conhecimento aprendido fosse implementado nas atividades de estágio por meio de sequências didáticas desenvolvidas nas regências de aula pelos licenciandos, sujeitos da pesquisa. Tal implementação foi entendida como necessária à formação de professores, tendo em vista que a revisão bibliográfica feita para o projeto de pesquisa mostrou que os estudos analisados não articularam suas investigações com as atividades de estágio.

Durante a realização das atividades de doutorado no primeiro ano deste curso, atuei como professor substituto na referida universidade ministrando aulas nas disciplinas de Prática de Ensino de Matemática V e de Estágio Curricular Supervisionado II (ECS). Nesta, tive a oportunidade de constatar que muitos licenciandos elaboravam sequências didáticas voltadas simplesmente para a exposição primeira do conteúdo, de definições e de fórmulas e em seguida trabalhar com atividades em que esse conhecimento era aplicado diretamente. Para duas propostas de ensino no estágio dentre os 21 licenciandos houve a tentativa de utilizar a resolução de problemas para ensinar Matemática.

Esse mesmo fato foi constatado pelo pesquisador quando voltou a lecionar as mesmas disciplinas no ano seguinte, de 2010. Com essa trajetória como professor na educação básica e no ensino superior, a importância da realização da presente pesquisa se faz relevante para se repensar a necessidade dos cursos de formação inicial de professores de Matemática incorporarem o estudo da resolução de problemas. Por fim, destaca-se que o pesquisador ingressou, em julho de 2011, por meio de um concurso na área de Educação Matemática, como professor efetivo junto ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM) do Estado do Paraná.

INTRODUÇÃO

Depois de analisar os resultados da resolução de problemas propostos a alunos do Ensino Fundamental e entrevistá-los, Medeiros Junior (2007) realizou uma entrevista com seus professores de Matemática e destacou-lhes que seus alunos relataram não gostar de problemas com enunciados longos, preferiam os de enunciados curtos, pois seriam mais fáceis de resolver e de entender e as perguntas seriam mais claras. A esse respeito, o professor relatou:

> Eu creio que já é um problema nosso como educadores, eu tenho uma formação daquele professor supertradicional e, agora, através dos cursos, tenho visto que este tipo de método está superultrapassado e precisamos inovar. Então, nós professores mesmos, não temos esse hábito de fazer problemas longos, nós damos problemas curtos, bem objetivos para os nossos alunos. Então os alunos estão acostumados com este tipo de problemas, bastante curtos, e quando o professor começa a querer inovar ou começa a trabalhar com situações-problemas, os alunos tendem a ter uma certa... resistência para o novo. Veja que resolução de problemas com enunciados longos é novo." (Entrevista com prof. PP, MEDEIROS JUNIOR, 2007, p. 137-138).

O trecho da entrevista acima ilustra um dos problemas do ensino-aprendizagem da Matemática na escola básica que, de certa forma, está ligado à formação acadêmica recebida pelos estudantes na universidade. De modo específico, a entrevista acima mostra que esse problema pode ter relação com uma formação deficitária em vários aspectos da formação inicial de professores de Matemática como, por exemplo, para conduzir o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas, situação esta que poderia favorecer uma efetiva condução da construção do conhecimento matemático pelos alunos.

Como consequência, a atuação dos professores da escola básica reflete um trabalho caracterizado por meio de um ensino tradicional, o qual pode ser entendido como uma prática que "[...] consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado". (BRASIL, 1998, p. 40).

Essa prática foi evidenciada na pesquisa de Guimarães (2008, p. 04) que mostrou que, além da dificuldade dos professores no domínio sobre o campo conceitual aditivo para exercer o ensino, apresentavam uma prática pedagógica "[...] que se baseia na introdução de um conceito, seguida de problemas, aos quais regras e procedimentos devem ser aplicados, visando fixar o conteúdo para a realização de uma avaliação quantitativa".

Em uma pesquisa recente, Redling (2011) mostrou que três professoras defendiam o trabalho com a resolução de problemas somente após uma introdução formal de conceitos matemáticos. Segundo essa autora, a análise da observação das aulas desses sujeitos mostrou que o ensino baseado na perspectiva da resolução de problemas ainda estava longe de ser realizada em suas aulas.

Como pode ser verificado, essas pesquisas mostram que o trabalho com a resolução de problemas não estava sendo realizado de forma desejável, uma vez que ficou evidente que o aspecto de iniciar o estudo de um conceito por meio da introdução de um problema, característica desse trabalho, não estava sendo contemplado. Consequentemente, outros aspectos como o de discutir as estratégias de resolução dos alunos também não foi foco do ensino.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), a resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática se caracteriza pelo princípio de que a situação-problema é o ponto de partida no ensino e não a definição, sendo uma condição importante para abordar não apenas a formação de conceitos, mas os procedimentos e atitudes em Matemática.

Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2002a) também evidenciam que dentre os vários objetivos do ensino de Matemática no Ensino Médio está a finalidade de desenvolver nos alunos a capacidade de resolução de problemas e que a utilização de procedimentos de resolução pode ajudar os alunos a compreenderem conceitos matemáticos.

No entanto, para Miguel (2010), as diversas dificuldades de aprendizagem das crianças estão relacionadas, entre outros aspectos, a uma cultura escolar que ainda se baseia na memorização imitativo-repetitiva de procedimentos algoritmos, situação que quase sempre gera incompreensão dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos.

Além disso, a pesquisa recente de Morelatti et al. (2010) mostrou que seus sujeitos, professores de Matemática, exerciam, predominantemente, um tratamento dos conteúdos em atividades centradas no professor, baseadas em um padrão que segue aulas expositivas, seguidas de resolução de exercícios e avaliação por meio de prova escrita.

De modo geral, conforme destacaram Figueiredo, Fioreze e Isaia (2007), o uso de situações-problema nas aulas de Matemática ainda é muito superficial, uma vez que os professores acreditam que um problema é um simples exercício de fixação de conteúdos.

Nesse sentido, verifica-se nas concepções e práticas de muitos professores que ensinam Matemática que "[...] a Resolução de problemas é uma aplicação de algoritmos e que os problemas ou situações-problema são utilizados para testar e verificar aprendizagem sobre conteúdos matemáticos abordados [...]" e não como uma abordagem que conduz o ensino e a aprendizagem de Matemática. (RODRIGUES, 2008, p 11).

Em decorrência desse tipo de situação, a pesquisa de Coelho (2006) mostrou que professores de Matemática em serviço parecem não ter conhecimentos explícitos sobre as relações que a resolução de problemas compartilha com o desenvolvimento de capacidades dos alunos como o pensamento criativo, a interpretação e a argumentação.

Além disso, pesquisas como as de Neumann (1995), Silva, Pirola e Vendramini (1998) mostraram que futuros professores de Matemática não dominavam processos referentes à resolução de problemas, evidenciando uma formação deficitária como, por exemplo, na obtenção da informação matemática, quando não conseguiam perceber no enunciado dos problemas as informações completas, incompletas e supérfluas. Pesquisa posterior a essas, como a de Pirola et al. (2006), mostrou que essa situação ainda ocorria.

Diante dessas situações, a falta de condições em realizar um trabalho na perspectiva da resolução de problemas, segundo Morelatti et al. (2010), pode estar relacionada à constituição de saberes oriundos da formação inicial que não auxiliou a superar, entre outras coisas, experiências prévias provenientes da escola básica e que continuam a interferir nas práticas atuais.

Para Miguel (2010, p. 03), essa falta de condições pode estar relacionada à formação dos professores, sendo que "[...] a formação recebida, por vezes, não possibilita uma abordagem segura dos conteúdos de modo que se perdem em modelos tradicionais pautados por procedimentos automatizantes que não dão conta de instigar nos alunos a vontade de aprender".

Para favorecer essa formação, Rodrigues (2008) destacou que um programa de formação precisa dar oportunidades aos professores, entre outras situações, de repensar e problematizar suas concepções sobre processos de ensino e de aprendizagem.

Uma condição importante dessa formação diz respeito ao papel do estágio curricular supervisionado (ECS). Para Pimenta e Lima (2004), o estágio corresponde a uma aproximação da realidade de atuação do professor e permite a articulação entre teoria e prática. Para essas autoras, quando se transforma o estágio em uma atividade meramente instrumental, onde qualquer atividade é válida, percebe-se uma fragmentação desse estágio, o qual pode gerar uma prática curricular insuficiente.

Desse modo, conforme destacou Mizukami (2006), as práticas de formação onde as vivências dos alunos não são problematizadas quando estão em situações reais de sala de aula não levam, necessariamente, esses alunos a compreenderem o que aprenderam e a realizar relações com as práticas cotidianas.

Diante dessas situações que caracterizam o ensino de Matemática na escola básica, vários pesquisadores concordam com o fato de que o ensino tradicional contribui pouco para a aprendizagem dos alunos (GONÇALEZ; BRITO, 2001; LOPES; BRENELLI, 2001; PAIS, 2002). Na pesquisa de Carvalho et al. (2010, p. 11), concluiu-se que "[...] dificilmente a aula tradicional poderia equiparar-se àquela utilizando resolução de problemas", devido seu caráter motivador e de provocar interesses de aprendizagem nos alunos.

Para Pais (2002), um dos objetivos do ensino de Matemática é cultivar nos alunos o gosto pela resolução de problemas, mas não o de exercitar a repetição e o automatismo e sim o de propor problemas que contemplem e possibilitem descobrir várias soluções, que valorizem a criatividade e que favoreçam as estratégias pessoais de resolução.

Rezi-Dobarro (2007) destacou que o uso da resolução de problemas nas aulas de Matemática permite aos professores explorar tanto conceitos como as formas de pensamento relacionadas aos domínios da aritmética, álgebra e geometria.

No que se refere ao pensamento algébrico, a pesquisa de Freire, Cabral e Castro Filho (2004) apontou que, no seu desenvolvimento, é importante que os professores levem em consideração as diversas estratégias de resolução (simbólica, numérica, icônica) dos alunos e que as considerem como ponto de partida na aprendizagem.

Segundo Onuchic e Allevato (2005), a resolução de problemas se constitui em um caminho para ensinar Matemática e não somente para ensinar a resolver problemas. Para essas autoras, "a maioria (senão todos) dos importantes conceitos e procedimentos matemáticos pode ser melhor ensinada através da Resolução de Problemas." (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005, p. 223).

Tendo em vista o que foi exposto até o momento, percebe-se que há uma tendência dos professores pelo modelo de ensino tradicional. Logo, nota-se que dificilmente se aborda a resolução de problemas como um caminho para ensinar Matemática. É possível afirmar que essa situação tem relação com a formação inicial dos professores, a qual estaria contribuindo pouco para uma formação eficaz, ou seja, que realmente dê condições aos futuros professores de exercerem um ensino-aprendizagem em sala de aula por meio da resolução de problemas.

Nesse sentido, o objetivo da presente pesquisa foi investigar as seguintes questões: **Uma intervenção, baseada em um Curso sobre Resolução de Problemas e em regências**

de aula, favorece a formação do futuro professor de Matemática para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar por meio da resolução de problemas? Quais as possibilidades e limites para a implementação do trabalho com a resolução de problemas nas regências de aula do estágio curricular supervisionado pelos futuros professores de Matemática?

Para ajudar a responder a esse problema de pesquisa, foram elencados os seguintes objetivos específicos:

1. Identificar e descrever os conhecimentos dos licenciandos em Matemática sobre a temática da resolução de problemas, segundo a formação adquirida;
2. Analisar a participação desses alunos em um Curso sobre Resolução de Problemas (1ª etapa da intervenção) na aquisição de conhecimentos sobre resolução de problemas;
3. Analisar as dificuldades e as possibilidades decorrentes do trabalho com a resolução de problemas, durante as regências de aula (2ª etapa da intervenção), na escola básica;
4. Identificar e analisar quais conhecimentos foram (re)constituídos acerca da resolução de problemas como um caminho para se ensinar e aprender Matemática na escola básica.

A estrutura da tese ficou estabelecida da seguinte forma: Apresentação, Introdução, os capítulos "1 – revisão bibliográfica", "2 – Formação de professores", "3 – Resolução de problemas", "4 – Metodologia" e "5 – Análise e discussão dos dados", Conclusões e Implicações do estudo.

No Capítulo 1 – Revisão bibliográfica, a intenção foi descrever o que diversas pesquisas sobre resolução de problemas mostram a respeito desse tema na formação dos professores e no processo ensino-aprendizagem na escola básica.

O Capítulo 2 trata da formação dos professores, tendo em vista os saberes docentes necessários para uma prática efetiva em sala de aula e a importância da formação inicial para favorecer a construção desses saberes, em específico o saber relacionado à resolução de problemas.

No Capítulo 3, são apresentados os fundamentos e características de um ensino de Matemática, baseado na resolução de problemas. Isso permitiu uma base teórica para elaborar a intervenção aplicada aos licenciandos de Matemática.

No Capítulo 4, discorre-se sobre a Metodologia empregada na presente pesquisa. Relatam-se as questões de pesquisa, o tipo de pesquisa em que este estudo se caracteriza, os sujeitos da pesquisa, os instrumentos de coleta de dados, os procedimentos de coleta de dados e os critérios de análise dos dados.

No Capítulo 5, apresenta-se a análise e a discussão dos dados.

Em seguida, apresentam-se as Conclusões do estudo, respondendo, assim, aos problemas de pesquisa. Por fim, nas Implicações educacionais, analisa-se o reflexo da tese para a área da formação de professores e para o campo da resolução de problemas.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo tem o objetivo de situar o assunto sobre resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática, buscando uma compreensão em termos da formação do professor de Matemática. Foi realizado um levantamento acerca dos principais estudos que abarcaram o referido tema, em conformidade com nosso problema de pesquisa, por meio dos bancos de teses e dissertações de algumas universidades, da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)[3], do banco de teses e dissertações da Capes e de trabalhos publicados em congressos, revistas de Educação Matemática e em livros.

De acordo com Alves (1992, p. 54), "[...] a revisão bibliográfica deve estar a serviço do problema de pesquisa". Na visão dessa autora, a sua importância se configura em aspectos relacionados: (a) à contextualização do problema, conforme o estado atual do conhecimento da área em que se tem interesse; (b) à análise do referencial teórico a ser adotado na pesquisa; (c) à comparação e contraste de abordagens teórico-metodológicas utilizadas nas pesquisas, o que "[...] ajuda o pesquisador a definir melhor seu objeto de estudo e a selecionar teorias, procedimentos e instrumentos ou, ao contrário, evitá-los, quando estes tenham se mostrado pouco eficientes na busca do conhecimento pretendido." (ALVES, 1992, p. 54).

Dessa forma, neste capítulo, apresenta-se uma descrição dos estudos selecionados justamente para possibilitar a análise de suas abordagens teórico-metodológicas, o que permitiu avaliar a confiabilidade dos resultados apresentados nesses estudos, favorecendo a construção da abordagem da presente pesquisa. Além disso, essa descrição possibilitou identificar o consenso dos estudos em alguns aspectos, referentes à abordagem da resolução de problemas no ensino, bem como lacunas na formação do professor de Matemática.

É importante destacar que a revisão bibliográfica realizada levou em consideração a temática da resolução de problemas independentemente de série, ano escolar ou mesmo conteúdos estudados. Essa situação é justificada pelo fato de que a investigação acerca da resolução de problemas é vasta, no entanto identificam-se recortes baseados em conteúdos específicos de Matemática que mostram processos cognitivos de resolução de problemas

---

[3] No BDTD, o levantamento dos estudos foi feito no período de 2009 a 2011, porém alguns trabalhos tinham sido obtidos em período anterior. Nesse caso, as palavras-chave utilizadas foram: resolução de problemas, solução de problemas, problemas, situações-problema, formação inicial, licenciatura em Matemática e formação de professores.

apresentados por alunos de diferentes níveis de escolaridade e que possibilitam maior compreensão de como as operações mentais são acionadas quando o estudante está diante de uma tarefa matemática de resolução de problemas.

Assim, de acordo com o material estudado e com o problema de pesquisa investigado, foram estabelecidas três categorias de análise que permitiram situar os diversos trabalhos sobre resolução de problemas, a saber:

- **Implementação da resolução de problemas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio** – trata-se de sete estudos que buscaram implementar a resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática em turmas de Ensino Fundamental e de Ensino Médio, buscando apresentar uma metodologia que superasse o ensino baseado somente na aplicação e memorização de fórmulas e regras.
- **Conhecimentos de professores e de futuros professores de Matemática** – nesta categoria, apresentam-se quatro trabalhos que buscaram investigar os conhecimentos sobre resolução de problemas: três que investigaram os conhecimentos e as formas de trabalho em sala de aula de professores em exercício do magistério e um trabalho sobre os conhecimentos de futuros professores.
- **A resolução de problemas na formação inicial em Matemática** – esta categoria envolve sete trabalhos que investigaram futuros professores de Matemática perante a temática da resolução de problemas: três trabalhos que investigaram as habilidades matemáticas, o desempenho e os conhecimentos dos licenciandos e quatro estudos que propuseram um programa de ensino (intervenção), buscando favorecer a formação sobre a resolução de problemas como um caminho para se ensinar Matemática.

A seguir, apresentam-se os trabalhos segundo cada uma das categorias destacadas acima.

1.1 Implementação da resolução de problemas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998, 2002a), a resolução de problemas deveria se configurar como ponto de partida para a atividade matemática nos Ensinos Fundamental e Médio. No entanto, os estudos a seguir mostraram que essa abordagem não tem sido trabalhada em sala de aula, uma vez que foi possível constatar esse fato a partir da análise de sua implementação no ensino escolar.

Pereira (2004) realizou uma pesquisa com o objetivo de verificar a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas para a disciplina Matemática, partindo de problemas geradores de novas ideias matemáticas. Foi elaborado um projeto de trabalho constituído de duas unidades temáticas, envolvendo vários problemas: o de Divisibilidade, o qual durou 38 horas-aula e foi aplicado com alunos de uma turma de 5ª série, no final do ano letivo; e o de Números Racionais, o qual durou 20 horas-aula e foi aplicado com os mesmos alunos, mas que, na época, estavam na 6ª série. A aplicação se deu pela própria pesquisadora na referida turma em que lecionava em uma escola pública e, antes da condução do projeto, foi trabalhada, nos moldes tradicionais de ensino, a história dos sistemas de numeração até o surgimento do sistema decimal e feita uma revisão crítica das quatro operações fundamentais com suas propriedades. Os dados mostraram que os alunos, em grupos, tiveram dificuldades para resolver os problemas sem a ajuda da pesquisadora. Além disso, observou-se que eles tentavam adivinhar as operações e técnicas, segundo os dados numéricos contidos nos enunciados dos problemas e não se preocupavam em avaliar a resposta obtida. No entanto, o trabalho com essa metodologia provocou um aumento na motivação desses estudantes e que, quando tiveram dúvidas sobre os tópicos trabalhados anteriormente, presentes na resolução dos problemas, foi possível melhor explorá-los. De modo geral, avaliou-se como relevante o trabalho desenvolvido, mas a pesquisadora sentiu que melhoras devem ser feitas para aprimorar a condução da metodologia empregada em sua sala de aula.

A pesquisa de Huanca (2006), na mesma direção do estudo acima, teve como objetivo verificar se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Matemática através da Resolução de Problemas se constituía em um bom caminho para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos. Para isso, elaborou um projeto de trabalho constituído de três unidades temáticas (conceitos básicos e trigonometria no triângulo retângulo; a circunferência e arcos trigonométricos; e funções trigonométricas e resolução de triângulos quaisquer), aplicado durante 40 horas-aula a 27 alunos da segunda série do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Rio Claro/SP. A aplicação do projeto se deu pela professora da referida série, sendo que o pesquisador participou como observador das aulas ministradas. Antes de iniciar o assunto, foram revistos o conceito de razão, o Teorema de Pitágoras e a semelhança de triângulos retângulos para dar base aos alunos na resolução dos problemas. A partir do conhecimento construído em sala de aula na abordagem dos problemas, os alunos, entre outras situações, construíram um teodolito para calcular distâncias inacessíveis. Constatou-se que, ao trabalhar com essa metodologia, em sala de aula, houve um aumento na motivação tanto da professora como dos alunos. Além disso, quando estiveram envolvidos na resolução dos problemas e nas discussões com os colegas, conseguiram ver um sentido no que estavam aprendendo, a estabelecer relações matemáticas e aumentar habilidades em resolução de problemas. Algumas dificuldades da concretização de projeto no todo foram o fato de a professora ter iniciado o estudo do assunto, segundo seu próprio planejamento, e a falta de tempo, especialmente no final das atividades, para garantir o trabalho com todos os problemas planejados.

Placha (2006) realizou um estudo cujo objetivo foi o de investigar como ocorre o processo de aprendizagem de relações multiplicativas de produto de medidas de crianças de 3ª série, na resolução de problemas, sob intervenção do professor. Para tal, teve como sujeitos cinco crianças, cada uma de uma 3ª série do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Curitiba/PR, os quais resolveram, individualmente, junto da pesquisadora, oito problemas de estrutura multiplicativa do tipo produto de medidas, baseados em Vergnaud (1983). A coleta foi realizada em duas sessões, filmadas em vídeo, onde os alunos resolveram quatro problemas em cada uma, sendo que o objetivo foi o de caracterizar as soluções notacionais e verbais e as interpretações dos alunos no processo de resolução de problemas e caracterizar as formas de intervenção da pesquisadora, atuando como professora, no favorecimento de tal processo. Baseado nos níveis e subníveis identificados por Moro e Soares (2006), a pesquisadora mostrou no seu estudo que os alunos utilizaram várias estratégias de resolução, as quais foram classificadas nos seguintes níveis: nível I: soluções contextualizadas sem indício de combinação; nível II: soluções que se aproximam à solução combinatória; nível III: soluções que obtêm algumas combinações; e nível IV: soluções com presença de solução combinatória. A intervenção da pesquisadora como professora contribuiu para que os alunos passassem de um nível menos adiantado de resolução dos problemas para outros mais adiantados. As formas de intervenção foram as seguintes: orientadora, reorientadora, questionadora e instigadora. Tais formas envolveram, entre outras, levar os alunos a encontrar suas próprias estratégias de resolução, baseadas em suas próprias resoluções notacionais e verbais, e de acompanhar a aprendizagem dos alunos. Essas formas possibilitaram que a aprendizagem na resolução de problemas de produto de medidas alcançasse níveis mais elevados de resolução.

Na tese de doutorado de Moura (2007), o objetivo foi o de elaborar, aplicar e avaliar um programa de intervenção com alunos de quarta série[4] do Ensino Fundamental que apresentavam dificuldades na compreensão e resolução de problemas aritméticos. Os sujeitos da pesquisa que apresentavam tais dificuldades corresponderam a 72 alunos da quarta-série de quatro escolas públicas da cidade de Bauru/SP, os quais foram distribuídos da seguinte forma: 36 alunos do grupo controle e 36 alunos do grupo experimental. Após a aplicação de um pré-teste a ambos os grupos e da realização de um estudo piloto, elaborou-se um programa de ensino, aplicado aos alunos do grupo experimental durante dois meses com duas horas por semana. Tal programa contemplou o desenvolvimento dos alunos nos seguintes objetivos: (a) capacidade de acesso ao léxico, à semântica e à sintaxe (linguagem); compreensão do enunciado verbal do problema; tradução do enunciado em uma representação matemática; pensamento estratégico; escrita correta da resposta; metacognição. Entre esses objetivos, a pesquisa contemplou o uso de diversas estratégias por meio de material concreto e desenhos (diagramas), evitando o uso de palavras-chave que identificassem uma operação aritmética sem compreensão. Por exemplo, no problema *Lucas tem 16 figurinhas e Fábio tem 29. Quantas figurinhas Fábio tem a mais do que Lucas?* foi utilizado material concreto para que os alunos pareassem a quantidade de 16 e 29 figurinhas, observando a correspondência termo a termo, sendo que com a resposta obtida, 13, deveriam transformá-la em uma operação aritmética. Por fim, foram aplicados um pós-teste aos dois grupos e, depois de 40 dias, um pós-teste postergado ao grupo experimental. Os resultados mostraram que no pré-teste os grupos controle e experimental obtiveram a média de 5,6 e 7,8, respectivamente, em uma escala de zero a 40 pontos. No pós-teste, os dois grupos apresentaram, respectivamente, as médias de 8,1 e 36,8, sendo que o teste *t de student* apontou diferença significativa ($t = -29{,}3$; $p = 0{,}001$). As médias do grupo experimental no pré-teste e pós-teste também apresentaram diferenças significativas ($t = -3{,}9$; $p = 0{,}001$). E o pós-teste postergado apresentou uma ligeira queda na média do grupo experimental em relação ao pós-teste. Desse modo, mostrou-se que o programa de ensino foi eficiente e desenvolveu capacidades cognitivas referentes à compreensão do enunciado e na sua representação matemática.

Na mesma perspectiva do estudo acima, Justo (2009) realizou uma pesquisa de doutorado que teve como objetivo investigar a influência de um programa de formação continuada de professores em exercício na escola e um programa de ensino baseado no

[4] O Ensino Fundamental tinha duração de oito anos (oito séries) e se iniciava a partir dos sete anos de idade. A partir de 2006, passa a ter duração de 9 (nove) anos, iniciando-se a partir dos seis anos de idade. Com essa mudança, a quarta série, mencionada no texto, passa a ser denominada de quinto ano.

desempenho em resolução de problemas aditivos. Para tal, participaram do estudo 180 alunos de uma escola pública e 140 alunos de uma escola particular, ambos pertencentes às segundas, terceiras e quartas séries do Ensino Fundamental. Cada tipo de escola teve seus alunos separados em grupo controle e grupo experimental, os quais responderam a um pré-teste contendo vinte problemas aditivos. Posteriormente, três professoras da escola pública e três da escola particular, dos grupos experimental, passaram por uma formação envolvendo quatro oficinas sobre problemas aditivos e questões didático-metodológicas. Em seguida, vários encontros ocorreram para a elaboração de um programa de ensino que foi aplicado pelos professores das turmas, o qual buscou garantir aos seus alunos uma variedade e quantidade de situações-problemas, bem como tempo apropriado para a aprendizagem. A pesquisadora ajudou no planejamento e observou algumas aulas ministradas. Por fim, um pós-teste, contendo vinte problemas aditivos, foi aplicado aos grupos controle e experimental, sendo que este último grupo passou, depois de seis meses, por um segundo pós-teste. A análise dos dados mostrou que houve um desempenho maior dos grupos experimentais em relação aos grupos controle e que isso foi decorrente do programa de formação continuada e do programa de ensino propostos e auxiliados pela pesquisadora. Conclui-se que tal programa de ensino foi relevante para a aprendizagem dos alunos, uma vez que favoreceu a formação das professoras no planejamento, intencionalidade e acompanhamento da aprendizagem desses alunos.

Na pesquisa de Souza (2010), o objetivo foi o de analisar e avaliar a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Matemática através da Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória. Para tal, elaborou três projetos: um de 12 horas-aula que aplicou com seus alunos do segundo ano do Ensino Médio; um que ministrou em uma oficina de trabalho de quatro horas; e outro que objetivou a divulgação de seu trabalho em dois Encontros de Educação Matemática para colher pareceres a respeito do que havia proposto. Especificamente sobre o projeto desenvolvido no Ensino Médio, trabalhou com a resolução de problemas, verificando as diversas estratégias utilizadas pelos alunos, além de lhes apresentar outras estratégias. Inicialmente, os alunos resolveram seis problemas cujo objetivo era o de encontrar o padrão envolvido. Desse modo, o objetivo da pesquisadora foi o de possibilitar aos alunos uma compreensão dessa estratégia do uso do padrão e a utilizarem em outros problemas propostos. No problema abaixo, a pesquisadora mostrou que os grupos de alunos formados utilizaram três estratégias: lista organizada; representação dos dados (diagrama); e tabela de dupla entrada. Nenhum aluno conseguiu estabelecer condições para obter um padrão, sendo que a professora acabou mostrando como isso poderia ser feito.

Cumprimente antes de você festejar: Dez finalistas de diferentes estados foram convidados para uma confraternização. Antes de iniciar a festa, cada finalista cumprimentará, com as mãos, todos os outros finalistas. Quantos cumprimentos haverá ao todo?

Quadro 1: Problema extraído de Souza (2010, p. 245).

A análise dos dados possibilitou concluir que as diversas representações feitas pelos alunos na resolução dos problemas permitiram que desenvolvessem o raciocínio combinatório, uma vez que se explorou o conceito de contagem e o de padrão. De modo geral, o emprego da metodologia gerou entusiasmo e motivação, nos dois primeiros projetos aplicados, tanto em alunos como em professores no ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Em uma pesquisa realizada nos Estados Unidos, Lester (1989) teve como objetivo trabalhar e analisar a metacognição (nos aspectos do monitoramento e da coordenação do pensamento na aprendizagem de uma situação) e sua relação com os conceitos matemáticos durante a resolução de problemas. Para isso, alunos de sétima série receberam um tratamento instrucional, o qual foi elaborado para ser efetivado sob a perspectiva de três componentes: (a) professor como um monitor externo; (b) professor como facilitador da consciência metacognitiva e; (c) professor como um modelo que resolve problemas ciente de sua metacognição. O professor como monitor tinha como ações direcionar os alunos nas discussões sobre como um problema pode ser resolvido, realizar observações, fazer questionamentos e direcionar o trabalho individual e em grupos para a resolução de problemas. Além disso, deveria permitir que a classe pudesse discutir os tipos de resolução possíveis. Nesse componente, foi observado que os alunos fizeram um monitoramento muito mais para entender um conceito e fazer cálculos, o que dificultou a discussão sobre a metacognição. Em relação ao professor como facilitador, questões eram feitas e apresentavam-se tarefas que requeriam dos alunos a análise dos seus desempenhos matemáticos, além de apontar os aspectos da matemática que tinham aparecido nesse desempenho, bem como ajudar os estudantes a construírem um repertório de heurísticas e estratégias a partir de suas dificuldades. Os resultados mostraram que muitos alunos tiveram dificuldades para listar seus conhecimentos e suas fraquezas através da reflexão de seus processos de pensamento e da análise de seus próprios desempenhos, sendo que alguns tinham receio de discutir sobre suas capacidades e dificuldades. Por fim, o professor como modelo demonstrava explicitamente as decisões e ações, enquanto resolvia problemas para os alunos na classe. A análise mostrou que o professor deve tomar cuidado na escolhas das tarefas, não deixando de trabalhar problemas reais, que façam sentido para os alunos.

De acordo com os estudos apresentados nesta categoria, o trabalho com a resolução de problemas evidenciou formas de trabalho tradicional, uma vez que a posição dos alunos geralmente é a de buscar cálculos imediatos e operações e técnicas já aprendidas. Por outro lado, essa abordagem de ensino se mostrou eficiente, contribuindo para a melhoria do desempenho, da motivação, do estabelecimento de relações matemáticas,bem como a do reconhecimento de padrões, da metacognição[5] e estratégias de resolução de problemas.

Em relação aos professores, pode-se destacar que aqueles que tiveram alguma participação na consecução das diversas propostas de trabalho puderam ter a oportunidade de compreender situações sobre a orientação, o acompanhamento, os questionamentos, o planejamento, entre outras, acerca do trabalho com a resolução de problemas no ensino-aprendizagem de Matemática.

1.2 Conhecimentos de professores e futuros professores de Matemática

Thompson (1989) realizou uma pesquisa cujo objetivo foi o de documentar as mudanças nas concepções sobre resolução de problemas matemáticos de 16 professores do Ensino Fundamental. Os dados obtidos foram provenientes de três questionários: um antes de um curso de verão; outro no final deste curso; e o último após um ano da realização do referido curso, tempo em que se observou os professores em suas salas de aula utilizando a resolução de problemas. Tal curso de verão foi realizado durante três semanas com três horas diárias, sendo que na primeira metade os professores resolveram uma variedade de problemas com a finalidade de fazer uso de heurísticas. Na segunda metade, o foco foi sobre métodos pedagógicos e questões instrucionais oriundas das leituras de textos e dos próprios problemas resolvidos para compreender o papel do professor no ensino de resolução de problemas matemáticos. A análise dos dados mostrou que, antes do curso, estavam implícitas, em cinco dos 16 professores noções de resolução de problemas como: o que vale é a resposta; obter a resposta se dá por um único caminho; a resposta é quase sempre um número; o sucesso está em lembrar o que foi feito em sala de aula. Os outros 11 professores apresentaram uma visão mais generalizada sobre resolução de problemas, aludindo a características como habilidades

---

[5] Segundo González (1998, p. 63), "a metacognição é um construto de natureza teórica que se refere aos conhecimentos que uma pessoa tem acerca de sua própria atividade cognitiva." Desse modo, na resolução de problemas, a metacognição é um recurso intelectual relacionado ao controle do processo de busca de uma solução, permitindo, assim, que o resolvedor matenha autocontrole sobre as ações tomadas, utilize de forma mais proveitosa os conhecimentos que tem e que avalie o processo de resolução seguido.

de raciocínio, lógica, vários caminhos para a solução entre outras. No final do curso, constatou-se que os professores relataram estar mais confiantes e competentes para ensinar resolução de problemas. Os resultados da análise das práticas de ensino durante um ano, após o curso de verão, mostraram que seis professores dentre os 14 que estiveram à disposição da pesquisadora ensinaram resolução de problemas de forma contínua para seus alunos, aproximando-se mais do que era esperado. Os outros oito professores ensinavam resolução de problemas apenas duas ou três vezes por semana e até mesmo deixando várias semanas sem trabalhar o assunto. Esse fato parece ter sido decorrente da questão afetiva que se originou devido suas dificuldades em tratar de estratégias e de fazer discussões com os alunos, ou seja, esses professores se sentiram pouco confortáveis para tratar da resolução de problemas nas suas aulas. Para a autora, essa situação se configurou como o maior obstáculo para compreender a natureza da resolução de problemas.

Uma pesquisa realizada na Espanha, a de Blanco (2004), buscou destacar como os futuros professores do Centro de Formação Inicial constroem o conhecimento pedagógico do conteúdo matemático. A investigação foi realizada seguindo as quatro fases do programa "Resolução de Problemas na Formação Primária", disciplina da grade curricular do referido centro. A primeira fase era realizada no inicio do ano escolar e analisava as concepções, crenças e atitudes dos futuros professores por meio de entrevistas semi-abertas. A segunda fase cobrava dos estudantes a resolução de vários problemas, buscando verificar as diferentes formas de raciocínio, de estratégias de resolução e processos de experimentação, conjectura, representação, justificação etc. O interesse era a mudança das concepções e crenças errôneas dos alunos. Na terceira fase são apresentadas as dificuldades de ensino que decorrem do trabalho com a resolução de problemas. Na quarta fase, os estudantes ministram aulas no nível Primário de ensino espanhol, utilizando a resolução de problemas. Especificamente sobre as concepções e crenças, a análise dos dados mostrou que os futuros professores espanhóis apresentaram uma concepção de resolução de problemas baseada na aplicação de conhecimentos matemáticos previamente aprendidos. Além disso, ficou evidente que durante o período em que estiveram na escola a aprendizagem se firmou em problemas-padrão que exigem a memorização, o que, consequentemente, evidenciou concepções sobre estratégias de resolução baseadas na busca de uma palavra-chave do problema e de situações análogas.

Na dissertação de mestrado de Coelho (2005), o objetivo foi o de compreender as significações sobre Resolução de Problemas, produzidas por professores, nas reuniões pedagógicas da área de Matemática, bem como estudar as condições de produção dessas significações. Para tal, durante um ano, a pesquisadora participou como interlocutora de 12 reuniões, onde realizou diálogos com professores e coordenadores da área de Matemática, sendo que os dados foram coletados por meio de gravador e de notas de campo. Pôde-se estabelecer quatro eixos, segundo as falas dos professores: a problematização de relações com a matemática escolar; a problematização de relações de ensino de matemática; a problematização do ensino de maneira geral; a problematização da vida além da escola. De acordo com esses eixos, a pesquisa mostrou que a hipótese de que a Resolução de Problemas é uma prática pedagógica inovadora se confirmou nas falas dos participantes do estudo, sendo que "os professores parecem se apegar ainda à concepção do problema como instrumento para ser utilizado como aplicação da teoria e isso pode dificultar que mudanças ocorram nesse sentido." (p. 151). Segundo a pesquisadora, essa prática pedagógica ainda é um desafio a esses participantes, além de ser pouco conhecida, uma vez que foi identificado que a utilização do "[...] problema matemático parece ainda não se constituir em um contexto de diálogo e de problematização." (p. 152). A produção desse significado, segundo os participantes, ocorre devido limitações no ambiente escolar, sendo, as mais recorrentes, o fato de os alunos não saberem pensar, dificuldades de interpretar os textos dos problemas e não apresentar bons resultados em provas elaboradas em moldes diferentes dos habituais. Além disso, apesar de querer melhorar o ensino, ninguém relacionou a Resolução de Problemas como ponto de partida para ensinar Matemática e, assim, com a capacidade de desenvolver o pensamento criativo, a interpretação e a argumentação dos alunos. O que realmente se percebeu foi um ambiente escolar que busca padronizar a instrução e quantificá-la, sendo o foco maior no ensino de fórmulas e regras, onde o sucesso provém da forma rápida e aparentemente eficiente de transmissão da maior parte possível de conteúdos aos alunos.

Na pesquisa de Medeiros Junior (2007), o objetivo foi o de investigar as relações didáticas que são estabelecidas na tríade *professor-aluno-conhecimento matemático* no processo de ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas. Para tal, primeiramente, 41 alunos de 5ª séries e 64 alunos de 6ª séries resolveram uma lista composta de problemas (situações matemáticas formadas de enunciados curtos e longos) e de exercícios (algoritmos do tipo arme e efetue), organizada pelo pesquisador, mas que foi aplicada pelos professores das turmas. Foi realizada uma entrevista individual com dois professores, um da quinta série e outro da sexta série e com nove alunos os quais foram selecionados a partir das resoluções que apresentaram aos problemas propostos. A análise dos dados possibilitou verificar duas situações. A primeira foi sobre a ação didática praticada em sala de aula, na qual os professores não davam oportunidades de o aluno realizar descobertas, de ouvi-los e, consequentemente, favorecer a atividade heurística na resolução de problemas. Nessa ação didática, o foco do ensino eram os exercícios. Segundo os dados das entrevistas, para os professores, os problemas são difíceis de ensinar e que, apesar de concordarem com o fato de que exercícios não favorecem o pensar matematicamente, utilizavam-nos pela facilidade de aprendizagem. Além disso, verificou-se que a maioria dos alunos preferiu resolver exercícios pelo fato do uso direto de algoritmos, ou seja, da facilidade de resolução. A outra situação verificada foi a de que, nas entrevistas, percebeu-se a riqueza do pensamento dos alunos nas maneiras de resolver os problemas, ou seja, o que se chamou de heurística dos alunos ou didática dos alunos (uma organização particular de pensamento matemático lógico e coerente). Tendo em vista essas duas situações, concluiu-se que as relações didáticas na respectiva tríade, quando o ensino da Matemática é feito através da Resolução de Problemas, são caracterizadas como: potencialmente heurísticas, criadoras e motivadoras.

De acordo com estes estudos, os conhecimentos de resolução de problemas dos professores em exercício do magistério evidenciaram que estes desconheciam as características dessa abordagem de ensino da Matemática. Além disso, apesar de muitos professores terem sido instruídos sobre resolução de problemas, notaram-se dificuldades para incorporar e manter tal metodologia nas suas aulas, sendo, uma delas, a questão afetiva, por meio de um sentimento desfavorável para conduzir o ensino.

O que se observou foi que os professores ainda exercem um ensino padronizado, oriundo de exercícios baseados em um único caminho de resolução e que os alunos refletem o aprendizado a esse modo. Apesar de os professores terem noção de que a resolução de problemas se trata de uma prática inovadora e que pode favorecer a aprendizagem de conceitos e ideias matemáticas, relataram que é difícil ensinar por meio de problemas.

No caso dos futuros professores, verificou-se que desconhecem sobre resolução de problemas, pois a consideravam como aplicação de conhecimentos anteriormente aprendidos, situação que parece ser decorrente do ensino recebido durante o período de escolarização básica.

1.3 A resolução de problemas na formação inicial em Matemática

Schoenfeld (1985) realizou em estudo para verificar o que as pessoas sabem e fazem quando resolvem problemas matemáticos. Ele descreveu uma estrutura baseada em quatro dimensões: recursos, heurísticas, controle e sistema de crenças. Tal estrutura, descrita em seu livro *Mathematical Problem Solving*, sustentou-se na ideia de que o sucesso na resolução de problemas de Matemática significa ter compreensão da matemática envolvida. Essa ideia ficou caracterizada quando o referido autor examinou detalhadamente, por meio de uma disciplina optativa, o desempenho em resolução de problemas de alunos de um curso de Matemática que já haviam concluído pelo menos um semestre de aulas. Os dados vídeo-gravados mostraram que os graduandos apresentaram recursos fracos (baixo nível de conhecimento) em relação ao que seus desempenhos poderiam evidenciar. Mostraram ainda que esses alunos tinham pouca consciência de heurísticas matemáticas ou mesmo pouca habilidade para usá-las. Além disso, a seleção e aplicação dos recursos disponíveis eram pouco plenas e críticas, ou seja, apresentavam um controle fraco das situações relacionadas sobre planejamento, monitoramento e avaliação, metacognição e tomada de decisão. Por fim, a categoria denominada de sistemas de crenças mostrou que os graduandos tinham um baixo entendimento sobre matemática, pois não utilizaram de forma adequada o conhecimento que possuíam e tentaram aplicar alguns procedimentos mecânicos em situações que não eram necessárias. Para o referido autor, a compreensão se coloca como um fator importante, relacionado à resolução de problemas de matemática.

Na tese de doutorado de Pirola (2000), o objetivo foi o de investigar como 124 alunos do curso de Habilitação Específica do Magistério e 90 alunos do curso de Licenciatura em Matemática utilizavam conceitos e princípios na solução de dez problemas geométricos, envolvendo área, perímetro e volume. Tais problemas possuíam enunciados formados por informações completas, incompletas e supérfluas, sendo que estes dois últimos foram retirados da série II e III, respectivamente, do conjunto de problemas proposto por Krutetskii (1976). Esse estudo mostrou que, além de a análise estatística realizada apontar diferença significativa entre as médias obtidas pelos licenciandos e pelos alunos do Magistério, tais médias, que corresponderam, respectivamente, a 2,0 e 0,68 pontos, em uma escala de zero a dez pontos, foram baixas. Os problemas com informações incompletas e supérfluas foram aqueles em que os sujeitos da pesquisa tiveram maior dificuldade. Por exemplo, em um problema com informação supérflua, *Dado um triângulo isósceles com um lado medindo 2, o outro medindo 10 e o terceiro lado com medida igual a um dos outros dois lados. Calcule sua área.*, 21,11% dos licenciandos utilizaram incorretamente conceitos e princípios e 27,78% deles utilizaram de modo adequado o conceito de triângulo, mas incorretamente o de área.

Em outra tese de doutorado, Wielewski (2005) realizou uma análise detalhada do trabalho de Krutetskii (1976), além da análise dos estudos de Gowers, Poincaré, Boutroux, Otte e Kurz, para a compreensão da natureza da Matemática. O objetivo foi o de explorar e indicar características e dimensões do pensamento matemático de nove estudantes do curso de Licenciandos em Matemática e quatro alunos do curso de Ciências da Computação da

Universidade Federal de Mato Grosso. Esses participantes responderam a um questionário acerca das preferências que tinham para pensar e lidar com a Matemática. Posteriormente, resolveram 13 problemas matemáticos variados e, por fim, responderam a um questionário sobre as experiências que tiveram na resolução de problemas. Verificou-se que na maioria dos problemas propostos os participantes utilizaram diferentes resoluções: equação, fração, proporção, segmentos entre outras, auxiliados ou não por representações geométricas. A pesquisa mostrou que foram observados vários pensamentos matemáticos (estilos cognitivos) e que isso foi influenciado pela atividade, pelos problemas matemáticos e pelas experiências de cada aluno. Assim, o professor não deveria se restringir a um único processo de resolução e sim explorar várias possibilidades. Desse modo, em sala de aula, poder-se-ia tratar de um problema em várias perspectivas, possibilitando aos alunos tomar decisões sobre as estratégias de resolução que acharem mais convenientes.

Contudo, de acordo com essas pesquisas, percebe-se que o baixo desempenho de licenciandos em Matemática foi decorrente de experiências anteriores na Educação Básica, uma vez que apresentaram recursos reduzidos em termos de conhecimentos conceituais e de procedimentos heurísticos de resolução. Apresentaram, ainda, dificuldades no controle do processo de resolver um problema. No entanto, conforme destacou a pesquisa de Wielewski (2005), os alunos possuem pensamentos matemáticos diferentes, os quais deveriam ser discutidos e devidamente trabalhados em sala de aula.

No que diz respeito às propostas de formação de professores de Matemática sobre resolução de problemas, Charles (1989) analisou um programa de formação de professores em resolução de problemas matemáticos com o interesse de apontar direções para a pesquisa nessa área. O programa, desenvolvido na *Illinois State University*, foi realizado com professores *pre-service* (da formação inicial), além de professores *in-service* (de formação continuada) do Ensino Fundamental. Foi feito por meio de um curso de 15 semanas, utilizando grupos de discussão, leituras da literatura pertinente e observações em sala de aula. Nas primeiras três semanas, buscou-se desenvolver as habilidades dos professores na resolução de problemas em grupos e individualmente, bem como o papel do afeto. Nas quatro semanas seguintes, continuou-se a desenvolver as habilidades dos professores e as suas experiências foram aproveitadas para desenvolver os conhecimentos do conteúdo e curricular sobre resolução de problemas, além de uma discussão para compreender os processos de pensamento dos alunos. Por fim, nas oito semanas finais, o interesse foi desenvolver o conhecimento pedagógico e habilidades de ensino dos professores por meio de discussões sobre os problemas que foram resolvidos por eles no início do curso e por meio da aplicação de uma estratégia de ensino específica de resolução de problemas, denominada de Plano de Lição, a uma classe com 30 alunos. Os resultados mostraram que os professores compreenderam o que constitui um problema e o tipo de pensamento empregado, embora um entendimento não refinado do que seriam os processos de resolução de problemas. Eles compreenderam que há diferentes tipos de problemas e adquiriram algumas competências para formular problemas. Embora tivessem tais conhecimentos, os professores apresentaram dificuldades para direcionar o ensino aos 30 alunos através da resolução de problemas mesmo tendo em mãos um plano de lição pré-estabelecido pelo curso. Contudo, o autor sugeriu que as pesquisas deveriam investigar as questões relacionadas ao afeto, habilidades, conhecimentos do conteúdo e do currículo, meios em sala de aula para promover o pensamento matemático, direcionados ao favorecimento do ensino e aprendizagem de resolução de problemas matemáticos.

Na dissertação de mestrado de Azevedo (1998), o objetivo foi o de elaborar uma proposta de ensino para a Licenciatura em Matemática do ICLMA[6], pautada na aplicação e análise de um projeto de trabalho baseado no ensino da Matemática via Resolução de Problemas. Tal projeto foi formulado para o tópico de logaritmo, uma vez que seu ensino permite uma abordagem algébrica e geométrica. Além disso, interessava saber o conhecimento que os graduandos possuíam sobre esse tópico já que o estudaram no Ensino Médio. Utilizando a metodologia da Resolução de Problemas, baseado em autores como Polya (1986), Schoenfeld (1990) e Thompson (1990), e seguindo a ideia de que problema é "tudo aquilo que não se sabe resolver, mas que se tem interesse em resolver" (p. 202), o projeto foi aplicado a uma turma de 23 licenciandos do terceiro ano, durante oito encontros (total de 16 horas-aula) ocorridos na disciplina de Prática de Ensino. O trabalho foi desenvolvido, inicialmente, através de uma revisão de conceitos básicos ligados ao conteúdo de logaritmo. Em seguida, pequenos grupos receberam situações-problema para serem resolvidas, as quais foram áudio-gravadas, sendo, em momento posterior, discutidas em uma plenária. A análise da aplicação do projeto de trabalho mostrou que os licenciandos tiveram, na maior parte, habilidades em regras memorizadas e técnicas operatórias em detrimento do estabelecimento de relações entre o conceito de números racionais, presentes no trabalho com logaritmos. Uma vantagem foi o trabalho em grupo que possibilitou o diálogo de ideias entre os alunos. No geral, a proposta que se originou do projeto de trabalho tinha a intenção de se

[6] Instituto de Ciências e Letras do Médio Araguaia – UFMT.

pautar na abordagem feita aos logaritmos e ser posta em prática nos quatro anos do curso de Licenciatura em Matemática do ICLMA.

No trabalho de Allevato e Onuchic (2006), publicado em um evento da área de Educação Matemática, o objetivo foi o de apresentar algumas reflexões de uma experiência de formação de professores em que o foco era a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Os dados foram coletados a partir de um mini-curso, onde participaram 25 alunos, distribuídos entre licenciandos em Matemática e professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. A condução desse mini-curso seguiu as orientações de Krulik e Rudnick (2005) do livro *Problem-Driven Math – Applying the Mathematics Beyond Solutions* - Grade 5, o qual apresenta vários roteiros de aula, contendo atividades, problemas e orientações ao professor para sua implementação em aula (Sobre a Matemática; Estratégias para a Resolução de Problemas; Avaliando a compreensão; Estendendo a Matemática). As autoras mostraram, entre outros resultados, que a experiência realizada proporcionou aos participantes perceber uma nova forma de trabalho em sala de aula: a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Para as autoras, essa metodologia permite ambientes propícios à (re)construção do conhecimento de Matemática.

Nunes (2010), em sua tese de doutorado, investigou as potencialidades didático-matemáticas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Matemática através da Resolução de Problemas no campo da Geometria. Para tal, elaborou dois projetos, de 15 encontros cada, que conduziu com 14 licenciandos em Matemática do quarto semestre da Universidade do Estado da Bahia – UNEB. Em um desses projetos, conduzido na disciplina de Didática da Matemática, discutiu assuntos ligados ao papel do futuro professor no ensino-aprendizagem da Matemática. No outro projeto, conduzido na disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática II, trabalhou com os conceitos de Congruência e Semelhança de Triângulos, dando-se ênfase à Geometria das Transformações, através da manipulação e construção de figuras geométricas. Uma das situações que fizeram parte desses projetos foi o tratamento dado pela pesquisadora na discussão dos problemas, sendo que para essa autora "nosso objetivo, na escolha desses problemas, foi o de desafiar a intuição, a experimentação, a busca por padrões e o levantamento de conjecturas, mas sem perder de vista a ideia presente do raciocínio lógico, isto é, de raciocinar e dar sentido." (NUNES, 2010, p. 327). Um problema foi o seguinte:

Situação problema – As abdominais
Como parte de seu programa de ginástica, Beto decidiu fazer abdominais toda manhã. No dia 1º de abril ele fez apenas uma; no dia 2 de abril fez três abdominais; no dia 3 de abril fez cinco e no dia 4 de abril fez sete. Suponha que Beto tenha continuado a aumentar o número de abdominais a cada dia, seguindo esse mesmo padrão durante todo o mês de abril. Quantas abdominais ele fez no dia 15 de abril? Quantas abdominais ele fez até o dia 15 de abril?

Quadro 2: O problema das abdominais (Extraído de Nunes, 2010, p. 233).

De acordo com Nunes (2010), todos os grupos de alunos utilizaram a fórmula do termo geral de uma P.A. e a fórmula da soma dos termos de uma P.A. para resolver o problema acima, as quais haviam sido discutidas anteriormente pela autora. Como nenhum grupo resolveu de outro modo, a pesquisadora, tendo como fundamento a ideia de que a "matemática é uma ciência de padrão e ordem", apresentou outra forma de resolução por meio da construção de uma tabela, conforme o Quadro abaixo.

Dia (n)	Número de abdominais (N)	Soma do número de abdominais (S)	Total (T)
1	1	1	1
2	3	1+3	4
3	5	1+3+5	9
4	7	1+3+5+7	16
5	9	1+3+5+7+9	25
⋮	⋮	⋮	⋮
15	29	1+3+5+7+... +27+29	225
⋮	⋮	⋮	⋮

Quadro 3: Total de abdominais em função do dia (Extraído de Nunes, 2010, p. 235).

Diante da análise dessa tabela, a autora levou os licenciandos a encontrarem um dois padrões, obtendo as expressões matemáticas $N = 2n - 1$ e $T = n^2$, respectivamente, para o número de abdominais e o total de abdominais. A análise dos dois projetos desenvolvidos mostrou que uma das dificuldades mais evidentes encontradas na participação dos licenciandos foi a de registrar suas ideias, interpretar os textos e na resolução dos problemas. Além disso, foi notória a dificuldade em argumentar, justificar, conjecturar e generalizar. No entanto, o fato de a autora ter levado, com frequência, os licenciandos a pensar e comunicar suas ideias permitiu que essa metodologia favorecesse que esses alunos assumissem uma postura de investigadores, de professores reflexivos. Além disso, possibilitou maior interação entre os alunos, os quais se sentiram desafiados e motivados a resolver problemas.

De acordo com esses estudos que envolveram propostas de melhoria na formação inicial sobre Resolução de Problemas, notaram-se dificuldades dos licenciandos quanto à interpretação de dados no problema, quanto ao estabelecimento de relações matemáticas, quanto às capacidades de pensamento como, por exemplo, para generalizar, e, assim, quanto à implementação dessa metodologia em sala de aula.

No entanto, tais estudos possibilitaram aos licenciandos uma comparação entre as maneiras como acreditavam que seria o ensino de Matemática, oriundas dos níveis de escolarização anterior, e as formas de ensino-aprendizagem através da metodologia da Resolução de Problemas em Matemática. Isso permitiu uma reflexão desses futuros professores sobre o ensino em sala de aula, tendo em vista as vantagens advindas do trabalho em grupo e de sua interação, o favorecimento da motivação e a possibilidade de abordar habilidades e estratégias de resolução de problemas.

1.4 Considerações sobre as pesquisas

No que se refere à formação do professor de Matemática para ensinar conteúdos de Matemática por meio da resolução de problemas, é possível inferir que o que está sendo realizado em sala de aula não segue os princípios básicos que norteiam esse caminho para o ensino dessa disciplina escolar como, por exemplo, introduzir um problema antes de abordar um conteúdo e, assim, discutir as estratégias de resolução dos alunos.

Segundo as pesquisas apresentadas, evidencia-se que o modelo tradicional de ensino, baseado no trabalho com a memorização e repetição de fórmulas e regras matemáticas prontas e acabadas, ou seja, na aplicação de exercícios, ainda é o mais presente no ensino escolar da Educação Básica.

A análise dos conhecimentos dos professores que estão lecionando em sala de aula mostra esse fato e expõe suas dificuldades na iniciativa de direcionar o ensino por meio da resolução de problemas e, consequentemente, de propor problemas como ponto de partida para trabalhar assuntos e tópicos do conteúdo matemático.

Uma dessas dificuldades, apontada na pesquisa de Thompson (1989), diz respeito ao papel da afetividade nesse ensino. A afetividade corresponde a um dos componentes das atitudes em relação à Matemática, sendo que a atitude do professor (sentimentos favoráveis ou desfavoráveis) pode influenciar o seu comportamento para o trabalho com a resolução de problemas no ensino (GONÇALEZ; BRITO, 2001).

Tendo em vista o ensino realizado em sala de aula, as pesquisas evidenciaram que o aluno acaba recorrendo, frequentemente, ao uso de algoritmos sem a devida reflexão das atividades propostas. Essa situação acaba por se refletir no aluno que ingressa em um curso de formação de professores, pois as pesquisas mostraram que os licenciandos também trazem concepções errôneas sobre como resolver problemas.

No referido curso, como destacaram as pesquisas, tais licenciandos apresentaram dificuldades na resolução de problemas. Ainda é baixa a habilidade para articular conceitos, princípios e procedimentos e se distanciar da busca de um procedimento algorítmico único.

No entanto, percebe-se que os estudos que buscaram favorecer a formação dos futuros professores para o ensino utilizando a abordagem da resolução de problemas contribuíram para tal formação. É importante que isso aconteça, pois as pesquisas apresentadas na revisão bibliográfica que implementaram essa abordagem na Educação Básica mostraram que houve uma aprendizagem significativa pelos alunos dos assuntos estudados naquele momento em relação ao ensino que estava sendo realizado em sala de aula.

2 FORMAÇÃO DE PROFESSORES

De acordo com Brasil (2002b), a respeito das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena, a orientação à formação do professor para a atividade docente deve, entre outras coisas, favorecer o preparo para o ensino visando à aprendizagem do aluno e o uso de metodologias e estratégias inovadoras.

De modo geral, essas Diretrizes Curriculares preveem que se leve em consideração o desenvolvimento de competências necessárias à atuação do professor, entre elas as competências referentes ao domínio pedagógico, oriundas de uma formação que contemple os diferentes âmbitos do conhecimento profissional do professor.

Tal conhecimento profissional pode ser entendido como o conjunto de conhecimentos ou saberes, elencados por autores que investigaram a formação de professores. Assim, antes de apresentar uma visão sobre a formação inicial de professores, destacando-se o papel do estágio nessa formação, discorre-se a respeito das diferentes tipologias de saberes docentes necessárias ao ensino.

2.1 Saberes Docentes: diferentes tipologias

A caracterização das diferentes tipologias dos saberes docentes surge em meio a tentativas de melhorar as condições e o *status* profissional da carreira de professor, o que influenciou o pensamento sobre a formação de professores tanto na América do Norte como na América Latina em termos de como conduzir essa formação.

Segundo Alves (2007), foi com o movimento de profissionalização do magistério, início da década de 1980, que as discussões acerca dos saberes docentes ganharam força. Conforme aponta esse autor, as características principais desse movimento seriam: (a) a busca de elevação da formação profissional do professor ao nível superior; e (b) a procura por transformar a estrutura do ensino e da carreira, elevando os salários e o *status* profissional.

De acordo com Gauthier et al. (1998), as preocupações sobre o ato de ensinar não são recentes, porém apenas nos últimos vinte (décadas de 1980 e 1990) anos surgiram esforços para descrever as práticas docentes por meio de pesquisas realizadas nas salas de aula.

Segundo Gauthier et al. (1998), uma condição fundamental para a questão da profissionalização do ensino seriam as tentativas de pesquisa e reflexão da prática docente, tendo em vista a constituição de um repertório de conhecimento. Para esses autores, essa constituição poderia ajudar a revelar as dificuldades sobre a atividade docente e sobre a produção de saberes sem referência às condições concretas de atuação do professor.

Shulman (1986) apontou que na década de 1980 surgiram pesquisas preocupadas em caracterizar a competência dos professores para um ensino eficaz. Segundo esse autor, o foco passou a ser a maneira como os professores organizam suas atividades de sala de aula, como eles a manejam, como estabelecem questões apropriadas aos alunos e como avaliam os entendimentos destes entre outras situações.

Os estudos de Shulman (1986, 1987) apresentavam preocupação sobre o ensino da matéria, sendo que este autor denominou de "ausência de paradigma" os resultados de pesquisas que simplificavam a complexidade do trabalho em sala de aula, tendo em vista o conhecimento do conteúdo para o ensino. Para esse autor, "[...] a aprendizagem do assunto da matéria não é frequentemente um fim em si mesma, mas antes um veículo empregado no serviço de outras metas". (SHULMAN, 1987, p. 07).

Entre essas metas, podem-se destacar aspectos centrais como os objetivos que levam os alunos a compreender e resolver problemas, pensar criticamente e de forma criativa, como também aprender fatos, princípios e regras de procedimento.

Diante da atenção voltada para o ensino da matéria, Shulman (1986) apresentou uma perspectiva sobre o conhecimento do conteúdo no ensino, a qual considerava importante na formação de professores, baseada em três categorias: (a) conhecimento do conteúdo do assunto da matéria; (b) conhecimento pedagógico do conteúdo; (c) e conhecimento curricular.

De acordo com Shulman (1986, 1987), o *conhecimento do assunto da matéria* envolve o conhecimento e entendimento da estrutura do conteúdo a ser ensinado, dos princípios de organização conceitual e dos princípios de investigação que ajudam a compreender questões relacionadas ao seu campo histórico e filosófico. O *Conhecimento pedagógico do conteúdo* corresponde ao ensino de um tópico de uma área específica de conteúdo por meio do uso de formas de representação de ideias, de analogias, ilustrações, exemplos, demonstrações e explanações, buscando favorecer a aprendizagem. Por fim, o *conhecimento curricular* envolve o conhecimento dos materiais e programas que se destinam a tópicos específicos de um conteúdo, os quais servem como "ferramentas de ofício" dos professores.

Essa tipologia proposta por esse autor representava uma forma de se pensar a profissionalização do ensino e que correspondeu a uma tentativa de estabelecer uma "base de conhecimento para o ensino", ou seja, a uma composição de conhecimentos, habilidades, entendimentos, disposições e responsabilidades destinadas à formação de professores (SHULMAN, 1987).

Gauthier et al. (1998) foram outros autores que se debruçaram a respeito dos saberes docentes e elencaram uma tipologia. A partir da síntese de pesquisas de campo sobre os saberes dos professores em sala de aula, estabeleceu-se um conjunto de saberes, os quais compunham o que os autores denominaram de o "reservatório de saberes" dos professores. O objetivo foi o de tentar situar esses conhecimentos no âmbito da problemática de estabelecer um repertório de conhecimentos para o ensino.

Além disso, Gauthier et al. (1998, p. 14) destacaram que a reflexão acerca da formação de professores e da prática docente deve considerar as dificuldades em se caracterizar "[...] o conjunto dos conhecimentos, competências e habilidades que servem de alicerce à prática concreta do magistério e que poderão, eventualmente, ser incorporados em programas de formação de professores".

A tentativa de caracterização do "reservatório de saberes" dos professores por meio das pesquisas sintetizadas por Gauthier et al. (1998) levou esses autores a apresentarem três categorias sobre a atividade docente, a saber: *ofício sem saberes pedagógicos; saberes sem ofício; ofício feito de saberes.*

O *ofício sem saberes pedagógicos* se refere a uma espécie de "cegueira conceitual", uma vez que muitos professores acreditavam que para um bom ensino bastava: (a) conhecer o conteúdo; (b) ter talento; (c) ter bom senso; (d) seguir a sua intuição; (e) ter experiência; e (f) ter cultura. Para Gauthier et al. (1998, p. 28), basear o ensino nesses conhecimentos "[...] não favorece de modo algum a formalização de saberes e de habilidades específicos ao exercício do magistério".

A categoria *saberes sem ofício* faz referência a uma formação do professor baseada em pesquisas que sugeriram um professor formal, atuando em um contexto idealizado. Consequentemente, acabou-se por reduzir a complexidade de formalização do ensino a partir do momento que isso não teve ligação com a realidade escolar.

Para Gauthier et al. (1998), o desafio da profissionalização do ensino estaria em considerar a atividade docente como um *ofício feito de saberes*, entendido como um "reservatório de saberes" de onde os professores mobilizam vários deles para a atuação concreta em sala de aula, a saber: (a) o saber disciplinar; (b) o saber curricular; (c) o saber das ciências da educação; (d) o saber da tradição pedagógica; (e) o saber experiencial; e (f) o saber da ação pedagógica.

O *saber disciplinar* corresponde ao conhecimento específico de uma determinada disciplina como Matemática, História etc. O *saber curricular* refere-se ao programa de ensino de uma disciplina específica como, por exemplo, os conteúdos, objetivos, métodos etc. de Matemática. O *saber das ciências da educação* corresponde ao conhecimento sobre aspectos gerais de sua profissão como, por exemplo, o sistema escolar. O *saber da tradição pedagógica* corresponde a uma representação sobre o "saber dar aulas", antes de o aluno ingressar em um curso de formação de professores. O *saber experiencial* é aquele que envolve as experiências de sala de aula do professor e que se incorpora às suas atividades de rotina. E o *saber da ação pedagógica* é o saber experiencial dos professores a partir do momento em que se torna público e testado por meio das pesquisas realizadas em sala de aula.

Diante dessa tipologia de saberes, a tentativa de reconhecer um repertório de conhecimento para o ensino, segundo Gauthier et al. (1998), é dificultada pela diversidade teórica e metodológica das pesquisas. No entanto, a reflexão realizada pelos autores permitiu evidenciar que a ação pedagógica não pode ser exercida de forma mecânica e que se deve combater ideias que transitam no ensino como as de que ter talento ou conhecimento da matéria ou apenas experiência é o suficiente.

Tardif (2007) foi outro autor que analisou os saberes docentes, tendo em vista a questão do movimento da profissionalização do ensino e da problemática da formação de professores. O estudo realizado por esse autor teve como objetivo analisar as situações reais de trabalho do professor o que possibilitou elencar e apresentar uma tipologia de saberes.

Segundo esse autor, os saberes profissionais dos professores apresentam como características o fato de serem temporais, plurais e heterogêneos e também personalizados e situados. São temporais no sentido de que são adquiridos através do tempo, desde quando eram alunos da educação básica e se desenvolvendo ao longo de uma carreira profissional. São plurais e heterogêneos porque se originam de diversas fontes como a própria história de vida, conhecimentos da formação profissional na universidade e de conhecimentos curriculares e das experiências advindas no trabalho escolar. São personalizados e situados no sentido de que são próprios de sua cultura e do contexto em que está inserido e também porque são construídos em função de situações de trabalho particular.

Conforme essa caracterização dos saberes profissionais dos professores, para Tardif (2007, p. 36), "pode-se definir o saber docente como um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experiências."

O fato de o saber ser plural é uma característica que envolve, além do que já foi descrito, muitas teorias, concepções e técnicas as quais, segundo Tardif (2007), são utilizadas pelos professores no seu trabalho na escola, apesar de parecerem incoerentes.

> Quer se trate de uma aula ou do programa a ser ministrado durante o ano inteiro, percebe-se que o professor precisa mobilizar um vasto cabedal de saberes e habilidades, porque sua ação é orientada por diferentes objetivos: objetivos emocionais ligados à motivação dos alunos, objetivos sociais ligados à disciplina e à gestão da turma, objetivos cognitivos ligados à aprendizagem da matéria ensinada, objetivos coletivos ligados ao projeto educacional da escola etc. (TARDIF, 2007, p. 264).

Tendo em vista essa caracterização dos saberes docentes, Tardif (2007) elencou uma tipologia que constitui o saber profissional dos professores, a saber: saberes da formação profissional; saberes disciplinares; saberes curriculares; e saberes experienciais.

Os *saberes da formação profissional* compreendem os saberes que são transmitidos pelas instituições de formação de professores como as escolas normais ou as faculdades de ciências da educação e que envolvem conhecimentos pedagógicos. Os *saberes disciplinares* correspondem aos saberes dos diversos campos do conhecimento como a Matemática, História, Literatura etc. e que estão distribuídos sob a forma de disciplinas nas universidades. Os *saberes curriculares* correspondem aos programas escolares que envolvem os conteúdos, objetivos, métodos etc. escolhidos pela instituição escolar como modelos de formação da cultura erudita dos saberes sociais. Por fim, os *saberes experienciais* são os saberes oriundos da experiência do trabalho cotidiano do professor e por ela validado, incorporando-se "[...] à experiência individual e coletiva sob a forma de *habitus* e de habilidades, de saber-fazer e de saber-ser". (TARDIF, 2007, p. 39).

É importante destacar que, para Tardif (2007), a experiência de trabalho cotidiano parece se constituir como fundamento do saber docente, como um alicerce da prática e competência profissionais. Porque isso permitiria ao professor adquirir e produzir seus próprios saberes profissionais, pois não são oriundos das instituições de formação e nem dos currículos e nem mesmo podem ser encontrados sistematizados em teorias. Conforme esse autor, trata-se de saberes práticos que formam a cultura docente em ação.

Nesse sentido, Tardif (2007, p. 39) salienta que "[...] o professor ideal é alguém que deve conhecer sua matéria, sua disciplina e seu programa, além de possuir certos conhecimentos relativos às ciências da educação e à pedagogia e desenvolver um saber prático baseado em sua experiência cotidiana com os alunos".

A tipologia apresentada por Tardif (2007) foi uma tentativa de revelar os saberes docentes e compreender sua natureza, verificando como eram incorporados e aplicados no processo de trabalho docente. A essa realização, o autor denominou de a "epistemologia da prática profissional" dos professores, ou seja, "[...] o estudo do conjunto dos saberes utilizados realmente pelos profissionais em seu espaço de trabalho cotidiano para desempenhar todas as suas tarefas". (TARDIF, 2007, p. 255).

Nesta pesquisa, consideramos relevante os estudos de Shulman (1986, 1987), Gauthier et al. (1998) e Tardif (2007) sobre os saberes docentes. As diferentes tipologias são importantes no sentido de ajudar a elucidar o entendimento sobre o professor, seus saberes e seu trabalho. Com isso, podemos repensar ou mesmo melhor situar as condições de formação de professores.

Uma alternativa que poderia ajudar a incorporar os saberes dos professores em programa de formação seria, como aponta Tardif (2007, p. 298-299), o de "[...] erigir um repertório de conhecimentos oriundo da prática da profissão e nela baseado, que seja ao mesmo tempo válido para os alunos em formação e por eles utilizável".

Assim, pensa-se que a determinação das tipologias dos saberes docentes mostra-se como um elemento imprescindível para a discussão e direcionamento sobre a formação de professores, em especial a esta pesquisa, sobre a formação inicial. Isso porque a construção de tais tipologias evidencia que os saberes docentes são oriundos de uma formação de saberes da formação inicial como dos conhecimentos que os futuros professores trazem de suas vivências na escola básica. Conforme destacou Alves (2007), um caminho seria o de se pensar na especificidade do profissional do magistério.

2.2 Aspectos da formação inicial

O percurso formativo na carreira docente para exercer o magistério na escola básica pode ser entendido, na visão de Pacheco e Flores (1999), como constituído de três grandes fases de formação: a formação inicial ou pré-serviço; a iniciação ao ensino; e a formação contínua.

Para esses autores, a formação inicial é o momento formal de aquisição de conhecimentos e competências para exercer a profissão e envolve, também, um período de práticas de ensino. A iniciação ao ensino corresponde aos primeiros anos de docência onde se desenvolve conhecimentos práticos. Por último, a formação contínua envolve as formas de desenvolver o crescimento profissional dos professores.

Pacheco e Flores (1999) evidenciaram que essas fases de formação fazem parte de um dos componentes do processo formativo de aprender a ensinar: a socialização. Tal componente apresenta que, além da vivência em uma instituição de formação e o exercício de professor, uma das influências nesse percurso formativo são os conhecimentos que os futuros professores trazem antes de ingressar em curso de formação.

Imbernón (2001) é um autor que corrobora com essas fases de formação ao apresentar que o conhecimento do exercício do ensino de um professor encontra-se em momentos de socialização: na formação inicial, na vivência profissional (iniciação ao ensino) e na formação permanente. Além dessas fases de formação, o autor apontou a experiência como discente como uma socialização que envolve aquisição de conhecimento pedagógico comum. Tal experiência pode ser entendida como as aquisições que o futuro professor obteve quando era aluno da Educação Básica e que acaba influenciando o seu percurso formativo.

Como se pode compreender, a formação do professor passa por várias etapas sucessivas de aprender a ensinar e se estende durante toda a vida profissional. A esse respeito, Pacheco e Flores (1999) destacaram que essa aprendizagem contínua do professor, desde que era aluno, evidencia o conceito de desenvolvimento profissional. Para os autores, esse conceito envolve:

> [...] uma atitude permanente de indagação ou capacidade de um professor em manter a curiosidade acerca da aula, identificar interesses significativos no processo de ensino e aprendizagem, valorizar o diálogo com os colegas, procurando problematizar toda a sua atividade profissional. (PACHECO; FLORES, 1999, p. 56).

Diante dessas considerações, o foco desta presente pesquisa é referente à formação inicial, especialmente a formação inicial de futuros professores de Matemática, sem deixar de abordar assuntos relacionados às aprendizagens anteriores a essa formação.

No que se referem aos pressupostos teóricos e metodológicos da formação inicial, Almeida e Biajone (2007) destacaram as tentativas de superação do "modelo da racionalidade técnica", o qual foi muito discutido e criticado com maior ênfase na década de 1990. Na visão desses autores, esse modelo apresenta limites no percurso formativo, uma vez que implica uma relação entre teoria e prática como elementos dissociados da formação.

Para Fiorentini, Souza Jr. e Melo (1998, p. 308), "a "racionalidade técnica" pressupõe que o professor deve ter primeiro uma formação teórico-técnica para, posteriormente, fazer da prática uma instância de aplicação da teoria ou das prescrições técnicas", o que implica uma negação da teoria na compreensão e reflexão da prática pedagógica e na construção e apropriação dos saberes docentes.

Cyrino (2006), ao tratar da preparação e emancipação profissional na formação inicial do futuro professor de Matemática, destacou a necessidade de se repensar esse modelo da racionalidade técnica, ainda presente em muitos cursos de formação inicial. Para essa autora, as atividades de formação precisam envolver os licenciandos em um processo de reflexão sobre aspectos como, por exemplo, o que eles entendem por Matemática, além de dar oportunidades de aprender e construir novas estratégias de ação em sala de aula.

Segundo Pacheco e Flores (1999), tornar-se professor não corresponde à aplicação mecânica de destrezas e habilidades pedagógicas, mas sim a um processo complexo que é formado de aprendizagens e experiências provenientes de um percurso formativo.

De acordo com Brasil (2002b), as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, curso de Licenciatura plena, destacam que na formação para a docência deve-se relacionar teoria e prática. A garantia da articulação entre teoria e prática, ou seja, promover uma articulação entre o conjunto de conhecimentos teóricos fornecidos pelos cursos de formação e a realidade de atuação profissional, atualmente, é retratada por uma política educacional, a qual instituiu, por meio da Resolução CNE/CP 2/2002 (BRASIL, 2002c), que a carga horária dos Cursos de Formação de Professores da Escola Básica deve ter, no mínimo, 2800 horas.

Nesse sentido, tal Resolução mostra que a carga horária ficou assim distribuída:

- 400 horas de prática como componente curricular, vivenciadas ao longo do curso;
- 400 horas de estágio curricular supervisionado a partir do início da segunda metade do curso;
- 1800 horas de aulas para os conteúdos curriculares de natureza científico-cultural;
- 200 horas para outras formas de atividades acadêmico-científico-culturais.

Os Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2010) apresentam como orientação aos cursos a abordagem de temas para a formação. No caso da Licenciatura em Matemática, os temas destacados são os seguintes: Fundamentos de Análise, Álgebra e Geometria; Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Geometria Analítica; Probabilidade e Estatística; Modelagem Matemática; Desenho Geométrico; Física Geral; História e Filosofia das Ciências Naturais e da Matemática; História, Filosofia e Sociologia da Educação; Metodologia e Prática de Ensino de Matemática; Tecnologias da informação e comunicação aplicadas ao ensino de Matemática;

Psicologia da Educação; Legislação Educacional; Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS); Pluralidade Cultural e Orientação Sexual; Ética e Meio Ambiente; Relações Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS).

Além disso, tais Referenciais destacaram que o perfil do egresso da Licenciatura em Matemática "[...] requer sólidos conhecimentos sobre os fundamentos da Matemática, sobre seu desenvolvimento histórico e suas relações com diversas áreas; assim como sobre estratégias para transposição do conhecimento matemático em saber escolar". (BRASIL, 2010, p. 79).

Sobre esse último aspecto, foi de interesse da presente pesquisa investigar e analisar uma estratégia de ensino – a resolução de problemas – na formação dos futuros professores de Matemática. Isso foi feito, além da discussão teórica na disciplina de Prática de Ensino, junto da realização das atividades de estágio.

Assim, em relação ao Estágio Curricular Supervisionado, a legislação vigente entende esse componente curricular como:

> [...] o tempo de aprendizagem que, através de um período de permanência, alguém se demora em algum lugar ou ofício para aprender a prática do mesmo e depois poder exercer uma profissão ou ofício. Assim o estágio curricular supervisionado supõe uma relação pedagógica entre alguém que já é um profissional reconhecido em um ambiente institucional de trabalho e um aluno estagiário. Por isso é que este momento se chama estágio curricular supervisionado. (BRASIL, 2002d, p. 10).

Para Piconez (1991, p. 22), "o espaço do estágio é o eixo que pode articular a integração teoria–prática entre os conteúdos da Parte Diversificada e do Núcleo Comum do curso de formação de professores e o conhecimento da realidade da sala de aula da escola pública."

De modo específico, Cody e Siqueira (2000, p. 36) apontaram que o estágio deve permitir ao formando a compreensão, entre outras situações, de "que o conhecimento e a utilização dos procedimentos didáticos devem servir para a motivação dos alunos e enriquecimento das aulas."

Lopes (2009) destacou que a dicotomia entre teoria e prática é uma das situações mais abordadas quando o assunto é a formação inicial. Essa autora relatou que é frequente encontrar uma abordagem da teoria como uma função distinta da prática, que a teoria é um conjunto independente de ideias e que a prática é algo exclusivo dos estágios curriculares.

Para essa autora, "[...] é importante que durante o curso de formação sejam oferecidas oportunidades aos futuros professores de integrarem teoria e prática num processo permanente de realização de práticas amparadas por uma reflexão teórica constante". (LOPES, 2009, p. 57-58). Essa autora destacou ainda que "uma oportunidade para isso pode estar nos estágios curriculares, entendidos como experiências que podem ser tomadas como exemplares para a realização de futuras práticas profissionais." (LOPES, 2009, p. 58).

Para Moura (2003 apud LOPES, 2009, p. 58),

> "estágio" refere-se a uma preparação anterior à prática profissional e "curricular"; por se referir a currículo, pressupõe o domínio de elementos que têm como meta a sua concretização, o que pressupõe: uma aprendizagem a partir de práticas compartilhadas com os outros; a compreensão do objeto curricular, no sentido de saber lidar com um conhecimento organizado para ensinar alguém sobre o conhecimento instituído; a necessidade de aprendizagem do sujeito que vai ensinar.

Na visão de Pimenta e Lima (2004), o estágio é uma oportunidade da aprendizagem da profissão docente e por isso deve ser visto como um campo de conhecimentos importantes ao processo formativo. Para essas autoras, a intencionalidade e a reflexão são pontos importantes para configurar esse processo formativo, o qual constitui a essência do estágio.

Segundo Pimenta e Lima (2004), tal processo implica em favorecer aos futuros professores a apropriação de instrumentos teóricos e metodológicos necessários para compreender a escola no todo.

> Essa formação tem por objetivo preparar o estagiário para a realização de atividades nas escolas, com os professores nas salas de aula, bem como para o exercício de análise, avaliação e crítica que possibilite a proposição de projetos de intervenção a partir de desafios e dificuldades que a rotina do estágio nas escolas revela. (PIMENTA; LIMA, 2004, p. 102).

De acordo com Oliveira (2011), o estágio tem sido entendido como um trabalho em que se espera que o licenciando apenas observe, participe e realize regências de aula, situação que acaba sendo resultado do descompasso que existe entre leis, projetos pedagógicos dos cursos de licenciatura e estrutura e funcionamento das escolas.

Ao analisar a parceria escola-universidade para o desenvolvimento de horas de estágio supervisionado de licenciandos em Matemática, Oliveira (2011) destacou que as ações de observar, participar e reger aulas não podem ser feitas de maneira isolada. Para essa autora, essas ações precisam levar em consideração aspectos como a realização de um diagnóstico, planejamento, investigação e reflexão das atividades propostas.

Além disso, nessa parceria, para favorecer essas ações e a construção de saberes docentes pelos licenciandos em Matemática, a autora apontou que é importante um trabalho em grupo, envolvendo a participação dos professores da escola, devido seus saberes e experiências, bem como levar em consideração o contexto escolar e as necessidades dos alunos que lá estudam.

Dessa forma, para Oliveira (2011):

> Entender a negação da tríade observação-participação-regência é entender o estágio como uma construção sócio-histórica, que atualmente se destaca pela existência de troca, do respeito mútuo, do diálogo entre mestre e estagiário, entre este e os alunos da escola e entre esta e a universidade. (OLIVEIRA, 2011, p. 226).

Tendo em vista essas considerações sobre a articulação entre teoria e prática para favorecer a formação inicial e sabendo-se que o estágio é um componente curricular importante para tal articulação, é importante destacar, agora, como alguns autores pensam sobre as oportunidades a serem dadas na formação inicial, tendo em vista a construção de saberes docentes necessários ao ensino.

Segundo Mizukami (2006), os processos formativos da docência deveriam levar em consideração uma base de conhecimento que inclui o conhecimento sobre os processos de desenvolvimento e dos contextos socioculturais dos alunos, sobre a matéria que os professores ensinam e o currículo e sobre o ensino de diferentes matérias, das formas de avaliação e das condições de manejo de classe.

De acordo com essa autora, como a aprendizagem da docência se desenvolve ao longo da vida, a formação inicial deve ser um momento formal e que conduza para o entendimento desse desenvolvimento. “Para tanto, deve oferecer aos futuros professores uma sólida formação teórico-prática que alavanque e alimente processos de aprendizagem e desenvolvimento profissional ao longo de suas trajetórias docentes.” (MIZUKAMI, 2006, p. 216).

Na perspectiva de Cyrino (2006), a formação inicial do professor de Matemática deveria favorecer a vivência e a reflexão da produção do conhecimento. Assim, para essa autora, por exemplo, desde o primeiro ano do curso, os licenciandos poderiam escolher um conteúdo matemático e investigar os seus aspectos didáticos, filosóficos, psicológicos, sociológicos e políticos, durante todo esse curso. Isso ajudaria os alunos a verem a Matemática não simplesmente como uma ferramenta.

De acordo com Pires, Silva e Santos (2006), os cursos de Licenciatura em Matemática deveriam ter como base a abordagem de conhecimento matemático atrelado ao tratamento pedagógico e histórico. Desse modo, conteúdos matemáticos a serem ensinados na escola mereceriam um aprofundamento, entre outros aspectos, do papel que devem desempenhar na formação dos alunos.

Além dessas situações, Imbernón (2001) apontou que é importante, na formação inicial, partir das ideias prévias dos futuros professores, capacitá-los com ações que se apóiem em uma fundamentação válida, evitando o paradoxo de ensinar a não ensinar e evitando que a formação se direcione a uma visão funcionalista, mecânica, rotineira, técnica, burocrática e não reflexiva da profissão.

Além disso, esse autor destacou que a formação inicial deve proporcionar aos futuros professores um conhecimento válido, a construção de atitude interativa e dialética, a criação de métodos de cooperação, análise, reflexão e intervenção, a construção de um estilo rigoroso e investigativo, o conhecimento dos próprios limites e das frustrações decorrentes do ambiente social escolar e o preparo para adequar suas atuações ao que os alunos necessitam segundo o contexto e época.

Imbernón (2001) destacou ainda que essa formação apontada acima confere um conhecimento profissional/pedagógico básico, o qual estaria relacionado à ação prática. Nesse sentido, o desenvolvimento e a consolidação de um pensamento educativo deveriam destacar a "aprendizagem prática" e não apenas como forma de assumir a cultura de trabalho.

Desse modo, o autor relatou que a prática deve ser reformulada tendo em vista a redefinição das relações entre aluno e a realidade escolar durante a formação inicial, a saber: as práticas devem favorecer uma visão integral dessas relações e a análise dialética entre teoria e prática; as práticas devem ser o eixo central para favorecer a construção do conhecimento profissional básico do professor; as práticas devem permitir que os alunos reinterpretem e sistematizem as experiências anteriores e presentes por meio de propostas teórico-práticas.

Para Imbernón (2001), a especificidade da profissão docente está no conhecimento pedagógico. "Entendo esse conhecimento como o utilizado pelos profissionais da educação, que se construiu e se reconstruiu constantemente durante a vida profissional do professor em sua relação com a teoria e a prática." (IMBERNÓN, 2001, p. 30).

Segundo esse autor, o conhecimento pedagógico não é absoluto, envolve conhecimento comum e conhecimento especializado. O primeiro existe na estrutura social que se transfere às concepções dos professores. O segundo é um conhecimento prático e isso é o que diferencia e estabelece a profissão.

Roldão (2007) destacou que, historicamente, a função do professor foi associada à ideia de profissional que detém um saber e, assim, transmite-o, passa-o. Desse modo, segundo as experiências de ensino que tiveram, muitos alunos acreditam que o ensino é uma atividade que tem como sinônimo a passagem do saber.

Para essa autora, ensinar hoje é um conceito anacrônico, uma vez que se está inserido em um contexto de mudanças históricas e sociais. Assim, "[...] "passar" conhecimento já não é hoje uma necessidade social do mesmo tipo, porque o conhecimento, e a informação com que o conhecimento se constrói, estão acessíveis a muitos e de muitas formas". (ROLDÃO, 2007, p. 35-36).

Na visão de Roldão (2007), a função específica definidora do profissional professor é caracterizada pela "função de ensinar", e ensinar não significa "passar" um saber.

> A função de ensinar, caracterizadora do profissional que somos, ou que quereríamos ser, na minha perspectiva, consiste, diferentemente, em fazer com que outros adquiram saber, aprendam e se apropriem de alguma coisa. E é aí que nós, professores, somos uma profissão indispensável, e talvez cada vez mais indispensável, porque não basta pôr a informação disponível para que o outro aprenda, **é preciso que haja alguém que proceda à organização e estruturação de um conjunto de ações que levem o outro a aprender**. Isso é, a meu ver, o que define ensinar, o que marca a diferença desta atividade, a sua especificidade e necessidade social. (ROLDÃO, 2007, p. 36, grifo nosso).

Diante dessa função específica, a autora destacou a importância do saber científico (especificidade do campo curricular, sobre os alunos e os modos de ensinar), sendo que a qualidade da formação dos professores deveria estar relacionada à exigência e qualidade desse saber. Destacou, ainda, a importância de se favorecer a capacidade de conhecer, pensar e agir de modo fundamentado, de avaliar a própria ação e a dos outros, sendo necessária, para isso, a imersão do licenciando no contexto de trabalho.

Percebe-se que a formação inicial de professores não deve se direcionar à aquisição de habilidades de transmissão e aplicação de saberes, mas a uma especificidade que faz com que tais saberes sejam passíveis de serem ensinados e aprendidos, o que teria relação com a formação prática da profissão.

É nesse sentido que as diferentes tipologias dos saberes docentes, anteriormente apresentadas, podem contribuir para tal formação, uma vez que foram constituídos por meio dos saberes anteriores à formação inicial, da própria formação inicial e com enfoque da prática profissional dos professores na utilização desses saberes. Para Tardif (2007), pensar nessa prática implicaria pensar em uma formação inicial que levasse os alunos a habituar-se à prática profissional dos professores de profissão e torná-los práticos reflexivos.

De acordo com Tardif (2007), os programas de formação de professores deveriam se organizar em torno de uma formação geral, centrado na cultura profissional dos professores, e de uma formação disciplinar, as quais devem ser atreladas à formação prática, garantindo uma base de formação profissional. "Formação geral e formação disciplinar não podem mais ser concebidas na ausência de laços com a formação prática." (TARDIF, 2007, p. 289).

Segundo Tardif (2007), essa organização da formação inicial não implica na reprodução de práticas ou mesmo no esvaziamento de teoria e sim possibilitar que a inovação, o olhar crítico e a teoria ajudem a analisar as situações reais de exercício da profissão, contribuindo, assim, para a evolução e transformação desse exercício.

Ao realizar uma análise do trabalho desse autor, Almeida e Biajone (2007) destacaram que as implicações dos saberes docentes para a formação inicial foram importantes para se repensar o caráter teórico e metodológico sobre a formação inicial de professores.

> Assim, o conhecimento-base deve constituir-se a partir de vivências e análise de práticas concretas que permitam constante dialética entre a prática profissional e a formação teórica e, ainda, entre a experiência concreta nas salas de aula e a pesquisa, entre os professores e os fenômenos universitários. (ALMEIDA; BIAJONE, 2007, p. 292).

Desse modo, tais vivências implicam que a formação inicial proporcione uma formação em que os futuros professores aprendam formas de intervir na melhoria da qualidade do ensino na escola básica. Essa oportunidade poderia (ou deveria) ser dada, por exemplo, para a formação teórica e posterior trabalho de uma abordagem de ensino da área em que se está se formando.

No caso específico dos licenciandos de um curso de Licenciatura em Matemática, a formação para a o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas, por exemplo, foco desta pesquisa, deveria ser realizada, tendo em vista sua caracterização para o ensino e sua articulação com o estágio nas escolas. Assim, a intenção seria a de favorecer uma dialética entre teoria e prática.

Segundo Fiorentini, Souza Jr. e Melo (1998), as disciplinas da área de atuação e de educação, eixos de formação teórica, deveriam levar em consideração a prática pedagógica como lugar para problematizar, significar e explorar conteúdos dessa formação teórica.

De acordo com as tipologias de saberes docentes, a resolução de problemas pode ser enquadrada como um saber da formação profissional porque corresponderia aos conhecimentos pedagógicos necessários ao ensino de determinada matéria, nesse caso, da Matemática. Especificamente, relaciona-se ao saber disciplinar, pois é preciso conhecimento matemático suficiente para utilizá-la no ensino-aprendizagem da Matemática. Por fim, faz parte (ou deveria fazer parte) do saber curricular, uma vez que se constitui como um procedimento de ensino ou didático, componente indispensável de um currículo.

Segundo Carlini (2004, p. 28), além de uma ação educativa orientada por objetivos de ensino e por conteúdos de ensino, o professor deve (ou deveria) conhecer com profundidade os chamados procedimentos de ensino que "são os "que fazer" pedagógicos, no sentido de provocar, estimular, desencadear a ação do aluno no processo de construção do conhecimento", sendo, um deles, a resolução de problemas.

Assim, tendo em vista uma formação baseada na construção e elaboração de saberes docentes na formação inicial, passa-se a discutir, de forma mais detalhada, após apresentar as considerações sobre este capitulo de formação de professores, as características, significados e orientações provenientes da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática.

2.3 Considerações sobre a formação de professores

Algumas indicações a respeito da legislação sobre os cursos de formação inicial de professores apresentadas neste capítulo – Parecer CNE/CP 9/2001 (BRASIL, 2002b), Resolução CNE/CP 2/2002 (BRASIL, 2002c), Parecer CNE/CP 28/2001 (BRASIL, 2002d) – parecem evidenciar a preocupação por condições que favoreçam a formação profissional do futuro professor que pretende atuar na escola básica.

Entende-se que uma preocupação principal é o favorecimento da articulação entre teoria e prática. Com certeza, um curso de Licenciatura em Matemática deveria evitar uma formação simplesmente teórica que leve os licenciandos a enraizarem um entendimento de que o estágio é um espaço de mera aplicação dessas orientações teóricas.

Sobre essa situação, acredita-se que as tipologias de saberes docentes nos ajudam a ampliar critérios sobre a formação inicial dos futuros professores de Matemática. Um deles diz respeito a levá-los a compreender e refletir sobre os saberes mobilizados pelos professores da escola como, por exemplo, aqueles relacionados aos conhecimentos pedagógicos no ensino de um conteúdo matemático, durante as atividades de estágio curricular supervisionado.

Levar em consideração a abordagem das diferentes tipologias de saberes docentes nessa formação implica que os assuntos discutidos nas diversas disciplinas do curso sejam relacionados ao trabalho em sala de aula do professor. Desse modo, não tem sentido discutir aspectos didáticos e históricos da Matemática se não é feita uma aproximação à realidade escolar e se esses aspectos não fizerem parte da elaboração e discussão das atividades de estágio.

A minha experiência como professor substituto na disciplina de estágio curricular supervisionado mostrou que a maioria dos licenciandos em Matemática tinha dificuldades em sintetizar o que aprenderam durante o curso nas suas propostas de planos de aula para as regências de aula na escola. Ficou a impressão de que seus conhecimentos a respeito de saberes pedagógicos e até mesmo do saber disciplinar não estavam desenvolvidos. Além disso, percebe-se que os próprios licenciandos acreditavam que a aprendizagem da profissão é tarefa somente das disciplinas pedagógicas e do estágio.

Diante disso, penso que é tarefa dos professores das disciplinas específicas da área de Matemática, dos de Educação Matemática e de Educação possibilitarem aos futuros professores de Matemática a aquisição de saberes docentes. O aspecto a ser considerado é justamente o de trazer para a discussão, entre outros assuntos, os saberes mobilizados pelos professores da escola.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

> O papel mais importante para a resolução de problemas é desenvolver a compreensão de matemática dos alunos.
> (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 31)

3.1 Delimitando o campo da resolução de problemas[7]

De acordo com Chi e Glaser (1992), desde a infância as pessoas solucionam problemas apresentados pelo mundo, sendo que as informações adquiridas são organizadas na forma de estruturas de conhecimento sobre objetos, eventos e pessoas. Tais estruturas englobam corpos de entendimento, modelos mentais, crenças e convicções que influenciam a maneira como resolvemos problemas.

Nesse sentido, o que esses autores denominaram de a "capacidade para a resolução de problemas" estaria relacionada aos processos cognitivos e às organizações mentais que uma pessoa desenvolveu. "A solução de problemas é uma habilidade cognitiva complexa que caracteriza uma das atividades humanas mais inteligentes." (CHI; GLASER, 1992, p. 249).

Segundo Chi e Glaser (1992), existem dois tipos de problemas, os escolares e os cotidianos, sendo que o desempenho na resolução de ambos não depende somente do uso de estratégias, mas do conhecimento do domínio específico do problema. Por exemplo, "resolver um problema de álgebra requer um conhecimento sobre quando e como aplicar todo um conjunto de regras para manipulação das equações". (CHI; GLASER, 1992, p. 251).

Na visão de Klausmeier e Goodwin (1977), a necessidade de tal conhecimento específico faz parte da natureza da resolução de problemas, a qual sugere que o indivíduo tenha informações e métodos anteriormente aprendidos e/ou a aprendizagem de informações, métodos ou ambos. Para esses autores, os indivíduos precisam ter e aplicar o conhecimento sobre procedimentos, conceitos e princípios na resolução de problemas.

Para esses autores, se um aluno reconhece que um triângulo equilátero é formado de três lados de medidas iguais, então se tiver que resolver um problema que envolva descobrir

---

[7] Na literatura revisada, os termos resolução de problemas e solução de problemas aparecem para se referirem ao processo de resolução. Além disso, também se identificam os termos problema e situações-problema para designar tarefas de matemática que fazem parte desse processo. Assim, nesta pesquisa, utilizaremos os termos resolução de problemas e problemas para tratá-los no ensino-aprendizagem da Matemática.

quanto mede seus ângulos, os conhecimentos específicos necessários serão os seguintes: informação factual (conhecer ou aprender que há 180 graus em qualquer triângulo); conhecer um princípio (saber ou aprender que se os três lados de um triângulo são iguais, então os três ângulos têm a mesma medida); ter capacidade ou método (aplicar o princípio, dividindo 180 graus por três para obter a medida de 60 graus de cada ângulo).

Brito (2006), por meio da análise de teorias e conceitos referentes à resolução de problemas, destacou que a resolução de problemas corresponde a um processo que envolve o uso de conceitos e princípios. Tal processo não implica na utilização de um método óbvio de resolução, mas em uma forma complexa dos processos cognitivos para combinar conceitos e princípios na busca de um caminho de resolução. Para essa autora:

> A solução de problemas é, portanto, geradora de um processo através do qual o aprendiz vai combinar, na estrutura cognitiva, os conceitos, princípios, procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos previamente adquiridos que são necessários para encontrar a solução com uma nova situação que demanda uma re-organização conceitual cognitiva. Trata-se, portanto, de uma re-organização dos elementos já presentes na estrutura cognitiva, combinados com os novos elementos trazidos pela nova situação. (BRITO, 2006, p. 19).

Desse modo, encontrar o caminho de resolução, isto é, uma estratégia que ajude a resolver o problema, por meio dos conhecimentos específicos e de sua reorganização, pode ser entendido, na visão de Chi e Glaser (1992), como a busca do "espaço de solução". De acordo com esses autores, o aspecto principal de um problema é que ele possui um *estado inicial* e têm algum *objetivo (estado desejado)*. Nesse sentido, tal espaço visa a encontrar os trajetos que ajudem o indivíduo a partir do estado inicial até o objetivo pretendido.

Segundo Chi e Glaser (1992), para que se obtenha o espaço de solução, é necessário que a pessoa analise o estado inicial e realize uma representação do problema. "A *representação* de um problema consiste essencialmente da interpretação ou compreensão do problema por aquele que o soluciona." (CHI; GLASER, 1992, p. 255, grifo dos autores).

Para esses autores, a representação de um problema é muito importante para facilitar a sua resolução. Nesse caso, representações que deixam de incorporar um ou mais aspectos do problema ou que são impróprias dificultam a resolução ou mesmo a impedem de obter a resposta, pois se acaba ampliando o espaço de solução.

Por exemplo, no problema *A mãe de Jesse pagou a mesada de 1 dólar e 60 centavos em moedas de 0,25, 0,10 e 0,05. Ele recebeu ao todo 17 moedas. Quantas moedas de cada valor a mãe lhe deu?* (LEBLANC; PROUDFIT; PUTT, 1997) se o aluno realizar uma representação desse problema onde deixa de incorporar o aspecto de que deve haver um total de 17 moedas, então vai ampliar seu espaço de solução e, assim, poderá impedir a obtenção de uma resposta correta.

Em outras situações, a pessoa pode acrescentar restrições desnecessárias, eliminando do espaço de solução o trajeto correto. Na Figura abaixo, são apresentadas as respostas para o problema dos nove pontos que implica desenhar quatro linhas retas através de nove pontos dispostos em três fileiras de três pontos, sem tirar o lápis do papel e sem passar pelo mesmo traçado.

De acordo com Chi e Glaser (1992), as soluções incorretas são decorrentes de solucionadores que inconscientemente acrescentam a restrição de que as quatro linhas retas não podem sair do quadrado formado pelos pontos. Destaca-se, ainda, que a figura não é um quadrado e sim um conjunto de pontos, o que pode ter levado às soluções incorretas.

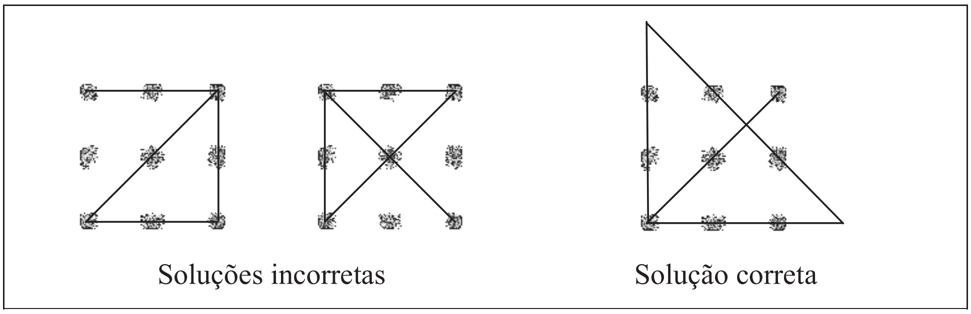


Figura 1: O problema dos nove pontos (Extraído de Chi e Glaiser, 1992, p. 256).

Desse modo, uma vez que a representação do problema foi realizada, Chi e Glaser (1992) apontaram que várias estratégias podem ser utilizadas para obter a resposta. Algumas delas seriam: (a) análise de meios/fins, com a intenção de encontrar a operação mais ampla que reduz a diferença entre estado inicial e estado desejado e vice-versa; (b) estabelecimento de subobjetivos, o qual busca escolher um estado intermediário no trajeto da solução como sendo um objetivo temporário; e (c) gerar e testar, a qual consiste em gerar possíveis soluções de um problema e testá-las para verificar se alguma é a solução correta.

Assim, segundo Chi e Glaser (1992), o conhecimento de uma pessoa sobre um domínio específico é importante para determinar a representação de um problema, a qual possibilita que procedimentos apropriados (estratégias) sejam recuperados da memória. “Então, os procedimentos apropriados para a solução do problema, se são conhecidos, devem ser recuperados da memória e aplicados à situação. A representação formada pelo solucionador do problema orienta a recordação de procedimentos apropriados à solução." (CHI; GLASER, 1992, p. 264).

Essa situação da representação do problema e do posterior uso de estratégias de resolução se enquadra, de acordo com Klausmeier e Goodwin (1977), em mais um aspecto importante da natureza da resolução de problemas: o fato de que o indivíduo, quando resolve um problema, engaja-se em uma sequência de fases ou etapas de resolução.

Brito (2006) analisou a sequência de fases/etapas propostas por autores como Mayer (1992), Krutetskii (1976) e Sternberg (2000) e apontou que o processo de resolução de problemas segue, em síntese, as seguintes fases/etapas: representação, planejamento, execução e monitoramento. Para essa autora:

> A solução de problemas refere-se a um processo que se inicia quando o sujeito se defronta com uma determinada situação e necessita buscar alternativas para atingir uma meta; nesses casos, o sujeito se encontra frente a uma situação-problema e, a partir daí, desenvolve as etapas para atingir a solução. (BRITO, 2006, p. 19).

A fase/etapa de *representação do problema* envolve a necessidade de que a pessoa construa uma representação mental desse problema e para isso deve apresentar *conhecimentos linguístico, semântico e esquemático* (MAYER, 1992). Tais conhecimentos envolvem, respectivamente, a conhecer a língua portuguesa, ou seja, as palavras envolvidas, a conhecer o significado das palavras como, por exemplo, de termos matemáticos e suas relações, a reconhecer, por exemplo, que um determinado problema é um problema de área, envolvendo a fórmula "área = comprimento x largura", o que mostra que a pessoa tem condições de guiar a atenção e discernir entre dados relevantes e irrelevantes.

Discernir estes dados, na visão de Krutetskii (1976), é entendido como a habilidade para a compreensão da estrutura formal do problema, o que envolve perceber problemas com informações incompletas e supérfluas. De modo geral, "essa etapa é crucial para você descobrir a resposta". (STERNBERG, 2000, p. 307).

A fase/etapa de *planejamento* envolve *conhecimento estratégico* para realizar a busca da solução, ou seja, encontrar um caminho para resolver um problema (MAYER, 1992). Nessa fase "você organiza estrategicamente a informação, encontrando uma representação que o habilite da melhor forma para executar sua estratégia." (STERNBERG, 2000, p. 308).

Para Sternberg (2000), não existe uma estratégia ideal para resolver um problema. "Em vez disso, a estratégia ótima depende tanto do problema, como das preferências pessoais dos solucionadores de problemas em relação aos métodos de resolução de problemas."

(STERNBERG, 2000, p. 308). Tais preferências foram delimitadas, na perspectiva de Krutetskii (1976), como os “tipos de mente matemática”. Trata-se de mentes de tipo Analítico, Geométrico ou Harmônico, as quais se referem à tendência dos alunos a utilizarem uma estratégia de resolução de problemas baseado em meios lógico-verbais, viso-pictórico, ou ambas, respectivamente.

Na fase/etapa de *execução*, a pessoa deve apresentar um *conhecimento procedimental*, o qual envolve realizar corretamente cálculos ou estratégias de cálculo (MAYER, 1992). Para Mayer (1992), por exemplo, saber dividir e multiplicar números decimais é um procedimento de cálculo matemático importante à resolução de um problema de matemática.

Por fim, na fase/etapa de *monitoramento*, é importante que, após obter a solução, ela seja avaliada. Essa ação equivale, também, a realizar um importante gasto de tempo para verificar o processo de resolução do problema. Assim, isso permite reconhecer novos problemas, redefinir o problema em questão, enxergar novas estratégias e passar a ter disponíveis novos recursos ou ampliar os existentes (STERNBERG, 2000).

Na visão de Klausmeier e Goodwin (1977), as fases/etapas evidenciadas pelos diversos autores favorecem a compreensão da resolução de problemas de modo geral e possibilita observar e analisar o comportamento dos alunos quando estão resolvendo problemas. Essas situações acabam auxiliando na busca de formas de abordagem em que habilidades de resolução de problemas podem ser trabalhadas em diversas disciplinas escolares.

Desse modo, Brito (2000b apud BRITO, 2006) apontou que a resolução de problemas corresponde a um processo cognitivo realizado pelo indivíduo que envolve quatro características básicas: é cognitiva, é um processo, é dirigida a um objetivo e é pessoal, pois depende do conhecimento prévio do indivíduo.

Diante dessas considerações sobre a resolução de problemas, pode-se destacar que os aspectos que a delimitam seriam os seguintes: a definição de problema, enquanto uma situação que demanda o alcance de um objetivo; a necessidade de conhecimentos específicos de uma determinada área como, por exemplo, o conhecimento matemático; a busca de estratégias de resolução baseadas nesses conhecimentos específicos; o fato de que a resolução de um problema segue fases, as quais, se realizadas adequadamente, permitem que a pessoa tenha sucesso no processo de resolução de problemas.

As próximas seções buscam um maior esclarecimento sobre a resolução de problemas para um entendimento mais amplo no que diz respeito a sua utilização no processo de ensino-aprendizagem na Matemática.

3.2 O que é um problema?

Tratar sobre o termo “problema” envolve levar em consideração situações como: as definições atribuídas por diversos autores, a relação com a pessoa que resolve uma tarefa matemática e a distinção de tarefas matemáticas em problemas e exercícios. A importância em se saber esta distinção implica conhecer a função que cada um exerce no ensino, o que pode ajudar o professor no alcance dos objetivos de aprendizagem pretendidos para o conteúdo trabalhado. Mais adiante será esclarecida essa distinção, evidenciando suas funções.

Sobre as definições, para Chi e Glaser (1992, p. 251), “um problema é uma situação na qual você está tentando alcançar algum objetivo e deve encontrar um meio de chegar lá.” Na visão de Klausmeier e Goodwin (1977, p. 347), “os indivíduos deparam-se com um problema quando se encontram numa situação que devem solucionar um problema e não possuem informações, conceitos, princípios ou métodos específicos disponíveis para chegar à solução.”

Nessa mesma linha de pensamento, Echeverría (1998) destacou que um problema de Matemática é aquele em que há um obstáculo entre a proposição e a meta. Para Mayer (1985, p. 123), “um problema ocorre quando vocês são confrontados com uma dada situação – vamos chamar de *estado dado* – e vocês querem outra situação – vamos chamar de *estado meta* – mas não há um caminho óbvio para conseguir essa meta.”

Na perspectiva de Sternberg (2000), apresentada em seu livro *Psicologia Cognitiva*, a resolução de problemas refere-se à superação de um obstáculo para alcançar um objetivo. Desse modo, “se pudermos recuperar rapidamente uma resposta da memória, não temos um problema. Se não pudermos recuperar uma resposta imediata, então temos um problema para ser resolvido”. (STERNBERG, 2000, p. 306).

Tal recuperação está relacionada à pessoa que resolve uma tarefa matemática. Desse modo, de acordo com Schoenfeld (1985), é difícil definir o termo “problema”, uma vez que o processo de resolução de problemas é relativo. Para esse autor, ser um problema:

> [...] não é uma propriedade inerente de uma tarefa matemática. Antes, é uma relação particular entre o indivíduo e a tarefa que faz da tarefa um problema para ele. A palavra problema é usada aqui nesse sentido relativo, como uma tarefa que é difícil ao indivíduo que tenta resolvê-la. (SCHOENFELD, 1985, p. 74, grifo do autor).

Na visão de Krulik e Rudnick (1982), uma atividade de matemática pode ser um problema para uma pessoa num determinado momento e, quando essa pessoa aumenta seu conhecimento matemático, tal atividade pode se tornar um exercício. Na perspectiva de

Echeverría e Pozo (1998), uma situação pode não ser um problema para uma pessoa pelo fato dela não se interessar em resolvê-la ou mesmo por utilizar mecanismos de resolução oriundos de recursos cognitivos mínimos e suficientes, transformando-a, assim, em um exercício.

Para estes autores, por exemplo, isolar uma incógnita numa equação matemática pode significar, para uma pessoa, a tentativa de resolver um exercício, um problema ou até mesmo nenhuma dessas situações, pois isso dependeria dos conhecimentos e atitudes que ela possui.

Como se pode perceber, uma tarefa de Matemática pode ser um problema ou tornar-se um exercício. Sobre esse aspecto, para Echeverría e Pozo (1998), a tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos na resolução de problemas é o que diferencia um verdadeiro problema de um exercício. Para os autores, "[...] um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução". (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 16).

Na visão de Charles e Lester (1982, apud SCHROEDER; LESTER, 1989), essa tomada de decisão pode ser entendida como uma situação em que quem resolve um problema não teria uma operação matemática previamente aprendida para ser aplicada. No caso dos exercícios, para esses autores, essa forma imediata de se chegar à solução corresponderia a seguir um modelo baseado na tradução de uma tarefa diretamente em uma representação matemática.

No exemplo *A mãe de Jesse pagou a mesada de 1 dólar e 60 centavos em moedas de 0,25, 0,10 e 0,05. Ele recebeu ao todo 17 moedas. Quantas moedas de cada valor a mãe lhe deu?*, percebe-se que a resposta não está disponível de imediato. É preciso tomar uma decisão sobre o caminho a ser seguido para resolvê-lo. Nesse caso, temos um problema a ser resolvido.

Por outro lado, no exemplo *João foi ao armazém comprar 3 caixas de coca-cola. Se cada caixa contém 6 garrafas, quantas garrafas de coca-cola João comprou?*, nota-se que a operação de multiplicação dos valores envolvidos corresponde a um mecanismo que leva de forma imediata à solução, isto é, realiza-se uma tradução direta da tarefa em uma representação matemática. Neste caso, temos um exercício.

Além disso, para Echeverría e Pozo (1998), aceitar que há uma distinção entre exercício e problema é pensar não somente no contexto da tarefa e no aluno que a enfrenta, mas no modo como se aprende um exercício e na forma de como ocorre o processo de resolução de problemas.

Para esses autores, a resolução de exercícios se dá no uso de habilidades ou técnicas que devem ser automatizadas e se tornarem rotinas de aprendizagem. Na visão de Matos e

Serrazina (1996, apud MENDES, 2009, p. 78), o indivíduo utiliza “estratégias de resolução que se resumem à aplicação de regras e algoritmos conhecidos que conduzem à solução”.

Ao contrário disso, Echeverría e Pozo (1998) apontaram que a resolução de problemas corresponde a uma situação que requer a busca de procedimentos e técnicas que conhecemos ou dominamos para responder a um objetivo, ou seja, “exige o uso de estratégias, a tomada de decisões sobre o processo de resolução que deve ser seguido etc.” (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 17).

Assim, no âmbito da heurística[8], esta pesquisa considera que a estratégia utilizada por um indivíduo para resolver um problema constitui-se em seu caminho particular de resolução. Conforme destacou Schoenfeld (1985), ao resolver um problema de Matemática, os indivíduos utilizam técnicas que lhes foram úteis em ocasiões anteriores, sendo que os métodos utilizados passam a constituir-se em estratégias. Na visão de Sternberg (2000) e de Krutetskii (1976), apresentadas anteriormente, esses caminhos correspondem às preferências pessoais da pessoa que tenta resolver um problema.

De modo geral, Echeverría e Pozo (1998) salientaram que problemas e exercícios constituem-se em situações importantes do ensino e que seus limites são, muitas vezes, difíceis de determinar. Tais limites estariam relacionados às experiências e conhecimentos prévios dos alunos, como pelos objetivos que eles visualizam, enquanto estão empenhados na resolução.

Para os autores, “é importante que nas atividades de sala de aula a distinção entre exercícios e problemas esteja bem definida e, principalmente, que fique claro para o aluno que as tarefas exigem algo mais de sua parte do que o simples exercício repetitivo.” (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 17).

Esses limites também estariam relacionados às dificuldades em definir o termo problema. Mayer (1985) apontou que havia divergência na conceituação do que viria a ser um problema. Segundo este autor, ao mesmo tempo em que se reconhecia a importância do ensino da resolução de problemas na Matemática escolar, havia uma discordância sobre o significado de resolução de problemas.

Brito (2006), ao analisar as ideias de diversos autores sobre a resolução de problemas matemáticos, encontrou tal discordância. Porém, evidenciou que:

---

[8] Segundo Polya (1994, p. 86), “o objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção”. Esse autor, em seu livro *A arte de resolver problemas*, tenta reviver esse estudo de forma moderna. Nesse sentido, a heurística “procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as *operações mentais*, *típicas* desse processo, que tenham utilidade” (p. 87, grifo do autor).

> [...] existe concordância sobre um problema ser uma situação inicial quase sempre desconhecida que é o ponto de partida. É o contato do sujeito com essa situação inicial desconhecida que permite a ele disponibilizar, na estrutura cognitiva, os elementos necessários à solução. (BRITO, 2006, p. 17).

Diante do que foi exposto anteriormente, concordamos com as ideias apresentadas de que um problema é uma situação em que há um obstáculo a ser superado no alcance da solução. Entende-se que a abordagem de problemas, além do trabalho com exercícios, faz-se necessária como parte do trabalho a ser realizado em sala de aula na escola. Nesse sentido, apresenta-se, na próxima seção, a importância da resolução de problemas no ensino de Matemática.

3.3 A importância da resolução de problemas no ensino de Matemática

Ao tratar dos aspectos históricos relacionados à presença da resolução de problemas no currículo de Matemática, Stanic e Kilpatrick (1990) destacaram que tal presença tinha como objetivo o de apenas resolver problemas e que o foco nas capacidades de resolução de problemas começou a acontecer no decorrer do século XX. Segundo esses autores, a resolução de problemas está presente no currículo apenas recentemente, sendo que a intenção é a melhoria do pensamento das pessoas, pois envolveria raciocínio, sendo considerada, simplesmente, um meio de se trabalhar matemática.

Segundo Onuchic (1999), a resolução de problemas, no final da década de 1970, começou a ganhar importância no mundo. Essa autora apontou que, para a década de 1980, a publicação *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics* no ano de 1980, do *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM, salientava que a resolução de problemas deveria ser o foco do ensino da Matemática escolar.

Ao final dessa década, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989) apresentou a resolução de problemas como uma das bases da Matemática escolar, considerando-a como foco central do currículo, pois permitiria que os alunos investigassem e compreendessem o conteúdo matemático. Além disso, entre outras situações, essa abordagem possibilitaria aos alunos o desenvolvimento de estratégias para resolver uma variedade de problemas, bem como a oportunidade de formular problemas e usar, significativamente, a Matemática.

Para Schroeder e Lester (1989), compreender Matemática corresponderia à ideia de relacionar. Assim, a compreensão de um aluno aumenta quando: (1) esse aluno é capaz de relacionar uma determinada ideia matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos; (2) esse aluno relaciona um determinado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele; (3) esse aluno constrói relações entre as várias ideias matemáticas expressas em um problema.

De acordo com Schroeder e Lester (1989), quando um aluno resolve um problema matemático, temos condições de ter pistas de como ele compreende ou mal entende ou mesmo não entende uma ideia matemática.

> Nós acreditamos que além de fazer da resolução de problemas o foco do ensino de matemática, professores, autores de livros, promotores de currículo e avaliadores deveriam fazer da compreensão seu foco e seu objetivo. Fazendo isso, eles mudariam da visão estreita de que matemática é apenas uma ferramenta para resolver problemas para uma visão mais ampla de que matemática é um caminho de pensar e organizar experiências. (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 39).

Para esses autores, a compreensão pode ajudar na resolução de problemas no sentido de que ela aumenta a riqueza dos tipos de representações que uma pessoa pode construir. Também auxilia a pessoa no monitoramento, seleção e execução de procedimentos como, por exemplo, de estratégias e de algoritmos. Além disso, ajuda na verificação da racionalidade dos resultados e a promover a transferência do conhecimento aprendido para problemas relacionados e promover sua generalidade para outras situações.

Charles (1985) enfatizou que o papel da resolução de problemas, no ensino, seria o de favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Para esse autor, o pensamento matemático envolve a coordenação de quatro componentes: processos de pensamento (processos de produção - pensamentos indutivo e dedutivo, desenvolvimento de hipóteses e de representações; processos de auto-regulação - monitorar, avaliar e direcionar ações); conhecimento matemático; crenças; e atitudes (sobre a matemática, professores e as próprias habilidades).

Esse papel pode ser entendido, na visão de Schoenfeld (1990, p. 87), como o de possibilitar ao aluno a aprender a pensar matematicamente, isto é, ter "[...] uma predisposição para analisar e entender, para perceber estruturas e relações estruturais, para ver como as coisas caminham juntas".

Para Mendes (2009, p. 71), a resolução de problemas ajuda os alunos a desenvolverem capacidades como justificar suas respostas e seus processos de resolução e usar fatos conhecidos, propriedades e relações matemáticas para explicar como estão pensando. Para esse autor, conforme os alunos se envolvem nesse processo, alguns chegam a alcançar capacidades mais elevadas de pensamento matemático, relacionadas ao raciocínio dedutivo e indutivo, ao uso do raciocínio espacial, às conjecturas e argumentos matemáticos propostos, à formulação de contraexemplos, o que os ajudam a validar seus próprios pensamentos.

Segundo Mendes (2009), essas capacidades mais elevadas estão relacionadas com o desenvolvimento das representações mental e simbólica. A representação mental é o modo individual de a pessoa internalizar sobre uma determinada situação-problema e é derivada das experiências que vivenciam com a Matemática. A representação simbólica corresponde às manifestações oral e escrita das reflexões matemáticas dos alunos, geradas na resolução de problemas. Assim, essas duas representações se interligam e, por um processo de generalização ou síntese, conduz o aluno à abstração, favorecendo o desenvolvimento dessas capacidades mais elevadas de pensamento matemático.

Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) denominaram de *proficiência matemática* o termo que se refere às competências, às habilidades, ao conhecimento e à facilidade com a Matemática, necessários aos alunos para obter sucesso na aprendizagem da Matemática. De acordo com esses autores, esse termo envolve cinco componentes: (1) compreensão conceitual; (2) fluência procedimental; (3) competência estratégica; (4) raciocínio adaptativo; (5) disposição produtiva.

A *compreensão conceitual* envolve compreensão de conceitos matemáticos, operações e relações. A *fluência processual* envolve habilidade para realizar procedimentos de forma flexível, acurada, eficiente e apropriada. A *competência estratégica* implica na habilidade para formular, representar e resolver problemas matemáticos. O *raciocínio adaptativo* corresponde à capacidade para o pensamento lógico, reflexão, explanação e justificação. Por fim, a *disposição produtiva* envolve inclinação habitual para ver a matemática como sensata, útil e proveitosa, junto à crença na diligência e na sua própria eficácia (KILPATRICK, SWAFFORD; FINDELL, 2001, p. 116).

Segundo os autores, esses componentes estão interligados e mantêm uma relação de interdependência para o desenvolvimento da proficiência em Matemática que deve levar em consideração a discussão dos conhecimentos, capacidades, habilidades e crenças dos alunos.

Assim, Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) evidenciaram que a resolução de problemas tem papel importante nesse desenvolvimento, uma vez que envolve todos esses componentes. Especificamente sobre a competência estratégica, apontaram que um dos conhecimentos a serem adquiridos é relativo às várias estratégias de resolução, identificando-se quais delas podem ajudar a resolver um problema específico.

A questão das estratégias de resolução é um dos aspectos importantes no trabalho com a resolução de problemas no ensino, o que pode contribuir para desenvolver as condições apontadas anteriormente.

Segundo Krulik e Rudnick (1982), algumas estratégias que poderiam fazer parte do ensino da resolução de problemas matemáticos seriam: reconhecer padrões, trabalhar no sentido inverso, supor e testar, simulação e experimentação, redução, listagem exaustiva, dedução lógica e representação de dados (gráfico, equação, expressão algébrica, tabela, lista, diagrama).

Para esses autores, os professores deveriam conhecer várias delas e ser encorajados a encontrar múltiplas estratégias de resolução, uma vez que muitos problemas são resolvidos por mais de uma e, em outras ocasiões, certos problemas e estratégias estão sempre juntos. Para exemplificar, considere o seguinte problema proposto por Krulik e Rudnick (1982. p. 43-44):

> *Existem 16 times de futebol, em cidades diferentes, na Liga Continental de Futebol. Para coordenar os jogos entre os times, cada cidade deve ter uma linha telefônica instalada, ligando-se diretamente às demais, para poder se comunicar com os times das outras cidades. Quantas linhas telefônicas devem ser instaladas pela empresa telefônica, conectando as cidades?*

Para esse problema, podemos resolvê-lo utilizando três estratégias:

1ª estratégia – Os alunos poderiam realizar a estratégia da experimentação, obtendo 16 caixas e unindo-as umas as outras por meio de pedaços de linhas até que todas estivessem ligadas.

2ª estratégia – Os alunos poderiam iniciar com a estratégia da redução, começando por um número pequeno de cidades, criando uma representação, conforme a Figura 2.

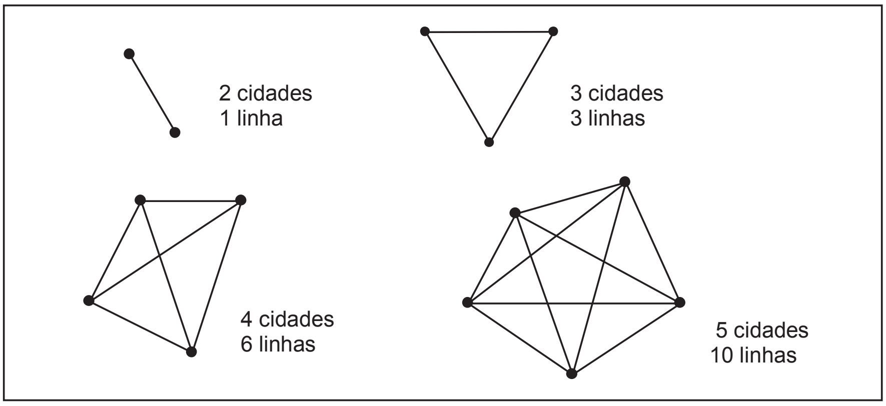


Figura 2: Começando com um número pequeno de cidades (Extraído de Krulik e Rudnick, 1982, p. 44).

Nesse caso, manteriam os dados que vão sendo obtidos através da estratégia da "tabela" e tentando encontrar algum padrão que possa ajudá-los (reconhecer padrões), de acordo com a Figura 3.

Dados sobre o número de linhas diretas							
Número de cidades	1	2	3	4	5	...	16
Número de linhas	0	1	3	6	10	...	?

Figura 3: Tabela sobre as cidades e as linhas (Krulik e Rudnick, 1982, p. 44).

Alguns alunos acabam por continuar até chegar nas 16 cidades e outros tentam trabalhar com algum padrão que possa aparecer entre as quantidades de linhas que decorrem dos números de cidades. Nesse caso, eles olham para as diferenças entre os números de linhas e buscam um padrão, onde podem encontrar o termo geral:

$$\frac{n.(n-1)}{2}$$

Nessa estratégia, foi utilizada uma combinação de três delas. Segundo Charles (1985), pelo fato de que muitos problemas podem ser resolvidos por uma combinação de estratégias, isso permite superar a crença de que há somente um único caminho ou um melhor caminho de resolução.

3ª estratégia – Os alunos poderiam usar a estratégia da dedução lógica, sendo que como cada cidade irá se conectar as demais, então temos aqui "16 x 15" no total. Mas como da cidade *A* para a cidade *B* é a mesma coisa que da cidade *B* para a cidade *A*, vamos precisar de metade das conexões, o que resulta em (16)x(15)/2.

Desse modo, Charles (1985) salientou que observar padrões pode auxiliar os alunos a desenvolver suas habilidades para fazer generalizações. Desenhar figuras pode favorecer a habilidade dos alunos em representações mentais de situações matemáticas. Supor e testar melhora a habilidade dos alunos em formular hipóteses.

Pozo e Angón (1998) relacionaram as estratégias de resolução de problemas com processos psicológicos dentre os quais se inserem os conhecimentos relativos aos conteúdos conceituais e procedimentais. A Figura 4 mostra esses processos.

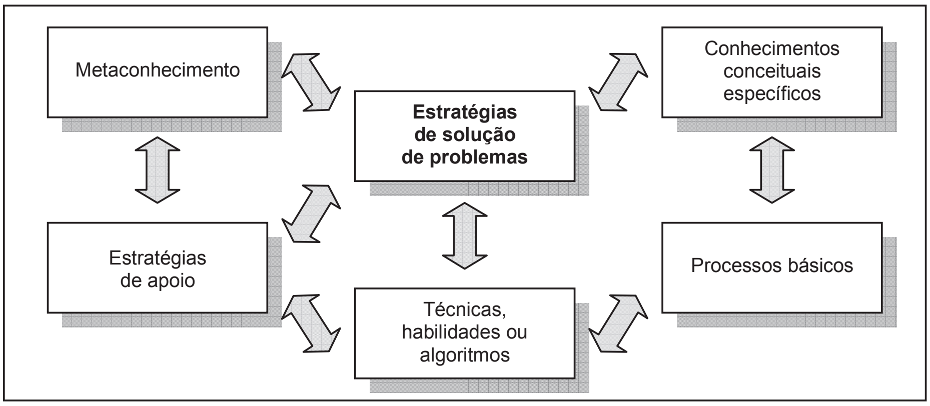


Figura 4: Diversos processos psicológicos (Extraído de Pozo e Angón, 1998, p. 144).

Desse modo, o metaconhecimento, ou seja, a reflexão sobre os problemas e as formas de resolvê-los, envolve saber fazer uso estratégico das técnicas, habilidades ou algoritmos mais eficazes para cada tipo de problema, bem como avaliar as escolhas. As estratégias de apoio estão relacionadas às atitudes dos alunos e envolvem condições gerais como manter a atenção e a concentração e estimular a motivação.

Leblanc, Proudfit e Putt (1997) apontaram que os professores deveriam considerar a motivação como um dos fatores na aprendizagem, selecionando problemas interessantes aos alunos, tendo em vista que um aluno que não queira resolver um problema, provavelmente não conseguirá resolvê-lo.

As estratégias de resolução de problemas também se relacionam aos conhecimentos conceituais específicos vinculados à tarefa, os quais permitem que se dê atenção às hipóteses que foram definidas. Por fim, os processos básicos estão ligados ao desenvolvimento de esquemas de pensamento como as operações próprias do pensamento formal.

De acordo com Echeverría e Pozo (1998), na resolução de problemas, a compreensão conceitual é outro item importante que pode interferir na resolução da tarefa. A sua falta pode dificultar o entendimento da tarefa como problema, direcionando-a para um caminho como se fosse mero exercício de aplicação e rotina de repetição.

Diante do que foi exposto sobre as estratégias de resolução de problemas, percebe-se, conforme destacaram Krulik e Rudnick (1982), que o ensino da resolução de problemas não corresponde à ideia de ensinar algoritmos específicos para resolver problemas.

> Como um processo, resolução de problemas é o significado pelo qual um indivíduo usa conhecimento e entendimento adquiridos previamente para satisfazer as demandas de uma situação não familiar. O estudante deve sintetizar o que ele ou ela aprendeu e aplicar em novas e diferentes situações. (KRULIK; RUDNICK, 1982, p. 42).

Para Polya (1994), o desenvolvimento intelectual dos alunos pode ser prejudicado se o professor utilizar o tempo das aulas para exercitar apenas operações rotineiras. Para o autor, a grande oportunidade do ensino é poder propiciar aos alunos problemas compatíveis com seus conhecimentos, desafiando, assim, suas curiosidades e permitindo o gosto pelo raciocínio independente.

Logo, nesta pesquisa, considera-se fundamental que o objetivo do trabalho com a resolução de problemas seja o de desenvolver o pensamento matemático, tendo em vista que a compreensão da Matemática escolar pelo aluno seja permeada pelas oportunidades de estabelecer relações matemáticas. Assim, é de suma importância que o professor de Matemática saiba, além do próprio processo de resolução de problemas em si, situar o trabalho com problemas na abordagem dos conceitos de sua disciplina, conforme apontaremos a seguir.

3.4 Resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática

Stanic e Kilpatrick (1990) apresentaram três temas que caracterizam, historicamente, o papel da resolução de problemas no currículo de Matemática, desde o antigo Egito até o final do século XX: resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como capacidade e resolução de problemas como arte.

Resolução de problemas como contexto: este tema se baseava na ideia de que os problemas e a resolução de problemas eram meios para atingir fins importantes. Apresentava cinco subtemas. A *resolução de problemas como justificação* partia da ideia de que a inclusão de problemas no currículo justificava o ensino de Matemática. A *resolução de problemas como motivação* tinha como objetivo, por meio dos problemas, atrair o interesse dos alunos. A *resolução de problemas como atividade* lúdica envolvia o fato de que os problemas permitiam aos alunos algum divertimento. A *resolução de problemas como veículo* visualizava os problemas como veículo por meio do qual um novo conceito ou técnica deve ser aprendido. A *resolução de problemas como prática* buscava apenas a "prática necessária para reforçar capacidades e conceitos ensinados diretamente" (STANIC; KILPATRICK, 1990, p. 13) e é o tema que mais prevalecia no currículo de Matemática.

Resolução de problemas como capacidade: este tema assumia a resolução de problemas como o topo da hierarquia das capacidades necessárias a serem adquiridas pelos alunos. Assim, resolver problemas "é caracterizada como uma capacidade de nível elevado a ser adquirida depois da capacidade de resolução de problemas de rotina [exercícios] (que, por sua vez, é adquirida depois de os alunos apreenderem conceitos e capacidades matemáticas básicas)". (STANIC; KILPATRICK, 1990, p. 15). Desse modo, somente alguns alunos que conseguiam dominar essas capacidades preliminares é que eram expostos a resolver problemas.

Resolução de problemas como arte: este tema se relaciona aos estudos desenvolvidos por George Pólya, que reviveu o trabalho com as heurísticas (a arte da descoberta) e enfatiza a resolução de problemas como arte, mais especificamente como uma arte prática, oriunda de imitação e prática. Esse matemático considerava que saber Matemática é saber fazer Matemática que por sua vez consistia na capacidade de resolver problemas. Desse modo, "reconhecia que as técnicas de resolução de problemas precisam de ser ilustradas pelo professor, discutidas com os alunos e praticadas de uma maneira compreendida e não mecanizada." (STANIC; KILPATRICK, 1990, p. 16).

Para Stanic e Kilpatrick (1990), o tema resolução de problemas como arte é o mais defensável e prometedor. Porém, é o mais problemático, pois acaba por ocorrer uma distorção das ideias de Pólya por quem as tenta utilizar, reduzindo-as a capacidades procedimentais ou mesmo algorítmicas. Nesse caso, acabam se configurando como o tema da resolução de problemas como capacidade.

Segundo Schroeder e Lester (1989), apesar dos vários esforços, ocorridos na década de 1980, como listas de estratégias para serem ensinadas, no intuito de tornar a resolução de problemas o foco do ensino, não havia uma coerência de qualidade e uma direção clara nessa abordagem. Havia pouca concordância de como essa meta poderia ser alcançada, talvez, pelas diferenças entre as concepções tanto de indivíduos como de grupos do que seria pensar a resolução de problemas como foco da Matemática escolar.

Schroeder e Lester (1989) apresentaram três abordagens que seriam a maneira de como a resolução de problemas estava sendo ensinada até o momento: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolução de problemas e ensinar via/através da resolução de problemas.

Ensinar sobre resolução de problemas: o ensino era baseado no modelo de Polya, referente às quatro fases de resolução de problemas: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e retrospecto. Aos alunos, eram explicitamente ensinadas essas quatro fases de modo que eles deveriam ter ciência delas quando resolviam problemas. Nesse ensino, estava incluído o trabalho com um número de heurísticas ou estratégias, como, por exemplo, identificar padrões e resolver um problema simples, voltados para a elaboração e execução de um plano de resolução de problemas. "No melhor de suas hipóteses, ensinar sobre resolução de problemas também incluía experiências com, de fato, resolver problemas, mas sempre envolveu muito da discussão explícita de, e ensinar sobre, como problemas são resolvidos." (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 32).

Ensinar para resolução de problemas: o ensino visa determinados caminhos para que a Matemática que é aprendida seja aplicada tanto em exercícios como em problemas. A pessoa tem que ser hábil para usar essa Matemática. Nessa abordagem, "aos alunos são dados muitos exemplos de conceitos e estruturas matemáticos que eles estão estudando e muitas oportunidades para aplicar a Matemática na resolução de problemas." (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 32). O professor que ensina para resolver problemas se preocupa com a habilidade do aluno em transferir o que aprendeu para outras situações. "[...] a única razão para aprender matemática é ser capaz de usar o conhecimento obtido para resolver problemas". (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 32).

Ensinar via/através da resolução de problemas: o ensino visa à utilização de problemas como o primeiro passo para aprender Matemática. De acordo com Schroeder e Lester (1989), centrar o interesse no ensino via/através da resolução de problemas é acreditar que o motivo para o ensino da Matemática escolar é ajudar os alunos a compreender os conceitos, processos e técnicas matemáticos. Nesse sentido:

> **O ensino de um tópico matemático começa com uma situação-problema** que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em problemas rotineiros. A aprendizagem da matemática, desse modo, pode ser vista como um movimento do **concreto** (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da

> técnica matemática) para o **abstrato** (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos). (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 33, grifo nosso).

O ensino de um tópico matemático por meio de um problema, direcionado a uma aprendizagem que segue o ritmo do concreto ao abstrato pode ser entendido, na visão de Carlini (2004), como uma abordagem, em sala de aula, que deve propiciar aos alunos a participação na reorganização de conhecimentos antigos e também na construção de novos conhecimentos, a desenvolver habilidades de raciocínio lógico, o estímulo pela busca de novas informações, a identificação, formulação e teste de hipóteses, o planejamento de etapas e ações direcionadas a obter a resposta do problema e a assumir a responsabilidade pelo processo de construção, individual e coletiva, do conhecimento.

Desse modo, Carlini (2004) destacou que nessa abordagem a resolução de problemas permite que se alcancem objetivos de natureza conceitual, procedimental e atitudinal.

> [...] proporciona condições para realizar objetivos conceituais (organização, relação e registro de informações diante de um problema concreto), procedimentais (busca de novas informações, formulação e testagem de hipóteses, elaboração de um plano de ação) e atitudinais (responsabilidade, cooperação, autoconfiança). (CARLINI, 2004, p. 75).

Para Fi e Degner (2012), o ensino através da resolução de problemas permite aos alunos se envolverem com a Matemática e seguir, de forma progressiva, uma trajetória de formalizações matemáticas: resolvendo problemas, abstraindo, inventando e provando. Essa trajetória tem como pressuposto a participação dos alunos nas práticas matemáticas. Desse modo, os estudantes poderiam experienciar a complexidade e a beleza da Matemática.

De acordo com Schroeder e Lester (1989), essas três abordagens (ensinos sobre, para, via/através da resolução de problemas), na prática, podem ocorrer em várias combinações e sequências. No entanto, deve-se tomar ciência das limitações que advém das duas primeiras se a intenção é fazer da resolução de problemas o foco do ensino de Matemática.

No caso do ensino sobre resolução de problemas, pode-se pensar que essa abordagem é um tópico de Matemática que seria ensinado de forma isolada do conteúdo e das relações matemáticas. “Resolução de problemas não é um tópico distinto, mas um processo que poderia permear um programa inteiro e prover o contexto em que conceitos e habilidades podem ser aprendidos.” (NCTM, 1989, p. 23).

No caso do ensino para resolução de problemas, pode-se ter uma limitação maior no sentido de que a “resolução de problemas é vista como uma atividade em que os alunos somente se engajam *depois* da introdução de um novo conceito ou para seguir uma habilidade de cálculo ou um algoritmo." (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 34, grifo dos autores). Essa mesma ideia pode ser percebida no tema resolução de problemas como capacidade, apontado, anteriormente, por Stanic e Kilpatrick (1990).

Nesta pesquisa, concorda-se com as ideias da abordagem de se ensinar via/através da resolução de problemas para se ensinar e aprender Matemática. Além disso, entende-se que esse ensino deve estar articulado com os ensinos *sobre* e *para* resolução de problemas, quando se trata de um trabalho contínuo do ensino de Matemática por meio da resolução de problemas. Destaca-se que essa abordagem está em conformidade ao defendido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), uma vez que ambos defendem o problema como ponto de partida no estudo da Matemática.

Diante dessas considerações, o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas é adotado, nesta pesquisa, considerando a sequência das seguintes realizações: (a) Introdução de um tópico de Matemática por meio de um problema; (b) Auxilio aos alunos durante a tentativa de resolução; (c) Discussão das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos.

Na **introdução de um tópico de Matemática por meio de um problema**, o professor deve apresentar um problema antes de abordar um tópico de Matemática. Assim, quando se realiza o trabalho com a resolução de problemas, devem-se proporcionar aos alunos problemas desafiantes que os forcem a avaliar e modificar suas próprias estruturas mentais, dando tempo suficiente para explorá-los (BURNS, 1982).

Isso indica que os alunos devem ser levados a compreender que se trata de uma situação problemática onde se tem que pensar e não como algo que se deve seguir uma condição prescritiva (FI; DEGNER, 2012). Uma forma de fazer com que os alunos avaliem suas formas de pensamento seria o de propor problemas em que se admitam vários caminhos de resolução, bem como que existam várias soluções possíveis (POZO; ANGÓN, 1998).

Leblanc, Proudfit e Putt (1997) apontaram que, no ensino de Matemática do ensino fundamental, os professores deveriam selecionar ou formular problemas com níveis adequados de dificuldade para seus alunos. Para isso, quatro fatores gerais seriam importantes: a escolha do vocabulário, a extensão e a estrutura das frases, o tamanho e a complexidade dos números e o cenário e a apresentação do problema.

1. *A escolha do vocabulário:* o vocabulário deveria ser selecionado com o intuito de tornar a comunicação o mais simples possível, o que não implica em evitar termos como "perpendicular" e "múltiplo" e sim verificar se foram entendidos de forma clara.

2. *A extensão e a estrutura das frases ou sentenças:* A dificuldade na leitura é proporcional à extensão e complexidade das frases e sentenças no problema. Seria importante elaborar problemas com frases curtas.
3. *O tamanho e a complexidade dos números:* trabalhar com números menores e simples pode auxiliar o aluno a se concentrar mais na resolução do problema do que nos cálculos.
4. *O cenário e a apresentação do problema*: alterar um destes dois aspectos pode mudar o nível de dificuldade do problema. Por exemplo, no problema *Havia 8 pessoas numa festa. Se cada pessoa apertou a mão de todas as outras, quantos apertos de mão houve no total?*, em vez de pessoas trocando apertos de mão, poder-se-ia mudar para a obtenção de retas a partir de uma quantidade de pontos.

No **auxilio aos alunos durante a tentativa de resolução**, é importante que eles sejam direcionados a tomar as suas próprias decisões sobre os processos de resolução, bem como propiciar uma discussão entre eles sobre seus diferentes pontos de vista (POZO; ANGÓN, 1998).

Essa discussão pode ser incentivada por meio de algumas ações: (1) fazer questões aos alunos para verificar se entenderam o problema, antes de começar a resolvê-lo; (2) Pedir que os alunos apontem possíveis estratégias de resolução; (3) prover dicas específicas para ajudar os alunos a superar suas dificuldades; (4) fazer questões que permitam aos alunos monitorar e avaliar seus pensamentos; (5) pedir que os alunos nomeiem suas estratégias de resolução; (6) comparar o problema resolvido com outros (CHARLES; LESTER, 1982 apud CHARLES, 1985).

Diante dessas ações, é importante verificar o nível em que os alunos realizam um planejamento prévio, uma reflexão e autoavaliação sobre o processo de resolução. Nesse caso, a avaliação da aprendizagem deve focar sobre os processos e não somente sobre a resposta encontrada (POZO; ANGÓN, 1998).

Para a **discussão das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos**, conforme apontou Charles (1985), deve-se solicitar aos alunos que explicitem suas estratégias de resolução verbalmente ou em lousa. Nesse momento, é importante solicitar que eles verifiquem o problema abordado e a racionalidade da resposta encontrada, além de solicitar que nomeiem as estratégias utilizadas (CHARLES, 1985, 1990). Assim, podem-se focar os conceitos errôneos e os raciocínios utilizados pelos alunos, bem como uma atitude de responsabilidade, perante a resolução do problema (FI; DEGNER, 2012).

Para Burns (1982), o professor deveria resumir os resultados que eles obtiveram, apresentando suas ideias, direcionando-os a conclusões apropriadas e reais. Além disso, a identificação das estratégias que os alunos utilizam ajuda a direcionar o ensino para essas estratégias, discutindo-as e as compreendendo (SCHOENFELD, 1985).

Caso os alunos não encontrem uma estratégia, é importante discutir possibilidades de resolução que não se configurem como caminhos mecanicistas ou estratégias diretas para a se obter a resposta (CHARLES, 1985, 1990; FI; DEGNER, 2012). Além disso, Pozo e Angón (1998) apontaram a importância de que uma mesma estratégia seja vista em diferentes contextos, levando os alunos a trabalharem os mesmos tipos de problemas em diferentes momentos do currículo.

A partir dessa discussão que é feita sobre as estratégias que os alunos utilizaram e das dificuldades em encontrar estratégias, pode-se fazer uma análise dos seus conhecimentos. Assim, deve-se considerar: (a) a informação matemática que os alunos compreendem ou não, a qual tentam relacionar ao problema; (b) as técnicas que os alunos possuem ou que lhes faltam para progredir quando a resolução parece não ter sucesso; (c) o caminho que os alunos utilizam corretamente ou não a partir da informação disponível; e (d) a visão matemática de mundo dos alunos, a qual determina o caminho que utilizarão os conhecimentos dos itens anteriores (SCHOENFELD, 1985).

Diante dessas realizações que podem ser feitas para o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas, Pozo e Angón (1998) enfatizaram que aceitar uma tarefa como problema depende, na maior parte, de como o professor a apresenta, orienta sua solução, a avalia e da funcionalidade que ela tem na aprendizagem.

Nesse sentido, "ensinar a resolver problemas não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta." (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 14).

No que diz respeito à formação de professores, Thompson (1990) apontou que ensinar a resolver problemas não pode ser uma condição prescrita.

> Ele [ensino] não pode ser reduzido a uma seqüência de etapas pré-determinadas para serem aprendidas como se aprende um algoritmo. Como eu reflito sobre meu próprio ensino, não concordo com a visão de que o ensino de resolução de problemas matemáticos possa ser aprendido como uma habilidade. (THOMPSON, 1990, p. 234).

Charles (1990, p. 263), ao se referir à matemática que é necessária saber ou ser capaz de fazer para ser um professor de Matemática, salienta que “professores precisam de algum nível de competência enquanto solucionadores de problemas antes que eles não somente ensinem a resolução de problemas, mas também comessem a aprender sobre resolução de problemas.” No entanto, esse autor apontou que analisar como os alunos desenvolvem a arte de resolver problemas não é uma tarefa fácil, sendo que muitos professores sentem-se menos competentes e menos confortáveis para conduzir o ensino.

Contudo, esses aspectos da resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem da Matemática, apresentados anteriormente, destacam o papel do professor nesse processo e também o que se espera dos alunos no trabalho com os problemas.

3.5 Considerações sobre a resolução de problemas

Pode-se apontar que a realidade das escolas públicas, hoje, evidencia dificuldades que estão relacionadas, entre outros fatores, à falta de perspectiva dos alunos (falta de motivação) para aprender Matemática e às lacunas ainda existentes na formação dos professores para ensinar Matemática.

Entendemos que essa falta de perspectiva dos alunos pode ter uma interrelação com essas lacunas na formação do professor. No que se refere à resolução de problemas, o tipo de ensino que se realiza em sala de aula tem seguido um trabalho baseado nas caracterizações apontadas neste capítulo que envolveram *resolução de problemas como prática*, *resolução de problemas como capacidade*, *ensinar para resolução de problemas*.

Esse tipo de ensino se baseia na apresentação de um conteúdo, trabalhando-se suas definições e fórmulas e regras para em que em seguida sejam aplicadas em tarefas muitas vezes entendidas, equivocadamente, como problemas. Essa situação corresponde ao que foi constatado no capítulo 1 – Revisão Bibliográfica.

Desse modo, inferimos que isso tem provocado nos alunos a falta de motivação, uma vez que acaba os levando a não enxergar um significado pelo que aprendem, isto é, acaba não favorecendo uma aprendizagem significativa de conceitos, princípios e procedimentos matemáticos e, assim, dificulta o estabelecimento de relações entre as várias ideias matemáticas que podem ser desenvolvidas por meio de problemas.

Diante disso, assumimos que se o professor tiver uma formação que o leve a exercer um ensino eficaz de Matemática por meio da resolução de problemas, isso pode contribuir para favorecer uma atitude positiva dos alunos (sentimento favorável) em relação à aprendizagem do conhecimento matemático.

Desse modo, a perspectiva de se *ensinar via resolução de problemas*, assumida nesta pesquisa, pode contribuir no sentido de que a abordagem de um problema, antes de introduzir um conteúdo, implica em direcionar os alunos a buscarem conhecimentos matemáticos (conceitos, princípios, procedimentos), aprendidos anteriormente, para serem utilizados na resolução do novo problema.

Um exemplo é direcionar os alunos a partir de casos particulares para encontrar um padrão para resolver um determinado problema, situação que permite a construção de uma expressão matemática, levando o aluno a compreender, por um raciocínio indutivo – capacidade mais elevada de pensamento matemático (MENDES, 2009) – o que foi realizado, distanciando-se, consequentemente, de uma aprendizagem pela aplicação dessa expressão matemática que se acabou de aprender (ou que deveria ter aprendido).

Por fim, consideramos importante destacar que o trabalho com a resolução de problemas não implica em negar a importância dos exercícios em sala de aula. O grande problema que se detecta no trabalho dos professores é alicerçar o ensino apenas em atividades que cobram a repetição imediata dos alunos daquilo que se acabou de aprender para uma memorização de fórmulas e definições.

4 METODOLOGIA

4.1 Problema de pesquisa e objetivos específicos

O objetivo desta presente pesquisa está relacionado à investigação das seguintes questões: **Uma intervenção, baseada em um Curso sobre Resolução de Problemas e em regências de aula, favorece a formação do futuro professor de Matemática para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar por meio da resolução de problemas? Quais as possibilidades e limites para a implementação do trabalho com a resolução de problemas nas regências de aula do estágio curricular supervisionado pelos futuros professores de Matemática?**

Para ajudar a responder a esse problema de pesquisa, foram elencados os seguintes objetivos específicos:

1. Identificar e descrever os conhecimentos dos licenciandos em Matemática sobre a temática da resolução de problemas, segundo a formação adquirida;
2. Analisar a participação desses alunos em um Curso sobre Resolução de Problemas (1ª etapa da intervenção) na aquisição de conhecimentos sobre resolução de problemas;
3. Analisar as dificuldades e as possibilidades decorrentes do trabalho com a resolução de problemas, durante as regências de aula (2ª etapa da intervenção), na escola básica;
4. Identificar e analisar quais conhecimentos foram (re)constituídos acerca da resolução de problemas como um caminho para se ensinar e aprender Matemática na escola básica.

4.2 Abordagem metodológica da pesquisa

Sabe-se que a escolha por determinada abordagem metodológica para estruturar uma investigação depende do(s) problemas(s) de pesquisa, do contexto em que serão coletados os dados, bem como das técnicas e métodos a serem utilizados. Além disso, existe a atenção a ser dada para as condições de acesso ao contexto e as disponibilidades dos sujeitos.

A nossa pesquisa buscou responder aos problemas anteriormente mencionados em meio a um ambiente que envolveu um Curso sobre Resolução de Problemas e o contexto do

Estágio Curricular Supervisionado. Nesse caso, utilizamos como técnicas e/ou métodos de pesquisa a entrevista individual e a observação participante.

Diante desses aspectos, a abordagem metodológica adotada segue os pressupostos oriundos da pesquisa qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994; CHIZZOTTI, 2001; FLICK, 2006). "A abordagem qualitativa parte do fundamento de que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, uma interdependência viva entre o sujeito e o objeto, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito." (CHIZZOTTI, 2001, p. 79).

De modo específico, Bogdan e Biklen (1994) apontaram que a investigação qualitativa possui cinco características que podem ou não estarem totalmente presentes em uma pesquisa dessa natureza, a saber:

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural onde ocorrem as ações das pessoas, constituindo o investigador o instrumento principal;
2. A investigação qualitativa é descritiva, baseada em palavras ou imagens, buscando abordar o mundo de forma minuciosa;
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo em que se dão as ações das pessoas do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
5. O significado que as pessoas dão às suas vidas é de importância vital na abordagem qualitativa.

Desse modo, os dados recolhidos nessa abordagem:

> [...] incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos [...] tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48).

Dos elementos acima mencionados, esta pesquisa valeu-se de transcrições de entrevistas, vídeos e notas de campo.

A técnica e/ou método da entrevista individual e da observação participante, utilizadas para essa recolha de dados, são devidamente esclarecidas na secção sobre os procedimentos da pesquisa. A escolha por elas se deu porque:

> A pesquisa é uma criação que mobiliza a acuidade inventiva do pesquisador, sua habilidade artesanal e sua perspicácia para elaborar a metodologia

> adequada ao campo da pesquisa, aos problemas que ele enfrenta com as pessoas que participam da investigação. O pesquisador deverá, porém, expor e validar os meios e técnicas adotados, demonstrando a cientificidade dos dados colhidos e dos conhecimentos produzidos. (CHIZZOTTI, 2001, p. 85).

Desse modo, a metodologia adotada visou permitir a compreensão de que os dados a serem coletados não são acontecimentos fixos e sim oriundos de um contexto fluente de relações que envolvem uma complexidade de oposições, revelações e ocultamentos, relacionados às visões que embasam as práticas dos sujeitos envolvidos no que diz respeito às suas experiências de vida (CHIZZOTTI, 2001).

4.3 Sujeitos da pesquisa

Participaram da pesquisa quatro licenciandos (S1, S2, S3 e S4, sendo S1 e S2 de gênero feminino e S3 e S4, masculino) do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática[9], período noturno, de uma universidade pública do interior do Estado de São Paulo.

Na época da coleta de dados, o sujeito S1 era bolsista de iniciação científica do CNPq de grupo de pesquisa vinculado a um programa de pós-graduação da referida universidade; o sujeito S2 trabalhava na Seção de Desenvolvimento e Administração de Recursos Humanos da Faculdade de Engenharia da IES; o sujeito S3 trabalhava como Agente de Organização Escolar na secretaria de uma escola pública da cidade da IES; e o sujeito S4 desenvolvia uma pesquisa de iniciação científica sem bolsa.

Os critérios de seleção desses sujeitos foram os seguintes: (1) licenciandos que fossem realizar o estágio de regência[10] de aulas na cidade da referida universidade onde estudavam para a possibilidade do acompanhamento do pesquisador nessa modalidade de atividades; (2) que esses estudantes participassem de forma voluntária da pesquisa.

Essa participação voluntária correspondeu a uma importante cooperação em uma experiência que envolveu uma intervenção sobre a formação para o ensino-aprendizagem da Matemática por meio da resolução de problemas. Desse modo, isso permitiu documentar

---

[9] O nome completo desse curso é Licenciatura Plena em Matemática e tem duração de oito semestres. Na sua grade curricular, o estágio curricular supervisionado (ECS) compreende 28 créditos e 400h/a, sendo o ECS I (5º e 6º semestres) e o ECS II (7º e 8º semestres) anuais. Além disso, possui uma disciplina denominada "Resolução de Problemas e o ensino da Matemática", porém é optativa.

[10] A regência de aula é uma etapa da disciplina Estágio Curricular Supervisionado II, desenvolvida no último ano do curso de Licenciatura em Matemática em que o licenciando deve elaborar planos de aula para serem desenvolvidos da seguinte forma: no primeiro semestre nos Ensinos Fundamental regular (12 horas-aula) e Educação de Jovens e Adultos – EJA (12 horas-aula) e no segundo semestre nos Ensinos Médio regular (12 horas-aula) e EJA (12 horas-aula) de escolas públicas.

informações escritas e orais, gravadas e filmadas, que serviram como fonte de análise para a pesquisa.

No âmbito da pesquisa qualitativa, quando essa cooperação acontece, é possível uma adequação "[...] às possibilidades concretas do contexto, das pessoas e das condições objetivas em que devem ser postas" para favorecer o processo da investigação. (CHIZZOTTI, 2001, p. 83).

4.4 Instrumentos de coleta de dados

Para coletar os dados, foram elaborados os seguintes instrumentos: uma entrevista inicial, um roteiro de avaliação de regências de aula e uma entrevista final. A seguir, a descrição e objetivo de cada um.

- **Entrevista Inicial.** Este instrumento teve como objetivo coletar dados referentes aos conhecimentos que os licenciandos possuíam a respeito da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática, evidenciando a formação que possuíam naquele momento. O instrumento foi composto de 10 perguntas e de um exercício e um problema, introduzidos ou não para direcionar a entrevista sobre o tema. (APÊNDICE A).
- **Roteiro de avaliação de regências de aula.** Este instrumento foi elaborado para analisar as regências de aula dos sujeitos, na escola básica, durante a tentativa de implementação da resolução de problemas no ensino de três conteúdos, distribuídos nas seguintes áreas: aritmética, álgebra e geometria. O objetivo de levar os licenciandos a realizarem as regências de aula nessas áreas foi o de tornar possível a coleta de dados que evidenciassem as possibilidades e as dificuldades desses sujeitos no trabalho com a resolução de problemas nas aulas de Matemática. Tal instrumento foi formado de 10 itens que buscavam verificar situações, tais como: se a introdução do conteúdo foi feita por meio de uma situação-problema; se, principalmente, os alunos da escola básica tiveram a oportunidade de encontrar estratégias de resolução próprias, bem como se houve a tentativa de apresentação de outras estratégias a eles pelo estagiário; se os problemas admitiam mais de uma resposta e se os alunos se sentiram motivados com o trabalho desenvolvido. (APÊNDICE B).
- **Entrevista Final.** De modo geral, o objetivo deste instrumento foi o de coletar dados sobre o reflexo da intervenção que os sujeitos participaram para ensinar e aprender Matemática por meio da abordagem da resolução de problemas. Este instrumento foi

composto de 13 questões e teve como objetivo verificar os conhecimentos adquiridos pelos sujeitos, tendo como base a discussão do que realmente foi possível implementar nas regências de aula, durante o estágio, nos conteúdos de aritmética, álgebra e geometria. O "Roteiro de avaliação de regências de aula", citado anteriormente, foi utilizado como apoio a essa entrevista. (APÊNDICE C).

4.5 O Curso sobre Resolução de Problemas: sequência das ações

Durante a pesquisa, foi desenvolvido um Curso sobre Resolução de Problemas que se constituiu em um contexto no qual se buscou favorecer aos quatro sujeitos conhecimentos acerca da resolução de problemas para o ensino-aprendizagem da Matemática.

O referido curso envolveu as seguintes atividades: (a) resolução de uma variedade de problemas (Lista com 28 problemas de matemática (APÊNDICE D)) para se discutir as estratégias de resolução dos sujeitos e discutir as estratégias propostas pelo pesquisador, as quais foram nomeadas para melhor caracterizá-las; (b) apresentação e discussão da teoria sobre o trabalho com a resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática.

Nessa lista, os problemas de número um a sete (de aritmética e geometria) foram retirados da Série XXIII de Krutetskii (1976), *Problemas com graus variáveis de visualização nas suas soluções*, o qual contém seis testes: cinco de aritmética (V, A_1, A_2, M_1, M_2) e um de geometria, cada um contendo vários problemas de acordo com o grau de dificuldade de resolução. Esta Série XXIII é uma das quatro que fazem parte da categoria denominada de Tipologia, a qual envolve os "tipos de mente matemática", ou seja, a resolução de um problema por meio viso-pictórico, lógico-verbal ou ambas.

Os outros problemas foram retirados de estudos que buscavam mostrar a forma como os alunos os resolviam, a saber: Brito (2006) (problema 8, o qual foi acrescentado a informação de que os pássaros tinham a mesma velocidade); Loos, Falcão e Acioly-Régnier (2001) (problemas 9 e 10, sendo que no problema 9 foram modificados os valores numéricos sobre a quantidade de animais e pés para facilitar o uso de outras estratégias de resolução); Leblanc, Prodfit e Putt (1997) (problemas 11, 14, 15 e 16); Krulik e Rudnick (1982) (problema 12); Kantowski (1997) (problema 13); Noddings (1990) (problema 17); Charles (1985) (problema 18); Butts (1997) (problema 19); Musser e Shaughnessy (1997) (problema 20); Schoenfeld (1997) (problemas 21, 24, 25, 26, 27 e 28); Schoenfeld (1985) (problemas 22 e 23).

As atividades do curso foram realizadas no horário da disciplina de Prática de Ensino de Matemática V. Como o pesquisador era o professor que ministrava essa disciplina, o curso foi desenvolvido quinzenalmente, ou seja, em semanas alternadas havia aula com a turma de estudantes regulares e com os sujeitos da pesquisa, alunos dessa turma.

Desse modo, iniciaram-se as atividades do curso em março de 2010 e sua duração foi de 30 horas-aula, finalizada no primeiro semestre desse ano, totalizando oito encontros, sendo os sete primeiros encontros de quatro horas-aula e o último de duas horas-aula que ficou para a realização da avaliação. Essa avaliação, bem como a participação dos sujeitos na resolução dos problemas e na entrega de três listas com questões respondidas sobre a resolução de problemas no ensino de Matemática ajudaram a compor suas notas do primeiro semestre nessas atividades.

É importante destacar que os diálogos que se estabeleceram no curso visavam sempre à participação dos sujeitos, os quais eram convidados a mencionar valores numéricos ou mesmo conceitos e procedimentos matemáticos para, juntos, construírem a estratégia apresentada.

O Curso sobre Resolução de Problemas correspondeu à primeira etapa da intervenção realizada da formação dos sujeitos. Na segunda etapa, esses estudantes elaboraram sequências didáticas, envolvendo conteúdos de aritmética, álgebra e geometria, buscando implementar o conhecimento adquirido nesse curso nas regências de aula, durante a disciplina de Estágio Curricular Supervisionado II. Esse trabalho se iniciou ao final do primeiro semestre de 2010 e se estendeu até o segundo semestre. Destaca-se que o pesquisador também era o professor responsável dessa disciplina, situação que o ajudou a finalizar o processo de coleta de dados.

Assim, o principal objetivo da intervenção foi não apenas munir os sujeitos de referencial teórico para tratar a resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática, mas, sobretudo, o de favorecer um maior contato com um conhecimento que leva em consideração as diversas estratégias na resolução de problemas, visando um melhor ensino dos conteúdos de Matemática no ensino na escola básica, tendo em vista, também, o reflexo oriundo do trabalho realizado no estágio.

PRIMEIRO ENCONTRO (17/03): aspectos teóricos da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática e discussão das estratégias de resolução

2 horas-aula: Nas duas primeiras horas-aula, foi realizada uma reapresentação das tarefas que seriam desenvolvidas no Curso sobre Resolução de Problemas e na regência de aula a ser desenvolvido naquele ano de 2010, destacando que deveriam realizar as regências de aula com um conteúdo de aritmética, um de álgebra e um de geometria. Depois disso, foi feita a leitura e discussão do texto introdutório: *Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática*, de Stanic e Kilpatrick (1989).
2 horas-aula: Nas duas horas-aula seguintes, de início, foi explicado aos sujeitos que o foco, a partir daquele momento, seria o de discutir as estratégias de resolução. Eles foram incentivados a tentar encontrar uma estratégia que os ajudassem a resolver os problemas propostos. Assim, nessas duas horas-aula, agrupados em duplas, os sujeitos resolveram somente os problemas de número 1 a 5 (APÊNDICE D). No entanto, foi possível explorar as estratégias de resolução apenas do número 1, ficando o restante para o encontro posterior.

SEGUNDO ENCONTRO (31/03): Discussão das estratégias de resolução

4 horas-aula: Foram discutidos e finalizados os problemas do encontro anterior. Em seguida, os sujeitos resolveram os problemas de número 6 a 10 (APÊNDICE D). Não foi possível discutir todos, porque esses estudantes gastaram muito tempo para resolvê-los. Nesse caso, ficaram os de números 8, 9 e 10 para o encontro posterior.

TERCEIRO ENCONTRO (16/04): Discussão das estratégias de resolução

4 horas-aula: Foram discutidos e finalizados os problemas anteriores, de números 8, 9 e 10. A partir disso, entregaram-se mais problemas, agora, os de número 11 a 19 (APÊNDICE D). Destes problemas, foi possível trabalhar apenas com os de número 11 e 12, ficando os de 13 a 19 para serem resolvidos em casa e trazidos no final do sexto encontro. Isso se deu pelo fato de os sujeitos ocuparem muito tempo da aula para realizar as tarefas.

QUARTO ENCONTRO (28/04): aspectos teóricos da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática

2 horas-aula: Nestas duas horas-aula, foram realizadas a leitura e discussão do capítulo 1, *Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender*, de Echeverría e Pozo (1998), do qual se abordou a seção: *A solução de problemas como conteúdo da educação básica (p. 13-19).* Durante o trabalho, os sujeitos foram solicitados a destacar as passagens ou trechos que acharam mais importantes sobre o assunto para posterior discussão. Em seguida, o pesquisador fez uma apresentação em *power-point* sobre o significado do termo "problema", na perspectiva de vários autores, e destacou a diferença entre os conhecidos "exercícios".

2 horas-aula: No início, foi cobrado dos alunos um trabalho inicial (lista com questões), referente ao texto e *slides* discutidos nas aulas anteriores, para ser entregue em aulas posteriores, o que computou como nota para a disciplina de Prática de Ensino. Em seguida, realizaram-se a leitura e discussão do capítulo 2, *A solução de problemas em matemática*, de Echeverría (1998). Trataram-se das seguintes seções: (a) *A solução de problemas no currículo de matemática; (b) Sobre os diversos significados de resolver um problema; (c) Tipos de problemas no ensino de matemática; (d) Ensinar a resolver problemas: uma tarefa docente diferente. (p. 43-51 e p.63-65).* Ao final da leitura e discussão, o pesquisador apresentou, em *power-point*, aspectos sobre a resolução de problemas no ensino de Matemática. Tais aspectos foram extraídos do texto *Developing understanding in mathematics via problem solving*, de Schroeder e Lester (1989). O objetivo foi o de discutir as noções de ensino *sobre, para e via/através* da resolução de problemas para favorecer o entendimento de Matemática.

É importante destacar que, neste quarto encontro e no quinto encontro, a maior parte dos textos lidos e discutidos com os sujeitos foi retirada de capítulos (1, 2 e 5) do livro *A solução de Problemas: aprender a resolver e resolver para aprender*, organizado por Pozo (1998), pois tratavam o assunto com maior clareza, abordando-o de maneira geral, na área específica de Matemática e situando-o no âmbito da busca de uma estratégia de resolução, a qual era relacionada a outros conhecimentos importantes.

O objetivo principal de encontros para abordar a teoria foi o de tratar e discutir com os sujeitos características e aspectos importantes da resolução de problemas, a saber: (a) diferenças entre problemas e exercícios; (b) etapas de resolução de problemas; (c) a resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática.

QUINTO ENCONTRO (05/05): aspectos teóricos da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática

2 horas-aula: Nas duas primeiras horas-aula, foram realizadas a leitura e discussão do capítulo 5, *A solução de problemas como conteúdo procedimental da educação básica*, de Pozo e Angón (1998). Trataram-se das seguintes seções: (a) *A solução de problemas como conteúdo procedimental: técnicas e estratégias. (b) O ensino da solução de problemas. (c) A solução de problemas no ensino fundamental e no ensino médio. (p. 140-145, p. 158-162, p. 164-165).*
2 horas-aula: Nas aulas finais desse encontro, o pesquisador fez uma apresentação, em *power-point*, sobre as etapas de resolução de problemas, na perspectiva de alguns autores, salientando o uso das estratégias. Ao final desse período, foram fornecidas aos sujeitos duas listas contendo questões referentes às ideias discutidas neste quinto encontro, o que correspondeu a um trabalho para compor uma nota para avaliá-los nas atividades do curso.

Toda essa discussão e apresentação sobre resolução de problemas foram importantes e tiveram apoio, também, no que foi visto e discutido com os problemas resolvidos em sala de aula até aquele momento. Além disso, serviram como base para uma maior compreensão pelos sujeitos dos próximos problemas que foram resolvidos nos dois últimos encontros.

SEXTO ENCONTRO (07/05): Discussão das estratégias de resolução

4 horas-aula: No início, foi entregue aos sujeitos o trabalho inicial que haviam feito, contendo as correções do pesquisador. Discutiram-se as dúvidas e os equívocos. Em seguida, retomou-se o trabalho com os problemas deixados aos sujeitos para que fizessem em casa. Assim, foram discutidas e analisadas as estratégias de resolução dos problemas de número 13 a 19 (APÊNDICE D). Foram discutidos, também, os itens referentes ao estágio e horários para que o pesquisador pudesse assistir às regências de aula dos sujeitos. Ao final, foram entregues a esses sujeitos os problemas finais da lista proposta, números 20 a 28, para serem resolvidos e trazidos para o próximo encontro.

SÉTIMO ENCONTRO (19/05): Discussão das estratégias de resolução

4 horas-aula: No início deste encontro, foram apresentadas as correções do segundo trabalho realizado pelos sujeitos e foi feita uma discussão sobre o que tinham respondido a respeito da diferença entre problema e exercício e de aspectos importantes a serem considerados no trabalho com a resolução de problemas. Logo em seguida, foram discutidos como os sujeitos tinham resolvido os problemas de número 20 a 28 (APÊNDICE D). Destes, apenas o de número 24 não foi feito neste encontro porque ao final da aula houve corte da energia na universidade. A resolução ficou para que os sujeitos fizessem em casa. Com este encontro, encerraram-se as atividades do curso.

OITAVO ENCONTRO (30/06): avaliação

2 horas-aula: Aplicou-se uma avaliação individual referente ao que foi visto no Curso sobre Resolução de Problemas. Isso serviu para que o professor da disciplina Prática de Ensino, que cedeu a abertura de suas aulas aos sujeitos da pesquisa, tivesse uma nota para compor a média desses alunos, além dos trabalhos realizados.

O Quadro 4 mostra um resumo geral das atividades desenvolvidas no Curso sobre Resolução de Problemas. Como se pode observar, 10 horas-aula foram destinadas para as atividades sobre aspectos teóricos da resolução de problemas, enquanto que 18 horas-aula serviram para discutir as estratégias de resolução dos problemas feitas pelos sujeitos, bem como as apresentadas pelo pesquisador. Nas duas horas-aula finais, foi aplicada uma avaliação individual.

<table>
<tr><th>Encontros</th><th>Horas-aula</th><th>Data</th><th>Atividade desenvolvida</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1º</td><td>2</td><td rowspan="2">17/03</td><td>Resolução de problemas: aspectos teóricos</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Resolução dos problemas: discussão das estratégias</td></tr>
<tr><td>2º</td><td>4</td><td>31/03</td><td>Resolução dos problemas: discussão das estratégias</td></tr>
<tr><td>3º</td><td>4</td><td>16/04</td><td>Resolução dos problemas: discussão das estratégias</td></tr>
<tr><td>4º</td><td>4</td><td>28/04</td><td>Resolução de problemas: aspectos teóricos</td></tr>
<tr><td>5º</td><td>4</td><td>05/05</td><td>Resolução de problemas: aspectos teóricos</td></tr>
<tr><td>6º</td><td>4</td><td>07/05</td><td>Resolução dos problemas: discussão das estratégias</td></tr>
<tr><td>7º</td><td>4</td><td>19/05</td><td>Resolução dos problemas: discussão das estratégias</td></tr>
<tr><td>8º</td><td>2</td><td>30/06</td><td>Avaliação</td></tr>
</table>

Quadro 4: Resumo geral das atividades desenvolvidas no curso.

4.6 Procedimentos da pesquisa

O procedimento da presente pesquisa seguiu uma estrutura, baseada em três etapas:

1ª Etapa:

Nesta primeira etapa, os objetivos do estudo foram os de selecionar seis licenciandos em Matemática para a pesquisa e realizar uma entrevista individual. Assim, realizaram-se duas fases, a saber:

- **1ª fase:** No final do ano de 2009, o pesquisador entrou em contato com uma turma de 17 licenciandos em Matemática que cursavam o terceiro ano desse curso e recolheu informações sobre em qual cidade cada licenciando pretendia realizar o estágio de regência de aulas do quarto ano desse curso. O objetivo da pesquisa era selecionar aqueles que fossem realizar o estágio na cidade da universidade do referido curso para que o pesquisador pudesse acompanhar o trabalho a ser desenvolvido no estágio. Assim, de acordo com esse critério, seis licenciandos foram selecionados. Caso houvesse mais sujeitos, seria aplicada uma prova de matemática com problemas da lista de 28 problemas (APÊNDICE D) do Curso sobre Resolução de Problemas e a seleção se daria pelos três licenciandos que apresentassem maior desempenho e pelos três que apresentassem menor desempenho. Ainda nessa fase, é importante destacar que, devido às dúvidas do pesquisador quanto à tradução correta para o português dos sete primeiros problemas dessa lista, extraídas do trabalho de Krutetskii (1976), recorreu-se a ajuda de um professor do Departamento de Matemática da IES investigada quanto à análise e correção de seus enunciados para que não permitissem interpretações errôneas pelos sujeitos quando das atividades do Curso sobre Resolução de Problemas.
- **2ª fase:** Ainda nesse final de ano de 2009, foram realizadas entrevistas iniciais individuais com cada um dos seis alunos, as quais foram áudio-gravadas. Tais realizações foram conduzidas sob as características da entrevista do tipo semi-dirigida. A entrevista semi-dirigida se caracteriza pelas seguintes situações: (a) "o entrevistado produz um discurso que não é linear, o que significa que o entrevistador reorienta a entrevista em certos momentos"; (b) "nem todas as intervenções do entrevistador estão previstas antecipadamente. Quando muito este prevê algumas perguntas importantes ou alguns pontos de referência." (KETELE; ROGIERS, 1993, p. 193). Nesse mesmo período, antes de cada entrevista, cada aluno leu e assinou o Termo de Consentimento

Livre e Termo de Participação (APÊNDICE E) para formalizar a aceitação na participação das atividades.

2ª Etapa:

Nesta etapa, o objetivo foi o de desenvolver e ampliar ações sobre um repertório de conhecimentos acerca da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática como um saber docente importante na formação inicial em Matemática.

Em março de 2010, deu-se início ao Curso sobre Resolução de Problemas, sendo todas as aulas filmadas e ministradas pelo pesquisador. A máquina filmadora era sempre fixada no fundo da sala de aula a cada encontro de modo que se registrassem as imagens de todos os envolvidos na pesquisa e suas falas para apreender com maior acuidade os significados atribuídos às discussões sobre a resolução de problemas. Tal Curso, composto de oito encontros (30 horas-aula), encerrou-se em maio de 2010. Para analisar posteriormente os conhecimentos adquiridos pelos sujeitos no curso e o seu reflexo no estágio de regência, foi solicitado que elaborassem três sequências didáticas, envolvendo um conteúdo de aritmética, um de álgebra e um de geometria, situação que correspondeu à terceira etapa da pesquisa.

3ª Etapa:

Nesta etapa final, o objetivo foi o de acompanhar e observar as ações dos sujeitos no estágio, durante a tentativa de trabalho com a resolução de problemas por meio de regências de aula. Além disso, nesta etapa, foram realizadas as entrevistas finais. As duas fases que destacam as atividades realizadas foram as seguintes:

- **1ª fase:** A partir do final do mês de maio de 2010, os sujeitos deram início a implementação do que foi trabalhado e aprendido no curso. Isso foi feito no estágio por meio de regências de aula elaboradas para um conteúdo da área de aritmética, um de álgebra e um de geometria, escolhidos e estruturados pelos licenciandos. Foi durante esse período que dois sujeitos da pesquisa decidiram deixar de participar, pois, segundo eles, tinham a intenção de realizar o estágio apenas no segundo semestre, situação não explicitada anteriormente ao pesquisador, o que, naquele momento, inviabilizou mantê-los na pesquisa. Assim, quatro licenciandos continuaram a desenvolver os trabalhos. As aulas ministradas pelos quatro sujeitos da pesquisa foram observadas pelo pesquisador e o registro das ações foi feito por meio do "Roteiro de avaliação de regências de aula". Tal observação seguiu os pressupostos da "observação participante", segundo a qual os dados são coletados "[...] por meio do contato direto do pesquisador com o fenômeno observado para [...] experienciar e compreender a dinâmica dos atos e eventos, e recolher as informações a partir da compreensão e sentido que os atores atribuem aos seus atos". (CHIZZOTTI, 2001, p. 90). É importante destacar que em algumas aulas houve choque de horário e de local o que impossibilitou acompanhá-las em sua totalidade. Desses quatro sujeitos, dois realizaram o cumprimento dos três conteúdos nas três áreas propostas já no primeiro semestre de 2010. Os outros dois sujeitos chegaram a demorar mais de dois meses (agosto, setembro e parte de outubro) para finalizar as regências nesses conteúdos. As dificuldades desses estudantes foram os de encontrar professores da escola básica que estivessem trabalhando conteúdos ligados à última área que lhes faltavam, o de aritmética, e horários compatíveis com suas disponibilidades para tratar desses conteúdos, pois trabalhavam.

- **2ª fase:** O procedimento da pesquisa se encerrou com a realização das entrevistas finais, feitas individualmente e áudio-gravadas, também com o ritmo da entrevista do tipo semi-dirigida (KETELE; ROGIERS, 1993). Para cada um dos sujeitos, solicitou-se que relembrassem as atividades desenvolvidas com os três conteúdos para que as perguntas fossem claramente respondidas.

O esquema abaixo resume os procedimentos da pesquisa.

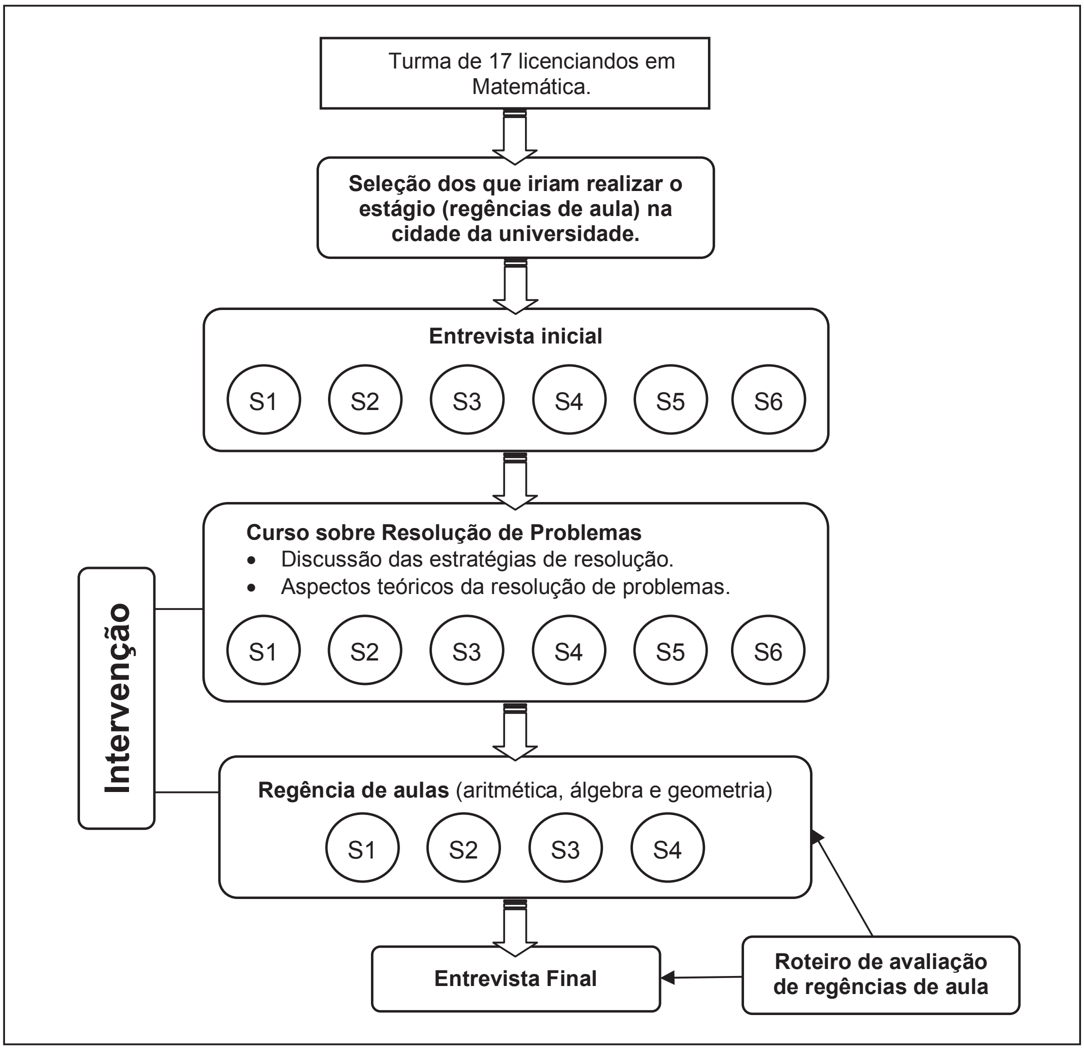


Figura 5: Resumo do procedimento da pesquisa.

4.7 Procedimentos de análise dos dados

As pesquisas qualitativas geralmente envolvem uma grande quantidade de dados. Nesse caso, para organizá-los e para que se possa compreendê-los, é necessário identificar dimensões, categorias, tendências, padrões e relações, buscando esclarecer seus significados (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNADJER, 2002). É preciso "[…] organizar e sumariar os dados de forma tal que possibilitem o fornecimento de respostas ao problema proposto para investigação". (GIL, 1999, p. 168).

Assim, para analisar os dados obtidos com os quatro sujeitos, foram estabelecidos quatro eixos de análise para o presente estudo: (1) *Os conhecimentos iniciais sobre resolução de problemas*; (2) *O Curso sobre Resolução de Problemas*; (3) *O trabalho realizado no* *estágio de regência*; (4) *O conhecimento (re)constituído sobre a resolução de problemas no ensino de Matemática*.

Desse modo, para os eixos um e quatro, foram elaboradas categorias de análise, cujos títulos foram definidos após a classificação e delimitação dos dados coletados, segundo características comuns. Além disso, foram formuladas seguindo os princípios colocados por Selltiz et al. (1967, p. 441 apud GIL, 1999, p. 169): "(a) o conjunto de categorias deve ser derivado de um único princípio de classificação; (b) o conjunto de categorias deve ser exaustivo; (c) as categorias do conjunto devem ser mutuamente exclusivas."

Assim, para o primeiro eixo, procuramos analisar os dados referentes às seguintes categorias, as quais foram dispostas em Quadros:

- *O ensino-aprendizagem ocorrido na escola básica* – nesta categoria, descreve-se o relato do sujeito sobre como era, na sua visão, o ensino e aprendizagem da Matemática enquanto era aluno da Educação Básica.
- *A formação proporcionada pelo curso de Licenciatura em Matemática* – nesta categoria, descreve-se o relato do sujeito sobre as contribuições do curso de Licenciatura em Matemática que frequentava para sua formação profissional, destacando-se a sua formação em resolução de problemas.
- *O entendimento do que seria um problema* – nesta categoria, investigou-se se o sujeito tinha conhecimento acerca do que seria um problema e se fazia distinção entre este e exercícios.
- *Condições para ensinar Matemática por meio da resolução de problemas* – nesta categoria, apresentam-se as condições dos sujeitos para ensinar Matemática utilizando a resolução de problemas.

No segundo eixo de análise, buscamos descrever o Curso sobre Resolução de Problemas, analisando a participação dos sujeitos e seus avanços no trabalho com as estratégias de resolução e na discussão da literatura pertinente.

No terceiro eixo, buscamos analisar o trabalho com a resolução de problemas na abordagem dos conteúdos de aritmética, álgebra e geometria, durante as regências de aula na escola básica. Assim, a análise se pautou em apresentar de cada sujeito um Quadro resumo sobre os "aspectos do trabalho realizado nas regências de aula pelo sujeito". Em seguida, apresentaram-se Quadros que destacam as dificuldades dos sujeitos sobre aqueles aspectos, referentes à resolução de problemas.

Por fim, no quarto eixo, o objetivo principal foi o de procurar analisar o conhecimento adquirido pelos sujeitos após o Curso sobre Resolução de Problemas e as regências de aula

(Intervenção). Assim, analisamos as seguintes categorias, as quais foram dispostas em Quadros:

- *Sobre o que é um problema e o que é um exercício* – nesta categoria, procuramos evidenciar quais conhecimentos foram adquiridos pelo sujeito sobre problema e sobre exercício, ressaltando a diferenciação existente entre ambos.
- *Sobre como conduzir o ensino por meio da resolução de problemas* – para esta categoria, buscamos destacar qual o conhecimento adquirido pelo sujeito no que diz respeito ao modo como poderiam ser trabalhados os tópicos de Matemática, utilizando a resolução de problemas.
- *Como avalia as suas condições, hoje, para ensinar Matemática por meio da resolução de problemas* – nesta categoria, procuramos descrever as condições que o sujeito relatou ter para ministrar aulas de Matemática, envolvendo conhecimentos sobre resolução de problemas, após todo o processo de intervenção.
- *Tipo de ensino que o sujeito realizaria na escola básica* – nesta categoria, buscamos destacar a maneira como o sujeito realizaria o trabalho com um tópico de Matemática na escola básica, levando-se em consideração a resolução de problemas.

Um último item analisado foi a avaliação que os sujeitos fizeram da intervenção que participaram. Tal avaliação foi referente ao trabalho com os problemas matemáticos, ao contato com a literatura e à implementação das ideias nas regências de aula na escola pública.

O esquema da Figura 6 resume os procedimentos adotados para a análise de dados.

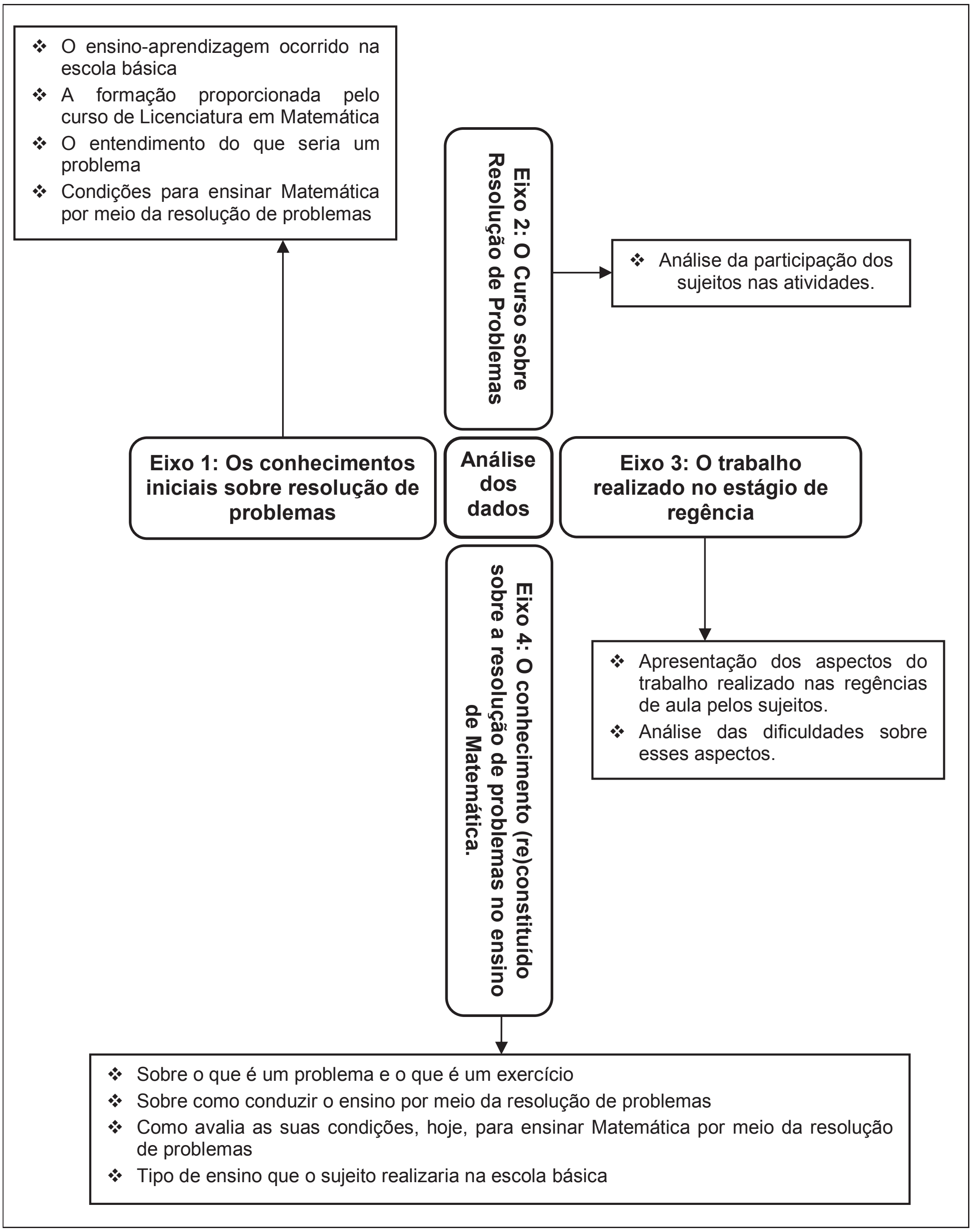


Figura 6: Resumo do procedimento de análise dos dados da pesquisa.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Os dados da presente pesquisa foram constituídos da participação dos sujeitos no Curso sobre Resolução de Problemas e da atuação que apresentaram nas regências de aula ministradas na escola básica. Assim, baseado nos objetivos da pesquisa, os dados obtidos foram analisados por meio de quatro eixos de análise: (1) *Os conhecimentos iniciais sobre resolução de problemas*; (2) *O Curso sobre Resolução de Problemas*; (3) *O trabalho realizado no estágio de regência*; (4) *O conhecimento (re)constituído sobre a resolução de problemas no ensino de Matemática.*

5.1 Os conhecimentos iniciais sobre resolução de problemas

Para analisar os dados que se originaram da aplicação da entrevista inicial sobre os conhecimentos dos sujeitos acerca da resolução de problemas, foram elaboradas as seguintes categorias: *O ensino-aprendizagem ocorrido na escola básica*; *A formação proporcionada pelo curso de Licenciatura em Matemática; O entendimento do que seria um problema; Condições para ensinar Matemática por meio da resolução de problemas.*

Com relação ao ensino-aprendizagem ocorrido na escola básica, o Quadro 5 mostra os relatos dos sujeitos.

Sujeito	O ensino-aprendizagem ocorrido na escola básica
S1	Eu estudei até oitava série em escola pública. Geralmente você via a matéria e eram problemas de aplicação, alguns exercícios. Eram dadas as fórmulas e você resolvia. Tinha aquela questão de meio certo e tal. Mas quando eu fui estudar em escola particular, eles passavam a matéria e depois tinham os exercícios da apostila para fazer. Eles faziam alguns com a gente na lousa e os outros eles deixavam para a gente fazer. Eu acho que era fixação do conteúdo. Para ver se eu absorvi o conteúdo. Dois de meus professores eles só corrigiam a questão se você chegou no resultado correto, se você não chegou no resultado correto eles não voltavam corrigindo a questão.
S2	Eu não lembro muito bem, mas eu acho que era mais mecânico. A professora passava um exercício e resolva. Daí o resto eram muito parecidos os outros exercícios, não instigava o aluno muito a pensar. O ensino de quinta a oitava era mais mecânico mesmo, só resolver conta, essas coisas. Eu acho que no ensino médio começou a dar mais importância. Eu lembro que tinham questões do ENEM. Cobravam aplicação, raciocínio... você precisava pensar para resolver os problemas, não estava direto. Assim, ele considerava se eu entendi. Via a minha compreensão do problema. Não só a resposta. Eu lembro que minha professora avaliava assim, o desenvolvimento do problema. Não olhava só a resposta não. E era escola pública, tive só uma professora no ensino médio.
S3	Então no ensino básico eu não tive resolução de problemas. Eu acho que tudo era muito simples. O que tinha era só substituir, um ensino muito técnico. Eu lembro que na oitava série a gente chegou a fazer mais de 200 equações de segundo grau, mas não fez nenhum problema, a gente fez somente exercício, bem técnico. Eu decorava. De forma geral, eles avaliavam mais os exercícios. Por mais que falasse que não. O resultado. Tem professor que só corrigia a conta se o resultado estivesse certo. Senão ele já dava errado.

S4	Geralmente eram mais exercícios mesmo do que problemas. Era mais conteúdo, exercícios, técnicas, resolve e acabou. Via só a resposta, porque geralmente se olha o resultado final e na hora de corrigir dava errado porque chegou na resposta que não é, mas não olha para o desenvolvimento. Não perguntavam, não chamavam na mesa para perguntar o porquê daquilo. Simplesmente se a resposta estava certa ou não. Dava certo ou errado.

Quadro 5: Relato dos sujeitos sobre o ensino-aprendizagem ocorrido na escola básica.

De acordo com os relatos dos sujeitos apontados no Quadro 5, o ensino e a aprendizagem ocorridos na escola básica eram voltados para o trabalho com exercícios onde o sujeito aplicava as fórmulas, sendo avaliado se o mesmo chegou à resposta correta, ou seja, a abordagem de exercícios em sala de aula acabava servindo para que os alunos automatizassem técnicas e habilidades matemáticas (ECHEVERRÍA; POZO, 1998).

Esse trabalho, atualmente, ainda se constitui como a cultura escolar do ensino básico de muitas instituições públicas e, nitidamente arbitrário, da maioria das escolas particulares. Essa cultura vigora por conta, entre outros fatores, da realidade de trabalho do professor que se encontra imerso a uma quantidade grande de horas-aula a ser ministrada na escola, o que dificulta a sua iniciativa de busca por novas formas de abordagem como, por exemplo, a resolução de problemas, para ensinar e aprender Matemática.

Desse modo, a prática do professor acaba por se configurar basicamente em definições seguidas de exercícios de aplicação, o que pouco tem contribuído para que os alunos possam desenvolver capacidades de pensamento importantes para estabelecer relações matemáticas e, assim, ampliar suas compreensões.

Devido a essa situação, destaca-se que muitos professores alegam a falta de tempo como mecanismo para justificar a ausência do trabalho com processos de resolução de problemas. Assim, isso os leva a alicerçar todo o processo de ensino e aprendizagem nos livros didáticos que, muitas vezes, não concebem a resolução de problemas como um eixo medular do ensino da Matemática escolar.

Em consequência dessa cultura escolar, esse tipo de trabalho pode influenciar alunos da escola básica que ingressam em cursos de formação de professores que ensinam Matemática a entenderem que para ser professor se deve exercer um ensino focado no conhecimento de fórmulas e regras matemáticas pelos alunos. De modo geral, essa situação pode levar o licenciando a acreditar que ser professor basta saber o conteúdo, o que se constitui no que Gauthier et al. (1998) denominaram de "cegueira conceitual", ou seja, um **ofício sem saberes pedagógicos**.

Atividades voltadas para o trabalho envolvendo a resolução de problemas parecem ter ocorrido somente com S2 quando cursava o Ensino Médio, uma vez que mencionou alguns aspectos importantes, relacionados ao ato de pensar, raciocinar e de compreender, os quais podem ser entendidos, conforme apontaram Schroeder e Lester (1989), como a tentativa de relacionar ideias matemáticas.

O Quadro 6 mostra as respostas dos sujeitos sobre a formação proporcionada pelo curso de Licenciatura em Matemática para se trabalhar com a resolução de problemas.

Sujeito	A formação proporcionada pelo curso de Licenciatura em Matemática
S1	Bom, a gente vê, nos vários textos, a respeito disso, mas eu achei que alguns dos textos que nós vimos, muito românticos. Então, é muito bonito ler tudo aquilo e tal, mas não sei se tudo que nos é ensinado dá para ser aplicado. Depois que eu comecei o estágio [de observação] eu percebi mais isso. Acho que depende do contexto em que você está inserido. Alguns textos ajudam? Ajudam sim, mas não são todos que dá para a gente realmente aplicar do jeito que eles propõe. Fazer tudo do jeito que eles nos indicam.
S2	Lembro que em didática (2009) a gente tratou. Em Prática de Ensino do ano anterior (2008) teve até seminário sobre esse tema: resolução de problemas. A Prática de Ensino deste ano (2009) a professora fala da importância, mas não trabalhamos nenhum texto específico. Foi mais no ano anterior (2008) mesmo que a gente trabalhou especificamente resolução de problemas. Na verdade eu já aprendi, mas não lembro. Acho que foi falado o que era resolução de problemas.
S3	Os matemáticos, por exemplo, eles mostram como faz a demonstração e a gente faz e se vira e pede na prova e se vira também. Então não explora tanto. Então, quem explora são os educadores matemáticos. [...] a gente "falou" sobre a importância de se fazer, como se faz, mas a gente não fez. Uma coisa que vi muito. O que eu enxergo de negativo é que veio alguns professores e falaram um monte de resolução de problemas e a gente não fez nenhum. Se fez, por exemplo, foi um dia, dois exercíciozinhos para gente ver como isso era de verdade. Dá de uma forma mais teórica.
S4	Eu até já tinha feito essa disciplina antes como optativa. Fora isso, as outras [disciplinas] acho que não contemplam, diretamente e especificamente não. Pode ser que auxiliem, mas diretamente não.

Quadro 6: Relato dos sujeitos sobre a formação proporcionada pelo curso de Licenciatura em Matemática.

De acordo com o Quadro 6, pode-se apontar que todos os sujeitos tiveram contato, em alguma disciplina do curso de Matemática, com a temática da resolução de problemas. Porém, esse contato parece ter ficado apenas ao nível de se discutir a importância de se trabalhá-la no ensino da Matemática, conforme relataram S2 e S3.

Nos relatos dos sujeitos S1 e S3, percebe-se a existência de uma visão dicotômica entre teoria e prática. Talvez isso possa ter influenciado a compreensão da abordagem da resolução de problemas no ensino, levando-os a acreditar que se tratava de um conjunto independente de ideias, dissociado da prática (LOPES, 2009).

Essa visão é frequente em muitos cursos de formação inicial os quais têm se baseado nos princípios do modelo da "racionalidade técnica", levando os futuros professores a terem uma compreensão de que a sua formação, primeiro, é teórico-técnica para que, posteriormente, aplique esse conhecimento em situações práticas de sala de aula (FIORENTINI; SOUZA JR.; MELO, 1998).

Desse modo, discutir apenas a importância da resolução de problemas, orientando-a pelo modelo da "racionalidade técnica" pode levar os futuros professores a terem um entendimento, equivocado, de **resolução de problemas como capacidade** (STANIC; KILPATRICK, 1990). Nesse caso, exerceriam um ensino de Matemática onde primeiro se trabalhariam os conceitos para somente depois serem aplicados na resolução de problemas, o que se caracterizaria como **ensinar para resolução de problemas** (SCHROEDER; LESTER, 1989).

Se nos cursos de formação de professores o licenciando em Matemática for levado a discutir apenas a importância de abordagens de ensino como a resolução de problemas, então isso pode acabar o direcionando a adquirir uma visão funcionalista e mecânica da profissão professor (IMBERNÓN, 2001).

Assim, é importante garantir a articulação entre teoria e prática, levando os futuros professores de Matemática a se apropriarem de instrumentos teóricos e metodológicos que lhes auxiliem a refletir e compreender não apenas a prática pedagógica, mas também a escola no todo (PIMENTA; LIMA, 2004).

Diante dessa formação recebida no curso de Licenciatura em Matemática sobre a resolução de problemas, o Quadro 7 mostra as respostas dos sujeitos sobre o entendimento que apresentaram sobre o que seria um problema.

Sujeito	O entendimento do que seria um problema
S1	Eu acho que quando a resolução não é muito imediata. Acho que problema requer um pouco mais de raciocínio, certa linha de raciocínio que é preciso para armar uma estratégia para resolver o problema. Resolver a situação e chegar numa resposta correta.
S2	Problema você busca alguma coisa, você busca solucionar o problema. Tem que pensar, montar estratégia, ter os objetivos, pesquisar, essas coisas. Um exercício é assim, você está treinando aquilo que você já aprendeu. Você está seguindo um modelo. Alguns exercícios te ajudam nos problemas, porque resolvendo problemas você vai ter uma conta, aquela conta você vai aplicar o exercício. Você vai resolver a conta e seria o exercício, parecido com o que você já fez.
S3	Se você vai explorar determinado conceito ou conteúdo matemático dentro de algum contexto, você esta fazendo um problema. Se a criança é capaz de pegar um problema que ela tem do cotidiano e usar um conceito matemático, ela esta resolvendo um problema matemático.
S4	Problema é algo que não é imediato. Que faz com que o aluno pense e interprete alguma coisa. Agora eu entendo que já o exercício é direto, porque no enunciado tem calcule, efetue, meramente técnico, exige algoritmo. Problema é algo mais do que exercício.

Quadro 7: Relato dos sujeitos sobre o entendimento do que seria um problema.

De acordo com o Quadro 7, os sujeitos S1, S2 e S4 apresentaram uma ideia coerente sobre o significado do que seria um problema, ou seja, que não é algo imediato, que tem que pensar, o que vai ao encontro com a ideia de Echeverría (1998) quando mencionou que se trata da superação de um obstáculo para encontrar a resposta.

O sujeito S3 evidenciou uma ideia de que a resolução de problemas seria a aplicação do conhecimento matemático. Isso estaria relacionado ao tema **resolução de problemas como capacidade**, apontado por Stanic e Kilpatrick (1990), onde, primeiro, o aluno deve aprender conceitos básicos de Matemática para somente depois utilizá-los na resolução de problemas.

É importante destacar que os sujeitos S2 e S4 fizeram uma diferenciação entre os problemas e os exercícios, evidenciando que nestes a pessoa utiliza mecanismos que a leva de forma imediata a uma solução (ECHEVERRÍA; POZO, 1998).

Apesar de três sujeitos apresentarem ideias coerentes sobre o significado de problema, o Quadro 8 evidencia a falta de conhecimentos acerca do modo como pode ser trabalhado no ensino de Matemática.

Sujeito	Condições para ensinar matemática por meio da resolução de problemas
S1	Eu acho que não estou preparada. Eu não sei a fundo do que se trata a resolução de problemas. Eu acho que eu teria que ver o que realmente isso significa. Teria que estudar isso para ver o que isso propõe e o que é. Eu acho assim, passar o conteúdo, ensinar de várias maneiras diferentes, esse tipo de coisa, buscar um jeito que os alunos consigam compreender melhor determinado conteúdo. E depois sim a aplicação de problemas e de exercícios também.
S2	Acho que eu não estou preparada. Não estou preparada para dar aula, ainda. Então, assim, sinceramente eu não sei, porque eu comecei a fazer estágio este ano [2009 – de observação] e eu vi que os alunos têm muita dificuldade em resolver problemas, eles não entendem, então eu não sei. Bom, acho que a gente tem que saber o cotidiano do aluno, não pode ser alguma coisa tão fora do cotidiano dele. Mas tem algumas matérias que... não mecânicas, mas tem que ser tradicional também. Por exemplo, ensinar números complexos eu não vejo como aplicar no cotidiano, entendeu? Tem que ser ensino tradicional mesmo. Passar o conteúdo.
S3	Ainda não. Falta bastante. Tenho dificuldade de explicar, explorar um problema, por conta de explicar direito em resolver um problema. Quando é que você tem um problema? Bom, agora eu tenho um problema da minha vida, do meu cotidiano, agora eu quero falar isso matematicamente. Primeiro assim, eu tenho determinado conteúdo para eu ensinar [...], então, primeiro eu definiria o que é. É claro, com um conceito. Eu tentaria pegar bastante nisso, tentava fazer discussão e tal. Depois que eu defini, eu queria que eles fizessem relações, por exemplo, que Sistemas Lineares tem como ver geometricamente. Depois que eu fiz tudo isso com a criançada, que vai demorar, eu acho importante começar a resolução de problemas.
S4	Eu acho que... não vou dizer que 100% e não vou dizer 50%, mas uns 70% de capacidade minha de utilizar resolução de problemas. São estratégias, quando cria estratégias de diferentes maneiras, porque cada um vai ter uma interpretação, cada um vai resolver de um jeito, acho que seria isso. Então tá, vamos reduzir os 70% que eu falei para 60%. [...] acho que seria o professor também indo na lousa, explicando a matéria, passando problemas para o trabalho em grupo ou individualmente mesmo.

Quadro 8: Condições para ensinar matemática por meio da resolução de problemas.

De acordo com o Quadro 8, verifica-se que todos os sujeitos evidenciaram a falta de condições de se ensinar Matemática por meio da resolução de problemas. Porém, identificam-se nos seus relatos alguns aspectos importantes dessa abordagem no ensino como os de levar os estudantes a **compreenderem** os problemas (CHI; GLASER, 1992; MAYER, 1992), mencionado por S1 e S2, e **estabelecerem relações matemáticas** (por meio de diferentes estratégias) (SCHROEDER; LESTER, 1989), destacadas por S3 e S4.

A cultura escolar atual do ensino básico, apontada anteriormente, é um grande fator que tem contribuído para que, no ensino, seja negligenciada a aprendizagem da Matemática pelos alunos no que diz respeito a favorecer a compreensão e interpretação dos problemas matemáticos e o entendimento das relações matemáticas.

Essa cultura se manifestou nos relatos dos sujeitos S1 e S3, bem como nos do sujeito S2, ao evidenciarem que o ensino de um tópico de Matemática se inicia pelo conteúdo e/ou definições para somente depois tratar de problemas com fins de se aplicar o que foi aprendido, prática muito criticada pelas pesquisas. Esse tipo de situação corresponde à abordagem de **ensinar para resolução de problemas**, apontado por Schroeder e Lester (1989), onde o objetivo é que o conhecimento aprendido de Matemática seja transferido à resolução de problemas.

Uma vez que o ensino-aprendizagem ocorrido na escola básica (Quadro 5) se deu, em sua maioria, pela abordagem de exercícios, conforme apontado anteriormente, percebe-se que as experiências na escola levaram esses sujeitos a acreditarem que ensinar estaria relacionado a passar ou mesmo transmitir um saber (ROLDÃO, 2007). Ao contrário disso, para o trabalho com a resolução de problemas, é preciso organizar ações que levem o outro a aprender (ROLDÃO, 2007).

Contudo, o fato de se ter identificado o entendimento dos sujeitos pela abordagem da resolução de problemas baseada na ideia de **ensinar para resolução de problemas** não corresponde a algo totalmente negativo na formação. Esse tipo de ensino e o **ensinar sobre resolução de problemas** devem ser articulados ao **ensinar via resolução de problemas** que visa à abordagem inicial de um conteúdo matemático por meio de um problema.

Nesse caso, o que se deve evitar na formação inicial do professor de Matemática é levá-lo a acreditar e enraizar a ideia de que primeiro ensinamos conteúdos, apresentando suas definições e regras, para depois inserir o trabalho com problemas. De forma geral, é preciso evitar uma formação baseada no modelo da “racionalidade técnica”.

5.2 O Curso sobre Resolução de Problemas

Apresenta-se, nesta seção, a descrição sobre o curso proposto à formação dos quatro futuros professores de Matemática, sujeitos da pesquisa, a respeito da resolução de problemas como um caminho para se ensinar e aprender Matemática. Basicamente, trabalharam-se 30 horas (sete encontros e um encontro para avaliação) onde uma gama de problemas matemáticos foi resolvida e textos da literatura sobre o assunto foram abordados.

A seguir, apresenta-se a descrição do que foi feito e discutido no Curso sobre Resolução de Problemas, evidenciando a participação dos sujeitos.

PRIMEIRO ENCONTRO (17/03): aspectos teóricos da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática e discussão das estratégias de resolução

O início dos trabalhos foi marcado com a apresentação das atividades que seriam desenvolvidas ao longo da intervenção que envolvia a formação em resolução de problemas: (a) um curso envolvendo o trabalho com a resolução de uma gama de problemas de Matemática para discutir as estratégias de resolução e envolvendo a discussão teórica sobre o assunto; (b) a implementação das ideias aprendidas nesse curso nas regências de aula na escola pública básica por meio da elaboração de três planos de aula, um de aritmética, um de álgebra e um de geometria; (c) e a participação em entrevistas finais.

A introdução efetiva ao curso elaborado se deu pela leitura e discussão do texto de Stanic e Kilpatrick (1989), *Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática*. Tal texto ajudou a evidenciar como a resolução de problemas era tratada dentro do currículo de Matemática, sendo possível visualizar essa situação por meio de três temas: resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como capacidade e resolução de problemas como arte.

De modo geral, como foi nossa primeira abordagem aos estudos pretendidos, os sujeitos se mostram reticentes e sem muitas perguntas.

No início das duas aulas finais deste primeiro encontro, foi explicado aos sujeitos que a partir daquele momento eles iriam resolver problemas e que as estratégias de resolução seriam o foco dessa tarefa. Foi destacado que, em duplas, deveriam tentar resolver tais problemas pelos próprios meios e conhecimentos que possuíam. Assim, foram apresentados, aos poucos, problemas da lista de 28 problemas de matemática (APÊNDICE D).

Durante o tempo em que ficaram debruçados na resolução dos problemas, percebeu-se que os sujeitos de cada dupla trocavam ideias. O pesquisador entregou folhas de almaço para que pudessem registrar suas resoluções, sendo que foi cobrado o registro individual para que tivessem o material para estudo posterior.

Depois que todas as duplas disseram ter terminado os cinco primeiro problemas, iniciou-se a discussão da resolução do problema número 1: *Alguns trabalhadores foram contratados para reparos e eles tinham que fazer o trabalho em um determinado número de dias. Se houvesse três homens a menos, o prazo teria se estendido em seis dias. Se houvesse* *dois homens a mais, terminariam o trabalho dois dias antes do prazo. Quantos trabalhadores foram contratados?*

Nenhum sujeito conseguiu resolvê-lo. A resolução que segue abaixo foi feita, na lousa, pelo pesquisador, mas instigando a participação dos sujeitos.

$x - dias$
$y - trabalhadores$

$$\begin{array}{cc} y & x \\ y-3 & x+6 \\ y+2 & x-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} y & -- & x \\ (y-3) & -- & (x+6) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} y & -- & x \\ (y+2) & -- & (x-2) \end{array}$$

$$yx = (y-3)(x+6) \qquad yx = (y+2)(x-2)$$

$$(y-3)(x+6) = (y+2)(x-2)$$
$$yx + 6y - 3x - 18 = yx - 2y + 2x - 4$$
$$8y = 5x + 14$$

$$\begin{aligned} yx &= (y-3)(x+6) \\ yx &= yx + 6y - 3x - 18 \\ 3x &= 6y - 18 \\ x &= 2y - 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 8y &= 5(2y-6) + 14 \\ 8y &= 10y - 30 + 14 \\ -2y &= -16 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

R: Foram contratados 8 trabalhadores.

Estratégia → Estabelecer uma equação

É importante destacar que quando se obteve 8y = 5x + 14, mesmo assim eles não sabiam como dar continuidade, conforme disse o sujeito S3: *até aí foi*.

Depois de ter encontrado o valor y = 8, o pesquisador disse aos sujeitos que deveriam verificar no início da resolução o que tinha sido denominado de y, buscando enfatizar a necessidade da resposta. No caso, era o número de trabalhadores. Desse modo, questionou:

> Pesquisador: Falta alguma coisa para finalizar a resolução?
> S1: A resposta.

Em seguida, o pesquisador salientou que a resolução realizada para resolver o problema se constituía em uma estratégia. Perguntou sobre um possível nome que os sujeitos poderiam dar para a estratégia utilizada. Como pode ser observado, isso causou dúvidas.

> Pesquisador: Que nome nós poderíamos dar para essa estratégia utilizada?
> S3: Estratégia?
> S4: Estratégia, onde? ((risos))
> S1: Não sei, tem que ter nome?

Assim, o pesquisador destacou que iríamos nomear as estratégias pela forma/caminho que buscamos para resolver um problema. A resolução feita em lousa foi denominada de "estabelecer uma equação".

Desse modo, o pesquisador esclareceu que, nos problemas que seriam abordados, a necessidade de se nomear a estratégia se justificava pelos seguintes aspectos: (1) ao nomear uma estratégia utilizada, os alunos teriam a oportunidade de aumentar suas compreensões acerca da relação que pode ser realizada entre conceitos e procedimentos matemáticos (SCHROEDER; LESTER, 1989); (2) essa compreensão os ajudaria a entender que não há um único caminho de resolução (CHARLES, 1985); (3) os alunos poderiam reconhecer e utilizar as estratégias discutidas em sala de aula em diversos problemas a serem abordados no ensino de Matemática (KRULIK; RUDNICK, 1982; KILPATRICK, SWAFFORD; FINDELL, 2001).

É importante destacar que em todos os problemas abordados no curso, o nome das estratégias mais usuais foram colocados na lousa, conforme aparece na resolução do problema 1, destacada anteriormente.

Em seguida, o pesquisador destacou outra forma que poderia ser feita para resolver o problema a partir da equação $8y = 5x + 14$, a qual os sujeitos não sabiam como dar continuidade. Assim, isolou o y, obtendo uma função. Propôs a montagem de uma tabela com duas colunas, sendo uma representando o número de dias e a outra o número de trabalhadores, ou seja, representando x e y, respectivamente.

Para iniciar a atribuição de valores, o pesquisador perguntou qual número poderia ser colocado na coluna dos dias. Como ninguém soube dizer, o pesquisador respondeu: número três. Justificou essa escolha relembrando as condições "$x - 2$" e "$x + 6$", pois para "$x - 2$" a quantidade não poderia zerar, evidenciando que o menor valor seria três. A resolução final ficou da seguinte forma:

$$8y = 5x + 14$$

$$y = \frac{5x}{8} + \frac{14}{8}$$

dias	trabalhadores
3	$^{29}/_{8}$
4	$^{34}/_{8}$
5	$^{39}/_{8}$
6	$^{44}/_{8}$
7	$^{49}/_{8}$
8	$^{54}/_{8}$
9	$^{59}/_{8}$
10	$^{64}/_{8} = 8$

$$\uparrow \begin{array}{ccc} y & -- & x \\ (y-3) & -- & (x+6) \end{array} \downarrow$$

$$\uparrow \begin{array}{ccc} 8 & -- & 10 \\ (8-3) & -- & (10+6) \end{array} \downarrow$$

$$\uparrow \begin{array}{ccc} 8 & -- & 10 \\ 5 & -- & 16 \end{array} \downarrow \qquad \begin{array}{c} 8.10 = 5.16 \\ 80 = 80 \end{array}$$

$$\downarrow \begin{array}{ccc} y & -- & x \\ (y+2) & -- & (x-2) \end{array} \uparrow$$

$$\downarrow \begin{array}{ccc} 8 & -- & 10 \\ (8+2) & -- & (10-2) \end{array} \uparrow$$

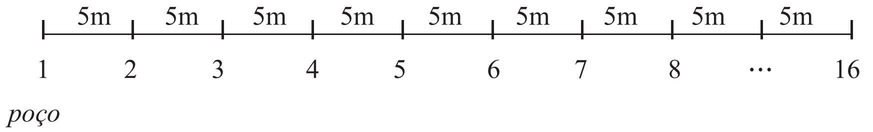
$$\downarrow \begin{array}{ccc} 8 & -- & 10 \\ 10 & -- & 8 \end{array} \uparrow \qquad \begin{array}{c} 8.10 = 10.8 \\ 80 = 80 \end{array}$$

Para finalizar, o pesquisador utilizou as proporções para validar os valores obtidos e em seguida denominou a estratégia de utilizar uma “equação e montar uma tabela”.

O problema 2 tinha o seguinte enunciado: *Dezesseis mudas de árvores foram plantadas em fileira, a 5 m de distância entre si. Um poço estava situado juntamente com a última árvore. Um balde de água é necessário para regar duas árvores. Partindo do poço, qual é a distância a ser percorrida para regar todas as árvores, usando apenas um balde?*

Nenhum dos sujeitos quis ir até a lousa colocar o que tinha feito. No entanto, buscaram resolver pelo conteúdo de Progressão Aritmética (P. A.), como destacou o sujeito S1: *primeiro, eu fui contando. Aí só ia dar cinco metros com o primeiro balde, porque ia regar a primeira e a segunda e daí iria voltar, dez metros. Exclui o cinco e a partir do* d_2 *(distância para regar a terceira e quarta árvores) a gente contou como uma P. A., então o nosso exercício é 5 mais a soma de uma P. A.*

Nesse caso, o pesquisador propôs que fosse seguida essa ideia da contagem do sujeito S1 para ser colocada na lousa. Primeiro, realizou-se uma representação do problema, situando o poço na primeira árvore, pois a contagem da distância se iniciava a partir do poço. A partir dessa representação, foram registradas as distâncias percorridas (ida e volta) para regar duas árvores de cada vez. A resolução ficou assim:



$$
\begin{array}{lcccccl}
 & & ida & & volta & & & árvores \\
d_1 = & & 5 & + & 5 & = & 10 & (1\ e\ 2) \\
d_2 = & & 15 & + & 15 & = & 30 & (3\ e\ 4) \\
d_3 = & & 25 & + & 25 & = & 50 & (5\ e\ 6) \\
d_4 = & & 35 & + & 35 & = & 70 & (7\ e\ 8) \\
d_5 = & & 45 & + & 45 & = & 90 & (9\ e\ 10) \\
d_6 = & & 55 & + & 55 & = & 110 & (11\ e\ 12) \\
d_7 = & & 65 & + & 65 & = & 130 & (13\ e\ 14) \\
d_8 = & & 75 & & & = & \underline{75} & (15\ e\ 16) \\
 & & & & Total & = & 565 &
\end{array}
$$

R: A distância a ser percorrida é de 565 metros.

Como pode ser observado na resolução acima, o pesquisador não adicionou o valor da volta quando foi regada a última árvore. Isso porque para o pesquisador a pergunta do problema permitia entender que era necessário regar todas as árvores, o que finalizava a tarefa. Alguns sujeitos tiveram dúvidas.

> S3: Ele não volta se ele não quiser. Isso não está escrito.
> S4: Ele tem que molhar todas as árvores. Mas se ele quiser voltar para o poço?
> S2: Ele precisa regar. Ele não precisa voltar.
> S1: A gente não contou, mas é porque a gente fez ao contrário. Só contou cinco, o da volta.

De modo geral, os sujeitos que discordaram da resposta final acharam que a questão levantada de que não se podia voltar ao poço deveria constar no enunciado do problema. Por fim, o pesquisador destacou que precisava ser colocada a resposta. Além disso, perguntou se tinham nomeado a estratégia, mas ninguém o fez. Assim, escreveu na lousa que a estratégia era de “montar um diagrama e uma lista organizada”.

Em seguida, foi deixado na lousa apenas as distâncias d_1, d_2 e d_3 para mostrar o uso do conteúdo de Progressão Aritmética (P. A.), pois foi o que os sujeitos buscaram como forma de resolução. Foram destacadas a razão da P. A., o primeiro termo e a necessidade de encontrar o último termo, o d_8, pela expressão do termo geral. Depois disso, foi calculada a soma dos termos da P. A. Porém, o pesquisador destacou que era necessário subtrair metade do valor de

d_8, ou seja, retirar a volta ao poço, apenas do resultado da soma total das distâncias. A resolução final ficou assim:

$$razão = 20m$$
$$a_1 = d_1 = 10$$
$$a_n = d_8 = \ ?$$

$$d_8 = d_1 + (n-1).q$$
$$d_8 = 10 + (8-1).20$$
$$d_8 = 10 + 7.20$$
$$d_8 = 150\ (ida\ e\ volta)$$

$$S_8 = \frac{(d_1 + d_8).n}{2}$$
$$S_8 = \frac{(10 + 150).8}{2}$$
$$S_8 = \frac{160.8}{2}$$
$$S_8 = 640$$

$$640 - 75 = 565$$

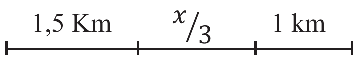
R: A distância a ser percorrida é de 565 metros.

Posteriormente, o sujeito S3 disse: *se eu fizesse só de jeito eu não ia enxergar que era 565. Eu só enxerguei porque você fez daquele jeito.* Por fim, o pesquisador destacou que a estratégia era de "estabelecer uma equação".

SEGUNDO ENCONTRO (31/03): Discussão das estratégias de resolução

Neste encontro, deu-se continuidade às atividades as quais estavam voltadas para a resolução de problemas. Assim, o problema 3 era o seguinte: *Depois que um pedestre viajou 1 km e meio do seu percurso, ele ainda tinha ⅓ de todo o percurso e mais 1 km para viajar. Qual é a distância de todo o percurso?*

Todos os sujeitos conseguiram resolvê-lo e indicaram que o fizeram apenas pela forma algébrica. A isso, o pesquisador acrescentou um diagrama, conforme segue abaixo.



$$x = \text{percurso}$$

$$x = 1{,}5 + \frac{x}{3} + 1$$
$$x = 2{,}5 + \frac{x}{3}$$
$$x - \frac{x}{3} = 2{,}5$$
$$\frac{2x}{3} = 2{,}5$$

$$x = \frac{2{,}5.3}{2}$$
$$x = \frac{7{,}5}{2}$$
$$x = 3{,}75$$

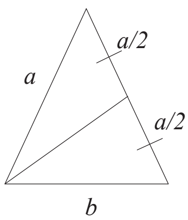
R: A distância de todo o percurso é de 3,75 km.

Foi destacada a necessidade de colocar a resposta e foi dado nome a estratégia utilizada: "uso de diagrama e equação". Logo em seguida, foi perguntado o que eles estavam percebendo de novidade nos problemas que estávamos discutindo.

> S3: Ah, as estratégias que nós estamos falando.
> Pesquisador: Isso, as estratégias!

O problema 4 era o seguinte: *Em um triângulo isósceles, uma das medianas divide seu perímetro em duas partes: 12 cm e 9 cm. Determine os lados do triângulo*.

Verificou-se que todos os sujeitos conseguiram resolver e pela mesma estratégia, encontrando duas respostas, conforme apresentado por S4: *chegamos em duas respostas*. A resolução feita pelo pesquisador em lousa seguiu as indicações dos sujeitos de como tinham resolvido.



$$\begin{cases} a+\dfrac{a}{2}=9 \\ b+\dfrac{a}{2}=12 \end{cases} \Rightarrow \left\{\dfrac{3a}{2}=9\right. \Rightarrow \{a=6 \Rightarrow \left\{b+\dfrac{6}{2}=12\right. \Rightarrow b=9$$

$$\begin{cases} a+\dfrac{a}{2}=12 \\ b+\dfrac{a}{2}=9 \end{cases} \Rightarrow \left\{\dfrac{3a}{2}=12\right. \Rightarrow \{a=8 \Rightarrow \left\{b+\dfrac{8}{2}=9\right. \Rightarrow b=5$$

R: Os lados do triângulo são 6, 6 e 9 ou 8, 8 e 5, em centímetros.

Depois de ter resolvido os dois sistemas de equações, o pesquisador perguntou se estava faltando alguma coisa para concluir. O S4 respondeu: *a resposta.*

Em seguida, o pesquisador escreveu na lousa alguns conceitos importantes (perímetro, mediana, sistema, triângulo isósceles) que fizeram parte do problema 4 e destacou que quando o aluno desconhece um desses conceitos, isso acaba por prejudicar o sucesso na resolução do problema. Para os sujeitos S3 e S4, a primeira situação que o aluno deve identificar é que se trata de um triângulo isósceles.

Um dos grandes problemas que pode ocorrer no ensino e na aprendizagem não é apenas o fato de o aluno desconhecer os conceitos envolvidos, mas de o professor também desconhecê-los. Neste caso, a falta ou dificuldade em um **conhecimento do assunto da matéria** (SHULMAN, 1986, 1987), no caso, de um conteúdo de Matemática, adequado pode diminuir ou impossibilitar que o professor exerça um ensino baseado na resolução de problemas, justamente pela dificuldade em discutir conceitos importantes.

Para encerrar a discussão dessa estratégia, o pesquisador destacou que o desenho feito, isto é, o triângulo isósceles, a mediana pedida no problema e a colocação das letras é o que o aluno deve fazer corretamente, o que corresponde a "representação do problema".

> Pesquisador: O aluno tem que saber fazer uma representação CORRETA do problema. Que é o início de quando olhamos para os dados... assim como a gente fez lá... por exemplo, nós resolvemos o número 1. O número 1 tinha que saber que era uma proporção e estabelecer uma proporção corretamente. Então, representar isso aí. O problema das árvores, por exemplo, se você não estabelecer uma representação correta de início, o resto (da resolução) você faz errado. Se você não sabe onde ficam as árvores, onde fica o poço, você acaba fazendo errado. O grande critério da resolução de um problema é o que? É fazer uma boa representação. Ali, se eu tivesse desenhado um triângulo eqüilátero, por exemplo, iriam ficar *a*, *a* e *a* (os lados). No caso, iria errar.

Por fim, foi perguntado que tipo de estratégia poderia ser a do problema 4 e ninguém respondeu. Foi colocado na lousa: "desenhar uma figura e estabelecer uma equação".

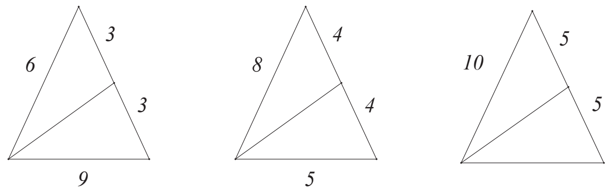
Daí, o pesquisador mostrou outra forma de resolver, desenhando três triângulos isósceles na lousa e buscando atribuir valores a um dos lados para tentar achar os outros. Para o primeiro triângulo, os sujeitos S1 e S4 perceberam como tinha que ser pensado para resolver esse problema. Já S3 se esqueceu de levar em consideração as condições do problema quando mencionou o valor quatro e meio para um dos lados do triângulo.

> S1: Pode por nove. Mas não tem... daí demora mais...
> S4: Você vai achar todas as possibilidades e depois identificar quais possibilidades se enquadram quando eu somo um lado do perímetro que dá doze e o outro que dá nove.
> S3: A possibilidade é seis e seis de um lado. Ou quatro e meio e quatro e meio né, que vai ser igual?

Não levar em consideração as condições mencionadas no problema pode direcionar a pessoa a realizar uma forma incorreta de **representação do problema**. Essa etapa do processo de resolução de problemas envolve interpretação e compreensão por parte de quem resolve uma determinada situação e é crucial para poder obter a resposta (CHI; GLASER, 1992; STERNBERG, 2000).

Após os sujeitos terem concluído que o número quatro e meio, na forma decimal, não seguia as condições do problema e o pesquisador ter explorado isso em lousa, mostrou-se, no segundo triângulo, como ficaria a outra solução do problema (8cm, 8cm e 5cm) e também no terceiro triângulo uma possibilidade errada de solução, pois a soma 10 + 5 resultava em 15 e não em 12 ou 9 como refletia a condição do problema. A resolução ficou assim:

Condição:12 e 9



R: Os lados do triângulo são 6, 6 e 9 ou 8, 8 e 5, em centímetros.

O pesquisador também falou sobre exemplos com números que não davam certo como sete e cinco para o maior lado. A intenção era que os sujeitos entendessem e passassem a prestar atenção à condição do problema.

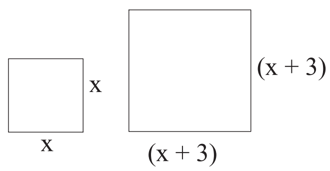
> Pesquisador: É esse raciocínio que eu queria mostrar. De saber isso aí. Se eu sei que é doze e nove, então eu posso fixar primeiro doze e depois nove. O de baixo (lado menor) vai sair naturalmente. Então, se continuasse, teria duas respostas. Talvez isso possa parecer complicado, mas os alunos podem fazer.

Assim, o pesquisador destacou que essa forma de resolver corresponde à estratégia de “supor e testar” ou mesmo “tentativa e erro”. Assim, comentou-se:

> Pesquisador: Essa estratégia vai aparecer. Para nós isso é uma estratégia e é válida. Aí a gente pode fazer o que? Discutir com o aluno essa forma de resolução e depois naquela forma que a gente fez, matemática (de sistema de equação). E podemos discutir essas coisas aqui: o que é triângulo isósceles, a questão do perímetro, o que é mediana, a resolução de sistemas. É nesse caminhar que nos interessa. Só aí já dá um retorno para o aluno. E levando em consideração o que ele fez. Quando eles resolverem desse modo (supor e testar), você poderia perguntar para o aluno: como você poderia chamar essa estratégia que você utilizou? Para os alunos nomearem a estratégia. Aí pode pedir para os alunos virem até a lousa colocar a estratégia ou falar para eles ditarem e você escreve na lousa. E depois mostrar a resolução na forma matemática, entendeu?

O comentário acima revela que o professor não apenas deve ter conhecimentos dos aspectos que envolvem o trabalho com a resolução de problemas em sala de aula, o que se direciona a um **saber da formação profissional**, isto é, pedagógico (TARDIF, 2007), mas também conhecimentos relativos ao **saber disciplinar** (GAUTHIER et al. 1998; TARDIF, 2007) para poder discutir e conduzir o ensino de conceitos matemáticos.

Em relação ao problema número 5, seu enunciado era o seguinte: *Cada lado de um quadrado é aumentado 3 cm e daí sua área é acrescida de 39 cm*^{2}. *Determine o lado do quadrado que é obtido*. Nesse problema, todos os sujeitos disseram que o lado do quadrado era cinco centímetros, considerando esse valor como a resposta. Isso pode ser verificado na resposta do S3: *isso quer dizer que o primeiro tinha dois. Aumentou três, ficou cinco*. Tal valor correspondia ao valor de x encontrado e não à resposta correta. A resolução feita em lousa, instigando a participação dos sujeitos, foi a seguinte:



$$A_2 - A_1 = 39$$
$$(x+3)^2 - x^2 = 39$$
$$x^2 + 6x + 9 - x^2 = 39$$
$$6x = 39 - 9$$
$$x = \frac{30}{6}$$
$$x = 5$$

$$Logo, (x+3) = (5+3) = 8$$

R: O lado do quadrado obtido tem medida de 8 cm.

O pesquisador propôs que o problema fosse resolvido na lousa e quando leu novamente o enunciado, destacou a pergunta, sendo que um dos sujeitos entendeu do que se tratava.

> S1: Ah, então daí é oito. É o segundo (quadrado)? Nós estamos falando do primeiro, o menor, o que era o quadrado inicial.
> Pesquisador: Mas qual era a pergunta?
> S1: A gente não coloca a resposta. A gente só coloca "x =" ((risos))
> Pesquisador: Você deve retomar a pergunta. Essa daqui é a parte matemática (x = 5). Tem que ver a parte referente à resposta.

O relato do sujeito S1 é um indicativo de que, possivelmente, as discussões realizadas no curso de Licenciatura em Matemática não estariam direcionando os licenciandos a escreverem e avaliarem a resposta final dos problemas.

No âmbito da resolução de problemas, o aspecto de se avaliar a resposta encontrada corresponde à realização da etapa do processo de resolução denominada de **monitoramento**

(BRITO, 2006). Nessa etapa, a análise da resposta é importante, pois permite verificar se o problema apresenta outras estratégias (STERNBERG, 2000) e, inclusive, se tem uma, várias ou mesmo nenhuma solução.

Assim, o pesquisador colocou a resposta na lousa: o lado do quadrado obtido tem medida de 8 centímetros. Em seguida, perguntou qual seria a estratégia de resolução que foi utilizada, mas ninguém respondeu. Nesse caso, era a de "desenhar uma figura e estabelecer uma equação". Esse problema foi finalizado com o pesquisador apenas dizendo que poderia utilizar a estratégia de "supor e testar", onde se poderiam colocar para o lado do quadrado menor, valores de x como um, dois, três, quatro etc. e relacionar com (x + 3), lado do quadrado maior, sem esquecer a condição de que a diferença entre as áreas é de 39 cm^2.

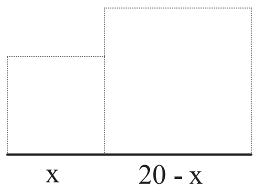
No início das duas aulas finais deste segundo encontro, o pesquisador perguntou se os sujeitos queriam resolver os problemas 6 e 7 para em seguida realizarmos uma discussão e depois retomaríamos os outros problemas. Porém, eles quiseram resolver todos primeiro e depois realizar a discussão.

Pela primeira vez, um deles quis ir até a lousa mostrar como havia feito o que denominou de exercício. No entanto, a vontade desse sujeito, assim como de outros, era apenas de terminar logo com as tarefas.

> S3: Deixa eu fazer um exercício?
> Pesquisador: Você vai fazer o seis?
> S3: Eu vou. Daí vai mais rápido. Óh, cada um faz um hein! Eu só vou fazer, mas não vou falar nada, ta bom? Só vou escrever, não vou falar nada.
> Pesquisador: Pode ser.
> S2: Vamos fazer em conjunto que é mais rápido.

O problema número 6 era o seguinte: *Um segmento de 20 cm de comprimento é dividido em dois segmentos e um quadrado é construído em cada um deles. Encontre o comprimento destes segmentos, sabendo-se que a diferença das áreas dos quadrados obtidos é igual a 40* cm^2.

O sujeito S3 resolveu corretamente na lousa, utilizando a estratégia de uma figura (diagrama) e equação e colocou a resposta. A resolução ficou assim:



$$
\begin{aligned}
A_2 - A_1 &= 40 \\
(20 - x)^2 - x^2 &= 40 \\
400 - 40x + x^2 - x^2 &= 40 \\
-40x &= 40 - 400 \\
x &= \frac{-360}{-40} \\
x &= 9
\end{aligned}
$$

$$Logo, (20 - x) = (20 - 9) = 11$$

R: O comprimento dos segmentos são 9 cm e 11 cm.

Após a resolução feita em lousa, os sujeitos se posicionaram com dúvidas em relação à interpretação do problema que realizaram.

> S1: Eu não entendi como é que faz. Eu divido o “x” em quatro (gesticulando com a mão) ou faço em cima (gesticulando com a mão)?
> S2: Fazer “x” sobre quatro? Mas aí não dá certo. Mas aqui (problema) já fala: construir em cima deles e não por cada um deles.
> S4: Você só tem um segmento. Como vai construir um quadrado se você não tem os outros três lados?
> S3: Com cada eu não sei, mas por cada não pode ser. ((risos))

Nisso, o pesquisador leu outra vez o problema e destacou: “um quadrado é construído em cada um deles”. Depois de questionado se a condição fosse “com cada um”, os sujeitos concordaram que a resolução seria como feita pelo S3 na lousa.

> Pesquisador: E se fosse “com cada um”?
> S2: Aí sim. Se fosse “com”, aí sim eu acho que seria por quatro.
> S1: Porque se você fala com cada um deles aí sim... você faz um quadrado com ele.
> S2: Aí sim é essa cara (gesticulando o segmento formando quadrado)
> S1: Porque com o pedaço de segmento você vai fazer um quadrado. A primeira vez que eu tentei eu dividi por quatro. Agora que eu sei eu faço direto desse jeito. ((risos)).

Nisso, o diálogo continuou:

> Pesquisador: Mas assim, se fosse “com cada um”, poderia pensar num arame... o importante é que tenha uma discussão e que vocês podem elaborar um problema. Podem até mudar. Pegar esse problema e deixar mais fácil para o aluno.
> S2: Poderia ser assim: falar que o lado de cada quadrado é um segmento. Aí não divide.

> S3: O segmento formado é o lado do quadrado.
> Pesquisador: Mas não seria muito direto?

Nessa pergunta do pesquisador, os sujeitos ficaram em silêncio. Assim, continuou:

> Pesquisador: O bom do problema é a interpretação. De verificar como o aluno interpreta. Será que é por quatro ou será que fica em cima?
> S3: Mas aí fica subjetivo, eu acho.
> S1: Ambíguo, né?

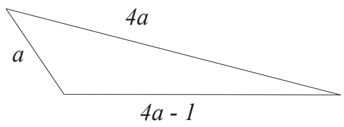
Toda essa discussão envolveu aspectos da etapa da **representação do problema**, relacionados à interpretação e à compreensão do problema. De forma particular, envolveu a utilização de **conhecimento semântico** (MAYER, 1992), ou seja, conhecer o significado do termo matemático “segmento” e utilizá-lo corretamente nessa etapa.

Em seguida o pesquisador questionou: *Que estratégia poderia ser esta?* Mas ninguém respondeu. O sujeito S3 mostrou ter mais pressa em acabar as tarefas.

> S3: Viu como foi rápido? Posso fazer a oito? Deixa eu fazer a sete, também?
> S4: A gente deixa.
> Pesquisador: Vamos ver, primeiro, como vocês fizeram o problema sete.

A formação do licenciando em Matemática não é apenas prejudicada se for conduzida por meio de abordagens inadequadas como, por exemplo, pelo modelo da “racionalidade técnica” (FIORENTINI; SOUZA JR.; MELO, 1998), mas também se o próprio estudante de Licenciatura em Matemática demonstrar desinteresse ou pressa para constituir saberes oriundos ao **conhecimento pedagógico do conteúdo** (SHULMAN, 1986), relacionados, neste caso, ao trabalho com a resolução de problemas.

O problema seguinte, de número7, tinha o seguinte enunciado: *O perímetro de um triângulo é 35 cm. Um de seus lados é 4 vezes maior que o segundo lado e 1 cm mais comprido que o terceiro lado. Qual é o comprimento de seus lados?* Este problema foi resolvido pelo sujeito S3, na lousa, o qual foi o primeiro a nomear a estratégia realizada. Ele a chamou de “representação geométrica e equação”. A resolução realizada foi a seguinte:



$$a + 4a + 4a - 1 = 35$$
$$9a = 35 + 1$$
$$a = \frac{36}{9}$$
$$a = 4$$

$$Logo, 4a = 4.4 = 16\ e\ (4a - 1) = (4.4 - 1) = 15$$

R: O comprimento de seus lados são 16 cm, 4 cm e 15 cm.

O pesquisador aproveitou essa resolução para destacar a representação correta, por meio de uma figura, que foi realizada pelo sujeito S3, e quando perguntou se tinham entendido o que é a representação, ninguém respondeu. Assim, o pesquisador explicou:

> Pesquisador: Quando você lê o problema, você tem as frases que trazem as informações. Nesse caso, está me permitindo criar uma figura, uma representação de uma figura. Na representação dessa figura, quando você utiliza essas letras e números para representar esses lados, se você faz uma representação coerente, você acaba tendo uma resolução coerente e chega na resposta. Uma coisa é que a figura dá suporte. Por exemplo, o problema número dois, que era para calcular as árvores plantadas a cinco metros, às vezes, se você não faz uma representação, não consegue entender. Tem gente que não consegue resolver direto (só com equação) sem fazer uma representação (no caso, uma figura) para ter como apoio. Mas tem gente que faz direto (só com equação (problema sete)). Aí ele utiliza só a equação como estratégia.

Essa etapa de representação de um problema pode permitir ao professor analisar a **representação simbólica** (MENDES, 2009) dos alunos, uma vez que ao resolver um problema, utilizam símbolos matemáticos, representações escritas sobre o que sabem de Matemática. Anterior a isso, destaca-se que o uso ou não de uma figura para ajudar a resolver um problema é decorrente da **representação mental** (MENDES, 2009) do aluno, ou seja, corresponde ao modo como internalizou sobre essa resolução. Na visão de Mayer (1992), essa representação mental sugere ter conhecimentos **linguístico**, **semântico** e **esquemático** que possam permitir à pessoa compreender o problema.

Por fim, a discussão desse problema foi encerrada quando o pesquisador destacou que outras estratégias poderiam ser utilizadas como, por exemplo, “supor e testar” ou “construção de tabela”.

TERCEIRO ENCONTRO (16/04): Discussão das estratégias de resolução

Neste encontro, continuando ainda com as atividades de resolução dos problemas propostos, vale destacar que o sujeito S2 não esteve presente.

Logo no início dessas aulas, o pesquisador voltou a enfatizar aos sujeitos as atividades a serem desenvolvidas no Curso sobre Resolução de Problemas. Destacou-se que parte delas seria a resolução de problemas para discussão das estratégias e das dificuldades encontradas. A outra parte seria o de analisar o que diz a literatura sobre como conduzir o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas. Acrescentou-se que essa parte teórica seria importante, pois, junto do aprendido com a resolução dos problemas, ajudaria os sujeitos a construir os três planos de aula (aritmética, álgebra e geometria) para o estágio de regência. O sujeito S4 perguntou:

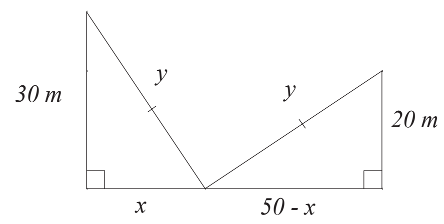
> S4: É isso que eu estou achando estranho. Vou entrar no trabalho do professor. Porque se ele está dando equação ou outra coisa, vou dar aritmética?
> Pesquisador: Por isso que você deve conversar com o professor. Para ver o que ele está dando de conteúdo para os alunos e para você poder se encaixar nisso.

Esse questionamento do sujeito S4 está relacionado à ausência de parceria entre escola e universidade, situação que tem dificultado, entre outras coisas, a inserção de estagiários na escola e a realização de atividades planejadas no horário das aulas do professor.

A pesquisa de Oliveira (2011) mostrou que, quando essa parceria é estabelecida, os licenciandos em Matemática podem contar com a participação dos professores da escola, os quais lhes propiciam, entre outros espaços, oportunidades de realizar o ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos para desenvolver atividades de estágio, o que contribui para a formação desses futuros professores.

Posteriormente, iniciou-se a discussão do problema 8, cujo enunciado era: *Nas margens de um rio crescem duas palmeiras, uma defronte à outra. A altura de uma delas é 30 m e a da outra, 20 m. A distância entre os dois troncos é de 50 metros. Na copa de cada palmeira está pousado um pássaro. De repente, os pássaros percebem um peixe que aparece na superfície da água, entre as duas palmeiras. Os pássaros se lançaram sobre o peixe, com a mesma velocidade, e o alcançaram ao mesmo tempo. A que distância do tronco da palmeira maior apareceu o peixe?*

O pesquisador perguntou aos sujeitos como começaram a resolver o problema. Os sujeitos presentes nesse encontro, S1, S3 e S4, responderam que haviam desenhado. Nisso, o pesquisador iniciou a representação do problema com a ajuda dos sujeitos, a qual ficou assim estabelecida:



Durante a realização dessa figura acima, um dos sujeitos evidenciou uma dificuldade.

> Pesquisador: Que mais a gente sabe do problema?
> S3: Na copa de cada palmeira está pousado um pássaro. Na hora, sabe que eu fiquei em dúvida? Eu não sabia onde era a copa da palmeira. Juro mesmo! Não consegui fazer por causa disso. É lógico que eu imaginei, né?

Essa dificuldade que o sujeito evidenciou ter no momento em que resolvia o problema pode estar relacionada à falta do **conhecimento linguístico** sobre o significado de "copa da palmeira". Para realizar a representação de um problema, é necessário não apenas conhecer o significado de termos matemáticos – **conhecimento semântico** – mas também outras palavras envolvidas da língua portuguesa (MAYER, 1992).

Além disso, esse tipo de dificuldade apresentada pelo licenciando é a mesma que muitos alunos da escola básica sentem quando se deparam com palavras que não conhecem. A pesquisa de Moura (2007), que implementou um programa de intervenção a alunos da quarta série do Ensino Fundamental (atualmente, designada de 5º ano), buscou justamente sanar dificuldades, entre outras, quanto à compreensão do problema no que diz respeito ao acesso ao léxico, à semântica e à sintaxe. As dificuldades relacionadas à compreensão do problema também foram identificadas pelo pesquisador desta tese quando atuou como professor da escola básica.

Posteriormente, o pesquisador perguntou se a figura construída estava coerente. O sujeito S3 respondeu: *parece que sim*. Nisso, o pesquisador comentou:

> Pesquisador: Isso aqui é uma coisa importante. Como já foi falado em outra aula, chamasse representação (escrevendo na lousa). Representação do problema. Quando você faz uma boa representação do problema, você tem aí uma boa porcentagem de chance de acertar esse problema.

Em seguida, o pesquisador perguntou qual estratégia eles utilizaram para resolver, porém um dos sujeitos, S3, relatou o procedimento de cálculo utilizado: *a gente (S1 e S3) calculou as diagonais (hipotenusa dos dois triângulos formados). Depois é só igualar e encontrar o resultado*.

No âmbito das fases/etapas de resolução de problemas, estratégias e procedimentos de cálculo se inserem em etapas diferentes, portanto, são conhecimentos diferentes. Enquanto a primeira se insere na etapa de planejamento, envolvendo **conhecimento estratégico**, ou seja, encontrar um caminho para resolver o problema (viso-pictórico, lógico-verbal ou ambas (KRUTETSKII, 1976)), o segundo se insere na fase de execução, onde é necessário **conhecimento procedimental** para se realizar de forma correta os cálculos empregados na resolução (MAYER, 1992).

Na lousa, o pesquisador escreveu a resolução feita por esses sujeitos, conforme mostrado abaixo.

$$y^2 = 30^2 + x^2 \quad e \quad y^2 = (50 - x)^2 + 20^2$$

$$30^2 + x^2 = (50 - x)^2 + 20^2$$
$$900 + x^2 = 2500 - 100x + x^2 + 400$$
$$100x = 2900 - 900$$
$$x = \frac{2000}{100}$$
$$x = 20$$

R: O peixe apareceu a uma distância de 20 m do tronco da palmeira maior.

Quando foi obtido o valor de x = 20, perguntou-se aos sujeitos se estava faltando alguma coisa para concluir a resolução. O sujeito S4 respondeu: *falta a resposta*. Perguntou-se, também, qual seria o nome da estratégia utilizada. O aluno S3 respondeu: *estratégia é a representação por desenho e de formar equação*. Essa resposta estava de acordo com a estratégia apresentada pelo pesquisador: “desenhar uma figura e estabelecer uma equação”.

Posteriormente, o pesquisador perguntou se daria para resolver de outro jeito. O aluno S4 respondeu: *não sai por semelhança de triângulos?* Desse modo, os sujeitos mostraram dúvidas sobre qual caso de semelhança seria.

> S4: Só que eu não sei. Nem sei se dá certo. Dois ângulos iguais... dois lados iguais...
> S3: É lado, ângulo, lado. É isso? Acho que dá para fazer por congruência.
> S4: Na verdade é ângulo, ângulo e... ângulo ((risos)).
> S1: O lado, lado, lado tem, mas acho que ângulo, ângulo e ângulo não. (dizendo para S4)
> S3: É o corolário do teorema de ângulo, ângulo e ângulo.

O pesquisador disse aos sujeitos que o que se tem de comum nos dois triângulos é um lado de mesma medida (as hipotenusas) e um ângulo reto, o que não correspondia a nenhum caso de semelhança conhecido que pudesse determinar uma proporção correta, envolvendo os lados desses triângulos.

Nesse caso, partiu-se da suposição de que os triângulos seriam congruentes. Assim, seriam semelhantes, mas, particularmente, a proporção entre seus lados correspondentes seria de razão igual a "um". Tendo em vista essa suposição, perguntou-se aos sujeitos qual relação poderia ser estabelecida entre os lados dos triângulos. Ninguém respondeu nada, sendo que, em seguida, o pesquisador perguntou:

> Pesquisador: O 30 que seria o cateto maior estaria para quem?
> S4: (50 – x)
> Pesquisador: Tenho uma fração. E tudo vai virar uma proporção.
> S4: x está para 20.
> Pesquisador: Isso.

A resolução ficou assim:

$$\frac{30}{50-x} = \frac{x}{20}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$30.20 = (50-x).x$$
$$600 = 50x - x^2$$
$$x^2 - 50x + 600 = 0$$

$$x = \frac{-(-50) \pm \sqrt{100}}{2.(1)} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{50+10}{2} = 30 \\ x = \dfrac{50-10}{2} = 20 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-50)^2 - 4.(1).(600)$$
$$\Delta = 2500 - 2400$$
$$\Delta = 100$$

R: O peixe apareceu a uma distância de 20 m do tronco da palmeira maior

Após ter encontrado dois valores, x = 20 e x = 30, o pesquisador questionou sobre qual seria a resposta correta. O sujeito S3 respondeu: *só substituir em "x" de um lado e de outro*. Para discutir essa situação, o pesquisador fez o seguinte questionamento:

> Pesquisador: Substituindo o "x" por 30, o que iria acontecer lá no desenho?
> S1: Daí as duas distâncias não seriam iguais. (hipotenusas)
> Pesquisador: Se fosse x = 30, então aqui (hipotenusa) seria trinta raiz de dois. E se aqui (50 – x) fosse 20, então essa outra hipotenusa seria menor. Então estaria errado.
> S3: Menor! Acho que ficou melhor assim para entender.

Analisar as duas respostas encontradas (x = 20 e x = 30) correspondeu à fase de **monitoramento** (STERNBERG, 2000), última etapa do processo de resolução de problemas, o que possibilitou verificar as suas racionalidades, segundo os dados do problema.

Por fim, encerrou-se a discussão dessa estratégia colocando-se o nome: "desenhar uma figura e estabelecer uma equação".

Posteriormente, abordou-se o problema 9, o qual era o seguinte: *Num quintal há 20 animais, entre porcos e galinhas. Sabe-se que há, no todo, 64 pés. Quantos são os porcos e quantas são as galinhas?* Este problema também foi resolvido em lousa pelo sujeito S3. A resolução ficou assim:

$p \rightarrow porco$

$g \rightarrow galinha$

$$\begin{cases} p + \ \ g = 20 \\ 4p + 2g = 64 \end{cases} \Rightarrow p = 20 - g$$

$$\begin{aligned} 4p + 2g &= 64 \\ 4(20 - g) + 2g &= 64 \\ 80 - 4g + 2g &= 64 \\ -2g &= 64 - 80 \\ g &= \frac{-16}{-2} \\ g &= 8 \end{aligned}$$

$$Logo, p = 20 - 8 \Rightarrow \ p = 12$$

R: São 12 porcos e 8 galinhas.

Quando terminou a resolução, o sujeito S3 não colocou a resposta, apesar de saber qual era a pergunta do problema. Alguns de seus colegas chamaram-lhe a atenção para essa questão, o que evidenciou uma característica importante do processo de resolução de problemas, relacionada à necessidade de avaliar a resposta encontrada (STERNBERG, 2000).

> S3: O que está perguntando? Ah, quantos são os porcos e quantas são as galinhas. Pronto, já respondi!
> S4: Resposta, dois pontos!
> S1: Resposta! É verdade, quando eu era criança as professoras me faziam fazer esse tipo de coisa. “R”, dois pontos.
> S3: Nossa! Na escola tem que fazer isso mesmo?
> Pesquisador: Sim! Tem que analisar a racionalidade da resposta.

Em seguida, o pesquisador perguntou qual seria a estratégia que foi utilizada. O sujeito S3 respondeu: *equação*. Como todos só resolveram por essa estratégia, foi perguntado se teria outro jeito de resolver, baseado nas estratégias aprendidas até aquele momento. O sujeito S3 mostrou sua dúvida sobre isso: *Tem outro jeito ainda?* Nisso, o pesquisador disse que poderia ser por meio geométrico, por meio de um gráfico, e utilizou parte do que o S3 fez para apresentar essa estratégia.

> Pesquisador: Vamos pegar o que você fez, S3. Porco mais galinha ($p + g = 20$). Vamos colocar a galinha em função do porco: $g = 20 - p$ e $g = 32 - 2p$. Então temos duas funções. Se eu construir um plano cartesiano, como fica a primeira função?
> S3: Linear.

Nisso, o pesquisador construiu as duas retas que representam cada uma das funções, conforme o gráfico 1, abaixo. Foi perguntado se era possível saber as coordenadas da intersecção das duas retas por meio da construção de ambas. Os sujeitos S4 e S3 responderam que seriam 12 e 8 os valores, mas apoiados no sistema de equações que tinha acabado de ser resolvido. Todos os sujeitos não se atentaram para o fato de que a construção do gráfico com as retas dependia das medidas estabelecidas nos eixos do plano cartesiano, os quais acabariam revelando os dois valores que formam o ponto de intersecção entre elas, conforme o gráfico 2, abaixo.

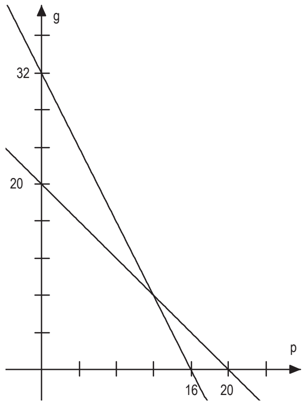


Gráfico 1

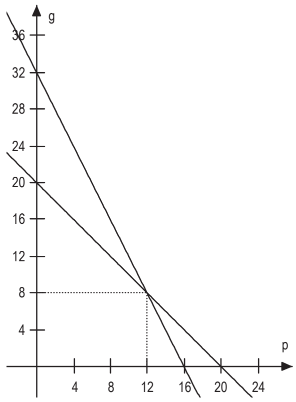


Gráfico 2

O pesquisador destacou a importância da abordagem desse tipo de estratégia.

> Pesquisador: Você pode usar um problema desse tipo para discutir até isso aqui. Você pode propor para eles (alunos) tentarem resolver assim (graficamente) e discutir o conteúdo (geometria analítica), quando for tratá-lo em sala de aula. Pode analisar quando há intersecção, quando é vazia a intersecção etc. Quando vocês forem trabalhar, o que vale é a discussão. Essa estratégia eu vou chamar de "construir um gráfico".

O uso de um mesmo problema para discutir outros conteúdos de Matemática pode ajudar os alunos na compreensão desses conteúdos, uma vez que eles podem ser levados a relacionar o problema a várias ideias matemáticas presentes e mesmo construir uma relação entre essas ideias (SCHROEDER; LESTER, 1989).

Posteriormente, o pesquisador destacou que poderia ter sido utilizada a estratégia de "supor e testar", a qual os sujeitos estavam denominando de "tentativa e erro", onde poderiam avaliar valores dados a quantidade de porcos e galinhas, mas sem se esquecer da quantidade de pés. No entanto, o sujeito S3 preferia a estratégia da "equação", a qual ele utilizou para resolver o problema 9: *o sistema é mais rápido*.

É importante destacar que o uso, em sala de aula, de determinadas estratégias apenas por ser "mais rápido" pode acabar se configurando na única forma de se desenvolver o ensino, levando os alunos a entenderem que resolver problemas implica em mecanismos que os levem de forma imediata à solução (ECHEVERRÍA; POZO, 1998), situação que não corresponde ao trabalho com a resolução de problemas.

Em seguida, abordamos o problema número 10: *Cem chocolates foram distribuídos entre três grupos de crianças. O segundo grupo de crianças recebeu 4 vezes a quantidade de* *chocolates dada ao primeiro grupo. O terceiro grupo recebeu 10 chocolates a mais do que o segundo grupo. Quantos chocolates receberam o primeiro, o segundo e o terceiro grupos?* Este problema não foi resolvido pelos sujeitos. Assim, o pesquisador o leu novamente e perguntou qual estratégia das que foram vistas até aquele momento poderia ser utilizada. Os sujeitos S1 e S3 responderam: *por equação*.

No entanto, antes de abordar essa estratégia, o pesquisador perguntou se poderia montar uma tabela de valores, mas ninguém respondeu nada. Assim, mostrou como isso poderia ser feito.

> Pesquisador: O primeiro não é x? Depois 4x e depois o que? (escreveu um do lado do outro, na lousa, e montou uma tabela).
> S1: 4x + 10.
> Pesquisador: Onde seria melhor eu começar a dar valores? Para x, 4x ou 4x + 10?
> S1: Acho que pra x.

O pesquisador colocou para “x” o valor 2 e o sujeito S3 percebeu uma condição importante do problema que era o total de chocolates: *não dá 100 a soma*. Desse modo, foi atribuído o valor para “x” de 5 e a soma deu 55. Foi atribuído o valor de “x” de 15 e a soma deu 145, acima de 100. Isso foi feito para mostrar aos sujeitos que devem se atentar às condições de um problema, o que implica no uso de **conhecimentos linguístico**, **semântico** e **esquemático** para realizar uma correta **representação do problema** (MAYER, 1992).

Por fim, atribuiu-se para “x” o valor igual a 10 e verificou-se que a soma dava 100. A resolução abaixo evidencia a estratégia utilizada: “montar uma tabela”.

x	**4x**	**4x + 10**	**Total**
2	8	18	28
5	20	30	55
10	40	50	**100**
15	60	70	145

R: O primeiro grupo recebeu 10 chocolates, o segundo grupo recebeu 40 chocolates e o terceiro grupo recebeu 50 chocolates.

Após a realização dessa estratégia, voltou-se a estratégia da "equação", mencionada no início. Assim, o pesquisador montou a equação que resultava dos dados do problema e encontrou o valor x = 10. A resolução foi a seguinte:

$1^{\underline{o}}\ grupo \rightarrow x$

$2^{\underline{o}}\ grupo \rightarrow 4x$

$3^{\underline{o}}\ grupo \rightarrow 4x + 10$

$$\begin{aligned} x + 4x + (4x + 10) &= 100 \\ 9x &= 100 - 10 \\ x &= \frac{90}{9} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

$$Logo, \begin{cases} 4x = 4.10 = 40 \\ (4x + 10) = (4.10 + 10) = 50 \end{cases}$$

R: O primeiro grupo recebeu 10 chocolates, o segundo grupo recebeu 40 chocolates e o terceiro grupo recebeu 50 chocolates.

Por fim, o pesquisador destacou aos sujeitos que eles poderiam trabalhar com a estratégia da "tabela" e não somente com a da "equação", a qual seria uma forma mais direta que o ensino estaria abordando. O sujeito S1 perguntou se isso poderia ser considerado também como "tentativa e erro" e o pesquisador respondeu que sim, destacando que conhecendo as várias estratégias possíveis, o professor pode enxergar mais longe para discutir os problemas em sala de aula.

Posteriormente, o pesquisador entregou uma folha, contendo outros problemas para serem resolvidos, os de número 11 ao 19. Foi sugerido que os sujeitos resolvessem, primeiro, os problemas números 11 e 12.

Durante a resolução, que estava ocorrendo em duplas, um dos sujeitos evidenciou uma preocupação pelas estratégias.

> S1: Tem alguma estratégia que pode usar? (conversando com o S3)
> Pesquisador: Isso! A gente já pode começar a pensar assim: das estratégias que a gente já fez, qual pode ajudar agora? Assim, eu já sei o conteúdo de Matemática que vai utilizar, eu posso resolver por equação, mas eu vou tentar encontrar outra estratégia para resolver.

Após terem resolvido, iniciou-se a discussão do problema 11: *A mãe de Jesse pagou a mesada de 1 dólar e 60 centavos em moedas de 0,25, 0,10 e 0,05. Ele recebeu ao todo 17 moedas. Quantas moedas de cada valor a mãe lhe deu?*

> Pesquisador: Que resposta vocês encontraram no problema 11?
> S3: Eu não sei fazer.
> S1: Eu achei 5 moedas de cinco centavos, 11 de dez centavos e 1 moeda de vinte e cinco.
> S4: Eu não achei nenhuma.
> Pesquisador: Mas você (S1) fez mais tentativas?
> S1: Ah eu fiz, mas aí tava dando ou muito pra baixo ou muito pra cima (a soma para dar 160), daí eu parei.

Nisso, o pesquisador propôs a resolução por meio da construção de uma "tabela" e como primeira tentativa de atribuição de valores, utilizou as quantidades de moedas mencionadas pelo sujeito S1.

Para confirmar se estavam corretas, calculou-se o produto do valor de cada moeda pela sua respectiva quantidade, somando-se os valores (25.1 + 10.11 + 5.5), o que resultou na soma correta da mesada que era de 160 centavos. Além disso, a soma da quantidade de moedas obtidas foi de 17 moedas, situação correta. É importante destacar que essa resposta não tinha sido encontrada pelo pesquisador.

Apesar dessa estratégia, os sujeitos mostraram interesse em conhecer uma resolução baseada em fórmulas do conteúdo envolvido.

> S3: Ah, mas eu quero a equação que dá isso aí.
> S1: Eu também.
> S4: Eu quero o determinante da matriz.

Em seguida, continuou-se a discutir sobre outras possibilidades de resposta para o problema 11.

> Pesquisador: Olha, para qual moeda é melhor a gente começar a dar um valor?
> S1: A de 25 é melhor.
> Pesquisador: Qual valor a gente poderia colocar?
> S4: Dois.
> S1: Dois.
> Pesquisador: Então esse produto é 50.
> S4: Sobrou 1 dólar e 10 centavos (valor que faltava para completar o 160 centavos)

Como se pode perceber, a condição de resultar em soma total de 160 centavos foi entendida pelos sujeitos. No entanto, a outra condição, do total de 17 moedas, apareceu durante a discussão e a terceira condição foi relembrada pelo pesquisador.

> S3: Ah é fácil. Dá para fazer 10 moedas de 10 centavos pra dar 1 dólar, e aí 2 (de cinco centavos).
> S1: Mas tem que ter o número de moedas.
> S3: Ah é, verdade!
> S1: Tem que dar 17 moedas. Isso que é difícil, pesquisador!
> Pesquisador: Isso é uma condição do problema. Tem que dar 17 moedas. E dar 160 centavos. Não pode perder essas duas de vista. E tem que aparecer uma de cada! Não pode zerar.

Desse modo, fixando quantidades para a moeda de 25 centavos e depois manipulando os possíveis valores para as de 10 e 5 centavos, encontrou-se, com isso, três possibilidades de quantidades de moedas para satisfazer o problema. A resolução final ficou assim:

$\rightarrow 17\ moedas$

$\rightarrow Pelo\ menos\ uma\ de\ cada$

$\rightarrow Total\ de\ 1\ dólar\ e\ 60\ centavos = 160\ centavos$

25	**10**	**5**	**Total de moedas**	**Total da soma**
1	11	5	17	160
2	7	8	17	160
3	3	11	17	160

R: A mãe de Jesse lhe deu 1, 11 e 5 ou 2, 7 e 8 ou 3, 3 e 11 moedas de 25, 10 e 5 centavos, respectivamente.

Tendo em vista essa estratégia que foi utilizada, o sujeito S3 disse: *Ai que legal! Nossa, não é que meio óbvio. Eu só enxerguei agora porque está feito. Mas quanto mais moedas de 25, mais a chance de... não vai dar muito, mas o 4 vai dar um (1 dólar)... o 5 vai dar 125 e o 6 vai dar... 150. Acabou! Aí já era! Para 6 já era e para 5 já mata, porque ainda vai faltar muita moeda.*

O gosto desse sujeito pela estratégia é um indicativo de que, possivelmente, o curso de Licenciatura em Matemática que frequentava estaria destinando pouco trabalho com formas de resolver problemas dessa natureza. Na formação, é importante que o futuro professor possa desenvolver saberes docentes referentes ao conhecimento pedagógico para ensinar e aprender Matemática (TARDIF, 2007; SHULMAN, 1986).

Assim, o pesquisador perguntou qual estratégia poderia ser essa.

> Pesquisador: Essa estratégia seria o que?
> S3: Tentativa e erro? Construção de tabela?
> S1: Deve ser os dois, né?
> Pesquisador: A estratégia, no caso aqui, pode ser uma tabela com tentativa e erro sim.

Posteriormente, o sujeito S4 perguntou se daria para fazer algebricamente. O pesquisador respondeu:

> Pesquisador: Para isso eu preciso estabelecer uma equação. O que eu sei do problema? Eu tenho moedas de 25, 10 e 5 centavos. Mas o que "amarra" esses valores?
> S1: A quantidade de moedas.
> Pesquisador: E tem que dar 160! Eu consigo montar uma equação com essas informações?
> S3: Veremos!

As equações obtidas ficaram assim:

$$\begin{cases} x + y + z = 17 \\ 25x + 10y + 5z = 160 \end{cases}$$

> Pesquisador: Isso aqui é um sistema. E eu já sei a solução do sistema, o tipo.
> S3: Quando um tá em função do outro é SP... I.
> S1: Eu tenho duas equações e três incógnitas.
> Pesquisador: Isso! Eu já sei que eu tenho várias soluções. A pessoa vai aprendendo matemática e vai vendo que isso (tipo de sistema de equações) mostra que tem mais valores.
> S3: Que são aquelas dali? (as respostas encontradas pela estratégia da tabela)
> Pesquisador: sim, aquelas dali.

Desse modo, o pesquisador resolveu, com as indicações dos sujeitos, o sistema de equações.

$$\begin{cases} x + \quad y + \ z = 17 \quad \mathrm{x}(-25) \\ 25x + 10y + 5z = 160 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \quad y + \quad z = \quad 17 \\ 0x - 15y - 20z = -265 \end{cases}$$

$$-15\,y = -265 + 20z$$

$$y = \frac{-265 + 20z}{-15}$$

$$y = \frac{53 - 4z}{3} \quad (I)$$

$Substituindo\ (I)\ na\ equação\ abaixo$:

$$x + \quad y \quad + z = 17$$

$$x + \left(\frac{53 - 4z}{3}\right) + z = 17$$

$$\frac{3x + 53 - 4z + 3z}{3} = \frac{51}{3}$$

$$3x = -2 + z$$

$$x = \frac{z - 2}{3}$$

$$S = \left\{\left(\frac{z-2}{3};\ \frac{53 - 4z}{3};\ z\right)\right\}$$

Encontrado o conjunto solução do sistema, o pesquisador destacou que para saber quais são as possibilidades, deve-se montar uma tabela e atribuir valores a x, y e z. Para tirar a prova, foi pego cada uma das possibilidades e testadas nesse conjunto solução. Por fim, foi destacado que essa resolução diz respeito à estratégia da “equação”, sendo necessária, posteriormente, a da “tabela”.

Em seguida, abordou-se o problema 12: *Existem 16 times de futebol, em cidades diferentes, na Liga Continental de Futebol. Para coordenar os jogos entre os times, cada cidade deve ter uma linha telefônica instalada, ligando-se diretamente às demais, para poder se comunicar com os times das outras cidades. Quantas linhas telefônicas devem ser instaladas pela empresa telefônica, conectando as cidades?*

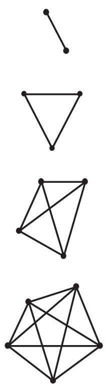
Dois sujeitos disseram como tinham resolvido. O sujeito S3 resolveu por meio de uma P. A. (Progressão Aritmética) e o sujeito S4 resolveu por meio das diagonais de polígonos.

> S3: A 1 (cidade) vai ligar em todas as outras menos nela, certo? Ela vai ligar em 15 cidades. A 2 (cidade) vai ligar em... 14 cidades, porque ela já está ligada na 1. A 3 (cidade) já vai ligar em 13 cidades, porque ela já está ligada na 1 e na 2. Isso dá uma P.A. de razão 1 e a soma dessa P. A. é a quantidade de linhas que ela tem que utilizar.
> Pesquisador: Que são?
> S3: 120.

> S4: Eu fiz por diagonais. Em polígonos.
> Pesquisador: Foi assim que você fez?
> S4: Na verdade eu não fiz assim, eu pensei nisso. É que eu não estava conseguindo deduzir a fórmula da diagonal. Eu pensei assim e daí no final você achava as diagonais, que dava 104 diagonais. Só que depois você tem que pensar que quando está trabalhando com diagonal, você não pega os vizinhos. Ou seja, você está trabalhando com um coletivo, com 16 assim

> (gesticula um círculo com a mão), sempre não pega os dois vizinhos. Então, você vai ter que conectar uma linha em cada um, que é o que tá faltando, que são 16 linhas. Então, 104 mais 16 linhas que estavam faltando, que são 120.
> Pesquisador: Essa estratégia pode ser a da "dedução lógica".

Após isso, o pesquisador disse que tinha outro jeito de resolver e que seria por meio de casos particulares. Com a participação dos sujeitos, montou uma tabela de valores, a partir do desenho de pontos que representavam as cidades e a partir de segmentos de reta que representavam as linhas telefônicas: *Quando a cidade é uma, quantas linhas eu tenho? Quando eu tenho duas cidades? Quando eu tenho três? Quando eu tenho quatro, é seis. E assim por diante. E aí eu preciso saber quantas linhas eu vou ter. (coloca na lousa os três pontinhos) na décima sexta cidade*. A parte inicial da resolução ficou assim:



2 cidades
1 linha

3 cidades
3 linhas

4 cidades
6 linhas

5 cidades
10 linhas

cidades	**linhas**
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
⋮	⋮
n	?

O pesquisador destacou que a intenção era o de tentar estabelecer um padrão. Mais precisamente, o de encontrar uma expressão matemática que generalizasse esses dados.

> Pesquisador: O que eu quero é o número de linhas em função de quem?
> S4: Das cidades.
> Pesquisador: A minha cidade de alguma forma tem que participar da expressão, não tem? Eu tenho que encontrar uma expressão, do mesmo jeito que você (S4) tentou achar para diagonais.

Desse modo, o pesquisador repete a coluna do número de cidades ao lado da tabela construída e repete a colunas das linhas, formando um espaço entre elas onde se possa pensar em uma expressão matemática. A representação ficou assim:

cidades	linhas		
1	0	$\rightarrow 1$	$= 0$
2	1	$\rightarrow 2$	$= 1$
3	3	$\rightarrow 3$	$= 3$
4	6	$\rightarrow 4$	$= 6$
5	10	$\rightarrow 5$	$= 10$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	?	$\rightarrow n$	$= ?$

O pesquisador questionou os sujeitos sobre como poderia operar com os valores do número de cidades de modo a obter uma expressão matemática que levasse aos respectivos valores dos números de linhas: *O meu n é sempre o valor que eu vou colocar, pois a expressão depende do número de cidades. Quando eu colocar a 16º cidade aqui em n, eu vou obter o número de linhas. Como eu posso criar uma expressão que resulte nesses valores de linhas aqui?*

Os sujeitos S1 e S3 pensaram apenas nos valores do número de linhas. O sujeito S3 respondeu: *do 0 por 1 dá 1. Do 1 pro 3 dá 2. Do 3 pro 6 dá 3. Do 6 pro 10 dá 4. Tá aumentando de um em um*. Para ajudar, o pesquisador direcionou-os para os valores de n: *se eu pegar o 3, quem eu multiplico o 3 que dá 3?* Depois de várias tentativas dos sujeitos, S1 percebeu a expressão: *não é, pesquisador, (n – 1) dividido por 2, para multiplicar? E já generalizando pro último dá n(n – 1)/2*.

Com isso, a resolução ficou assim:

$$1\,.\left(\frac{0}{2}\right) = 0$$
$$2\,.\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$
$$3\,.\left(\frac{2}{2}\right) = 3$$
$$4\,.\left(\frac{3}{2}\right) = 6$$
$$5\,.\left(\frac{4}{2}\right) = 10$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$n\,.\frac{(n-1)}{2} = ?$$

$$Para\; n = 16$$
$$n\,.\frac{(n-1)}{2}$$
$$16.\frac{(16-1)}{2}$$
$$\frac{16.15}{2} = 120$$

R: Devem ser instaladas 120 linhas telefônicas.

Depois de terminado, os sujeitos conversaram entre si sobre como haviam feito e o sujeito S3 demonstrou gostar da estratégia apresentada pelo pesquisador: *ah, gostei!* A estratégia é nomeada pelo pesquisador como "construção de tabela e encontrar um padrão". Desse modo, explicou:

> Pesquisador: A estratégia é essa: a tabela, pegando casos particulares e encontrar um padrão. Por exemplo, isso poderia ser resolvido com a fórmula da diagonal como o S4 fez, mas teria que dar a expressão da diagonal direto para o aluno. Aqui desse modo não. Você construiu com eles. Esse é um caminho para você mostrar para o aluno como ele pode chegar na expressão. Aí ele pode fazer por si mesmo. Nesse caso, a gente tem que criar uma situação que relacione o *n* e a resposta.

Além de possibilitar ao aluno construir relações entre ideias matemáticas ao resolver um problema (SCHROEDER; LESTER, 1989), o ensino que direciona o aluno a encontrar um padrão pode contribuir para que desenvolva habilidades para fazer generalizações, o que favorece o desenvolvimento do pensamento matemático (CHARLES, 1985).

QUARTO ENCONTRO (28/04): Aspectos teóricos da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática

Para dar início à discussão teórica sobre o ensino-aprendizagem da Matemática por meio da resolução de problemas, foi abordada a parte introdutória, *A solução de problemas como conteúdo da educação básica*, do texto *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender* de Echeverría e Pozo (1998).

O pesquisador propôs que fosse feita uma leitura em grupo do referido texto introdutório e que os sujeitos grifassem os trechos que considerassem mais importantes, referentes aos aspectos sobre resolução de problemas. Porém, finalizada a leitura, nenhum deles havia grifado trecho algum.

Desse modo, o pesquisador apontou passagens do texto, sendo que muitos dos comentários foram relacionados com os problemas resolvidos: *lembram que quando eu resolvia os problemas eu falei de representação? Eu escrevia no canto: representação. Ou seja, o aluno que consegue fazer uma representação adequada do problema tem muito mais chance de resolver corretamente o problema.*

A representação de um problema corresponde à primeira etapa de resolução de problemas e está relacionada à interpretação e à compreensão da situação, as quais orientam a busca de procedimentos apropriados que ajudam na resolução (CHI; GLASER, 1992).

De modo geral, nesse texto, o pesquisador tratou da diferença entre problemas e exercícios. Um dos trechos discutidos foi o seguinte: *uma situação que um indivíduo ou um grupo quer e precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução (p. 15).* Destacou-se que esse caminho rápido estaria relacionado ao que conhecemos como exercícios.

Assim, foi perguntado aos sujeitos se eles resolveram de forma direta os problemas resolvidos até aquele momento e responderam que não. Também foi perguntado o que seria para eles resolver um exercício e o sujeito S4 respondeu: *só a aplicação imediata do que a gente já viu. De algum conceito. Agora, tem exercício que pode ser um problema pra gente. Porque às vezes a gente quer resolver e não consegue ((risos)).*

Conforme apontou Schoenfeld (1985), ser um problema depende da relação entre a pessoa e a tarefa que ela tenta resolver. A resolução pode ser difícil ou não. Assim, se o indivíduo carece de conhecimentos necessários à resolução (**linguístico**, **semântico, esquemático, estratégico** e **procedimental** (MAYER, 1992)), então, consequentemente, a tarefa pode se tornar um problema.

Desse modo, o pesquisador descreveu como exemplo a aprendizagem da fórmula do cálculo das diagonais de um polígono, sendo que quando esta é dada e depois se cobra a sua utilização sucessiva em outros polígonos para encontrar suas diagonais estamos realizando algo imediato e mecânico (ECHEVERRÍA; POZO, 1998). Em seguida, o sujeito S3 relatou: *é o que eu falei. Se você faz exercício você já sabe... de antemão.*

O pesquisador também destacou que as estratégias de resolução de problemas fazem uso do que se aprende com os exercícios. Nesse caso, técnicas e fórmulas matemáticas precisam ser articuladas para compor uma essas estratégias. Enfatizou-se que a montagem de uma tabela, seguida do uso de uma equação ou outras fórmulas matemáticas, proposta na resolução de alguns problemas do Curso sobre Resolução de Problemas, reflete a uma estratégia.

Desse modo, sobre a utilização dos exercícios em sala de aula, todos concordaram que é importante. O sujeito S3 relatou: *eu acho que é um mecanismo pra resolver um problema. Pra ficar mais maduro na resolução de problemas é um bom mecanismo*.

Para esclarecer a relação que os problemas e exercícios deveriam ter no ensino de Matemática em sala de aula, o pesquisador destacou: *Então, você parte de um problema. Pode discutir a estratégias que os alunos utilizaram. Pode discutir isso com eles vindo até à lousa. Depois você pode adentrar no conteúdo. Trabalhar a parte conceitual. E você pode lançar mão dos exercícios e depois tratar de novos problemas, entenderam? E pode avaliar como o aluno se comporta nisso*.

Nisso, o sujeito S3 questionou: *se você dá um problema e você verifica que aquilo para os alunos é um exercício, então a sua técnica de dar uma aula usando a resolução de problemas foi em vão, porque eles não precisam nem pensar, não é?*

O pesquisador respondeu que quando se propõe tarefas aos alunos eles podem saber resolver ou não, pois isso depende de como os alunos combinam conceitos e procedimentos na busca da solução (BRITO, 2006). Caso eles saibam resolver, é importante elaborar novas atividades que cobrem a tomada de decisão sobre quais estratégias podem ser utilizadas.

Assim, foi enfatizado que o problema 12, dos times e linhas telefônicas, se trabalhado de forma a possibilitar aos alunos a encontrar um padrão, favorece a capacidade de generalização (CHARLES, 1985).

Dando continuidade às questões teóricas propostas no curso, o pesquisador fez uma apresentação aos sujeitos sobre o significado de problema na perspectiva de vários autores e sua diferença em relação aos exercícios. Foi utilizado o recurso multimídia para fazer a apresentação dos *slides*.

No início da apresentação, foi destacado que um problema tem um sentido relativo, pois depende do indivíduo que o resolve. A esse respeito, o sujeito S3 perguntou: *não tem como fazer um problema pra não ter esse sentido relativo? Se propor um problema e pra um é e pra outro não... Ou então faz que nem eu: ontem eu fiz um problema e já que era pra ser difícil, foi difícil pra todo mundo ((sorriu)). Entendeu?*

O pesquisador apontou a necessidade de evitar propor tarefas de Matemática que fiquem muito longe do nível de conhecimento dos alunos. Nisso, o sujeito S3 respondeu: *mas* *aí que tá. O nível deles é relativo também. Então, esse é o problema. Ou faz muito difícil pra ninguém fazer ou faz fácil que todo mundo faz.*

A ideia do sujeito S3 de que o problema proposto deve ser fácil para todos ou difícil não corresponde ao fato já mencionado de que ser um problema depende dos conhecimentos dos alunos (MAYER, 1992; BRITO, 2006). Além disso, depende do interesse da pessoa em tentar resolvê-lo. Assim, esses dois aspectos podem levar a pessoa a resolver um problema, um exercício ou nenhuma dessas situações (ECHEVERRÍA; POZO, 1998).

Em outro *slide*, foram mostradas duas tarefas de Matemática, as quais tinham sido utilizadas nas entrevistas iniciais com alguns sujeitos. A primeira a ser mostrada foi a seguinte: *João foi ao armazém comprar 3 caixas de coca-cola. Se cada caixa contém 6 garrafas, quantas garrafas de coca-cola João comprou?* Todos os sujeitos indicaram-na como um exercício, mas que dependia do aluno, conforme pode ser percebido na fala do sujeito S4: *se o aluno não souber, e for um problema, ele pode fazer uma representação das garrafinhas, desenhando e tal*.

Em seguida, foi mostrada a outra tarefa, a qual já havia sido trabalhada durante a resolução dos problemas (problema 11): *A mãe de Jesse pagou a mesada de 1 dólar e 60 centavos em moedas de 0,25, 0,10 e 0,05. Ele recebeu ao todo 17 moedas. Quantas moedas de cada valor a mãe lhe deu?* Todos os sujeitos disseram que se tratava de um problema. O sujeito S1 relatou: *pra nós foi até um problema*.

Em *slide* posterior, onde se tratava da resolução de problemas e da resolução de exercícios, o sujeito S3 mencionou como pensa que poderia ser feito o ensino em sala de aula: *exercício você tem que dar uma lista e ele faz em casa. Por isso eu acho que eles perdem tempo, entre aspas. Na sala de aula eles fazem resolução de problemas e em casa eles fazem exercícios sozinhos. Quando eles chegarem na escola, no outro dia, tem que saber aquilo sobre exercícios pra solucionar os problemas*.

Essa situação evidencia que o sujeito S2 levou em consideração o modo como se aprende um exercício e como ocorre o processo de resolução de problemas. Desse modo, no ensino, o aluno pode ser levado a entender que os problemas exigem mais do que um exercício repetitivo (ECHEVERRÍA; POZO, 1998).

Após isso, apresentaram-se os últimos *slides* e encerrou-se a apresentação.

Na sequência, logo no início das duas aulas finais deste quarto encontro, foi cobrado dos sujeitos um trabalho (lista com questões) referente ao texto e *slides* apresentados anteriormente. Eles deveriam fazer em casa e entregar em aulas posteriores e o objetivo era compor uma nota para a disciplina da qual foram liberados para a pesquisa.

Em seguida, foram propostas a leitura e discussão do segundo texto, *A solução de problemas em Matemática*, de Echeverría (1998), atendo-se nas seguintes seções: (a) *A solução de problemas no currículo de matemática; (b) Sobre os diversos significados de resolver um problema; (c) Tipos de problemas no ensino de matemática; (d) Ensinar a resolver problemas: uma tarefa docente diferente.*

No início da leitura, o pesquisador chama a atenção para o fato de que muitos professores da escola básica usam o termo problema sem saber do que realmente se trata: *o professor acha que está dando problema e está dando exercício. Ele acaba confundindo a questão de usar estratégia e tal. Ele chama exercício de problema. Fala que está solucionando problemas. Ele está é resolvendo exercícios*.

Essa situação que envolve a falta de conhecimento dos professores na abordagem da resolução de problemas no ensino foi evidenciada por várias pesquisas (RODRIGUES, 2008; MIGUEL, 2010; MORELATTI et al., 2010; REDLING, 2011). Esse tipo de ensino pode ser caracterizado como **ensinar para resolução de problemas**, pois implicaria na aplicação posterior, tanto em problemas como exercícios, do conhecimento matemático aprendido. (SCHROEDER; LESTER, 1989).

Depois de lido um trecho sobre a dificuldade em se utilizar os vários tipos de problemas em sala de aula, o pesquisador comentou: *essa parte mostra o que? Que não é fácil trabalhar com resolução de problemas. No começo é difícil. Apesar do curso que vocês estão tendo, é preciso mais tempo para ter um domínio e entender melhor como isso acontece*. Em seguida, o sujeito S4 sustentou essa ideia lendo uma passagem do texto: *quando fala aqui também, "se não permitirmos que os alunos resolvam problemas adequados ao seu nível de conhecimento, será praticamente impossível que eles elaborem e utilizem esse tipo de estratégias".*

Em uma leitura do texto que envolveu o fato de que muitos professores sabem tanta Matemática que acabam não prestando atenção ao nível de dificuldade das tarefas que propõe aos seus alunos, os sujeitos acabaram evidenciando seguir essa mesma ação. O sujeito S3 relatou: *eu não quero isso pra mim. Mas se um dia eu precisar dar aula de matemática na faculdade... acho que não é precisar... conseguir chegar lá. Nossa! "neguinho" vai ter que ralar muito pra passar*.

Segundo Roldão (2007), atualmente, o ensino não pode ser direcionado a transmitir um saber, ou seja, não basta colocar informação para que o aluno aprenda. Para essa autora, a função de ensinar consiste na organização de um conjunto de ações que façam com que o aluno aprenda, adquira saber e se apropriem de alguma coisa.

Por fim, encerrou a leitura do texto e os alunos não mencionaram nenhuma dúvida.

Dando continuidade ao trabalho com a literatura sobre o tema, o pesquisador fez uma apresentação de *slides* aos sujeitos denominada de “A resolução de problemas no ensino de Matemática”, cujo conteúdo foi baseado no texto de Schroeder e Lester (1989), *Developing understanding in mathematics via problem solving*, destacando-se as noções de ensino *sobre, para e via/através* da resolução de problemas para favorecer o entendimento de Matemática. Além disso, tratou-se de pontos importantes no ensino como, por exemplo, propor problemas com mais de uma solução.

Quando foi abordado o ensino *para* resolução de problemas, o qual indica que primeiro se aprende os conceitos, técnicas e algoritmos matemáticos com a finalidade de utilizá-los posteriormente na resolução dos problemas, o sujeito S2 perguntou: *a gente estuda assim, não é?* Em seguida, o sujeito S1 destacou: *esse é o jeito que a gente estuda. Até aqui na faculdade também, não é?*

Apontou-se que essas duas perguntas realmente tinham uma resposta afirmativa, pois muitas das maneiras adotadas para formar o licenciando seriam utilizadas por este como um modelo no ensino na escola básica. Esse tipo de formação proporciona, muitas vezes, uma dissociação entre teoria e prática e tem sido entendida como o modelo da **racionalidade técnica**, o qual favorece uma formação teórico-técnica para depois ser aplicada na prática, situação que nega a teoria para a reflexão dessa prática e, assim, dificulta a construção de saberes docentes (FIORENTINI; SOUZA JR.; MELO, 1998).

Apesar disso, perguntou-se a eles como poderiam articular o ensino *via* resolução de problemas com os ensinos *sobre* e *para*. Nenhum deles se manifestou.

Assim, antes de falar sobre essa articulação, perguntou-se aos sujeitos do que deveríamos partir para ensinar um tópico matemático e o sujeito S4 respondeu: *de um problema*. Desse modo, o pesquisador destacou o ensino *para* resolução de problemas: *aí, por exemplo, você deu um problema, discutiu as estratégias, adentrou no conteúdo, ensinou técnicas e deu exercícios e depois deu outros problemas para resolver. Essa parte de exercícios e técnicas, antes desses outros problemas, acaba sendo o ensino para resolução de problemas*.

Por fim, o pesquisador destacou por que o ensino *sobre* resolução de problemas também se articularia com os outros dois no ensino: *porque vai chegar um momento que o aluno vai ter que saber que ele tem que compreender o problema. Vai ter que criar uma estratégia, executar essa estratégia e fazer uma avaliação do que fez*.

Conforme apontou Brito (2006), ao resolver um problema, o aluno se engaja nas fases/etapas de resolução: representação, planejamento, execução e monitoramento, o que leva esse aluno a gerar um processo cognitivo que desencadeia a tentativa de articular conceitos, princípios e procedimentos na busca da solução. Assim, além de favorecer ao aluno a compreensão da resolução de problemas, permite ao professor observar e analisar o comportamento desse aluno, auxiliando-o em suas habilidades (KLAUSMEIER; GOODWIN, 1977).

QUINTO ENCONTRO (05/05): Aspectos teóricos da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática

Neste encontro, dedicou-se as duas primeiras aulas à leitura e discussão de um último texto, *A solução de problemas como conteúdo procedimental da educação básica*, de Pozo e Angón (1998). Foram abordadas as seguintes seções: (a) *A solução de problemas como conteúdo procedimental: técnicas e estratégias. (b) O ensino da solução de problemas. (c) A solução de problemas no ensino fundamental e no ensino médio.*

Entre os vários assuntos que constavam nas seções, discutiu-se sobre os processos psicológicos que estavam envolvidos na aquisição de estratégias de resolução de problemas, a relação das estratégias com as técnicas matemáticas e, ainda, a própria distinção entre problema e exercício.

Sobre o fato de uma tarefa se configurar ou não como um problema para um aluno, o sujeito S3 argumentou: *se for um exercício repetitivo, para ela não é um problema. Mesmo que tenha a fórmula, um problema que ele não saiba identificar e substituir as coisas nem parece um problema. No entanto, não sei nessa perspectiva, mas não é um problema!* E relacionou essa fala com seu estudo em uma disciplina da graduação: *Porque nem as fórmulas eu não sabia resolver, de Cálculo, ano passado! ((sorriu)). Entendeu a ideia? É minha dificuldade.*

A abordagem de exercícios corresponde a uma forma imediata de chegar à solução, a seguir um modelo onde a tradução da tarefa se direciona diretamente em uma representação matemática (CHARLES; LESTER, 1992 apud SCHROEDER; LESTER, 1989).

Sendo essa a única argumentação feita durante a leitura das seções, o final dessas duas primeiras aulas acabou servindo para discutir sobre a realização das regências de aula, onde se enfatizou e esclareceu, mais uma vez, que os sujeitos deveriam elaborar três Planos de Aula, sendo um de aritmética, um de álgebra e um de geometria.

Dando sequência às questões teóricas sobre o tema, nas duas aulas finais deste encontro, o pesquisador fez uma apresentação de *slides* aos sujeitos sobre *As etapas de resolução de problemas* na perspectiva de vários autores, salientando o uso das estratégias de resolução. Além disso, destacou as implicações e ações no ensino de Matemática por meio da resolução de problemas.

O pesquisador relacionou as etapas de resolução de problemas com os problemas que foram resolvidos até aquele momento. A mais evidente era a da obtenção de uma estratégia para resolver os problemas, um dos focos do curso. Assim, as etapas que envolviam a representação, encontrar uma estratégia, executá-la e verificar a coerência da resposta encontrada foram teorizadas e exemplificadas, nos problemas resolvidos, durante nosso curso.

Ao ser apresentado os estágios de resolução de problemas de Mayer (1992), o sujeito S4 demonstrou dúvidas sobre a diferença entre conhecimento esquemático e estratégico: *deixa eu perguntar. Esquemático e estratégico não seriam a mesma coisa? Se você vai esquematizar, supostamente você já está criando uma estratégia pra resolver*. O pesquisador apontou que esquema se refere ao tipo de problema, citando, por exemplo, que um problema que envolva a ideia de probabilidade possui um esquema de problema de probabilidade. Nesse caso, a estratégia a ser utilizada não necessariamente precisa fazer uso de alguma fórmula matemática do conteúdo de probabilidade.

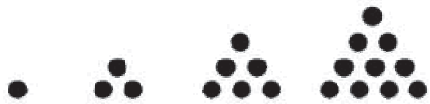
Finalizada a apresentação dos *slides* e não havendo perguntas por parte dos sujeitos, o pesquisador enfatizou que, quando eles forem professores, vão poder utilizar o que foi aprendido no curso para trabalhar com a resolução de problemas. Os sujeitos S1, S2 e S3 deixaram evidente que não seriam professores, como relatou o sujeito S1: *só no estágio, porque eu não quero ser professora*.

Por fim, foram cobrados mais dois trabalhos dos sujeitos (duas listas com questões), referentes aos dois últimos textos e duas últimas apresentações de *slides*. Tais trabalhos deveriam ser entregues nas aulas posteriores e tinham como objetivo compor uma nota da Disciplina de Prática de Ensino da qual foram liberados para a pesquisa.

SEXTO ENCONTRO (07/05): Discussão das estratégias de resolução

Neste encontro, foram retomadas as atividades de resolução de problemas. Trabalhou-se com os problemas de números 13 a 19, os quais os sujeitos deveriam ter feito em casa para, no curso, discutirmos as resoluções.

O problema 13 era o seguinte: *Um número que pode ser representado pelo padrão abaixo é chamado número triangular. Os quatro primeiros números são mostrados. Qual é o quinquagésimo número triangular?*



O sujeito S4 resolveu o problema montando uma tabela com os valores da posição dos números dados e seus respectivos valores de número triangular. No entanto, não tentou encontrar uma expressão matemática a partir da tentativa de estabelecer uma relação entre esses valores. Esse sujeito logo inferiu que se tratava de uma P. A. (Progressão Aritmética).

> S4: Ah, eu só listei lá. Peguei um. Depois, o segundo tem três elementos. O terceiro tem seis elementos. Aí, uma tabelinha. Eu tentei achar um padrão pra esses. O que é o três? (número triangular). É o um mais dois. Aí depois o seis é um mais o dois mais o três.
> Pesquisador: Que expressão você encontrou? Ou você descobriu direto?
> S4: Eu descobri que era uma P. A. de razão 1. Daí eu achei a fórmula do último termo, achei quem era o meu primeiro elemento e dividi por 2. Então, eu só achei a fórmula e daí é só colocar o 50.

Em seguida, o pesquisador montou uma tabela na lousa, estendendo as posições até a sétima e, com a ajuda dos sujeitos, colocou os números triangulares correspondentes a cada posição de tal forma que se pudesse encontrar um padrão, ou seja, uma expressão matemática que mostrasse qualquer número triangular a partir da posição, conforme já havia sido feito no problema 12. A tabela e a estrutura dos valores ficaram assim:

k (posição)	k-ésimo nº triangular		
1	1	$\rightarrow$ 1	= 1
2	3	$\rightarrow$ 2	= 3
3	6	$\rightarrow$ 3	= 6
4	10	$\rightarrow$ 4	= 10
5	15	$\rightarrow$ 5	= 15
6	21	$\rightarrow$ 6	= 21
7	28	$\rightarrow$ 7	= 28
⋮	⋮	⋮	⋮
k	?	$\rightarrow$ k	= ?

O pesquisador destacou: *lembram como eu tinha feito para encontrar uma expressão por meio de um padrão? Então, eu tenho que criar uma expressão que apareçam esses números (da posição) de tal forma que eu consiga esses valores (k-ésimo).*

Apenas o sujeito S1 utilizou a estratégia apontada pelo pesquisador para encontrar um padrão, mas só depois que não conseguiu obter sucesso por um caminho que escolheu.

> S1: Eu cheguei numa fórmula: n vezes (n + 1) sobre 2.
> Pesquisador: Por aqui (tabela) ou pela ideia do conteúdo, sabendo que é uma soma?
> S1: Primeiro eu fiz uma representação de série, que a_n é as somas parciais de k variando de 1 até n. Aí eu cheguei nisso e comecei a abrir e vi que isso não iria dar em nada. Aí eu voltei e comecei por aí (apontando para a estratégia da tabela que estava na lousa).
> Pesquisador: Então, como eu posso operar aqui entre a posição k para chegar no resultado que é o meu número triangular, multiplicando, somando valores etc.? Quem eu multiplico por 1 para dar 1, por exemplo?
> S1: Então, multiplico por 2/2 o 1, por exemplo. Aí vai chegar na minha conta.

Os sujeitos S2 e S4 comentaram que os alunos da educação básica teriam dificuldades para conseguir resolver o problema por meio dessa estratégia da "tabela". O sujeito S1 respondeu: *se ensinar eles aprendem, mas sozinhos eles não fazem*. Assim, o pesquisador destacou: *vocês devem direcioná-los (os alunos) para isso. Levá-los a entenderem que a partir de casos particulares eu posso obter uma expressão.*

A resolução final ficou assim estabelecida:

$$
\begin{aligned}
1\,.\left(\frac{2}{2}\right) &= 1 \\
2\,.\left(\frac{3}{2}\right) &= 3 \\
3\,.\left(\frac{4}{2}\right) &= 6 \\
4\,.\left(\frac{5}{2}\right) &= 10 \\
5\,.\left(\frac{6}{2}\right) &= 15 \\
6\,.\left(\frac{7}{2}\right) &= 21 \\
7\,.\left(\frac{8}{2}\right) &= 28 \\
\vdots\quad & \quad\vdots \\
k\,.\frac{(k+1)}{2} &= ?
\end{aligned}
$$

$$Para\ k = 50$$

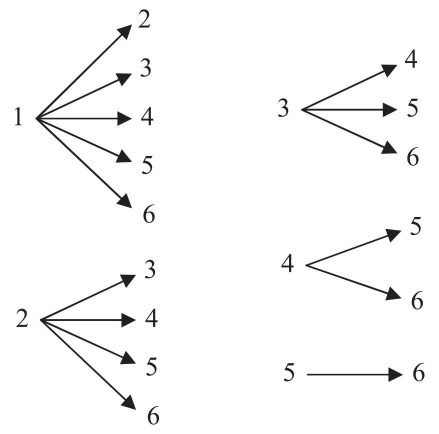
$$
\begin{aligned}
T_k &= k\,.\frac{(k+1)}{2} \\
T_{50} &= 50\,.\frac{(50+1)}{2} \\
T_{50} &= \frac{50.51}{2} \\
T_{50} &= 1275
\end{aligned}
$$

R: O quinquagésimo número triangular é o 1275.

Assim, o problema é finalizado com o pesquisador chamando a atenção para o fato de que a estratégia era a mesma do problema 12, sendo que o nome dessa estratégia utilizada também seria a mesma: analisando casos particulares, “montar uma tabela e estabelecer um padrão”. De forma mais simplificada, os sujeitos poderiam chamá-la de procurar um padrão ou generalizar, pois estes dois termos já davam a ideia do que deveria ser feito.

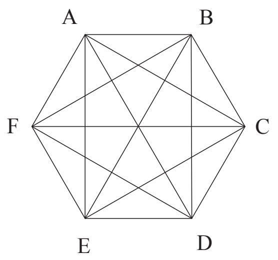
O problema 14 tinha o seguinte enunciado: *Na escola de tom há 6 times de basquete. Eles querem planejar um torneio para após as aulas, de maneira que cada time jogue uma única vez com todos os outros. Quantas partidas devem ser jogadas?*

Dois sujeitos fizeram de duas maneiras cada um, todas diferentes. O sujeito S4 utilizou “tabela” e “diagrama” (de flechas) e o sujeito S1 utilizou uma figura com a fórmula das diagonais de polígonos (“figura e equação”) e a fórmula de Combinação Simples. Naquele momento, o pesquisador pediu ao sujeito S4 que falasse da estratégia de diagrama e ao sujeito S1 que falasse da estratégia do uso da figura para que pudesse representá-las na lousa. A estratégia do sujeito S4 ficou assim:



R: Devem ser jogadas 15 partidas.

A estratégia do sujeito S1 foi o de construir um desenho de um hexágono para contar as diagonais e depois somar os lados: *cruzei as diagonais, só que aí eu contei mais os lados*. No entanto, as diagonais foram obtidas pela fórmula do número de diagonais: *daí eu usei a fórmula da diagonal e somei os lados. A fórmula é n(n – 3)/2 Dividido por 2 aí você não repete pares. Você pode ligar tudo.* A resolução ficou assim:



$$d_n = n.\frac{(n-3)}{2}$$

$$d_6 = 6.\frac{(6-3)}{2} = \frac{6.3}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

9 diagonais + 6 lados =15 possibilidades

R: Devem ser jogadas 15 partidas.

Em seguida, o pesquisador mostrou aos sujeitos uma estratégia utilizada por uma criança nesse problema. A Figura abaixo mostra a resolução.

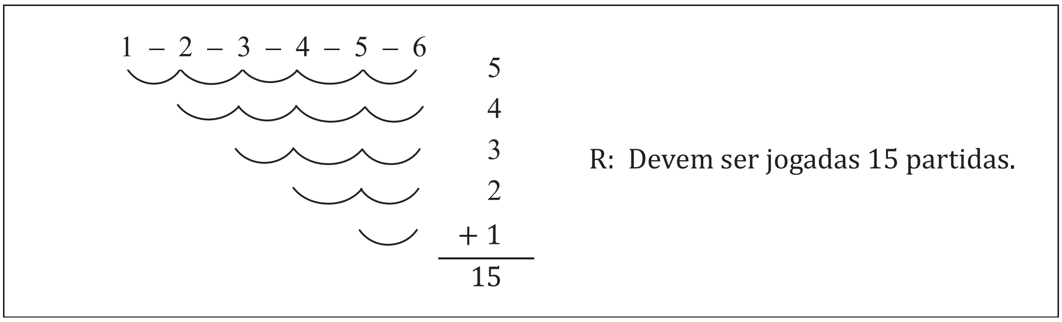


Figura 7: Estratégia de resolução (Extraído de Leblanc, Proudfit e Putt, 1997, p. 162).

Depois de colocada na lousa essa estratégia, a qual denominou de "diagrama", os sujeitos S1 e S2 disseram que a estratégia estava errada, pensando que com esse diagrama haveria repetição de duplas de times. No entanto, mudaram de ideia, conforme pode ser verificado abaixo:

> S2: Não vai sair do 1 para o 2, do 2 para o três e sim do 1 para o 2, do 1 para o 3 e assim por diante. Aí depois do 2 para o 3, do 2 para o 4, do 2 para o 5.
> S1: Isso! Eu entendi agora que o aluno tava fazendo. Ele tava indo do 1 para o 2, para o 3, para o 4. E depois do 2 para o 3, para o 4. É só o jeito dele desenhar.

No entanto, esse "jeito do aluno desenhar" parece que não seria levado em consideração pelo sujeito S3.

> S3: Se ele tivesse colocado 15 eu iria considerar certo. Se estivesse 14 eu daria errado, porque pra mim não tem como eu olhar o desenvolvimento matemático dele.
> Pesquisador: Mas você tem que conversar com ele.
> S3: Mas daí são outros quinhentos.

No trabalho com a resolução de problemas, o foco da aprendizagem deve ser o processo e não somente a resposta que os alunos encontram (POZO; ANGÓN, 1998). Desse modo, é necessário realizar uma discussão com eles sobre as estratégias que utilizaram, resumindo suas ideias, possibilitando-os a tirar conclusões apropriadas quando verificam a racionalidade da resposta encontrada (BURNS, 1982; CHARLES, 1990).

Em seguida, o pesquisador apresentou a estratégia da "lista". A resolução ficou assim:

$\underline{T1}$ $\underline{T2}$ $\underline{T3}$ $\underline{T4}$ $\underline{T5}$ $\underline{T6}$

$T2$ $T3$ $T4$ $T5$ $T6$
$T3$ $T4$ $T5$ $T6$
$T4$ $T5$ $T6$
$T5$ $T6$
$T6$

R: Devem ser jogadas 15 partidas.

Para encerrar a discussão do problema 14, o pesquisador apresentou a resolução por meio da fórmula de Combinação Simples para enfatizar a diferença entre aplicar uma fórmula e tentar resolver por outros meios.

$$C_{n,\ p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \Rightarrow C_{6,\ 2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{720}{2.24} = 15$$

A respeito do trabalho com a resolução de problemas em sala de aula, alguns sujeitos expuseram suas dúvidas.

> S1: No começo da aula eu posso dar aquele mesmo problema (problema 14), explico, analiso a estratégia e depois digo que dá pra resolver de outro jeito, que é... aquele mesmo problema eu consigo resolver pela fórmula?
> Pesquisador: Isso. O aluno ou vai conseguir fazer ou não vai conseguir. Isso vai acontecer. Pode ser que ele não consiga de nenhum jeito. Aí você pode incentivar a resolver assim (diagrama) e pedir que os alunos deem palpite.
> S3: A intenção é introduzir um conceito com um problema, que é a teoria.
> Pesquisador: Aí você destaca que foi feito dessa forma e dessa outra e que tem outro jeito que é esse com a expressão. Você pode dizer que se trata de Análise Combinatória e depois introduzir e discutir o conteúdo.
> S2: Não consigo pensar em um monte de problemas para cada conteúdo que eu vou dar.
> S1: Você procura (dizendo para S2) ((risos))
> S4: Inventa. ((risos))
> Pesquisador: Você pode verificar o que os alunos já aprenderam que eles podem utilizar nas estratégias.

Esse diálogo com os sujeitos levou em consideração evidenciar o trabalho, em sala de aula, com a Matemática, na perspectiva de **ensinar via resolução de problemas**, segundo a qual o ensino de um conteúdo matemático deve se iniciar pela abordagem de um problema (SCHROEDER; LESTER, 1989). Desse modo, os alunos deveriam ser direcionados a tomar suas próprias decisões sobre o caminho a ser seguido, o que permitiria identificar suas estratégias (POZO; ANGÓN, 1998).

Em seguida, abordou-se o problema número 15: *Havia 8 pessoas numa festa. Se cada pessoa apertou a mão de todas as outras, quantos apertos de mão houve no total?* Neste problema, os sujeitos utilizaram as estratégias de resolução já discutidas no problema 14, conforme destacou o sujeito S1: *mesma coisa. Dá pra fazer por Combinação. Porque ele não vai cumprimentar duas vezes a mesma pessoa.*

Assim, o pesquisador apenas reproduziu na lousa as duas estratégias que tinham sido apresentadas no problema 14.

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8

$$\begin{array}{r} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ +\,1 \\ \hline 28 \end{array}$$

R: Houve 28 apertos de mão no total.

$\underline{P1}$	$\underline{P2}$	$\underline{P3}$	$\underline{P4}$	$\underline{P5}$	$\underline{P6}$	$\underline{P7}$	$\underline{P8}$
$P2$	$P3$	$P4$	$P5$	$P6$	$P7$	$P8$	
$P3$	$P4$	$P5$	$P6$	$P7$	$P8$		
$P4$	$P5$	$P6$	$P7$	$P8$			
$P5$	$P6$	$P7$	$P8$				
$P6$	$P7$	$P8$					
$P7$	$P8$						
$P8$							

R: Houve 28 apertos de mão no total.

O problema 16 tinha o seguinte enunciado: *Susan quer comprar uma barra de doce bque custa 25 centavos. A máquina de doces aceita qualquer combinação de moedas de 1 centavo, 5 centavos e 10 centavos. Quantas combinações diferentes de moedas ela poderia usar para pagar seu doce?*

Todos os sujeitos montaram uma tabela como estratégia para resolver o problema, mas os sujeitos S1 e S2 foram os únicos que conseguiram encontrar todas as combinações. O sujeito S1 mencionou um aspecto importante sobre a atribuição de valores às moedas: *para a moeda de 1 centavo tem que ser no mínimo 5. Tem que ser múltiplo de 5.*

O pesquisador apontou que, diferentemente do problema 11, que tinha três restrições (total de 17 moedas; total de 160 centavos; mínimo de uma moeda de cada), o problema 16 apresentava apenas o valor total de 25 centavos, sendo que não era obrigatório o uso de todas as três moedas. A estratégia foi denominada de tabela. A resolução ficou assim:

1 centavo	**5 centavos**	**10 centavos**	**Total da soma**
0	1	2	25
0	3	1	25
0	5	0	25
5	0	2	25
5	2	1	25
5	4	0	25
10	1	1	25
10	3	0	25
15	0	1	25
15	2	0	25
20	1	0	25
25	0	0	25

R: Ela poderia utilizar 12 combinações diferentes de moedas de 1, 5 e 10 centavos.

Foi discutido se daria para fazer algebricamente. O pesquisador mais uma vez lembrou os sujeitos do problema 11, destacando que tinha várias condições e que no caso do problema 16 a única condição era relativa ao valor total de 25 centavos, sendo que isso ajudava a construir apenas a seguinte equação: $1x + 5y + 10z = 25$. O sujeito S1 destacou: *então, esse daí não tem outra condição*. De imediato os sujeitos perceberam que se tratava de várias soluções e que era necessário construir uma tabela de valores.

Posteriormente, tratou-se do problema 17: *Um homem pode pintar um quarto em 9 horas. Sua filha, trabalhando sozinha, pode pintar o quarto em 12 horas. Quanto tempo eles gastarão se trabalharem juntos?*

Apenas os sujeitos S2 e S4 tentaram resolver o problema. O sujeito S4 mencionou ter utilizado álgebra para montar uma equação, mas não obteve sucesso e não quis falar sobre o que tinha tentado fazer, apenas disse que: *mais de 4horas e meia, isso é óbvio*. O sujeito S2 também não quis vir até a lousa, no início, mostrar como tinha feito, mas apresentou como resposta o tempo de 5h 8min e 35 segundos, estando apenas o valor dos segundos incorreto, situação que resultou de um erro de divisão.

Apenas após o pesquisador ter construído uma tabela e mostrado como seria a resolução, na lousa, o sujeito S2 relatou como tinha resolvido. Para esse sujeito, encontrar um caminho de resolução foi difícil: *não foi imediato*.

> S2: Eu fiz até cinco horas, na tabela. Daí, como é 35/36 eu vi que faltava 1/36 que é o que dava. Aí eu coloquei z/9 + z/12 = 1/36. Você vai ver que são sempre iguais os numeradores. Aí chega nessa parte de 1/7 (que é a que resulta os minutos e segundos).

A resolução por meio da construção da tabela foi feita pelo pesquisador com a ajuda dos sujeitos e ficou da seguinte forma:

No final de:	**Parte do homem**	**Parte da filha**	**Parte total do trabalho**
1 hora	$^1/_9$	$^1/_{12}$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{7}{36}$
2 horas	$^2/_9$	$^2/_{12}$	$\frac{2}{9}+\frac{2}{12}=\frac{14}{36}$
3 horas	$^3/_9$	$^3/_{12}$	$\frac{3}{9}+\frac{3}{12}=\frac{21}{36}$
4 horas	$^4/_9$	$^4/_{12}$	$\frac{4}{9}+\frac{4}{12}=\frac{28}{36}$
5 horas	$^5/_9$	$^5/_{12}$	$\frac{5}{9}+\frac{5}{12}=\frac{35}{36}$
⋮	⋮	⋮	⋮
x horas	$^x/_9$	$^x/_{12}$	$\frac{x}{9}+\frac{x}{12}=\frac{36}{36}$
6 horas	$^6/_9$	$^6/_{12}$	$\frac{6}{9}+\frac{6}{12}=\frac{42}{36}$

A partir dessa tabela, o pesquisador evidenciou que quando se tinha seis horas, o trabalho total ultrapassava o valor do inteiro. Assim, era possível visualizar que o tempo a ser encontrado estava entre cinco e seis horas. Nesse caso, calculou-se a expressão para x horas.

$$\frac{x}{9}+\frac{x}{12}=\frac{36}{36} \Rightarrow \frac{4x+3x}{36}=\frac{36}{36} \Rightarrow 4x+3x=36 \Rightarrow 7x=36 \Rightarrow x=\frac{36}{7}$$

$$x=\frac{36}{7} \Rightarrow x=\frac{35+1}{7} \Rightarrow x=\frac{35}{7}+\frac{1}{7} \Rightarrow x=5+\frac{1}{7} \Rightarrow x=5+0{,}14$$

$$Logo,\ \ 0{,}14.1hora=0{,}14.60minutos=8{,}4\ min=8min\ e\ 0{,}4s.$$

$$Logo,\ \ 0{,}4.60s=24\ segundos$$

R: Eles gastarão, trabalhando juntos, 5 horas, 8 minutos e 24 segundos.

O pesquisador destacou que a resolução seguiu a estratégia da “tabela e equação”. Além disso, mostrou aos sujeitos que pela informação obtida pela primeira hora de trabalho era possível estabelecer outra equação, 1h/(7/36) = x/(36/36), a qual estava relacionada à ideia do que foi feito pelo sujeito S2.

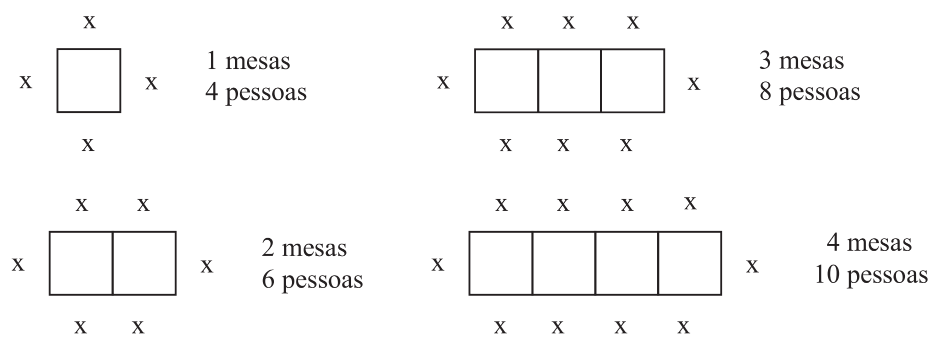
No problema 18, o enunciado era o seguinte: *O restaurante de Toni tem 30 mesas quadradas pequenas para serem usadas em um banquete. Cada mesa pode acomodar somente uma pessoa em cada lado. Se as mesas forem colocadas juntas para fazer uma mesa mais longa, quantas pessoas podem sentar à mesa?*

Somente o sujeito S3 não conseguiu resolver. Os sujeitos S1 e S2 pensaram da mesma forma para resolver, pela estratégia da “dedução lógica”.

> S2: Eu pensei que... são 30 mesas. Se você juntasse vai perder os dois lugares de 28 mesas. Então, 28 mesas vão ser de dois lugares e duas mesas vão ser três.
> S1: A única coisa que eu fiz foi tirando o... eu coloquei: eu perco um lugar, eu perco dois lugares. Aí tem menos 58 lugares. Eu sabia o valor total daí eu tirei.

O sujeito S4 pensou em casos particulares para encontrar um padrão: *eu cheguei num padrão que é 2n + 2. Eu só fiz uma relação. Uma mesa tem quatro pessoas. Duas mesas têm três pessoas. Três mesas têm oito pessoas. Logo, n mesas vai ter 2n + 2 pessoas.*

O pesquisador perguntou o que estava sendo feito para encontrar um padrão. O sujeito S4 respondeu que era uma tabela. Assim, o pesquisador construiu a tabela a partir dos desenhos feitos de casos particulares.



Nº de mesas	Nº de pessoas		
1	4	$\rightarrow$ 1	= 4
2	6	$\rightarrow$ 2	= 6
3	8	$\rightarrow$ 3	= 8
4	10	$\rightarrow$ 4	= 10
5	12	$\rightarrow$ 5	= 12
6	14	$\rightarrow$ 6	= 14
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	P	$\rightarrow$ n	= P

Já que o sujeito S4 havia encontrado a expressão matemática, o pesquisador perguntou sobre como ficaria isso numericamente, relacionando o número de mesas e o número de pessoas. O sujeito S3 respondeu: *deixa eu pensar. 4... 1 vezes dois mais dois. 6... 2 vezes dois mais dois. 8... 3 vezes dois mais dois. Fica n2 + 2.* A resolução ficou assim:

$1\,.\,(2+2)$	$=4$	$Para\; n = 30$
$2\,.\,(2+2)$	$=6$	
$3\,.\,(2+2)$	$=8$	$P = 2n + 2$
$4\,.\,(2+2)$	$=10$	$P = 2(30) + 2$
$5\,.\,(2+2)$	$=12$	$P = 60 + 2$
$6\,.\,(2+2)$	$=14$	$P = 62$
$\vdots$	$\vdots$	
$n\,.\,(2+2)$	$=P$	R: Podem se sentar à mesa 62 pessoas.

Para finalizar, o pesquisador perguntou qual seria a estratégia utilizada. O sujeito S3 respondeu: *construção de tabela, generalização... generalização também. Essa fórmula dá pra qualquer tipo de quantidade.* E o sujeito S4 complementou: *ou representação.* Assim, destacou-se que a estratégia se baseava em fazer uma figura ou desenho, montar uma tabela e analisar casos particulares para encontrar um padrão. De modo mais resumido, seria a estratégia de "montar uma tabela e encontrar um padrão".

O problema 19 trazia o seguinte enunciado: *Um professor deseja regraduar os pontos de uma prova escrita para "melhorar" a nota de todos. A nota máxima permanece 100, mas 56 passa a valer 70 na nova escala. Você tinha conseguido 75. Quanto eles vão valer na nova escala?*

Apenas os sujeitos S2 e S4 resolveram o problema, mas encontraram a resposta errada. O sujeito S2 foi até a lousa mostrar sua estratégia de resolução: *não sei, fiz de um jeito mais fácil, mas não sei se está certo. O meu resultado deu 93,75.* Conforme pode ser observado abaixo, esse sujeito estabeleceu uma proporção que não se restringiu à nota máxima de 100.

$Antiga \quad Nova$	$56x = 75.70$	
$\dfrac{56}{75} = \dfrac{70}{x}$	$x = \dfrac{5250}{56}$	R: Vão valer 93,75 pontos.
	$x = 93{,}75$	

O sujeito S4, após o sujeito S2 ter resolvido o problema na lousa, relatou: *eu não fiz por regra de três. Eu achei a porcentagem de aumento de 25% e depois multipliquei 75 por 1.25*. Nesse caso, percebe-se que esse sujeito também encontrou a resposta errada de 93,75.

O pesquisador destacou que a nota máxima é de 100 e perguntou o que aconteceria com a nova nota se a nota antiga fosse 98 e ela fosse calculada pela proporção utilizada pelo sujeito S2. Todos concordaram com a ideia de que passaria de 100 e que como o máximo é esse valor, então deveria ser desconsiderada qualquer nota que passasse disso.

Assim, o pesquisador destacou que eles manipularam os dados de forma incorreta, pois o correto seria que essa nova nota, 98, não ultrapassasse a nota máxima de 100 pontos. Os sujeitos perceberam que deveriam rever o modo como estabeleceram a proporção utilizada, conforme apontou S3: *a gente precisa rever a parte matemática da proporção*. Desse modo, deu-se mais tempo para que os sujeitos tentassem resolver. Apenas os sujeitos S1 e S2 tentaram resolver. No entanto, não conseguiram obter sucesso.

O pesquisador destacou que era necessário restringir o lugar da proporção junto aos dados do problema. Assim, estabeleceu-se, na lousa, uma representação aos dados e o sujeito S2 percebeu qual era a proporção correta: *44 está para 30 e 19 está para x.* Assim, a resolução ficou como apresentado abaixo e a estratégia foi nomeada como sendo o uso de "estabelecer uma equação".

$$\begin{array}{cc} Antiga & Nova \\ 44\left\{\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c}56\\ \vdots\\ 75\end{array}\right\}19 \\ \vdots \\ 100\end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} x\left\{\begin{array}{c}70\\ \vdots\\ (x+70)\end{array}\right. \\ \vdots \\ 100\end{array}\right\}30 \end{array}$$

$$\frac{44}{30}=\frac{19}{x}$$

$$44x = 30.19$$

$$x=\frac{570}{44}$$

$$x = 12{,}95$$

$$Logo, (x+70) = (12{,}95+70) = 82{,}95$$

R: 75 pontos vão valer 82,95 na nova escala.

Em seguida, o pesquisador apresentou a resolução por meio da estratégia do uso de uma "tabela". A partir do aumento de um ponto na nota antiga, foi calculado o acréscimo que cada nota nova correspondente obtinha, a qual resultou em 0,68. Como a diferença entre 56 e 75 resultava em 19, esse número correspondeu à quantidade de acréscimos a ser feita para ajudar a obter a nota nova de 82,95. Assim, foi possível estabelecer uma expressão.

Antiga	Nova
56	70
57	70,68
58	71,36
59	72,04
⋮	⋮
75	(70 + 0,68.19) = 82,95

$$\frac{30}{44} = 0{,}68$$

R: 75 pontos vão valer 82,95 na nova escala.

Atribuindo a letra A para as notas antigas e N para as notas novas obtidas, foi possível construir uma expressão matemática: $N = 70 + 0{,}68(A - 56)$

Por fim, destacou-se que a estratégia utilizada foi a da "tabela", seguida da tentativa de estabelecer um padrão. Os sujeitos gostaram das duas formas como foi resolvido esse problema, conforme relatou o sujeito S3: *a ideia é legal*.

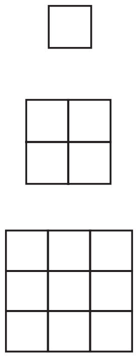
SÉTIMO ENCONTRO (19/05): Discussão das estratégias de resolução

Neste encontro, destaca-se que o sujeito S1 não esteve presente nas aulas. Logo no início, foi lido e corrigido o segundo trabalho que os sujeitos tiveram que realizar a respeito dos textos e *slides*, o qual iria ajudar a compor a média final na disciplina de Prática de Ensino. O tempo posterior foi destinado à discussão da parte final da resolução dos problemas de número 20 a 28. Apenas não foi possível resolver em sala de aula o problema 24, ficando como tarefa aos sujeitos.

Assim, o problema 20 tinha o seguinte enunciado: *Considere um quadrado de palitos 1 x 1. De quantos palitos se necessita para formar um quadrado 10 x 10 com quadradinhos de palitos 1 x 1?* Os sujeitos S2 e S4 utilizaram um único desenho para tentar resolver, sendo que ambos acertaram a resposta.

> S2: Eu desenhei construindo fileiras. Deu onze fileiras. Vezes dez, 110. 220 palitos.
> S4: Eu fiz um tabuleiro. Eu fiz de uma vez só. Não fui deduzindo não.

O pesquisador perguntou qual estratégia seria a que eles utilizaram e os sujeitos S2 e S4 responderam que era a de "estabelecer uma figura". No entanto, o pesquisador fez na lousa o desenho de três casos particulares e montou uma "tabela".



1x1
4 palitos

2x2
12 palitos

3x3
24 palitos

Lado do quadrado	**Nº de palitos**
1	4
2	12
3	24
4	40
⋮	⋮
n	P

Foi perguntado sobre o que se estava tentando encontrar com essa estratégia e o sujeito S4 respondeu: *uma relação: lados com quantidade de palitos*. Os três sujeitos presentes, S2, S3 e S4, perceberam e construíram a expressão matemática correta: $2n^2 + 2n$. A resolução final ficou assim estabelecida:

$$\begin{array}{ll} 1\,.\,(2.2) & = 4 \\ 2\,.\,(3.2) & = 12 \\ 3\,.\,(4.2) & = 24 \\ 4\,.\,(5.2) & = 40 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ n.\,(n+1).\,2 & = P \end{array}$$

$Para\; n = 10$

$$\begin{aligned} P &= n.\,(n+1).\,2 \\ P &= 2n^2 + 2n \\ P &= 2.\,(10)^2 + 2.\,(10) \\ P &= 200 + 20 \\ P &= 220 \end{aligned}$$

R: Necessita-se de 220 palitos para formar um quadrado 10x10.

Mais uma vez, a estratégia utilizada foi a de montar uma "tabela" a partir de casos particulares e estabelecer um padrão.

Em relação ao problema número 21, seu enunciado era o seguinte: *Para quais valores de a o sistema de equações tem 0, 1, 2 e 3 soluções?*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

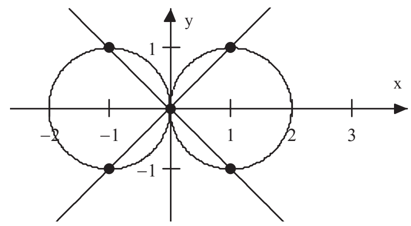
Nenhum dos sujeitos tentou resolver o problema. O pesquisador disse que iria mostrar uma estratégia que não seria algébrica e começou perguntando sobre que tipo de gráfico cada equação representava. Sobre a equação $x^2 - y^2 = 0$, nenhum dos sujeitos soube responder que se tratava de duas retas. Os sujeitos S2 e S4 mencionaram, erroneamente, uma hipérbole ou elipse. Assim, o pesquisador manipulou a equação e obteve as duas retas, cujos gráficos foram construídos em lousa. Já em relação à equação $(x - a)^2 + y^2 = 1$, todos os sujeitos perceberam que se tratava de uma circunferência.

Desse modo, o pesquisador explicou que era preciso desenhar a circunferência no plano cartesiano e tentar relacionar com os tipos de soluções que se pretendia saber. O sujeito S2 percebeu que a circunferência seria deslocada ao longo do eixo x. Nisso, o pesquisador propôs que fossem verificados os valores de *a* quando houvesse três intersecções entre os gráficos. O gráfico ficou assim:

$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2} \Rightarrow \begin{cases} y = +x \\ y = -x \end{cases}$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{cases} C(a, 0) \\ R = \sqrt{1} = 1 \end{cases}$$

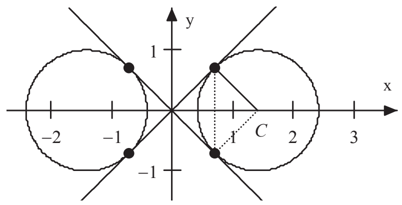


Depois de feito o gráfico acima, foi perguntado aos sujeitos qual seria o valor de *a* para obter as três soluções que correspondiam às intersecções das duas retas com a circunferência. Nenhum deles respondeu. Permaneceram em silêncio e com olhar fixo ao gráfico. Desse modo, o pesquisador disse que tínhamos que ter $a = 1$ ou $a = -1$, justamente porque se travava da medida do raio da circunferência, a qual tangencia no ponto de origem do plano cartesiano.

Em seguida, verificaram-se os valores de *a* para obter duas soluções. Foi desenhada, na lousa, a circunferência tangenciando dois pontos, sendo cada um em uma das retas. Os sujeitos perceberam que o valor a ser encontrado iria ser maior do que o raio. O sujeito S2 demonstrou desconhecer essa forma de resolver o problema: *eu nem sabia que dava pra achar pelo gráfico*. Esse fato evidenciou a dificuldade desses sujeitos das possíveis relações que o problema pode ter com outras ideias matemáticas (SCHROEDER; LESTER, 1989). Isso pode ser decorrente de uma formação teórico-técnica, baseada nos pressupostos do modelo da **racionalidade técnica** (FIORENTINI; SOUZA JR.; MELO, 1998).

Como ninguém estava conseguindo perceber o que deveria fazer para achar os valores de *a*, foi desenhado o raio de uma das circunferências até um dos pontos de tangencia. Assim, os sujeitos conseguiram encontrar tais valores.

> S2: Do centro onde intersecciona... aí até o centro da circunferência é 1. Então o ângulo é noventa.
> S4: E se traçar uma reta pelos dois pontos de intersecção, paralela ao eixo y, daí vai ter que um ângulo é 45.
> S2: Verdade. Daí dá pra fechar um quadrado.
> S4: Então a distância vai ser raiz de 2.
> Pesquisador: Qual vai ser o valor de a?
> S4: Mais ou menos raiz de 2.



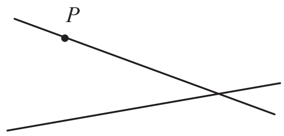
$A\ dit\hat{a}ncia\ da\ origem\ at\acute{e}\ o\ centro$
$da\ circunfer\hat{e}ncia$ é $\sqrt{2}$.

Em seguida, para finalizar o problema, somente o sujeito S2 acertou que para se ter uma solução o valor de *a* não existe. Para zero solução ninguém conseguiu perceber que se tratava de $a > \sqrt{2}$ ou $a < -\sqrt{2}$. A resposta do problema foi a seguinte:

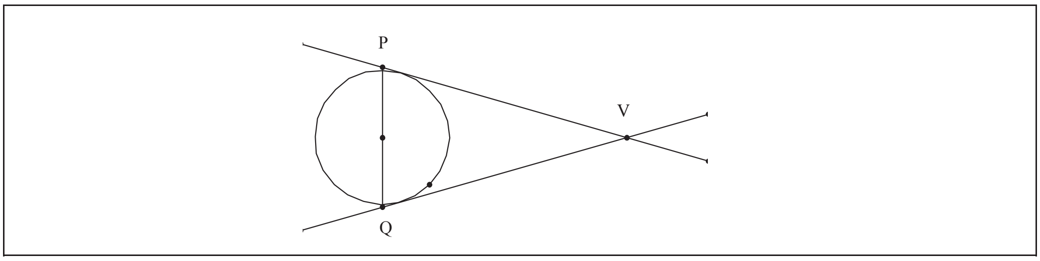
$$Zero\ solução \Rightarrow a > \sqrt{2}\ ou\ a < -\sqrt{2}$$
$$1\ solução \Rightarrow \nexists\ a\ que\ satisfaça$$
$$2\ soluções \Rightarrow a = \sqrt{2}\ ou\ a = -\sqrt{2}$$
$$3\ soluções \Rightarrow a = 1\ ou\ a = -1$$

A estratégia foi denominada de “diagrama” ou “desenho”. Foi perguntado se tal estratégia utilizada garantia a obtenção dos valores de *a* para satisfazer a resposta do problema e eles disseram que sim. O sujeito S2 respondeu: *é legal*. Também foi perguntado se isso poderia ser trabalhado na escola de modo a favorecer a aprendizagem dos alunos. Os sujeitos concordaram que os alunos não saberiam resolver um problema dessa forma. O sujeito S2 destacou: *sabe o que é? É muito difícil resolver sistema por meio geométrico. Eles vão ficar se matando algebricamente.*

O problema 22 era o seguinte: *São dadas duas linhas retas com uma intersecção e um ponto P marcado sobre uma delas, como na figura abaixo. Mostre como construir, usando régua e compasso, um círculo que é tangente a ambas as linhas e que tem o ponto P como seu ponto de tangência com uma delas*.

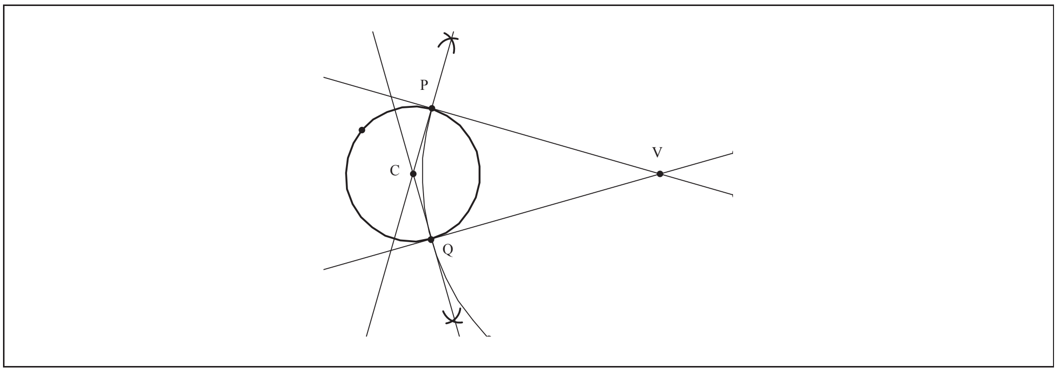


Nenhum dos sujeitos trouxe resolvido de casa o problema para ser discutido em sala de aula e o motivo apresentado foi o fato de não terem tentado fazer. Para incentivar a discussão, o pesquisador traçou, de forma incorreta, o diâmetro da circunferência. Para isso, traçou um segmento de reta com extremidades em *P* e na imagem espelhada de *P*, o ponto *Q*, afirmando que o seu ponto médio seria o centro da circunferência. A figura ficou assim:



Assim, indicou que eles deveriam apenas abrir o compasso do centro até o ponto *P* e traçar tal circunferência. Desse modo, foi perguntado aos sujeitos se aquele traçado estava correto para determinar a construção de uma circunferência. Eles não souberam responder. O pesquisador disse que estava incorreta a maneira feita e que aquele não era o centro da circunferência a ser encontrada. Destacou que o objetivo era de determinar justamente tal centro.

Tendo vista essa situação, o pesquisador destacou que iria ser utilizada uma propriedade importante que seria a de que "toda reta tangente a uma circunferência é sempre perpendicular ao seu raio no ponto de tangencia". Desse modo, com régua e compasso, realizaram-se as seguintes ações: (a) traçou-se a reta perpendicular que passava por *P*; (b) marcou-se o ponto *Q*, traçando um arco de circunferência com centro no ponto *V* e de raio *PV*; e (c) traçou-se a outra reta perpendicular que passava pelo ponto *Q*, sendo a intersecção das retas o centro para determinar a circunferência procurada. A figura abaixo mostra a resolução.



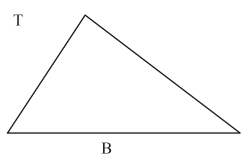
Diante do uso de régua e compasso, o pesquisador enfatizou a necessidade de o professor trabalhar com aspectos importantes de Desenho Geométrico na escola, sendo que os sujeitos mencionaram ter dificuldades sobre tal assunto.

> S2: Eu não sei fazer nada disso.
> S4: Eu não sei Desenho geométrico.
> Pesquisador: Vocês não tiveram Desenho geométrico na graduação?
> S2: Tivemos, mas eu não sabia que eu tinha que saber conteúdo de geometria para resolver.

Assim como apontado anteriormente, no problema 21, verificou-se, também, que esses sujeitos desconheciam a relação que esse problema 22 mantinha com as ideias matemáticas da área da geometria (SCHROEDER; LESTER, 1989). Pode-se apontar que apresentaram pouco conhecimento sobre Desenho Geométrico, enquanto um **saber disciplinar** (TARDIF, 2007) a ser adquirido no curso de Licenciatura em Matemática.

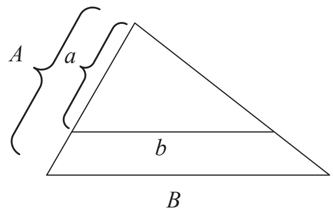
Por fim, foi destacada pelo pesquisador a estratégia utilizada: “figura” ou “desenho”.

Nas duas aulas finais deste encontro, abordou-se o problema 23, o qual tinha o seguinte enunciado: *É dado um triângulo T com base B, como na figura abaixo. Mostre que é sempre possível construir, com régua e compasso, uma linha reta que é paralela à B e que divide T em duas partes de área igual.*



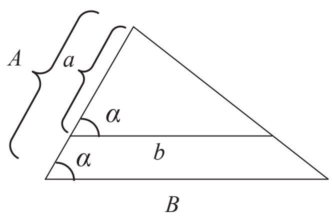
Nenhum dos sujeitos trouxe resolvido o problema. Eles mencionaram que não tinham tentado fazer. Assim, após ter traçado a reta paralela à base B, o pesquisador tentou direcioná-los para que pudessem visualizar uma estratégia de resolução: *sem pensar em contas, o que eu preciso fazer para saber onde deve ser traçada a reta nessa figura? Pessoal, que medida que se eu soubesse aqui eu poderia garantir o lugar desse traçado?* Mesmo assim, nenhum deles conseguiu pensar em alguma possibilidade.

Desse modo, a partir da semelhança dos triângulos envolvidos na figura dada, estabeleceu-se uma proporção entre dois de seus lados, sendo que se destacou aos sujeitos que a medida de *a* seria o que deveríamos descobrir para garantir o local de traçado da reta paralela à base B.



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} \quad (I)$$

Além disso, a partir da condição de que o triângulo T seria dividido em duas partes de áreas iguais, utilizou-se a expressão matemática da Lei dos Senos para relacionar a área desse triângulo T com o triângulo menor obtido. Como os triângulos eram semelhantes, as expressões das áreas e o resultado da igualdade entre as duas resultaram na seguinte forma:



$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{a.b}{2}.\operatorname{sen}\alpha \\ S_2 &= \frac{A.B}{2}.\operatorname{sen}\alpha \end{aligned}\right\} S_1 = \frac{S_2}{2}$$

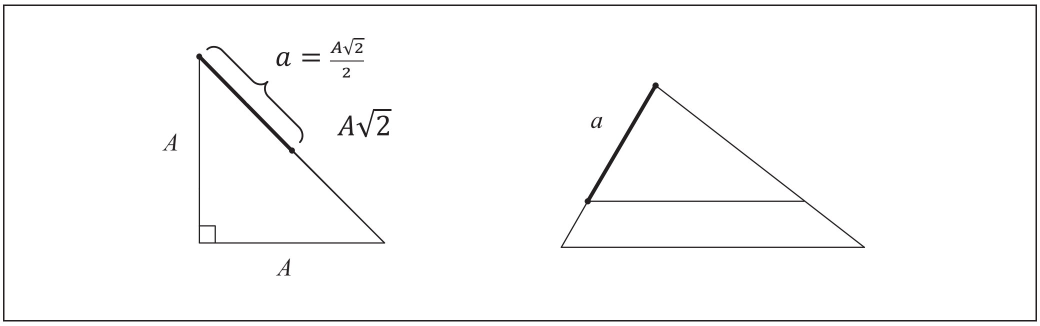
$$S_1 = \frac{S_2}{2} \Rightarrow \frac{a.b}{2}.\operatorname{sen}\alpha = \frac{\frac{A.B}{2}.\operatorname{sen}\alpha}{2} \Rightarrow \frac{a.b}{2} = \frac{1}{2}.\frac{A.B}{2} \Rightarrow a = \frac{A.B}{2b} \quad (II)$$

Essa igualdade que resultou da relação entre as áreas foi associada à proporção estabelecida no início da resolução do problema. Assim, essa associação resultou na medida que precisávamos descobrir e que foi determinada a partir da construção geométrica, tendo em vista o uso de régua e compasso.

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} \Rightarrow B = \frac{A.b}{a} \quad (I) \qquad Fazendo\ (I) em\ (II), temos:$$

$$a = \frac{A.\left(\frac{A.b}{a}\right)}{2b} \Rightarrow a.a = \frac{A^2.b}{2b} \Rightarrow a^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{A^2}{2}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{A\sqrt{2}}{2}}$$

Assim, para determinar a medida de *a* foi construído, com régua e compasso, um triângulo retângulo isósceles de catetos *A*, sendo que a metade da medida da hipotenusa correspondeu à medida de procurada.



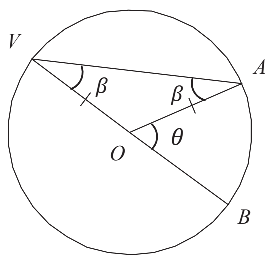
Por fim, destacou-se que a estratégia utilizada foi o uso de “figura e equação”. O sujeito S4 destacou o seu gosto pelo que foi feito: *legal essa! Nós temos que pegar e ver coisas como essas de novo*.

Um fato importante que aconteceu foi que os sujeitos mencionaram, após ter sido finalizada a resolução do problema, que nunca tinham feito esse tipo de construção em um triângulo retângulo. O sujeito S2 destacou: *você quer que eu traga meu caderno de desenho de geometria? Ele deve dar umas 20 folhas o ano inteiro*.

O desconhecimento dos sujeitos de algumas construções geométricas é um indicativo de que a formação inicial tem tido dificuldades em favorecer a constituição desse saber docente. Isso pode ser decorrente de uma formação que pouco tem levado os licenciandos em Matemática a compreender a necessidade da organização e estrutura de ações que permitam aos alunos realizar construções geométricas em sala de aula, contribuindo, assim, para uma construção do conhecimento matemático (ROLDÃO, 2007).

Na sequência, o problema 24 foi deixado para o final, pois os sujeitos pediram para abordar, primeiro, o problema 25, o qual tinha o seguinte enunciado: *Prove que em qualquer círculo o ângulo central que corresponde a um arco dado é duas vezes o ângulo inscrito correspondente ao mesmo arco*. Nenhum dos sujeitos tentou resolver. Disseram que não se recordavam se já havia feito isso. Na abordagem deste problema, o sujeito S3 se retirou da sala de aula, alegando que estava cansado.

O pesquisador destacou que havia três maneiras de resolver, tendo em vista o posicionamento do ângulo inscrito. Porém, resolveu apenas por uma maneira: quando um dos lados do ângulo inscrito coincidia com um dos lados do ângulo central. As outras duas formas de resolução ficaram para que tentassem fazer em casa. Ao final, destacou-se que se tratava da estratégia do uso de "figura e equação".



$\Delta\, VAO$ é *isósceles. Logo*, $B\hat{V}A \cong V\hat{A}O$

$A\hat{O}B$ *e* $A\hat{O}V$ *são suplementares, pois* $V\hat{O}B$ é *ângulo raso. Então*, $A\hat{O}V$ *mede* $180° - \theta$.

Como a soma dos ângulos de um triângulo é *igual a* $180°$, *temos que*:

$$\beta + \beta + (180° - \theta) = 180°$$
$$2\beta = \theta$$
$$\boxed{\theta = 2\beta}$$

O problema 26 tinha o seguinte enunciado: *Dados a, b, c e d números reais entre 0 e b1, prove que: (1 – a)(1 – b)(1 – c)(1 – d) > 1 – a – b – c – d*. Nenhum dos sujeitos presentes, S2 e S4, conseguiu resolver.

Desse modo, o pesquisador propôs que eles tentassem partir de um "caso particular" para provar a desigualdade na expressão acima. Como eles não conseguiram pensar em nada, foi colocado na lousa um exemplo como ponto de partida para a resolução, conforme pode ser observado abaixo.

$$(1 - a).(1 - b)$$
$$(1 - a).(1 - b) = 1 - b - a + ab$$
$$(1 - a).(1 - b) > 1 - a - b \quad \rightarrow \quad \textit{caso particular}$$

O sujeito S2 disse que pensou em casos particulares como atribuir valores às letras: *quando você falou em caso particular eu pensei em substituir valores: a = 2, b = 3... só que aí não prova, né*?

Assim, foi multiplicado cada lado da desigualdade pelos fatores que faltavam. Primeiro pelo (1 – c) e depois a nova expressão obtida foi multiplicada por (1 – d). A estratégia destacada foi a de utilizar um "caso particular".

$$(1-a).(1-b).(1-c) > (1-a-b).(1-c)$$
$$(1-a).(1-b).(1-c) > 1-a-b-c+ac+bc$$
$$(1-a).(1-b).(1-c) > 1-a-b-c$$

$$(1-a).(1-b).(1-c).(1-d) > (1-a-b-c).(1-d)$$
$$(1-a).(1-b).(1-c).(1-d) > 1-a-b-c+ac+bc$$
$$(1-a).(1-b).(1-c).(1-d) > 1-a-b-c-d+ad+bd+cd$$

$$(1-a).(1-b).(1-c).(1-d) > 1-a-b-c-d$$

O problema 27 era o seguinte: *Qual é a soma da sequência 1 + 3 + 5 + 7 +... + (2n – 1)?* Os sujeitos presentes, S2 e S4, não resolveram. Conforme se pode verificar abaixo, nas duas primeiras colunas, para cada um dos quatro primeiros números mostrados na sequência, havia um *n* correspondente, seguindo uma ordem crescente de valores. Desse modo, agrupando esses quatro primeiros números em parcelas de soma, puderam-se encontrar os respectivos resultados da soma. Assim, os valores da primeira e quarta colunas foram os números considerados para ajudar a estabelecer um padrão para encontrar a soma.

n	**(2n – 1)**	**Soma das parcelas**	**Soma**		
1	1	1	1	→ 1	= 1
2	3	1 + 3	4	→ 2	= 3
3	5	1 + 3 + 5	9	→ 3	= 5
4	7	1 + 3+ 5 + 7	16	→ 4	= 7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	⋮	⋮	S	→ n	= S

Assim, foi encontrado o padrão para a soma dos números da sequência.

$$
\begin{aligned}
&1.(1) &&= 1\\
&2.(2) &&= 4\\
&3.(3) &&= 9\\
&4.(4) &&= 16\\
&\vdots &&\vdots\\
&n.n &&n^2
\end{aligned}
$$

R: A soma da sequência é n^2.

A estratégia foi a de montar uma "tabela e encontrar um padrão". O sujeito S2 destacou: *esse daí é gostoso de fazer. Esse eles (alunos) conseguem*. Em seguida, o pesquisador mostrou que dava para fazer por meio da expressão da soma de termos, do conteúdo de Progressão Aritmética (P.A), tendo o número 1 da sequencia como o primeiro termo, o (2n – 1) com o último termo e o *n* como o número de parcelas. A estratégia foi a da "equação".

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \qquad & S_n &= \frac{(a_1 + a_n).n}{2}\\
a_n &= 2n - 1 & S_n &= \frac{(1 + (2n - 1)).n}{2}\\
& & S_n &= \frac{2n.n}{2}\\
& & &\boxed{S_n = n^2}
\end{aligned}
$$

R: A soma da sequência é n^2.

Finalizando as atividades com a resolução dos problemas, tratou-se do problema 28, o qual apresentava o seguinte enunciado: *Quantas retas podem ser traçadas por n pontos?* Os dois sujeitos presentes, S2 e S4, também não fizeram este problema. O pesquisador conduziu a resolução, destacando que a estratégia a ser utilizada era a de montar uma "tabela e estabelecer um padrão", a mesma do problema anterior. Assim, montou-se a tabela com valores para casos particulares, envolvendo os pontos e as retas obtidas. Não foi colocado um ponto, pois por um ponto passam infinitas retas.

Pontos	Retas		
2	1	$\rightarrow$ 2	= 1
3	3	$\rightarrow$ 3	= 3
4	6	$\rightarrow$ 4	= 6
5	10	$\rightarrow$ 5	= 10
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	R	$\rightarrow$ n	= R

Desse modo, a resposta obtida foi justamente o padrão encontrado.

$$2.\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$3.\left(\frac{2}{2}\right) = 3$$

$$4.\left(\frac{3}{2}\right) = 6$$

$$5.\left(\frac{4}{2}\right) = 10$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$n.\frac{(n-1)}{2} = R$$

R: Podem ser traçadas $n.\dfrac{(n-1)}{2}$ retas por n pontos.

OITAVO ENCONTRO (30/06): Avaliação individual

As duas últimas aulas destinadas ao curso proposto foram dedicadas à aplicação de uma avaliação individual e escrita aos sujeitos como forma de se ter uma nota para compor a média final para a disciplina da qual foram liberados. Além disso, os três trabalhos exigidos durante as atividades também foram computados na nota final.

5.2.1 Conclusões sobre a participação dos sujeitos da pesquisa no Curso sobre Resolução de Problemas

O curso aplicado aos sujeitos de nossa pesquisa levou em consideração o trabalho com a resolução de uma gama de problemas matemáticos, tendo como foco principal verificar e discutir as estratégias de resolução evidenciadas pelos licenciandos e as estratégias propostas pelo pesquisador. Além disso, o referido curso possibilitou o contato com a literatura pertinente ao assunto sobre resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática.

É importante destacar que durante o trabalho com os problemas o pesquisador não apenas discutiu as estratégias como uma etapa importante do processo de resolução de problemas, mas outras etapas como a representação do problema e as relacionadas com a obtenção da resposta. Além disso, destacou em quais momentos do ensino os problemas deveriam aparecer. Ou seja, esses conhecimentos não foram tratados somente no momento em que houve a discussão teórica.

Desse modo, em relação à participação dos sujeitos na resolução dos problemas, no início, eles se mostraram tímidos para expor o que sabiam sobre o assunto e até mesmo para comunicar o conhecimento matemático que possuíam.

Uma participação mais ativa ocorreu, pela primeira vez, com o sujeito S3 vindo até a lousa mostrar como tinha resolvido os problemas 6, 7 e 9, sendo que no problema 7 nomeou a estratégia utilizada. Outro sujeito que veio até a lousa mostrar sua resolução foi S2, porém isso somente aconteceu no problema 19.

Entre as discussões dos problemas 12 e 13, foi trabalhada a parte teórica da resolução de problemas. Desse modo, foi possível munir os sujeitos de conhecimentos sobre problemas, exercícios, as etapas de resolução de problemas (em especial, referente às estratégias de resolução) e sobre a condução do ensino-aprendizagem da Matemática via resolução de problemas, conforme pode ser percebido no relato do sujeito S4, já apresentada na descrição do curso: *se o aluno não souber, e for um problema, ele pode fazer uma representação das garrafinhas, desenhando e tal*.

Assim, no que tange ao trabalho com as estratégias de resolução de problemas na escola básica, o sujeito S3 relatou:

> Eu acho que a escola de maneira geral, desde a quinta-série até o terceiro colegial, não tem ensinado estratégias, entende? Tem que ser. Para o aluno ter condições de tudo que ele aprendeu de matemática ser usado como estratégia para ele resolver qualquer problema de matemática ou na vida dele. Quando ele chegar no terceiro colegial, ele ter uma gama de conhecimento matemático grande. E todos esses conhecimentos são estratégias que ele veio aprendendo e desenvolvendo e... mais maduro com relação ao... ser um problema ou um exercício.

Após a discussão da parte teórica sobre a resolução de problemas no ensino (quarto e quinto encontros), notou-se um maior interesse e uma disposição maior dos sujeitos para a utilização e nomeação das estratégias discutidas até aquele momento, bem como o gosto e as dificuldades apresentadas pelo que aprendiam, situação observada entre os problemas 13 e 20. Os sujeitos que mais se destacaram nesse período foram S1 e S4.

A partir do problema número 21, nenhum dos sujeitos os trouxe resolvidos de casa. Trabalho que havia sido cobrado deles porque, no horário dos encontros, estavam demorando em resolver os problemas, perdendo-se tempo para discutir as estratégias. Além disso, mesmo tendo cedido tempo aos sujeitos em sala de aula, não conseguiram resolver. Vale destacar que o sujeito S1, desde o problema 20, período do sétimo encontro no curso, havia faltado, o que não permitiu verificar se tinha resolvido os problemas restantes.

Nesse período que envolveu a discussão dos problemas 20 a 28, uma das dificuldades dos sujeitos que estiveram presentes – S2, S3 e S4 – diz respeito às condições de realizar construções geométricas básicas, com régua e compasso. Conforme já mencionado no problema 22, um dos sujeitos relatou: *eu não sei Desenho geométrico*.

Entretanto, após apresentada a estratégia do problema seguinte, número 23, o qual também necessitava do uso de tais construções, esse mesmo sujeito enfatizou, conforme já apresentado: *legal essa! Nós temos que pegar e ver coisas como essas de novo*.

Isso mostra a necessidade desses sujeitos em se aprimorarem nos conhecimentos que envolvem construções geométricas. Vai ser difícil exercer um trabalho com a resolução de problemas tendo essa dificuldade na formação, uma vez que pode ocorrer de muitos problemas de geometria serem deixados de lado no ensino em sala de aula justamente pelo fato de o professor não dominar a sua condução em sala de aula, o que pode não ampliar a aprendizagem dos alunos nessa área da Matemática.

Em síntese, a participação dos sujeitos na resolução dos problemas pode ser resumida nos seguintes desempenhos: (1) antes da discussão teórica do assunto, resolveram quase todos os problemas, porém por meio de estratégias que eles conheciam, baseadas, muitas vezes, em equações e figuras, não propondo outras formas de resolução; (2) após a discussão teórica a respeito do assunto, notou-se maior uso de várias estratégias de resolução, bem como o entendimento de se avaliar a resposta encontrada; (3) na parte final do curso, não resolveram os problemas 20 a 28.

Um dos fatores que pode ter contribuído para essa queda de desempenho ao final das atividades pode ter sido o fato de alguns dos problemas terem exigido um nível maior de conhecimento. Por exemplo, não conseguiram manipular um sistema de equações para analisar resultados. Desconheciam conceitos de geometria e de desenho geométrico para realizar construções geométricas. Não conseguiram provar resultados.

De forma geral, tiveram dificuldades para usar e selecionar as diversas estratégias discutidas no curso que os ajudassem a verificar qual(is) delas poderia(m) ser utilizadas para resolver esses problemas finais.

Apesar dessas situações, acredita-se que o trabalho envolvendo a resolução de problemas, para verificar as estratégias, e a leitura de textos sobre o assunto ajudou os sujeitos a terem condições de adquirir conhecimentos/saberes sobre a resolução de problemas como um caminho para ensinar e aprender Matemática. Porém, um fator que poderia prejudicar esse trabalho em sala de aula seria o fato constatado durante o curso de que os sujeitos de nossa pesquisa não tinham a intenção de serem professores, conforme já tinha sido apontado pelo sujeito S1: *só no estágio, porque eu não quero ser professora*.

Assim, será apresentada, a seguir, a análise dos esforços dos sujeitos na tentativa de trabalhar esse assunto no estágio de regência de aulas.

5.3 O trabalho realizado no estágio de regência

Neste terceiro eixo, analisamos o trabalho com a resolução de problemas, decorrente das regências de aula na escola básica. Primeiramente, apresenta-se um Quadro resumo sobre os aspectos do trabalho com a resolução de problemas tratados nas regências de aula pelos sujeitos nos conteúdos de aritmética, álgebra e geometria. Os aspectos que os sujeitos não conseguiram trabalhar ou que não foram condizentes com a abordagem da resolução de problemas foram destacados em cinza. Posteriormente, apresentam-se as dificuldades relatadas pelos sujeitos sobre esses aspectos.

Destaca-se que a ordem em que aparecem os conteúdos nos Quadros corresponde à sequência em que foram trabalhados no estágio.

O Quadro 9 mostra os aspectos que o sujeito S1 conseguiu e os que não conseguiu realizar nas regências de aula.

Aspectos do trabalho realizado nas regências de aula pelo sujeito S1			
Série	**2º ano – EM – EJA**	**2º ano – EM - EJA**	**7ª série (8º ano - EF)**
Conteúdo	**Trigonometria – medida de arcos**	**Matrizes**	**Grandezas Direta e Inversamente Proporcionais**
Duração	**6 horas-aula**	**6 horas-aula**	**6 horas-aula**
Como iniciou o trabalho em sala de aula antes de abordar o conteúdo?	Apresentou cinco problemas. Foi proposto que os alunos se agrupassem em trios e duplas.	Apresentou um problema. Os alunos resolveram individualmente.	Apresentou uma lista com seis problemas. (os alunos já haviam estudado a ideia de proporção, mas não na forma da regra de três). Os alunos resolveram individualmente.
Discutiu as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos?	Não, pois os alunos não conseguiram resolver. Assim, resolveu apenas três problemas, na lousa, por meio do conteúdo.	Sim, mas resolveu na lousa, pois nenhum aluno quis mostrar como tinha feito, apenas verbalizaram o processo.	Não. E não levou em consideração o que os alunos tinham feito. Aplicou, diretamente, a regra de três.
Pediu aos alunos que nomeassem ou nomeou as estratégias?	Não.	Não.	Não.
Os problemas apresentados tinham mais de uma resposta?	Não.	Não.	Não.
Foi retomado o trabalho com problemas após a abordagem do conteúdo?	Não. E não foram retomados dois problemas dados no início que ficaram sem serem resolvidos.	Não.	Não. Apresentou outra lista com seis exercícios.
Como era a participação dos alunos?	Muitas dificuldades e dúvidas, até mesmo na aplicação de fórmulas.	A maioria interessados, mas apresentavam dificuldades.	Alunos desinteressados. A maioria apenas copiava da lousa.

Quadro 9: Aspectos do trabalho realizado nas regências de aula pelo sujeito S1.

Como se pode observar no Quadro 9, o sujeito S1 não abordou o conteúdo de Grandezas Direta e Inversamente Proporcionais na perspectiva de se **ensinar via resolução de problemas** (SCHROEDER; LESTER, 1989). Os alunos já haviam iniciado o estudo do conteúdo. Além disso, observa-se que a continuidade ao trabalho dada por esse sujeito não levou em consideração os outros aspectos da resolução de problemas como, por exemplo, proporcionar um ambiente de discussão das estratégias de resolução dos alunos.

Apesar dessa perspectiva ter sido realizada para os outros dois tópicos, aspectos como o de propor e conduzir outras formas de resolução, propor problemas que admitissem várias repostas e mesmo o de nomear as estratégias não foram realizados por S1.

Com relação ao sujeito S2, o Quadro 10 mostra os aspectos que conseguiu e os que não conseguiu realizar nas regências de aula.

Aspectos do trabalho realizado nas regências de aula pelo sujeito S2			
Série	**8ª série - EJA**	**1º ano do EM - EJA**	**5ª série (6º ano-EF)**
Conteúdo	**Equação do 2º grau**	**Trigonometria no triângulo retângulo**	**Fração**
Duração	**12 horas-aula**	**12 horas-aula**	**6 horas-aula**
Como iniciou o trabalho em sala de aula antes de abordar o conteúdo?	Deu uma lista com 10 problemas e discutiu o primeiro. (os alunos já haviam iniciado o estudo do conteúdo). Foi proposto que os alunos se agrupassem em trios.	Deu três problemas e resolveu o primeiro. Foi proposto que os alunos se agrupassem em trios. Outros permaneceram em duplas.	Entregou uma lista com 7 problemas. Todos foram discutidos em sala de aula (os alunos já haviam estudado o conteúdo). Os alunos resolveram em duplas.
Discutiu as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos?	Não. Somente resolveu na lousa e apresentou duas estratégias: construção de uma tabela com tentativa e erro e depois a resolução da equação por Bháskara.	Não. Somente resolveu na lousa por meio do conteúdo.	Sim. Com os alunos indo até a lousa e registrando suas estratégias de resolução: por meio de uma figura ou do conteúdo.
Pediu aos alunos que nomeassem ou nomeou as estratégias?	Não.	Não.	Não.
Os problemas apresentados tinham mais de uma resposta?	Somente o primeiro problema apresentava mais de uma resposta.	Não.	Sim.
Foi retomado o trabalho com problemas após a abordagem do conteúdo?	Sim. Após explicitação do conteúdo e trabalho com exercícios, retomou a lista de problemas, mas não o trabalho em grupo.	Não. E não retomou os outros dois problemas apresentados no início.	Não houve abordagem do conteúdo. Apenas o trabalho com os exercícios e, ao final, com um Jogo: Dominó de Frações.
Como era a participação dos alunos?	Alunos com dificuldades. O sujeito esteve sempre tirando as dúvidas.	Estavam interessados, mas tinham dificuldades.	Alunos participativos e interessados.

Quadro 10: Aspectos do trabalho realizado nas regências de aula pelo sujeito S2.

Como se pode observar no Quadro 10, o sujeito S2 não abordou os conteúdos de Equação do 2º grau e Fração na perspectiva de se **ensinar via resolução de problemas**, ou seja, de introduzir um conteúdo por meio de um problema (SCHROEDER; LESTER, 1989). Porém, alguns aspectos da resolução de problemas foram tratados como a discussão das estratégias de resolução dos alunos do conteúdo de Fração e o de apresentar um problema com mais e uma resposta para o conteúdo de Equação do 2º grau.

Sobre o sujeito S3, o Quadro 11 mostra os aspectos que conseguiu e os que não conseguiu realizar nas regências de aula.

Aspectos do trabalho realizado nas regências de aula pelo sujeito S3			
Série	**8ª série (9º ano - EF)**	**3º ano - EM - EJA**	**5ª série (6º ano - EF)**
Conteúdo	**Equação do 2º grau**	**Geometria Analítica**	**Fração**
Duração	**6 horas-aula**	**6 horas-aula**	**6 horas-aula**
Como iniciou o trabalho em sala de aula antes de abordar o conteúdo?	Apresentou dois problemas. Os alunos resolveram individualmente.	Apresentou três problemas. Os alunos resolveram individualmente.	Apresentou uma lista com seis problemas. Foi proposto que os alunos se agrupassem em trios. Além disso, enfatizou-lhes que poderiam fazer como quisessem.
Discutiu as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos?	Não, pois os alunos não conseguiram resolver. Resolveu em lousa por meio de uma tabela, mas não terminou a resolução.	Não, pois os alunos não conseguiram resolver. Resolveu na lousa por meio do conteúdo.	Sim, mas apenas resolvendo na lousa, utilizando o que os grupos tinham feito.
Pediu aos alunos que nomeassem ou nomeou as estratégias?	Não.	Não.	Não.
Os problemas apresentados tinham mais de uma resposta?	Não.	Não.	Somente dois problemas.
Foi retomado o trabalho com problemas após a abordagem do conteúdo?	Não. Propôs exercícios, selecionados do Caderno de Matemática do Estado de São Paulo de 2009.	Não.	Sim. Retomou os três últimos problemas da lista dada no início.
Como era a participação dos alunos?	Alunos participativos. Tiravam as dúvidas.	Alunos com dificuldades.	Alunos extremamente participativos. Apresentavam o que tinham feito.

Quadro 11: Aspectos do trabalho realizado nas regências de aula pelo sujeito S3.

Como se pode observar no Quadro 11, o sujeito S3 apresentou um problema para introduzir cada um dos tópicos trabalhados, ou seja, abordou todos os conteúdos na perspectiva de se **ensinar via resolução de problemas** (SCHROEDER; LESTER, 1989). Porém, não conseguiu dar sequência ao trabalho com os aspectos da resolução de problemas para os conteúdos de Equação de 2º grau e Geometria Analítica.

Para o conteúdo de Fração, com exceção de não ter solicitado aos alunos que nomeassem as suas estratégias ou que o próprio S3 tivesse nomeado, foi possível notar uma abordagem dos aspectos da resolução de problemas como o auxílio aos alunos durante o trabalho e a discussão das estratégias de resolução. De modo geral, é possível afirmar que esse sujeito teve uma evolução em sua última regência.

Por último, para o sujeito S4, o Quadro 12 mostra os aspectos que conseguiu e os que não conseguiu realizar nas regências de aula.

Aspectos do trabalho realizado nas regências de aula pelo sujeito S4			
Série	**6ª série (7º ano-EF)**	**1º ano - EM**	**6ª série (7º ano-EF)**
Conteúdo	**Potenciação**	**Função do 1º grau**	**Simetria**
Duração	**6 horas-aula**	**12 horas-aula**	**6 horas-aula**
Como iniciou o trabalho em sala de aula antes de abordar o conteúdo?	Apresentou um problema. (os alunos já haviam iniciado o estudo do conteúdo). Os alunos se agruparam em duplas.	Apresentou cinco problemas. (os alunos já haviam iniciado o estudo do conteúdo). Propôs que os alunos fizessem individualmente.	Apresentou uma definição de simetria e entregou uma folha com o desenho de metade de uma casa para ser completada pelos alunos. Os alunos resolveram individualmente e em duplas.
Discutiu as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos?	Sim, mas apenas tendo por base o uso de papel quadriculado como estratégia de resolução e resolveu em lousa.	Sim, incentivando o uso da construção de tabela, mas com os alunos em volta de sua mesa.	Sim, desenhou a outra metade do desenho da casa na lousa.
Pediu aos alunos que nomeassem ou nomeou as estratégias?	Não.	Não.	Não.
Os problemas apresentados tinham mais de uma resposta?	Não.	Não.	Não.
Foi retomado o trabalho com problemas após a abordagem do conteúdo?	Não.	Não. Apresentou exercícios e resolveu todos em lousa.	Não. Apresentou outras definições e usou atividades do Caderno de Matemática do Estado de São Paulo.
Como era a participação dos alunos?	Alunos se interessaram pelas atividades.	A maioria dos alunos não estava interessada.	A maioria dos alunos estava interessada.

Quadro 12: Aspectos do trabalho realizado nas regências de aula pelo sujeito S4.

Como se pode observar no Quadro 12, o sujeito S4 não apresentou um problema para introduzir os conteúdos de Potenciação e de Função de 1º grau, ou seja, não abordou esses tópicos na perspectiva de se **ensinar via resolução de problemas** (SCHROEDER; LESTER, 1989). Já o conteúdo de Simetria foi introduzido tendo em vista a perspectiva de **ensinar para resolução de problemas**, uma vez que esse tópico foi introduzido por meio de uma definição.

Desse modo, aspectos como nomear as estratégias e apresentar problemas que tivessem mais de uma resposta não foram propostos.

Tendo em vista o que foi apontado nos Quadros acima sobre o trabalho realizado nas regências de aula, o Quadro 13 mostra as respostas dos sujeitos referentes às dificuldades quanto à elaboração das atividades para o trabalho com os conteúdos.

Sujeito	Dificuldades na elaboração das atividades para as regências de aula
S1	[...] não consegui achar em livros e na internet coisas que eles poderiam resolver por outro caminho a não ser usando seno e cosseno que era o que tinha que passar pra eles.
S2	[...] mas trigonometria eu achei muito difícil, porque como que eles vão achar uma... por exemplo, o seno sem ser com a fórmula? É muito difícil. Eu não tinha achado nenhuma maneira. [...] eu tentava encontrar algum problema que tivesse várias estratégias, que os alunos pudessem resolver de várias maneiras. Mas eu tive dificuldades de encontrar esses problemas.
S3	Eu peguei o problema do Caderno do Aluno [atividades que envolvem o atual Currículo de Matemática do Estado de São Paulo] porque eu estava com dificuldades em criar um problema de equação de segundo grau para trabalhar a resolução de problemas e aí foi de lá que eu peguei, mas explorei isso através do livro didático.
S4	Quando eu fui fazer o Plano de Aula [para o conteúdo de Simetria] já falei: vou fazer tradicional com o Caderno do Aluno do Estado de São Paulo. Porque essas duas [conteúdos de Potenciação e Função] eu vi que não deu certo.

Quadro 13: Dificuldades na elaboração das atividades para as regências de aula.

De acordo com o Quadro 13, todos os sujeitos apontaram dificuldades em elaborar atividades para abordar os conteúdos nas regências de aula. Verifica-se que os sujeitos S1, S2 e S3 apresentaram dificuldades em encontrar problemas que tivessem outras estratégias de resolução, ou seja, relacionadas ao trabalho de **introdução de um tópico por meio de um problema**.

No caso do sujeito S3, essa situação pareceu incoerente, uma vez que estratégias que poderiam ajudar a incentivar os alunos a resolver equações de 2º grau sem ser pelo uso da fórmula de bháskara foram discutidas no Curso sobre Resolução Problemas como, por exemplo, a construção de tabelas e a tentativa e erro.

Esse sujeito, assim como S4, acabou utilizando as atividades do "caderno do aluno"[11] do atual Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, porém com enfoque do ensino tradicional (uso de definição, seguida de exercícios), o que justifica os aspectos dos Quadros 11 e 12, respectivamente.

Em relação aos sujeitos S1 e S2, verificam-se dificuldades para encontrar estratégias aos problemas de trigonometria. Estratégias envolvendo esse conteúdo não foram discutidas no Curso sobre Resolução de Problemas. Além disso, na literatura revisada, não foram encontrados estudos sobre esse assunto e suas possíveis formas de resolução. Nesse sentido, pesquisas poderiam ser feitas sobre a trigonometria e sua abordagem por meio da resolução de problemas no ensino de Matemática no que diz respeito às possíveis estratégias de resolução.

[11] O Caderno do Aluno foi desenvolvido em 2009, contendo exercícios, mapas, tabelas, indicadores bibliográficos e dicas de estudo para alunos do 6º ao 9º do Ensino Fundamental e Ensino Médio do Estado de São Paulo, entendido como complemento ao Caderno do Professor. Este, por sua vez, contém os conteúdos a serem trabalhados, de acordo com o bimestre e a série. Atualmente, o Currículo de Matemática, assim como o de outras disciplinas, é único para todas as escolas da rede pública estadual.

Um estudo que envolveu o conteúdo de trigonometria e a resolução de problemas foi o de Sormani Junior (2006), porém baseado no uso do *software* Cabri-Géomètre II pelos alunos do segundo ano do Ensino Médio para resolverem problemas. Verificou-se se esses alunos faziam uso de conceitos de trigonometria, o que foi possível observar por meio de seus registros. O trabalho envolvendo recursos didáticos como os *softwares* matemáticos podem auxiliar no trabalho com a resolução de problemas, no entanto são pouco explorados em aula.

Além das dificuldades sobre as estratégias, os sujeitos da nossa pesquisa também tiveram dificuldades em encontrar e propor problemas com mais de uma resposta, tarefa que também consistia da **introdução de um tópico por meio de um problema**.

Os sujeitos S1 e S4 não propuseram problemas que apresentassem mais de uma resposta, conforme apontou S4: *Para introduzir um conteúdo eu não achei não.* Os sujeitos S2 e S3, apenas para o conteúdo de Fração, o qual foi o último conteúdo que ambos trabalharam no estágio, apresentaram alguns problemas com mais de uma resposta. Conforme relatou S3: *Depois que eu dei aula eu entendi que podia ser de frações equivalentes.*

Essas dificuldades ocorreram antes da abordagem de cada um dos conteúdos ministrados. No estágio, tendo em vista os aspectos do trabalho realizado pelos sujeitos nas regências de aula (Quadros 9, 10, 11 e 12), apresentam-se, a seguir, seus relatos quanto às dificuldades nos aspectos referentes ao que foi feito antes de abordar o conteúdo, à discussão das estratégias de resolução dos alunos, à de se nomear as estratégias utilizadas.

Quanto às dificuldades de ter proposto um problema antes de abordar o conteúdo, o Quadro 14 mostra o que os sujeitos relataram.

Sujeito	Dificuldades para introduzir um problema
S1	Porque eles [5ª série] já tinham resolvido exercícios na primeira aula pra introduzir grandezas pra eles. Ela [professora da escola] tinha feito proporção.
S2	A professora já tinha apresentado equação de segundo grau para eles. E em fração a professora já tinha ensinado. [1º ano EM-EJA] Tinha professor e aluno me cobrando, eu tinha que dar conta do conteúdo nessas aulas. Aí o professor até falou para mim: ah, mas você já deu duas aulas e deu um problema só. Meio que não está rendendo, entendeu?
S3	[...] na oitava série a professora no começo ela disse que não tinha problemas e depois ela foi refinando a minha aula de forma que ela deu, entre aspas, “desse” o que ela daria nesse tempo, entende? Depois da segunda aula, foi só o que ela queria. Ela pediu para que eu trabalhasse só com o livro didático. [...] quando você propõe o problema, a ideia é que você veja se é um exercício ou problema. Eu vi que não era nem um exercício e nem um problema, porque eles [EJA] não sabem fazer.
S4	[simetria] Eu fiz uma atividade, assim, mais didática, mas não utilizando resolução de problemas.

Quadro 14: Dificuldades para introduzir um problema.

Os relatos dos sujeitos S1, S2 e S3 evidenciam que as dificuldades não estiveram presentes somente nas atividades de **introdução de um tópico por meio de um problema**. Nessa introdução, aponta-se que algumas dificuldades tiveram relação com a participação dos profissionais da escola para contribuir na formação do futuro professor de Matemática no que diz respeito ao papel do estágio.

Essa participação se relaciona à abertura de espaço que se espera que a escola e os professores que nela trabalham possam fornecer, situação que parece ter contribuído para que os outros conteúdos não fossem introduzidos por meio de um problema, conforme se verifica nos Quadros 9, 10, e 12, e que o trabalho com a resolução de problemas fosse devidamente conduzida por S3.

Um fator que pode ter contribuído para essa situação pode ser decorrente das atitudes dos professores frente ao currículo único de Matemática que se configura, atualmente, nas escolas estaduais do Estado de São Paulo. Nesse currículo, os conteúdos estão definidos para cada bimestre de modo que se um aluno for transferido para outra escola, então não perderá a sequência de estudos. Assim, as atitudes dos professores é justamente não perder ou não se distanciar dos conteúdos trabalhados, o que pode interferir no trabalho de um estagiário.

Essa situação acaba interferindo no trabalho a ser desenvolvido pelo estagiário. Este, às vezes, tem interesse em ministrar uma regência de aula interessante sobre um determinado conteúdo, mas acaba não podendo executá-la adequadamente, porque deve seguir o ritmo dos cadernos (“caderninhos”) e o currículo pronto e acabado da disciplina de Matemática.

Conforme destaca Oliveira (2011), o espaço do estágio precisa ser decorrente de uma parceria entre escola e universidade de modo que os professores da escola participem da formação do futuro professor de Matemática por meio da elaboração conjunta de atividades a serem desenvolvidas com os alunos no estágio. Para essa autora, essa elaboração conjunta deve envolver um diálogo não somente entre equipe pedagógica da escola e estagiário, mas entre estes e os professores da universidade, buscando favorecer condições para que os licenciandos possam refletir sobre as atividades propostas e desenvolver saberes docentes ligados à sua profissão.

Apesar dessa parceria, é possível que o atual Currículo de Matemática do Estado de São Paulo gere outros obstáculos para que possa definir um espaço no horário de trabalho do professor para uma contribuição na formação dos futuros professores de Matemática como a atitude dos professores em não perder a sequência dos conteúdos.

Quanto às dificuldades de se ter discutido as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos, o Quadro 15 mostra o que os sujeitos mencionaram a respeito disso.

Sujeito	Dificuldades na discussão das estratégias de resolução dos alunos
S1	Então, eles mesmos não querem vir na lousa. Então me fala o que você falou que eu coloco, né? Como vocês resolveram? Eles não falam. A conta deles [5ª série] dava errado quando eles tentavam resolver pelo mesmo método que eles estavam fazendo, aí eu apresentei a regra de três.
S2	Mas depois que eu mostrei primeiro, como trabalhava, eles [1º ano EM-EJA] conseguiram resolver os outros dois [problemas de trigonometria], que eram mais ou menos parecidos.
S3	Foi nas últimas aulas que eles foram na lousa. E o seis [atividade nº 6] como tinha cinco probleminhas... probleminhas, exercícios, não sei, dentro do problema.... eu pedi para que eles fizessem na lousa, individual, entende?, para eu poder explorar.
S4	Não sei, no momento eu nem pensei também de em sala estar fazendo isso [de solicitar que os alunos viessem até a lousa mostrar como tinham feito].

Quadro 15: Dificuldades na discussão das estratégias de resolução dos alunos.

De acordo com os relatos dos sujeitos S1, S2 e S3, pode-se evidenciar que uma das dificuldades para se discutir as estratégias de resolução dos alunos foi por conta da falta de iniciativa destes em querer apresentar em lousa ou verbalmente o que haviam feito. Isso pode estar relacionado à falta de cultura de, em sala de aula, solicitar que os alunos apresentem o que fizeram para resolver as atividades e que, assim, sejam levadas em consideração as diferentes formas utilizadas pelos estudantes na resolução dos problemas.

Outra dificuldade a ser destacada foi a falta de iniciativa por parte dos sujeitos em direcionar os alunos a utilizarem diferentes estratégias, dando dicas para tal. Esperava-se que esta situação fosse realizada por parte desses sujeitos, uma vez que diversas estratégias de resolução foram discutidas no Curso sobre Resolução de Problemas. Pode-se afirmar que essa situação é resultado das dificuldades que tiveram para encontrar problemas que fossem resolvidos por outras estratégias, conforme se constata no Quadro 13 a respeito das dificuldades de elaboração das atividades. Desse modo, acabaram utilizando apenas a estratégia (fórmulas e regras) do próprio conteúdo trabalhado nas regências de aula.

As dificuldades dos sujeitos em encontrar problemas com outras estratégias podem estar relacionadas ao não entendimento das estratégias em si que foram discutidas no Curso sobre Resolução de Problemas. Em diversos momentos desse curso, mesmo já tendo discutido determinadas estratégias como, por exemplo, a de “encontrar um padrão”, os sujeitos preferiam utilizar as fórmulas e regras Matemáticas, talvez buscando confirmar a eficácia dessas fórmulas e regras na resolução dos problemas.

Conforme se verifica no Quadro 13, anteriormente apresentado, os sujeitos S1, S2 e S3 “tentaram encontram problemas” com outras estratégias. Porém, as diversas estratégias nem sempre constam em livros didáticos. No âmbito do ensino baseado na resolução de problemas, é necessário que o professor visualize a(s) estratégia(s) que determinado problema pode ser resolvido, o que leva em consideração o seu entendimento da natureza da estratégia.

Verificou-se que, enquanto o sujeito S3, para o último conteúdo trabalhado no estágio (Fração), conseguiu realizar a discussão das estratégias utilizadas pelos alunos, o sujeito S1, também em seu último conteúdo trabalhado (Grandezas Direta e Inversamente Proporcionais), não mostrou ter essa mesma disposição.

Outra constatação de falta de disposição foi a relatada por S4 que evidenciou não ter levado em consideração propor aos alunos que apresentassem as suas estratégias em lousa. Embora o Quadro 12 mostre que houve uma discussão, verifica-se que faltou iniciativa para criar um ambiente onde pudesse discutir as estratégias de resolução dos alunos.

Diante dessa ausência, em sua maioria, de estratégias de resolução para uma discussão em sala de aula, verificou que isso, consequentemente, impossibilitou realizar o aspecto de se nomeá-las. O Quadro 16 mostra o que os sujeitos relataram.

Sujeito	Dificuldades em se nomear as estratégias de resolução
S1	A gente nunca teve esse hábito, nem aqui faculdade. Nem no ensino médio. Então, acho que passou despercebido por mim.
S2	Realmente. Depois eu até percebi que em nenhum eu coloquei nome nas estratégias.
S3	Eu não pensei nisso.
S4	Então, no primeiro ano eu já desisti depois que eu passei os exercícios. Aritmética [Potenciação] também desestimulou porque lá só dei um quadrado e eles não quiseram fazer. Eles nem pra redesenhar o quadrado.

Quadro 16: Dificuldades em se nomear as estratégias de resolução.

Pode-se verificar que não houve dificuldades por parte dos sujeitos S1, S2 e S3 para tratar da questão de se nomear as estratégias dos alunos. O que se contata é que eles, realmente, não pensaram em trabalhar suas aulas com base nesse aspecto. Já o sujeito S4 apontou uma desistência, devido à dificuldade dos alunos, e não tentou realizar o trabalho com a resolução de problemas.

Os relatos dos sujeitos evidenciam que essa situação também foi incoerente, uma vez que a questão de solicitar aos alunos de nomear as estratégias ou que o professor a fizesse foi foco de discussão no Curso sobre Resolução de Problemas e foi feito para todos os problemas resolvidos durante esse período.

Assim, esses sujeitos não permitiram que os alunos potencializassem, entre outras coisas, a construção de relações entre as várias ideias matemática expressas nos problemas propostos (SCHROEDER; LESTER; 1989). Além disso, também não contribuíram para que os alunos verificassem que várias estratégias podem ser utilizadas e que isso mostra que não há somente um único caminho de resolução (CHARLES, 1985), o que poderia ajudar a mudar a crença, criticada por várias pesquisas, de que para obter a resposta é necessário o uso direto de fórmulas e técnicas prontas e acabadas.

De modo geral, além dessas dificuldades em trabalhar na perspectiva da resolução de problemas, durante o estágio, na escola básica, outras dificuldades foram apontadas. Elas são referentes aos conhecimentos básicos de Matemática dos alunos. Essa situação foi destacada pelos sujeitos como o fator que mais contribuiu para prejudicar a tentativa de trabalho com a resolução de problemas. O Quadro 17 mostra o relato dos sujeitos sobre esse aspecto.

Sujeito	Dificuldades oriundas dos conhecimentos básicos de matemática dos alunos
S1	No EJA foi mais difícil, eles eram muito fraquinhos, talvez por ser EJA eles tinham muita defasagem [...] É mais pelas dificuldades deles do que pela resolução de problemas. Tinham dificuldades com coisas básicas de divisão. Se você colocasse número negativo para eles era coisa de sete cabeças. Então isso foi um impasse.
S2	[...] porque eles [8 série-EJA]. não sabiam o que era potência. Não sabiam elevar... tipo... dois ao quadrado. Não são todos, mas essa sala aqui me decepcionou. [1º ano EM-EJA] Não sabiam nem o que era ângulo, não sabiam nem o que era altura. [...] eles não conseguiram entender o que estava escrito no problema. Não sabe quanto é dois elevado a dois. Isso aí é complicado. Mesmo conversando em grupo, mesmo eu estando lá tirando dúvidas e tal eles não conseguiam.
S3	O problema era, por exemplo, eles [EJA] não saberem o que é três sobre raiz de dois, o que que aquilo representa, o que significa. Esses pré-requisitos, vou dizer entre aspas “bobos”, que já deve saber para poder fazer qualquer coisa na matemática eles não sabiam. Mas isso foi o pior, você fica mais frustrado.
S4	Na de aritmética até mostraram interesse pelos problemas, só que não tinham domínio, não sabiam conteúdos, pré-requisitos. E no primeiro ano que eu não gostei é realmente o desinteresse. Eu passei os exercícios... os problemas, e eles nem se importaram no que estavam fazendo e realmente não tinham interesse. A dificuldade mesmo é a falta de pré-requisitos dos alunos. Sem eles é impossível estar trabalhando.

Quadro 17: Dificuldades oriundas dos conhecimentos básicos de matemática dos alunos.

Todos os sujeitos destacaram a falta de conhecimentos matemáticos básicos dos alunos para resolver os problemas, o que pode estar relacionado ao pouco domínio sobre os **conhecimentos linguístico**, **semântico** e **procedimental** (MAYER, 1992). Assim, esses alunos tiveram dificuldades em utilizar e combinar conceitos, procedimentos e princípios, aprendidos anteriormente, para tentar encontrar uma solução para os problemas que foram propostos (KLAUSMEIER; GOODWIN, 1977; BRITO, 2006).

A falta de domínio de conhecimentos básicos de Matemática dos alunos é uma realidade e é consequência, entre outros fatores, de uma cultura escolar que ainda tem priorizado o ensino por meio de definições, regras e fórmulas para serem aplicados em exercícios que visam à memorização.

Diante dessa realidade, é importante que políticas públicas sejam propostas visando um trabalho na escola que favoreça aos alunos que apresentam dificuldades em aprender Matemática, porque o sistema de recuperação instituído nas escolas não tem dado conta de levar o aluno a aprender conceitos básicos de Matemática. Desse modo, as deficiências conceituais apresentadas pelos alunos acabam perpassando todos os anos da escolaridade. Portanto, essas dificuldades também são percebidas no ensino superior.

De modo geral, os relatos dos sujeitos S1, S2 e S3 mostram que as dificuldades em conhecimentos básicos de Matemática foram mais visíveis quando trabalharam com os alunos da EJA. Desse modo, o sujeito S2 acabou optando por fazer uma revisão dos conceitos que estavam envolvidos nos problemas do conteúdo de Trigonometria no triângulo retângulo que foram propostos aos alunos do 1º ano do Ensino Médio da EJA.

> [...] eu já dei uma explanação geral antes de começar. Eu falei do teorema de Pitágoras, porque eles poderiam utilizar. Ai foi quando eu fui falar o que era altura, dei uma geral no que era ângulo, no que era área, no que era perímetro. Embora eles já tivessem visto esses conteúdos, não sabiam o que eram.

Contudo, nas regências de aula, verificou-se que as dificuldades dos sujeitos em encontrar problemas com mais de uma estratégia de resolução acabou influenciando a proposição dessas estratégias e, assim, discuti-las em sala de aula. Um fator que também contribuiu para as dificuldades no trabalho com a resolução de problemas foi a falta de conhecimentos matemáticos básicos dos alunos, especialmente dos alunos da EJA.

5.4 O conhecimento (re)constituído sobre o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas

Neste último eixo de análise, apresenta-se o conhecimento construído ou mesmo desenvolvido pelo sujeito após a formação oriunda da participação no Curso sobre Resolução de Problemas e do trabalho realizado nas regências de aula (Intervenção), tendo em vista os dados resultantes da entrevista final.

Apresenta-se tal conhecimento por meio de quatro categorias de análise: *Sobre o que é um problema e o que é um exercício; Sobre como conduzir o ensino por meio da resolução de problemas; Como avalia as suas condições, hoje, para ensinar Matemática por meio da resolução de problemas; Tipo de ensino que o sujeito realizaria na escola básica.*

O Quadro 18 mostra o relato dos sujeitos a respeito do que sabem sobre o significado de problema, diferenciando-o dos exercícios.

Sujeito	Sobre o que é um problema e o que é um exercício
S1	O problema é quando eu tenho que pensar para resolver. Seria aquilo que a gente não tem uma forma imediata para resolver. Que a gente tem que pensar, tem que analisar, tomar decisões e ver qual é o melhor caminho. [...] pensar nos passos que eu vou fazer para chegar na solução. O exercício seria uma coisa mais imediata. Aplicação de fórmula, esse tipo de coisa. Tem uma fórmula pronta que eu possa aplicar ou então uma coisa que depois de eu ter feito tantas vezes ela se torna mecânica, automática.
S2	[...] a gente viu que problema de matemática depende da pessoa que está trabalhando com esse problema. O que é um problema para um aluno pode não ser um problema para mim. Mas problema, de maneira geral, é tudo aquilo que a gente olha e a gente não consegue resolver de imediato com técnicas. A gente tem que analisar. Tem que criar estratégias para conseguir resolver. A pessoa tem que pensar mais para conseguir resolver o problema. Envolve mais de uma habilidade, eu acho, vamos dizer assim. Estabelecer estratégia, planejar e tal. [...] exercício a gente só aplica, né?... as operações. A gente lê e já sabe o que tem que fazer. Ah, a gente já sabe, por exemplo, a conta que vai usar diretamente num exercício. Se é de multiplicação, se é de divisão, se é... é só efetuar um cálculo.
S3	Oh, problema de matemática faz com que a pessoa não tenha uma visão de como vai resolver aquilo rapidamente. Ela simplesmente pensa. Simplesmente não, ela pensa! Ela busca coisas que ela sabia anteriormente para ela poder dar conta de resolver determinado problema. [...] algumas estratégias para resolver determinado problema. O exercício ela já faz meio que mecanicamente, sabe? O exercício eu já sei fazer, eu vou lá e faço, meio, entre aspas, mecânico.
S4	Problema de matemática, como a gente viu... você não sabe fazer de imediato. Você vai estar buscando alguns conceitos que você já sabe. Você vai e busca conceitos e maneiras de se trabalhar isso pra desenvolver essa resolução, esse problema. O exercício é imediato. Aplicação direta da técnica.

Quadro 18: Respostas dos sujeitos sobre o que é um problema e um exercício.

De acordo com o Quadro 18, os quatro sujeitos apresentaram uma visão coerente sobre o significado de problema, uma vez que mencionaram que se trata de uma situação que não é imediata de se resolver, ou seja, que não há um caminho óbvio que os leve até a solução (MAYER, 1985).

Em termos do processo de resolução, destacaram a necessidade de pensar, encontrar estratégias e de se utilizar conhecimentos anteriores, situação relacionada à tomada de decisão sobre o caminho que deve ser seguido para alcançar uma resposta (ECHEVERRÍA; POZO, 1998). Além disso, apresentaram uma visão condizente da diferença que o problema tem em relação aos exercícios, quando destacaram que estes propiciam uma resolução imediata, ou seja, utilizamos mecanismos que nos levam de forma imediata à solução (ECHEVERRÍA; POZO, 1998).

Comparando esses conhecimentos com os apresentados pelos sujeitos antes de iniciar o processo de intervenção, pode-se apontar que S1, S2 e S4 mantiveram as mesmas ideias, pois seus relatos indicam que resolver um problema é o ato de superar um obstáculo na busca de uma solução. Já para o sujeito S3, pode-se apontar que constituiu conhecimento acerca do significado de problema e de seu processo de resolução, uma vez que passou da ideia de **resolução de problemas como capacidade** (STANIC; KILPATRICK, 1990) para aquela que considera a resolução de problemas como uma tomada de decisão (ECHEVERRÍA; POZO, 1998).

Com relação à forma de como conduzir o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas, o Quadro 19 mostra os relatos dos sujeitos.

Sujeito	Sobre como conduzir o ensino por meio da resolução de problemas
S1	Então, a gente chega com uma situação-problema, vê como o aluno tenta resolver isso, quais estratégias que ele utiliza para resolver o problema e depois a gente pode sugerir, né?, mostrar para ele que ali existe uma outra forma ainda de resolver que é aquele do conteúdo que a gente quer ensinar. Que é a introdução de um conteúdo através de uma situação-problema. Bom, eu... depois eu fazia um apanhado mais teórico do conteúdo e depois propunha mais... alguns exercícios mesmo para fixação e umas situações-problemas que eles poderiam utilizar os conteúdos.
S2	A resolução de problemas consiste em... antes da gente ensinar um conteúdo, equação de segundo grau, probabilidade, fração, a gente propõe um problema para o aluno. [...] esse problema ele pode ser resolvido de outras maneiras sem ser esse conhecimento que ele vai aprender. Ele pode fazer por tentativa e erro. Ele pode fazer construção de tabelas. Ele pode resolver o problema de outras formas sem ser com o conteúdo que a gente vai ensinar. É importante que os alunos sejam divididos em grupos para que eles troquem experiências, conversem, né? E a gente como professor não pode dar a resposta imediata, a gente tem que ser um motivador. A gente tem que questionar o aluno de como que ele vai chegar naquela resposta. Não dar a resposta. Para ver o que o aluno está pensando e conduzindo ele para chegar num resultado esperado. E sugerir que ele tente encontrar um padrão, construa tabelas, para analisar o que o problema está pedindo e consiga chegar na resposta esperada. Depois... vou falar mais ou menos o que eu tentei propor no meu trabalho, tá?... depois eu ia a lousa ou pedia para algum aluno que tinha conseguido resolver ir até a lousa e mostrar assim para os alunos como foi feito, discutindo. Se tinha outras estratégias, se não tinha, se alguém tinha feito diferente daquilo ou não tinha. Aí depois que ele resolveu esse problema... espérasse que ele consiga resolver esse problema com outras estratégias, enfim... aí que a gente vai adentrar no conteúdo e mostrar que a gente tem outras formas de fazer aquilo lá também, que é o conteúdo que vai ser trabalhado. Depois, é claro, com certeza dá pra trabalhar outra vez com problemas. Se é um exercício, é uma forma mais mecânica. O aluno tem que saber a técnica, vamos dizer assim, o conteúdo especificamente.
S3	Eu tenho um determinado assunto e, ao invés de já conceituar o assunto para o aluno, ao invés de explicar a matéria, vamos dizer assim, entre aspas, para o aluno, eu proponho alguns problemas para eles e tento enxergar neles quais estratégias, as dificuldades que eles tiveram, essas coisas, para eles poderem dar conta para resolver o problema. [...] a gente discuti o problema. Depois acaba dizendo outros meios de resolver determinado problema, mas que há uma ferramenta matemática que dá conta disso e eu posso mostrar qual a ferramenta matemática. Depois de mostrar a ferramenta, dá para explorar o conceito. Alguns tem vários métodos de fazer com que eles trabalhem o conceito. Tanto com outros problemas, tanto contextualizando, tanto com exercícios.
S4	Comecei com um problema inicial, na sexta série, onde precisa saber área e perímetro. Dei um problema que era pra achar a área e eles não souberam. Por que eles não acharam? Porque eles não tinham domínio... não sabiam o que era perímetro e não sabiam o que era área. Na outra aula trabalhei com eles o que era área e o que era perímetro. Daí eu trabalhei o perímetro da mesa, a área da mesa e eles não tinham noção.

Quadro 19: Respostas dos sujeitos sobre como conduzir o ensino por meio da resolução de problemas.

De acordo com o Quadro 19, pode-se apontar, de modo geral, que somente os sujeitos S1, S2 e S3 apresentaram uma compreensão da forma como poderia ser conduzido um ensino por meio da abordagem da resolução de problemas, evidenciando um desenvolvimento desse conhecimento pedagógico – **saber da formação profissional** (TARDIF, 2007). Destaca-se que a forma mais completa foi descrita pelo sujeito S2.

De modo específico, verifica-se que alguns aspectos do trabalho com a resolução de problemas, relacionados à **introdução de um tópico por meio de um problema**, ao **auxilio aos alunos durante a tentativa de resolução** e à **discussão das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos**, não foram contemplados nas falas desses três sujeitos. O Quadro 20 mostra esses aspectos que faltaram em seus relatos.

Sujeito	Aspectos que faltaram nos relatos dos sujeitos
S1	• A importância de se propor problemas com mais de uma resposta. • Auxílio aos alunos sobre suas dificuldades, fazendo questões que ajudassem na resolução. • Discussão das estratégias de resolução que os alunos utilizaram.
S2	• A importância de se propor problemas com mais de uma resposta.
S3	• A importância de se propor problemas com mais de uma resposta.
S4	O único aspecto que esse sujeito evidenciou foi que se deveria apresentar um problema antes de abordar o tópico a ser estudado.

Quadro 20: Aspectos da resolução de problemas que faltaram nos relatos dos sujeitos.

Nota-se que o sujeito S4 mostrou desconhecer a forma de conduzir o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas. Durante a entrevista final, uma das questões feitas a esse sujeito foi a seguinte: *você falou que tinha iniciado o assunto com um problema que você deu. A partir daí, o que você precisava fazer para dar continuidade ao trabalho?* A resposta de S4 foi a seguinte:

> Hum, não sei. Na verdade, a ideia era trabalhar com raiz quadrada. Apresentar raiz quadrada pra eles. Mas, daí não deu e eu apresentei o método tradicional ((sorriu)). Lousa, giz e exercício. Quer você queira ou não pelo menos naquele molde eu vi que... pelo menos algumas pessoas da sala vai estar aprendendo. Não é esse o ideal. Porém, é o que temos.

O fato do sujeito S4 ter abandonado, logo no primeiro conteúdo (Potenciação), o trabalho com a resolução de problemas, foi decorrente, segundo seus relatos (Quadros 17 e 19), da falta de conhecimentos básicos de Matemática dos alunos, o que tirou seu interesse em dar prosseguimento às aulas.

É importante destacar que essa falta de conhecimentos básicos, oriunda da cultura escolar atual, apontada anteriormente, pode prejudicar o ensino-aprendizagem com a resolução de problemas, uma vez que para resolver um problema é necessário que os alunos recuperem, da estrutura cognitiva, conceitos, princípios e procedimentos matemáticos, anteriormente aprendidos, para que sejam articulados e, assim, auxiliem na busca da solução (BRITO, 2006).

Além disso, outro fator que ajuda a explicar esse abandono foram as dificuldades que o sujeito S4 apresentou para elaborar as sequências didáticas e trabalhá-las, segundo o que aprendeu no Curso sobre Resolução de Problemas, nas regências de aula.

Pode-se afirmar que a execução de uma sequência didática que não contemplava a maioria dos aspectos da abordagem da resolução de problemas, quando confrontada com a falta de conhecimentos básicos dos alunos, acabou descaracterizando essa abordagem, o que levou o sujeito S4 a abandoná-la.

Apesar desse abandono, a avaliação que S4 faz das suas condições para ensinar Matemática por meio da resolução de problemas indica que são boas. O Quadro 21 mostra essa avaliação, segundos o que os sujeitos relataram.

Sujeito	Como avalia as suas condições, hoje, para ensinar Matemática por meio da resolução de problemas
S1	Ah, acho que agora eu tenho mais ideia do que é a resolução de problemas. Se eu quiser optar por usar resolução de problemas eu acho que sou capaz. Antes eu não era. Porque a gente realmente não tinha muita ideia do que era resolução de problemas.
S2	Com certeza estou muito mais preparada. Partindo de mim, eu vou conseguir aplicar em sala de aula o que a resolução de problemas propõe. Isso eu acho que eu consigo. Agora eu já sei mais ou menos como os alunos vão reagir diante de um problema. A quantidade de problemas que eu tenho que propor para eles numa aula. Separar em grupo e deixar eles conversarem entre si. [...] se eu fosse discutir estratégias, pedir para o aluno ir a lousa resolver, eu acho que um problema só por aula. Não vou dizer que eu vou ter retorno, porque eu acho que os alunos, no ensino de hoje, da experiência que eu tive, os alunos eles estão muito preguiçosos. Muita dificuldade eles apresentam. Não tem autonomia nenhuma.
S3	Eu estou mais maduro do que quando eu comecei. Só que a questão é: eu quero ver isso na prática, só que na minha prática docente. Eu preciso dar aula, ver se é realmente melhor, se contribui mais e vestir a camisa.
S4	Acho que são boas ((sorriu)). Acho que o repertório que eu tenho dá pra trabalhar de maneira legal. O que eu acredito é que você não vai trabalhar resolução continuamente no ano inteiro. São alguns momentos que a gente pode estar trabalhando, mas não de maneira contínua. Isso eu acho que não faria.

Quadro 21: Respostas dos sujeitos sobre como avaliam suas condições, hoje, para ensinar Matemática por meio da resolução de problemas.

De acordo com o Quadro 21, todos os sujeitos destacaram que teriam condições de trabalhar na perspectiva da resolução de problemas. Destaca-se que o sujeito S2 acabou compreendendo que trabalhar nessa perspectiva não corresponde a apresentar uma lista com vários problemas a serem resolvidos pelos alunos, conforme o fez para o conteúdo de equação de 2º grau (Quadro 10). Para poder discutir as estratégias, percebeu que a abordagem de um problema pode ser suficiente e é o que favorece o trabalho com a resolução de problemas.

A compreensão do trabalho com a resolução de problemas implica em saber a função que os problemas têm no ensino que seria o de possibilitar o uso de conhecimentos anteriores para tomar uma decisão sobre o processo de resolução que deve ser seguido, buscando responder a um objetivo (ECHEVERRÍA; POZO, 1998).

Comparando esses relatos do Quadro 22 com os que foram mostrados antes da intervenção, pode-se verificar que os sujeitos S1, S2 e S3 acabaram por constituir conhecimentos acerca do trabalho com a resolução de problemas. Esses sujeitos apresentaram, na entrevista inicial, ideias baseadas na abordagem de **ensinar para resolução de problemas** e, hoje, tendo em vista a análise do Quadro 19, mostraram uma visão que se encontra na abordagem de **ensinar via resolução de problemas** (SCHROEDER; LESTER, 1989).

Em contrapartida, o sujeito S4, antes da intervenção, tinha sido o único a apresentar um aspecto importante da resolução de problemas, relacionado ao trabalho com as estratégias de resolução. No Quadro 21, observa-se que apresentou que teria condições, hoje, de trabalhar nessa perspectiva. Porém, conforme análise anterior, referente ao Quadro 20, verificou-se que esse sujeito não apresentou conhecimentos sobre a forma de conduzir o ensino por meio da resolução de problemas que pudessem afirmar que suas condições são boas, conforme esse mesmo sujeito relatou. Nesse caso, não houve nem reconstituição e nem mesmo constituição de saberes relacionados à abordagem da resolução de problemas no ensino de Matemática.

Assim, tendo em vista esses conhecimentos que os sujeitos constituíram ou não, o Quadro 22 mostra os seus relatos sobre o tipo de ensino que realizariam na escola básica.

Sujeito	Tipo de ensino que o sujeito realizaria na escola básica
S1	Se eu tivesse que dar aula de novo no EJA eu não utilizaria a resolução de problema. Eu acho que perdi muito tempo... não vou dizer perder tempo porque de certa forma a gente tenta ensinar as operações pra eles naquilo que eles tinham dificuldade. Mas o objetivo que era ensinar trigonometria não foi... eu acho que não teve tanto êxito. Em matrizes eu poderia até manter, mas em trigonometria eu não utilizaria resolução de problemas. Muito difícil achar um exercício que tenha... pra mostrar pra eles: olha, tem essa forma de resolver aqui. Já para os alunos da quinta série eu não mudaria não. Achei que foi bem satisfatório.
S2	Desde que seja um processo contínuo. [...] você tem que pegar o aluno lá da primeira série até o terceiro colegial, sabe? [...] se eu fosse professora, porque eu não vou ser ((sorriu)). Porque é a... como que eu diria?... a defasagem que os alunos apresentam. Sabe, tentar mudar o problema, deixar numa linguagem mais acessível. [...] facilitar a escrita do problema. Que mais? Se eu fosse professora, trabalhar sempre... sabe, com a resolução, não o conteúdo só e jogar aí. Com o hábito de pensarem, de lerem, de entenderem, de conseguirem compreender o problema. Dar mais autonomia para o aluno, porque o aluno fica muito assim: só olha o que o professor faz. Cobrar o aluno, ele tem que ter autonomia. O professor tem que saber o que o aluno está pensando. Não é só enfiar, enfiar e jogar conteúdo na goela abaixo e é assim e acabou. [...] o aluno tem que amadurecer a metodologia da resolução de problemas na cabeça dele. Porque você chega lá e eles olham e não tem interesse mais. E outra, é persistência. Tem que insistir, insistir, insistir e insistir.
S3	Na oitava série é evidente que eu não iria trabalhar daquele jeito. Eu achei que foi um trabalho muito técnico esse da oitava série. Até parece que eu estou criando robôs e não gente. Eu trabalharia assim oh: quando você pega o aluno novinho e está formando, tem possibilidade de transformar esse menino. Eles vão aprender muito se fizer a resolução de problemas, mas quando você pega para formar. No EJA eu não... atualmente, no sistema de ensino no EJA, é impossível trabalhar nessa perspectiva da resolução de problemas.
S4	Só funciona se você tem a sua própria sala. Se você acompanha ela desde o início e, a partir disso, você consegue estar observando quais são as dificuldades dela. O que eles já sabem, o que eles não sabem. Com isso, você consegue aplicar resolução de problemas para estar fazendo de forma... não só aplicando, fazendo que seja uma aprendizagem significativa para o aluno. Para mim não deu certo.

Quadro 22: Relato dos sujeitos sobre o ensino que realizariam na escola básica.

De modo geral, todos os sujeitos evidenciaram que o ensino a ser realizado na escola deve voltar sua atenção aos conhecimentos de Matemática dos alunos e às dificuldades que apresentam. Os sujeitos S2, S3 e S4 apontaram uma questão importante que é a de realizar um trabalho com a resolução de problemas de forma contínua. Quando se coloca o foco do ensino na resolução de problemas, o objetivo é favorecer a compreensão dos alunos, buscando ajudá-los a transformar a "visão estreita de que matemática é apenas ferramenta para resolver problemas para uma visão mais ampla de que matemática é um caminho de pensar e organizar experiências". (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 39).

Por fim, apresentam-se, no Quadro 23, os relatos dos sujeitos referentes à avaliação que fizeram do processo de intervenção do qual participaram (Curso sobre Resolução de Problemas e o trabalho realizado nas atividades de estágio por meio das regências de aulas).

Sujeito	Avaliação dos sujeitos sobre a Intervenção
S1	Eu ouvia falar, mas saber de verdade, assim, eu acho que a gente não tinha ideia do que era. Com o Curso a gente viu o que era, do que se tratava a resolução de problemas e nós tivemos a oportunidade de fazer o estágio... de ver por nós mesmo se a gente, né?, concordava, se pra gente isso dava certo, ver se... pra gente funcionava, né?
S2	Eu acho que foi muito bom, porque ((sorriu))... na entrevista inicial você pode até perceber que eu já tinha aprendido, na faculdade, acho que em Didática, o que era resolução de problemas e eu não sabia o que era resolução de problemas. Assim... já tinha sido falado, entendeu? Não mostrado: óh, a gente vai trabalhar assim, assim, assado com resolução de problemas. Eu não sabia, por exemplo, que eu tinha que propor o problema antes do conteúdo. Não sabia! Agora não, agora eu sei o que é resolução de problemas. Bom, acredito que eu saiba o que é a resolução de problemas ((sorriu)). [...] porque nas outras vezes eu tinha visto poucas aulas. Neste semestre não, a gente viu um semestre e a gente não discutiu só a teoria. A gente não leu só textos. A gente realmente viu como que aplicava isso na sala de aula. Foi o que você falou... você mostrou os problemas, as estratégias, tudo. Acho que foi muito legal. Eu lembro que em grande parte dos problemas era de probabilidade. Se eu tivesse trabalhado esse conteúdo acho que eu me daria muito melhor. Teria menos dificuldades na hora de escolher problemas. A proposta foi muito boa.
S3	Você trabalhou numa perspectiva da resolução de problemas com a gente. O fato de propor os problemas, depois ouvir nossas estratégias e falar: óh, tem outras estratégias, vocês sabem estratégias porque vocês sabem matemática. Era fácil! É o que eu falei, no começo eu não tinha muita insegurança. Depois que eu vi mais coisas no Curso, chegou aqui [quinta série] eu já acho que eu trabalhei melhor. Porque o fato de resolvermos por algumas estratégias e depois entender que isso pode dar resultados [respostas] diferentes, no final eu percebi que dava para discutir, que foi isso que eu fiz. Hoje eu já tenho uma visão melhor com relação à resolução de problemas do que eu tinha antes.
S4	Achei bom, porque todo conhecimento a mais sempre é melhor. Todo direcionamento por determinada metodologia na área é sempre... bastante válido. A gente trabalhou com as estratégias, alguns textos... [...] dá pra ter uma noção pra se trabalhar em sala de aula de modo legal.

Quadro 23: Avaliação dos sujeitos sobre a Intervenção.

Como pode ser verificado nos relatos dos sujeitos S1, S2, S3 e S4, apesar de terem discutido sobre a temática da resolução de problemas no curso de Licenciatura em Matemática, foi por meio da intervenção que puderem ampliar suas compreensões acerca da resolução de problemas, desenvolvendo saberes docentes (GAUTHIER et al., 1998; TARDIF, 2007). Destaca-se que o sujeito S4 foi o único que não considerou o trabalho com as regências de aula. Além disso, esse sujeito apontou não ter visto nenhuma novidade na intervenção: *na verdade, as ideias são as mesmas. O essencial é o mesmo, então... acho que equivalente ao que já vi ((sorriu)).*

De modo específico, os sujeitos S1, S2 e S3 destacaram a importância das discussões a respeito das estratégias de resolução, dos textos sobre essa temática e, sobretudo, o trabalho realizado nas atividades de estágio. Já a análise dos resultados do sujeito S4 indicou pouca ampliação nos aspectos do trabalho com essa temática, uma vez que não os destacou em seus relatos.

CONCLUSÕES

A presente pesquisa teve como interesse investigar questões relacionadas à formação de futuros professores de Matemática sobre resolução de problemas. Assim, o objetivo foi o de responder aos seguintes problemas de pesquisa: **Uma intervenção, baseada em um Curso sobre Resolução de Problemas e em regências de aula, favorece a formação do futuro professor de Matemática para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar por meio da resolução de problemas? Quais as possibilidades e limites para a implementação do trabalho com a resolução de problemas nas regências de aula do estágio curricular supervisionado pelos futuros professores de Matemática?**

A intervenção teve como primeira etapa a participação dos sujeitos no Curso sobre Resolução de Problemas, o qual envolveu as seguintes atividades: (a) resolução de uma variedade de problemas para se discutir as estratégias de resolução dos sujeitos e discutir as estratégias propostas pelo pesquisador, as quais foram nomeadas para melhor caracterizá-las; (b) apresentação e discussão da teoria sobre o trabalho com a resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática, o que envolveu a função dos problemas no ensino, as etapas de resolução de problemas e as ações do professor para conduzir esse trabalho.

Na resolução dos problemas, os sujeitos apresentaram uma timidez para expor suas estratégias de resolução em lousa para uma discussão. Foi a partir do problema seis que isso começou a mudar. Verificou-se uma participação ativa que se estendeu até ao problema 20. A partir do problema 21 até o problema 28 esse tipo de comportamento não mais ocorreu, pois nenhum deles trouxe resolvidos esses problemas ou então não tinham conseguido resolvê-los. Uma das dificuldades encontradas foi a de realizar construções geométricas com régua e compasso.

Na discussão teórica dos aspectos que envolviam a abordagem da resolução de problemas no ensino e na aprendizagem, período entre os problemas 12 e 13, os sujeitos apresentaram, também, uma participação ativa, fazendo questionamentos e se referindo a alguns problemas que foram resolvidos para mostrar se haviam compreendido esses aspectos.

Na segunda etapa da intervenção, os sujeitos elaboraram três sequências didáticas – aritmética, álgebra, geometria – para serem implementadas nas atividades de regências de aula da disciplina de Estágio Curricular Supervisionado, na escola básica. Tais sequências deveriam ser realizadas na perspectiva da resolução de problemas, seguindo, assim, o que foi visto na primeira etapa da intervenção: Curso sobre Resolução de Problemas.

Nas regências de aula, verificou-se que somente o sujeito S3 conseguiu abordar um problema antes de introduzir cada um dos conteúdos trabalhados. As dificuldades dos outros participantes estiveram relacionadas ao fato de que os professores da escola já tinham iniciado o estudo dos conteúdos.

Essa dificuldade tem relação com a falta de parceria entre escola e universidade. Tal parceria implica a participação dos professores da escola na formação dos futuros professores. Caso essa parceria existisse, possivelmente os professores das escolas onde foram realizados os estágios teriam concedido o espaço necessário de suas aulas aos sujeitos que teriam contemplado a introdução de um problema antes de tratar dos conteúdos onde isso não ocorreu.

Outra dificuldade identificada nas regências de aula foi com relação a proporcionar um ambiente de discussão de estratégias de resolução dos alunos. Dois fatos podem ajudar a explicar essa situação: (a) o não retorno por parte dos alunos em tentar encontrar e apresentar, em sala de aula, suas estratégias; (b) por conta desse não retorno, a falta de iniciativa dos sujeitos em propor e direcioná-los a outras estratégias para encontrar a resposta.

O não retorno dos alunos foi justificado pelos sujeitos como a falta de conhecimentos básicos de Matemática desses estudantes, principalmente os da EJA, e da autonomia para aprender e mostrar aos colegas o que tinham feito. No âmbito da cultura escolar atual, que tem se baseado em definições, fórmulas e exercícios, essa falta de conhecimentos tem impossibilitado aos professores da escola básica dar continuidade ao ensino e a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos. Nesse sentido, isso também influenciou o trabalho com a resolução de problemas dos sujeitos.

Sobre a proposição de estratégias de resolução aos alunos para dar continuidade ao trabalho, verificou-se que isso foi decorrente do fato de os sujeitos terem tido dificuldades em encontrar problemas com várias estratégias. Apesar de S2, S3 e S4 terem mencionado algumas delas (tentativa e erro e construção de tabela) em suas regências de aula, não conduziram os alunos para utilizá-las de modo que pudessem compreendê-las. Esses sujeitos simplesmente resolveram-nas diretamente em lousa.

Por conta dos sujeitos não terem levado em consideração problemas com diferentes estratégias para a maioria das suas sequências didáticas, consequentemente, outros aspectos como nomear as estratégias e retomar o trabalho com novos problemas não foram possíveis de serem realizados. Além disso, esses problemas, em sua maioria, não apresentavam mais de uma resposta para que isso fosse discutido com os alunos.

De modo geral, o trabalho realizado pelos sujeitos em suas últimas sequências didáticas evidenciou que os sujeitos S2 e S3 conseguiram envolver os alunos em um ambiente de discussão de suas estratégias de resolução. Destaca-se que S3 realizou o trabalho com o conteúdo de Fração com quase todos os aspectos da resolução de problemas com exceção de se nomear as estratégias. Ao contrário dessa situação, S1 não conseguiu realizar nenhum desses aspectos para o conteúdo de Grandezas Direta e Inversamente Proporcionais.

Verificou-se que o sujeito S4 abandonou o trabalho com a resolução de problemas desde a primeira sequência didática nas suas regências de aula. Esse sujeito exerceu, de forma arbitrária, um ensino baseado em definições e exercícios, seguindo a cultura escolar atual. Segundo S4, um fator que contribuiu para isso foi a falta de conhecimentos básicos dos alunos que trabalhou e que pouco permitiu a continuidade das aulas.

Assim, antes da intervenção, foi verificado que S1, S2 e S4 tinham entendimento sobre o que significava um problema. Porém, foi constatado que, juntamente com S3, não tinham conhecimentos acerca de como conduzir o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas. Isso se caracterizou a partir de seus relatos que indicaram um trabalho que deveria se iniciar pelo conteúdo em si e não por meio de um problema, evidenciando essa cultura escolar atual. Somente S4 havia feito referência ao trabalho com as estratégias de resolução.

Após o processo de intervenção, verificou-se que o sujeito S3 constituiu conhecimento acerca do que seria um problema, uma vez que antes desse processo apresentou uma ideia que não condizia a esse termo.

De modo geral, os sujeitos S1, S2 e S3, após esse processo, conseguiram constituir conhecimentos acerca de ensinar Matemática por meio da resolução de problemas. O que foi aprendido no Curso sobre Resolução de Problemas e o trabalho feito nas regências de aula na escola permitiram a compreensão dos vários aspectos dessa temática, analisados em nossa pesquisa, o que pode ser constatado em seus relatos na entrevista final.

No entanto, apenas o sujeito S4 mostrou não ter condições de trabalhar com a resolução de problemas, uma vez que não tentou realizar suas aulas nessa perspectiva. Esse sujeito destacou que preferiu seguir o modelo tradicional, baseado somente em lousa e em iniciar por uma definição. Além disso, seus relatos, após a intervenção, revelaram não ter adquirido conhecimentos sobre os aspectos que envolveram essa abordagem.

Diante dos resultados apresentados pelos sujeitos da pesquisa, antes da intervenção, verificou-se que não tinham condições de ensinar Matemática por meio da resolução de problemas.

Desse modo, o Curso sobre Resolução de Problemas, na medida em que favoreceu aos sujeitos contato com a resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática, permitiu que tivessem condições de elaborarem sequências didáticas nessa perspectiva. No entanto, destaca-se que essa elaboração, na pesquisa, ocorreu sem a interferência do pesquisador, justamente porque a elaboração de sequências didáticas já tinha sido foco anterior na disciplina de Didática da Matemática.

Os dados mostraram que os sujeitos tiveram dificuldades para encontrar problemas com várias estratégias para serem trabalhados nas regências de aula. Talvez, uma situação que o curso ministrado não favoreceu foi o de não discutir e analisar a elaboração de suas sequências didáticas antes de implementarem-nas nas atividades de estágio. Desse modo, pesquisas poderiam ser feitas, levando-se em consideração esse favorecimento.

Outra situação que poderia ser repensada seria o formato do Curso sobre Resolução de Problemas. Poder-se-ia trabalhar com menos problemas. Poder-se-ia problematizar os aspectos teóricos discutidos.

No caso das regências de aula, o favorecimento à formação dos sujeitos se deu pelo fato de vivenciarem as possibilidades e limites do trabalho com a resolução de problemas na escola em um processo que envolveu a relação entre teoria e prática, ou seja, entre curso e regências de aula.

Pode-se apontar que as possibilidades e os limites identificados nesse trabalho, no estágio, estiveram interrelacionados. Assim, isso pode ser compreendido por meio dos seguintes limites: (a) limites relacionados à proposição de um trabalho que contemplasse os aspectos da resolução de problemas, o que leva em consideração encontrar problemas que possam ser resolvidos por mais de uma estratégia e problemas que apresentem mais de uma solução; (b) limites relacionados à abertura e à oportunidade dos professores da escola pública para que um estagiário possa realizar o trabalho que foi planejado; (c) e limites relacionados aos conhecimentos básicos que os alunos da escola básica possuem para que o professor possa realizar o trabalho com a resolução de problemas, bem como a autonomia desses alunos em sala de aula para conduzir sua aprendizagem.

No caso do sujeito S4, o qual apresentou, na entrevista final, pouco conhecimento sobre os aspectos da resolução de problemas, apenas não encontrou no estágio o limite relacionado à abertura de espaço pelos professores da escola. As suas sequências didáticas foram prejudicadas por causa da falta de autonomia e conhecimentos básicos de Matemática dos alunos. Por outro lado, os dados mostraram que na elaboração dessas sequências não propôs estratégias aos alunos de modo que pudesse dar continuidade ao trabalho na perspectiva da resolução de problemas. Desse modo, faltou disposição de S4 para tentar conduzir o ensino de Matemática nessa abordagem.

Contudo, de forma geral, a intervenção favoreceu a formação dos sujeitos para ensinar Matemática por meio da abordagem da resolução de problemas ao permitir o contato com os aspectos dessa abordagem e que vivenciassem seus limites nas regências de aula no estágio.

Contudo, o sujeito S4 não trabalhou suas aulas nessa abordagem e, na entrevista final, não evidenciou os vários aspectos que a constituem. Desse modo, pode-se apontar que esse sujeito não apresentou condições de ensinar Matemática por meio da resolução de problemas.

Diferentemente desse resultado, os dados mostraram que os sujeitos S1, S2 e S3 conseguiram reinterpretar e sistematizar experiências anteriores e experiências presentes (IMBERNÓN, 2001) na compreensão dessa abordagem. Em termos da constituição de saberes docentes, possibilitou-lhes condições para mobilizá-la, no ensino da Matemática, como um **saber da formação profissional** (TARDIF, 2007), uma vez que se trata de conhecimento pedagógico para o ensino.

IMPLICAÇÕES EDUCACIONAIS

Relacionando a presente tese às outras pesquisas que investigaram sobre a temática da resolução de problemas, podemos apontar duas contribuições do nosso estudo: (a) no campo teórico-metodológico, ter considerado o papel do estágio na pesquisa, analisando os resultados provenientes das regências de aula na escola básica; (b) no âmbito da formação de professores de Matemática, ter evidenciado os limites que se encontram para trabalhar na perspectiva da resolução de problemas, o que envolveu a cultura escolar atual, a falta de parceria entre escola e universidade nas atividades de estágio e a formação para trabalhar nessa perspectiva.

Percebe-se que a questão da formação do professor de Matemática e a resolução de problemas é uma situação que se configura como um dilema no ensino. Conforme vários estudos apontaram, confirma-se que, na cultura escolar atual, o professor de Matemática ainda realiza um ensino na abordagem da resolução de problemas de forma equivocada (COELHO, 2005; FIGUEIREDO; FIOREZE; ISAIA, 2007; MEDEIROS JUNIOR, 2007; REDLING, 2011; RODRIGUES, 2008).

Nessa cultura escolar atual, tem prevalecido um ensino baseado nos pressupostos do **ensinar para resolução de problemas,** onde primeiro ocorre a inserção do conteúdo e de suas definições e regras para, posteriormente, introduzir problemas onde essas definições e regras possam ser aplicadas (SCHROEDER; LESTER, 1989).

No caso da nossa pesquisa, isso pode ter sido um fator que justifica a falta de autonomia dos alunos e a dificuldade que tiveram em recuperar, da estrutura cognitiva, conceitos, princípios e procedimentos matemáticos para encontrar estratégias e, assim, resolver os problemas. Ensinar Matemática por meio da resolução de problemas implica em levar o aluno a estabelecer relações matemáticas, aumentando suas capacidades de pensamento, o que sugere desenvolver autonomia frente ao uso de conhecimento matemático.

Diante dessa situação, é importante que os cursos de Licenciatura em Matemática favoreçam uma formação à abordagem da resolução de problemas aos futuros professores para que possam trabalhar suas aulas de forma adequada nessa abordagem. Essa forma deveria levar em consideração o **ensinar via resolução de problemas**, articulando ao ensinar **para** e **sobre resolução de problemas**. Com isso, poder-se-ia ter professores que ingressam nas escolas com essa formação, o que poderia ajudar a reverter o quadro de ensino que envolve essa cultura escolar atual.

Conforme aponta a Resolução CNE/CP 1/2002 (BRASIL, 2002e), um dos princípios norteadores da formação dos professores é considerar "a coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor [...]". (p. 02).

Nesse sentido, buscando favorecer uma formação para a resolução de problemas, Ventura Viana (2010) elaborou uma proposta de currículo para o curso de Licenciatura em Matemática do período noturno da UFOP para que fosse analisada. Nessa proposta, apoiada em estudos teóricos, empíricos e na legislação, tendo vista a questão da formação de professores, propôs disciplinas que abordassem a resolução de problemas.

> [...] é importante acrescentar uma disciplina Resolução de Problemas I, Resolução de Problemas II – Algébricos e outra Resolução de Problemas III – Geométricos. Na primeira disciplina o aluno deverá aprender o que significa resolver problemas e como abordá-los para a aprendizagem dos alunos. Nas outras duas o aluno utilizará este método de ensino para aprendizagem própria. (VENTURA VIANA, 2010, p. 10).

Brasil (2002e) destaca que, na organização curricular, o projeto pedagógico de cada curso deve levar em conta, entre outros aspectos, que "a aprendizagem deverá ser orientada pelo princípio metodológico geral, que pode ser traduzido pela ação-reflexão-ação e que **aponta a resolução de situações-problema como uma das estratégias didáticas privilegiadas**." (p. 03, grifo nosso).

Esse documento oficial evidencia a necessidade de uma formação que contemple a resolução de problemas. Além disso, quando Brasil (2002e) aponta que "a formação deverá garantir a constituição das competências objetivadas na educação básica" e que "os conteúdos a serem ensinados na escolaridade básica devem ser tratados de modo articulado com suas didáticas específicas" (p. 02), torna-se evidente levar em consideração, nessa formação, a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) e do Ensino Médio (BRASIL, 2002a) sobre a resolução de problemas como uma orientação ao ensino da Matemática.

Desse modo, tendo em vista que na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática, onde se selecionaram os sujeitos da pesquisa, não havia uma disciplina obrigatória sobre resolução de problemas, buscamos apresentar uma estrutura que envolve uma disciplina dessa natureza articulada ao Estágio Curricular Supervisionado (ECS). Essa estrutura leva em consideração o ECS na segunda metade do curso (BRASIL, 2002e) e a sua carga-horária atual de 400 horas (BRASIL, 2002c). O Quadro 24 mostra essa estrutura.

Disciplina	Atividades	Créditos	C/h	Semestre
Estágio Curricular Supervisionado I	Observação – E. F. (6º ao 9º ano) e E. M.	6	80	5º
Estágio Curricular Supervisionado II	Observação – E. F. (EJA) e E. M. (EJA)	6	80	6º
Resolução de Problemas e o ensino-aprendizagem da Matemática Escolar	Resolução de vários problemas e discussão teórica. Ao final, entrega de três sequências didáticas, envolvendo aritmética, álgebra e geometria.	4	30	6º
Estágio Curricular Supervisionado III	Regências de aula – E. F. (6º ao 9º ano) e EJA	8	120	7º
Estágio Curricular Supervisionado IV	Regências de aula – E. M. regular e EJA	8	120	8º

Quadro 24: Estrutura para o ECS e uma disciplina sobre resolução de problemas.

Essa disposição do estágio, semestral, segue os seguintes aspectos: (1) que as sequências didáticas, elaboradas e entregues pelos licenciandos ao final da disciplina sobre resolução de problemas, sejam obrigatoriamente implementadas, logo nos semestres posteriores, no estágio de regências de aula; (2) de acordo com as experiências do pesquisador como professor da disciplina de ECS, na modalidade de regências de aula, o formato semestral desse estágio implica que as atividades objetivadas possam ser cumpridas, não dando margem ao licenciando de entregar relatórios parciais/finais de propostas para o Ensino Médio quando o foco é o Ensino Fundamental.

Desse modo, as três sequências didáticas podem ser direcionadas a qualquer uma das atividades presentes tanto no ECS III como no ECS IV, sendo obrigatório que pelos menos uma sequência didática seja contemplada em uma dessas disciplinas. Além disso, os Planos de Ensino dessas disciplinas devem deixar claro que uma das atividades a serem avaliadas no estágio é o trabalho com a(s) sequência(s) didática(s) elaborada(s) na disciplina "Resolução de Problemas e o ensino-aprendizagem da Matemática Escolar".

Para essa avaliação do trabalho no estágio dos licenciandos com as sequências didáticas, envolvendo a resolução de problemas, é preciso estabelecer uma parceria entre professor universitário e professor da escola de modo que exista uma contribuição deste na formação dos futuros professores.

Nessa parceria, o professor da escola precisa contribuir nos seguintes aspectos: (a) disponibilizar aulas suficientes aos estagiários para que possam realizar suas regências de aula; (b) agendar horários com os licenciandos para trocar ideias sobre as possibilidades e limites que podem encontrar ao trabalhar com os alunos no que diz respeito aos seus conhecimentos de matemática e seus comportamentos; (c) acompanhar, em sala, as aulas desenvolvidas pelos licenciandos; (d) avaliar o trabalho desenvolvido pelos estagiários por meio de um documento proposto pelo professor universitário.

Nesse sentido, os licenciandos poderão aprender com os professores de profissão aspectos da profissão professor. Isso também corresponde à articulação entre teoria e prática, onde, na universidade, o professor universitário leva esses futuros professores a refletirem sobre o trabalho realizado com a resolução de problemas nas atividades de estágio.

Conforme destacou Oliveira (2011), se essa parceria estiver estabelecida, pontos positivos podem se configurar, auxiliando os futuros professores a desenvolver o trabalho com a resolução de problema, bem como outras atividades de formação.

> 1. Inserção inicial coletiva dos estagiários na escola parceira; 2. Determinação da professora e da série e turma para desenvolvimento dos estágios ou de parte destes; 3. Trocas de ideias e rearranjos, através de diálogos, entre todos os participantes para que otimizassem as condições de realização dos trabalhos; 4. Oportunidades de ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos situadas em sala de aula e em contexto escolar da educação básica. (OLIVEIRA, 2011, p. 230).

A parceria entre escola e universidade ainda é uma postura a ser conquistada para a formação de professores, apesar de estar descrita nas leis.

> Art. 7º A organização institucional da formação de professores, a serviço do desenvolvimento e competências, levará em conta que:
> IV – as instituições de formação trabalharão em **interação sistemática** com as escolas de educação básica, desenvolvendo projetos de formação **compartilhados**; (BRASIL, 2002e, p. 04, grifo nosso).
>
> [Art. 13] § 3º O estágio curricular supervisionado, definido por lei, a ser realizado em escola de educação básica, e respeitando o regime de colaboração entre os sistemas de ensino, deve ser desenvolvido a partir do início da segunda metade do curso e ser **avaliado conjuntamente** pela escola formadora e a escola campo de estágio. (BRASIL, 2002e, p. 06, grifo nosso).

Para as atividades da disciplina de ECS que atuei como professor substituto, curso de Licenciatura em Matemática, local de onde foram selecionados os sujeitos da pesquisa, essa parceria não ocorria. Além disso, a minha experiência evidenciou que a universidade até procura essa parceria, mas esbarra na não aceitação de diretores e professores de escolas públicas para dialogar sobre o estágio.

Falta uma política educacional que favoreça essa parceria em aspectos como, por exemplo, a garantia de um espaço comum dentro do tempo de trabalho dos professores formadores e dos professores da escola para que possam interagir com discussões sobre as atividades de estágio que são importantes ao estagiário, bem como o papel de cada um desses profissionais nesse processo e da consciência do retorno que ambos podem ter nessa parceria.

Nesse retorno, os professores formadores podem identificar a realidade das escolas, tendo em vista a influência que determinadas políticas públicas exercem em seu cotidiano. Os professores da escola, por sua vez, podem ficar a par do que a universidade tem desenvolvido para a formação dos licenciandos, mediante seus projetos de estágio, o que os ajudariam, de certo modo, a refletir sobre o ensino que realizam em sala de aula.

Conforme apontou Oliveira (2011), a concretização de uma parceria entre escola e universidade, no que diz respeito ao estágio supervisionado, não é reconhecida por lei. Para essa autora, isso depende, entre outras situações, do "reconhecimento do envolvimento amplo, institucionalizado, resultando na conquista de um espaço de trabalho conjunto entre instituições, que resulte em ações efetivas." (OLIVEIRA, 2011, p. 237).

Deve-se destacar que a importância dessa parceria envolve, entre outros objetivos, superar um modelo de formação que tem contribuído negativamente à formação inicial dos futuros professores: o modelo da racionalidade técnica. Por conta desse modelo, os licenciandos têm recebido uma formação que tem dado atenção aos conhecimentos teóricos e técnicos como se fossem suficientes para a atuação profissional. Nesse caso, o papel do estágio seria entendido como mera aplicação desses conhecimentos, o que pouco ou quase nada possibilitaria aos futuros professores uma reflexão do trabalho do professor.

Além da questão da formação inicial, é importante enfatizar a formação continuada. A esse respeito, a legislação aponta que:

> [Art. 14] § 2º Na definição da estrutura institucional e curricular do curso, caberá a concepção de um sistema de oferta de formação continuada, que propicie oportunidade de retorno planejado e sistemático dos professores às agências formadoras. (BRASIL, 2002e, p. 06).

Tendo em vista a formação para a resolução de problemas e de outros assuntos, programas de formação continuada precisam ser propostos por políticas públicas educacionais que visem o desenvolvimento profissional dos professores que atuam na escola básica, contando com a participação dos professores formadores. Por meio dessa formação, é possível que se tenham mais condições de superar a cultura escolar atual.

Diante dessas discussões acerca da formação de professores de Matemática e a resolução de problemas, percebe-se que se trata de uma situação delicada que exige formação em resolução de problemas, articulada ao estágio, mediante uma parceria estabelecida entre escola e universidade.

Por fim, gostaríamos de mencionar que no relatório preliminar da Fundação Carlos Chagas a respeito da atratividade da carreira docente no Brasil, publicada em 2009, fatores como, por exemplo, baixos salários, condições precárias de trabalho, desrespeito por parte dos alunos e o *status* do professor na sociedade contribuem para uma desvalorização do professor e, consequentemente, para que futuros professores e mesmo professores em exercício apresentem uma desmotivação e desinteresse pela profissão.

De acordo com esse relatório, favorecer a atratividade da carreira docente deve levar em consideração, além desses aspectos, a compreensão de que a profissão professor envolve um saber específico indispensável à atividade docente.

Talvez, essa desvalorização do professor esteja contribuindo para a cultura escolar atual no ensino básico que segue definições, fórmulas para serem aplicadas em exercícios. Contudo, mesmo que o futuro professor seja bem formado para trabalhar com a resolução de problemas, o seu trabalho e a sua intenção em exercer o magistério podem ser influenciados, entre outros aspectos, pela atratividade da carreira docente.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Matemática através da Resolução de Problemas: uma nova possibilidade para o trabalho em sala de aula. In: REUNIÃO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA DO CONE SUL. 7., 2006. Águas de Lindóia/SP. **Anais...** Águas de Lindóia: SBEM, 2006.

ALMEIDA, P. C. A.; BIAJONE, J. Saberes docentes e formação inicial de professores: implicações e desafios para as propostas de formação. **Educação e Pesquisa**, v. 33, n. 2, p. 281-295, maio/ago., 2007.

ALVES, A. J. A "revisão da bibliografia" em teses e dissertações: meus tipos inesquecíveis. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n. 81, maio, p. 53-60, 1992.

ALVES, W. F. A formação de professores e as teorias do saber docente: contextos, dúvidas e desafios. **Educação e Pesquisa**, v. 33, n. 2, maio/ago., p. 263-280, 2007.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNADJER, F. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002, 203 p.

AZEVEDO, L. L. **Uma proposta de mudança, na licenciatura em matemática do ICLMA, apoiada na metodologia de "ensino da matemática via resolução de problemas"**. 1998. 220f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP, Rio Claro.

BLANCO, L. Problem solving and initial practical and theoretical education of teachers in Spain. **Mathematics Teacher Education & Development**, v. 6, p. 37-48, 2004.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**. Uma introdução à teoria e aos métodos. Trad. Maria João Alvarez; Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, Coleção Ciências da Educação. 1994, 335p.

BRASIL. **Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura**. Brasília: MEC, Secretaria de Educação Superior, 2010. 99 p.

______. Secretaria de educação média e tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002a, 360p.

______. Ministério da Educação. Parecer CNE/CP 9/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Diário Oficial da União**, Brasília, de 18 jan. 2002b. Seção 1, p. 31. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf> Acesso em 22 dez. 2009.

______. Ministério da Educação. Resolução CNE/CP 2/2002. Carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena. **Diário Oficial da União**, Brasília, 4 março 2002c. Seção 1,

p. 9. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CP022002.pdf> Acesso em 22 dez. 2009.

______. Ministério da Educação. Parecer CNE/CP 28/2001. **Diário Oficial da União**, Brasília, 18 jan. 2002d. Seção 1, p. 31. Disponível em: <http://www.uems.br/proe/sec/Parecer%20CNE-CP%20028-2001.pdf> Acesso em 22 dez. 2009.

______. Ministério da Educação. Resolução CNE/CP 1/2002. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Diário Oficial da União**, Brasília, 9 abril 2002e. Seção 1, p. 31.

______. Secretaria de ensino fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: SEF/MEC, 1998, 148p.

BRITO, M. R. F. Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In: BRITO, M. R. F. (Org.). **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas, Alínea, 2006, 280p., p. 13-53.

BURNS, M. How to teach problem solving. **Arithmetic Teacher**, 29 (6), p. 46-49, february, 1982.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, 343p., p. 32-48.

CARLINI, A. L. Procedimentos de ensino: escolher e decidir. In: SCARPATO, M. (Org.). **Os procedimentos de ensino fazem a aula acontecer**. São Paulo: Avercamp, 2004, 133p., p.25-81.

CARVALHO, E. R. et al. Resolução de problemas como uma alternativa de ensino do tópico função exponencial: comparação com o ensino tradicional do mesmo tópico. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010. Salvador-BA. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010.

CHARLES, R. I. Teacher education and mathematical problem solving: some issues and directions. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. Virginia: Lawrence Erlbaum Associates, 1989, NCTM, 282p., p. 259-272.

______. The role of problem solving. **Arithmetic teacher**, 32, p. 48-50, february, 1985.

CHI, M. T. H.; GLASER, R. A capacidade para a solução de problemas. In: STERNBERG, R. As **capacidades intelectuais humanas**: uma abordagem em processamento de informações. Trad. Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992, 285p., p. 249-275.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001, 164p.

CODY, F. J.; SIQUEIRA, S. M. F. A. Q. **O professor do terceiro milênio**. Cotia: Íbis, 2000. 136p.

COELHO, M. A. V. M. P. **A resolução de problemas: da dimensão técnica a uma dimensão problematizadora**. 2005. 166f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas.

COELHO, M. A. V. M. P. As tendências do ensino da matemática e a resolução de problemas como prática pedagógica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2006. Águas de Lindóia - SP. **Anais...** Águas de Lindóia: SBEM, 2006.

CYRINO, M. C. C. Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de matemática. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs). **A formação do professor que ensina matemática**: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, 240p., p. 77-88.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998, 177p., p. 13-42.

ECHEVERRÍA, M. P. P. A solução de problemas em matemática. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998, 177p., p. 43-65.

FI, C. D.; DEGNER, K. M. Teaching through problem solving. **Mathematics Teacher**, v.105, n. 6, february, p. 455-459, 2012.

FIGUEIREDO, F. F.; FIOREZE, L. A.; ISAIA, S. M. A. Resolução de situações-problema no ensino da matemática*:* relação entre aportes teóricos e vivência pedagógica prática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007. Belo Horizonte - MG. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007.

FIORENTINI, D.; SOUZA JR, A. J.; MELO, G. F. A. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. A. (Orgs.). **Cartografias do trabalho docente**: professor(a)-pesquisador(a). Campinas: Mercado de Letras, 1998, 335p.

FLICK, U. **An introduction to qualitative researche**. 3. ed. London: Sage, 2006, 443 p.

FREIRE, R. S.; CABRAL, B. S.; CASTRO FILHO, J. A. Estratégias e erros utilizados na resolução de problemas algébricos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004. Recife. **Anais...** Recife: SBEM, 2004.

FUNDAÇÃO CARLOS CHAGAS. A atratividade da carreira docente no Brasil. **Revista Nova Escola.** 2009. Disponível em: http://revistaescola.abril.com.br/pdf/relatorio-final-atratividade-carreira-docente.pdf Acesso: 15/02/2012.

GAUTHIER, C. et al. **Por uma teoria da Pedagogia**: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente. Trad. Francisco Pereira. Ijuí: Unijuí, 1998, 457p.

GIL. A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999, 206p.

GONÇALEZ, M. H. C. C.; BRITO, M. R. F. A aprendizagem de atitudes positivas em relação à Matemática. In: BRITO, M. R. F (Org.). **Psicologia da Educação Matemática**: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001, 280p., p. 221-234.

GONZÁLEZ, F. E. Metacognicion y tareas intelectualmente exigentes: el caso de la resolución de problemas matemáticos. **Zetetiké**, v.6, n. 9, p. 59-87, jul./dez., 1998.

GUIMARÃES, S. D. O que pensam acadêmicos dos cursos de pedagogia e matemática e professores da educação básica acerca do ensino e da aprendizagem da matemática via resolução de problemas? In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 14, 2008. Porto Alegre – RS. **Anais...** XIV ENDIPE, 2008.

HUANCA, R. R. H. **A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula**. 2006. 247f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP, Rio Claro.

IMBERNÓN, F. **Formação docente e profissional**: formar-se para a mudança e a incerteza. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2001, 119p.

JUSTO, J. C. R. **Resolução de problemas matemáticos aditivos**: possibilidades de ação docente. 2009. 197f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRS, Porto Alegre.

KANTOWSKI, M. G. Algumas considerações sobre o ensino para a resolução de problemas. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, 343p., p. 270-282.

KETELE, J. M.; ROEGIERS, X. **Metodologia da recolha de dados.** Coleção Epistemologia e Sociedade. Trad. Carlos Aboim de Brito. Lisboa: Instituto Piaget, 1993, 258p.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. (Eds.). **Adding it up**: helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academic Press, 2001. 454p. Disponível em: <http://www.nap.edu/openbook.php?record_id=9822&page=R1> Acesso: 20/01/2012.

KLAUSMEIER, H. J.; GOODWIN, W. **Manual de Psicologia Educacional**: aprendizagem e capacidades humanas. Tradução de ABREU, M. C. T. A. São Paulo: Harper & Row, 1977, 605p.

KRULIK, S.; RUDNICK, J. A. Teaching problem solving to preservice teachers. **Arithmetic Teacher**, 29 (6), p. 42-45, february, 1982.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Trad. Joan Teller, do russo para o inglês. Chicago: University of Chicago Press, 1976, 417p.

LEBLANC, J. F.; PROUDFIT, L.; PUTT, I. J. Ensinando resolução de problemas na *elementary school*. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.) **A resolução de problemas na**

matemática escolar. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, 343p., p. 148-164.

LESTER, F. K. JR. Reflections about mathematical problem-solving research. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. Virginia: Lawrence Erlbaum Associates, 1989, NCTM, 282p., p. 115-124.

LOOS, H.; FALCÃO, J. T. R.; ACIOLY-RÉGNIER, N. M. A ansiedade na aprendizagem da matemática e a passagem da aritmética para a álgebra. In: BRITO, M. R. F. (Org.). **Psicologia da Educação matemática**: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001, 280p., p. 235-262.

LOPES, A. R. L. V. **Aprendizagem da docência em matemática**: o Clube de Matemática como espaço de formação inicial de professores. Passo Fundo: UPF, 2009. 203p.

LOPES, S. V. A.; BRENELLI, R. P. A importância da abstração reflexiva na resolução de problemas de subtração. In: BRITO, M. R. F (Org.). **Psicologia da Educação Matemática**: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001, 280p., p. 147-166.

MAYER, R. E. **Thinking, problem solving, cognition**. 2. ed. New York: WH Freeman and Company, 1992, 214p.

______. Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In: SILVER, E. A. (Ed.) **Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives.** Hillsdale: LEA, 1985, 469p., p. 123-138.

MEDEIROS JUNIOR, R. J. **Resolução de problemas e ação didática em matemática no ensino fundamental**. 2007. 172f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2009, 214p.

MIGUEL, J. C. Da resolução de problemas à formação de conceitos matemáticos: implicações teóricas e metodológicas. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 15., 2010. Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: XV ENDIPE, 2010.

MIZUKAMI, M. G. N. Aprendizagem da docência: conhecimento específico, contextos e práticas pedagógicas. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs). **A formação do professor que ensina matemática**: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, 240p., p. 213-231.

MORELATTI, M. R. M. et al. As sequências didáticas descritas por professores de matemática e ciências naturais da rede pública: possíveis padrões e implicações na formação pedagógica de professores. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 15., 2010. Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: XV ENDIPE, 2010. Painel.

MOURA, G. R. S. **Crianças com dificuldades em resolução de problemas matemáticos**: avaliação de um programa de intervenção. 2007. 156f. Tese (Doutorado em Educação Especial) – Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, São Carlos.

MUSSER, G. L.; SHAUGHNESSY, J. M. Estratégias de resolução de problemas na matemática escolar. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, 343p., p. 188-201.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 1989, 258p.

NEUMANN, V. J. N. G. **Um estudo exploratório sobre as relações entre o conceito de automatismo da teoria do processamento de informações de Sternberg e o conceito de pensamento resumido na teoria das habilidades matemáticas de Krutetskii**. 1995. Dissertação (Mestrado em Educação) – UNICAMP, Campinas.

NODDINGS, N. Preparing teachers to teach mathematical problem solving. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. 3 ed. Virginia: Lawrence Erlbaum Associates, 1990, NCTM, 282p., p. 244-258.

NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática.** 2010. 430p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP, Rio Claro.

OLIVEIRA, R. G. **Estágio curricular supervisionado**: horas de parceria escola-universidade. Jundiaí: Paco, 2011, 260 p.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005, 317p., p. 213-231.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, 314p., p. 199-218.

PACHECO, J. A.; FLORES, M. A. **Formação e avaliação de professores**. Porto: Porto Editora, 1999, 224p.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002, 128p.

PEREIRA, M. **O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas no 3º ciclo do ensino fundamental**. 2004. 263f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP, Rio Claro.

PICONEZ, S. C. B. (Coord.) et al. **A Prática de ensino e o Estágio Supervisionado**. 12 ed. Campinas: Papirus, 1991, 139p.

PIMENTA S. G.; LIMA, M. S. L. **Estágio e docência**. 2 ed. São Paulo: Cortez, 2004, 296p.

PIRES, C. M. C.; SILVA, M. A.; SANTOS, R. C. Reflexões sobre a formação inicial de professores de matemática, a partir de depoimentos de coordenadores de curso de licenciatura. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs). **A formação do professor que ensina matemática**: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, 240p., p. 113-132.

PIROLA, N. A. **Solução de problemas geométricos:** dificuldades e perspectivas. 2000. 245p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas.

PIROLA. N. A. et al. Resolução de problemas com informações supérfluas: uma análise do desempenho de alunos sob a ótica da teoria de Krutetskii. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2006. Águas de Lindóia - SP. **Anais...** Águas de Lindóia: SBEM, 2006.

PLACHA, K. C. **A solução de problemas de produto de medidas de crianças de 3ª série do ensino fundamental e a intervenção do professor**. 2006. 300f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo enfoque do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1994, 196p.

POZO, J. I; ANGÓN, Y. M. A solução de problemas como conteúdo procedimental da educação básica. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998, 177p., p. 139-165.

REDLING, J. P. **A metodologia de resolução de problemas**: concepções e práticas pedagógicas de professores do ensino fundamental. 2011. 166p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, UNESP, Bauru.

REZI-DOBARRO, V. **Solução de problemas e tipos de mente matemática: relações com as atitudes e crenças de auto-eficácia**. 2007. Tese (Doutorado em Psicologia Educacional) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas.

RODRIGUES, I. C. A busca da mudança da prática de professores polivalentes em relação à resolução de problemas. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 14, 2008. Porto Alegre – RS. **Anais...** XIV ENDIPE, 2008.

ROLDÃO, M. C. Formar para a excelência profissional: pressupostos e rupturas nos níveis iniciais da docência. **Educação e Linguagem**, ano 10, n. 15, jan/jun., p. 18-42, 2007.

SCHOENFELD, A. H. Heurísticas na sala de aula. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, 343p., p. 13-31.

______. Problem solving in context(s). In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. 3 ed. Virginia: Lawrence Erlbaum Associates, 1990, NCTM, 282p., p. 82-92.

______. **Mathematical problem solving**. Orlando: Academic Press, 1985, 409p.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K., JR. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989, 245p., p. 31-42.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, february, p. 01-22, 1987.

______. Those Who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, fev., p. 04-14, 1986.

SILVA, V. M., PIROLA, N.A.; VENDRAMINI, C. M. M. Um estudo sobre a resolução de problemas em alunos universitários. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 3, 1998. Caracas – Venezuela. **Anais...** Caracas. III CIBEM, Caderno de resumos, p. 617-625.

SORMANI JUNIOR, C. **Um estudo exploratório sobre o uso da informática na resolução de problemas trigonométricos**. 2006. 226p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, UNESP, Bauru.

SOUZA, A. C. P. **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Matemática através da Resolução de Problemas**. 2010. 343f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP, Rio Claro.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. 3 ed. Virginia: Lawrence Erlbaum Associates, 1990, NCTM, 282p., p. 01-22.

STERNBERG, R. **Psicologia cognitiva**. Trad. Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: ArtMed, 2000, 494p.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 8 ed. Petrópolis-RJ: Vozes, 2007, 325p.

THOMPSON, A. G. Learning to teach mathematical problem solving: changes in teacher's conceptions and beliefs. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. 3. ed.Virginia: Lawrence Erlbaum Associates, 1990, NCTM, 282p., p. 232-243.

VENTURA VIANA, M. C. Formação de professores de matemática no período noturno. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 15., 2010. Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: UFMG, 2010. (Painel, p.02-14).

WIELEWSKI, G. D. **Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas:** uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii. 2005. 407p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Entrevista inicial

1. Qual(is) o(s) objetivo(s) do ensino da matemática na escola? Comente.

2. Qual(is) é(são) a(s) estratégia(s) para ensinar matemática? Comente.

Caso o licenciando não mencione a resolução de problemas, introduzir o seguinte exercício e questionamentos para tentar direcionar ao tema:

João foi ao armazém comprar 3 caixas de coca-cola. Se cada caixa contém 6 garrafas, quantas garrafas de coca-cola João comprou?

a) Você acha que resolver essa tarefa é fácil?
b) Que tipo de tarefa você acha que ela seria? (se responder exercício, fazer a pergunta seguinte. Caso isso não aconteça, apresentar o problema abaixo).
c) As tarefas de matemática poderiam ser de outro tipo? (se responder problema, continuar a entrevista).

A mãe de Jesse pagou a mesada de 1 dólar e 60 centavos em moedas de 0,25, 0,10 e 0,05. Ele recebeu ao todo 17 moedas. Quantas moedas de cada valor a mãe lhe deu?

a) Esta tarefa é fácil de resolver em relação a anterior?
b) Como você poderia classificá-la?

3. O que você entende por problema (matemático)? Comente e exemplifique.

4. Qual(is) sua(s) dificuldade(s) para resolver problemas (matemático)? Comente.

5. Quando você era aluno da educação básica, que tipo de importância se dava à resolução de problemas? Comente.

6. Como eram os problemas que você resolvia em sala de aula? Comente.

7. Como você era avaliado na resolução de problemas matemáticos? Comente.

8. De que maneira o curso de Licenciatura em Matemática tem possibilitado a compreensão sobre o ensino da resolução de problemas? Comente.

9. Como você acredita que deveria ser o ensino de Matemática, utilizando a resolução de problemas? Comente.

10. Como você avalia suas condições para ensinar Matemática, utilizando a resolução de problemas? Comente.

APÊNDICE B – Roteiro de avaliação de regências de aula

Participante: ____________________ Série: ________ Conceito matemático: ________________

1. Introduziu o conceito por meio de um(a):
   a. ( ) Situação-problema
   b. ( ) Definição
   c. ( ) Exercício
   d. ( ) Outra Especificar:_____________________________________

2. Caso a resposta seja situação-problema, propôs a resolução aos alunos:
   a. ( ) Em grupo
   b. ( ) Individual
   c. ( ) O estagiário resolveu sozinho em lousa

3. Discutiu o processo de resolução do problema:
   a. ( ) Com os alunos indo até a lousa e registrando suas estratégias de resolução.
   b. ( ) Resolvendo somente na lousa e apresentando apenas uma estratégia.
   c. ( ) Resolvendo somente na lousa e apresentando mais de uma estratégia.
   d. ( ) Utilizou somente o que os alunos disseram em voz alta, na sala de aula, sobre as estratégias.
   e. ( ) Outra Especificar:_______________________________________

4. Solicitou que os alunos nomeassem as estratégias utilizadas?
   a. ( ) sim ( ) não

5. Caso o estagiário tenha nomeado a estratégia, chamou-a de:
   a. ( ) Reconhecer padrões
   b. ( ) Supor e testar ou Tentativa e erro
   c. ( ) Lista ou tabela
   d. ( ) Diagrama
   e. ( ) Equação
   f. ( ) Gráfico
   g. ( ) Outra: ____

6. A situação-problema utilizada pelo estagiário apresentava:
   a. ( ) Uma única resposta.
   b. ( ) Várias respostas.

7. Como o estagiário deu sequência às atividades?
   a. ( ) Propôs novos problemas que utilizassem a(s) estratégia(s) discutida(s).
   b. ( ) Apresentou uma definição.
   c. ( ) Introduziu exercícios.
   d. ( ) Outra: ____

8. Caso a resposta do item 7 tenha sido a alternativa "a", quantas situações-problema utilizadas pelo estagiário apresentavam:
   a. ( ) Uma única resposta.
   b. ( ) Várias respostas.

9. Caso a resposta do item 7 não tenha sido a alternativa "a", o estagiário retomou o trabalho com situações-problema?
   a. ( ) sim ( ) não

10. Outras situações relacionadas ao ambiente de sala de aula como, por exemplo, as dúvidas dos alunos e o comportamento do estagiário.

APÊNDICE C – Entrevista Final

1. Para você, o que significa aprender e ensinar matemática?

2. O que é um problema de matemática para você?

3. Qual a diferença entre um problema de matemática e um exercício?

4. Como você acredita que seja o ensino da matemática por meio da resolução de problemas?

5. O que você acredita que teve de melhor e de pior nas aulas ministradas nas regências?

6. Você acredita que conduziu, nas regências de aula, o ensino dos tópicos de matemática (aritmética, álgebra e geometria) através da resolução de problemas? Comente.
   a. A questão de como foi introduzido o assunto ou a continuidade de um assunto já trabalhado pelo professor da escola.
   b. A questão do trabalho em grupo ou individual.
   c. A questão de se discutir o processo de resolução e as estratégias.
   d. A questão de se nomear as estratégias.
   e. Sobre o uso de Avaliação dos alunos.

7. Quais dificuldades você teve para realizar o ensino dos tópicos propostos, utilizando a resolução de problemas? Comente. O que você mudaria?

8. Você acredita que utilizar a resolução de problemas pode ajudar o aluno a aprender matemática? Comente.

9. Que avaliação você faz do curso sobre resolução de problemas (*discussão das estratégias por meio da resolução dos problemas, parte teórica e a implementação por meio das regências de aula*), proposto pelo pesquisador, para a sua formação como professor de matemática? Comente.

10. Como você avalia, hoje, suas condições para ensinar matemática, utilizando a resolução de problemas? Comente.

11. Caso responda que não tem condições, onde buscaria recursos sobre Resolução de Problemas?

12. Qual a sua percepção sobre o aprendizado e motivação dos alunos durante a regência? Comente.

13. Caso não tenha ocorrido uma motivação, o que do Curso sobre Resolução de Problemas poderia ajudar a motivar os alunos?

APÊNDICE D – Lista de problemas de matemática

1. Alguns trabalhadores foram contratados para reparos e eles tinham que fazer o trabalho em um determinado número de dias. Se houvesse três homens a menos, o prazo teria se estendido em seis dias. Se houvesse dois homens a mais, terminariam o trabalho dois dias antes do prazo. Quantos trabalhadores foram contratados?

2. Dezesseis mudas de árvores foram plantadas em fileira, a 5 m de distância entre si. Um poço estava situado juntamente com a última árvore. Um balde de água é necessário para regar duas árvores. Partindo do poço, qual é a distância a ser percorrida para regar todas as árvores, usando apenas um balde?

3. Depois que um pedestre viajou 1 km e meio do seu percurso, ele ainda tinha ⅓ de todo o percurso e mais 1 km para viajar. Qual é a distância de todo o percurso?

4. Em um triângulo isósceles, uma das medianas divide seu perímetro em duas partes: 12 cm e 9 cm. Determine os lados do triângulo.

5. Cada lado de um quadrado é aumentado 3 cm e daí sua área é acrescida de 39 cm2. Determine o lado do quadrado que é obtido.

6. Um segmento de 20 cm de comprimento é dividido em dois segmentos e um quadrado é construído em cada um deles. Encontre o comprimento destes segmentos, sabendo-se que a diferença das áreas dos quadrados obtidos é igual a 40 cm2.

7. O perímetro de um triângulo é 35 cm. Um de seus lados é 4 vezes maior que o segundo lado e 1 cm mais comprido que o terceiro lado. Qual é o comprimento de seus lados?

8. Nas margens de um rio crescem duas palmeiras, uma defronte à outra. A altura de uma delas é 30 m e a da outra, 20 m. A distância entre os dois troncos é de 50 metros. Na copa de cada palmeira está pousado um pássaro. De repente, os pássaros percebem um peixe que aparece na superfície da água, entre as duas palmeiras. Os pássaros se lançaram sobre o peixe, com a mesma velocidade, e o alcançaram ao mesmo tempo. A que distância do tronco da palmeira maior apareceu o peixe?

9. Num quintal há 20 animais, entre porcos e galinhas. Sabe-se que há, no todo, 64 pés. Quantos são os porcos e quantas são as galinhas?

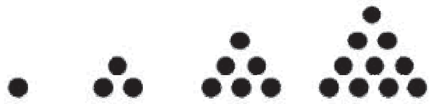
10. Cem chocolates foram distribuídos entre três grupos de crianças. O segundo grupo de crianças recebeu 4 vezes a quantidade de chocolates dada ao primeiro grupo. O terceiro grupo recebeu 10 chocolates a mais do que o segundo grupo. Quantos chocolates receberam o primeiro, o segundo e o terceiro grupos?

11. A mãe de Jesse pagou a mesada de 1 dólar e 60 centavos em moedas de 0,25, 0,10 e 0,05. Ele recebeu ao todo 17 moedas. Quantas moedas de cada valor a mãe lhe deu?

12. Existem 16 times de futebol, em cidades diferentes, na Liga Continental de Futebol. Para coordenar os jogos entre os times, cada cidade deve ter uma linha telefônica instalada,

ligando-se diretamente às demais, para poder se comunicar com os times das outras cidades. Quantas linhas telefônicas devem ser instaladas pela empresa telefônica, conectando as cidades?

13. Um número que pode ser representado pelo padrão abaixo é chamado número triangular. Os quatro primeiros números são mostrados. Qual é o qüinquagésimo número triangular?



14. Na escola de tom há 6 times de basquete. Eles querem planejar um torneio para após as aulas, de maneira que cada time jogue uma única vez com todos os outros. Quantas partidas devem ser jogadas?

15. Havia 8 pessoas numa festa. Se cada pessoa apertou a mão de todas as outras, quantos apertos de mão houve no total?

16. Susan quer comprar uma barra de doce que custa 25 centavos. A máquina de doces aceita qualquer combinação de moedas de 1 centavo, 5 centavos e 10 centavos. Quantas combinações diferentes de moedas ela poderia usar para pagar seu doce?

17. Um homem pode pintar um quarto em 9 horas. Sua filha, trabalhando sozinha, pode pintar o quarto em 12 horas. Quanto tempo eles gastarão se trabalharem juntos?

18. O restaurante de Toni tem 30 mesas quadradas pequenas para serem usadas em um banquete. Cada mesa pode acomodar somente uma pessoa em cada lado. Se as mesas forem colocadas juntas para fazer uma mesa mais longa, quantas pessoas podem sentar à mesa?

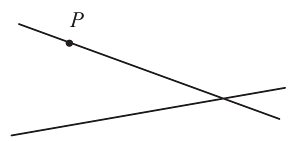
19. Um professor deseja regraduar os pontos de uma prova escrita para "melhorar" a nota de todos. A nota máxima permanece 100, mas 56 passa a valer 70 na nova escala. Você tinha conseguido 75. Quanto eles vão valer na nova escala?

20. Considere um quadrado de palitos 1 x 1. De quantos palitos se necessita para formar um quadrado 10 x 10 com quadradinhos de palitos 1 x 1?

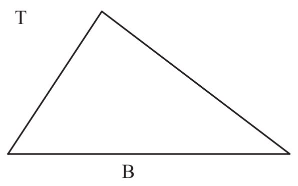
21. Para quais valores de a o sistema de equações tem 0, 1, 2 e 3 soluções?

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

22. São dadas duas linhas retas com uma intersecção e um ponto P marcado sobre uma delas, como na figura abaixo. Mostre como construir, usando régua e compasso, um círculo que é tangente a ambas as linhas e que tem o ponto P como seu ponto de tangência com uma delas.



23. É dado um triângulo T com base B, como na figura abaixo. Mostre que é sempre possível construir, com régua e compasso, uma linha reta que é paralela à B e que divide T em duas partes de área igual.



24. Sejam $P(x) = ax^2 + bx + c$ e $Q(x) = cx^2 + bx + a$.
Qual é a relação entre as raízes de P(x) e Q(x)?

25. Prove que em qualquer círculo o ângulo central que corresponde a um arco dado é duas vezes o ângulo inscrito correspondente ao mesmo arco.

26. Dados a, b, c e d números reais entre 0 e 1, prove que:
$(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) > 1 - a - b - c - d$

27. Qual é a soma da sequência $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1)$?

28. Quantas retas podem ser traçadas por n pontos?

APÊNDICE E – Termo de Consentimento Livre e Termo de Participação

Solicitamos o seu consentimento na participação de uma pesquisa de doutorado, intitulada *Resolução de problemas: análise de um processo de formação na licenciatura em matemática,* a ser realizada junto às disciplinas de Estágio Curricular Supervisionado II e Prática de Ensino de Matemática V. Nesse sentido, as etapas das quais deverá participar corresponderão:

Etapa 1 – Seleção de seis licenciandos que posteriormente serão entrevistados. Caso você seja selecionado(a), deverá participar das outras etapas.

Etapa 2 – Realização de uma entrevista individual que será áudio-gravada.

Etapa 3 – Participação de um curso, onde serão discutidas as resoluções de vários problemas e discutidos textos da literatura sobre resolução de problemas, bem como a implementação dessas idéias no estágio. Tal curso acontecerá no horário das aulas de Prática de Ensino de Matemática V, ou em outros horários, durante o primeiro semestre de 2010. As aulas serão vídeo-filmadas. Nesse contexto, você, de acordo com as normas de realização da disciplina de Estágio Curricular Supervisionado, deverá elaborar e aplicar Planos de Aula baseados nas ideias do referido curso.

Etapa 4 – Participação de uma entrevista final.

É garantido aos participantes que os dados coletados são para fins exclusivos de pesquisa e que os nomes dos envolvidos bem como as imagens não serão divulgadas.

Estamos à disposição para fornecer os esclarecimentos adicionais julgados necessários.

Bauru, 30 de outubro de 2009.

____

Marcelo Carlos de Proença
Doutorando
Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência
UNESP/Bauru

____

Nelson Antonio Pirola
Orientador
Dep. Educação – UNESP/Bauru

TERMO DE PARTICIPAÇÃO

Estou ciente das atividades da pesquisa das quais devo participar e que as mesmas estão coerentes com as que o curso de licenciatura em matemática propõe. Desse modo, concordo em participar da pesquisa e de suas etapas, assumindo a responsabilidade de minha tarefa como participante desse estudo. Estou ciente e de acordo com a divulgação dos dados em publicações posteriores.

Bauru, _____ de ___________________ de _________

____

Assinatura do licenciando em Matemática e R.A.