

# Estimativas de parâmetros cosmológicos para o Dark Energy Survey



Flávia Sobreira

# Estimativas de parâmetros cosmológicos para o Dark Energy Survey

TESE

apresentada ao Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista, Brasil

em cumprimento aos requisitos para a obtenção do título de

*Doutor*

Setembro de 2011

**Flávia Sobreira**

Comissão Examinadora

Dr. Rogério Rosenfeld  
IFT-UNESP

Dr. Júlio César Fabris  
DFIS - UFES

Dr. Ioav Waga  
IF-UFRJ

Dr. Marcos V. Lima  
DFMA-USP

Dr. José Geraldo Pereira  
IFT-UNESP

*Orientador:* Dr. Rogério Rosenfeld

Instituto de Física Teórica – UNESP  
R. Dr. Bento Teobaldo Ferraz 271, bloco II  
01140-070 São Paulo, Brasil

*Dedico este trabalho para o melhor presente  
que ganhei durante o seu desenvolvimento:  
meu amor Brucito.*

## Resumo

Nesta tese estudamos previsões sobre os erros nos parâmetros cosmológicos usando a forma integral da função de correlação angular de dois pontos em diferentes cenários para o projeto Dark Energy Survey. O modelo adotado tem 26 parâmetros e inclui efeitos de distorção no *redshift*, erros gaussianos de *redshift* fotométrico, viés da distribuição de galáxias e matéria escura e não-linearidade no espectro de potência. A matriz de Fisher foi construída usando a matriz de covariância considerando a correlação entre diferentes faixas de *redshift*.

Mostramos que, sobre algumas hipóteses, o Dark Energy Survey tem o potencial de vincular o parâmetro da equação de estado da energia escura  $w$  e o parâmetro da densidade de matéria escura fria  $\Omega_{cdm}$  com incerteza de 21% e 13% respectivamente. Quando combinamos informações de outras observações a precisão na determinação destes parâmetros aumenta para 11% e 4% respectivamente.

**Palavras chaves:** Aceleração do universo; Energia Escura; parâmetros cosmológicos; Dark Energy Survey.

**Áreas do conhecimento:** Cosmologia.

## Abstract

In this thesis, we study forecasts of cosmological parameters from the upcoming Dark Energy Survey project obtained using the full shape of the 2-point angular correlation function in different scenarios. The angular correlation function model adopted has 26 parameters and includes the effects of linear redshift space distortion, photometric redshift gaussian errors, galaxy bias and non-linearities in the power spectrum. The Fisher information matrix is constructed with the full covariance matrix, which takes into account the correlation between nearby redshift shells arising from the photometric redshift error. We show that under some reasonable assumptions the Dark Energy Survey should be able to constrain the dark energy equation of state parameter  $w$  and the cold dark matter density  $\Omega_{cdm}$  with a precision of the order of 21% and 13% respectively from the full shape of the angular correlation function alone. When combined with priors from other observations the precision in the determination of these parameters increase to 11% and 4% respectively.

# Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Resumo</b>   | <b>ix</b> |
| <b>Abstract</b>   | <b>xi</b> |
| <b>Agradecimentos</b>   | <b>xv</b> |
| LISTA DE FIGURAS . . . . .  | 3         |
| LISTA DE TABELAS . . . . .  | 5         |
| <b>1 Introdução</b>   | <b>7</b>  |
| <b>2 A expansão do universo</b>   | <b>11</b> |
| 2.1 Cosmologia básica . . . . .   | 11        |
| 2.1.1 Distâncias cosmológicas . . . . .   | 15        |
| 2.2 Aceleração cósmica . . . . .  | 17        |
| 2.3 Modelos para a aceleração cósmica . . . . .   | 19        |
| 2.3.1 Constante Cosmológica . . . . .   | 20        |
| 2.3.2 Modelos com campo escalar . . . . .   | 21        |
| 2.3.3 Gravitação modificada . . . . .   | 22        |
| <b>3 A estrutura em grande escala do universo</b>   | <b>25</b> |
| 3.1 Dinâmica das perturbações de matéria . . . . .  | 26        |
| 3.2 Função de correlação espacial de dois pontos . . . . .                                | 30        |
| 3.3 Função de correlação angular de dois pontos . . . . .                                 | 34        |
| 3.4 Oscilações acústicas bariônicas . . . . .   | 36        |
| <b>4 Modelagem da Função de Correlação de dois pontos</b>                                 | <b>41</b> |
| 4.1 Viés entre a distribuição de galáxias e a distribuição de matéria<br>escura . . . . . | 42        |
| 4.2 Distorção no <i>redshift</i> . . . . .  | 43        |
| 4.2.1 Aproximação de observador distante . . . . .  | 46        |
| 4.3 Correções não-lineares . . . . .  | 48        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.4      | Função de seleção fotométrica . . . . .                                    | 50        |
| 4.5      | Consequência dos efeitos em $\omega(\theta)$ . . . . .                     | 53        |
| 4.6      | Informações cosmológicas em $\omega(\theta)$ . . . . .                     | 53        |
| <b>5</b> | <b>Modelagem da matriz de covariância da função de correlação angular</b>  | <b>57</b> |
| 5.1      | Espectro de potência angular . . . . .                                     | 58        |
| 5.2      | Correções no espectro de potência angular . . . . .                        | 60        |
| 5.3      | Função de correlação angular . . . . .                                     | 61        |
| 5.4      | Matriz de covariância para uma faixa de <i>redshift</i> . . . . .          | 62        |
| 5.5      | Matriz de covariância entre faixas de <i>redshift</i> . . . . .            | 64        |
| <b>6</b> | <b>Estimativas de parâmetros cosmológicos</b>                              | <b>67</b> |
| 6.1      | Matriz de Fisher . . . . .   | 67        |
| 6.1.1    | Matriz de Fisher para a distribuição de galáxias . . . . .                 | 68        |
| 6.1.2    | Propriedades da matriz de Fisher . . . . .                                 | 70        |
| 6.2      | Matriz de Fisher para as medidas de $\omega(\theta)$ no Dark Energy Survey | 73        |
| 6.2.1    | Procedimentos . . . . .  | 73        |
| 6.2.2    | Largura da faixa de <i>redshift</i> e <i>shot noise</i> . . . . .          | 75        |
| 6.2.3    | Construção da matriz de Fisher . . . . .                                   | 77        |
| 6.2.4    | Implementação numérica . . . . .   | 80        |
| 6.2.5    | Estimativas dos parâmetros cosmológicos . . . . .                          | 81        |
| 6.3      | Matriz de Fisher versus rede . . . . .                                     | 88        |
|          | <b>Conclusões e Perspectivas</b>   | <b>91</b> |
| <b>A</b> | <b>Função de correlação espacial no espaço de <i>redshift</i></b>          | <b>93</b> |
| <b>B</b> | <b>Matriz de Fisher numérica</b>   | <b>97</b> |



## Agradecimentos

Para mim é um prazer e uma necessidade expressar todos meus profundos sentimentos de gratidão para cada um de meus amigos, quem têm feito, sem dúvida alguma, esta tese de doutorado possível, com sua apropriada e gentil ajuda durante esses quatro anos. Hoje, a maneira mais sincera que encontro de compartilhar a imensa alegria que invade meu coração por terminar esta etapa tão importante do meu processo de formação, é fazê-los co-autores deste trabalho. Para ser mais objetiva, direi que o primeiro autor é o Senhor meu Deus, quem tem me fortalecido com seu imenso amor. Meus pais, quem são o alicerce da minha vida, estão indiscutivelmente em todas as linhas desta tese. Meus irmãos Adriano, Débora, Otávio (em memória), Natália e Liliane por suas amizades e seu amor. Agradeço também a Sandra, Fabrício, Leandro Pereira, Adriana, Leandro Guarnieri e as minhas duas princesas, Nina e Ester, que vieram alegrar ainda mais a minha vida. Um agradecimento muito especial dedico a família Sanchez-Vega, por seu sincero carinho e apoio. Grandes amigos que fazem parte da minha formação científica, tais como Ilya Shapiro, sempre estarão presentes em minha vida.

Muitos outros de vocês que também tem percorrido comigo os complicados, e muitas vezes sombrios, labirintos lógicos que resultaram neste trabalho, dedico toda minha gratidão. Entre estes, desejo agradecer especialmente a Rogério Rosenfeld, por sua orientação e conselhos; a Fernando de Simoni por sua participação direta e ativa na realização desta tese; a Bruce Sanchez por suas leituras cuidadosas entre as linhas e entrelinhas do texto.

Também devo agradecer a toda equipe de professores, trabalhadores e estudantes do IFT. Em especial agradeço a Elaine Fortes, Maria del Pilar, Luis Soriano, Luis Young, Alberto Sanoja, Leandro Ymai, Meire Cristina, Marcelo Iasniewski, Rosane Simões, Maria Aparecida e minha querida Jô pela grande amizade que compartilhamos. Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro que fez possível a realização deste projeto e, finalmente, a todo time científico do DES-Brasil.

## Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Distância de luminosidade no universo plano dominado por matéria não relativística ( $\Omega_m$ ) e energia escura ( $\Omega_\Lambda$ ) satisfazendo $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ .  | 18 |
| 2.2 | Vínculos de Supernova do Tipo Ia nos parâmetros $\Omega_m$ e $\Omega_\Lambda$ . O painel (a) mostra resultados de 1998 [11] e o painel (b) apresenta resultados mais recentes [19]. Em ambos, o modelo com $\Omega_m = 1$ é fortemente excluído.  | 20 |
| 3.1 | Espectro de potência linear de matéria. A curva contínua representa $P(k)$ , enquanto a curva tracejada mostra $P(k, z = 1)$ . A curva larga mostra o espectro de potência $P(k)$ com ausência das oscilações de bárions (discutida na seção 3.4) usando $\Omega_b \approx 0$ .   | 32 |
| 3.2 | (a) - Função de seleção <i>top hat</i> obtida a partir da Eq. (3.48). Ao dividir o levantamento em faixas de <i>redshifts</i> a função de seleção para a faixa de intervalo $0.6 \leq z \leq 0.8$ é dada pela curva entre as linhas verticais. (b) - Função de correlação angular calculada em $\bar{z} = 1$ . A linha pontilhada mostra a posição do pico do BAO introduzido na seção 3.4. | 35 |
| 3.3 | Medida da função de correlação espacial de dois pontos de galáxias vermelhas feitas pelo SDSS. Os quadrados representam os dados experimentais. As curvas contínuas referem-se ao modelo $\Lambda$ CDM com $\Omega_m h^2 = 0.12$ (verde), 0.13 (vermelha), 0.14 (azul). Todas com $\Omega_b h^2 = 0.024$ e $n_s = 0.98$ . Na curva magenta não temos as oscilações de bárions. [14].        | 38 |
| 4.1 | Galáxia localizada na posição $\vec{x}$ com respeito ao observador. Se $ \vec{x} $ é muito grande, podemos usar a aproximação de observador distante onde $\vec{x} \sim \vec{\chi} = \chi \hat{z}$ .  | 47 |
| 4.2 | Efeitos da distorção do <i>redshift</i> causados pelas velocidades peculiares das galáxias. A curva tracejada mostra $\theta^2 \times \omega(\theta)$ calculada no espaço real e a curva contínua mostra $\theta^2 \times \omega(\theta)$ calculada no espaço de <i>redshift</i> .  | 48 |

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 4.3 | A curva contínua mostra o efeito não-linear na função de correlação angular comparada a curva tracejada que não possui efeitos. . . . .  | 49 |
| 4.4 | Função de seleção espectrocópica (azul) e fotométrica para diferentes valores de erros gaussianos no intervalo de <i>redshift</i> $0.6 \leq z \leq 0.8$ . A medida que $\delta_\sigma \rightarrow 0$ a função de seleção fotométrica se aproxima à função de seleção <i>top-hat</i> , $\phi(z) \rightarrow dN_g/dz$ . . . . .  | 50 |
| 4.5 | Função de correlação angular para diferentes erros de foto-z no espaço de <i>redshift</i> para $1.0 \leq z \leq 1.05$ . Temos $\delta_\sigma = 0, 0.01$ e $0.03$ , onde o erro nulo (curva tracejada) corresponde a análise espectrocópica. . . . .  | 51 |
| 4.6 | Impacto de $z_{bias}$ na função de correlação angular. Em todos os casos consideramos a dispersão no <i>redshift</i> igual a $0.03$ . . . . .  | 52 |
| 4.7 | Efeitos de viés, distorção de <i>redshift</i> , não-linearidade e foto-z na função de correlação angular. Na curva contínua consideramos todos estes efeitos. Assumimos $\delta_\sigma = 0.03$ , $\beta = 1.5$ , $z_0 = 0.5$ para calcular a função de seleção fotométrica. Na curva tracejada plotamos $\theta^2 \times \omega(\theta)$ na ausência de qualquer efeito. Em ambos casos usamos os parâmetros cosmológicos do WMAP7 para calcular $\theta^2 \times \omega(\theta)$ no intervalo de <i>redshift</i> dado por $1.00 \leq z \leq 1.05$ . . . . . | 53 |
| 4.8 | Função de correlação angular em termos de $w$ (painel a) e $\Omega_{cdm}$ (painel b) para o intervalo de <i>redshift</i> $1.00 \leq z \leq 1.05$ com dispersão de foto-z igual a $\delta_\sigma = 0.03$ . A linha vertical indica a posição do pico do BAO na curva contínua. . . . .  | 54 |
| 5.1 | Espectro de potência angular calculado no intervalo de <i>redshift</i> $1.0 \leq z \leq 1.05$ para diferentes erros de foto-z. A linha sólida corresponde a ausência de erros na determinação de $z$ . . . . .   | 60 |
| 5.2 | Matriz de covariância reduzida para a faixa de <i>redshift</i> $1.00 < z < 1.05$ . . . . .   | 64 |
| 5.3 | Espectro de potência angular entre a faixa $1.0 \leq z \leq 1.05$ com as faixas $1.05 \leq z \leq 1.10$ (contínua), $1.10 \leq z \leq 1.15$ (pontilhada-tracejada) e $1.15 \leq z \leq 1.20$ (pontilhada). A curva tracejada representa o espectro calculado somente em $1.0 \leq z \leq 1.05$ . . . . .   | 65 |
| 6.1 | Elipse de confiança para os parâmetros $x$ e $y$ . A constante $\alpha_k$ determina a precisão de $1-\sigma$ , $2-\sigma$ ou $3-\sigma$ . Os erros $\sigma_x$ e $\sigma_y$ são fornecidos pela matriz de Fisher em relação ao valores fiduciais $\bar{x}$ e $\bar{y}$ . . . . .  | 71 |
| 6.2 | Função de correlação angular para diferentes larguras da faixa de <i>redshift</i> . Nós consideramos faixas de <i>redshift</i> centradas em $z = 1$ para quatro diferentes valores de $\Delta z$ . . . . .   | 76 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 6.3  | Erro de $w$ e $\Omega_{cdm}$ em função de $\Delta z$ para 2 faixas centradas em $z = 1.1$ e $z = 1.3$ . Na curva pontilhada nós desprezamos os erro de <i>shot noise</i> para a faixa centrada em $z = 1.3$ . . . . .  | 77 |
| 6.4  | Estimativas para $\Omega_{cdm}$ e $w$ usando a função de correlação angular em todas as faixas de <i>redshift</i> sem considerar a correlação entre elas. O primeiro e o segundo termo da Eq. (6.28) são representados pelas curvas pontilhada e tracejada respectivamente. A elipse contínua mostra a soma entre eles. . . . .  | 81 |
| 6.5  | Erro de $1-\sigma$ no parâmetro $w$ em função do <i>redshift</i> após marginalizar todos os $b_i$ , $\sigma_8$ e $\Omega_{cdm}$ . Os cenários otimista, fiducial e pessimista são representados pelas curvas sólida, tracejada e pontilhada-tracejada respectivamente. . . . .   | 82 |
| 6.6  | Elipse de confiança para $w$ e $\Omega_{cdm}$ nas faixas com intervalo $0.40 \leq z \leq 0.45$ (pontilhada-tracejada), $0.85 \leq z \leq 0.90$ (tracejada) e $1.35 \leq z \leq 1.40$ (contínua). A elipse preenchida corresponde à soma das 3 faixas. . . . .  | 82 |
| 6.7  | Elipses de confiança para $\Omega_{cdm}$ e $w$ analisando 5 faixas de <i>redshift</i> . A curva sólida é o resultado com todos os parâmetros fixos nos seus valores fiduciais, na curva tracejada adicionamos <i>prior</i> em $h$ e $\Omega_b$ e na curva pontilhada-tracejada marginalizamos sobre todos os outros parâmetros. . . . .  | 83 |
| 6.8  | Elipse de confiança para os parâmetros $w$ , $\Omega_{cdm}$ , $\Omega_b$ , $h$ e $n_s$ . Marginalizamos sobre $\sigma_8$ e todos os parâmetros $b$ 's e consideramos os 3 cenários: otimista(contínua), fiducial(tracejada) e pessimista (pontilhada). . . . .   | 85 |
| 6.9  | Intervalo de confiança a $1-\sigma$ para $w$ e $\Omega_{cdm}$ marginalizando sobre todos os outros parâmetros. Na Figura (a) mostramos a diferença dos erros obtidos quando consideramos as faixas de <i>redshift</i> independentes (elipse tracejada) e com correlação entre elas (elipse contínua) no cenário fiducial. Na Figura (b) adicionamos <i>prior</i> de WMAP7 no cenário fiducial (elipse contínua) e comparamos com os resultados obtidos sem adição de <i>priors</i> . . . . . | 87 |
| 6.10 | Comparação entre as distribuições para $w$ ( Figura -a ) e $\Omega_{cdm}$ (Figura -b) obtidas através da matriz de Fisher (curva pontilhada) e o método da rede (curva contínua). . . . .  | 90 |

## Lista de Tabelas

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 6.1 | <i>Tabela de distribuição de bins.</i> . . . . .   | 74 |
| 6.2 | <i>Tabela simplifica.</i> . . . . .  | 78 |
| 6.3 | Erros de $1-\sigma$ nos parâmetros cosmológicos. A coluna 2 fornece os valores fiduciais dos parâmetros cosmológicos nomeados na coluna 1. Na coluna 3 temos o erro de $1-\sigma$ em cada parâmetro quando marginalizamos sobre os outros. A coluna 4 representa a porcentagem destes erros em relação aos seus valores fiduciais. . . . . | 86 |
| 6.4 | <i>Rede para os parâmetros <math>w</math>, <math>\Omega_{cdm}</math>, <math>b</math> e <math>\sigma_8</math>.</i> . . . . .  | 88 |
| B.1 | Erros de $1-\sigma$ nos parâmetros cosmológicos. A coluna 2 fornece os valores fiduciais dos parâmetros cosmológicos nomeados na coluna 1. Nas colunas 3 e 4 temos o erro de $1-\sigma$ em cada parâmetro quando marginalizamos sobre os outros nos cenários otimista e pessimista respectivamente. . . . .                                | 99 |

# 1

## Introdução

A descoberta observacional, na década de 90, da expansão acelerada do universo trouxe ênfase ao atual modelo cosmológico onde o universo é composto aproximadamente por 4% de matéria bariônica, 20% de matéria escura e 76% de energia escura [1]. No entanto, a causa da aceleração cósmica ainda é desconhecida. De acordo com a relatividade geral, a expansão acelerada pode ser explicada introduzindo no universo uma forma de energia exótica com pressão negativa, denominada *Energia Escura*. O candidato mais simples para a energia escura é a constante cosmológica [2, 3], que foi assim nomeada porque sua densidade de energia é constante no tempo e no espaço. Outra possibilidade, inclui um campo escalar  $\phi$  com potencial  $V(\phi)$ , nomeado como quintessência [4, 5]. Ao contrário da constante cosmológica, a equação de estado de quintessência muda dinamicamente com o tempo. Existem, porém, outras alternativas que podem explicar a aceleração cósmica através da modificação da relatividade geral. Tais modelos são denominados teoria de gravitação modificada e alguns deles são baseados na troca do escalar de curvatura,  $\mathcal{R}$ , por uma função mais geral,  $f(\mathcal{R})$ , na ação de Einstein-Hilbert [3, 6]. DGP <sup>1</sup> é outro modelo de gravitação modificada baseado em teorias multi-dimensionais onde nosso universo possui  $(3 + 1)$  dimensões incorporadas num volume Minkowskiano de cinco dimensões [7]. Em outras palavras, a gravidade é modificada em longas distâncias mas mantém-se quadridimensional em testes locais.

A análise da distribuição de galáxias no universo é uma valiosa técnica para testar os diferentes modelos da aceleração cósmica. Cada modelo teórico é carac-

---

<sup>1</sup>Modelo proposto por Dvali, Gabadadze e Porrati.

terizado por um conjunto de parâmetros cosmológicos que podem ser estimados analisando os dados observacionais. Até recentemente, os vínculos sobre estes parâmetros foram obtidos usando catálogos espectroscópicos de galáxias [8, 9]. No entanto, futuros projetos irão construir grandes catálogos fotométricos com o objetivo de aumentar o número de objetos observados e conseqüentemente melhorar a análise estatística dos dados. Tais projetos incluem, entre outros, o Dark Energy Survey<sup>2</sup>.

O projeto Dark Energy Survey (DES) será um dos mais importantes mapeamentos fotométricos do universo desta década. Este projeto está sendo conduzido por um consórcio que envolve várias instituições do Brasil, Inglaterra, Espanha, Estados Unidos e Alemanha. O DES coletará seus dados durante 5 anos no telescópio Blanco localizado no Cerro Tololo International Observatory (CTIO, Chile). Ele mapeará uma grande área do céu correspondendo a  $5000 \text{ deg}^2$  ( $\sim 1/8$  da esfera celeste) em cinco bandas espectrais. Com seu sucesso observacional praticamente garantido, o acervo de dados do DES representará o maior conjunto de dados existentes na atualidade e conterá mais de 300 milhões de galáxias, 20 mil aglomerados de galáxias e 2000 detecções de supernovas, além de milhões de estrelas da Via Láctea e objetos do sistema solar, viabilizando estudos numa grande diversidade de temas na área de Astronomia e Cosmologia.

Um dos principais objetivos do DES é determinar o parâmetro  $w$  da equação de estado da energia escura e sua evolução ao longo da história temporal do universo. Este estudo será realizado usando quatro técnicas independentes e complementares: a análise estatística da estrutura em grande escala do universo, aglomerados de galáxias, supernovas e efeito fraco de lentes gravitacionais. Esta tese é baseada na primeira técnica citada acima, onde usamos a distribuição de galáxias para fazer previsões sobre limites nos parâmetros cosmológicos.

O projeto DES ainda não começou a coletar seus dados. No entanto, é possível, sem nenhum tipo de observação, estudar a precisão com que ele poderá determinar os parâmetros cosmológicos. Este estudo é feito através da matriz de Fisher que fornece os erros destes parâmetros em relação a seus respectivos valores fiduciais. Embora a matriz de Fisher possa ser estudada no contexto das 4 técnicas aplicadas ao DES, vamos nos concentrar no estudo da função de correlação angular de dois pontos,  $\omega(\theta)$ , obtida através da distribuição de galáxias no universo. A análise completa é baseada na modelagem desta função e na modelagem da matriz de covariância teórica que descreve os erros de suas medidas.

Com o objetivo de entender a motivação deste trabalho, iniciamos nosso estudo no Capítulo 2 introduzindo alguns conceitos básicos de cosmologia padrão, a expansão acelerada do universo. Em seguida, apresentamos alguns modelos que explicam tal expansão. Abordamos os modelos de  $\Lambda$ CDM e quintessência para energia escura e fazemos um breve resumo sobre modelos de gravitação modificada.

---

<sup>2</sup>[www.darkenergysurvey.org](http://www.darkenergysurvey.org)

No Capítulo 3, para definir a função de correlação angular, estudamos a dinâmica das perturbações na matéria desde a inflação até a época em que o universo foi dominado por matéria não-relativística. Definimos o espectro de potência como a variância destas perturbações no espaço de Fourier. Este espectro apresenta pequenas oscilações bariônicas que, no espaço real, correspondem a um único pico na função de correlação espacial de dois pontos  $\xi(r)$ . Neste capítulo mostramos como obter  $\omega(\theta)$  através de  $\xi(r)$ . Toda análise apresentada aqui foi feita para a distribuição de matéria no universo, isto é, matéria bariônica e matéria escura.

Embora a análise com a matriz de Fisher não necessite de dados observacionais, a função de correlação angular deve ser modelada considerando alguns efeitos que se mostram presentes nos catálogos de galáxias. No Capítulo 4 apresentamos estes efeitos introduzindo-os em  $\omega(\theta)$ . Para o DES, estes efeitos são: viés entre a distribuição de galáxias e a distribuição de matéria escura, distorção no *redshift*<sup>3</sup> devido às velocidades peculiares, não-linearidade e efeitos devido à distribuição fotométrica de *redshift*.

Para estimar os parâmetros cosmológicos precisamos conhecer os erros nas medidas de  $\omega(\theta)$ . Estes erros podem ser obtidos pelo próprio catálogo de galáxias ou podem ser modelados teoricamente. No Capítulo 5 estudamos a modelagem completa da matriz de covariância que fornece todas as informações dos erros nas medidas de  $\omega(\theta)$ .

O Capítulo 6 foi dedicado ao estudo da matriz de Fisher para o DES e à apresentação de nossos principais resultados. Nele, mostramos e aplicamos as propriedades da matriz de Fisher usando a função de correlação angular e a matriz de covariância introduzidas nos Capítulos 4 e 5.

Finalmente, apresentamos nossas conclusões e futuras perspectivas. Este trabalho foi baseado na referência [10].

---

<sup>3</sup> No Capítulo 1 daremos a definição de *redshift*.





## A expansão do universo

Em 1998, dois grupos que estudavam supernovas do Tipo Ia apresentaram independentes evidências de que o universo está em expansão acelerada [11, 12]. Nos últimos treze anos dados experimentais de diferentes observações confirmaram este fato [13, 14]. Desde então várias explicações tem sido propostas para justificar estas evidências.

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos básicos de cosmologia padrão com o intuito de entender as evidências da aceleração cósmica. Abordamos alguns modelos para a expansão acelerada do universo, tais como:  $\Lambda$ CDM, quintessência e gravitação modificada.

### 2.1 Cosmologia básica

O modelo mais simples do universo, chamado modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), é baseado na hipótese de que a distribuição de matéria no universo é homogênea e isotrópica em grandes escalas. Como as propriedades geométricas do espaço-tempo estão relacionadas com a distribuição de matéria através das equações de Einstein, segue que o espaço tridimensional também é homogêneo e isotrópico. No entanto, isto é verdade somente em escalas maiores que 100 Mpc.

O intervalo invariante,  $ds^2$ , no universo de FWR é dado por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.1)$$

onde  $a(t)$  é o fator de escala que descreve a expansão do espaço e  $k$  é a constante

de curvatura que assume valores  $k = 0, 1$  e  $-1$  correspondendo ao universo plano, fechado e aberto, respectivamente [15]. Nesta equação consideramos  $c = 1$ <sup>1</sup>. A Eq. (2.1) pode ser reescrita em termos da métrica  $g_{\mu\nu}$  e das coordenadas  $x^\mu \equiv (t, r, \theta, \phi)$  da seguinte maneira:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

onde  $g_{rr} = a^2(t)/(1 - kr^2)$ ,  $g_{\theta\theta} = a^2(t)r^2$ ,  $g_{\phi\phi} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta$ ,  $g_{00} = -1$  e  $g_{\mu\nu} = 0$  para  $\mu \neq \nu$ . As coordenadas espaciais introduzidas acima são chamadas coordenadas comóveis, isto é, elas acompanham a expansão do universo. Dessa forma, objetos com velocidades peculiares<sup>2</sup> nulas possuem  $r, \theta, \phi$  constantes.

A métrica é fundamental para estudar a dinâmica do universo governada pelas equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde  $G$  é a constante universal de Newton e  $G_{\mu\nu}$  é nomeado *tensor de Einstein*. O lado esquerdo das Eqs. (2.3) caracteriza a geometria do espaço-tempo, enquanto o lado direito descreve o conteúdo de matéria e energia contida no universo por intermédio do tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . As quantidades  $R_{\mu\nu}$  e  $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  são, respectivamente, o tensor de Ricci e a curvatura escalar e dependem do tensor métrico e suas derivadas. O tensor de Ricci é dado em termos do símbolo de Christoffel

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} \Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \Gamma^\beta_{\mu\alpha}, \quad (2.4)$$

que é definido por

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} [\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}]. \quad (2.5)$$

No modelo de FRW, a distribuição de matéria no universo é descrita por um fluido perfeito. Este é isotrópico no seu referencial próprio e portanto possui tensor energia-momento dado por

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)u_\mu u_\nu, \quad (2.6)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia e  $p$  é a pressão isotrópica medida por um observador comóvel ao fluido. O 4-vetor velocidade  $u_\mu$  tem componentes  $u_0 = 1$  e  $u_i = 0$ , onde  $i = 1, 2, 3$  rotula as coordenadas espaciais. A palavra matéria em relatividade geral, refere-se a qualquer fonte de energia que está presente no universo. Por exemplo, o tensor energia-momento do fluido contém informações

<sup>1</sup>Durante o desenvolvimento desta tese adotamos unidades naturais com  $c = 1$ , exceto nos casos onde escrevemos a velocidade da luz explicitamente.

<sup>2</sup>Velocidades peculiares são velocidades relativas à expansão do universo.

sobre partículas relativísticas, matéria bariônica e matéria escura contidas no universo. Podemos acrescentar qualquer tipo de energia em  $T_{\mu\nu}$ , inclusive modelos mais exóticos como energia de vácuo. O modelo mais simples de energia de vácuo se baseia na introdução da constante cosmológica,  $\Lambda$ , nas equações de Einstein. Isto é equivalente a redefinir o tensor energia-momento como

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \\ &= \tilde{p}g_{\mu\nu} + (\tilde{p} + \tilde{\rho})u_\mu u_\nu,\end{aligned}\tag{2.7}$$

onde

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}.\tag{2.8}$$

O tensor de Einstein obedece a identidade de Bianchi  $\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$ , que implica na lei de conservação

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0.\tag{2.9}$$

O símbolo  $\nabla$  representa a derivada covariante definida por

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} T^\mu_\alpha.\tag{2.10}$$

Para  $\nu = 0$ , a Eq. (2.9) fornece a equação de conservação de energia

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0,\tag{2.11}$$

onde os pontos representam a derivada com relação ao tempo. Considerando uma equação de estado da forma  $p = w\rho$ , onde  $w$  é um parâmetro constante, a densidade de energia assume a forma  $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ . Exemplos de interesse incluem o universo dominado por

|                  |                   |               |                                      |
|------------------|-------------------|---------------|--------------------------------------|
| Radiação         | $w = \frac{1}{3}$ | $\rightarrow$ | $\rho_r \propto a^{-4},$             |
| Matéria          | $w = 0$           | $\rightarrow$ | $\rho_m \propto a^{-3},$             |
| Energia de vácuo | $w = -1$          | $\rightarrow$ | $\rho_\Lambda \propto \text{const.}$ |

Para entender a evolução do fator de escala precisamos considerar a componente temporal das Eqs. (2.3)

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R} = 8\pi GT_{00}.\tag{2.12}$$

No universo homogêneo e isotrópico a igualdade acima se resume na equação de Friedmann

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho(a),\tag{2.13}$$

onde  $H$  é o parâmetro de Hubble definido por  $H = \dot{a}/a$  e  $\rho(a)$  representa a soma sobre todas as componentes de densidades de energia que constituem o universo<sup>3</sup> (matéria, radiação e energia de vácuo). Esta equação fornece a relação entre o fator de escala e o tempo físico  $t$ . Ao considerar o universo plano obtemos a solução  $a \propto t^{1/3}$  para radiação,  $a \propto t^{2/3}$  para matéria e  $a \propto \exp(H_0 t)$  para energia de vácuo, onde  $H_0$  é definida em  $a = 1$  e é denominada constante de Hubble.

A equação de Friedmann pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$H^2(a) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[ \Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda a^{-3(1+w)} \right], \quad (2.14)$$

onde os parâmetros  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$ ,  $\Omega_k$  e  $\Omega_\Lambda$  são definidos em termos da densidade crítica,  $\rho_{cr}$ , de acordo com

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m^{(0)}}{\rho_{cr}}, \quad \Omega_r \equiv \frac{\rho_r^{(0)}}{\rho_{cr}}, \quad \Omega_k \equiv \frac{\rho_k^{(0)}}{\rho_{cr}}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr}}. \quad (2.15)$$

Estas grandezas fazem parte de um conjunto chamado parâmetros cosmológicos que são necessários para descrever a composição e a dinâmica do universo. A densidade crítica depende do fator de escala no caso geral. Ela é definida fazendo  $k = 0$  na Eq. (2.13). Neste trabalho, adotamos  $\rho_{cr}$  calculada em  $a = 1$ , logo

$$\rho_{cr} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.16)$$

Note que (2.14) corresponde exatamente a Eq. (2.13) com  $\rho_k^{(0)} = -(3/8\pi G)k$  e  $w = -1$ . Exigindo a consistência da Eq. (2.14) quando  $a = 1$ , obtemos

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1, \quad (2.17)$$

onde  $\Omega_m$  é a soma dos parâmetros de densidade de matéria escura ( $\Omega_{cdm}$ ) e matéria bariônica ( $\Omega_b$ ).

Nos modelos cosmológicos atuais  $\rho_\Lambda$  é conhecida como densidade de *Energia Escura*. Na seção 2.3 abordaremos a necessidade de introduzir essa misteriosa forma de energia no universo.

As componentes espaciais das equações de Einstein juntamente com a Eq. (2.13) fornecem a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.18)$$

A segunda derivada do fator de escala vincula informações sobre a expansão do universo. Ela determina se o universo está acelerado, desacelerado ou se expande com velocidade constante.

---

<sup>3</sup>Considerando que não existe interação entre elas.

### 2.1.1 Distâncias cosmológicas

Medir ou estimar distâncias em cosmologia permite-nos extrair as propriedades do universo em que vivemos. No entanto, esta tarefa é muito difícil quando tratamos de escalas astronômicas. Na seção anterior vimos que no sistema de coordenadas comóvel,  $\mathbf{r}$ , objetos como galáxias permanecem fixos em suas posições quando o universo se expande. Porém, a distância verdadeira entre dois objetos deve ser calculada usando as coordenadas físicas,  $\mathbf{x}$ , definidas por

$$\mathbf{x} = a(t)\mathbf{r}. \quad (2.19)$$

Two years later Edwin Hubble confirmed the existence

Na ausência de velocidades peculiares  $\mathbf{r}$  é constante. Logo, ao derivar  $\mathbf{x}$  em relação ao tempo, obtemos a famosa lei de Hubble

$$\mathbf{v} = H\mathbf{x}. \quad (2.20)$$

Esta relação mostra que a velocidade de recessão de uma galáxia em relação a outra é proporcional à distância entre elas. A lei de Hubble foi primeiro derivada em Relatividade Geral em 1927 por Georges Lemaître. Dois anos depois Edwin Hubble a confirmou com uma evidência experimental [16] ao observar o desvio no comprimento de onda da luz emitida ( $\lambda_{em}$ ) em relação ao comprimento de onda observado ( $\lambda_{obs}$ ) de galáxias distantes. Este desvio é descrito pelo *redshift*  $z$  (em português é chamado de desvio para o vermelho)

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} - 1 = \frac{a_0}{a(t_{em})} - 1, \quad (2.21)$$

onde  $a_0$  é uma constante. A Eq. (2.21), além de definir o *redshift*, introduz a relação entre ele e o fator de escala  $a = 1/(1+z)$ .

Existem várias maneiras de computar distâncias em cosmologia. Vamos primeiro definir a distância comóvel de um objeto no céu em relação a nós considerando a trajetória percorrida por um raio de luz emitido por ele. O intervalo no espaço-tempo, ao longo da trajetória radial de uma partícula com velocidade da luz, é zero ( $ds^2 = 0$ ). Assim, de acordo com a Eq. (2.1) temos

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}.$$

A distância que um raio de luz percorre entre  $r_e$  e  $r_0$  é denominada distância comóvel. Ela é definida por

$$\chi(t) = \int_{t_e}^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_{r_e}^{r_0(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.22)$$

onde  $t_e$  e  $r_e$  caracterizam o tempo e a distância em que o raio foi emitido. A transformação entre o tempo físico e o *redshift* é feita através da relação  $a = 1/(1+z)$  e do parâmetro de Hubble,

$$dt = -\frac{dz}{H(z)(1+z)}. \quad (2.23)$$

Então podemos escrever a distância comóvel de um objeto em relação a nós como

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (2.24)$$

onde  $z$  é o *redshift* do objeto. Para  $z$  muito menor que a unidade essa relação é aproximadamente  $\chi(z) \simeq z/H(z)$ .

O intervalo invariante pode ser escrito em termos da distância comóvel por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.25)$$

onde a função  $f_k(\chi)$  depende da geometria espacial do universo,

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & (k = +1), \\ \chi & (k = 0), \\ \sinh \chi & (k = -1). \end{cases} \quad (2.26)$$

Esta função pode ser reescrita de maneira mais compacta como

$$f_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}\chi). \quad (2.27)$$

Para o universo plano, retornamos à relação (2.26) fazendo o limite com  $k \rightarrow 0$ .

Podemos também estimar distâncias comparando tamanhos angulares com dimensões físicas. Consideremos um objeto de tamanho próprio  $l$  ortogonal a linha de visada. A distância de diâmetro angular,  $d_A$ , é definida através do ângulo  $\theta$  que subtende esse objeto

$$d_A \simeq \frac{l}{\theta}, \quad (2.28)$$

onde usamos a aproximação de ângulo pequeno que é válida em quase todos os contextos astronômicos. O comprimento do objeto pode ser calculado através da distância entre seus extremos. Usando a condição de isotropia, estes extremos possuem coordenadas  $(t_1, r_1, \alpha, \phi)$  e  $(t_1, r_1, \alpha + \theta, \phi)$  em relação a nós. Logo, de acordo com a Eq. (2.25), o tamanho do objeto é dado por  $l = af_k\theta$ . Substituindo esta relação em (2.28), obtemos

$$d_A(z) = a(z)f_k(\chi) = \frac{f_k(\chi)}{1+z}. \quad (2.29)$$

Outro método usado para determinar distâncias é baseado no fluxo de energia  $F$  observado a uma distância  $d_L$  de objetos que possuem luminosidade absoluta  $L_s$  bem definida

$$F = \frac{L_s}{4\pi d_L^2}. \quad (2.30)$$

Para o modelo de FRW o fluxo de energia é definido por  $F = L_0/S$ , onde  $L_0$  é a luminosidade observada e  $S = 4\pi f_k(\chi)^2$  é a área de uma esfera de raio  $f_k(\chi)$  em  $z = 0$ . No universo em expansão  $L_s \neq L_0$ , isto é, a luminosidade emitida pelo objeto é diferente da luminosidade absorvida por nós. Então a distância luminosidade é dada por

$$d_L^2 = f_k^2(\chi) \frac{L_s}{L_0}. \quad (2.31)$$

Se denotarmos a energia da luz, emitida por um objeto no intervalo  $\Delta t_1$ , por  $\Delta E_1$ , podemos definir sua luminosidade absoluta por  $L_s \equiv \Delta E_1/\Delta t_1$ . De maneira similar podemos escrever  $L_0 = \Delta E_0/\Delta t_0$ , onde  $\Delta E_0$  é a energia da luz do objeto detectada no intervalo  $\Delta t_0$  por um observador na Terra. De acordo com a Eq. (2.21) e devido ao fato da constância da velocidade da luz  $c = \lambda/\Delta t$ , temos

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = 1 + z. \quad (2.32)$$

Substituindo a última equação na razão das luminosidades obtemos

$$\frac{L_s}{L_0} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = (1 + z)^2.$$

Isto implica em

$$d_L(z) = f_k(\chi)(1 + z). \quad (2.33)$$

Para calcular  $d_L$  precisamos conhecer a composição de energia do universo. Esta informação é introduzida em  $\chi(z)$  via o parâmetro de Hubble  $H(z)$ . Em baixos *redshifts*, quando  $k = 0$ , podemos fazer  $d_L \approx z/H(z)$ . A Figura 2.1 mostra  $H_0 d_L$  para o universo plano dominado por diferentes fontes de energia.

## 2.2 Aceleração cósmica

Há poucas décadas atrás, o mundo científico se baseava na idéia que o conteúdo do universo era dominado por matéria. Em 1998 os grupos High-Redshift Supernova Search Team (HSST) e Supernova Cosmology Project (SCP) reportaram de maneira independente a aceleração do universo usando observações de supernovas do tipo Ia [11, 12]. Tal expansão acelerada eliminou a hipótese de  $\Omega_m = 1$  e impôs a necessidade de introduzir outras fontes de energia que dominam o universo ou de buscar explicações alternativas como teorias de gravitação modificada.

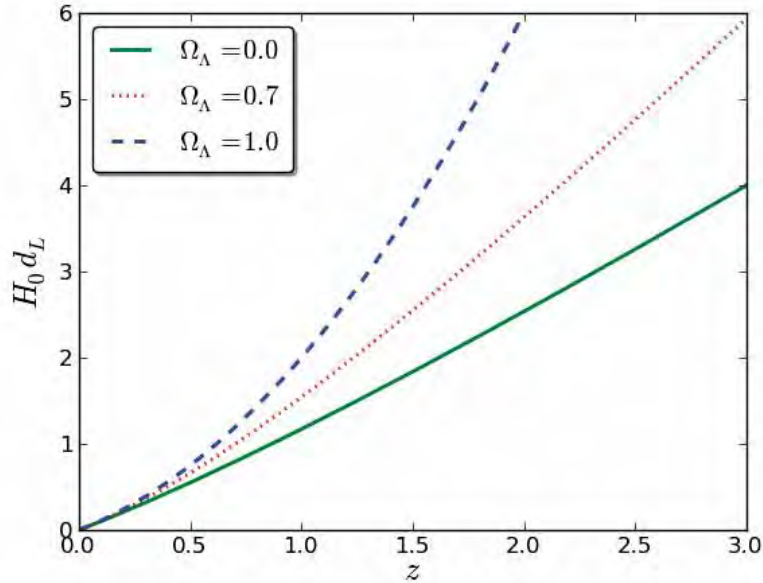


Figura 2.1: Distância de luminosidade no universo plano dominado por matéria não relativística ( $\Omega_m$ ) e energia escura ( $\Omega_\Lambda$ ) satisfazendo  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ .

A possibilidade de medir distância independente da cosmologia faz com que supernovas do tipo Ia sejam boas ferramentas para extrair informações dos parâmetros cosmológicos. Estes objetos surgem quando uma anã branca em um sistema binário captura parte da massa da estrela companheira e ultrapassa o limite de massa de Chandrasekhar [17]. Ao romper este limite a estrela perde a sua condição de equilíbrio gravitacional e explode. O limite de massa de Chandrasekhar é bem determinado em astronomia <sup>4</sup>, assim a luminosidade do evento é praticamente constante, garantindo a sua utilidade como indicador de distância.

Em outras palavras, de acordo com a Eq. (2.30), podemos estimar a distância de luminosidade  $d_L$  de uma supernova simplesmente medindo seu fluxo de energia  $F$ . Em astronomia, ao invés de usar  $F$  e  $L$ , são usados a magnitude aparente  $m$  e a magnitude absoluta  $M$  dos objetos. Estas magnitudes estão relacionadas com a luminosidade via  $m = -(5/2) \log_{10}(F/const)$  e  $M = -(5/2) \log_{10}(L_s/const)$ . Aplicando o logaritmo na Eq. (2.30) obtemos

$$m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{10pc} \right). \quad (2.34)$$

Para termos uma idéia superficial de como  $d_L$  é obtido de dados de supernova do Tipo Ia vamos considerar a Supernova 1997ap encontrada em altos *redshifts*

<sup>4</sup>O limite de massa de Chandrasekhar corresponde  $1.4M_\odot$ , onde  $M_\odot$  representa a massa solar.



com  $z = 0.83$  e  $m_1 = 24.32$  e a Supernova 1992P encontrada a baixos *redshifts* com  $z = 0.026$  e  $m_2 = 16.08$ . Como a magnitude absoluta para estas estrelas são iguais, a diferença entre as magnitudes aparentes é dada por

$$m_1 - m_2 = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L(z = 0.83)}{10pc} \right) - 5 \log_{10} \left( \frac{d_L(z = 0.026)}{10pc} \right). \quad (2.35)$$

Simplificando a relação acima teremos

$$H_0 d_L(z = 0.83) = 10^{(m_1 - m_2)/5} H_0 d_L(z = 0.026). \quad (2.36)$$

Para baixos *redshift*, a distância luminosidade independe da cosmologia. Ela é simplesmente  $H_0 d_L(z = 0.026) = 0.026$ . Portanto, a única grandeza desconhecida em (2.36) é dada por

$$H_0 d_L(z = 0.83) = 1.16. \quad (2.37)$$

Por outro lado, o valor teórico desta medida pode ser calculado usando a Eq. (2.33). No universo plano, onde  $f_k(\chi) = \chi$ , encontramos para diferentes constituintes de energia:

$$\begin{aligned} H_0 d_L(z = 0.83) &\simeq 0.95, & \Omega_m &\simeq 1, \\ H_0 d_L(z = 0.83) &\simeq 1.23, & \Omega_m &\simeq 0.3, \quad \Omega_\Lambda &\simeq 0.7. \end{aligned}$$

A discussão acima não leva em consideração as incertezas em  $m_1$  e  $m_2$ . De fato, a realidade é mais complicada. A magnitude absoluta varia de uma supernova para outra e temos que recorrer a métodos empíricos de padronização destes objetos. Porém, esta estimativa elimina fortemente o modelo com  $\Omega_m = 1$  e introduz novos modelos que conseguem explicar de maneira adequada os dados observacionais. A quantidade  $\Omega_\Lambda$ , caracteriza modelos de *Energia Escura*. Embora nossos conhecimentos referente à ela sejam poucos, a energia escura consegue explicar vários dados observacionais provindos de diferentes fontes de observações.

A Figura 2.2 mostra no painel (a) um dos primeiros resultados obtidos com os experimentos de Supernova do Tipo Ia [11], e mostra também no painel (b), resultados mais recentes com melhor ajuste para os parâmetros cosmológicos  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_m$  [19]. Ambos resultados eliminam a hipótese do universo ser dominado por matéria não relativística.

## 2.3 Modelos para a aceleração cósmica

Entender a origem da aceleração cósmica é um grande desafio para a cosmologia teórica. Nesta seção fizemos uma breve apresentação de duas classes de modelos populares para explicar a expansão acelerada. A primeira é baseada em modelos de energia exótica, denominada energia escura, onde o tensor energia-momento contém uma componente com pressão negativa. Essa classe inclui a

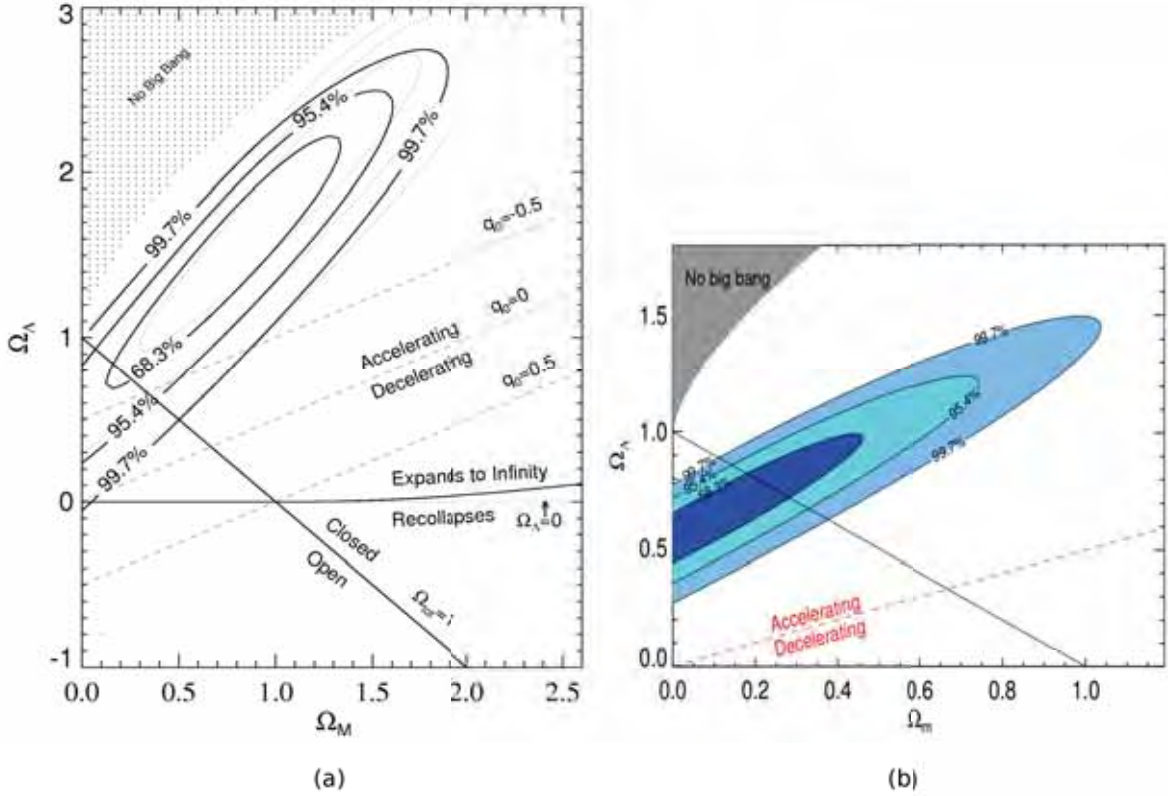


Figura 2.2: Vínculos de Supernova do Tipo Ia nos parâmetros  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$ . O painel (a) mostra resultados de 1998 [11] e o painel (b) apresenta resultados mais recentes [19]. Em ambos, o modelo com  $\Omega_m = 1$  é fortemente excluído.

constante cosmológica e teorias com campo escalar. A segunda é baseada em gravitação modificada, na qual o tensor de Einstein é alterado para que aceleração surja naturalmente sem que haja a necessidade de acrescentar componentes exóticas em  $T_{\mu\nu}$ .

### 2.3.1 Constante Cosmológica

Em 1917, acreditando que o universo era estático, Einstein acrescentou a constante cosmológica em suas equações. Desde que a métrica satisfaça a condição  $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ , é possível introduzir  $\Lambda g_{\mu\nu}$  nas Eqs. (2.3) sem violar a identidade de Bianchi. Ao invés de redefinir o tensor energia-momento, como fizemos na Eq. (2.7), vamos acrescentar diretamente a constante cosmológica no lado esquerdo das equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.38)$$

Usando a equação acima podemos reescrever as Eqs. (2.13) e (2.18) da seguinte maneira:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.40)$$

Para que o universo seja estático precisamos que  $\dot{a}$  e  $\ddot{a}$  sejam nulos. Assim, considerando que a densidade de matéria não relativística domina ( $p = 0$ ) sobre as outras fontes de energia, obtemos que o universo estático corresponde a

$$\rho_m = \frac{\Lambda}{4\pi G}, \quad \frac{k}{a^2} = \Lambda. \quad (2.41)$$

Como  $\rho > 0$ , então  $\Lambda$  também é positiva, e conseqüentemente o universo é fechado ( $k = +1$ ) com raio igual a  $a = 1/\sqrt{\Lambda}$ .

Depois da descoberta da expansão, os cosmólogos perderam o interesse no modelo estático do universo, e Einstein classificou a constante cosmológica como o seu maior erro. No entanto, na década de 90, ela voltou como um dos candidatos mais simples de energia escura para explicar a aceleração cósmica e deu origem ao modelo  $\Lambda$ CDM, o qual possui equação de estado  $w = -1$ . Porém este modelo possui dois problemas teóricos que ainda não foram solucionados.

O primeiro está relacionado com o valor da constante cosmológica. O valor obtido dos dados observacionais é  $10^{121}$  ordens de grandeza menor que o valor sugerido pela física de partículas [2]. O segundo problema desta interpretação é chamado problema da coincidência. Coincidência porque estamos vivendo na época onde  $\rho_\Lambda \approx \rho_m$ . Quando  $\rho_\Lambda = \rho_m$

$$z_{coinc} = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{1 - \Omega_\Lambda}\right)^{1/3} - 1, \quad (2.42)$$

onde usamos  $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$ . Para  $\Omega_\Lambda = 0.7$  temos  $z \simeq 0.3$ .

Embora os cosmólogos ainda não tenham soluções para os problemas acima, o modelo  $\Lambda$ CDM é considerado um excelente candidato para a energia escura pois tem sido consistente com todas as observações feitas até o momento.

### 2.3.2 Modelos com campo escalar

Outro modelo de energia escura inclui um campo escalar leve  $\phi$ . Existem várias teorias de campo escalar. Nesta seção vamos fazer um breve resumo sobre modelos de quintessência. Tais modelos postulam  $\phi$  com ação dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (2.43)$$

onde  $(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ , e  $V(\phi)$  é o potencial do campo. Vamos assumir que  $\phi$  seja espacialmente uniforme. O tensor energia-momento do campo é calculado variando a ação em termos de  $g_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi)\right]. \quad (2.44)$$

Para o universo plano, homogêneo e isotrópico, obtemos as seguintes expressões para  $\rho_\phi$  e  $p_\phi$

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.45)$$

Então, as Eqs (2.13) e (2.18) conduzem a

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right], \quad (2.46)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3}\left[\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right]. \quad (2.47)$$

De acordo com a Eq. (2.47), a expansão acelerada do universo ocorre quando  $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$ .

A equação de estado é dada pela razão entre  $p_\phi$  e  $\rho_\phi$

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}, \quad (2.48)$$

e pode, em geral, variar entre  $-1 \leq w_\phi \leq 1$ . Se escrevemos a equação da continuidade (2.11) na forma integral

$$\rho_\phi \propto \exp\left[-\int 3(1+w_\phi)\frac{da}{a}\right], \quad (2.49)$$

obtemos  $\rho = \text{const}$  quando  $w_\phi = -1$ . De acordo com a Eq. (2.13), a solução da equação de Friedmann, quando a densidade de energia é constante é dada por  $a \propto \exp[H_0 t]$ . No entanto, essa expansão exponencial acontece somente se consideramos que o campo escalar possui uma evolução lenta. Neste caso temos  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$  e conseqüentemente  $p_\phi \simeq -\rho_\phi$ .

### 2.3.3 Gravitação modificada

Em modelos de gravitação modificada, ao invés de introduzir uma nova componente de energia com pressão negativa no universo, a origem da expansão acelerada é explicada por uma modificação da gravidade. Uma das maneira de fazer isto é generalizar a ação de Einstein-Hilbert trocando  $\mathcal{R}$  por uma função  $f(\mathcal{R})$ . A ação que fornece as equações de movimento é definida da seguinte maneira:

$$S = S_{EH} + S_m, \quad (2.50)$$

onde  $S_m$  corresponde à ação de matéria e  $S_{EH}$  à ação modificada de Einstein-Hilbert dada por

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}). \quad (2.51)$$

A escolha de  $f(\mathcal{R})$  deve respeitar vínculos provindos de testes gravitacionais [20].

As equações de campo podem ser derivadas variando a Eq. (2.50) em relação a  $g_{\mu\nu}$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathcal{R}} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{\partial f}{\partial \mathcal{R}} + g_{\mu\nu} \square \frac{\partial f}{\partial \mathcal{R}} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.52)$$

Para  $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$  as equações acima retornam a teoria original apresentada em (2.3). Maiores detalhes e exemplos sobre  $f(\mathcal{R})$  são encontrados em [3, 21–23].

Outro modelo de gravitação modificada foi proposto por Dvali, Gabadadze e Porrati (DGP) [7]. Esta teoria assume que a gravidade age num espaço de  $4 + 1$  dimensões onde a gravidade torna-se mais fraca em grandes escalas explicando a expansão acelerada do universo.

# 3

## A estrutura em grande escala do universo

Medidas de radiação cósmica de fundo (CMB)<sup>1</sup> indicam que o universo é homogêneo e isotrópico em  $z \simeq 1000$  com anisotropias de aproximadamente  $10^{-5}$ . Hoje, porém, em escalas abaixo de 100 Mpc, o universo possui estruturas não lineares bem desenvolvidas. A densidade média de matéria dentro destas estruturas são ordens de grandeza maiores que a densidade média do universo. Acredita-se que elas tiveram origem através de flutuações quânticas de um campo escalar (inflaton) durante o período inflacionário<sup>2</sup> e sua evolução é determinada por instabilidade gravitacional.

Galáxias, aglomerados e super aglomerados de galáxias fazem parte desse conjunto de estruturas não lineares. Por exemplo, a densidade dentro de uma galáxia é aproximadamente  $10^5$  vezes a densidade média do universo. A análise estatística da distribuição desses objetos é uma valiosa fonte de informações sobre os parâmetros fundamentais que determinam a dinâmica do universo. Os catálogos de galáxias obtidos por observações de fontes como o Sloan Digital Sky Survey (SDSS) e futuras observações como o DES são e serão, entre outras coisas, usados para estimar a função de correlação de dois pontos. Esta grandeza é um dos elos entre modelos teóricos e observações.

A principal proposta deste capítulo é introduzir as ferramentas necessárias para estudar a evolução das perturbações de matéria que geraram o universo observado. Vamos definir as funções de correlação espacial e angular de dois

---

<sup>1</sup>Vamos usar a sigla em inglês de Cosmic Microwave Background.

<sup>2</sup>A inflação é caracterizada por uma fase de crescimento exponencial do fator de escala que descreve o tamanho do universo.

pontos e descrever métodos observacionais que podem ser usados para vincular os parâmetros cosmológicos.

### 3.1 Dinâmica das perturbações de matéria

As flutuações do campo escalar são caracterizadas por uma amplitude  $\delta\varphi$  e um vetor de onda com módulo  $k$ . O inverso da última quantidade define uma escala de distância  $\lambda^{ph}(t) = 2\pi a(t)/k$  que cresce diretamente com o fator de escala. Dizemos que uma flutuação está dentro do raio de Hubble quando  $\lambda^{ph} < H^{-1}$ , onde  $H^{-1}$  define o raio de Hubble. Durante o período inflacionário o comprimento de onda das flutuações cresceram exponencialmente enquanto  $H(t)$  se manteve constante. Isto fez com que as escalas de interesse saíssem do horizonte congelando suas correspondentes flutuações.

Embora as perturbações inflacionárias sejam calculadas com respeito ao campo escalar, elas conduzem à perturbações na densidade total de energia do universo. Depois da inflação, os modos de perturbação começaram a reentrar no horizonte de Hubble. Neste momento, o campo de inflaton decaiu em forma de matéria convencional traduzindo as perturbações  $\delta\varphi$  em perturbações  $\delta\rho_i$  sobre cada espécie individual de partícula. Dessa forma, os  $\delta\rho_i$ 's serviram como condições iniciais para as perturbações de densidade das partículas no período de desacoplamento entre fótons e matéria.

Para entender a formação das estruturas observadas em grandes escalas, vamos iniciar estudando o crescimento das perturbações via instabilidade gravitacional quando o universo foi dominado por matéria não-relativística. Na seção 1.1 vimos que em grandes escalas matéria pode ser descrita como um fluido perfeito. Isto significa que ela é caracterizada pela densidade de energia  $\rho_m(t)$ , a pressão  $p(t)$  relacionada com  $\rho_m(t)$  pela equação de estado e o 3-vetor velocidade  $\mathbf{v}(t)$ . As equações da dinâmica do fluido, escritas em termos das posições físicas  $\mathbf{x}$  e do tempo  $t$ , são

1. Equação da continuidade

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}(\rho_m \mathbf{v}) = 0; \quad (3.1)$$

2. Equação de Euler

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v} + \frac{\nabla_{\mathbf{x}}p}{\rho_m} + \nabla_{\mathbf{x}}\phi = 0; \quad (3.2)$$

3. Equação de Poisson

$$\Delta_{\mathbf{x}}\phi = 4\pi G\rho_m, \quad (3.3)$$

onde  $\phi$  é o potencial gravitacional newtoniano.

As perturbações são introduzidas como pequenos desvios nas grandezas físicas que descrevem o meio no qual elas estão envolvidas. Vamos denominar este meio como fundo e representá-lo pelo sub-índice "o". Para a densidade de fundo de matéria não-relativística usaremos a notação  $\rho_m$ . Assim, as perturbações são incorporadas da seguinte maneira:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_m(t) + \delta\rho(\mathbf{x}, t); \quad (3.4)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_o(\mathbf{x}, t) + \delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t); \quad (3.5)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_o(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t); \quad (3.6)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_o(t) + \delta p(\mathbf{x}, t), \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{v}_o$  obedece a lei de Hubble introduzida na Eq. (2.20) e  $\mathbf{v}_p = \delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  é a velocidade peculiar do fluido. Tais perturbações são supostas muito menores que suas respectivas magnitudes de fundo e, portanto, podem ser estudadas usando teoria de perturbação linear.

Para matéria não-relativística a pressão é zero ( $p_o = 0$ ) em qualquer instante de tempo, mas sua perturbação é uma função da densidade de energia e da entropia  $S$

$$\delta p(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \delta\rho(\mathbf{x}, t) + \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \delta S(\mathbf{x}, t). \quad (3.8)$$

O modelo inflacionário prevê que as flutuações foram adiabáticas, ou seja,  $\delta S(\mathbf{x}, t) = 0$ . De acordo com a hidrodinâmica, a velocidade de propagação do som é definida por  $v_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_S$ . Dessa forma, podemos reescrever a perturbação na pressão como

$$\delta p(\mathbf{x}, t) = v_s^2 \delta\rho(\mathbf{x}, t). \quad (3.9)$$

Substituindo as Eqs. (3.4 - 3.7) nas Eqs. (3.1), (3.2) e (3.3) e desconsiderando os termos de segunda ordem nas perturbações, obtemos

$$\frac{\partial \delta\rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \rho_m(t) \nabla_{\mathbf{x}} \left[ \delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right] + \nabla_{\mathbf{x}} \left[ \delta\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_o(\mathbf{x}, t) \right] = 0; \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \left[ \mathbf{v}_o(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right] \delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \left[ \delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right] \mathbf{v}_o(\mathbf{x}, t) \\ + \nabla_{\mathbf{x}} \delta\phi(\mathbf{x}, t) + \frac{v_s^2}{\rho_m(t)} \nabla_{\mathbf{x}} \left[ \delta\rho(\mathbf{x}, t) \right] = 0; \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\Delta_{\mathbf{x}} \delta\phi(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \delta\rho(\mathbf{x}, t). \quad (3.12)$$

As equações acima estão escritas em termos das coordenadas Eulerianas (físicas)  $\mathbf{x}$ , onde a expansão de Hubble está explicitamente presente através da velocidade  $\mathbf{v}_o$ . Uma alternativa da dinâmica dos fluidos é usar as coordenadas Lagrangianas na qual a posição de uma partícula não muda com o tempo. Na



ausência de perturbações elas se resumem em coordenadas comóveis  $\mathbf{r}$ . Porém, uma vez que consideramos perturbações, a ação da gravidade em coordenadas comóveis aumenta a não-uniformidade da distribuição de matéria gerando deslocamentos das partículas em relação ao fundo. Estes deslocamentos são as mais diretas assinaturas da inhomogeneidade. Por essa razão é conveniente reformular as equações de movimento perturbadas em termos das coordenadas  $\mathbf{r}$ . De acordo com a Eq. (2.19), as derivadas se transformam como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} - H(t) \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{r}}.$$

Substituindo estas derivadas nas Eqs. (3.10 - 3.12) e definindo o contraste de densidade por

$$\delta(\mathbf{r}, t) \equiv \delta\rho(\mathbf{r}, t)/\rho_m(t), \quad (3.13)$$

obtemos

$$\frac{\partial\delta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla\delta \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + H\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \frac{v_s^2}{a} \nabla\delta(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{a} \nabla\delta\phi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (3.15)$$

$$\Delta\delta\phi(\mathbf{r}, t) = 4\pi G a^2 \rho_m(t) \delta(\mathbf{r}, t), \quad (3.16)$$

onde  $\nabla = \nabla_r$  e  $\Delta$  são derivadas em relação a  $r$ . Após aplicar a divergência na Eq. (3.15) e substituir as Eqs. (3.14) e (3.16) nela, obtemos a seguinte equação diferencial para  $\delta(\mathbf{r}, t)$ :

$$\ddot{\delta}(\mathbf{r}, t) + 2H(t)\dot{\delta}(\mathbf{r}, t) - 4\pi G\rho_m(t)\delta(\mathbf{r}, t) - \frac{v_s^2}{a^2}\Delta\delta(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3.17)$$

Esta equação governa a amplificação gravitacional das perturbações na densidade de matéria. Podemos decompor o contraste de densidade em ondas planas usando a transformada de Fourier. Para o universo plano temos:

$$\delta_{\mathbf{k}}(t) = \int d^3r \delta(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (3.18)$$

onde  $\delta_{\mathbf{k}}(t)$  é um campo complexo que obedece  $\delta_{\mathbf{k}}^* = \delta_{-\mathbf{k}}$ . A equação para o contraste de densidade no espaço de Fourier é dada por

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}}(t) + 2H(t)\dot{\delta}_{\mathbf{k}}(t) + \omega^2\delta_{\mathbf{k}}(t) = 0, \quad (3.19)$$

onde  $\omega = \sqrt{-4\pi G\rho_m + v_s^2 k^2/a^2}$ . O comportamento das perturbações adiabáticas depende do sinal da quantidade dentro da raiz quadrada. Isto mostra a competição entre a atração gravitacional e a pressão do fluido representadas pelos termos  $4\pi G\rho_m$  e  $v_s^2 k^2/a^2$  respectivamente.

Vamos definir o comprimento de onda de Jeans como

$$\lambda_J^{ph} \equiv \frac{2\pi a}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_m}} v_s, \quad (3.20)$$

onde  $\lambda_J^{ph}$  é o comprimento de onda físico relacionado com o comprimento de onda comóvel por  $\lambda_J^{ph} = a\lambda_J$ . A relação (3.20) foi obtida fazendo  $\omega^2 = 0$  na Eq. (3.19). O comprimento de Jeans é a escala de comunicação sonora em que a pressão ainda pode reagir contra as mudanças nas perturbações de densidade de energia devido a instabilidade gravitacional. Como exemplo, vamos considerar uma perturbação esférica de raio  $R$  e densidade  $\rho_m$ . Imagine que a gravidade comprima essa esfera ligeiramente. Levará um tempo  $t_{som}$  para que as ondas sonoras cruzem a região perturbada para restabelecer o equilíbrio do sistema. Este tempo é dado por  $t_{som} = R/v_s$ . Por outro lado, a gravidade continuará tentando comprimir a esfera. Se nada impedir essa compressão a esfera colapsará para  $R = 0$  em um tempo igual a  $t_g \sim 1/\sqrt{G\rho_m}$ . A pressão exercida nas flutuações maiores que  $\lambda_J$  não consegue resistir a compressão gravitacional, pois  $t_g$  é menor que o tempo necessário para propagar a pressão ao longo da perturbação. Na ausência de energia escura, curvatura e radiação o tempo de colapso é simplesmente  $t_g = 1/H$ .

Para perturbações com  $\lambda \ll \lambda_J$  a pressão suporta a gravidade e a solução da Eq. (3.19) se resume em ondas sonoras. Assumindo  $a \propto t^n$  temos  $\delta_k \propto \exp(\pm i\omega t)$  com frequência de oscilação  $\omega = v_s k/[a(t)(1-n)]$ . Para  $\lambda \gg \lambda_J$  a gravidade domina e nós podemos desprezar o termo em  $k$ . Neste caso as amplitudes das perturbações evoluem, mas suas características são independentes dos modos  $k$ 's. Escrevendo a flutuação como  $\delta_{\mathbf{k}}(t) = \frac{D(t)}{D(t_0)} \delta(\mathbf{k}, t_0)$  e substituindo na Eq. (3.19) obtemos

$$\ddot{D}(t) + 2H(t)\dot{D}(t) - 4\pi G\rho_m(t)D(t) = 0, \quad (3.21)$$

onde  $\delta(\mathbf{k}, 0)$  caracteriza as perturbações iniciais e  $D(t)$  é denominado fator de crescimento linear.

Por conveniência vamos expressar a equação acima em termos do *redshift* usando a relação (2.23). Usaremos também a relação (2.15) para reescrever a densidade de matéria em termos do parâmetro  $\Omega_m$ ,

$$\rho_m = \rho_m^{(0)}(1+z)^3 = \rho_c \Omega_m (1+z)^3 = \Omega_m \frac{3H_0^2}{8\pi G} (1+z)^3. \quad (3.22)$$

Finalmente, podemos reescrever a Eq. (3.21) como

$$\frac{d^2}{dz^2} D(z) - \left( \frac{1}{1+z} - \frac{d \ln E(z)}{dz} \right) \frac{d}{dz} D(z) - \frac{3\Omega_m}{2E^2(z)} (1+z) D(z) = 0, \quad (3.23)$$

onde introduzimos o parâmetro de Hubble normalizado  $E(z) = H(z)/H_0$ . Quando  $\Omega_m = 1$ , o parâmetro de Hubble definido em (2.14) se resume a  $H(z) = H_0(1+z)^{3/2}$ , logo a solução da equação (3.23) é dada por

$$D^+ = 1/(1+z) = a, \quad D^- = (1+z)^{3/2} = a^{-3/2}, \quad (3.24)$$

onde  $D^+$  denota modo de crescimento e  $D^-$  modo de decaimento.

Depois do desacoplamento entre bárions e fótons, as escalas de interesse foram muito maiores que o comprimento de onda de Jeans. As flutuações de bárions seguiram a dinâmica das flutuações de matéria escura e suas amplitudes cresceram de modo proporcional ao fator de escala. No entanto, a evolução das perturbações deve ser estudada a partir do momento que elas reentraram no raio de Hubble e serviram como condições iniciais. A análise completa deve considerar um modelo para as perturbações iniciais, a evolução delas durante a época de transição entre radiação e matéria e finalmente a solução da Eq. (3.23).

As perturbações iniciais  $\delta_{\mathbf{k}}(0) = \delta(\mathbf{k}, 0) = D(t=0)\delta(k, t_0)$ <sup>3</sup> são parametrizadas pela inflação. Sua evolução a partir do período em que elas reentraram no horizonte de Hubble, ocorreu de maneira complicada. Nesta época o universo foi preenchido por matéria escura, neutrinos e uma mistura de bárions e fótons altamente acoplados, deixando de se comportar como um fluido simples. Um resultado preciso, exige a solução das equações de Boltzmann acopladas de cada componente [24]. Esta solução foi nomeada função de transferência  $T(k)$  e existem métodos numéricos para calculá-la. A forma mais geral do contraste de densidade pode ser escrita como

$$\delta_{\mathbf{k}}(t) = \delta(\mathbf{k}, 0) \cdot T(k) \cdot D(t). \quad (3.25)$$

Esta equação descreve a evolução das perturbações desde o período que elas reentraram no horizonte até o fim da época onde o universo foi dominado por matéria não-relativística.

Uma forma de medir as perturbações de matéria é através da função de correlação de dois pontos ou do espectro de potência. Estes podem ser estimados através da análise estatística da distribuição de galáxias no céu.

## 3.2 Função de correlação espacial de dois pontos

A função de correlação espacial de dois pontos  $\xi(\mathbf{r})$  é uma medida estatística da distribuição de densidade de matéria no universo. Ela mede a variância do contraste de densidade em função da escala no espaço de coordenadas

$$\xi(\mathbf{r}) = \langle \delta(\vec{r}_1)\delta(\vec{r}_2) \rangle, \quad (3.26)$$

---

<sup>3</sup>Usamos a normalização para a função de crescimento de forma que  $D(t_0) = 1$ .

onde  $\langle \dots \rangle$  representa a média no *ensemble*. Devido à isotropia do universo podemos expressar  $\xi(\mathbf{r}) = \xi(r)$ , com  $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ .

Um maneira de estudar as perturbações é decompô-las no espaço de Fourier, pois no regime linear as componentes evoluem independentemente. A variância das perturbações no espaço de Fourier fornece o espectro de potência  $P(\mathbf{k})$

$$\langle \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'}^* \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(\mathbf{k}), \quad (3.27)$$

onde  $\delta_D$  representa a função delta de Dirac. Neste caso, também é válido o argumento de isotropia que permite escrever  $P(\mathbf{k}) = P(k)$ .

Depois de introduzir a dependência temporal e usar a relação (3.25) obtemos a expressão teórica para  $P(k, t)$  dada por

$$\begin{aligned} P(k, t) &= (2\pi)^3 \langle \delta_{\mathbf{k}}(t) \delta_{\mathbf{k}}^*(t) \rangle. \\ &= P_0(k) T^2(k) D^2(t), \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde  $P_0(k)$  é o espectro de potência primordial gerado na inflação. Ele é postulado da seguinte maneira:

$$P_0(k) = (2\pi)^3 \langle \delta(\mathbf{k}, 0) \delta(\mathbf{k}, 0)^* \rangle = A k^{n_s}, \quad (3.29)$$

onde  $n_s$  é chamado índice espectral. Quando  $n_s = 1$ , recorremos ao espectro de potência primordial de Harrison-Zel'dovich. A constante de normalização  $A$  é calculada através do parâmetro cosmológico  $\sigma_8$

$$\sigma_8 = A \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi^2)} k^{n_s+2} T^2(k) W^2(k, R=8). \quad (3.30)$$

Este parâmetro representa o desvio quadrático médio do contraste de densidade dentro de uma esfera de raio  $R = 8h^{-1} \text{Mpc}$ . A grandeza  $W(k, R)$  é denominada função janela *top hat*<sup>4</sup>. No espaço de Fourier ela é definida por

$$W(k, R) = \frac{3}{(kR)^3} \left[ \sin(kR) - kR \cos(kR) \right]. \quad (3.33)$$

---

<sup>4</sup>Em geral, as observações são feitas numa parte limitada do céu. Nessa região o contraste de densidade é representado como

$$\delta(\mathbf{k}, R) \equiv W(k, R) \delta(\mathbf{k}). \quad (3.31)$$

A função  $W(k, R)$  fornece o peso da densidade de campo de maneira que ela seja relevante na região analisada. No espaço das configurações, a função janela é definida dentro de uma esfera de raio  $R$  da seguinte maneira:

$$W(x, R) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & x \leq R, \\ 0 & x > 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

A Eq. (3.33) é a transformada de Fourier de  $W(x, R)$  [25].

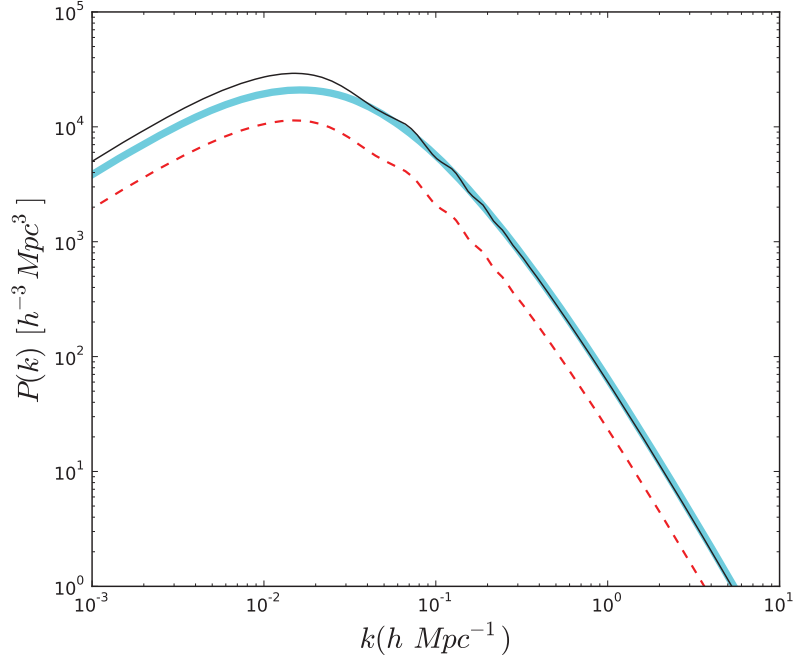


Figura 3.1: Espectro de potência linear de matéria. A curva contínua representa  $P(k)$ , enquanto a curva tracejada mostra  $P(k, z = 1)$ . A curva larga mostra o espectro de potência  $P(k)$  com ausência das oscilações de bárions (discutida na seção 3.4) usando  $\Omega_b \approx 0$ .

Já mencionamos que para obter a função de transferência é preciso resolver as equações de Boltzmann junto com as equações da relatividade geral. Estas equações são complicadas e não possuem soluções analíticas para todos os modos de perturbação. Na referência [26], podemos encontrar uma fórmula de ajuste que aproxima a função de transferência para todas as escalas. Existem métodos numéricos que fornecem o espectro de potência linear desde a inflação até o desacoplamento entre bárions e fótons. Nesta tese adotaremos o CAMB<sup>5</sup> (Code for Anisotropies in the Microwave Background) para gerar o espectro de potência linear durante esse período. Na Figura 3.1 comparamos o espectro de potência  $P(k) = T^2(k)P_0(k)$ <sup>6</sup> com o espectro de potência calculado em  $z = 1$ , usando os parâmetros cosmológicos estimados pelo WMAP7<sup>7</sup>.

<sup>5</sup>CAMB é um código de acesso livre (<http://camb.info/readme.html>).

<sup>6</sup>A diferença entre  $P(k)$  e  $P(k, z)$  é dada pela função de crescimento que descreve a evolução temporal das perturbações na época dominada por matéria. Assim

$$P(k, z) = D^2(z)P(k). \quad (3.34)$$

Similarmente temos para a função de correlação espacial  $\xi(r, z) = D^2(z)\xi(r)$ .

<sup>7</sup>Os parâmetros cosmológicos do WMAP7 podem ser encontrados no endereço:

A expressão analítica da função de correlação espacial de dois pontos é obtida pela transformada de Fourier de  $P(k, z)$

$$\begin{aligned}\xi(r, z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k P(k, z) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \\ &= \frac{D^2(z)}{2\pi^2} \int dk k^2 P_0(k) T^2(k) \frac{\sin(kr)}{kr}.\end{aligned}\quad (3.35)$$

onde usamos a relação (2.23) para mudar das coordenadas  $t$  para  $z$ .

Nos últimos anos, tanto  $\xi(r, z)$  quanto  $P(k, z)$  tem sido estimadas através de observações da estrutura em grande escala do universo para testar modelos cosmológicos. Para entendermos como isso é feito, vamos usar uma definição equivalente para  $\xi(r)$ , analisando a distribuição de galáxias ao invés da distribuição contínua dada por  $\delta(r)$ .

Em um catálogo de galáxias, a função de correlação espacial de dois pontos é interpretada como a probabilidade conjunta de encontrar um par de objetos em dois elementos de volume separados por uma distância  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

$$dN_{12} = \bar{n}^2 dV_1 dV_2 [1 + \xi_g(r)], \quad (3.36)$$

onde  $\bar{n}$  é a densidade média de galáxias em um dado volume  $V$  que limita o levantamento de galáxias e contém  $dV_1$  e  $dV_2$ . A quantidade  $\bar{n}dV_i$  representa a média de galáxias  $\langle n_i \rangle$  no elemento de volume  $dV_i$ . Na prática, é mais fácil fazer um dos elementos de volume suficientemente pequeno de modo que  $\bar{n}dV_1 = 1$ . Assim, a Eq. (3.36) se resume em

$$dN = \bar{n}dV [1 + \xi_g(r)]. \quad (3.37)$$

Isto é,  $dN$  representa o número de galáxias que distam  $r$  de um dado objeto de referência. Caso as galáxias sejam distribuídas de acordo com a distribuição de Poisson, teremos  $\xi_g(r) = 0$ . Uma expressão similar à relação (3.26) é obtida após definir o contraste de densidade das galáxias como

$$\delta_g(r_i) = \frac{n(\vec{r}_i) - \langle n_i \rangle}{\langle n_i \rangle}, \quad (3.38)$$

isso implica

$$\xi_g(r) = \langle \delta_g(\mathbf{r}_1) \delta_g(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (3.39)$$

Uma maneira simples de medir  $\xi_g(r)$  é através do estimador  $\hat{\xi}$ . Este compara uma distribuição real de objetos com uma distribuição aleatória, onde ambas possuem as mesmas características. A distribuição real de objetos é dada por um catálogo de galáxias, enquanto a distribuição aleatória é obtida via simulações

seguindo a distribuição de Poisson. Existem vários estimadores sugeridos na literatura, um dos mais robustos foi proposto por Landy-Szalay [27]

$$\hat{\xi}_{LS} = \frac{\langle DD(r) \rangle}{\langle RR(r) \rangle} - 2 \frac{\langle DR(r) \rangle}{\langle RR(r) \rangle} + 1, \quad (3.40)$$

onde, em um intervalo  $[r, r+dr]$ ,  $DD(r)$  é o número de pares de galáxias contados no catálogo observado,  $RR(r)$  é o número de pares na distribuição aleatória e  $DR(r)$  é o número de pares formados por um objeto no catálogo observado e um ponto do catálogo simulado.

Até este ponto do trabalho, elaboramos uma teoria que descreve a evolução das perturbações desde seus primórdios até a época onde matéria não-relativística dominou o universo. Vimos que através da distribuição de galáxias podemos estimar  $\xi_g(r)$ . No entanto, nada nos garante que a distribuição de matéria no universo segue a distribuição de galáxias. Para, de fato, comparar a Eq. (3.35) com a função de correlação estimada no levantamento de galáxias precisamos levar em conta alguns efeitos de carácter físico e observacional. Tais efeitos serão considerados no próximo capítulo.

### 3.3 Função de correlação angular de dois pontos

Em completa analogia com  $\xi(r)$ , a função de correlação angular de dois pontos  $\omega(\theta)$  é definida pela probabilidade conjunta de duas fontes pontuais (galáxias) serem encontradas em dois diferentes elementos de ângulos sólidos  $d\Omega_1$  e  $d\Omega_2$  separados por uma distância angular  $\theta$

$$d\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2) = \varrho^2 d\Omega_1 d\Omega_2 [1 + \omega(\theta)]. \quad (3.41)$$

Neste caso,  $\varrho$  representa a densidade média de galáxia em um ângulo sólido  $\Omega$  que contém  $d\Omega_1$  e  $d\Omega_2$ . A projeção da flutuação espacial  $\delta(\mathbf{x}, z)$ , em um plano no céu ao longo de uma dada direção  $\hat{n}$ , depende da função de seleção radial  $\phi(z)$

$$\delta(\hat{n}) = \int dz \phi(z) \delta(\mathbf{x}, z). \quad (3.42)$$

onde  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(z, \hat{n})$ .

A função de correlação angular é definida em termos de  $\delta(\hat{n})$  através da seguinte relação:

$$\omega(\theta) = \langle \delta(\hat{n}) \delta(\hat{n} + \hat{\theta}) \rangle. \quad (3.43)$$

Substituindo a Eq. (3.42) na Eq. (3.43) obtemos a relação entre  $\omega(\theta)$  e  $\xi(r, z)$

$$\begin{aligned} \omega(\theta) &= \int dz_1 \phi(z_1) D(z_1) \int dz_2 \phi(z_2) D(z_2) \langle \delta(\hat{n}, z_1) \delta(\hat{n} + \hat{\theta}, z_2) \rangle \\ &= \int dz_1 \phi(z_1) D(z_1) \int dz_2 \phi(z_2) D(z_2) \xi(r(z_1, z_2, \theta)). \end{aligned} \quad (3.44)$$

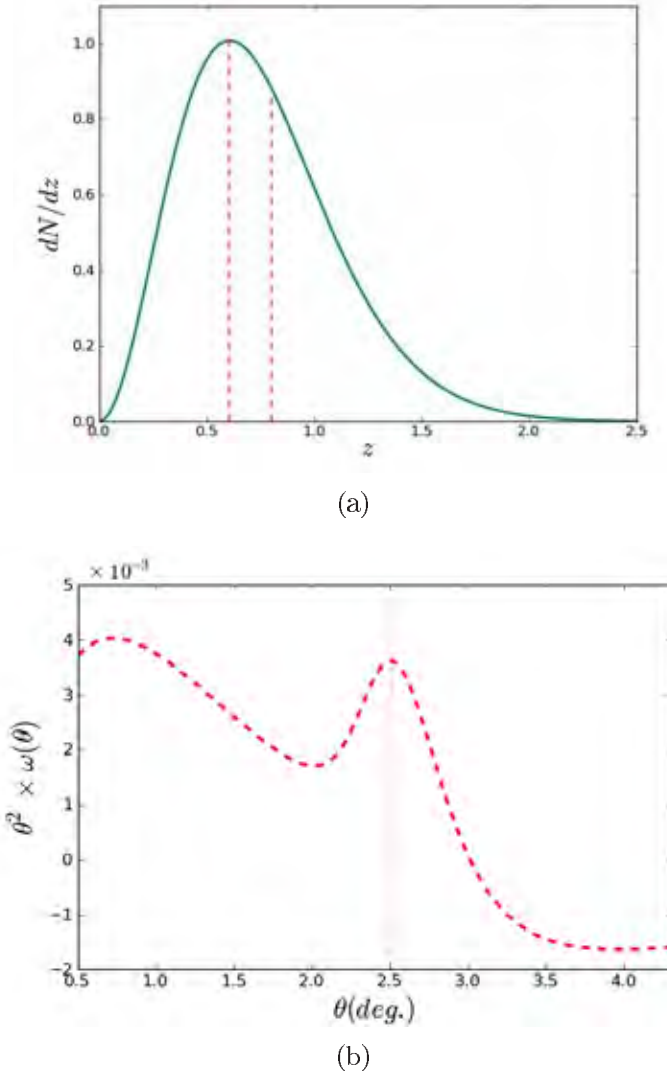


Figura 3.2: (a) - Função de seleção *top hat* obtida a partir da Eq. (3.48). Ao dividir o levantamento em faixas de *redshifts* a função de seleção para a faixa de intervalo  $0.6 \leq z \leq 0.8$  é dada pela curva entre as linhas verticais. (b) - Função de correlação angular calculada em  $\bar{z} = 1$ . A linha pontilhada mostra a posição do pico do BAO introduzido na seção 3.4.

No universo plano, a distância entre dois objetos pode ser escrita como

$$r = \sqrt{\chi^2(z_1) + \chi^2(z_2) - 2\chi(z_1)\chi(z_2) \cos \theta}, \quad (3.45)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre eles e  $\chi(z)$  é a distância comóvel.

A função de seleção é introduzida na análise de dados da distribuição de galáxias devido a nossa limitação na observação dos objetos. Os objetos astronômicos



são selecionados através do fluxo de energia observado,  $F$ . Como  $F$  decai com o quadrado da distância, somente os objetos mais luminosos serão observados em grandes distâncias. Este efeito introduz uma magnitude limite no levantamento e faz com que a distribuição dos objetos observados não seja homogênea. A função de seleção, além de fornecer as propriedades do levantamento, leva em consideração este efeito. Ela fornece a probabilidade, em termos da distância ou *redshift*, de um objeto dentro de um intervalo de luminosidade, ser incluído no levantamento.

As propriedades do catálogo observado são relatadas através da função janela  $W$  em  $\phi(z)$ , que limita uma região no espaço onde são feitas as observações. Em experimentos que usam técnicas de espectroscopia para medir os *redshifts* das galáxias  $\phi(z)$  é chamada função de seleção *top-hat* e é igual ao número de galáxias por unidade de *redshift* vezes a função janela

$$\phi(z) = \frac{dN_g}{dz} W(z), \quad (3.46)$$

onde

$$W(z) = \begin{cases} 1 & \text{dentro da região de observação,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.47)$$

Para as observações do DES, a função  $dN/dz$  é parametrizada por

$$\frac{dN_g}{dz} \propto \left(\frac{z}{z_s}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{z}{z_s}\right)^\beta\right], \quad (3.48)$$

onde  $z_s$  e  $\beta$  são parâmetros. Em geral, na análise dos dados, nós dividimos o levantamento em  $n$  faixas de *redshift*. A função de seleção do levantamento é dada pelo soma das funções de seleções em cada faixa de *redshift*,

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^n \phi_i(z). \quad (3.49)$$

Para o cálculo de  $\omega(\theta)$ , vamos usar a função de seleção normalizada à unidade. Isto é, dentro de uma faixa definida no intervalo  $z_1 \leq z \leq z_2$ ,  $\phi(z)$  será dada por

$$\phi(z) = \frac{\left(\frac{z}{z_s}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{z}{z_s}\right)^\beta\right]}{\int_{z_1}^{z_2} dz \left(\frac{z}{z_s}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{z}{z_s}\right)^\beta\right]}. \quad (3.50)$$

Na Figura 3.2-(a) plotamos  $\phi(z)$  para  $\beta = 1.5$  e  $z_s = 0.5$ .

### 3.4 Oscilações acústicas bariônicas

Antes da recombinação<sup>8</sup> o universo era dominado por um plasma quente formado por fótons fortemente acoplados aos bárions. As perturbações primordiais

<sup>8</sup>Recombinação é a época do universo onde os elétrons se juntaram aos íons de hidrogênio e hélio para formarem átomos neutros.

propagavam-se no fluido como ondas acústicas induzidas pela disputa entre gravidade e forças de pressão. Na época da recombinação a temperatura do universo caiu abaixo de 3000K. A matéria tornou-se neutra e a pressão nos bárions foi removida. Neste instante, os fótons ficaram livres para se propagarem no universo em expansão dando origem à radiação cósmica de fundo e os bárions foram atraídos pelo potencial gravitacional da matéria escura para, em períodos posteriores, colapsarem formando as galáxias e outros objetos observados hoje.

O momento em que ocorreu o último espalhamento entre bárions e fótons marcou uma importante escala em cosmologia denominada horizonte acústico. Este é definido pela distância comóvel percorrida por uma onda sonora no plasma de bárions e fótons até o período em que eles se desacoplaram <sup>9</sup>

$$r_s(z_{rec}) = \int_{z_{rec}}^{\infty} \frac{v_s}{H(z)} dz, \quad (3.51)$$

onde  $z_{rec} \approx 1100$  caracteriza o *redshift* na recombinação. A velocidade do som no plasma de densidade  $\rho = \rho_b + \rho_r$  e pressão  $p = p_r = c^2 \rho_r / 3$  é definida de acordo com a Eq. (3.9),

$$v_s = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S^{1/2} = \frac{c}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_r} \right)^{-1/2}. \quad (3.52)$$

A razão  $\rho_b/\rho_r$  pode ser escrita como  $(\Omega_b/\Omega_r)/(1+z)$  e o valor de  $\Omega_r$  é obtido através de  $z_{eq}$ , que corresponde ao *redshift* de igualdade entre matéria e radiação no universo. Neste caso,  $\Omega_r = \Omega_m/(1+z_{eq})$ . Assim, podemos reescrever a velocidade do som como

$$v_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{\Omega_b}{\Omega_m} \left( \frac{1+z_{eq}}{1+z} \right) \right]^{-1/2}. \quad (3.53)$$

O parâmetro de Hubble foi definido na Eq. (2.14). No universo plano ( $\Omega_k = 0$ ), usando  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m - \Omega_r$  e assumindo  $\Omega_b = 0.045$ ,  $\Omega_m = 0,267$ ,  $z_{eq} = 3196$  e  $z_{rec} = 1010$ , obtemos  $r_s = 151.5 \text{ Mpc}$ . É comum expressar a constante de Hubble em termos da constante de Hubble normalizada  $h$ ,  $H_0 = 100h \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}$ . Esta constante também faz parte do conjunto de parâmetros cosmológicos e, portanto, é estimada usando dados observacionais. Em termos de  $h$ , o horizonte acústico é dado por  $r_s = 107.5h^{-1} \text{ Mpc}$ , onde usamos  $h = 0.71$ .

Depois que o universo tornou-se neutro, os bárions foram atraídos pelo potencial gravitacional da matéria escura<sup>10</sup>. A pressão dos bárions tornou-se nula permitindo que as flutuações no contraste de densidade crescessem via instabilidade gravitacional. No entanto, nessa época, as oscilações acústicas de bárions

<sup>9</sup>Se a recombinação fosse um processo instantâneo e completo, então recombinação e desacoplamento iriam se coincidir. Porém na prática, cada processo acontece em um período de tempo. Assim o desacoplamento ocorre depois da recombinação.

<sup>10</sup>Houve, portanto, maior probabilidade de galáxias se formarem próximas das regiões mais densas de matéria escura.

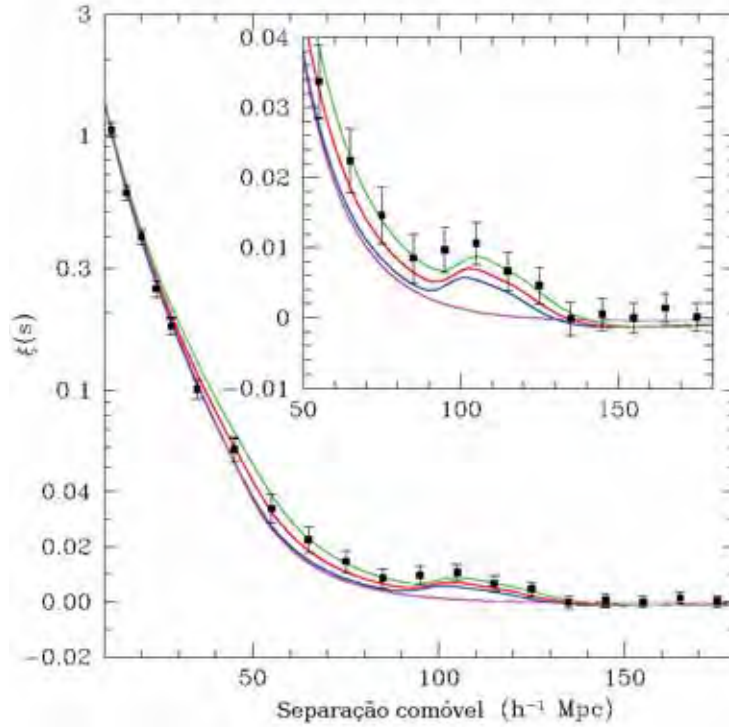


Figura 3.3: Medida da função de correlação espacial de dois pontos de galáxias vermelhas feitas pelo SDSS. Os quadrados representam os dados experimentais. As curvas contínuas referem-se ao modelo  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_m h^2 = 0.12$  (verde), 0.13 (vermelha), 0.14 (azul). Todas com  $\Omega_b h^2 = 0.024$  e  $n_s = 0.98$ . Na curva magenta não temos as oscilações de bárions. [14].

(BAO) foram congeladas e gravadas nas distribuições de matéria e dos fótons livres. Por essa razão, elas podem ser encontradas tanto no espectro de potência observado (ou função de correlação) das galáxias quanto nas anisotropias de CMB [28]. A Figura 3.1 mostra as oscilações de bárions no espectro de potência da distribuição de matéria calculado através do CAMB. Podemos ver uma série de pequenas amplitudes de oscilações que representam as oscilações acústicas de bárions da época do desacoplamento. Na função de correlação espacial o sinal do BAO é representado como um único pico próximo de 150 Mpc. Este pico caracteriza o horizonte acústico calculado na Eq. (3.51). Em 2005, Einsestein et al encontraram o pico do BAO em  $100h^{-1}\text{Mpc}$  usando observações de galáxias vermelhas feitas pelo SDSS [14], como mostra a Figura 3.3.

Na função de correlação angular o pico do BAO depende da escala de *redshift* analisada. Usando a cosmologia estimada pelo WMAP 7 encontramos  $\theta_{\text{BAO}} = 3.3^\circ$  no intervalo de *redshift*  $0.7 \leq z \leq 0.75$  e  $\theta_{\text{BAO}} = 2.12^\circ$ <sup>11</sup> no intervalo  $1.3 \leq z \leq$

<sup>11</sup> Para obter estes valores usamos a Eq. (3.44) para encontrar o ângulo  $\theta_{\text{BAO}}$  que fornece o

1.35. No entanto, quando usamos  $\theta_{\text{BAO}}$  para estimar os parâmetros cosmológicos, temos que levar em conta os efeitos de projeção. Esses efeitos são caracterizados principalmente pela largura do intervalo de *redshift* usado para calcular  $\omega(\theta)$  [29].

Nos últimos anos, dados observacionais relacionados ao BAO têm sido analisados para vincular parâmetros cosmológicos usando diferentes métodos. Tanto o espectro de potência quanto a função de correlação espacial podem ser usados para extrair a escala de horizonte acústico. A escala  $r_s = 107.5 h^{-1}$  Mpc no espaço das configurações corresponde a  $k_s = 5.8 \times 10^{-2} h\text{Mpc}^{-1}$  no espaço de Fourier. Embora a maioria dos trabalhos usam  $P(k)$  e  $\xi(r)$  para analisar a distribuição de galáxias, existem trabalhos que estimam os parâmetros cosmológicos através da função de correlação angular. Chris Blake et al estimaram  $\omega(\theta)$  usando 600 000 galáxias vermelhas com redshift fotométrico do SDSS [30]. Neste trabalho vamos usar  $\omega(\theta)$  como observável para analisar a matriz de Fisher para o DES.

---

pico de  $\omega(\theta)$ .

# 4

## Modelagem da Função de Correlação de dois pontos

A aplicação direta da teoria desenvolvida nos últimos capítulos seria possível se conseguíssemos construir catálogos que fossem cópias perfeitas da distribuição das galáxias no céu. E também, se essa distribuição fosse igual à distribuição de matéria escura no universo. No entanto, isso não é verdade e precisamos considerar alguns efeitos de caráter físico e observacional que modificam a forma e a amplitude da função de correlação de dois pontos. Entre estes estão: o viés entre a distribuição de galáxias e matéria escura contida no universo, a distorção no *redshift* observado devido às velocidades peculiares, o crescimento não-linear das perturbações e finalmente uma característica puramente observacional devido as limitações no uso do chamado *redshift* fotométrico, ou foto-z.

O primeiro efeito está relacionado com a diferença entre a distribuição de galáxias observadas e a distribuição de matéria não relativística formulada pela teoria linear. A maior parte de matéria não relativística é composta por matéria escura. Acreditamos que existe um viés entre as duas distribuições e para compará-las temos que levar isso em conta. Em seguida temos uma modificação no *redshift* das galáxias devido às velocidades peculiares desses objetos. O *redshift* observado fornece uma combinação de informações sobre a velocidade de expansão de Hubble e a componente radial das velocidades peculiares das galáxias. O terceiro efeito está relacionado com o crescimento não-linear das perturbações. Apesar da escala acústica das oscilações bariônicas ter origem no regime linear, os efeitos não lineares suavizam o pico do BAO apagando as informações vindas das oscilações acústicas. O último efeito é puramente observacional. A Eq. (3.48) descreve a

função de seleção *top-hat* para observações feitas de telescópios que usam técnicas de espectroscopia para coletar seus dados. Embora esse método de observação forneça com grande precisão a medida dos *redshifts* das galáxias, ele exige um tempo de exposição muito grande em cada objeto para fazer uma boa estimativa de seu *redshift*. Observações que usam técnicas de fotometria conseguem catalogar um número imenso de galáxias, mas perdem na precisão das medidas dos *redshifts*. No entanto, se soubermos modelar essa perda de informações, os catálogos fotométricos tornam-se as melhores fontes de observações de galáxias devido ao grande número de objetos observados.

Neste capítulo iremos modelar todos os efeitos mencionados acima na função de correlação espacial e usar a Eq. (3.44) para estender o impacto destes na função de correlação angular.

## 4.1 Viés entre a distribuição de galáxias e a distribuição de matéria escura

A função de correlação estimada é obtida através das observações de galáxias. Esses objetos contribuem com uma pequena porcentagem na densidade de matéria não relativística contida no universo. Portanto, sua distribuição espacial não é necessariamente igual a distribuição total de matéria quando incluímos matéria escura.

As propriedades estatísticas de halos de matéria escura têm sido intensamente estudadas através de simulações de N-corpos usando métodos descritos nas referências [31, 32]. Estes estudos são comparados com a análise de distribuição de aglomerados de galáxias para entender a relação entre elas. No entanto, para modelar o viés entre matéria escura e a distribuição de galáxias observada, seria preciso conectar halos de matéria escura com a população de galáxias dentro dos aglomerados.

No regime linear o contraste de densidade de galáxias é comparado com o contraste de densidade de matéria através do fator de viés  $b$

$$\delta_g(\mathbf{x}, z) = b\delta_m(\mathbf{x}, z). \quad (4.1)$$

Esta relação é uma boa aproximação em grandes escalas [33], mas perde sua validade em escalas pequenas onde o efeito não-linear não é desprezível. Se as galáxias estão mais aglomeradas que a matéria escura, teremos  $b > 1$ , caso contrário  $b < 1$ . Se ambas distribuições forem iguais, então  $b = 1$ . Embora a maioria dos trabalhos citados na literatura ignorem a dependência de  $b$  com a escala analisada, a forma geral desse parâmetro é dada por  $b = b(\mathbf{x}, z)$ . Existem trabalhos que consideram parametrizações para  $b$  considerando a evolução com *redshift* da forma  $b(z) = \sqrt{1+z}$  [34, 35] ou  $b(z) = 0.5(1+z)$  [36].

## 4.2 Distorção no *redshift*

Se as galáxias simplesmente seguissem o fluxo de Hubble, suas velocidades seriam dadas por (2.20) e poderiam ser medidas diretamente de seus *redshifts* de acordo com

$$z \equiv v_H = H_0 x. \quad (4.2)$$

No entanto, além das informações sobre o fluxo de Hubble, o *redshift* observado também possui informações sobre as velocidades peculiares desses objetos

$$z \equiv H_0 x + \mathbf{v}_p \cdot \hat{x}. \quad (4.3)$$

A diferença entre (4.2) e (4.3) cria a necessidade de distinguir entre dois tipos de distâncias. Vamos denotar  $s$  como a distância medida no espaço de *redshift*

$$s H_0 \equiv z, \quad (4.4)$$

e  $x$  como a distância medida no espaço real. A distância  $x$  é caracterizada somente pela expansão de Hubble e a distância  $s$  leva em conta as velocidades peculiares. A diferença entre  $s$  e  $x$  é dada pela componente radial de  $\mathbf{v}_p$

$$s = x + \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}}{H_0}. \quad (4.5)$$

As velocidades peculiares geram efeitos que se mostram aparentes no espaço de *redshift* distorcendo a função de correlação espacial. Em pequenas escalas, um aglomerado de muitas galáxias, que se apresenta esférico no espaço real, tem aparência alongada ao longo da direção radial no espaço de *redshift*. Tal alongamento foi nomeado de "*Finger of God*" [37–39]. Em grandes escalas, ao contrário do caso anterior, o aglomerado se mostra achatado ao longo da direção radial. Esse efeito é conhecido como efeito Kaiser e será tratado com detalhes durante esta seção.

Vamos analisar o impacto do efeito Kaiser no espectro de potência das galáxias e em seguida traduzir os resultados para a função de correlação espacial. Esse assunto foi introduzido por Kaiser em 1987 [40], mas pode ser encontrado em várias referências [24, 41, 42]. Nosso ponto de partida será a relação entre o contraste de densidade definido no espaço de *redshift*  $\delta_g^s = \delta_g^s(\mathbf{s}, t)$  e o contraste de densidade definido no espaço real  $\delta_g^r = \delta_g^r(\mathbf{x}, t)$ . É importante notar que estas grandezas estão descrevendo o contraste de densidade das galáxias  $\delta_g$ , mas por simplicidade vamos ignorar o sub-índice  $_g$  nesta seção.

No regime linear  $\delta^s$  está relacionado com  $\delta^r$  por um operador distorção  $\mathbf{S}$  [42]

$$\delta^s = \mathbf{S} \delta^r. \quad (4.6)$$

Para encontrar a expressão matemática de  $\mathbf{S}$ , vamos usar a consideração que os efeitos devido a  $\mathbf{v}_p$  não podem mudar o número de galáxias observado. Isto é, a

quantidade de galáxias em uma determinada região é a mesma tanto no espaço de *redshift* quanto no espaço real

$$n^s(\mathbf{s})d^3s = n^r(\mathbf{x})d^3x. \quad (4.7)$$

O contraste de densidade é definido de acordo com a Eq. (3.38),

$$\delta^s = \frac{n^s(\mathbf{s})}{\bar{n}^s(\mathbf{s})} - 1, \quad \delta^r = \frac{n^r(\mathbf{x})}{\bar{n}^r(\mathbf{x})} - 1, \quad (4.8)$$

onde  $\bar{n}^s$  e  $\bar{n}^r$ <sup>1</sup> representam a densidade média de galáxias. Dessa forma a relação (4.7) pode ser reescrita como

$$\bar{n}^s(\mathbf{s})[1 + \delta^s]s^2ds = \bar{n}^r(\mathbf{x})[1 + \delta^r]x^2dx. \quad (4.9)$$

O Jacobiano entre as coordenadas  $s$  e  $x$  é determinado pela Eq.(4.5),

$$J \equiv \left| \frac{d^3s}{d^3x} \right| = \frac{ds}{dx} \frac{s^2}{x^2} = \left( 1 + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}}{H_0} \right] \right) \left( 1 + \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}}{H_0 x} \right)^2, \quad (4.10)$$

onde  $\partial/\partial x = \hat{x} \cdot \nabla_x$ . O termo que contém a derivada de  $\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}$  é muito mais importante que o termo proporcional a  $\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}/x$ . Se expressamos as perturbações em ondas planas, o termo com derivada será da ordem de  $k v_p/H_0$ , enquanto a outra correção será da ordem de  $v_p/H_0 x$ . Isto é, a primeira correção é maior que a segunda por um fator de  $kx$ . Num catálogo de galáxias  $x$  representa a profundidade do levantamento e  $k$  o modo de Fourier que conseguimos medir. Perturbações em escala próxima ao limite observado ( $k \sim x^{-1}$ ) são pobremente determinadas. Já os modos com menores comprimentos de onda ( $x' < x$ ) são mais fáceis de medir e a análise estatística sobre eles permite-nos estimar o espectro de potência. Portanto estamos interessados em modos com  $kx \gg 1^2$ . Neste caso o Jacobiano é aproximadamente

$$J \sim \left( 1 + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}}{H_0} \right] \right). \quad (4.11)$$

Substituindo  $J$  na Eq. (4.9), obtemos

$$\delta^s + 1 = \frac{\bar{n}^r(\mathbf{x})}{\bar{n}^s(\mathbf{s})} \left( 1 - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}}{H_0} \right] \right) [\delta^r + 1]. \quad (4.12)$$

No regime linear a velocidade peculiar das galáxias é muito menor que a velocidade de Hubble,  $\mathbf{v}_p \cdot \hat{x} \ll H_0 x$ . Então podemos expandir  $\bar{n}^s(\mathbf{s})$  em termos da coordenada  $\mathbf{x}$

$$\bar{n}^s(\mathbf{s}) = \bar{n}^s(\mathbf{x}) + \left( \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}}{H_0} \right) \frac{\partial \bar{n}^s(\mathbf{x})}{\partial x} + \dots, \quad (4.13)$$

<sup>1</sup> Em escalas onde o universo é homogêneo e isotrópico podemos usar o teorema ergódico onde  $\langle n \rangle = \bar{n}$ .

<sup>2</sup> Este argumento pode ser encontrado com mais detalhes em [24].



e reescrever a Eq. (4.12) como

$$\delta^s + 1 = \left[ 1 - \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}}{H_0} \left( \frac{\partial \ln \bar{n}^s(\mathbf{x})}{\partial x} \right) \right] \left( 1 - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}}{H_0} \right] \right) (\delta^r + 1), \quad (4.14)$$

onde usamos que  $n^s(\mathbf{x}) \simeq n^r(\mathbf{x})$ . A média  $\bar{n}^s(\mathbf{x})$  é definida em termos da função de seleção do levantamento,  $\bar{n}^s(\mathbf{x}) = \bar{n}\phi(\mathbf{x})$ . Assumindo que  $\phi(\mathbf{x})$  não varia apreciavelmente com a distância, podemos simplificar a última equação para

$$\delta^s + 1 = \left( 1 - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}}{H_0} \right] \right) (\delta^r + 1). \quad (4.15)$$

No capítulo 2 introduzimos a velocidade peculiar na Eq. (3.5) como uma pequena perturbação no fluxo de Hubble. Esta velocidade está relacionada com o contraste de densidade de matéria através da equação da continuidade definida na Eq. (3.14). Escrevendo  $\delta_m$  como  $\delta_m(\mathbf{x}, t) = D(t) \cdot \delta(\mathbf{x}, 0)$  e substituindo no lado esquerdo da Eq. (3.14), obtemos

$$\frac{\partial \delta_m(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \delta(\mathbf{x}, 0) \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial D(a)}{\partial a} = H(a) f(a) \delta_m(\mathbf{x}, t), \quad (4.16)$$

onde  $f = d \ln D / d \ln a$  e  $a = a(t)$ . Ao igualar a última expressão com o outro lado da equação da continuidade encontramos a relação entre  $\mathbf{v}_p$  e  $\delta_m$ ,

$$H(a) f(a) \delta_m(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t). \quad (4.17)$$

Na seção anterior, vimos que a relação entre o contraste de densidade de matéria e o contraste de densidade das galáxias é dado pelo parâmetro de viés,  $\delta_g = b \delta_m$ . Então podemos escrever

$$H(a) \beta(a) \delta_g(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t), \quad (4.18)$$

onde  $\beta = f/b$ . Em termos da transformada de Fourier a equação acima é dada por

$$\mathbf{v}_p = i\beta H \delta_g(\mathbf{k}, t) \frac{\mathbf{k}}{k^2}. \quad (4.19)$$

Na análise realizada neste trabalho, galáxias são consideradas como objetos pontuais. Essa consideração permite-nos usar  $\nabla \times \mathbf{v}_p = 0$  e definir o campo de velocidade em termos de um potencial de velocidade,

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t) = \nabla \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (4.20)$$

Este potencial pode ser obtido diretamente da Eq. (4.18),

$$\Delta \Psi = -H_0 \beta \delta,$$

onde temos usado  $H = H_0$  e voltado para a notação inicial desta seção com  $\delta = \delta_g$ . Usando o operador integral que inverte a última equação, obtemos  $\Psi = -H_0\beta\Delta^{-1}\delta$  e conseqüentemente

$$\mathbf{v}_p = -H_0\beta\nabla(\Delta^{-1}\delta). \quad (4.21)$$

Substituindo a relação (4.21) na Eq. (4.15) e desprezando os termos de segunda ordem em  $\delta$  obtemos

$$\delta^s = \left[1 + \beta\frac{\partial}{\partial x}\nabla\Delta^{-1}\right]\delta^r. \quad (4.22)$$

Dessa forma, usando as aproximações realizadas acima, o operador  $\mathbf{S}$  é dado por

$$\mathbf{S} = 1 + \beta\frac{\partial}{\partial x}\nabla\Delta^{-1}. \quad (4.23)$$

O último termo de  $\mathbf{S}$  é responsável por distorcer a função de correlação espacial no espaço de *redshift*.

### 4.2.1 Aproximação de observador distante

A aproximação de observador distante consiste em supor que o perfil da densidade de contraste é uma onda plana orientada ao longo da linha de visada. Para ver isso, vamos analisar a Figura 4.1: Consideremos que a posição de uma galáxia em relação a nós é caracterizada pelo vetor  $\mathbf{x}$ . Se o módulo de  $\mathbf{x}$  é muito grande em relação ao módulo de  $\mathbf{d}$ , podemos dizer que a galáxia está quase radial em relação a nós. Então podemos aproximar  $\hat{x} \rightarrow \hat{z}$ , onde  $\hat{z}$  é o vetor normal ao plano  $x_1-x_2$ .

Nessa aproximação, a transformada de Fourier da Eq. (4.15) é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}^s(\mathbf{k}) &= \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ \delta^r(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{z}}{H_0} \right] \right] \\ &= \tilde{\delta}^r(\mathbf{k}) - i\beta \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \tilde{\delta}^r(\mathbf{k}') \frac{\mathbf{k}'}{k'^2} \cdot \hat{z} \right], \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde usamos a relação (4.19). A derivada em relação a  $x$  fornece um fator  $i\mathbf{k}' \cdot \hat{x}$  que é aproximado para  $i\mathbf{k}' \cdot \hat{z}$ , assim

$$\tilde{\delta}^s(\mathbf{k}) = \tilde{\delta}^r(\mathbf{k}) + \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tilde{\delta}(\mathbf{k}') \left[ \beta \left( \hat{k}' \cdot \hat{z} \right)^2 \right] \int d^3x e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}. \quad (4.25)$$

A integral em  $x$  fornece um delta de Dirac que elimina a integral em  $k'$ . Portanto, na aproximação de observador distante temos

$$\tilde{\delta}^s(\mathbf{k}) = [1 + \beta\mu_{kz}^2] \tilde{\delta}^r(\mathbf{k}), \quad (4.26)$$

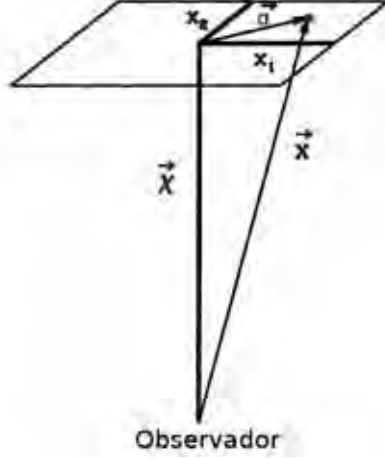


Figura 4.1: Galáxia localizada na posição  $\vec{x}$  com respeito ao observador. Se  $|\vec{x}|$  é muito grande, podemos usar a aproximação de observador distante onde  $\vec{x} \sim \vec{\chi} = \chi \hat{z}$ .

onde  $\mu_{kz} = \hat{z} \cdot \hat{k}$  é o coseno do ângulo entre  $\hat{k}$  e a linha de visada direcionada em  $\hat{z}$ .

A Eq. (4.26) mostra, que no espaço de *redshift*, o espectro de potência depende tanto da magnitude de  $\mathbf{k}$  quanto de sua direção,

$$P_s(\mathbf{k}) = P(k)[1 + \beta\mu_{kz}^2]^2. \quad (4.27)$$

Expandindo o termo quadrático da equação acima, obtemos

$$P_s(\mathbf{k}) = \left[ \left(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2\right) \mathcal{P}_0(\mu_{kz}) + \left(\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2\right) \mathcal{P}_2(\mu_{kz}) + \frac{8}{35}\beta^2 \mathcal{P}_4(\mu_{kz}) \right] P(k), \quad (4.28)$$

onde  $\mathcal{P}_\ell(\mu)$  são os polinômios de Legendre. Hamilton mostrou que, usando a aproximação de observador distante, a função de correlação espacial é dada por uma expressão similar [43]:

$$\begin{aligned} \xi^s(x) &= \left[1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2\right] \mathcal{P}_0(\mu_{xz})\xi_0(x) - \left[\frac{2}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2\right] \mathcal{P}_2(\mu_{xz})\xi_2(x) \\ &+ \frac{8}{35}\beta^2 \mathcal{P}_4(\mu_{xz})\xi_4(x), \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde  $\mu_{xz} = \hat{x} \cdot \hat{z}$  (coseno do ângulo entre  $\hat{x}$  e a linha de visada  $\hat{z}$ ). Os multipolos da função de correlação no espaço real são definidos por

$$\xi_{2\ell}(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 j_{2\ell}(kx) P(k). \quad (4.30)$$

A demonstração da Eq. (4.29) é abordada no apêndice A. O efeito de distorção de *redshift* na função de correlação espacial é transferido para a função de correlação angular através da relação (3.44). Na Figura 4.2, mostramos a diferença entre  $\omega(\theta)$  calculada no espaço real e no espaço de *redshift*.

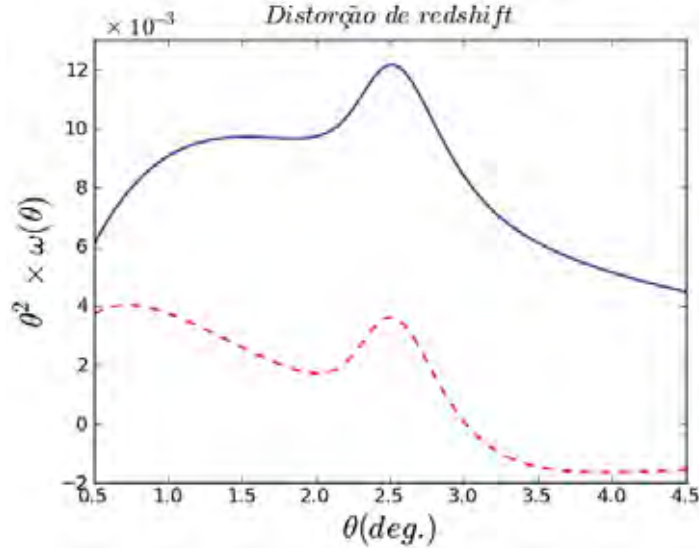


Figura 4.2: Efeitos da distorção do *redshift* causados pelas velocidades peculiares das galáxias. A curva tracejada mostra  $\theta^2 \times \omega(\theta)$  calculada no espaço real e a curva contínua mostra  $\theta^2 \times \omega(\theta)$  calculada no espaço de *redshift*.

### 4.3 Correções não-lineares

A análise estatística da função de correlação angular (ou espacial) é interessante em escalas próximas ao pico do BAO. Porém, estas escalas estão dentro do regime linear e em princípio não sofreriam efeitos de não-linearidade. No entanto, o sinal do BAO na função de correlação angular é muito fraco e por isso é sensível a qualquer efeito físico adicional. Vamos observar, por exemplo, a Figura 3.3 que mostra a função de correlação espacial obtida através dos dados do SDSS. A curva rosa não possui as oscilações de bárions. Quando a comparamos com a curva verde, que é a curva que melhor se ajusta aos dados observacionais, vemos que o sinal do pico é realmente muito fraco. Isto também acontece na função de correlação angular. Por essa razão, é importante analisar os efeitos de crescimento não-linear das perturbações no espectro de potência e consequentemente nas funções de correlação espacial e angular.

A evolução não-linear ocorre quando a amplitude das perturbações, em uma dada escala, torna-se da ordem de 1 conduzindo ao acoplamento entre diferentes modos de Fourier. Esse efeito suaviza as características bariônicas no espectro de

potência e na função de correlação [44–46]. Se não os consideramos, eles trazem erros na estimativa dos parâmetros cosmológicos.

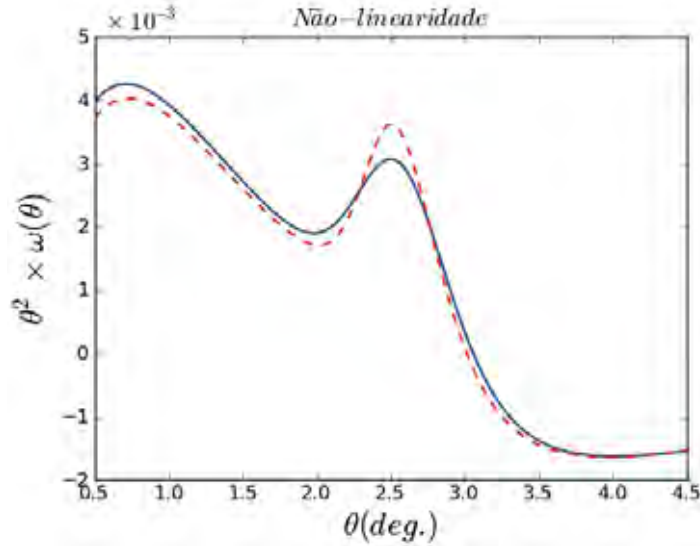


Figura 4.3: A curva contínua mostra o efeito não-linear na função de correlação angular comparada a curva tracejada que não possui efeitos.

Nos últimos anos, várias aproximações analíticas tem sido elaboradas para atacar o crescimento não-linear das perturbações. Ao contrário dos cálculos analíticos desenvolvidos com o uso de teoria de perturbação linear, não-linearidade tem sido formulada de forma não perturbativa com técnicas que resumem uma classe de séries infinitas de correções em altas ordens de perturbação. Neste trabalho vamos fazer uso da teoria de perturbação renormalizada (RPT) introduzida por Crocce e Scoccimarro. Não temos o objetivo de fazer uma descrição detalhada de RPT, mas para leitores interessados indicamos as referências [47–49]. De acordo com RPT, a correção não-linear no espectro de potência é dada por

$$P_{nl}(k, z) = P(k, z) \exp \left[ - \left( \frac{r^* k}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] + P_{mc}(k, z), \quad (4.31)$$

onde  $P(k, z)$  é o espectro de potência linear definido na Eq. (3.28) e  $P_{mc}(k, z)$  contém informações sobre os modos de Fourier acoplados. A quantidade  $r^*$  caracteriza a escala onde o efeito não-linear torna-se significativo. Ela é definida por [49]

$$r^* = D(z)r_{nl}, \quad (4.32)$$

onde

$$r_{nl} = \left[ \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{P(k)}{k^2} d^3k \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.33)$$

Usando simulações de N-corpos, Crocce et al mostraram que o segundo termo da Eq. (4.31) é irrelevante em escalas maiores que  $60h^{-1}$  Mpc [50]. Portanto iremos desprezá-lo durante o desenvolvimento deste trabalho, pois consideraremos distâncias maiores que esse limite. A Figura 4.3 mostra a consequência do efeito não-linear na função de correlação angular. A curva contínua mostra a degradação de  $\omega(\theta)$  próximo ao pico do BAO.

## 4.4 Função de seleção fotométrica

O *redshift* preciso de um objeto astronômico é derivado através da medida de alta resolução do seu espectro. No entanto, essa derivação exige um grande tempo de observação em troca de poucas medidas de  $z$ . Uma alternativa é usar a técnica de *redshift* fotométrico (foto- $z$ ). Através das cores de uma galáxia observada em uma seleção de filtros de diferentes bandas, é possível determinar, de maneira aproximada, a distribuição espectral de energia a partir da qual o *redshift* fotométrico é determinado.

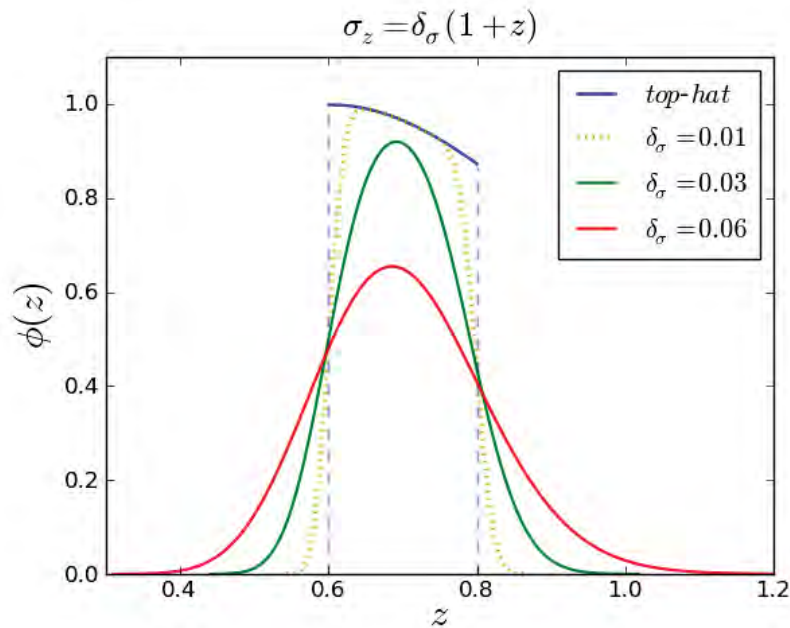


Figura 4.4: Função de seleção espectrocópica (azul) e fotométrica para diferentes valores de erros gaussianos no intervalo de *redshift*  $0.6 \leq z \leq 0.8$ . A medida que  $\delta_\sigma \rightarrow 0$  a função de seleção fotométrica se aproxima à função de seleção *top-hat*,  $\phi(z) \rightarrow dN_g/dz$ .

Essa técnica é muito mais eficiente comparada à espectroscopia. Enquanto a espectroscopia é limitada para a análise individual de cada objeto, a fotometria pode catalogar várias galáxias de uma única vez. Porém, o ganho em número de

objetos é compensado pelo aumento na incerteza do *redshift*. Em primeira aproximação, pode-se assumir que as medidas de foto- $z$  apresentam um erro gaussiano com desvio padrão dado por  $\sigma_z = \delta_\sigma(1+z)$ . Neste trabalho não discutiremos os processos de calibração e estimativas do *redshift* fotométrico  $z_p$ , porém estas análises podem ser encontradas em [51–53].

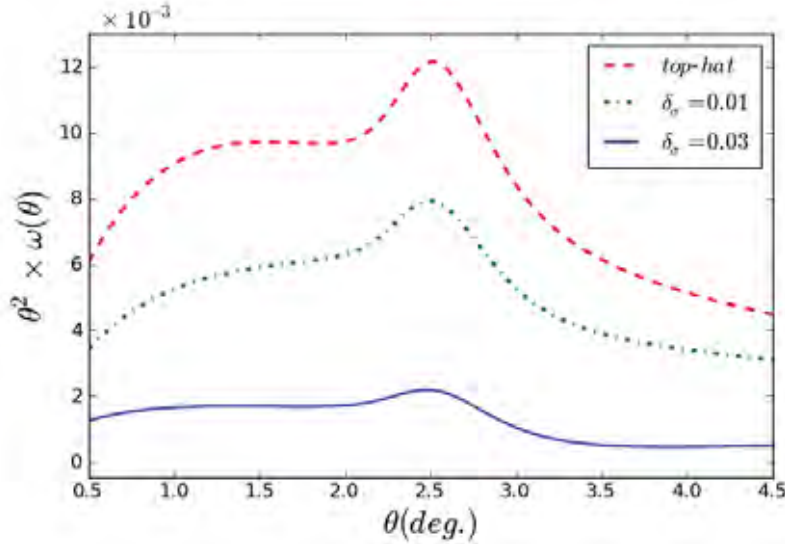


Figura 4.5: Função de correlação angular para diferentes erros de foto- $z$  no espaço de *redshift* para  $1.0 \leq z \leq 1.05$ . Temos  $\delta_\sigma = 0, 0.01$  e  $0.03$ , onde o erro nulo (curva tracejada) corresponde a análise espectroscópica.

A precisão com que  $z_p$  pode ser calculado no levantamento é crucial para a determinação dos parâmetros cosmológicos. Para incorporar o erro de foto- $z$ , devemos introduzir na função de seleção a probabilidade  $P(z|z_p)$  de obter o *redshift* verdadeiro  $z_p$  dado que um valor  $z$  foi medido [54]

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{dN_g}{dz} \int dz_p W(z_p) P(z|z_p) \\ &= \frac{dN_g}{dz} \int_{z_{p1}}^{z_{p2}} dz_p P(z|z_p), \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde  $z_{p1}$  é o menor e  $z_{p2}$  é o maior *redshift* fotométrico limitado pela função janela  $W(z_p)$ . Para o caso onde  $P(z_p|z) = \delta_D(z_p - z)$ , nós retornamos à equação (3.46).

Em princípio, qualquer modelo de foto- $z$  pode ser descrito por providenciar uma expressão para função de probabilidade. Vamos considerar um caso idealizado onde  $P(z_p|z)$  é descrita por uma distribuição gaussiana [55]

$$P(z|z_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp \left[ -\frac{(z - z_p - z_{bias})^2}{\sigma_z^2} \right]. \quad (4.35)$$

O coeficiente  $z_{bias}$  representa o viés entre  $z$  e  $z_p$  e em geral pode depender de  $z$ . Embora a análise gaussiana esteja longe da realidade, a Eq. (4.35) serve como ponto de partida para cenários mais realísticos [56]. A Figura 4.4 mostra a diferença entre a função de seleção *top-hat* e fotométrica para o intervalo de *redshift*  $0.6 \leq z \leq 0.8$  com  $z_{bias} = 0$  e  $\delta_\sigma$  assumindo diferentes valores. A função de seleção para foto- $z$  fornece uma probabilidade não nula do valor de  $z$  está fora deste intervalo de *redshift*. Na Figura 4.5, podemos ver as consequências da análise fotométrica na função de correlação angular. A dispersão do foto- $z$  também suaviza o pico do BAO.

Neste trabalho adotaremos  $z_{bias} = 0$ , no entanto é importante analisar o impacto deste parâmetro em  $\omega(\theta)$  quando assumimos valores diferentes de zero. Consideremos a função de correlação angular calculada no intervalo de *redshift* centrado em  $z = 1$  com largura  $\Delta z = 0.05$ . Vamos assumir a dispersão no *redshift* igual a  $\delta_z = 0.03$  e  $z_{bias} = \pm 0.01$ . Estes valores de  $z_{bias}$  são quase 10% mais altos que o esperado para o DES. A Figura 4.6 mostra que  $z_{bias}$  afeta a amplitude de  $\omega(\theta)$ . A amplitude muda  $\sim 2\%$  próximo da posição do pico. Os erros devido a essa mudança são negligenciados quando comparados aos erros estatísticos esperados na análise dos dados do DES.

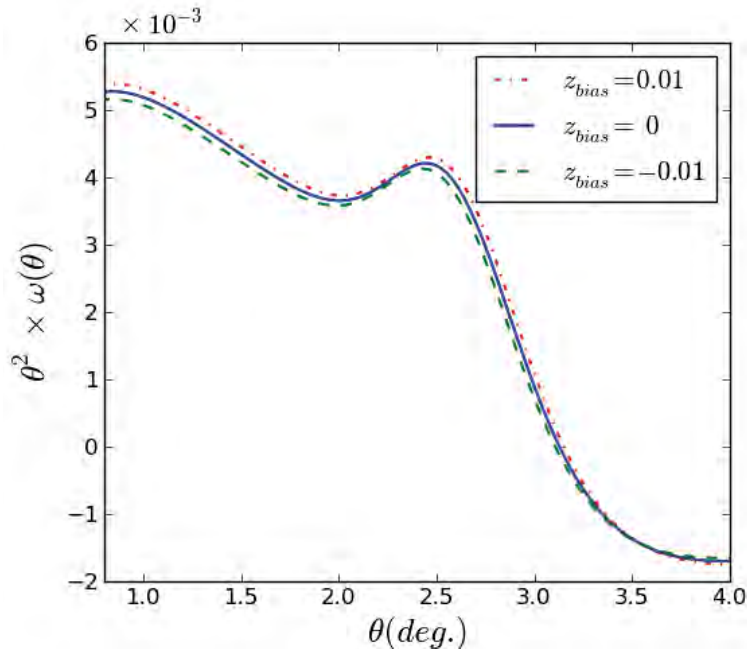


Figura 4.6: Impacto de  $z_{bias}$  na função de correlação angular. Em todos os casos consideramos a dispersão no *redshift* igual a 0.03.



## 4.5 Consequência dos efeitos em $\omega(\theta)$

Na Figura 4.7 temos a comparação entre  $\omega(\theta)$  sem e com os efeitos analisados acima. Além do desvio do pico do BAO, temos uma diferença na amplitude entre as duas curvas.

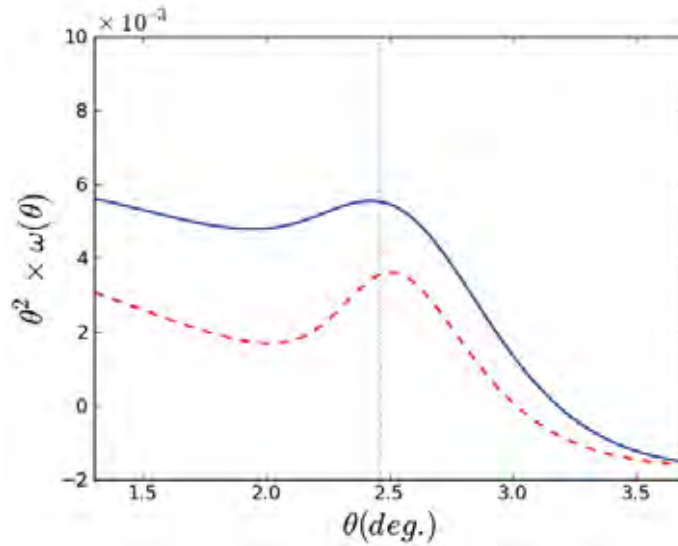
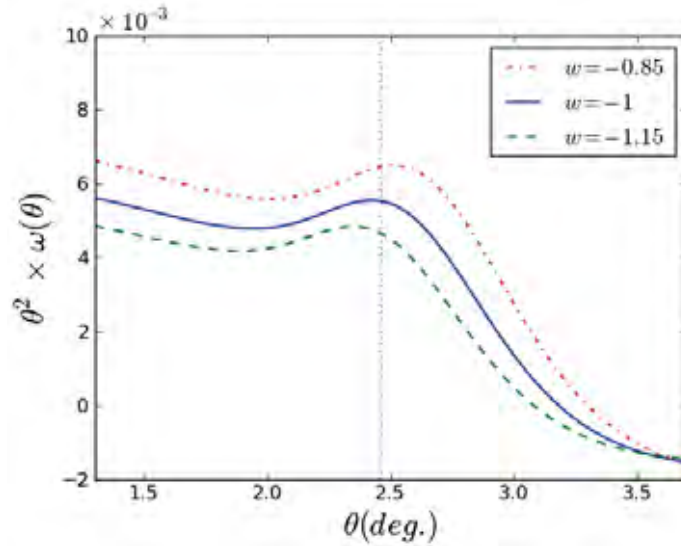


Figura 4.7: Efeitos de viés, distorção de *redshift*, não-linearidade e foto-z na função de correlação angular. Na curva contínua consideramos todos estes efeitos. Assumimos  $\delta_\sigma = 0.03$ ,  $\beta = 1.5$ ,  $z_0 = 0.5$  para calcular a função de seleção fotométrica. Na curva tracejada plotamos  $\theta^2 \times \omega(\theta)$  na ausência de qualquer efeito. Em ambos casos usamos os parâmetros cosmológicos do WMAP7 para calcular  $\theta^2 \times \omega(\theta)$  no intervalo de *redshift* dado por  $1.00 \leq z \leq 1.05$

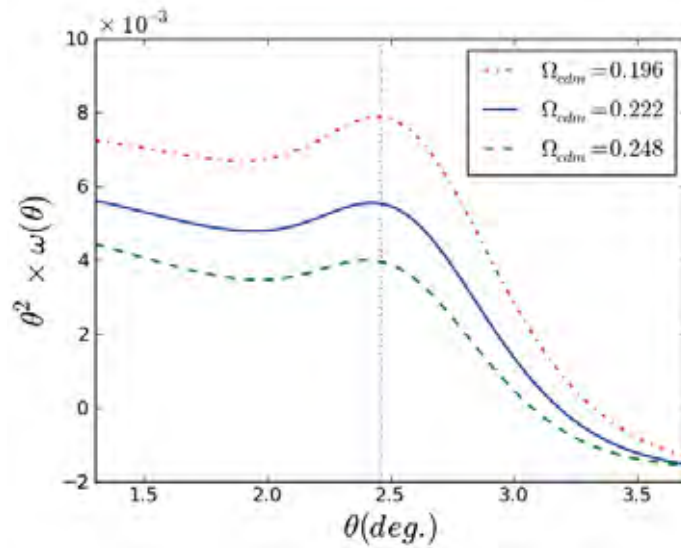
## 4.6 Informações cosmológicas em $\omega(\theta)$

Depois de modelar a função de correlação angular corrigindo os efeitos citados acima, podemos estudar a dependência de  $\omega(\theta)$  com os parâmetros cosmológicos. Neste trabalho assumiremos o universo plano e adotaremos  $\Lambda$ CDM como o nosso modelo cosmológico fiducial. Os valores fiduciais dos parâmetros cosmológicos serão dados de acordo com o WMAP 7. Estes serão:  $\Omega_b = 0.0449$ ,  $\Omega_{cdm} = 0.222$ ,  $h = 0.71$ ,  $n_s = 0.963$ ,  $\sigma_8 = 0.801$  e  $w = -1$ . Além disso, usaremos  $r_{nl} = 6.6 h^{-1} \text{Mpc}$ ,  $b = 2$  e  $\delta_\sigma = 0.03$ .

As características físicas na função de correlação angular podem ser analisadas em quatro categorias. A primeira consiste nos efeitos dos parâmetros cosmológicos no espectro de potência  $P(k)$ . Os parâmetros que determinam a forma deste espectro são:  $\sigma_8$ ,  $n_s$ ,  $\Omega_b$ ,  $\Omega_{cdm}$  e  $h$ . A segunda categoria é baseada na distorção do



(a)



(b)

Figura 4.8: Função de correlação angular em termos de  $w$  (painel a) e  $\Omega_{cdm}$  (painel b) para o intervalo de *redshift*  $1.00 \leq z \leq 1.05$  com dispersão de foto- $z$  igual a  $\delta_\sigma = 0.03$ . A linha vertical indica a posição do pico do BAO na curva contínua.

*redshift* devido às velocidades peculiares. Neste caso, os parâmetros cosmológicos são incluídos em  $\beta(z)$  que depende principalmente de  $\Omega_m$  [41]. As outras categorias estão relacionadas com o fator de crescimento  $D(z)$  e a distância comóvel  $\chi(z)$ . Estes são determinados por  $\Omega_b$ ,  $\Omega_{cdm}$  e  $w$ .

Na Figura 4.8 mostramos a variação de  $\omega(\theta)$  com os parâmetros cosmológicos

$w$  e  $\Omega_{cdm}$  calculada no intervalo de *redshift*  $1.0 \leq z \leq 1.05$ . No painel (a), vemos que tanto a amplitude de  $\omega(\theta)$  quanto a posição do pico do BAO mudam com diferentes valores de  $w$ . No painel (b), vemos que a amplitude é mais influenciada com  $\Omega_{cdm}$  do que o desvio na posição do pico.

Embora o parâmetro  $w$  não afete o espectro de potência primordial, ele está presente na função de crescimento  $D(z)$  caracterizando a diferença na amplitude de  $\omega(\theta)$ . Em  $\bar{z} = 1.025$  o fator de crescimento assume valores  $D(w = -1) = 0.618$  e  $D(w = -0.85) = 0.630$ . Esta diferença gera um aumento de  $\sim 3.9\%$  na amplitude de  $\omega(\theta)$ .

O desvio na posição do pico do BAO com  $w$  não pode ser explicado através de  $D(z)$ . Neste caso,  $w$  modifica a distância comóvel  $\chi(z)$  e conseqüentemente altera a distância entre os objetos mudando a posição do pico do BAO na função de correlação espacial. Estas mudanças são transferidas para a função de correlação angular quando convertemos  $\xi(r)$  em  $\omega(\theta)$ .

O impacto do parâmetro  $\Omega_{cdm}$  em  $\omega(\theta)$  é indicado nas quatro características citadas acima. Em  $\beta(z)$  e  $D(z)$  ele contribui para amplitude de  $\omega(\theta)$ . No espectro de potência ele modifica a fração de bárions  $f_b = \Omega_b/\Omega_m$  através de  $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{cdm}$ . Na referência [57], Matsubara discute os efeitos dos parâmetros cosmológicos em  $\xi(r, z)$  e  $P(k, z)$ .

# 5

## Modelagem da matriz de covariância da função de correlação angular

A análise completa de um levantamentos de galáxias exige-nos a capacidade de estimar os erros envolvidos nas medidas e suas correlações. Vincular parâmetros cosmológicos usando a função de correlação angular requer o desenvolvimento de métodos precisos para calcular estes erros estatísticos. Tais erros são descritos pela matriz de covariância dos experimentos e, em geral, são usados na estimativa de qualquer análise estatística.

Existem numerosas maneiras de estimar o erro na medida da distribuição de galáxias [58]. Muitos trabalhos usam métodos internos que calculam a matriz de covariância usando o próprio conjunto de dados analisados. Por exemplo, o método *Jackknife* estima a matriz de covariância dividindo o levantamento em  $n$  sub-regiões com densidade de galáxias aproximadamente constante. Retirando uma dessas regiões é possível construir  $n$  diferentes amostras do levantamento. Ou seja, a amostra  $i$  é criada retirando a sub-região  $i$  do levantamento, a amostra  $i + 1$  é criada recolocando a sub-região  $i$  e retirando a sub-região  $i + 1$ . Considerando cada amostra como uma observação independente, consegue-se estimar  $n$  correlações e portanto a variância entre elas.

Neste trabalho não usaremos dados de medidas observacionais para estimar os parâmetros cosmológicos. Logo, será preciso fazer a modelagem teórica da matriz de covariância da nossa análise. Neste capítulo discutiremos como modelar os erros envolvidos na medida de  $\omega(\theta)$  incluindo os efeitos considerados no capítulo anterior. Vamos introduzir o espectro de potência angular teórico e realizar todos

os cálculos a partir dele.

## 5.1 Espectro de potência angular

A distribuição de galáxias também pode ser estudada através do espectro de potência angular. Para calculá-lo, vamos expandir o contraste de densidade projetado em harmônicos esféricos

$$\delta(\hat{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{n}), \quad (5.1)$$

onde  $a_{\ell m}$  são coeficientes. Esta expansão é análoga à transformada de Fourier de uma função. Da mesma maneira que a variável  $\mathbf{k}$  é a conjugada de Fourier da variável  $\mathbf{x}$ , os índices  $\ell$  e  $m$  são os conjugados harmônicos do vetor unitário  $\hat{n}$ .

Todas as informações físicas contidas na densidade de campo  $\delta(\hat{n})$  estão também contidas nos coeficientes  $a_{\ell m}$ . Logo, podemos definir o espectro de potência angular  $C_\ell$  como a variância desses coeficientes

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_\ell. \quad (5.2)$$

Notemos que, para um dado  $\ell$ , cada  $a_{\ell m}$  corresponde ao mesmo  $C_\ell$ .

Os coeficientes  $a_{\ell m}$  podem ser obtidos invertendo a Eq. (5.1). Para este fim, vamos multiplicar os dois lados dessa equação por  $Y_{\ell' m'}^*$  e em seguida integrar sobre o elemento de ângulo sólido

$$\int d\Omega \delta(\hat{n}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} \int d\Omega Y_{\ell m}(\hat{n}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}). \quad (5.3)$$

Os harmônicos esféricos obedecem a condição de ortogonalidade,

$$\int d\Omega Y_{\ell m}(\hat{n}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (5.4)$$

Então, podemos escrever

$$a_{\ell m} = \int d\Omega \delta(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}). \quad (5.5)$$

Para representar esses coeficientes em termos do contraste de densidade tridimensional, vamos substituir a Eq. (3.42) na Eq. (5.5). Assim,

$$a_{\ell m} = \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{n}) \int dz \phi(z) \delta(\mathbf{x}, z). \quad (5.6)$$

Aplicando a transformada de Fourier em  $\delta(\mathbf{x}, z)$ , obtemos

$$a_{\ell m} = \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{n}) \int dz \phi(z) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k. \quad (5.7)$$

A equação acima pode ser simplificada expandindo o termo exponencial em harmônicos esféricos de acordo com a seguinte propriedade:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{n}} = 4\pi \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^{\ell} j_{\ell}(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{k}) Y_{\ell m}(\hat{n}), \quad (5.8)$$

onde  $j_{\ell}$  são as funções esféricas de Bessel de ordem  $\ell$ . Finalmente, depois de integrar sobre o ângulo sólido os coeficientes do espectro de potência angular assumem a forma

$$a_{\ell m} = 4\pi i^{\ell} \int dz \phi(z) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k}, z) j_{\ell}(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{k}). \quad (5.9)$$

A expressão para o espectro de potência angular é obtida substituindo a Eq. (5.9) na Eq. (5.2)

$$\begin{aligned} \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle &= (4\pi)^2 i^{\ell-\ell'} \int dz \phi(z) \int dz' \phi(z') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} j_{\ell}(kx(z)) \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} j_{\ell'}(k'x(z')) \\ &* Y_{\ell m}(\hat{k}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{k}') \langle \delta(\mathbf{k}, z) \delta^*(\mathbf{k}', z') \rangle. \end{aligned} \quad (5.10)$$

No capítulo 2 vimos que o espectro de potência tri-dimensional é definido por  $\langle \delta(\mathbf{k}) \delta^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(k)$ . Dessa forma, a função delta de Dirac elimina a integral em  $k'$  e nós obtemos

$$\begin{aligned} \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle &= \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_{\ell} \\ &= (4\pi)^2 i^{\ell-\ell'} \int dz \phi(z) D(z) \int dz' \phi(z') D(z') \\ &* \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} j_{\ell}(kx(z)) j_{\ell'}(kx(z')) Y_{\ell m}(\hat{k}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{k}) P(k). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Esta equação é simplificada quando integramos ambos lados pelo ângulo sólido. Logo, o espectro de potência angular é dado por

$$C_{\ell} = \frac{2}{\pi} \int k^2 dk P(k) \Psi_{\ell}^2(k), \quad (5.12)$$

onde

$$\Psi_{\ell}(k) = \int dz \phi(z) D(z) j_{\ell}(x(z)k). \quad (5.13)$$

Vamos lembrar que  $P(k)$  é o espectro de potência linear definido por  $P(k) = P_0(k) T^2(k)$ . Para qualquer  $\ell$ , a variância de  $a_{\ell m}$  é uma integral sobre todos os modos de Fourier do produto  $P(k) \Psi^2(k)$ .

## 5.2 Correções no espectro de potência angular

Os efeitos considerados para a função de correlação angular no capítulo anterior também devem ser introduzidos em  $C_\ell$ . No espaço harmônico esses efeitos são incorporados na função  $\Psi_\ell(k)$ , introduzida na Eq. (5.13).

A correção não-linear é incorporada da mesma maneira que em (4.31). O termo  $P_{mc}$  é irrelevante na nossa análise. Assim podemos mudar  $P(k, z) \rightarrow P_{nl}(k, z)$  simplesmente adicionando o fator  $\exp[-r_{nl}^2 D^2(z) k^2/2]$  em  $\Psi(k)$ , onde  $r_{nl}$  foi definido na Eq. (4.33).

O viés entre a distribuição de galáxias e a distribuição de matéria escura é modelado pelo fator  $b$ . Em nossa análise consideraremos  $b = b(z)$ , assim  $\delta(\hat{n}) \rightarrow b(z)\delta(\hat{n})$ . Isso é equivalente a acrescentar  $b(z)$  dentro da integral em  $z$  na Eq. (5.13).

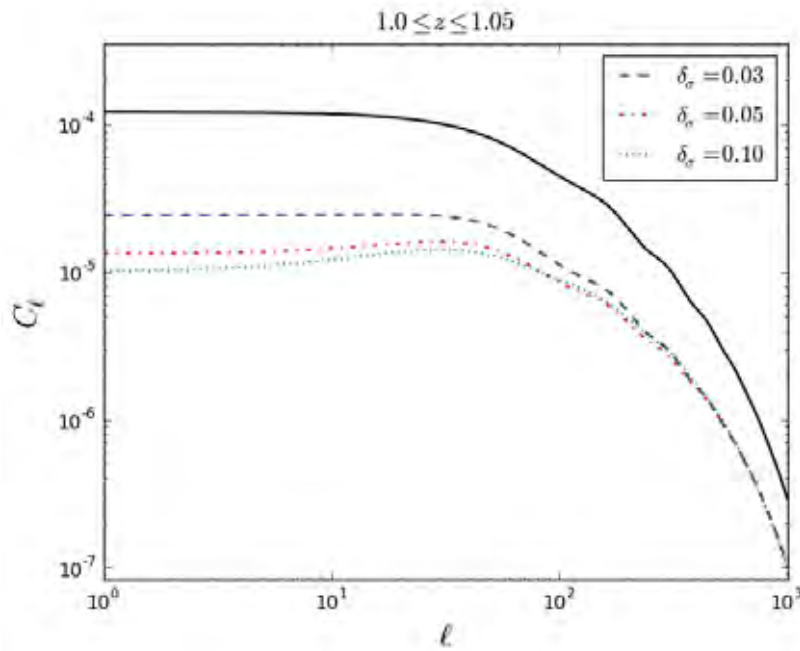


Figura 5.1: Espectro de potência angular calculado no intervalo de *redshift*  $1.0 \leq z \leq 1.05$  para diferentes erros de foto- $z$ . A linha sólida corresponde a ausência de erros na determinação de  $z$ .

A introdução dos efeitos de distorção de *redshift* é a tarefa mais complicada. De acordo com a referência [50], estes efeitos são considerados quando somamos

à Eq. (5.13) o seguinte termo:

$$\Psi'_\ell(k) = \int dz \beta(z) D(z) \phi(z) \left[ \frac{2\ell^2 + 2\ell - 1}{(2\ell + 3)(2\ell - 1)} j_\ell(kx) - \frac{\ell(\ell - 1)}{(2\ell - 1)(2\ell + 1)} j_{\ell-2}(kx) - \frac{(\ell + 1)(\ell + 2)}{(2\ell + 1)(2\ell + 3)} j_{\ell+2}(kx) \right]. \quad (5.14)$$

Finalmente, as correções de foto-z são consideradas quando usamos  $\phi(z)$  definida de acordo com a relação (4.34). Na Figura 5.1 mostramos a relevância do erro de foto-z no espectro de potência angular para  $\delta_\sigma = 0, 0.03, 0.05$  e  $0.10$ . Podemos ver que  $C_\ell$  diminui com o aumento do erro fotométrico.

### 5.3 Função de correlação angular

O espectro de potência e a função de correlação angular são grandezas fisicamente equivalentes para descrever a distribuição de galáxias. Para encontrar a relação entre elas vamos recorrer à Eq. (3.43)

$$\omega(\theta) = \langle \delta(\hat{n}) \delta(\hat{n} + \hat{\theta}) \rangle. \quad (5.15)$$

O contraste de densidade projetado pode ser expandido em função dos harmônicos esféricos de acordo com a relação (5.1), assim

$$\omega(\theta) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{\ell' \geq 0} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} Y_{\ell m}(\hat{n}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}') \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle, \quad (5.16)$$

onde a variância dos coeficientes  $a_{\ell m}$  é o espectro de potência angular,

$$\omega(\theta) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}') C_\ell. \quad (5.17)$$

A equação acima pode ser escrita em termos dos polinômios de Legendre usando a seguinte relação:

$$P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}') = \frac{4\pi}{(2\ell + 1)} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}'). \quad (5.18)$$

Dessa forma, podemos escrever a função de correlação angular em termos de  $C_\ell$  como

$$\omega(\theta) = \sum_{\ell \geq 0} \frac{(2\ell + 1)}{4\pi} P_\ell(\cos \theta) C_\ell. \quad (5.19)$$

Esta nova expressão para a função de correlação angular é fisicamente idêntica à Eq. (3.44).



## 5.4 Matriz de covariância para uma faixa de *redshift*

A maioria das análises de levantamento de galáxias, divide os dados em pequenas faixas de *redshift* para estimar a função de correlação angular <sup>1</sup>. Em catálogos espectroscópicos essas faixas podem ser tratadas independentemente pois conhecemos com grande precisão os *redshifts* observados. Para uma única faixa de *redshifts* a matriz de covariância é determinada pela variância de diferentes medidas de  $\omega(\theta)$ , isto é

$$\text{Cov}(\omega^i(\theta), \omega^i(\theta')) \equiv \langle \omega^i(\theta) \omega^i(\theta') \rangle. \quad (5.20)$$

onde  $i$  rotula a faixa de *redshift* analisada. Por simplicidade, vamos reduzir nossa notação para  $\text{Cov}(\omega^i(\theta), \omega^i(\theta')) = \text{Cov}(\theta, \theta')$ .

De acordo com a relação (5.19), a matriz de covariância será dada por

$$\text{Cov}(\theta, \theta') = \sum_{\ell, \ell' \geq 0}^{\infty} \left( \frac{2\ell + 1}{4\pi} \right) \left( \frac{2\ell' + 1}{4\pi} \right) P_{\ell}(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta') \langle C_{\ell} C_{\ell'} \rangle. \quad (5.21)$$

Assumindo que os coeficientes  $a_{\ell m}$ 's são gaussianamente distribuídos, podemos considerar que as medidas dos  $C_{\ell}$  são independentes,  $\langle C_{\ell} C_{\ell'} \rangle = \text{Var}(C_{\ell}) \delta_{\ell\ell'}$ . Cada potência de  $\ell$  pode ser estimada usando os  $2\ell + 1$  modos disponíveis,

$$C_{\ell} \equiv \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^2, \quad (5.22)$$

assim,  $\text{Var}(C_{\ell}) = 2C_{\ell}^2/(2\ell + 1)$ . Dessa forma

$$\langle C_{\ell} C_{\ell'} \rangle = \frac{2}{2\ell + 1} C_{\ell}^2 \delta_{\ell\ell'}. \quad (5.23)$$

A Eq. (5.23) é válida quando analisamos a distribuição de galáxias em todo céu. Porém, nenhum experimento consegue cobrir todas as partes do céu com observações. Na referência [59], usando realizações Gaussianas, foi mostrado que a correção na matriz de covariância devido a cobrir uma parte limitada no céu é dada por  $1/f_{sky}$ , onde  $f_{sky}$  é a porção coberta pelo experimento. O levantamento do DES cobrirá uma área do céu de  $5000 \text{deg}^2$ , isto corresponde a  $1/8$  do céu e portanto  $f_{sky} = 1/8$ .

A partir destas considerações podemos escrever a matriz de covariância da seguinte maneira:

$$\text{Cov}(\theta, \theta') = \frac{2}{f_{sky}} \sum_{\ell \geq 0}^{\infty} \frac{2\ell + 1}{(4\pi)^2} P_{\ell}(\cos \theta) P_{\ell}(\cos \theta') \left( C_{\ell} + \frac{1}{\bar{n}} \right)^2, \quad (5.24)$$

---

<sup>1</sup>Ou  $C_{\ell}$ ,  $\xi(r)$ ,  $P(k)$ .

onde acrescentamos a correção de *shot noise*,  $1/\bar{n}$ .

O *shot noise* é um erro introduzido na função de correlação angular porque usamos a densidade de campo contínua  $\delta(\mathbf{x})$  para descrever a distribuição discreta das galáxias. No espectro de potência angular, este erro é considerado quando somamos o fator  $1/\bar{n}$  a ele. O valor de  $\bar{n}$  depende do intervalo de *redshift* analisado

$$\bar{n} = \frac{N}{4\pi f_{sky}} \left( \int_{z_1}^{z_2} dz \left( \frac{z}{0.5} \right)^2 \exp \left[ - \left( \frac{z}{0.5} \right)^{1.5} \right] \right) / Norm, \quad (5.25)$$

onde  $N = 300 \times 10^6$  é o número de galáxias que esperamos observar numa porção do céu igual a  $f_{sky}$ . A constante de normalização é dada por

$$Norm = \int_0^\infty dz \left( \frac{z}{0.5} \right)^2 \exp \left[ - \left( \frac{z}{0.5} \right)^{1.5} \right]. \quad (5.26)$$

A integral na Eq. (5.25) é feita em qualquer intervalo de *redshift* que pertence ao levantamento. Por exemplo, numa faixa determinada por  $0.7 \leq z \leq 0.75$ , nós esperamos observar  $1.65 \times 10^7$  galáxias. Isso fornece um erro de  $1/\bar{n} = 9.52 \times 10^{-8}$ . Para entender a relevância desses valores vamos comparar  $1/\bar{n}$  com algum valor medido de  $C_\ell$ . Em qualquer intervalo de *redshift* a medida de  $C_\ell$  decai com  $\ell$  de acordo com a Figura 5.1. A maior contribuição para o somatório na Eq. (5.24), é dada pelos termos com  $\ell \lesssim 200$ . Então vamos usar  $C_{200}$  para fazer nossa comparação. Para a faixa  $0.7 \leq z \leq 0.75$  com largura  $\Delta z = 0.05$ , temos  $C_{200} = 7.17 \times 10^{-6}$ . Este valor é duas ordens de grandeza maior que o erro de *shot noise* calculado acima. Embora neste caso o efeito do *shot-noise* é quase irrelevante, ele torna-se importante quando diminuimos o intervalo  $\Delta z$ .

Vamos retornar à Eq. (5.24) e definir a matriz de covariância reduzida por

$$\text{Red}(\theta, \theta') \equiv \frac{\text{Cov}(\theta, \theta')}{\sqrt{\text{Cov}(\theta, \theta) \text{Cov}(\theta', \theta')}} \quad (5.27)$$

cujos elementos possuem valores entre 0 e 1. Na Figura (5.2), mostramos  $\text{Red}(\theta, \theta')$  calculada no intervalo de *redshift*  $1.00 < z < 1.05$ .

Em geral, nos cálculos de estimativa de parâmetros cosmológicos usamos a inversa da matriz de covariância. No entanto, as medidas de  $\omega(\theta)$ , em ângulos diferentes, são altamente correlacionadas tornando a matriz de covariância quase singular. Isto gera problemas na inversão de  $\text{Cov}(\theta, \theta')$ , pois ela possui determinante quase zero. Um método eficiente para realizar esse cálculo é chamado *Singular Value Decomposition* (SVD). Este método é baseado na decomposição de uma matriz na seguinte maneira:

$$A = USV^t, \quad (5.28)$$

onde a matriz  $A$  pode ser qualquer matriz real, seja ela singular ou não. As matrizes  $U$  e  $V$  são ortonormais e  $S$  é uma matriz diagonal formada pelos autovalores de  $A$ . De acordo com a relação (5.28), a inversa de  $A$  é dada através da

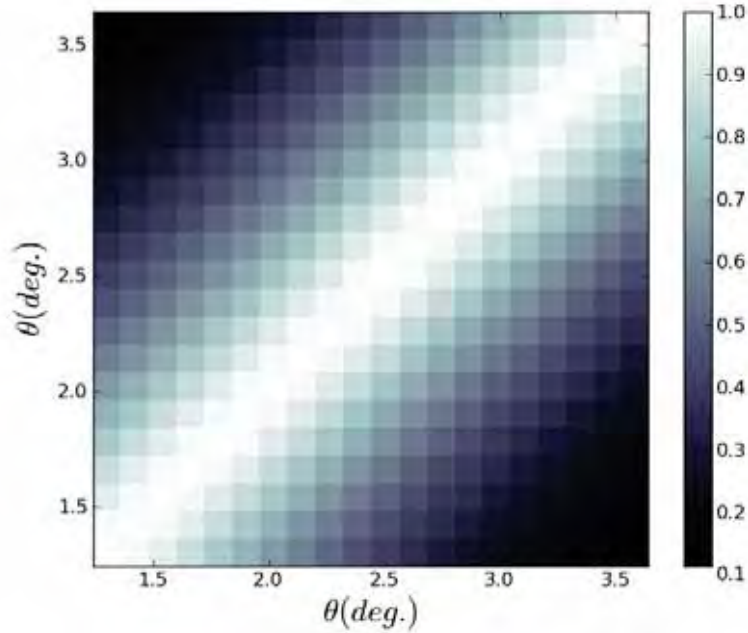


Figura 5.2: Matriz de covariância reduzida para a faixa de *redshift*  $1.00 < z < 1.05$ .

multiplicação das inversas de 3 matrizes, ou seja,

$$A^{-1} = VS^{-1}U^t. \quad (5.29)$$

Neste caso, o problema é transferido para a matriz diagonal  $S$ , pois ela é quase singular.

No método de SVD, quando uma componente  $s_i$  de  $S$  é zero, ou quase zero, nós substituímos  $1/s_i$  por 0 em  $S^{-1}$ . Esta é uma alternativa numericamente vantajosa para calcular a inversa de matrizes quase singulares. Por essa razão, neste trabalho, invertemos as matrizes  $\text{Cov}(\theta, \theta')$  usando SVD.

## 5.5 Matriz de covariância entre faixas de *redshift*

Quando dividimos um levantamento fotométrico em faixas de *redshift*, temos que considerar a incerteza nos *redshifts* dos objetos. Na Figura 4.4, mostramos a distribuição gaussiana de foto- $z$  para uma faixa de *redshift* definida no intervalo  $0.6 \leq z \leq 0.8$ . De acordo com a distribuição *top-hat*, a probabilidade de uma galáxia, dentro dessa faixa, possuir *redshift* fora desse intervalo é nula. No entanto, se a distribuição é fotométrica essa probabilidade não é zero. Isto pode ser visto, na curva com  $\delta_\sigma = 0.03$ , onde a função de seleção é diferente de zero em regiões fora do intervalo acima. Consequentemente, as faixas de *redshift* deixam

de ser independentes e precisaremos modelar a correlação entre elas. Neste caso, a matriz de covariância é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\omega^i(\theta_m^i)\omega(\theta_n^j)) &= \langle \omega^i(\theta_m^i)\omega^j(\theta_n^j) \rangle \\ &= \sum_{\ell, \ell' \geq 0} \left( \frac{2\ell + 1}{4\pi} \right) \left( \frac{2\ell' + 1}{4\pi} \right) P_\ell(\cos \theta_m^i) P_{\ell'}(\cos \theta_n^j) \langle C_\ell^i C_{\ell'}^j \rangle. \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde  $\omega^i$  é calculada na faixa de *redshift*  $i$  e  $\omega^j$  na faixa  $j$ .

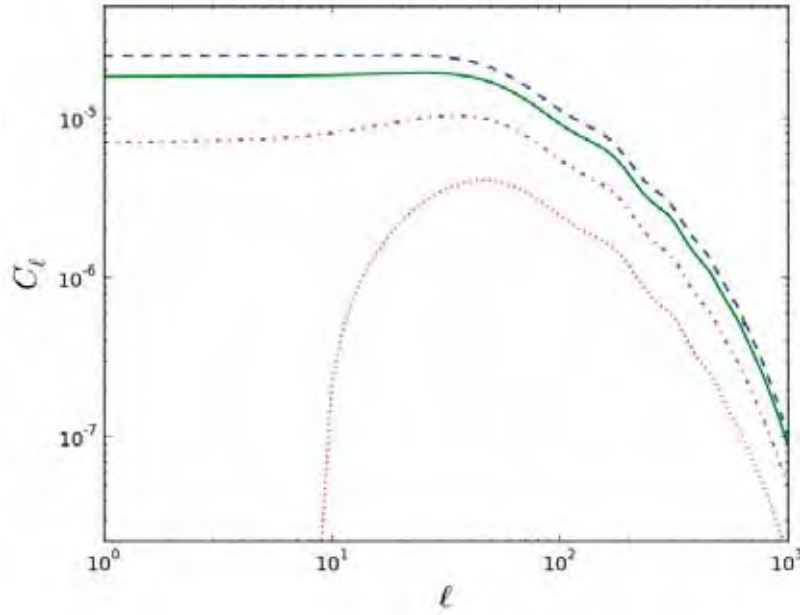


Figura 5.3: Espectro de potência angular entre a faixa  $1.0 \leq z \leq 1.05$  com as faixas  $1.05 \leq z \leq 1.10$  (contínua),  $1.10 \leq z \leq 1.15$  (pontilhada-tracejada) e  $1.15 \leq z \leq 1.20$  (pontilhada). A curva tracejada representa o espectro calculado somente em  $1.0 \leq z \leq 1.05$ .

O *shot noise* entre as faixas de *redshift* não é correlacionado, assim podemos escrever

$$\langle C_\ell^i C_{\ell'}^j \rangle = \frac{2}{(2\ell + 1)f_{sky}} \left( C_\ell^{i,j} + \frac{1}{\bar{n}_i} \delta_{ij} \right)^2 \delta_{\ell\ell'}, \quad (5.31)$$

onde

$$C_\ell^{i,j} = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 P_{nl}(k) \Psi_\ell^i(k) \Psi_\ell^j(k) \quad (5.32)$$

é o espectro de potência angular cruzado entre as faixas  $i$  e  $j$ . As funções  $\Psi^i$  e  $\Psi^j$  são calculadas em duas faixas de *redshift* diferentes e já consideram os efeitos de distorção de *redshift*, vies das galáxias e foto- $z$ . Na Figura (5.3) mostramos

$C_\ell^{ij}$  para a faixa de *redshift*  $1.0 \leq z \leq 1.05$  com suas 3 vizinhas mais próximas. Notemos que a correlação cruzada entre faixas distantes é irrelevante. Isto é justificado através da função de seleção fotométrica que possui valores diferentes de zero somente próximo à faixa analisada.

Portanto, no caso geral, a matriz de covariância é dada por

$$\text{Cov}(\omega^i(\theta_m^i)\omega(\theta_n^j)) = \frac{2}{f_{sky}} \sum_{\ell \geq 0}^{\infty} \left[ \frac{2\ell + 1}{(4\pi)^2} P_\ell(\cos \theta_m^i) P_\ell(\cos \theta_n^j) \left( C_\ell^{i,j} + \frac{1}{\bar{n}_i} \delta_{ij} \right)^2 \right]. \quad (5.33)$$

Esta equação retorna à Eq. (5.24) quando  $i = j$ .

Agora que modelamos a função de correlação angular e a matriz de covariância de seus erros, poderemos estudar a matriz de Fisher e analisar a precisão dos vínculos nos parâmetros cosmológicos que encontraremos no DES.

# 6

## Estimativas de parâmetros cosmológicos

O modelo cosmológico padrão é definido através de parâmetros que determinam a dinâmica do universo. Embora não seja possível observar nenhuma destas grandezas diretamente, elas podem ser estimadas através da análise estatística de observações da estrutura em grande escala do universo. Por outro lado, também é possível extrair informações sobre estes parâmetros sem analisar dados observacionais. Este estudo é feito pela matriz de Fisher que é capaz de descrever a habilidade de um dado experimento impor vínculos nos parâmetros cosmológicos.

Neste capítulo apresentaremos os principais resultados deste trabalho. Usaremos a matriz de Fisher para fazer previsões sobre os erros na estimativa dos parâmetros cosmológicos via a função de correlação angular para o futuro levantamento de galáxias do Dark Energy Survey.

### 6.1 Matriz de Fisher

A precisão com que os parâmetros cosmológicos poderão ser estimados usando os dados observacionais de um experimento é fornecida pela matriz de Fisher,  $F_{ij}$ . Ela é obtida quando definimos a função verossimilhança por uma distribuição multivariada da seguinte forma [3]:

$$L(p) \approx N \exp \left[ -\frac{1}{2} (p_i - \hat{p}_i) F_{ij} (p_j - \hat{p}_j) \right], \quad (6.1)$$

onde  $p_i$  pertence ao conjunto de parâmetros  $\{p\}$  e  $\hat{p}_i$  é seu respectivo estimador. Os estimadores são aqueles que maximizam a função verossimilhança. O método

da matriz de Fisher assume que eles são os próprios valores fiduciais dos parâmetros analisados. É importante notar que, por definição, a função verossimilhança é gaussiana nos parâmetros cosmológicos e não nos dados observacionais.

Próximo ao seu máximo, qualquer função verossimilhança pode ser expandida como

$$\ln L(p) \approx \ln L(\hat{p}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial p_i \partial p_j} \Big|_{\hat{p}} (p_i - \hat{p}_i)(p_j - \hat{p}_j) + \dots, \quad (6.2)$$

onde a primeira derivada é zero por definição. Comparando a Eq. (6.1) com a Eq. (6.2) obtemos a seguinte expressão para a matriz de Fisher:

$$F_{ij} \equiv - \frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p_i \partial p_j} \Big|_{\hat{p}}, \quad (6.3)$$

com normalização dada por  $N = L(\hat{p})$ . A definição correta da matriz de Fisher é dada pela média no *ensemble* de realizações nas medidas experimentais de  $-\partial^2 \ln L(p)/\partial p_i \partial p_j$ . No entanto, a função verossimilhança introduzida na Eq. (6.1) é definida somente em termos dos parâmetros, logo esta média se resume na Eq. (6.3).

A principal característica da matriz de Fisher é fornecer a matriz de covariância para os parâmetros analisados. Isto significa que ela produz uma estimativa dos erros nestes parâmetros.

### 6.1.1 Matriz de Fisher para a distribuição de galáxias

Na análise da distribuição de galáxias geralmente é usado a função de correlação ou o espectro de potência como medida estatística. Em ambos os casos, a análise pode ser feita em 2 (angular) ou 3 (espacial) dimensões. Vamos introduzir o cálculo da matriz de Fisher para uma função verossimilhança mais geral seguindo os passos da referência [3]. Consideremos um conjunto de  $n$  medidas gaussianas de uma certa quantidade  $\mathbf{x}$  distribuídas de acordo com

$$L = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det C}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^t C^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right], \quad (6.4)$$

onde  $\mu$  representa a média em  $\mathbf{x}$  e  $C$  a matriz de covariância que codifica os erros relativos às medidas. Se separarmos as medidas em uma única matriz  $\mathbf{D} = (\mathbf{x} - \mu)(\mathbf{x} - \mu)^t$ , podemos escrever a matriz de covariância das medidas, por:

$$C = \langle \mathbf{D} \rangle. \quad (6.5)$$

Definindo a função  $\mathcal{L}$  através do logaritmo de  $L$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\ln L \\ &= \frac{1}{2} [ \ln \det C + \text{Tr} C^{-1} \mathbf{D} ] + \text{const} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} [ \ln C + C^{-1} \mathbf{D} ] + \text{const}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde, na última igualdade, usamos a identidade  $\ln \det C = \text{Tr} \ln C$ .

A matriz de Fisher é o valor esperado da segunda derivada de  $\mathcal{L}$  em relação aos parâmetros

$$F_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial p_i \partial p_j} \right\rangle \equiv \langle \mathcal{L}_{,ij} \rangle, \quad (6.7)$$

Nesta definição, introduzimos a notação  $\mathcal{L}_{,i} = \partial \mathcal{L} / \partial p_i$  para a derivada em relação a  $\{p\}$ . É fácil mostrar que

$$(C^{-1})_{,i} = -C^{-1} \frac{\partial C}{\partial p_i} C^{-1}. \quad (6.8)$$

Então, a primeira derivada de  $\mathcal{L}$  assume a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{,i} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ C^{-1} C_{,i} (I - C^{-1} \mathbf{D}) + C^{-1} \mathbf{D}_{,i} \right], \quad (6.9)$$

onde  $I$  representa a matriz de identidade. Notemos que a média na Eq. (6.7) age somente nos dados  $\mathbf{D}$ , enquanto a derivada age apenas em  $C$  e  $\mu$ . Usando que  $\langle x \rangle = \mu$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle I - C^{-1} \mathbf{D} \rangle &= 0, & \langle \mathbf{D}_{,i} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{D}_{,ij} \rangle &= \mu_{,i} \mu_{,j}^t + \mu_{,j}^t \mu_{,i}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

e conseqüentemente

$$\langle \mathcal{L}_{,i} \rangle = 0. \quad (6.11)$$

A derivada da Eq. (6.9) é feita de maneira trivial,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{,ij} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ -C^{-1} C_{,j} C^{-1} C_{,i} (I - C^{-1} \mathbf{D}) + C^{-1} C_{,ij} (I - C^{-1} \mathbf{D}) \right. \\ &\quad \left. + C^{-1} C_{,i} C^{-1} C_{,j} C^{-1} \mathbf{D} - C^{-1} C_{,i} C^{-1} \mathbf{D}_{,j} - C^{-1} C_{,j} C^{-1} \mathbf{D}_{,i} + C^{-1} \mathbf{D}_{,ij} \right]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

De acordo com as relações (6.10), o valor esperado de vários termos em  $\mathcal{L}_{,ij}$  é nulo. Assim, finalmente obtemos a expressão para a matriz de Fisher,

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &\equiv \langle \mathcal{L}_{,\alpha\beta} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ C^{-1} C_{,\alpha} C^{-1} C_{,\beta} + C^{-1} \langle D_{\alpha\beta} \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} C_{lm}^{-1} \frac{\partial C_{mn}}{\partial p_\alpha} C_{np}^{-1} \frac{\partial C_{pl}}{\partial p_\beta} + \frac{\partial \mu_l}{\partial p_\alpha} C_{lm}^{-1} \frac{\partial \mu_m}{\partial p_\beta}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

A dependência nas medidas foi naturalmente eliminada em  $F_{ij}$ . A quantidade  $\mu$  representa qualquer grandeza que queremos medir no experimento. Por exemplo,  $\omega(\theta)$ ,  $\xi(r)$  [57],  $P(k)$  [60] e  $C_\ell(\theta)$ . Para  $\mu = \omega(\theta)$ , a matriz de covariância  $C_{lm}$  é dada pela Eq. (5.33). Ela mede os erros nas medidas da função de correlação angular. De acordo com a Eq. (6.13), a matriz de Fisher sempre será quadrada e simétrica e terá dimensão igual ao número de parâmetros analisados.



### 6.1.2 Propriedades da matriz de Fisher

A matriz de Fisher tem propriedades interessantes que permite-nos combinar informações de diferentes experimentos e definir os intervalos de confiança dos parâmetros analisados [61].

#### Intervalo de confiança

Vamos supor que estamos interessados em um experimento capaz de estimar os parâmetros  $x$  e  $y$ . A matriz de Fisher faz previsões sobre o menor erro que este experimento poderá encontrar sobre os parâmetros  $x$  e  $y$  em relação aos seus valores fiduciais  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ . Neste caso, ela tem dimensão  $2 \times 2$  e sua inversa determina a matriz de covariância desses parâmetros:

$$[F_{xy}]^{-1} = [C_p] = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

onde  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são as incertezas de  $1\text{-}\sigma$  nos parâmetros  $x$  e  $y$  respectivamente. Devemos tomar cuidado ao mencionar a matriz de covariância. Na Eq. (6.13),  $C_{lm}$  refere-se aos erros nas medidas das quantidades  $\mu$ , enquanto na Eq. (6.14),  $C_p$  refere-se aos erros nos parâmetros  $\{p\}$ . Isto é,  $C_{lm}$  e  $C_p$  são duas matrizes de covariância diferentes. As componentes na diagonal secundária de  $F_{xy}$ , são dadas por  $\sigma_{xy} = \rho\sigma_x\sigma_y$ , onde  $\rho$  é chamado coeficiente de correlação e possui valores restritos ao intervalo  $[0, 1]$ . Para  $\rho = 0$  os parâmetros são independentes, para  $\rho = 1$  os parâmetros são completamente correlacionados.

Podemos graficar elipses que fornecem os intervalos de confiança para os valores de  $x$  e  $y$  usando as componentes de  $[F_{xy}]^{-1}$ . Os semi-eixos dessas elipses são definidos da seguinte maneira:

$$a^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{4} + \sigma_{xy}^2}, \quad (6.15)$$

$$b^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{4} + \sigma_{xy}^2}. \quad (6.16)$$

A equação paramétrica de uma elipse centrada em  $(\bar{x}, \bar{y})$  é dada por

$$x(t) = \bar{x} + \alpha_k(a \cos t \cos \theta - b \sin t \cos \theta) \quad (6.17)$$

$$y(t) = \bar{y} + \alpha_k(a \cos t \sin \theta + b \sin t \sin \theta) \quad (6.18)$$

onde  $t \in [0, 2\pi]$  e  $\theta$  é vinculado pela relação

$$\tan(2\theta) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}. \quad (6.19)$$

A constante  $\alpha_k$  determina o grau de precisão com que queremos obter o intervalo de confiança. Para  $\alpha_k = 1.52$  teremos 68% de confiança, para  $\alpha_k = 2.48$  teremos

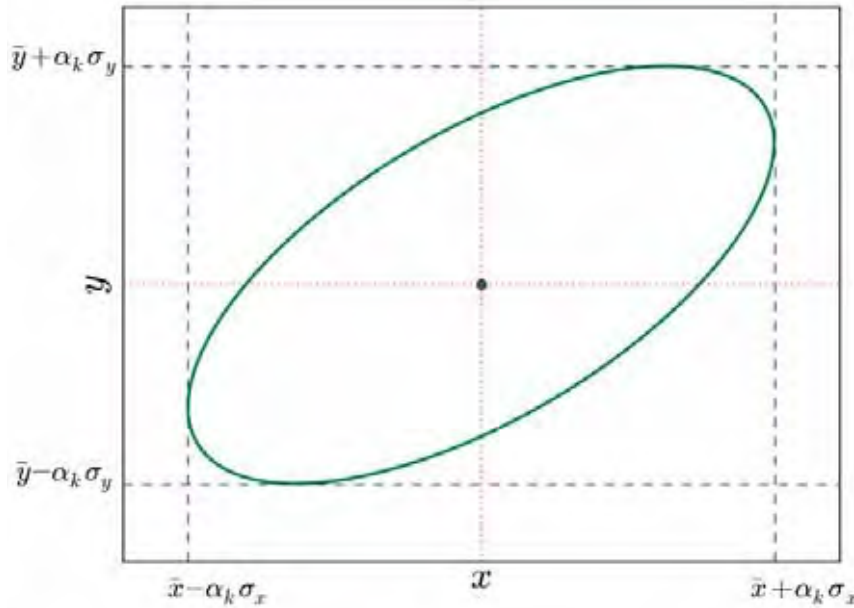


Figura 6.1: Elipse de confiança para os parâmetros  $x$  e  $y$ . A constante  $\alpha_k$  determina a precisão de  $1-\sigma$ ,  $2-\sigma$  ou  $3-\sigma$ . Os erros  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são fornecidos pela matriz de Fisher em relação ao valores fiduciais  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ .

95.4% e para  $\alpha_k = 3.44$  teremos 99.7% de confiança. Estes valores correspondem a  $1-\sigma$ ,  $2-\sigma$  e  $3-\sigma$ , respectivamente. A Figura 6.1, mostra o intervalo de confiança dos parâmetros  $x$  e  $y$  através da elipse gerada pelas equações paramétricas (6.17) e (6.18). O comprimento de cada semi-eixo da elipse depende do nível de confiança adotado.

### Marginalização

Vimos que  $F_{ij}$  tem dimensão igual ao número de parâmetros analisados. A marginalização sobre qualquer um destes parâmetros é feita de maneira simples. Para marginalizar sobre  $p_i$  removemos a linha e a coluna referente a ele na matriz  $F^{-1}$ . Para marginalizar sobre mais de um parâmetro em uma única vez, removemos as linhas e as colunas correspondentes a eles. Assim, podemos dizer que a diagonal da matriz  $F^{-1}$  contém os erros a  $1-\sigma$  de seus respectivos parâmetros, isto é,

$$\sigma_i^2 = (F^{-1})_{ii}. \quad (6.20)$$

Essa definição, embora seja aparentemente simples, é extremamente poderosa.

A interpretação deste resultado é importante. Para explicar de uma maneira clara, vamos retornar ao exemplo com os parâmetros  $x$  e  $y$ . Os erros obtidos para

estes parâmetros são dados em termos dos seus valores fiduciais  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ . A incerteza no parâmetro  $x$ , pode ser representada por

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \pm \sigma_x \\ &= \bar{x} \pm \sqrt{(F^{-1})_{xx}}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

O valor  $\sigma_x$  representa o menor erro que poderemos encontrar no parâmetro  $x$  quando fizermos a análise estatística com os dados observados pelo experimento. Se  $\sigma_x$  representa 20% do valor fiducial  $\bar{x}$ , então o erro obtido através dos dados não poderá ser menor que 20% do melhor ajuste encontrado na análise. Esta propriedade é consequência de um teorema estatístico conhecido como desigualdade de Cramer-Rao [62]. Este teorema afirma que a variância mínima de um estimador *unbiased*<sup>1</sup> não pode ser menor que  $(F^{-1})_{ii}$ . Neste sentido, a matriz de Fisher fornece o menor erro que podemos encontrar num experimento.

### Adicionar priors

*Priors* são informações adicionais oriundas dos parâmetros analisados de outros experimentos. Por exemplo, neste trabalho vamos estudar a matriz de Fisher para o DES, no entanto, podemos adicionar informações de CMB obtida pelo WMAP. A introdução de *prior* também é feita de forma trivial. Se os parâmetros dos dois experimentos têm os mesmos valores fiduciais, a matriz de Fisher resultante é dada por

$$F_{ij}^{(tot)} = F_{ij} + F_{ij}^{(p)}, \quad (6.22)$$

onde  $F_{ij}^{(p)}$  é a matriz de Fisher do outro experimento. Para realizar a soma acima, temos que está seguro que a ordem dos parâmetros é a mesma nas duas matrizes. Se queremos adicionar *priors* somente sobre um subconjunto de parâmetros da matriz  $F_{ij}$ , então as linhas e colunas do parâmetros que não pertencem a esse subconjunto deverão assumir valores nulos em  $F_{ij}^{(p)}$ . Isto significa que  $F_{ij}$  e  $F_{ij}^{(p)}$  devem ter a mesma dimensão.

### Figura de mérito

Como vimos, o comprimento dos semi-eixos da elipse de confiança depende do nível de confiança adotado. A área da elipse contruída para dois parâmetros é dada por

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \pi(\alpha_k a)(\alpha_k b) \\ &= \alpha_k^2 \pi ab, \end{aligned} \quad (6.23)$$

---

<sup>1</sup>Um estimador é dito *unbiased* se o seu valor esperado é igual ao valor verdadeiro. Também pode ser chamado de estimador não tendencioso.

onde  $\alpha_k^2 = 1.52, 2.48, 3.44$  para  $1\text{-}\sigma, 2\text{-}\sigma$  e  $3\text{-}\sigma$  de confiança respectivamente. De acordo com as Eqs. (6.15) e (6.16) o produto  $a \cdot b$  é dado por

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \sigma_x^2 \sigma_y^2 + \sigma_{xy}^2 \\ &= \sqrt{\det F_{xy}^{-1}}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Um experimento impõe mais vínculos nos parâmetros quando a área da elipse de confiança é pequena, então podemos definir a figura de mérito (FOM) por

$$\text{FOM} = \left( \det F_{xy} \right)^{-1/2}. \quad (6.25)$$

Dessa forma a FOM pode comparar os vínculos nos parâmetros cosmológicos obtidos por diferentes experimentos. Vamos lembrar que a elipse de confiança é contruída somente para dois parâmetros. Para matrizes de Fisher com dimensão maior que  $2 \times 2$ , temos que escolher dois parâmetros e marginalizar sobre os outros.

### Transformação de variáveis

A matriz de Fisher,  $F_{\alpha\beta}$ , para um conjunto de parâmetros  $\{p\}$  pode ser derivada através da matriz de Fisher,  $F_{ij}$ , correspondente a outro conjunto de parâmetros  $\{q\}$  da seguinte maneira:

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{ij} \frac{\partial p_i}{\partial q_\alpha} F_{ij} \frac{\partial p_j}{\partial q_\beta}. \quad (6.26)$$

Esta transformação somente é realizada quando os parâmetros de um dos conjuntos dependerem dos parâmetros do outro. Caso contrário, a matriz resultante da transformação será nula.

## 6.2 Matriz de Fisher para as medidas de $\omega(\theta)$ no Dark Energy Survey

O Dark Energy Survey usará 4 métodos diferentes para estimar os parâmetros cosmológicos. Neste trabalho, vamos usar a matriz de Fisher para fazer previsões sobre a precisão com que estes parâmetros serão estimados usando a função de correlação angular da distribuição de galáxias observadas. Antes de obter os resultados, vamos introduzir os procedimentos adotados para realizar esta análise.

### 6.2.1 Procedimentos

O DES medirá o *redshift* de algumas centenas de milhões de galáxias com *redshift* entre  $0.4 < z < 1.4$ . Vamos dividir o levantamento dessas galáxias em

20 faixas de *redshift* com largura  $\Delta z = 0.05$  e estimar a função de correlação angular em cada uma. Abaixo, justificaremos a largura  $\Delta z$  adotada. A informação completa sobre os parâmetros cosmológicos é obtida quando combinamos as informações de todas as faixas de *redshift*.

Para calcular  $\omega(\theta)$ , definimos uma binagem angular de acordo com a Tabela 6.1 em cada faixa de *redshift*. Os ângulos foram escolhidos próximo ao pico do BAO mantendo a distância radial aproximadamente fixa no intervalo  $60 < r < 160h^{-1}\text{Mpc}$ . A primeira coluna da Tabela 6.1 rotula a faixa de *redshift*, a segunda e terceira colunas indicam os intervalos de *redshift* e angulares respectivamente. A quarta coluna mostra a binagem angular usada em cada faixa de *redshift* para calcular  $\omega(\theta)$ . Por exemplo, a função de correlação da faixa 7 é calculada no intervalo de *redshift*  $0.7 < z < 0.75$  para os 23 ângulos distribuídos uniformemente entre  $1.7^\circ - 5.0^\circ$ . Usaremos o erro de foto-z igual a  $\delta_\sigma = 0.03$ .

|    | faixa de <i>redshift</i> | intervalo angular       | bins angulares | escala espacial ( $h^{-1}\text{Mpc}$ ) |
|----|--------------------------|-------------------------|----------------|--|
| 1  | $0.40 < z < 0.45$        | $3.0^\circ - 8.0^\circ$ | 26             | $60 < r < 160$                         |
| 2  | $0.45 < z < 0.50$        | $3.0^\circ - 8.0^\circ$ | 26             | $67 < r < 180$                         |
| 3  | $0.50 < z < 0.55$        | $2.5^\circ - 6.1^\circ$ | 25             | $61 < r < 149$                         |
| 4  | $0.55 < z < 0.60$        | $2.5^\circ - 6.1^\circ$ | 25             | $66 < r < 162$                         |
| 5  | $0.60 < z < 0.65$        | $2.0^\circ - 5.6^\circ$ | 25             | $57 < r < 159$                         |
| 6  | $0.65 < z < 0.70$        | $2.0^\circ - 5.6^\circ$ | 25             | $61 < r < 170$                         |
| 7  | $0.70 < z < 0.75$        | $1.7^\circ - 5.0^\circ$ | 23             | $55 < r < 162$                         |
| 8  | $0.75 < z < 0.80$        | $1.7^\circ - 5.0^\circ$ | 23             | $58 < r < 171$                         |
| 9  | $0.80 < z < 0.85$        | $1.5^\circ - 4.5^\circ$ | 21             | $54 < r < 161$                         |
| 10 | $0.85 < z < 0.90$        | $1.5^\circ - 4.5^\circ$ | 21             | $56 < r < 169$                         |
| 11 | $0.90 < z < 0.95$        | $1.5^\circ - 4.5^\circ$ | 21             | $59 < r < 177$                         |
| 12 | $0.95 < z < 1.00$        | $1.5^\circ - 4.5^\circ$ | 21             | $61 < r < 183$                         |
| 13 | $1.00 < z < 1.05$        | $1.3^\circ - 3.7^\circ$ | 21             | $55 < r < 157$                         |
| 14 | $1.05 < z < 1.10$        | $1.3^\circ - 3.7^\circ$ | 21             | $57 < r < 163$                         |
| 15 | $1.10 < z < 1.15$        | $1.3^\circ - 3.7^\circ$ | 21             | $59 < r < 168$                         |
| 16 | $1.15 < z < 1.20$        | $1.2^\circ - 3.1^\circ$ | 20             | $56 < r < 145$                         |
| 17 | $1.15 < z < 1.20$        | $1.2^\circ - 3.1^\circ$ | 20             | $58 < r < 150$                         |
| 18 | $1.15 < z < 1.20$        | $1.2^\circ - 3.1^\circ$ | 20             | $60 < r < 154$                         |
| 19 | $1.30 < z < 1.35$        | $1.2^\circ - 3.1^\circ$ | 20             | $61 < r < 158$                         |
| 20 | $1.35 < z < 1.40$        | $1.2^\circ - 3.1^\circ$ | 20             | $63 < r < 162$                         |

Tabela 6.1: Tabela de distribuição de bins.

Vamos nomear o cenário descrito acima como *fiducial*. Ele foi usado para obter nossos principais resultados. Porém é interessante realizar diferentes análises para fazer comparações. Além deste, iremos considerar 2 diferentes cenários: *pessimista* que segue a Tabela 6.1 mas com erro de foto-z igual a  $\delta_\sigma = 0.05$ , e

*otimista* que será analisado mantendo a distância radial aproximadamente fixa no intervalo  $20 < r < 200h^{-1}\text{Mpc}$  com  $\delta_\sigma = 0.03$ . No último caso manteremos os intervalos e a largura das faixas de *redshift*, mas modificaremos a binagem angular em cada uma.

Para calcular a matriz de Fisher, precisamos das derivadas de  $\omega(\theta)$  e da matriz de covariância introduzida no capítulo 4. As derivadas seguem os mesmos procedimentos descritos nos últimos 2 parágrafos para a função de correlação angular. A matriz de covariância será calculada considerando a correlação entre diferentes faixas de *redshift*. No entanto, é trabalhoso computacionalmente calcular a matriz de covariância cruzada entre todas as faixas de *redshift*. Nós analisamos a distribuição gaussiana para o *redshift* fotométrico e concluímos que os efeitos relevantes são importantes somente quando consideramos a correlação entre as 4 faixas de *redshift* mais próximas da faixa em estudo. A diferença entre os erros obtidos nos parâmetros  $w$  e  $\Omega_{cdm}$  quando consideramos a correlação entre as 4 e as 6 faixas mais próximas de *redshift* é da ordem de  $10^{-4}$ . Portanto consideramos a correlação somente entre as 4 faixas mais próximas. Por exemplo, quando consideramos a faixa 7, além da matriz de covariância calculada dentro dela, é preciso calcular a covariância entre ela e as faixas 5,6,8 e 9. Isto é, as duas faixas mais próximas acima e as duas faixas mais próximas abaixo. Então teremos que calcular 94 matrizes de covariância e depois juntá-las de forma consistente para criar a matriz de covariância total do experimento. Notemos que  $\text{Cov}(\omega^i(\theta_m), \omega^j(\theta_n))$  depende explicitamente do espectro de potência angular. Nós comparamos numericamente os cálculos da função de correlação angular através das Eqs. (3.44) e (5.19) e concluímos que a soma nos harmônicos esféricos pode ser feita até  $\ell = 1000$ .

Neste trabalho, damos ênfase aos erros obtidos em  $w$  e  $\Omega_{cdm}$ . No entanto, analisamos 26 parâmetros diferentes. 20 destes, são os parâmetros de viés,  $b$ 's, que fizemos independentes em cada faixa de *redshift*. Assim, a dimensão da nossa matriz de Fisher é  $26 \times 26$ . Os valores fiduciais dos parâmetros cosmológicos foram usados de acordo com WMAP7. Estes são:  $\Omega_b = 0.0449$ ,  $\Omega_{cdm} = 0.222$ ,  $h = 0.71$ ,  $n_s = 0.963$ ,  $\sigma_8 = 0.801$ . Para  $w$  usamos  $w = -1$  e os  $b$ 's de cada faixa de *redshift* foram fixados no valor  $b_i = 2$  para qualquer  $i$ . Os valores fiduciais para os parâmetros de viés foram motivados na referência [30], onde eles encontram  $b = 1.95 \pm 0.12$  para a faixa de *redshift*  $0.60 \leq z \leq 0.65$  analisando um conjunto de dados do SDSS. Além disso, usamos  $r_{nl} = 6.6$  e  $z_{bias} = 0.0$  (ver Eq. (4.35)). Estes últimos não foram considerados como parâmetros. Os parâmetros da função de seleção *top-hat* introduzida na Eq. (3.48) assumiram valores fixos dados por  $\beta = 1.5$  e  $z_0 = 0.5$ .

### 6.2.2 Largura da faixa de *redshift* e *shot noise*

De acordo com os procedimentos descritos acima, vamos dividir o levantamento em várias faixas de *redshift*. A largura destas faixas deve ser escolhida

cuidadosamente pois ela influencia a forma da função de correlação angular e consequentemente a análise da matriz de Fisher. O pico do BAO é diluído quando consideramos grandes  $\Delta z$ . Assim, quanto menor a largura da faixa, maior será o sinal de  $\omega(\theta)$ . Para verificar o tamanho ideal de  $\Delta z$  vamos analisar a Figura (6.2). Podemos observar que  $\Delta z = 0.05$  impõe um limite onde as larguras menores não modificam a função de correlação angular de maneira relevante.

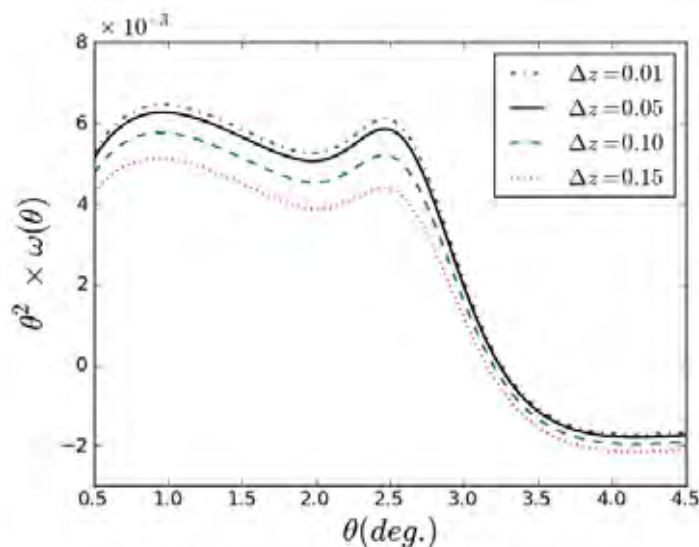


Figura 6.2: Função de correlação angular para diferentes larguras da faixa de *redshift*. Nós consideramos faixas de *redshift* centradas em  $z = 1$  para quatro diferentes valores de  $\Delta z$ .

No entanto, o valor de  $\Delta z$  também está relacionado com o erro de *shot noise*. O número de galáxias dentro de uma faixa de *redshift* diminui quando diminuímos sua largura e consequentemente o erro de *shot noise* aumenta. Na Figura (6.3) mostramos o erro de  $1-\sigma$  do parâmetro cosmológico  $w$  em função da largura da faixa. Estes resultados foram obtidos através da matriz de Fisher para 2 faixas de *redshift* centradas em  $z = 1.1$  e  $1.3$  e erro de foto- $z$  igual a  $\delta_\sigma = 0.03$ . Nós marginalizamos sobre  $\Omega_{cdm}$  e  $\sigma_8$  e fixamos os outros parâmetros nos seus valores fiduciais. O efeito do *shot noise* é observado quando  $\Delta z$  é pequeno. É notável que para  $\Delta z \lesssim 0.05$ , o erro em  $w$  aumenta significativamente. Mas quando a largura é  $\Delta z \gtrsim 0.05$ , o erro em  $w$  é aproximadamente constante, indicando que o efeito do *shot noise* é insignificante. Usando como motivação os resultados mostrados nas Figuras 6.2 e 6.3, adotaremos a largura da faixa igual a  $\Delta z = 0.05$ .

A planitude do erro em  $w$  quando  $\Delta z \gtrsim 0.05$ , mostrada na Figura 6.3, é uma característica interessante. Ingenuamente esperamos que o vínculo deveria se degradar para grandes larguras na faixa de *redshift* aumentando o erro em  $w$ . Porém, Simpson verificou que a análise da distribuição fotométrica de uma faixa de *redshift* com largura  $\Delta z$  é equivalente à análise espectroscópica de uma faixa

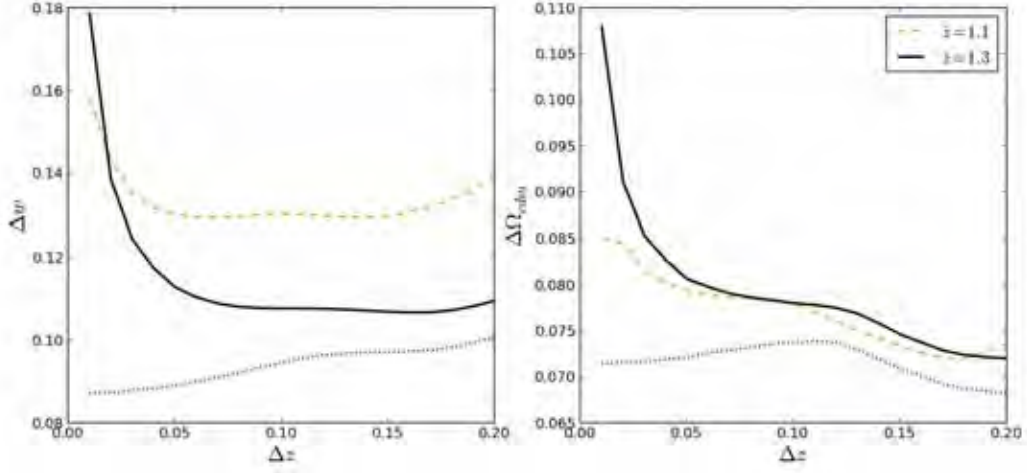


Figura 6.3: Erro de  $w$  e  $\Omega_{cdm}$  em função de  $\Delta z$  para 2 faixas centradas em  $z = 1.1$  e  $z = 1.3$ . Na curva pontilhada nós desprezamos os erro de *shot noise* para a faixa centrada em  $z = 1.3$ .

com largura *top-hat* igual a [63]

$$\Delta z_{TH} = \sqrt{\Delta z^2 + 12\sigma_z^2}. \quad (6.27)$$

Desta relação, usando  $\delta_\sigma = 0.03$ , encontramos para a faixa centrada em  $\bar{z} = 1.1$  com larguras  $\Delta z = 0.01, 0.05, 0.10$  e  $0.15$  os respectivos valores para  $\Delta z_{TH}$ :  $0.219, 0.224, 0.240$  e  $0.265$ . Ou seja, um aumento de 100% entre as larguras  $\Delta z = 0.05$  e  $\Delta z = 0.10$  gera um aumento de 7% entre as suas respectivas larguras *top-hat*  $\Delta z_{TH} = 0.224$  e  $\Delta z_{TH} = 0.240$ . Logo, os erros em  $w$ , quando usamos as duas larguras diferentes, são aproximadamente iguais. Este raciocínio é estendido quando comparamos as outras larguras.

### 6.2.3 Construção da matriz de Fisher

Embora na Figura 6.3 temos adiantado resultados obtidos através da matriz de Fisher, nesta seção vamos mostrar como chegamos a eles. A matriz de Fisher para a função de correlação angular é dada de acordo com a Eq. (6.13),

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial \omega^i(\theta^n, p)}{\partial p_\alpha} [C^{-1}]_{ij} \frac{\partial \omega^j(\theta^m, p)}{\partial p_\beta} + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ C^{-1} \frac{\partial C}{\partial p_\alpha} C^{-1} \frac{\partial C}{\partial p_\beta} \right], \quad (6.28)$$

onde  $C_{nm}^{ij}$  é a matriz de covariância das medidas de  $\omega(\theta)$ . As derivadas em  $\omega(\theta)$  são calculadas no conjunto de parâmetros fiduciais  $\{\hat{p}\}$ . Nesta equação,



tanto a função de correlação angular quanto a matriz de covariância deve conter informações sobre todas as faixas de *redshift*. Inclusive, a matriz de covariância deve conter informações sobre a correlação entre elas.

Vamos mostrar como construir a matriz de covariância de forma a conter todas as informações. Para simplificar, explicaremos o procedimento usando apenas 3 faixas de *redshift* com binagem angular definida na Tabela 6.2.

|   | faixa de <i>redshift</i> | intervalo angular       | bins angulares |
|---|--------------------------|-------------------------|----------------|
| 1 | $0.40 < z < 0.45$        | $3.0^\circ - 8.0^\circ$ | 3              |
| 2 | $0.45 < z < 0.50$        | $3.0^\circ - 8.0^\circ$ | 3              |
| 3 | $0.50 < z < 0.55$        | $2.5^\circ - 6.1^\circ$ | 2              |

Tabela 6.2: *Tabela simplifica.*

O primeiro passo é entender a notação usada. De forma compacta, vamos usar  $\text{Cov}(\omega^i(\theta_m)\omega^j(\theta_n)) \equiv C_{\theta_i^m \theta_j^n}^{ij} = C_{mn}^{ij}$ . A matriz de covariância construída de acordo com a Tabela 6.2 tem o seguinte significado: o elemento  $C_{\theta_1^3 \theta_2^1}^{12} = \text{Cov}(\omega^1(\theta_3)\omega^2(\theta_2))$  foi calculado pela covariância da função de correlação angular cruzada entre as faixas 1 e 2 nos ângulos  $\theta_1^3$  e  $\theta_2^1$  respectivamente. O ângulo  $\theta_i^m$  obedece a binagem angular da faixa  $i$ . Ou seja, para as faixas 1, 2 e 3 temos

$$\theta_1^m = \{\theta_1^1, \theta_1^2, \theta_1^3\}, \quad \theta_2^m = \{\theta_2^1, \theta_2^2, \theta_2^3\}, \quad \theta_3^m = \{\theta_3^1, \theta_3^2\}. \quad (6.29)$$

Dessa forma, além de calcular a matriz de covariância em cada faixa, precisamos calculá-la entre as diferentes faixas de *redshift* usando a Eq. (5.33). A

matriz de covariância total é montada da seguinte maneira:

$$\text{Cov}\left(\omega^i(\theta_m)\omega^j(\theta_n)\right) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\theta_1^1\theta_1^1}^{11} & C_{\theta_1^1\theta_1^2}^{11} & C_{\theta_1^1\theta_1^3}^{11} \\ C_{\theta_2^1\theta_1^1}^{11} & C_{\theta_2^1\theta_1^2}^{11} & C_{\theta_2^1\theta_1^3}^{11} \\ C_{\theta_3^1\theta_1^1}^{11} & C_{\theta_3^1\theta_1^2}^{11} & C_{\theta_3^1\theta_1^3}^{11} \end{bmatrix}_{3\times 3} & \begin{bmatrix} C_{\theta_1^1\theta_2^1}^{12} & C_{\theta_1^1\theta_2^2}^{12} & C_{\theta_1^1\theta_2^3}^{12} \\ C_{\theta_2^1\theta_2^1}^{12} & C_{\theta_2^1\theta_2^2}^{12} & C_{\theta_2^1\theta_2^3}^{12} \\ C_{\theta_3^1\theta_2^1}^{12} & C_{\theta_3^1\theta_2^2}^{12} & C_{\theta_3^1\theta_2^3}^{12} \end{bmatrix}_{3\times 3} & \begin{bmatrix} C_{\theta_1^1\theta_3^1}^{13} & C_{\theta_1^1\theta_3^2}^{13} \\ C_{\theta_2^1\theta_3^1}^{13} & C_{\theta_2^1\theta_3^2}^{13} \\ C_{\theta_3^1\theta_3^1}^{13} & C_{\theta_3^1\theta_3^2}^{13} \end{bmatrix}_{3\times 2} \\ \begin{bmatrix} C_{\theta_2^2\theta_1^1}^{21} & C_{\theta_2^2\theta_2^1}^{21} & C_{\theta_2^2\theta_3^1}^{21} \\ C_{\theta_2^2\theta_2^1}^{21} & C_{\theta_2^2\theta_2^2}^{21} & C_{\theta_2^2\theta_2^3}^{21} \\ C_{\theta_2^2\theta_3^1}^{21} & C_{\theta_2^2\theta_3^2}^{21} & C_{\theta_2^2\theta_3^3}^{21} \end{bmatrix}_{3\times 3} & \begin{bmatrix} C_{\theta_2^2\theta_2^1}^{22} & C_{\theta_2^2\theta_2^2}^{22} & C_{\theta_2^2\theta_2^3}^{22} \\ C_{\theta_2^2\theta_3^1}^{22} & C_{\theta_2^2\theta_3^2}^{22} & C_{\theta_2^2\theta_3^3}^{22} \\ C_{\theta_2^2\theta_3^1}^{22} & C_{\theta_2^2\theta_3^2}^{22} & C_{\theta_2^2\theta_3^3}^{22} \end{bmatrix}_{3\times 3} & \begin{bmatrix} C_{\theta_2^2\theta_3^1}^{23} & C_{\theta_2^2\theta_3^2}^{23} \\ C_{\theta_2^2\theta_3^1}^{23} & C_{\theta_2^2\theta_3^2}^{23} \\ C_{\theta_2^2\theta_3^1}^{23} & C_{\theta_2^2\theta_3^2}^{23} \end{bmatrix}_{3\times 2} \\ \begin{bmatrix} C_{\theta_3^3\theta_1^1}^{31} & C_{\theta_3^3\theta_2^1}^{31} & C_{\theta_3^3\theta_3^1}^{31} \\ C_{\theta_3^3\theta_3^1}^{31} & C_{\theta_3^3\theta_3^2}^{31} & C_{\theta_3^3\theta_3^3}^{31} \end{bmatrix}_{2\times 3} & \begin{bmatrix} C_{\theta_3^3\theta_3^1}^{32} & C_{\theta_3^3\theta_3^2}^{32} & C_{\theta_3^3\theta_3^3}^{32} \\ C_{\theta_3^3\theta_3^1}^{32} & C_{\theta_3^3\theta_3^2}^{32} & C_{\theta_3^3\theta_3^3}^{32} \end{bmatrix}_{2\times 3} & \begin{bmatrix} C_{\theta_3^3\theta_3^1}^{33} & C_{\theta_3^3\theta_3^2}^{33} \\ C_{\theta_3^3\theta_3^1}^{33} & C_{\theta_3^3\theta_3^2}^{33} \end{bmatrix}_{2\times 2} \end{bmatrix}_{8\times 8},$$

onde as sub-matrizes na diagonal principal foram calculadas dentro de cada faixa de *redshift* e as outras sub-matrizes consideram a correlação entre elas. Notemos que a matriz de covariância total é quadrada e sua dimensão é dada pela soma da binagem angular de cada faixa de *redshift*. De acordo com a Tabela 6.2, as faixas 1 e 2 possuem 3 ângulos cada e a faixa 3 possui apenas 2, logo a binagem total é dada por 8 ângulos que é a soma do número de ângulos em cada binagem. Portanto,  $\text{Cov}(\omega^i(\theta_m)\omega^j(\theta_n))$  terá dimensão  $8 \times 8$ .

A matriz  $\partial\omega^i(\theta_j^m)/\partial p_\alpha$  é construída de maneira mais simples. Nomeando  $A_\alpha^{im} = \frac{\partial\omega^i(\theta_j^m, p)}{\partial p_\alpha}$ , podemos escrever

$$A_\alpha^{im} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left[ \omega^1(\theta_1^1, p) \ \omega^1(\theta_1^2, p) \ \omega^1(\theta_1^3, p) \ \omega^2(\theta_2^1, p) \ \omega^2(\theta_2^2, p) \ \omega^2(\theta_2^3, p) \ \omega^3(\theta_3^1, p) \ \omega^3(\theta_3^2, p) \right].$$

Em suma, a matriz de Fisher é calculada através de multiplicação de 3 grandes matrizes

$$F_{\alpha\beta} = A_\alpha^{im} \left[ \text{Cov}\left(\omega^i(\theta_m)\omega^j(\theta_n)\right) \right]^{-1} \left( A_\beta^{nj} \right)^t, \quad (6.30)$$

onde  $i, j$  rotulam diferentes faixas de *redshift* e  $m, n$  os ângulos em cada faixa. Os índices  $\alpha$  e  $\beta$  rotulam os parâmetros estudados. Se vamos considerar somente  $w$ ,  $\Omega_{cdm}$  e  $\sigma_8$ , então a matriz de Fisher terá dimensão  $3 \times 3$ . Na última equação desprezamos o segundo termo da Eq. (6.28). Mais adiante mostraremos que

ele não interfere significativamente em nossos resultados. Para calcular a matriz  $\left[\text{Cov}\left(\omega^i(\theta_m)\omega^j(\theta_n)\right)\right]^{-1}$  usamos o método de SVD.

Retornando ao estudo original, nossa matriz de covariância terá dimensão  $445 \times 445$  e a matriz  $A$  terá dimensão  $1 \times 445$ . O produto definido na Eq. (6.30) fornecerá a matriz de Fisher com dimensão  $26 \times 26$ .

## 6.2.4 Implementação numérica

Nossos resultados foram obtidos através de códigos desenvolvidos usando a linguagem de programação C para calcular as quantidades físicas. Os códigos são baseados na biblioteca Gnu Scientific Library (GSL) para C e C++<sup>2</sup>.

A função de correlação angular foi calculada de acordo com a Eq. (3.44). Primeiro calculamos o espectro de potência implementando o CAMB em nossos programas. Depois calculamos a função de correlação espacial para finalmente obtermos  $\omega(\theta)$ . O cálculo foi feito separadamente em todas as faixa de *redshift* considerando os efeitos discutidos no capítulo 4. Como o espectro de potência não depende da faixa de *redshift* analisada, utilizamos o CAMB uma única vez para obter  $P(k)$ .

A derivada numérica de  $\omega(\theta)$  foi feita de acordo com a definição abaixo

$$\frac{\partial\omega(\theta, p)}{\partial p} \approx \frac{\omega(\theta, p + \Delta p) - \omega(\theta, p - \Delta p)}{2\Delta p}, \quad (6.31)$$

que é nomeada *derivada centrada*. Usamos  $\Delta p$  igual a 2% do valor do parâmetro  $p$ .

O cálculo da matriz de covariância exigiu um esforço computacional maior do que o cálculo de  $\omega(\theta)$ . Neste caso utilizamos a Eq. (5.33) para escrever o código. Para derivar os  $C_\ell$ 's, distribuimos logaritmicamente 300  $\ell$ 's entre 0 e 1000 e depois realizamos uma interpolação por *spline* entre eles. Usamos OPENMP para paralelizar o código em um computador com processador Intel Dual Quad core Xeon X5570, reduzindo o tempo computacional numa fração de 1/5 do tempo real.

A matriz de Fisher foi calculada usando os procedimentos descritos neste capítulo para gerar a matriz de covariância total e a derivada de  $\omega(\theta)$  em todas as faixas. O código foi automatizado usando a linguagem de programação Python para unir todos os subprogramas escritos em C e gerar a matriz de Fisher final através de seus *outputs*. Todos os passos e simplificações deste programa foram testados para garantir a qualidade de nossos resultados.

<sup>2</sup><http://www.gnu.org/software/gsl/>

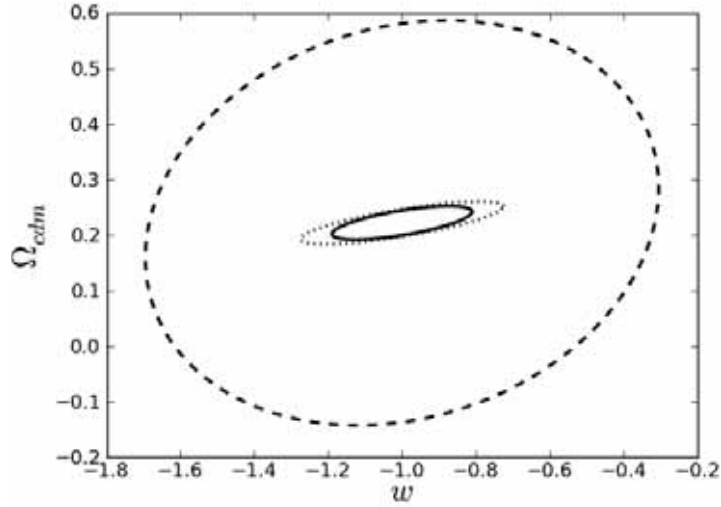


Figura 6.4: Estimativas para  $\Omega_{cdm}$  e  $w$  usando a função de correlação angular em todas as faixas de *redshift* sem considerar a correlação entre elas. O primeiro e o segundo termo da Eq. (6.28) são representados pelas curvas pontilhada e tracejada respectivamente. A elipse contínua mostra a soma entre eles.

### 6.2.5 Estimativas dos parâmetros cosmológicos

Em todos os resultados apresentados neste trabalho, temos desconsiderado o segundo termo da Eq. (6.28). O cálculo deste termo exige grande esforço computacional e sua relevância é pequena quando comparada ao primeiro [60]. Em geral, ele é duas ordens de grandeza menor que o primeiro. A Figura 6.4 mostra as elipses de confiança correspondente a cada termo da Eq. (6.28) e a combinação entre eles. A matriz de Fisher foi calculada usando todas as faixas de *redshift* desconsiderando a correlação entre elas. Podemos observar que a diferença entre a curva contínua e a curva pontilhada é pequena. Dessa forma, sem perda de generalidade, desprezamos o segundo termo da Eq. (6.28).

A matriz de Fisher é sensível à faixa de *redshift* analisada, o erro nos parâmetros cosmológicos diminui com  $z$ . Para mostrar isto, fizemos a análise considerando somente 4 parâmetros,  $w$ ,  $\Omega_{cdm}$ ,  $\sigma_8$  e  $b$ . Na Figura 6.5, mostramos os erros obtidos em  $w$  considerando os 3 cenários citados na subseção 6.2.1. Tratamos cada faixa independente e marginalizamos sobre  $\Omega_{cdm}$ ,  $\sigma_8$  e  $b$ . Vemos que os erros são maiores a baixos *redshifts*. Isto também pode ser observado na Figura 6.6, onde construímos a elipse de confiança para as faixas de *redshifts* 1, 10 e 20 (ver Tabela 6.1) no cenário fiducial. Neste caso, marginalizamos em  $\sigma_8$  e  $b$ . O intervalo de confiança para os parâmetros cosmológicos são menores quando analisamos faixas de *redshift* definidas a altos *redshifts*.

Nós também checamos como algumas propriedades da matriz de Fisher afe-

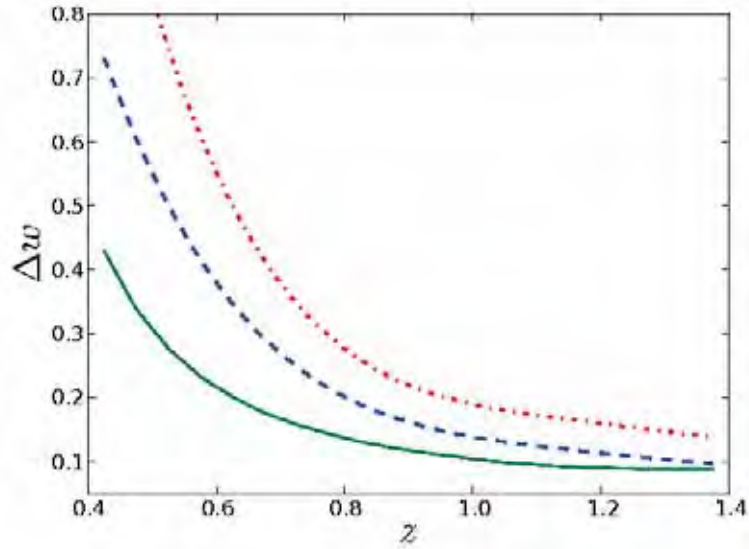


Figura 6.5: Erro de 1- $\sigma$  no parâmetro  $w$  em função do *redshift* após marginalizar todos os  $b_i$ ,  $\sigma_8$  e  $\Omega_{cdm}$ . Os cenários otimista, fiducial e pessimista são representados pelas curvas sólida, tracejada e pontilhada-tracejada respectivamente.

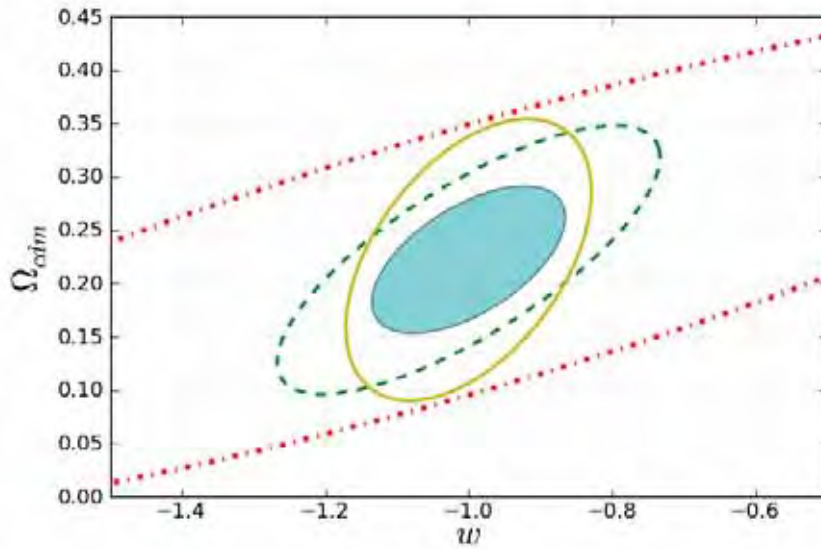


Figura 6.6: Elipse de confiança para  $w$  e  $\Omega_{cdm}$  nas faixas com intervalo  $0.40 \leq z \leq 0.45$  (pontilhada-tracejada),  $0.85 \leq z \leq 0.90$  (tracejada) e  $1.35 \leq z \leq 1.40$  (contínua). A elipse preenchida corresponde à soma das 3 faixas.

tam nossos resultados. Na Figura 6.7 analisamos os erros em  $w$  e  $\Omega_{cdm}$  para os seguintes casos: marginalizando sobre todos os outros parâmetros; adicionando

*priors* de outros experimentos; fixando os parâmetros nos seus valores fiduciais. Como esperado, a marginalização sem adição de *priors*, aumenta significativamente os erros nos parâmetros cosmológicos. Pois quando marginalizamos sobre um parâmetro, estamos retirando da matriz de Fisher toda informação sobre ele. O efeito contrário acontece quando adicionamos *priors* de outros experimentos. Neste caso o intervalo de confiança diminui. Vamos relembrar que a adição de *priors* em  $F_{ij}$  consiste em somar outra matriz à matriz de Fisher com as informações adicionais. No entanto, quanto maiores são os elementos de  $F_{ij}$ , menores serão os erros nos parâmetros. Finalmente, quando fixamos alguns parâmetros, estamos impondo à matriz de Fisher que a precisão sobre eles é infinita. Consequentemente, os erros sobre os outros parâmetros serão menores.

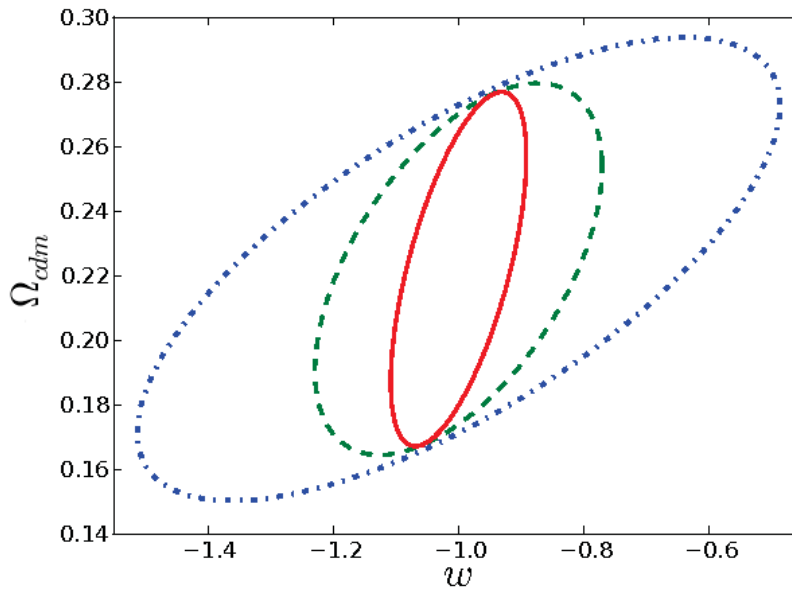


Figura 6.7: Elipses de confiança para  $\Omega_{cdm}$  e  $w$  analisando 5 faixas de *redshift*. A curva sólida é o resultado com todos os parâmetros fixos nos seus valores fiduciais, na curva tracejada adicionamos *prior* em  $h$  e  $\Omega_b$  e na curva pontilhada-tracejada marginalizamos sobre todos os outros parâmetros.

## Resultados

Vamos agora apresentar nossos principais resultados. A matriz de Fisher foi calculada para 26 parâmetros:  $w$ ,  $\Omega_{cdm}$ ,  $\Omega_b$ ,  $h$ ,  $n_s$ ,  $\sigma_8$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , ... ,  $b_{20}$ , onde  $b_i$  é o parâmetro de viés para a  $i^{th}$  faixa de *redshift*. No cenário fiducial, quando consideramos correlação entre as faixas e marginalizamos sobre todos os parâmetros de viés, a matriz de Fisher é dada por

$F_{\alpha\beta} =$ 

$$\begin{bmatrix} 8.29 \times 10^2 & -1.50 \times 10^3 & -1.33 \times 10^4 & 1.05 \times 10^1 & -2.12 \times 10^2 & 2.86 \times 10^1 \\ -1.50 \times 10^3 & 7.42 \times 10^3 & 1.59 \times 10^4 & -1.06 & 1.77 \times 10^3 & -3.41 \times 10^2 \\ -1.33 \times 10^4 & 1.59 \times 10^4 & 2.48 \times 10^5 & -1.90 \times 10^2 & 2.86 \times 10^3 & 1.86 \times 10^1 \\ 1.05 \times 10^1 & -1.06 & -1.90 \times 10^2 & 0.25 & 7.74 & -1.21 \\ -2.12 \times 10^2 & 1.77 \times 10^3 & 2.86 \times 10^3 & 7.74 & 1.06 \times 10^3 & -1.44 \times 10^2 \\ 2.86 \times 10^1 & -3.41 \times 10^2 & 1.86 \times 10^1 & -1.21 & -1.44 \times 10^2 & 2.79 \times 10^1 \end{bmatrix}.$$

Os elementos desta matriz foram posicionados de acordo com a matriz de Fisher representativa (B.1), mostrada no Apêndice B. Neste apêndice também fornecemos a matriz de Fisher para os cenários pessimista e otimista.

A inversa desta matriz fornece os erros nestes parâmetros. Usando a relação (6.20), nós obtemos  $\sigma_w = 0.2153$ ,  $\sigma_{\Omega_{cdm}} = 0.0298$ . Na Tabela 6.3 fornecemos os erros em todos os outros parâmetros cosmológicos analisados no cenário fiducial. Para os cenários otimista e pessimista escrevemos a tabela de erros no apêndice B. Podemos escrever a incerteza de  $1\text{-}\sigma$  no parâmetro de energia escura como  $w = -1 \pm 0.2153$ , que corresponde a 21% de erro em relação ao seu valor fiducial. A interpretação deste resultado é muito importante. Ele não significa que o DES irá estimar  $w$  igual a  $-1$  com incerteza  $\pm 0.2153$ . Este valor representa o menor erro que o projeto DES poderá estimar  $w$  em relação ao seu melhor ajuste. Ou seja, as futuras análises dos dados do DES não poderão fornecer erros em  $w$  menores que 21% de incerteza se analisadas usando as mesmas condições descrita nesta tese. Para o parâmetro de densidade de matéria escura nós temos  $\Omega_{cdm} = 0.222 \pm 0.0298$ , que corresponde aproximadamente a 13% de erro.

A Figura 6.8 mostra um conjunto de elipses comparando os resultados obtidos nos cenários pessimista, fiducial e otimista para os parâmetros cosmológicos  $n_s$ ,  $h$ ,  $\Omega_b$ ,  $\Omega_{cdm}$  e  $w$ . Cada elipse mostra o intervalo de confiança para dois parâmetros quando marginalizamos sobre os outros. Como esperado, os erros são maiores quando consideramos o caso pessimista onde  $\delta_z = 0.05$ . Nos capítulos anteriores vimos que o erro de foto- $z$  dilui a função de correlação angular. Também podemos observar que o vínculo no parâmetro  $w$  não é muito sensível à escala analisada. Ou seja, as incertezas em  $w$  são aproximadamente iguais quando analisamos os cenários fiducial e otimista. Vamos lembrar que a única diferença entre eles é a escala de distância analisada. Por outro lado, os parâmetros  $\Omega_{cdm}$ ,  $\Omega_b$ ,  $n_s$  e  $h$  são significativamente dependentes da escala, especialmente  $\Omega_b$  e  $n_s$ . Isto mostra que

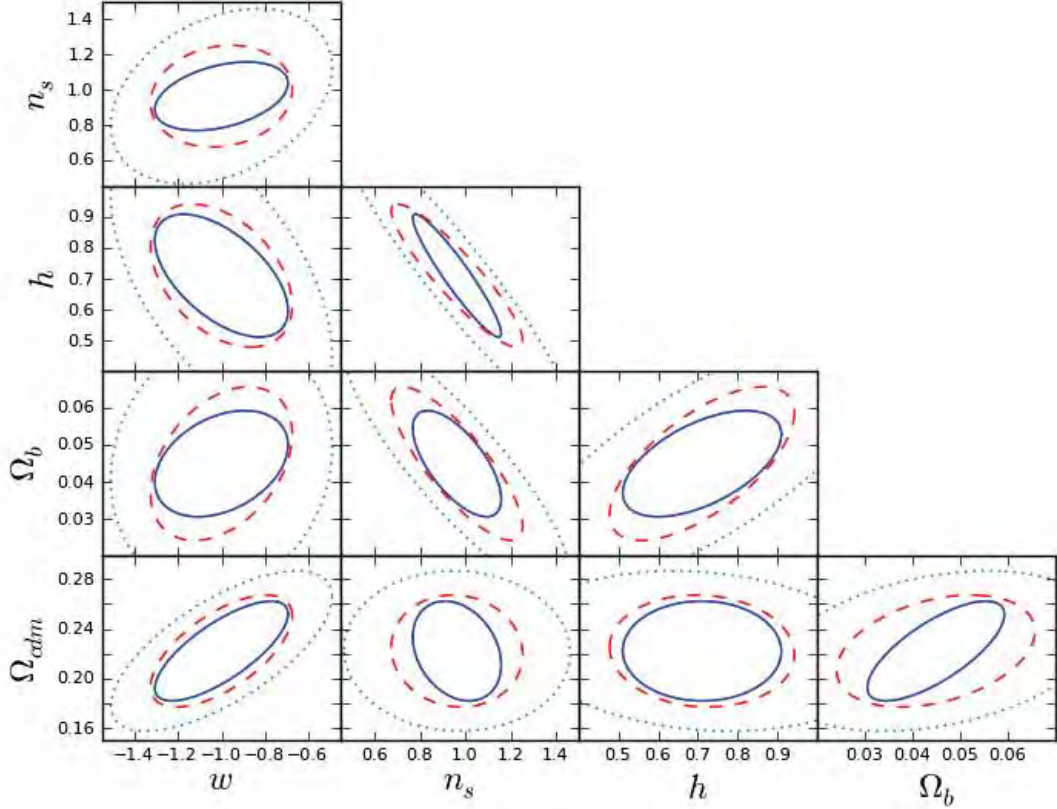


Figura 6.8: Elipse de confiança para os parâmetros  $w$ ,  $\Omega_{cdm}$ ,  $\Omega_b$ ,  $h$  e  $n_s$ . Marginalizamos sobre  $\sigma_8$  e todos os parâmetros  $b$ 's e consideramos os 3 cenários: otimista(contínua), fiducial(tracejada) e pessimista (pontilhada).

estes parâmetros cosmológicos mudam a função de correlação angular em todas as escalas e não somente próximo ao pico do BAO como acontece com  $w$ .

Podemos fazer uma comparação dos resultados obtidos nos 3 cenários para os parâmetros  $w$  e  $\Omega_{cdm}$  usando a FOM introduzida na Eq. (6.25). No cenário otimista  $FOM = 5.99 \times 10^{-2}$ , no fiducial  $FOM = 7.04 \times 10^{-2}$  e no pessimista  $FOM = 1.02 \times 10^{-1}$ . Estes valores confirmam os resultados apresentados na Figura 6.8 onde os melhores vínculos nestes parâmetros são encontrados no cenário otimista que possui o menor valor para a FOM.

É importante ressaltar a necessidade de introduzir a correlação entre as faixas de *redshift*. Na Figura 6.9 -(a) mostramos a diferença nos intervalos de confiança dos parâmetros cosmológicos  $w$  e  $\Omega_{cdm}$  quando consideramos as faixas de *redshift* independentes e com correlação entre elas. Para o parâmetro  $w$  temos respectivamente  $\sigma_w = 0.1804$  e  $\sigma_w = 0.2153$  para os casos sem e com correlação



| Parâmetro (p)  | valor fiducial | $\sigma_p$ | %  |
|----------------|----------------|------------|----|
| $w$            | -1.0000        | 0.2153     | 21 |
| $\Omega_{cdm}$ | 0.2220         | 0.0297     | 13 |
| $\Omega_b$     | 0.0449         | 0.0136     | 30 |
| $h$            | 0.7100         | 0.1527     | 21 |
| $n_s$          | 0.9630         | 0.1907     | 20 |
| $\sigma_8$     | 0.8010         | 0.5780     | 72 |
| $b_1$          | 2.0000         | 1.1809     | 59 |
| $b_2$          | 2.0000         | 1.1809     | 59 |
| $b_3$          | 2.0000         | 1.1761     | 59 |
| $b_4$          | 2.0000         | 1.1766     | 59 |
| $b_5$          | 2.0000         | 1.1763     | 59 |
| $b_6$          | 2.0000         | 1.1756     | 59 |
| $b_7$          | 2.0000         | 1.1770     | 59 |
| $b_8$          | 2.0000         | 1.1759     | 59 |
| $b_9$          | 2.0000         | 1.1761     | 59 |
| $b_{10}$       | 2.0000         | 1.1737     | 59 |
| $b_{11}$       | 2.0000         | 1.1724     | 59 |
| $b_{12}$       | 2.0000         | 1.1736     | 59 |
| $b_{13}$       | 2.0000         | 1.1747     | 59 |
| $b_{14}$       | 2.0000         | 1.1744     | 59 |
| $b_{15}$       | 2.0000         | 1.1758     | 59 |
| $b_{16}$       | 2.0000         | 1.1773     | 59 |
| $b_{17}$       | 2.0000         | 1.1759     | 59 |
| $b_{18}$       | 2.0000         | 1.1756     | 59 |
| $b_{19}$       | 2.0000         | 1.1750     | 59 |
| $b_{20}$       | 2.0000         | 1.1747     | 59 |

Tabela 6.3: Erros de  $1\text{-}\sigma$  nos parâmetros cosmológicos. A coluna 2 fornece os valores fiduciais dos parâmetros cosmológicos nomeados na coluna 1. Na coluna 3 temos o erro de  $1\text{-}\sigma$  em cada parâmetro quando marginalizamos sobre os outros. A coluna 4 representa a porcentagem destes erros em relação aos seus valores fiduciais.

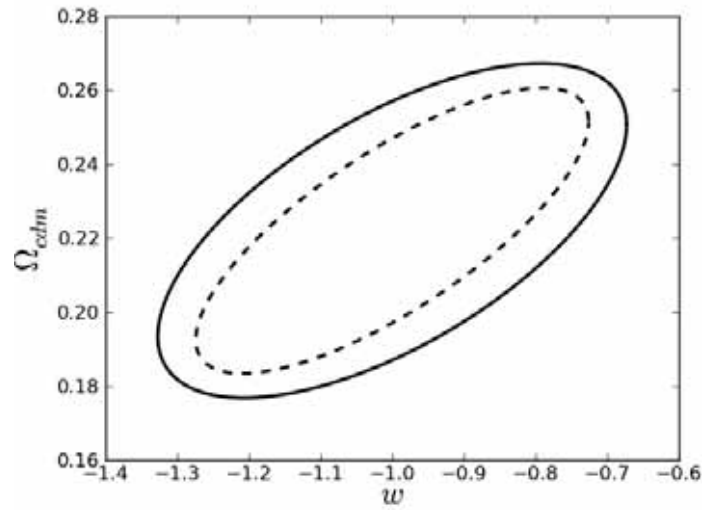
entre as faixas. O erro neste parâmetro aumenta quase 20% quando a correlação é considerada.

Finalmente, introduzimos *priors* de WMAP7 usando os parâmetros  $l_A$ ,  $z_*$  e  $R$ . Estes parâmetros são definidos por

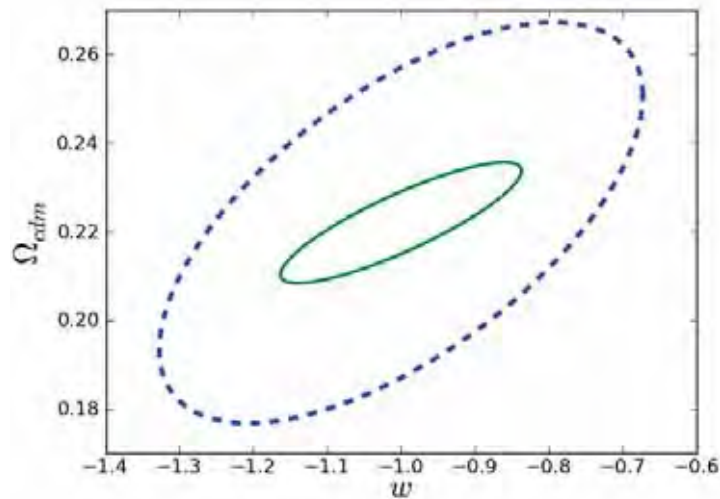
$$R \equiv \sqrt{\Omega_m H_0} \chi(z_*), \quad l_a \equiv \pi \frac{\chi(z_*)}{r_s(z_*)}, \quad (6.32)$$

onde  $\chi(z_*)$ , introduzida na Eq. (2.22), é a distância comóvel entre  $z_*$  e o observador e  $r_s(z_*)$  é o horizonte acústico definido pela Eq. (3.51). Para  $z_*$ , usamos a fórmula de ajuste de acordo com a referência [64]

$$z_* = 1048 \left[ 1 + 0.00124(\Omega_b h^2)^{-0.738} \right] \left[ 1 + g_1(\Omega_m h^2)^{g_2} \right], \quad (6.33)$$



(a)



(b)

Figura 6.9: Intervalo de confiança a  $1-\sigma$  para  $w$  e  $\Omega_{cdm}$  marginalizando sobre todos os outros parâmetros. Na Figura (a) mostramos a diferença dos erros obtidos quando consideramos as faixas de *redshift* independentes (elipse tracejada) e com correlação entre elas (elipse contínua) no cenário fiducial. Na Figura (b) adicionamos *prior* de WMAP7 no cenário fiducial (elipse contínua) e comparamos com os resultados obtidos sem adição de *priors*.

onde

$$g_1 = 0.0783(\Omega_b h^2)^{-0.238} [1 + 39.5(\Omega_b h^2)^{0.763}]^{-1},$$

$$g_2 = 0.560[1 + 21.1(\Omega_b h^2)^{1.81}]^{-1}.$$

A matriz de Fisher destes parâmetros é dada de acordo com a Tabela 10 da referência [65]. Através da Eq. (6.26), transformamos esta matriz para a matriz de Fisher dos parâmetros  $\Omega_{cdm}$ ,  $\Omega_b$  e  $h$ ,

$$F_{\alpha\beta}^{(p)} = \begin{bmatrix} 9.373844 \times 10^4 & -4.483571 \times 10^5 & -1.780136 \times 10^2 \\ -4.483571 \times 10^5 & 3.231396 \times 10^6 & 1.727415 \times 10^3 \\ -1.780136 \times 10^2 & 1.727415 \times 10^3 & 1.053992 \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

A introdução destes *priors* em nossa matriz de Fisher é feita de maneira simples. Devemos adicionar 'zeros' em  $F_{\alpha\beta}^{(p)}$  de forma que ela adquira dimensão  $26 \times 26$ . Depois de posicionar cada elemento de acordo com a ordem dos parâmetros definida pela matriz de Fisher da nossa análise, nós aplicamos a propriedade (6.22). No cenário fiducial, sem adição de *priors*, obtemos  $\sigma_w = 0.21$  e  $\sigma_{\Omega_{cdm}} = 0.03$ . Depois de adicionar os *priors* de WMAP7 correspondentes a matriz (6.34) e usar o erro marginalizado em  $n_s$  e  $\sigma_8$  também de WMAP7, obtemos  $\sigma_w = 0.11$  e  $\sigma_{\Omega_{cdm}} = 0.009$ . Na Figura 6.9-(b) plotamos as elipses de confiança para o caso fiducial com e sem adição de *priors*. Juntamente com WMAP7, podemos vincular  $w$  e  $\Omega_{cdm}$  com 11% e 4% de erro, respectivamente.

### 6.3 Matriz de Fisher versus rede

Nesta seção, vamos comparar o método da matriz de Fisher com resultados obtidos fazendo uma rede nos parâmetros cosmológicos. Não temos a intenção de reproduzir todos os resultados obtidos nas últimas seções. Por essa razão, vamos analisar a matriz de Fisher para a faixa de *redshift* com intervalo  $0.70 \leq z \leq 0.75$  e considerar apenas 4 parâmetros cosmológicos,  $w$ ,  $\Omega_{cdm}$ ,  $b$  e  $\sigma_8$ . A rede será construída de acordo com a Tabela 6.4. Os parâmetros terão N diferentes valores

| Parâmetro      | valor mínimo | valor máximo | N   |
|----------------|--------------|--------------|-----|
| $w$            | -2.0         | 0            | 80  |
| $\Omega_{cdm}$ | 0.05         | 0.55         | 100 |
| $\sigma_8$     | 0.1          | 2.1          | 100 |
| $b$            | 0.05         | 5.55         | 100 |

Tabela 6.4: Rede para os parâmetros  $w$ ,  $\Omega_{cdm}$ ,  $b$  e  $\sigma_8$ .

distribuídos uniformemente entre os valores mínimos e máximos. Dessa forma, teremos um número de  $n = 80 \times 100 \times 100 \times 100$  subconjuntos de parâmetros.

Vamos rotular cada subconjunto com o índice  $\underline{a}$  e calcular a função verossimilhança seguindo os seguintes passos:

1. Calcular a função de correlação angular teórica  $\omega^{th}(\theta)$ , usando os valores fiduciais para os parâmetros dados por:  $w = -1$ ,  $\Omega_{cdm} = 0.449$ ,  $b = 2$  e  $\sigma_8 = 0.801$ . Esta função será calculada somente uma vez para cada ângulo da faixa 7 respeitando a binagem angular da Tabela 6.1.
2. Calcular a função de correlação angular estimada  $\omega_a^{est}(\theta)$  para o subconjunto  $\underline{a}$ . Esta função também deve obedecer a binagem da Tabela 6.1.
3. Calcular a matriz de covariância para a faixa 7 através da Eq. (5.24).
4. Calcular o valor de Chi-quadrado

$$\chi_a^2 = \sum_{i,j} \left( \omega_a^{est}(\theta^i) - \omega^{th}(\theta^i) \right) \text{Cov}^{-1}(\theta^i, \theta^j) \left( \omega_a^{est}(\theta) - \omega^{th}(\theta^j) \right).$$

5. Criar a função de verossimilhança de acordo com

$$L_a = L_0 \exp^{-\frac{\chi_a^2}{2}}.$$

Quando  $L_a = L_0$  temos um subconjunto  $\underline{a}$  onde os valores de seus parâmetros são iguais aos valores fiduciais. Este subconjunto é único e fornece o máximo da função verossimilhança.

6. Repetir o procedimento para os  $n$  subconjuntos de parâmetros. Cada  $L_a$  será um ponto da função verossimilhança  $L$ .

Dentre os  $n$  pontos de  $L$ , selecionamos aleatoriamente 100000 e depois escolhemos os pontos onde  $L_a < L_0$ . A partir deste conjunto de pontos realizamos a análise com a rede.

Na Figura 6.10 -(a) nós comparamos a função de verossimilhança de  $w$  com a matriz de Fisher marginalizando sobre os outros 3 parâmetros. Embora os resultados da rede não sejam exatamente gaussianos, eles estão de bom acordo com os obtidos via matriz de Fisher. Nos dois casos, obtemos um erro em  $w$  igual a  $\sigma_w = 0.23$ .

Para o parâmetro  $\Omega_{cdm}$  a diferença entre os dois métodos foi maior, como mostra a Figura 6.10 -(b). Neste caso, a função de verossimilhança tem uma assimetria para valores mais altos de  $\Omega_{cdm}$ . No entanto, os resultados da matriz de Fisher também estão de acordo com a rede. Neste caso temos  $\sigma_{cdm}(\text{Fisher}) = 0.088$  e  $\sigma_{cdm}(\text{grid}) = 0.064$ .

Esta simples comparação, mostra que a matriz de Fisher fornece um valor confiável dos erros nos parâmetros cosmológicos  $w$  e  $\Omega_{cdm}$ .

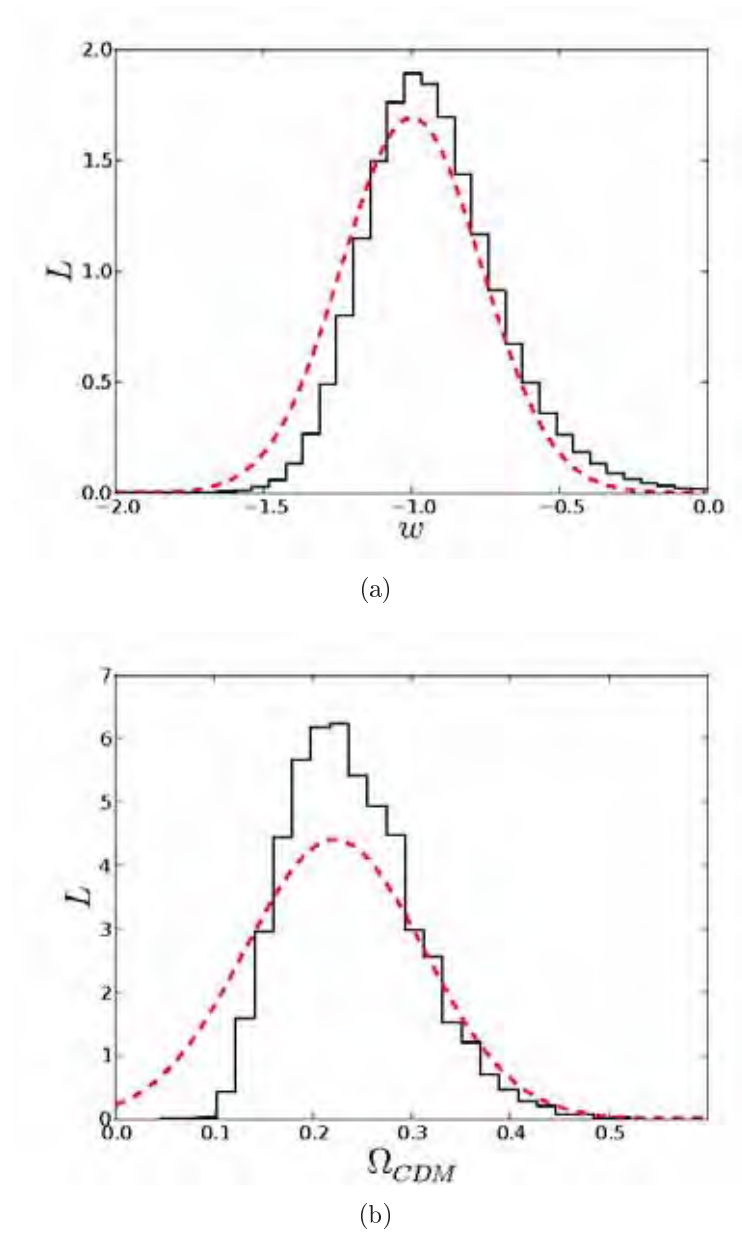


Figura 6.10: Comparação entre as distribuições para  $w$  ( Figura -a ) e  $\Omega_{cdm}$  (Figura -b) obtidas através da matriz de Fisher (curva pontilhada) e o método da rede (curva contínua).

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho aplicamos o formalismo da matriz de Fisher para analisar a precisão com que os parâmetros cosmológicos poderão ser estimados a partir da medida fotométrica da função de correlação angular no levantamento de galáxias a ser produzido pelo Dark Energy Survey. Dividimos o estudo em três etapas: modelagem da função de correlação angular, modelagem da matriz de covariância e construção da matriz de Fisher.

Para modelar a função de correlação angular consideramos efeitos que afetam diretamente os vínculos nos parâmetros cosmológicos. Analisamos o viés entre a distribuição de galáxias e matéria escura, a distorção no *redshift* devido às velocidades peculiares, o crescimento não linear das perturbações e os efeitos dos erros de foto-*z* em  $\omega(\theta)$ . Em seguida, estudamos os erros envolvidos nas medidas de  $\omega(\theta)$ , modelando a matriz de covariância. Dividimos o levantamento em 20 faixas de *redshift* com largura  $\Delta z = 0.05$  e consideramos a correlação entre elas.

Nossos principais resultados foram apresentados no capítulo 6. Nele, construímos a matriz de Fisher para 26 parâmetros cosmológicos:  $n_s, \sigma_8, h, \Omega_b, \Omega_{cdm}, w, b_1, b_2, \dots, b_{20}$ . Usamos  $\Lambda$ CDM como modelo fiducial e adotamos os valores para os parâmetros cosmológicos de acordo com WMAP7. A inversa de  $F_{\alpha\beta}$  representa a matriz de covariância para os parâmetros e portanto contém informações sobre seus erros. No cenário fiducial, encontramos que os menores erros permitidos ao DES para vincular os parâmetros de energia escura ( $w$ ) e matéria escura ( $\Omega_{cdm}$ ) correspondem respectivamente a 21% e 13% de seus valores fiduciais, quando marginalizamos sobre os outros parâmetros. Eles indicam que as futuras análises com os dados observacionais do DES, se usarmos a modelagem da função de correlação angular descrita no capítulo 4, não poderão vincular os parâmetros  $w$  e  $\Omega_{cdm}$  com erros menores que 21% e 13% em relação ao melhor ajuste encontrado considerando  $1-\sigma$  de precisão. Quando adicionamos *priors* de WMAP7 estes erros diminuem para 11% e 4% respectivamente.

Devemos mencionar que o segundo termo da Eq. (6.28) forneceria uma pequena redução nos erros dos parâmetros cosmológicos. Portanto, nossa análise é conservadora pois não consideramos essa contribuição. Outro fator importante

que poderia melhorar nossa análise é um estudo cuidadoso sobre o fator de viés das galáxias. Neste trabalho consideramos  $b(z)$  independente em cada faixa de *redshift*, mas negligenciamos sua dependência com a escala. Seria interessante estudar possibilidades que parametrizassem o viés da distribuição de galáxias em termos do *redshift* e da escala. Isto reduziria o número de parâmetros livres e consequentemente diminuiria o erro sobre eles.

Os resultados obtidos neste trabalho indicam que a análise da função de correlação angular pode, de fato, trazer importantes contribuições para a determinação dos parâmetros cosmológicos. Tais contribuições seriam complementares a outras observações que serão feita pelo DES, incluindo análise de supernova, aglomerados de galáxias e lentes gravitacionais.

Os estudos realizados neste trabalho abrem perspectivas em várias áreas de interesse. Podemos usar a ferramenta computacional desenvolvida para testar modelos de gravitação modificada e avaliar os erros nos parâmetros cosmológicos desta nova teoria. Neste caso, trocaremos o parâmetro de energia escura por novos parâmetros introduzidos na escolha da função  $f(R)$ .

Neste trabalho fixamos os valores de  $\delta_\sigma$  e  $z_{bias}$  introduzidos na função de seleção fotométrica. Podemos estudar o efeito destas quantidades no vínculo dos parâmetros cosmológicos. Neste caso a análise é feita adicionando  $\delta_\sigma$  e  $z_{bias}$  no conjunto de parâmetros considerados pela matriz de Fisher. Isto pode impor limites sobre a incerteza na determinação de  $z_{bias}$  e  $\delta_\sigma$  quando exigirmos bons vínculos sobre  $w$  ou outros parâmetros cosmológicos. Juntamente com essa análise, podemos considerar o efeito do erro de *redshift* catastrófico em  $\omega(\theta)$ . Este erro é devido a contaminação do levantamento de galáxias por objetos que seguem uma distribuição diferente da distribuição fotométrica usual.

Outro desafio que permanece é a combinação dos nossos resultados com outras provas cosmológicas também relacionadas ao DES. Podemos combinar informações da distribuição de galáxias com informações de aglomerados de galáxias, lentes gravitacionais ou dados de Supernovas. Neste caso, precisamos construir a matriz de covariância de maneira consistente para incluir as informações de dois ou mais observáveis.



## Função de correlação espacial no espaço de *redshift*

Neste apêndice iremos demonstrar a Eq.(4.29). Ela descreve os efeitos da distorção do *redshift* na função de correlação espacial.

Em 1987, kaiser introduziu os efeitos das velocidades peculiares no espectro de potência das galáxias [40]. Em 1992, Hamilton trasladou estes efeitos para a função de correlação espacial [43]. A função de correlação no espaço de *redshift* é obtida através da transformada de Fourier do espectro de potência introduzido na Eq. (4.27)

$$\begin{aligned}\xi^s(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [1 + \beta\mu_{kz}^2]^2 P(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [1 + 2\beta\mu_{kz}^2 + \beta^2\mu_{kz}^4] P(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \xi(x) + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2,\end{aligned}\tag{A.1}$$

onde

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{2\beta}{(2\pi)^3} \int P(k) \mu_{kz}^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k,\tag{A.2}$$

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{\beta^2}{(2\pi)^3} \int P(k) \mu_{kz}^4 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k,\tag{A.3}$$

e  $\xi(x)$  é a função de correlação espacial no espaço real. Vamos lembrar que  $\mu_{kz}$  é o ângulo entre  $\hat{k}$  e a direção da linha de visada  $\hat{z}$ . Expandindo  $\mu_{kz}^2$  e  $\mu_{kz}^4$  em



termos dos polinômios de Legendre, obtemos

$$\begin{aligned}\mu_{kz}^2 &= \frac{1}{3}\mathcal{P}_0(\mu_{kz}) + \frac{2}{3}\mathcal{P}_2(\mu_{kz}), \\ \mu_{kz}^4 &= \frac{1}{5}\mathcal{P}_0(\mu_{kz}) + \frac{4}{7}\mathcal{P}_2(\mu_{kz}) + \frac{8}{35}\mathcal{P}_4(\mu_{kz}).\end{aligned}$$

Estes polinômios obedecem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\int d\Omega_{kx} \mathcal{P}_\ell(\mu_{kz}) \mathcal{P}_{\ell'}(\mu_{xz}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \mathcal{P}_\ell(\mu_{kx}) \delta_{\ell\ell'},$$

onde, neste caso,  $\mu_{xz}$  é o ângulo entre a direção  $\hat{x}$  e a linha de vizada  $\hat{z}$ . Qualquer onda plana pode ser escrita em termos de  $\mathcal{P}_\ell$  como

$$e^{ikz\mu_{kx}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell \mathcal{P}_\ell(\mu_{kx}) j_\ell(kx), \quad (\text{A.4})$$

onde  $j_\ell(kx)$  são as funções de Bessel. Usando a propriedade acima e que  $\int d^3k \rightarrow \int k^2 dk \int d\Omega_k$ , teremos

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1 &= \frac{2\beta}{(2\pi)^3} \int dk k^2 P(k) \int d\Omega_k \left[ \frac{1}{3}\mathcal{P}_0(\mu_{kz}) + \frac{2}{3}\mathcal{P}_2(\mu_{kz}) \right] \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell \mathcal{P}_\ell(\mu_{kx}) j_\ell(kx) \right] \\ &= \frac{8\pi\beta}{(2\pi)^3} \int dk k^2 P(k) \left[ \frac{1}{3}\mathcal{P}_0(\mu_{xz}) j_0(kx) - \frac{2}{3}\mathcal{P}_2(\mu_{xz}) j_2(kx) \right],\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a condição de ortogonalidade dos polinômios de Legendre. De forma análoga, obtemos

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \beta^2 \int dk k^2 P(k) \left[ \frac{1}{5}\mathcal{P}_0(\mu_{xz}) j_0(kx) - \frac{4}{7}\mathcal{P}_2(\mu_{xz}) j_2(kx) + \frac{8}{35}\mathcal{P}_4(\mu_{xz}) j_4(kx) \right].$$

A função de correlação no espaço real pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\xi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk k^2 P(k) \int d\Omega \mathcal{P}_0(\mu_{kz}) \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell \mathcal{P}_\ell(\mu_{kx}) j_\ell(kx) \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int dk k^2 P(k) j_0(kx).\end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Vamos definir as funções

$$\xi'(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \xi(y) y^2 dy, \quad (\text{A.6})$$

$$\xi''(x) = \frac{5}{x^5} \int_0^x \xi(y) y^4 dy. \quad (\text{A.7})$$

É fácil mostrar que

$$\xi'(x) = \xi(x) + \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int dk k^2 P(x) j_2(kx), \quad (\text{A.8})$$

$$\xi''(x) = \xi(x) + \frac{5}{7} [\xi'(x) - \xi(x)] - \frac{8\pi}{7(2\pi)^3} \int k^2 dk P(x) j_4(kx). \quad (\text{A.9})$$

Reescrevendo as funções  $\mathfrak{S}_1$  e  $\mathfrak{S}_2$  em termos de  $\xi'(x)$  e  $\xi''(x)$  temos,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \frac{2}{3}\beta\xi(x) - \frac{4}{3}\beta\mathcal{P}_2(\mu_{xz}) \left( \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int dk k^2 P(k) j_2(kx) \right) \\ &= \frac{2}{3}\beta\xi(x) - \frac{4}{3}\beta\mathcal{P}_2(\mu_{xz}) [\xi'(x) - \xi(x)], \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_2 &= \frac{1}{5}\beta^2\xi(x) + \frac{4}{7}\beta^2\mathcal{P}_2(\mu_{xz}) [\xi(x) - \xi'(x)] \\ &\quad + \frac{8}{35}\beta^2\mathcal{P}_4(\mu_{xz}) \left[ \xi(x) + \frac{5}{2}\xi'(x) - \frac{7}{2}\xi''(x) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Vamos nomear  $\xi(x) = \xi_0(x)$  e definir

$$\xi_2(x) = \xi'(x) - \xi(x), \quad (\text{A.12})$$

$$\xi_4(x) = \xi(x) + \frac{5}{2}\xi'(x) - \frac{7}{2}\xi''(x). \quad (\text{A.13})$$

Dessa forma, as funções  $\mathfrak{S}_1$  e  $\mathfrak{S}_2$  podem ser dadas como

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{2}{3}\beta\xi(x) - \frac{4}{3}\beta\mathcal{P}_2(\mu_{xz})\xi_2(x), \quad (\text{A.14})$$

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{1}{5}\beta^2\xi(x) - \frac{4}{7}\beta^2\mathcal{P}_2(\mu_{xz})\xi_2(x) + \frac{8}{35}\beta^2\mathcal{P}_4(\mu_{xz})\xi_4(x). \quad (\text{A.15})$$

A expressão final para a função de correlação no espaço de *redshift* é obtida substituindo as Eqs. (A.14) e (A.15) na Eq. (A.1). Logo, teremos

$$\begin{aligned} \xi^s(x) &= \left[ 1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{\beta^2}{5} \right] \mathcal{P}_0(\mu_{xz})\xi_0(x) - \left[ \frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2 \right] \mathcal{P}_2(\mu_{xz})\xi_2(x) \\ &\quad + \frac{8}{35}\beta^2\mathcal{P}_4(\mu_{xz})\xi_4(x). \end{aligned}$$

Esta equação foi introduzida na Eq. (4.26) do capítulo 4.





## Matriz de Fisher numérica

Neste apêndice fornecemos a matriz de Fisher para os parâmetros  $w$ ,  $\Omega_{cdm}$ ,  $\Omega_b$ ,  $h$ ,  $n_s$  e  $\sigma_8$  calculada nos cenários otimista e pessimista, depois que marginalizamos sobre todos os parâmetros de viés. As posições de cada elemento da matriz de Fisher de acordo com os parâmetros cosmológicos são representadas abaixo,

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} F_{ww} & F_{w\Omega_{cdm}} & F_{w\Omega_b} & F_{wh} & F_{wn_s} & F_{w\sigma_8} \\ F_{\Omega_{cdm}w} & F_{\Omega_{cdm}\Omega_{cdm}} & F_{\Omega_{cdm}\Omega_b} & F_{\Omega_{cdm}h} & F_{\Omega_{cdm}n_s} & F_{\Omega_{cdm}\sigma_8} \\ F_{\Omega_bw} & F_{\Omega_b\Omega_{cdm}} & F_{\Omega_b\Omega_b} & F_{\Omega_bh} & F_{\Omega_bn_s} & F_{\Omega_b\sigma_8} \\ F_{hw} & F_{h\Omega_{cdm}} & F_{h\Omega_b} & F_{hh} & F_{hn_s} & F_{h\sigma_8} \\ F_{n_s w} & F_{n_s \Omega_{cdm}} & F_{n_s \Omega_b} & F_{n_s h} & F_{n_s n_s} & F_{n_s \sigma_8} \\ F_{\sigma_8 w} & F_{\sigma_8 \Omega_{cdm}} & F_{\sigma_8 \Omega_b} & F_{\sigma_8 h} & F_{\sigma_8 n_s} & F_{\sigma_8 \sigma_8} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

### Cenário otimista

O cenário otimista é caracterizado por fixar aproximadamente a distância radial no intervalo  $20 < r < 200h^{-1}\text{Mpc}$ . A divisão das faixas de *redshift* foi feita de acordo com a Tabela 6.1, mas a binagem angular foi modificada em cada

uma destas faixas. Nós usamos o erro de foto-z igual a  $\delta_\sigma = 0.03$ . Neste cenário, obtemos os melhores vínculos nos parâmetros cosmológicos porque o aumento da distância radial melhorou estatisticamente a nossa análise.

$$F_{\alpha\beta} =$$

$$\begin{bmatrix} 9.16 \times 10^2 & -3.32 \times 10^3 & -1.11 \times 10^4 & 5.14 & -7.72 \times 10^2 & 4.71 \times 10^1 \\ -3.32 \times 10^3 & 4.89 \times 10^4 & -3.76 \times 10^4 & 1.20 \times 10^2 & 1.41 \times 10^4 & -8.46 \times 10^2 \\ -1.11 \times 10^4 & -3.76 \times 10^4 & 3.22 \times 10^5 & -3.45 \times 10^2 & -1.23 \times 10^4 & 8.10 \times 10^2 \\ 5.14 & 1.20 \times 10^2 & -3.45 \times 10^2 & 6.07 \times 10^{-1} & 4.39 \times 10^1 & -2.65 \\ -7.72 \times 10^2 & 1.41 \times 10^4 & -1.23 \times 10^4 & 4.39 \times 10^1 & 4.80 \times 10^3 & -2.74 \times 10^2 \\ 4.71 \times 10^1 & -8.46 \times 10^2 & 8.10 \times 10^2 & -2.65 & -2.74 \times 10^2 & 4.15 \times 10^1 \end{bmatrix}.$$

#### Cenário pessimista

A única diferença do cenário pessimista com relação ao cenário fiducial apresentado na Tabela 6.1, é o erro no foto-z. Neste caso adotamos  $\delta_\sigma = 0.05$ . Como era esperado, tivemos um aumento nos erros dos parâmetros cosmológicos porque  $\delta_\sigma$  dilui o pico do BAO na função de correlação angular. Isto pode ser visto na Figura 4.5, onde comparamos  $\omega(\theta)$  para diferentes valores de  $\delta_\sigma$ .

$$F_{\alpha\beta} =$$

$$\begin{bmatrix} 2.87 \times 10^2 & -4.95 \times 10^2 & -4.42 \times 10^3 & 3.26 & -1.01 \times 10^2 & 9.71 \\ -4.95 \times 10^2 & 4.50 \times 10^3 & 1.39 \times 10^3 & 7.40 & 1.19 \times 10^3 & -1.61 \times 10^2 \\ -4.42 \times 10^3 & 1.39 \times 10^3 & 8.76 \times 10^4 & -6.84 \times 10^1 & 6.89 \times 10^2 & 1.01 \times 10^2 \\ 3.26 & 7.40 & -6.84 \times 10^1 & 1.01 \times 10^{-1} & 4.47 & -5.20 \times 10^{-1} \\ -1.01 \times 10^2 & 1.19 \times 10^3 & 6.89 \times 10^2 & 4.47 & 5.77 \times 10^2 & -5.73 \times 10^1 \\ 9.71 & -1.61 \times 10^2 & 1.01 \times 10^2 & -5.20 \times 10^{-1} & -5.73 \times 10^1 & 8.23 \end{bmatrix}.$$

Na Tabela B.1 mostramos os erros em cada parâmetro cosmológico, incluindo todos os parâmetros de viés, obtidos analisando a matriz de Fisher nos cenários otimista e pessimista.

| Parâmetro (p)  | valor fiducial | $\sigma_p$ - otimista | $\sigma_p$ - pessimista |
|----------------|----------------|-----------------------|-------------------------|
| $w$            | -1.0000        | 0.2024                | 0.2594                  |
| $\Omega_{cdm}$ | 0.2220         | 0.0297                | 0.0350                  |
| $\Omega_b$     | 0.0449         | 0.0136                | 0.0169                  |
| $h$            | 0.7100         | 0.1527                | 0.2196                  |
| $n_s$          | 0.9630         | 0.1907                | 0.2348                  |
| $\sigma_8$     | 0.8010         | 0.5780                | 0.7072                  |
| $b_1$          | 2.0000         | 0.5167                | 1.5206                  |
| $b_2$          | 2.0000         | 0.5161                | 1.5151                  |
| $b_3$          | 2.0000         | 0.5170                | 1.5126                  |
| $b_4$          | 2.0000         | 0.5159                | 1.5082                  |
| $b_5$          | 2.0000         | 0.5155                | 1.5112                  |
| $b_6$          | 2.0000         | 0.5140                | 1.5063                  |
| $b_7$          | 2.0000         | 0.5128                | 1.5111                  |
| $b_8$          | 2.0000         | 0.5126                | 1.5059                  |
| $b_9$          | 2.0000         | 0.5136                | 1.5111                  |
| $b_{10}$       | 2.0000         | 0.5131                | 1.5060                  |
| $b_{11}$       | 2.0000         | 0.5128                | 1.5035                  |
| $b_{12}$       | 2.0000         | 0.5136                | 1.5020                  |
| $b_{13}$       | 2.0000         | 0.5149                | 1.5058                  |
| $b_{14}$       | 2.0000         | 0.5147                | 1.5032                  |
| $b_{15}$       | 2.0000         | 0.5141                | 1.5014                  |
| $b_{16}$       | 2.0000         | 0.5136                | 1.5060                  |
| $b_{17}$       | 2.0000         | 0.5135                | 1.5040                  |
| $b_{18}$       | 2.0000         | 0.5137                | 1.5021                  |
| $b_{19}$       | 2.0000         | 0.5138                | 1.5001                  |
| $b_{20}$       | 2.0000         | 0.5141                | 1.4995                  |

Tabela B.1: Erros de  $1-\sigma$  nos parâmetros cosmológicos. A coluna 2 fornece os valores fiduciais dos parâmetros cosmológicos nomeados na coluna 1. Nas colunas 3 e 4 temos o erro de  $1-\sigma$  em cada parâmetro quando marginalizamos sobre os outros nos cenários otimista e pessimista respectivamente.



## Referências Bibliográficas

- [1] J. A. Frieman. Lectures on dark energy and cosmic acceleration. *AIP Conf.Proc.*, 1057:87, 2008. 7
- [2] S. Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1, 1989. 7, 21
- [3] L. Amendola & S. Tsujikawa. *Dark Energy*. Cambridge University Press, 2010. 7, 23, 67, 68
- [4] B. Ratra & P. J. E. Peebles. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *PRD*, 37:3406, 1988. 7
- [5] S. M. Carroll. Quintessence and the rest of the world: Suppressing long-range interactions. *PRL*, 81:3067, 1998. 7
- [6] S. M. Carroll et al. Is cosmic speed-up due to new gravitational physics? *PRD*, 70:043528, 2004. 7
- [7] Gabadadze G. Dvali G. and Porrati M. "4d gravity on a brane in 5d minkowski space. *PLB*, 485:208, 2000. 7, 23
- [8] M. Colless et al. The 2df galaxy redshift survey: Final data release. arXiv:0306581, 2003. 8
- [9] D. G. York et al. The Sloan Digital Sky Survey: Technical Summary. *AJ*, 120:1579, 2000. 8
- [10] F. Sobreira et al. Cosmological forecast from the expected Dark Energy Survey angular correlation function. *PRD*, 84:103001, 2011. 9
- [11] A.G.Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *AJ*, 116:1009, 1998. 1, 11, 17, 19, 20



- [12] S. Perlmutter et al. Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-redshift supernovae. *ApJ*, 517:565, 1999. 11, 17
- [13] W. J. Percival et al. Measuring the baryon acoustic oscillation scale using the sdss and 2dfgrs. *MNRAS*, 381:1053–1066, 2007. 11
- [14] D. J. Eisenstein et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *ApJ*, 633:560, 2005. 1, 11, 38
- [15] A. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. Willey, 2003. 12
- [16] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebule. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15:168, 1929. 15
- [17] George Wolschin, editor. *Lectures on Cosmology: Accelerated Expansion of the Universe*. Springer, 2010. 18
- [18] D. W. Hogg et al. The K correction. *astro-ph 0210394*, 2002.
- [19] A. Conley et al. Supernova constraints and systematic uncertainties from the first 3 years of The Supernova Legacy Survey. *ApJS*, 192:1, 2011. 1, 19, 20
- [20] I. Navarro et al.  $f(r)$  actions, cosmic acceleration and local tests of gravity. *JCAP*, 0702:022, 2007. 23
- [21] A. A. Starobinsky. Disappearing cosmological constant in  $f(r)$  gravity. *JETP Lett*, 86:157–163, 2007. 23
- [22] S. Tsujikawa. Observational signatures of  $f(r)$  dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints. *PRD*, 77:023507, 2008.
- [23] S. A. Appleby et al. Do consistent  $f(r)$  models mimic general relativity plus  $\Lambda$ ? *PLB*, 654:7–12, 2001. 23
- [24] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003. 30, 43, 44
- [25] A. R. Zentner. The excursion set theory of halo mass function, halo clustering and halo growth. *Intern. Journ. of M.Phys.D*, 16:763, 2007. 31
- [26] D.J. Eisenstein & W. Hu. Baryonic features in the matter transfer function. *ApJ*, 496:605, 1998. 32
- [27] S.D. Landy & A.S. Szalay. Bias and variance of angular correlation functions. *AJ*, 412:64, 1993. 34

- [28] L. C. Bennett et al. First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Preliminary maps and basic results. *ApJ*, 148:1, 2003. 38
- [29] E. Sanchez et al. Tracing the sound horizon scale with photometric redshift surveys. *MNRAS*, 411:277, 2011. 39
- [30] Chris Blake et al. Cosmological baryonic and matter densities from 600 000 sdss luminous red galaxies with photometric redshifts. *MNRAS*, 374:1527, 2007. 39, 75
- [31] J. Einasto et al. Structure of superclusters and supercluster formation. *III* quantitative study of the local supercluster. *MNRAS*, 206:529, 1984. 42
- [32] C. Lacey & S. Coles. Merger rates in hierarchical models of galaxy formation – part two - comparison with n-body simulations. *MNRAS*, 271:676, 1994. 42
- [33] R. J. Scherrer & D.H. Weinberg. Constraints on the effects of locally-biased galaxy formation. *ApJ*, 504:607–611, 1998. 42
- [34] A.Rassat et al. Deconstructing baryon acoustic oscillations: A comparison of methods. arXiv: 0810.0003v1, 2008. 42
- [35] C. Porto et al. Growth factor and galaxy bias from future redshift surveys: a study on parametrizations. arXiv:1101.2453v1, 2011. 42
- [36] A. J. Ross et al. Measuring redshift-space distortions using photometric surveys. arXiv:1102.0968v3, 2011. 42
- [37] L. Guzzo et al. What is the small-scale velocity dispersion of galaxy pairs? arXiv:astro-ph/9503114v1, 1995. 43
- [38] L. Guzzo et al. Redshift-space distortions and the real-space clustering of different galaxy types. *ApJ*, 489:37, 1997.
- [39] P.J.E. Peebles. *The Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press, 1980. 43
- [40] N. Kaiser. Clustering in real space and in redshift space. *MNRAS*, 227:1–21, 1987. 43, 93
- [41] A.J. Hamilton. Linear redshift distortions: A review. in *D. Hamilton (ed.), Astrophysics and Space Science Library: In the Evolving Universe. Selected Topics on Large-Scale Structure and on the properties of galaxies.*, 231:185–275, 1998. arXiv:astro-ph/9708102v2. 43, 54

- [42] V. J. Martinez & E. Saar. *Statistics of the galaxy distribution*. Chapman & Hall/CRC, 2001. 43
- [43] A.J. Hamilton. Measuring omega and the real correlation function from the redshift correlation function. *ApJ*, 385:L5, 1992. 47, 93
- [44] H. Seo & D.J. Eisenstein. Baryonic acoustic oscillations in simulated galaxy redshift surveys. *ApJ*, 633:575–588, 2005. 49
- [45] V. Springel et al. Simulating the joint evolution of quasars, galaxies and their large-scale distribution. *Nature*, 435:629–636, 2005.
- [46] R. Angulo et al. The detectability of baryonic acoustic oscillations in future galaxy surveys. *MNRAS*, 383:755, 2008. 49
- [47] M. Crocce Renormalized cosmological perturbation theory. *PRD*, 73:063519, 2006. 49
- [48] M. Crocce & R. Scoccimarro. Memory of initial conditions in gravitational clustering. *PRD*, 73:063520, 2006.
- [49] M. Crocce & R. Scoccimarro. Nonlinear evolution of baryon acoustic oscillations. *PRD*, 77:023533, 2008. 49
- [50] M. Crocce et al. Modeling the angular correlation function and its full covariance in photometric galaxy surveys. arXiv:1004.4640, 2010. 50, 60
- [51] M. Lima & W. Hu. Photometric redshift requirements for self-calibration of cluster dark energy studies. *PRD*, 76:123013, 2007. 51
- [52] J.J Wray & J.E. Gunn. A new technique for galaxy photometric redshifts in the Sloan Digital Sky Survey. *ApJ*, 678:144–153, 2008.
- [53] A. Collister & O. Lahav. Annz: Estimating photometric redshifts using artificial neural network. *ASP*, 345-351:116, 2004. 51
- [54] T. Budavari et al. Angular clustering with photometric redshifts in the Sloan Digital Sky Survey: Bimodality in the clustering properties of galaxies. *ApJ*, 595:59–79, 2003. 51
- [55] Z. Ma et al. Effects of photometric redshift uncertainties on weak-lensing tomography. *ApJ*, 636:21–29, 2006. 51
- [56] A. P. Hearin et al. A general study of the influence of catastrophic photometric redshift errors on cosmology with cosmic shear tomography. astro-ph/1002.3383, 2010. 52

- [57] T. Matsubara. Correlation function in deep redshift space as a cosmological probe. *ApJ*, 615:573, 2004. 55, 69
- [58] P. Norberg et al. Statistical analysis of galaxy surveys—i. robust error estimation for 2–point clustering statistics. arXiv:0810.1885v1, 2008. 57
- [59] A. Cabre et al. Error analysis in cross-correlation of sky maps: application to the integrated Sachs –Wolfe detection. *MNRAS*, 381:1347, 2007. 62
- [60] M. Tegmark. Measuring cosmological parameters with galaxy survey. *PRL*, 79:20, 1997. 69, 81
- [61] D. Coe. Fisher matrices and confidence ellipses: A quick-start guide and software. arXiv:0906.4123, 2009. 70
- [62] A. Heavens. Statistical techniques in cosmology. arXiv:0906.0664, 2010. 72
- [63] F. Simpson et al. Locating the baryon acoustic peak. *PRD*, 79:063508, 2009. 77
- [64] W. Hu & N. Sugiyama. Small-scale cosmological perturbation: an analytic approach. *AJ*, 471:542, 1996. 86
- [65] E. Komatsu et al. Seven-years Wilkinson microwave anisotropy probe(WMAP) observations: cosmological interpretation. *Astron. J. Suppl. Series*, 192:18, 2011. 88

