

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA DE BAURU  
COMISSÃO DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Dinâmica Não Linear e Controle de um Sistema  
Vibratório Modelado com Memória de Forma e, Excitado  
por Fontes de Energia do Tipo Ideal e Não Ideal**

Autor: Vinícius Piccirillo

Orientador: Prof. Dr. José Manoel Balthazar

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA DE BAURU  
COMISSÃO DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Dinâmica Não Linear e Controle de um Sistema  
Vibratório Modelado com Memória de Forma e, Excitado  
por Fontes de Energia do Tipo Ideal e Não Ideal**

Autor: Vinícius Piccirillo

Orientador: Prof. Dr. José Manoel Balthazar

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Bauru, 2007

S.P. - Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA DE BAURU  
COMISSÃO DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Dinâmica Não Linear e Controle de um Sistema  
Vibratório Modelado com Memória de Forma e, Excitado  
por Fontes de Energia do Tipo Ideal e Não Ideal**

Autor: **Vinícius Piccirillo**

Orientador: **Prof. Dr. José Manoel Balthazar**

---

Prof. Dr. José Manoel Balthazar, Presidente  
IGCE / UNESP – RC

---

Prof. Dr. Bento Rodrigues Pontes Jr.  
FEB / UNESP – Bauru

---

Prof. Dr. Vicente Lopes Jr.  
FEIS / UNESP – Ilha Solteira

Bauru, 11 de dezembro de 2007

**DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO  
UNESP - BAURU**

Piccirillo, Vinícius.

Dinâmica não linear e controle de um sistema vibratório modelado com memória de forma e, excitado por fontes de energia do tipo ideal e não ideal / Vinícius Piccirillo, 2007.

230 f. il.

Orientador: José Manoel Balthazar.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2007.

1. Memória de forma. 2. Técnicas de Perturbação. 3. Sistemas ideais e não ideais. 4. Efeito Sommerfeld. 5. Controle ótimo. I Universidade Estadual

## **Dedicatória**

Aos meus pais que sempre me apoiaram e me incentivaram em todos os momentos da minha vida, principalmente nos estudos, não poupando esforços para que eu chegasse até aqui

## **Agradecimentos**

Primeiramente agradeço a Deus, e a Santa Rita de Cássia que sempre me protege e me dão forças.

Agradeço intensamente aos meus pais Francisco e Neiva, à minha irmã Marcela e a minha avó e madrinha Maria Aparecida, pelo amor, carinho, e pelo apoio que sempre me dedicaram.

Ao orientador Prof. Dr. José Manoel Balthazar pelo conhecimento passado, e pela orientação e apoio na realização deste trabalho

Agradeço ao prof. Dr. Bento Rodrigues Pontes Jr. pelo incentivo e apoio e por sempre estar pronto a me ajudar.

Agradeço ao prof. Palácios, cuja amizade e discussões sobre o trabalho foram muito valiosas.

Aos meus colegas de mestrado. Agradeço também aos meus amigos de graduação pelos momentos alegres que compartilhamos.

A todos que por ventura não foram mencionados e de forma direta ou indireta colaboraram com este trabalho.

As dificuldades ensinam e fortalecem; as facilidades iludem e enfraquecem

- Arnon de Mello -

## Resumo

Piccirillo, Vinícius, Dinâmica não linear e controle de um sistema vibratório modelado com memória de forma e, excitado por fontes de energia do tipo ideal e não ideal, Bauru: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2007, 230 pp., Dissertação (Mestrado).

Este trabalho consiste de três partes, na primeira vez – se o estudo da dinâmica de um oscilador com um grau de liberdade, em que uma massa é conectada a um elemento com memória de forma e um amortecedor, onde o sistema é excitado harmonicamente (sistema ideal). Uma solução analítica para o movimento estacionário do sistema é obtida através da análise de técnicas de perturbações, onde foi utilizado o método das múltiplas escalas. Por intermédio desta solução observa – se fenômenos não lineares através das curvas de resposta em frequência. Além disso, obtém – se condições de estabilidade para o sistema e condições para a existência de bifurcação do tipo sela – nó.

Na segunda parte apresenta – se o estudo do comportamento dinâmico não linear de um oscilador com memória de forma, excitado por uma fonte não ideal – um motor elétrico de corrente contínua, desbalanceado e com potência limitada. Toma – se, um problema cujo modelo matemático representa um sistema simplificado (com característica do motor no regime estacionário). Adota – se a formulação Lagrangeana para gerar as equações de movimento. Os resultados são obtidos através de integrações numéricas das equações de movimento sendo possíveis obter oscilações regulares e irregulares (caóticos), os quais dependem da escolha dos parâmetros do sistema. A solução analítica é obtida utilizando - se o método da média, onde é possível observar fenômenos intrínsecos a sistemas não ideais tais como dependência da frequência de excitação com relação à amplitude de oscilação da coordenada de movimento do sistema (Efeito Sommerfeld).

A terceira parte é dedicada à aplicação de uma técnica de controle linear ótimo para a supressão do movimento caótico tanto do sistema ideal quanto do sistema não ideal, via simulações numéricas.

**Palavras chave:** Memória de forma, Técnicas de Perturbação, Sistemas Ideais e Não Ideais, Efeito Sommerfeld, Controle Ótimo.

## Abstract

Piccirillo, Vinícius, Nonlinear dynamical and control of a modeling vibrating system with shape memory and, excited by energy sources of the ideal and non – ideal type, Bauru: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2007, 230 pp., Dissertação (Mestrado).

This work concerns of three parts, in the first we will make the study of the dynamical of a single – degree of freedom oscillator, which consist of a mass connected to a shape memory element and a dashpot, where the system harmonically excited (ideal source). An analytical solution for the system stationary oscillations is obtained by perturbations method, where was used the method of multiple scales. Due to this solution one can observe nonlinear phenomena trough of frequency – response curves. Besides, conditions for the system stability and the existence of saddle - node bifurcations are also obtained.

In the second part show the computational and analytical study of the nonlinear dynamic behavior of the SMA oscillator, excited by a non ideal source – an unbalanced direct current electric motor of limited power. A problem whose mathematical model represents a simplified system (the characteristic of the motor in stationary state). It adopts the Lagrange formularization to deducing the equations of motion. Regular and irregular (chaotic) behaviors depend of the physical parameters and can be observed when a numerical integration is performed. The analytical solution is obtained using the averaging method, where due to this solution on can observe typical non-ideal phenomena like the amplitude motion dependency to the frequency of the excitation (Sommerfeld effect)

The third part is dedicated to the application and performance of the linear feedback control for the suppressing of the chaotic motion of an ideal and non ideal system, theses systems are numerical studied.

**Key words:** Shape memory, Perturbations techniques, Ideal and Non – Ideal systems, Sommerfeld effect, Linear feedback control.

# Índice

<b>Resumo</b>	iv
<b>Abstract</b>	v
<b>Lista de Tabelas</b>	ix
<b>Lista de Figuras</b>	x
<b>Nomenclatura</b>	xx
<b>1 Aspecto Geral das Ligas com Memória de Forma e dos Sistemas Dinâmicos do Tipo Não Ideal</b>	<b>1</b>
1.1 Preliminares	1
1.2 Características gerais das ligas com memória de forma.	2
1.2.1 Transformação de fase devida à variação de temperatura.	2
1.2.2 Pseudoelasticidade.	4
1.2.3 Efeito de memória de forma.	5
1.3 Sistemas dinâmicos do tipo ideal e não ideal.	6
1.3.1 Sistema dinâmico do tipo ideal.	6
1.3.2 Sistema dinâmico do tipo não ideal	7
1.4 Passagem e captura pela ressonância.	10
1.5 Objetivos do trabalho	11
1.6 Apresentação dos capítulos.	12
<b>2 Revisão de Alguns Modelos Constitutivos para as Ligas com Memória de Forma</b>	<b>14</b>
2.1 Modelo polinomial	15
2.2 Modelos com cinética de transformação de fase assumida	17
2.3.1 Modelo de Tanaka	17
2.3.2 Modelo de Boyd e Lagoudas	18
2.3.3 Modelo de Liang e Rogers	18
2.3.4 Modelo de Brinson	19
2.4 Modelo constitutivo considerando assimetria tração – compressão e plasticidade	21

<b>3 Busca de uma Solução Analítica Aproximada de um Oscilador com Memória de Forma, Modelado com sendo Ideal</b>	24
3.1 Solução analítica aproximada utilizando – se técnicas de perturbação	24
3.2 O oscilador com memória de forma	25
3.3 Busca da solução analítica aproximada através do método das múltiplas escalas	27
3.3.1 Comportamento do oscilador pseudoelastico em vibração livre	31
3.3.2 Comportamento do oscilador pseudoelastico em vibração forçada	35
3.3.2.a Ressonância primária	35
3.3.2.b Análise da curva de ressonância	38
3.3.2.c Estabilidade das soluções	44
3.3.2.d Bifurcações	46
3.3.3 Ressonâncias secundárias	49
3.3.3.1 Ressonância subharmonica	51
3.3.3.2 Ressonância superharmonica	59
3.3.3.2.a Análise da curva de ressonância	61
3.3.3.2.b Estabilidade das soluções	64
3.3.3.2.c Bifurcações	68
3.3.4 Resposta livre do oscilador para baixas temperaturas	70
<b>4 Modelagem Dinâmica e Resultados das Simulações Numéricas de um Sistema Vibratório Não Ideal com Memória de Forma.</b>	76
4.1 Modelagem do problema não ideal com memória de forma	76
4.2 Resultados das simulações numéricas	80
4.2.1 Simulações numéricas do caso I	81
4.2.1.a Fase martensítica estável na liga	82
4.2.1.b Fase martensítica e austenítica estáveis na liga	87
4.2.1.c Fase austenítica estável na liga	90
4.2.2 Simulações numéricas do caso II	95
4.2.2.a Fase martensítica estável na liga	95
4.2.2.b Fase martensítica e austenítica estáveis na liga	113
4.2.2.c Fase austenítica estável na liga	120
4.3 Influência da temperatura sobre o sistema não ideal	130

<b>5</b>	<b>Obtenção de uma Solução Analítica Aproximada para o Sistema Não-Ideal Modelado com Memória de Forma</b>	138
5.2	Busca da solução analítica aproximada na região de ressonância - caso I	139
5.1.1	Análise de estabilidade no estado estacionário	142
5.1.2	Solução especial do regime estacionário	145
5.1.3	Simulações numéricas das soluções dinâmicas do caso I	147
5.2	Busca da solução analítica aproximada na região de ressonância - caso II	156
5.2.1	Análise de estabilidade no estado estacionário	156
5.2.2	Solução especial do regime estacionário	159
5.2.3	Simulações numéricas das soluções dinâmicas do caso II	160
<b>6</b>	<b>Controle Ótimo Linear Realimentado para o sistema com memória de forma com excitação do tipo ideal e não ideal</b>	172
6.1	Formulação linear para sistemas não lineares	173
6.2	Aplicação do controle linear ótimo para a excitação sendo do tipo ideal	177
6.2.1	Análise do efeito de memória de forma (fase martensítica estável)	179
6.2.2	Análise do comportamento pseudoelástico (fase austenítica estável)	183
6.3	Aplicação do controle linear ótimo para a excitação não ideal	187
6.3.1	Aplicação do controle na fase martensítica da liga	190
6.3.2	Aplicação do controle na fase martensítica e austenítica da liga	196
6.3.3	Aplicação do controle na fase austenítica da liga	199
<b>7</b>	<b>Conclusões de Trabalhos Futuros</b>	204
7.1	Conclusões	204
7.2	Trabalhos futuros	207
	<b>Referências Bibliográficas</b>	209
	<b>Apêndice A: Modelagem de um motor CC</b>	214
	<b>Apêndice B: Técnicas de perturbação</b>	217
	<b>Apêndice C: MATDS</b>	222
	<b>Súmula Curricular</b>	228

## Lista de Tabelas

3.1	Valores do parâmetro do material.	29
3.2	Constantes do material para a liga NiTi.	29
3.3	Constantes do material para a liga Cu-Zn-Al-Ni.	30
3.4	Expoentes de Lyapunov.	68
4.1	Propriedades do sistema não ideal.	81
4.2	Tipos de atratores no estado estacionário para $\theta = 0.7$ .	98
4.3	Tipos de atratores no estado estacionário para $\theta = 0.9$	106
4.4	Tipos de atratores no estado estacionário para $\theta = 1.03$	114
4.5	Tipos de atratores no estado estacionário para $\theta = 2$	121
4.6	Tipos de atratores no estado estacionário para $\theta = 3$	127
6.1	Expoentes de Lyapunov para $\theta = 0.7$	183
6.2	Expoentes de Lyapunov para $\theta = 2$	186

## Lista de Figuras

1.1	Efeito da transformação de fase devida à variação de temperatura.	3
1.2	Efeito de Pseudoelasticidade.	4
1.3	Efeito de memória de forma.	6
1.4	Curva característica do motor.	10
2.1	Energia Livre de Helmholtz versus deformação para o modelo de Falk.	16
3.1	Modelo do oscilador com memória de forma.	26
3.2	(a) Plano de fase e (b) espectro de frequência para $\mu = 0$ .	34
3.3	(a) Plano de fase e (b) espectro de frequência para $\mu \neq 0$ .	35
3.4	Efeito da Não – Linearidade, (a) $\theta = 1.04$ , (b) $\theta = 1.3$ , (c) $\theta = 2$ , (d) $\theta = 3$ .	39
3.5	Efeito da Amplitude de excitação: (a) $\theta = 1.3$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$	41
3.6	Efeito do Amortecimento: (a) $\theta = 1.3$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$ .	42
3.7	Amplitude da resposta como uma função da amplitude de excitação para diversos parâmetros de sintonia: (a) $\theta = 1.3$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$ .	43
3.8	(a) Plano de fase, (b) espectro de frequência, (c) mapa de Poincaré e (d) expoente de Lyapunov, para $\theta = 2$ , $\mu = 0.1$ , $\delta = 0.03$ , $\varepsilon = 0.001$ e $\sigma = 0.1$	45
3.9	Fenômeno de salto para a ressonância primaria de um oscilador com memória de forma, (a) $\theta = 1.3$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$	47
3.10	Fenômeno de salto da ressonância primaria de um oscilador com memória de forma: (a) $\theta = 1.3$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$ , para $\sigma = 1$	48
3.11	Regiões onde a resposta subharmonica existe.	54
3.12	Amplitude do termo de oscilação-livre versus o parâmetro de sintonia. (a) $\theta = 1.03$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$ .	55
3.13	Efeito do amortecimento sobre a resposta para $\delta = 0.1$ e $\varepsilon = 0.001$ como os seguintes parâmetro, (a) $\theta = 1.03$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$ .	56
3.14	Amplitude do termo de oscilação-livre pela excitação. (a) $\theta = 1.03$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$ .	57
3.15	Influência do amortecimento sobre a resposta para $\delta = 0.1$ , $\sigma = -4$ , $\varepsilon = 0.001$ e (a) $\theta = 1.03$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$ .	58
3.16	Dinâmica do oscilador para a ressonância subharmonica. (a) Plano de Fase, (b) Espectro de frequência, (c) Mapa de Poincaré para $\delta = 0.1$ , $\sigma = 0.1$ , $\varepsilon = 0.001$	59
3.17	Efeito da Não Linearidade: (a) $\theta = 1.3$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$ .	62

3.18	Efeito da amplitude de excitação: (a) $\theta = 1.3$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$ .	63
3.19	Efeito do amortecimento: (a) $\theta = 1.3$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$ .	64
3.20	(a) Plano de fase, (b) espectro de frequência e (c) Mapa de Poincaré para valores $\sigma = 0.1$ , $\varepsilon = 0.001$ , $\delta = 0.1$ e $\mu = 0.1$	66
3.21	(a) Plano de fase, (b) espectro de frequência e (c) Mapa de Poincaré para valores $\sigma = -1$ , $\varepsilon = 0.001$ , $\delta = 0.1$ e $\mu = 0.1$	66
3.22	(a) Plano de fase, (b) espectro de frequência e (c) Mapa de Poincaré para valores $\sigma = -3.43$ , $\varepsilon = 0.001$ , $\delta = 0.1$ e	67
3.23	(a) Plano de fase, (b) espectro de frequência e (c) Mapa de Poincaré para valores $\sigma = -1.7$ , $\varepsilon = 0.001$ , $\delta = 0.1$ e $\mu = 0.1$	67
3.24	(a) Plano de fase, (b) espectro de frequência e (c) Mapa de Poincaré para valores $\sigma = -3.4$ , $\varepsilon = 0.001$ , $\delta = 0.1$ e $\mu = 0.1$	67
3.25	Fenômeno de salto para a ressonância primária de um oscilador com memória de forma, (a) $\theta = 1.3$ , (b) $\theta = 2$ , (c) $\theta = 2.5$ e (d) $\theta = 3$ .	69
3.26	Plano de fase para o oscilador na fase martensítica sem amortecimento	70
3.27	Plano de fase correspondendo ao centro $C_2$ da figura 3.26.	73
3.28	Plano de fase correspondendo ao centro $C_1$ da figura 3.26.	75
4.1	(a) Modelo real de uma viga com SMA e acoplada a um motor com potência limitada, (b) modelo de parâmetros concentrados do sistema não ideal.	77
4.2	Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de $\xi_1$ e (b) o decréscimo de $\xi_1$ para $\theta = 0.7$ , $\mu = 0.01$	82
4.3	Influência do amortecimento no efeito Sommerfeld para $\theta = 0.7$ : (a) Histórico no tempo para o acréscimo de $\xi_1$ e (b) Histórico no tempo para o decréscimo de $\xi_1$	84
4.4	Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle $\xi_1$ para $\theta = 0.7$	84
4.5	Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de $\xi_1$ e (b) o decréscimo de $\xi_1$ para $\theta = 0.9$ , $\mu = 0.01$	85
4.6	Influência do amortecimento no efeito Sommerfeld para $\theta = 0.9$ : (a) Histórico no tempo para o acréscimo de $\xi_1$ e (b) Histórico no tempo para o decréscimo de $\xi_1$	86

4.7	Dinâmica dos expoentes de Lyapunov versus parâmetro de controle $\xi_1$ para $\theta = 0.9$	87
4.8	Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de $\xi_1$ e (b) o decréscimo de $\xi_1$ para $\theta = 1.03$ , $\mu = 0.01$	88
4.9	Influência do amortecimento no efeito Sommerfeld para $\theta = 1.03$ : (a) Histórico no tempo para o acréscimo de $\xi_1$ e (b) Histórico no tempo para o decréscimo de $\xi_1$	88
4.10	Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle $\xi_1$ para $\theta = 1.03$	89
4.11	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 1.03$ e $\xi_1 = 0.26$ .	89
4.12	Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de $\xi_1$ e (b) o decréscimo de $\xi_1$ para $\theta = 2$ , $\mu = 0.01$	90
4.13	Influência do amortecimento no efeito Sommerfeld para $\theta = 2$ : (a) Histórico no tempo para o acréscimo de $\xi_1$ e (b) Histórico no tempo para o decréscimo de $\xi_1$	91
4.14	Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle $\xi_1$ para $\theta = 2$	92
4.15	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 2$ e $\xi_1 = 1.5$	92
4.16	Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de $\xi_1$ e (b) o decréscimo de $\xi_1$ para $\theta = 3$ , $\mu = 0.01$	93
4.17	Influência do amortecimento no efeito Sommerfeld para $\theta = 3$ : (a) Histórico no tempo para o acréscimo de $\xi_1$ e (b) Histórico no tempo para o decréscimo de $\xi_1$	94
4.18	Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle $\xi_1$ para $\theta = 3$ .	94
4.19	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 3$ e $\xi_1 = 2.125$ .	95
4.20	Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de $\xi_1$ e (b) o decréscimo de $\xi_1$ para $\theta = 0.7$ , $\mu = 0.01$	96

4.21	Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle $\xi_1$ para $\theta = 0.7$ , (a) Expoente de Lyapunov, (b) Zoom dos dois principais expoentes	97
4.22	a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para $\theta = 0.7$ e $\xi_1 = 0.5$	98
4.23	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para $\theta = 0.7$ e $\xi_1 = 0.7$ .	99
4.24	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 0.7$ e $\xi_1 = 0.8218$ .	99
4.25	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 0.7$ e $\xi_1 = 1$ .	100
4.26	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 0.7$ e $\xi_1 = 1.5$ .	100
4.27	Evolução da seção de Poincaré para $\theta = 0.7$ devido à variação da tensão do motor(a) $\xi_1 = 0.5$ , período -1, (b) $\xi_1 = 0.55$ , período -2, (c) $\xi_1 = 0.6$ , período -1, (d) $\xi_1 = 0.7$ , caos, (e) $\xi_1 = 0.79$ , período -2, (f) $\xi_1 = 0.8$ , período -1, (g) $\xi_1 = 0.95$ , período -2, (h) $\xi_1 = 1$ , hipercaos. (i) $\xi_1 = 1.33$ , período -4, (j) $\xi_1 = 1.34$ , período -2, (l) $\xi_1 = 1.45$ , período -1.	102
4.28	Evolução do plano de fase para $\theta = 0.7$ devido à variação da tensão do motor. (a) $\xi_1 = 0.5$ , (b) $\xi_1 = 0.55$ , (c) $\xi_1 = 0.6$ , (d) $\xi_1 = 0.7$ , (e) $\xi_1 = 0.79$ , (f) $\xi_1 = 0.8$ , (g) $\xi_1 = 0.95$ , (h) $\xi_1 = 1$ , (i) $\xi_1 = 1.33$ , (j) $\xi_1 = 1.34$ , (l) $\xi_1 = 1.45$ .	103
4.29	Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de $\xi_1$ e (b) o decréscimo de $\xi_1$ para $\theta = 0.9$ , $\mu = 0.01$	104
4.30	Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle $\xi_1$ para $\theta = 0.9$ , (a) Expoente de Lyapunov, (b) Zoom dos dois principais expoentes	105
4.31	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 0.9$ e $\xi_1 = 0.4$ .	106
4.32	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 0.9$ e $\xi_1 = 0.474$ .	107
4.33	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 0.9$ e $\xi_1 = 0.9$ .	107

4.34	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 0.9$ e $\xi_1 = 1.5$ .	108
4.35	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 0.9$ e $\xi_1 = 1.75$ .	108
4.36	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 0.9$ e $\xi_1 = 1.9$ .	109
4.37	Evolução da seção de Poincaré para $\theta = 0.9$ devido à variação da tensão do motor: (a) $\xi_1 = 0.5$ , período -1, (b) $\xi_1 = 0.65$ , período - 2, (c) $\xi_1 = 0.68$ , período - 1, (d) $\xi_1 = 0.75$ , caos, (e) $\xi_1 = 0.9$ , caos, (f) $\xi_1 = 1.21$ , período - 3, (g) $\xi_1 = 1.3$ , período - 2, (h) $\xi_1 = 1.5$ , período -1, (i) $\xi_1 = 1.66$ , período - 1	110
4.38	Evolução do plano de fase para $\theta = 0.9$ devido à variação da tensão do motor. (a) $\xi_1 = 0.5$ , (b) $\xi_1 = 0.65$ , (c) $\xi_1 = 0.68$ , (d) $\xi_1 = 0.75$ , (e) $\xi_1 = 0.9$ , (f) $\xi_1 = 1.21$ , (g) $\xi_1 = 1.3$ , (h) $\xi_1 = 1.5$ , (i) $\xi_1 = 1.66$	112
4.39	Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de $\xi_1$ e (b) o decréscimo de $\xi_1$ para $\theta = 1.03$ , $\mu = 0.01$	113
4.40	Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle $\xi_1$ para $\theta = 1.03$ , (a) Expoente de Lyapunov, (b) Zoom dos dois principais expoentes	114
4.41	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, para $\theta = 1.03$ , $\xi_1 = 0.26$ .	115
4.42	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 1.03$ e $\xi_1 = 1$ .	115
4.43	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 1.03$ e $\xi_1 = 1.2$ .	116
4.44	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 1.03$ e $\xi_1 = 1.35$ .	116
4.45	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para $\theta = 1.03$ e $\xi_1 = 1.5$ .	117

- 4.46 Evolução da seção de Poincaré para  $\theta=1.03$  devido à variação da tensão do motor: (a)  $\xi_1 = 0.35$ , período -1, (b)  $\xi_1 = 0.36$ , período - 2, (c)  $\xi_1 = 0.37$ , período - 3, (d)  $\xi_1 = 0.38$ , período - 2, (e)  $\xi_1 = 0.41$ , período - 1, (f)  $\xi_1 = 0.71$ , período - 1, (g)  $\xi_1 = 0.75$ , caos, (h)  $\xi_1 = 1.07$ , período - 4, (i)  $\xi_1 = 1.09$ , período - 2, (j)  $\xi_1 = 1.25$ , período - 1, (l)  $\xi_1 = 1.31$ , caos 118
- 4.47 Evolução do plano de fase para  $\theta=1.03$  devido à variação da tensão do motor: (a)  $\xi_1 = 0.35$ , (b)  $\xi_1 = 0.36$ , (c)  $\xi_1 = 0.37$ , (d)  $\xi_1 = 0.38$ , (e)  $\xi_1 = 0.41$ , (f)  $\xi_1 = 0.74$ , (g)  $\xi_1 = 0.75$ , (h)  $\xi_1 = 1.07$ , (i)  $\xi_1 = 1.09$ , (j),  $\xi_1 = 1.25$ , (l)  $\xi_1 = 1.3$ , (m)  $\xi_1 = 1.31$ . 119
- 4.48 Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de  $\xi_1$  e (b) o decréscimo de  $\xi_1$  para  $\theta = 2$ ,  $\mu = 0.01$  120
- 4.49 Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$  para  $\theta = 2$ , (a) Expoente de Lyapunov, (b) Zoom dos dois principais expoentes 121
- 4.50 (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 2$ ,  $\xi_1 = 1$ . 122
- 4.51 (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 2$ ,  $\xi_1 = 1.5$ . 122
- 4.52 (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 2$ ,  $\xi_1 = 2$ . 123
- 4.53 Evolução da seção de Poincaré para  $\theta = 2$  devido à variação da tensão do motor (a)  $\xi_1 = 1$ , período -1, (b)  $\xi_1 = 1.32$ , caos, (c)  $\xi_1 = 1.5$ , caos, (d)  $\xi_1 = 2$ , hipercaos 124
- 4.54 Evolução do plano de fase para  $\theta = 2$  devido à variação da tensão do motor. (a)  $\xi_1 = 1$ , (b)  $\xi_1 = 1.32$ , (c)  $\xi_1 = 1.5$ , (d)  $\xi_1 = 2$  125
- 4.55 Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de  $\xi_1$  e (b) o decréscimo de  $\xi_1$  para  $\theta = 3$ ,  $\mu = 0.01$  126
- 4.56 Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$  para  $\theta = 3$ , (a) Expoente de Lyapunov, (b) Zoom dos dois principais expoentes 126
- 4.57 (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 3$ ,  $\xi_1 = 1.5$  127
- 4.58 (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 3$ ,  $\xi_1 = 2.125$ . 128

4.59	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para $\theta = 3$ , $\xi_1 = 2.8$ .	128
4.60	Evolução da seção de Poincaré para $\theta = 3$ devido à variação da tensão do motor. (a) $\xi_1 = 1.5$ , período -1, (b) $\xi_1 = 1.95$ , período - 1, (c) $\xi_1 = 2$ , período - 2, (d) $\xi_1 = 2.1$ , caos, (e) $\xi_1 = 2.8$ , hipercaos.	129
4.61	Evolução do plano de fase para $\theta = 3$ devido à variação da tensão do motor. (a) $\xi_1 = 1.5$ , (b) $\xi_1 = 1.95$ , (c) $\xi_1 = 2$ , (d) $\xi_1 = 2.1$ , (e) $\xi_1 = 2.8$ .	130
4.62	Histórico da temperatura no tempo.	131
4.63	Histórico no tempo para $\xi_1 = 0.6$	131
4.64	(a) Velocidade angular do motor, (b) Plano de fase e (c) Curva plano de Fase – Temperatura para $\xi_1 = 0.6$ .	132
4.65	Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus $\theta$ para $\xi_1 = 0.6$	133
4.66	Histórico no tempo para $\xi_1 = 0.7$	134
4.67	(a) Velocidade angular do motor, (b) Plano de fase e (c) Curva plano de fase – temperatura para $\xi_1 = 0.7$ .	134
4.68	Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus $\theta$ para $\xi_1 = 0.7$	135
4.69	Histórico no tempo para $\xi_1 = 1.2$	136
4.70	(a) Velocidade angular do motor, (b) Plano de fase e (c) Curva plano de fase – temperatura para $\xi_1 = 1.2$ .	136
4.71	Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus $\theta$ para $\xi_1 = 1.2$	137
5.1	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) amplitude para $\xi_1 = 0.26$ e $\theta = 1.03$	147
5.2	Comparação das soluções na série temporal entre os resultados obtidos via método da média (a) e via integração numérica direta (b)	148
5.3	(a) Comparação das soluções no plano de fase entre os resultados obtidos via método da média (a), via integração direta (b) e (c) Espectro de frequência para a solução analítica.	149
5.4	Efeito Sommerfeld com o tempo para o acréscimo de $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para $\theta = 1.03$	150

5.5	Efeito Sommerfeld com o tempo para o decréscimo de $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para $\theta = 1.03$	150
5.6	Eliminação do efeito Sommerfeld para o acréscimo de $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para $\theta = 1.03$	151
5.7	Eliminação do efeito Sommerfeld para o decréscimo de $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para $\theta = 1.03$	151
5.8	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) amplitude para $\xi_1 = 1.5$ e $\theta = 2$ .	152
5.9	Comparação das soluções na série temporal entre os resultados obtidos (a) via método da média e (b) via integração numérica direta.	152
5.10	(a) Comparação das soluções no plano de fase entre os resultados obtidos via método da média (a) e via integração direta (b) e (b) Espectro de frequência para a solução analítica.	153
5.11	Efeito Sommerfeld com o tempo para o acréscimo de $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para $\theta = 2$	154
5.12	Efeito Sommerfeld com o tempo para o acréscimo de $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para $\theta = 2$	154
5.13	Eliminação do efeito Sommerfeld para o acréscimo de $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para $\theta = 2$	155
5.14	Eliminação do efeito Sommerfeld para o decréscimo de $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para $\theta = 2$	155
5.15	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) amplitude para $\xi_1 = 1.5$ e $\theta = 2$	161
5.16	Comparação no histórico no tempo para (a) solução analítica e (b) numérica	162
5.17	Comparação entre solução analítica e numérica, (a) Plano de fase e (b) espectro de frequência para a solução analítica, (c) plano de fase e (d) espectro de frequência para a solução numérica	163
5.18	Frequência do motor no caso analítico: (a) Histórico no tempo e (b) Zoom na região de ressonância.	164
5.19	Variação do parâmetro de sintonia, (a) Histórico o tempo, b) Zoom da figura (a)	164

5.20	Plano de fase, (a) para o intervalo $0 \leq \tau < 215$ , solução caótica, (b) para $215 < \tau$ solução periódica.	165
5.21	Comparação entre os planos de fase em cinza solução numérica com movimento caótico, e em cor preto solução analítica com comportamento periódico da solução.	166
5.22	(a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) amplitude para $\theta = 3$ e $\xi_1 = 2.125$ .	166
5.23	Comparação no histórico no tempo para (a) solução analítica e (b) numérica	167
5.24	Comparação entre solução analítica e numérica, (a) Plano de fase e (b) espectro de frequência para a solução analítica, (c) plano de fase e (d) espectro de frequência para a solução numérica.	168
5.25	Frequência do motor no caso analítico: (a) Histórico no tempo e (b) Zoom na região de ressonância.	169
5.26	Variação do parâmetro de sintonia, (a) Histórico o tempo, (b) Zoom da figura (a)	169
5.27	Plano de fase, (a) para o intervalo $0 \leq \tau < 110$ , solução caótica, (b) para $110 < \tau$ solução periódica.	170
5.28	Comparação entre os planos de fase em cinza solução numérica com movimento caótico, e em cor preto solução analítica com comportamento periódico da solução	171
6.1	Dinâmica caótica do oscilador com memória de forma para uma excitação do tipo ideal, (a) Plano de Fase, (b) Espectro de frequência para $\theta = 0.7$	180
6.2	(a) Plano de fase do oscilador controlado e (b) espectro de frequência associado ao movimento para $\theta = 0.7$	181
6.3	Histórico no tempo: (a) sistema não controlado e (b) sistema controlado para $\theta = 0.7$	182
6.4	Seção de Poincaré: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico)	182
6.5	Dinâmica caótica do oscilador com memória de forma para uma excitação do tipo ideal, (a) Plano de Fase, (b) Espectro de frequência para $\theta = 2$	184
6.6	(a) Plano de fase do oscilador controlado e (b) espectro de frequência associado ao movimento para $\theta = 2$	185

6.7	Histórico no tempo: (a) sistema não controlado e (b) sistema controlado para $\theta = 2$	185
6.8	Seção de Poincaré: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico)	186
6.9	Sistema não ideal controlado: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase e (c) espectro de frequência para $\theta = 0.7$ e $\xi_1 = 0.7$ .	192
6.10	Histórico no tempo do sistema não ideal: (a) sistema não controlado e (b) sistema controlado para $\theta = 0.7$ e $\xi_1 = 0.7$ .	193
6.11	Seção de Poincaré do sistema não ideal: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico) para $\theta = 0.7$ e $\xi_1 = 0.7$ .	193
6.12	Sistema não ideal controlado: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase e (c) espectro de frequência para $\theta = 0.9$ e $\xi_1 = 1.75$ .	195
6.13	Seção de Poincaré do sistema não ideal: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico) para $\theta = 0.9$ e $\xi_1 = 1.75$	196
6.14	Sistema não ideal controlado: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase e (c) espectro de frequência para $\theta = 1.03$ e $\xi_1 = 1$ .	197
6.15	Histórico no tempo do sistema não ideal: (a) sistema não controlado e (b) sistema controlado para $\theta = 1.03$ e $\xi_1 = 1$ .	198
6.16	Seção de Poincaré do sistema não ideal: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico) para $\theta = 1.03$ e $\xi_1 = 1$ .	198
6.17	Sistema não ideal controlado: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase e (c) espectro de frequência para $\theta = 2$ e $\xi_1 = 1.5$ .	200
6.18	Seção de Poincaré do sistema não ideal: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico) para $\theta = 2$ e $\xi_1 = 1.5$ .	201
6.19	Sistema não ideal controlado: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase e (c) espectro de frequência para $\theta = 3$ e $\xi_1 = 2.125$ .	202
6.20	Seção de Poincaré do sistema não ideal: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico) para $\theta = 3$ e $\xi_1 = 2.125$ .	203

## Nomenclatura

$A_r$	Área do elemento com memória de forma.
$A$	Austenita
$A_s$	Temperatura inicial de formação austenita.
$A_f$	Temperatura final de formação austenita.
$a$	Amplitude da resposta.
$a_c$	Amplitude crítica no ponto de máximo.
$a_M$	Constante positiva do material do modelo de Cinética de transformação assumida.
$a_p$	Pico de amplitude na curva de resposta em frequência.
$b$	Constante positiva do material com memória de forma do modelo polinomial.
$b_M$	Constante positiva do material do modelo de Cinética de transformação assumida.
$c$	Coefficiente de amortecimento viscoso linear.
$D$	Tensor elástico.
$D_n$	Derivada em relação às escalas de tempo.
$E_A$	Módulo de elasticidade do material correspondente a fase austenítica.
$E_c$	Energia Cinética.
$E_M$	Módulo de elasticidade do material correspondente a fase martensítica.
$E_p$	Energia Potencial.
$e$	Constante positiva do material com memória de forma do modelo polinomial.
$e_a$	Força contra – eletromotriz.
$H(\dot{\phi})$	Torque resistente do motor.
$I_a$	Corrente elétrica.
$J$	Matriz Jacobiana.
$K$	Força restauradora da mola com memória de forma.
$K_b$	Constante da tensão elétrica do motor.
$K_m$	Constante de torque do motor.
$L$	Comprimento do elemento com memória de forma.
$L_a$	Indutância elétrica do motor.
$M$	Massa do conjunto base + motor
$M$	Martensita maclada ou induzida por temperatura.
$M^+$	Martensita não-maclada induzida por tensão trativa.

$M^-$	Martensita não-maclada induzida por tensão compressiva.
$M_s$	Temperatura inicial de formação martensita.
$M_f$	Temperatura final de formação martensita.
MME	Método das Múltiplas Escalas.
$m$	Massa desbalanceadora,
$m$	Massa do oscilador com excitação ideal.
$p$	Amplitude da força de excitação externa.
$q$	Constante positiva do material com memória de forma do modelo polinomial.
$R_a$	Resistência elétrica do motor.
$r$	Excentricidade da massa desbalanceadora.
$r_1, r_2$	Coefficientes de acoplamento motor – estrutura do caso I.
$r_3, r_4$	Coefficientes de acoplamento motor – estrutura do caso II.
SMA	Liga com memória de forma (Shape Memory Alloy).
$S(\dot{\phi})$	Torque ativo gerado pelo circuito elétrico do motor.
$T$	Temperatura.
$T_A$	Temperatura acima da qual a austenita é estável.
$T_M$	Temperatura abaixo da qual a martensita é estável.
$T_m$	Torque desenvolvido pelo motor.
$T_n$	Escala de tempo.
$U$	Tensão elétrica aplicada no motor.
$V$	Função de Lyapunov.
$\theta$	Relação entre a temperatura imposta no sistema e a temperatura martensita.
$\omega_0$	Frequência natural.
$\varepsilon$	Deformação.
$\varepsilon$	Parâmetro responsável pelo balanço de ordem.
$\varepsilon_R^T$	Deformação residual máxima a tração.
$\psi$	Energia Livre de Helmholtz.
$\rho$	Massa específica.
$\sigma$	Tensão.
$\sigma^{CRIT}$	Tensão crítica.
$\sigma$	Parâmetro de sintonia.
$\zeta$	Fração martensita.

$\zeta_s$	Fração martensita induzida por tensão do modelo de Brinson.
$\zeta_T$	Fração martensita induzida por temperatura do modelo de Brinson.
$\Theta$	Tensor termoelástico.
$\omega$	Frequência angular de excitação externa.
$\tau$	Tempo adimensional.
$\mu$	Coefficiente de amortecimento adimensional.
$\alpha$	Constante adimensional positiva do material.
$\alpha_1, \alpha_2$	Constante adimensional do material na fase martensítica no caso ideal.
$\gamma$	Constante adimensional positiva do material.
$\gamma_1, \gamma_2$	Constante adimensional do material na fase martensítica no caso ideal.
$\delta$	Amplitude da força de excitação externa adimensional.
$\varpi$	Frequência angular de excitação externa adimensional.
$\beta$	Fase.
$\phi$	Deslocamento angular do rotor.
$\xi_1$	Parâmetro de controle (relativo à tensão de alimentação na armadura do motor elétrico ou torque constante).
$\xi_2$	Valor escolhido para um determinado tipo de motor.
$\Omega$	Velocidade angular do motor de corrente contínua utilizando o método da média.
$\Omega_c$	Frequência crítica no ponto de máximo da curva de resposta em frequência.
$\Omega_p$	Frequência rotacional correspondente ao pico na curva de resposta em frequência.
$\Omega_T$	Tensor de transformação.
$\vartheta_i$	Expoentes de Lyapunov.
$\eta_1, \eta_2$	Constante adimensional do material na fase martensítica no caso ideal.
$\lambda$	Autovalores da matriz Jacobiana.

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo, introdutório, citam – se os tipos de problemas que aparecerão neste trabalho e sua organização para atingir os objetivos que serão propostos.

### 1.1 Preliminares

Os primeiros passos na descoberta das propriedades das ligas com memória de forma foram dados por A. Ölander em 1932. Este autor constatou a reversibilidade da transformação numa liga Au - Cd por observação metalográfica e através do registro da variação da resistividade. Greninger e Mooradian (1938) observaram, numa liga de Cu - Zn, a formação e o desaparecimento de martensita, descendo e subindo a temperatura, respectivamente. O efeito de memória de forma propriamente dito foi posto em evidência por Kurdjumov & Khandros (1949) e, depois, também por Chang e Read (1951) numa barra de Au - Cd. Contudo, só em 1962, quando Buehler e seus colaboradores no “Naval Ordnance Laboratory”, na cidade de Silver Springs, Maryland, USA, descobriram o efeito de memória de forma numa liga de Ni - Ti, é que a investigação, tanto dos aspectos metalúrgicos, como às potenciais aplicações práticas das ligas, começaram a despertar o interesse da comunidade científica. No espaço de 10 anos surgiram então no mercado uma grande variedade de produtos comerciais e os estudos do efeito de memória de forma foram então intensificados.

O campo de pesquisa relacionado aos materiais inteligentes está sendo muito explorado nas últimas décadas, em função de suas excepcionais propriedades. Estes materiais, em geral são utilizados como sensores e atuadores em estruturas denominadas como inteligentes, onde possuem a capacidade de alterar sua forma, rigidez, freqüências naturais, dentre outras propriedades mecânicas, mediante a imposição de campos elétricos, eletromagnéticos, de temperatura ou de tensão, Paiva (2004).

Por outro lado, à medida que Poincaré identificava uma nova propriedade do comportamento de equações diferenciais, intrínscica a alguns tipos de sistemas, Sommerfeld em 1904 dava início a uma nova classe de sistemas dinâmicos denominados de não ideais. Em seu experimento constituído por uma mesa e um motor elétrico de corrente contínua, o qual servia como fonte de excitação, ele observou que a velocidade do motor não era uma função

suave que dependia apenas da energia inserida ao sistema. Quando a amplitude atingia o seu valor máximo, na região de ressonância, o gasto de energia crescia aproximadamente o dobro. Por outro lado, após a ressonância, a amplitude decrescia bruscamente, enquanto a velocidade do motor crescia rapidamente. A este fenômeno atribuiu – se o nome de Efeito Sommerfeld. Observou-se também a dependência da curva de ressonância com relação ao sentido da variação da frequência da força de excitação, que a ocorrência de oscilações instáveis em um sistema linear está intimamente ligada às propriedades do motor elétrico, o fenômeno do salto (“jump”) durante a passagem de um regime ressonante para um regime não ressonante.

Em 1969, Kononenko dedica um livro a sistemas dinâmicos com fonte de potência limitada intitulado: Vibrações em sistemas de potência limitada. Nele há demonstração, através do método de perturbação do comportamento de sistemas excitados por fontes de potência limitada com poucos graus de liberdade. Kononenko estudou, principalmente de forma analítica, os problemas de vibrações de sistemas não ideais, vindo a realizar alguns experimentos, porém poucas simulações numéricas foram realizadas devido a recursos limitados da época. Recentemente Balthazar et. al. (2003, 2004, 2005) publicou uma revisão completa sobre o tema.

A seguir, apresentam – se aspectos gerais das ligas com memória de forma e de sistemas vibratórios do tipo não ideal. Posteriormente destacam – se os objetivos desta dissertação e a organização dos capítulos para atingir estes objetivos.

## **1.2 Características gerais das ligas com memória de forma**

De um modo bastante simplificado pode – se dizer que as propriedades peculiares das ligas com memória de forma estão relacionadas à reversibilidade da transformação de fase martensita, isto é, o processo de transformação dos sólidos<sup>1</sup> entre uma fase cristalograficamente mais ordenada, a austenita, e uma fase cristalograficamente menos ordenada, a martensita. Tipicamente, a austenita é estável em altas temperaturas, enquanto a martensita é estável a baixas temperaturas. Estas transformações podem ser induzidas tanto termicamente quanto pela tensão aplicada, Brinson (1993).

### **1.2.1 Transformação de fase devida à variação de temperatura**

A transformação de fase induzida por temperatura nas ligas com memória de forma ocorre em três estágios, dois deles relacionados aos trechos lineares que correspondem à expansão

térmica das fases austenítica e martensítica e uma região onde há um laço de histerese relacionada aos trechos de transformação de fase (Figura 1.1). A área compreendida por este laço representa a energia dissipada durante o processo.

Esta transformação de fase ocorre da seguinte maneira. Primeiramente considera-se uma espécime de SMA a uma certa temperatura e livre de tensões. Quando a espécime apresenta uma microestrutura martensítica ( $M$ ), estrutura de menor simetria, e é aquecida a partir do ponto B da figura 1.1, dá-se início a uma mudança estrutural para uma microestrutura austenítica ( $A$ ), estrutura de alta simetria, que começa a partir da temperatura  $A_s$ . Esta mudança de fase é completamente feita quando atinge-se a temperatura  $A_f$ , que é a temperatura final de transformação, ocorrendo assim uma transformação ( $M \rightarrow A$ ), que corresponde ao laço de histerese entre os pontos C e D. De maneira análoga, quando o espécime se encontra na fase austenítica (ponto A) a uma temperatura  $M_s$ , que é a temperatura de início de transformação, e é resfriado começa uma mudança estrutural na liga até alcançar a temperatura  $M_f$ , que é a temperatura final de transformação, esta transformação martensítica corresponde ao laço de histerese na figura 1.1 entre os pontos A e B ocorrendo assim uma transformação ( $A \rightarrow M$ ), nesta transformação a SMA que anteriormente apresentava uma microestrutura austenítica passa agora a exibir uma microestrutura martensítica ( $M$ ) estável no ponto B.

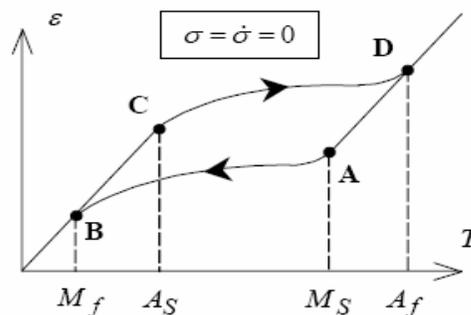


Figura 1.1: Efeito da transformação de fase devida à variação de temperatura

<sup>1</sup>Transformação de fase dos sólidos podem ser de dois tipos: difusão e displacivas. A transformação por difusão são aquelas que conduzem à formação de uma nova fase através da migração atômica que ocorre para distâncias relativamente grandes. Os cristais da nova fase formam-se por Nucleação e Crescimento e por isso tem uma composição química diferente da fase mãe. Por outro lado, as transformações displacivas ou martensíticas conduzem à formação de uma nova fase, mais estável, através de uma reordenação atômica a distâncias curtas e a nova fase tem a mesma composição química da fase mãe.

## 1.2.2 Pseudoelasticidade

As ligas com memória de forma permitem um segundo recurso de transformação de fase, que depende da tensão imposta sobre o material de forma. Esta classe de comportamento deve o seu nome ao fato de as ligas com memória de forma poderem sofrer uma deformação muito extensa que é total ou parcialmente recuperável, também em grande extensão. O fenômeno da pseudoelasticidade ocorre a temperaturas acima de  $A_f$  e nesta situação a fase austenítica (A) é estável.

Assim sendo, quando considera – se uma dada temperatura  $T > A_f$ , o material na fase austenítica é sujeito a um carregamento mecânico, o material se comporta elasticamente até uma tensão crítica ( $\sigma^{CRIT}$ ) seja alcançada sendo representada pelo ponto A na figura 1.2, assim inicia – se uma transformação de fase austenítica em martensítica induzida por tensão ( $A \rightarrow M^+$ ) que corresponde ao laço de histerese entre os pontos A e B da figura 1.2.

Ao descarregar, a martensite induzida por tensão ( $M^+$ ) transforma-se de novo em austenite (segmento CD) acontecendo uma transformação inversa ( $M^+ \rightarrow A$ ) e ocorrendo assim um retorno à forma inicial, não por elevação da temperatura, mas sim por descarga do carregamento aplicado.

Este efeito, que confere ao material uma elevada elasticidade é conhecido como pseudoelasticidade. A pseudoelasticidade é um fenômeno não-linear. È por isso difícil de definir o módulo de Young do material neste domínio de temperaturas, pois apresenta uma dependência tanto da temperatura como da deformação.

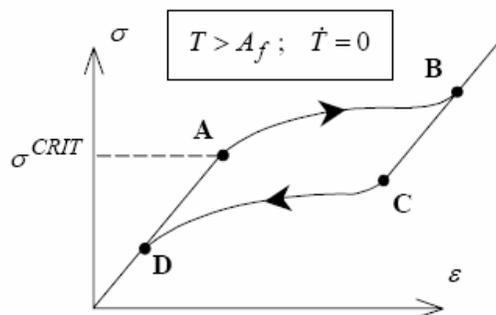


Figura 1.2: Efeito de Pseudoelasticidade.

### 1.2.3 Efeito de memória de forma

Este efeito é observado quando se efetua um carregamento termomecânico compreendendo

- um arrefecimento, sem tensões aplicadas, a partir de uma temperatura  $T_1 > A_f$  até uma temperatura  $T_2 < M_f$ ,

- aplicação de uma tensão ( $\sigma$ ) crescente, a uma temperatura  $T_2 < M_f$ ,

- um reaquecimento até uma temperatura  $T_1 > A_f$  sem tensão aplicada.

A aplicação de uma tensão crescente a uma temperatura  $T_2 < M_f$  dá origem a uma deformação crescente. O andamento da curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  é do tipo da indicada na figura 1.3. Durante o carregamento esta curva apresenta semelhanças com a que é observada no regime pseudoelástico. Só que quando se descarrega a amostra, obtém-se um retorno quase elástico, permanecendo uma deformação residual  $\varepsilon_R^T$  devida à reorientação das variantes de martensite durante o carregamento.

O efeito de memória de forma simples é observado para um carregamento termomecânico correspondente à seqüência (a) + (b) + (c):

- na etapa (a) forma-se martensite, mas a deformação de transformação é nula,
- durante a etapa (b) não ocorre transformação de fase, mas sim reorientação (induzida pela tensão aplicada) das variantes formadas durante o arrefecimento (a), dando origem a uma deformação residual,  $\varepsilon_R^T$ ,
- durante a etapa (c) esta deformação residual desaparece quando tem lugar a transformação inversa martensite  $\rightarrow$  austenite, induzida pelo reaquecimento até uma temperatura  $T > A_f$ .

A designação de efeito de memória de forma simples (“one-way shape memory effect”) está ligada ao fato de a mudança de forma  $\varepsilon_R^T$ , introduzida durante a etapa (b), desaparecer por reaquecimento a  $T > A_f$ , mas o arrefecimento posterior até uma temperatura inferior a  $M_f$  não trazer nova alteração de forma.

Na grande maioria dos casos, o efeito de memória de forma manifesta-se num único sentido: ao arrefecer o material não sofre nenhuma alteração de forma, embora ocorra uma transformação em martensite. Quando a martensite é deformada, essa deformação persiste até

que o material, ao ser sujeito a um aquecimento que o leva até ao domínio austenítico, recupera a forma inicial.

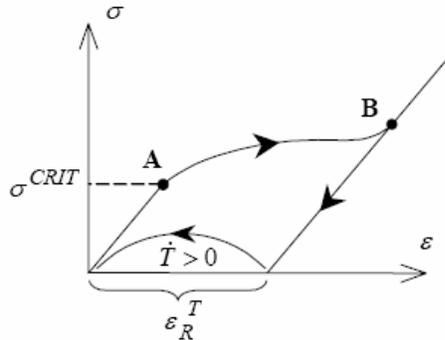


Figura 1.3: Efeito de memória de forma

A modelagem matemática das ligas com memória de forma será discutida no decorrer do texto da dissertação

A seguir descrevem – se as características de sistemas do tipo ideal e não ideal que serão utilizados neste trabalho levando – se em conta os efeitos de memória de forma.

### 1.3 Sistemas dinâmicos do tipo ideal e não ideal.

Uma das classificações das fontes de energia, e a que nos interessa, é aquela que divide as fontes de energia em ideais e não ideais. Criteriosamente essa classificação leva em conta os efeitos experimentados por um acoplamento ou não do sistema vibrante e do motor atuante no sistema. Por isso, as fontes de energia ideais são aquelas nas quais esse acoplamento não é considerado e, portanto a análise do sistema é simplificada significativamente.

#### 1.3.1 Sistema dinâmico do tipo ideal

Quando a excitação não é influenciada pela resposta, é dita uma excitação ideal ou uma fonte ideal de energia. Por outro lado, quando uma excitação é influenciada pela resposta do sistema, é dita não ideal e desta forma pode ser expressa na forma temporal. Assim, dependendo da excitação, refere-se a um sistema dinâmico como ideal ou não ideal. O comportamento ideal de sistemas é bem conhecido na atual literatura, mas há poucos resultados sobre os não ideais.

O comportamento do sistema dinâmico se afasta do caso ideal à medida que a potência suprida torna-se mais limitada. Para sistemas dinâmicos não ideais, deve-se adicionar uma equação que descreve como a fonte de energia passa essa energia às equações que governam o correspondente sistema dinâmico ideal.

A seguir, disserta-se sobre uma revisão da literatura referente ao sistema não ideal.

### **1.3.2 Sistema Dinâmico do tipo não ideal**

Pesquisando a vasta bibliografia disponível, constata – se que é usual desconsiderar, no modelo matemático, a influência do movimento do próprio sistema em sua excitação. Todavia, em muitos casos, esta simplificação, no modelo matemático, não é razoável, devendo-se levar em conta que a excitação ou sua fonte, é influenciada pela própria resposta do sistema. Este fato prejudica a formulação dos modelos matemáticos da Teoria de Vibrações tradicional, necessitando - se estabelecer uma formulação mais realística que leve em conta a interação entre as variáveis de controle, e as de estado, da excitação, com as de estado do sistema físico estrutural. Tem - se assim, um sistema vibratório não ideal, ou um sistema com fonte de excitação, não ideal. O sistema ideal é o tradicional onde não existe este fenômeno. Entenda, que a máquina não ideal é uma conceituação que depende fundamentalmente da estrutura que a suporta. Nota – se características importantes deste tipo de modelo matemático de sistema dinâmico, provenientes da interação da estrutura com a fonte de excitação, tais como:

- Variações bruscas (saltos ou “jumps”) da amplitude de deslocamento da estrutura e da frequência de excitação no caso particular em que considera – se a condição estacionária do movimento;
- Descontinuidade da curva amplitude versus frequência;
- Influência do perfil da curva “amplitude versus frequência” quando o operador altera a velocidade do motor elétrico, em acréscimos e/ou decréscimos.
- Dependência destes efeitos com as curvas características eletromecânicas do motor.

Portanto, percebe – se que os sistemas dinâmicos, modelados matematicamente, como sendo não ideais, possuem um grau de liberdade (ou mais dependendo do número de motores presentes no sistema) superior ao sistema ideal correspondente.

Essa relação intrínseca do sistema vibratório com a sua fonte de energia torna a dinâmica desse sistema bastante complexa com a ocorrência de alguns fenômenos, principalmente perto da região da ressonância, como, por exemplo, o aumento da potência exigida pela fonte, o fenômeno do salto e caos. Os dois primeiros são manifestações de um efeito descoberto por Sommerfeld e, portanto denominado, em sua homenagem, de Efeito Sommerfeld. Já a ocorrência do caos nos sistemas não ideais está associada, tanto a presença de termos não - lineares quanto à presença de pontos de bifurcação e surgimento de regiões de instabilidade e regimes não - estacionários na região da ressonância. Por isso, a suma importância de se estudar o sistema nessa região.

Ressalta-se que o efeito Sommerfeld surge ao se elevar continuamente a tensão de alimentação do motor, estando esse com frequência de rotação próxima a região de ressonância do sistema, provoca – se o aumento da sua rotação, até o momento que essa se estabiliza em torno de um determinado valor (igual a da frequência natural do sistema). A partir deste instante, sucessivos acréscimos da tensão somente elevam a potência elétrica absorvida pelo motor, que não é mais canalizada para alterar a sua rotação, mas sim para aumentar as amplitudes de vibração da estrutura, Palácios (2002). O processo possui um limite: quando a estrutura não é mais capaz de absorver a energia cedida pelo motor, a rotação dispara, atingindo, após certo período, valores estáveis e proporcionais a tensão de alimentação.

Nota - se que as equações governantes do movimento, representativa do sistema dinâmico não ideal de vibrações, podem se esquematizadas, modelados matematicamente, da seguinte forma, Balthazar e Brasil (2001):

1 – “**primeiro conjunto de equações**”:

Equações dinâmicas da “estrutura vibratória” em  $\mathbf{x}$  + termos interação (termos em  $\mathbf{x}$  e em  $\varphi$ ) = equações da excitação externa.

2- “**segundo conjunto de equações**”:

equações de rotação do eixo do motor ( termos em  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  ) + equações características do motor ( termos em  $L(\frac{d\varphi}{dt})$  ) + outros termos de interação( em  $\mathbf{x}$  e em  $\varphi$  ) = 0.

onde  $\frac{d\varphi}{dt}$  é a velocidade angular do eixo do rotor e,  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  a aceleração correspondente, onde se supôs a existência de um único motor.

Note o fato importante de que as linearidades ou não-linearidades vêm da modelagem matemática da estrutura, no caso do problema não ideal a presença de, por exemplo, uma única fonte de energia, em geral contribui com a ação de não-linearidades do tipo quadráticas, presente no termo de energia cinética devido ao desbalanceamento do motor de corrente contínua, Nayfeh e Mook (1979).

Ressalta - se que as vibrações oriundas dos movimentos de aceleração (partida) e desaceleração (desligamento) de motores elétricos são representadas pela função  $T_m$ , ou seja, ela representa o torque desenvolvido pelo motor elétrico e a curva característica do motor relaciona o torque  $T_m$  com a velocidade de rotação angular. Cada ponto, desta curva, considerada, pode ser obtido da seguinte maneira: Mantém-se a velocidade angular  $\frac{d\varphi}{dt}$  constante, enquanto se determina o torque no eixo do motor. Como cada ponto gira a uma velocidade angular constante, essa curva é chamada de característica estática, determinando seu funcionamento em estado estacionário.

Na realidade, todo motor possui uma família destas curvas, em discussão, e todas elas representam a mesma relação de grandezas, mas a cada uma corresponde um certo valor de regulação.

Imagine-se, por exemplo, que um motor possua uma família de curvas, as quais são diferenciadas variando - se a tensão elétrica  $U$  que é aplicada aos seus terminais. Cada posição de controle de regulação com o qual se aumenta ou se diminui a tensão elétrica,

produz uma correspondente curva característica, relacionadas, cada uma delas, a um valor de potência constante, mas diferentes entre si. O motor CC possui uma família de curvas características estáticas, sendo cada uma associada a uma potência e definida através da variação de um parâmetro de regulação ou controle do motor. A forma de regulação, mais usual, é a variação de tensão aplicada aos terminais do motor, a qual controla a velocidade de rotação.

A Figura 1.4 ilustra o plano torque versus frequência de rotação.

$$T_m = \xi_1 + \xi_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

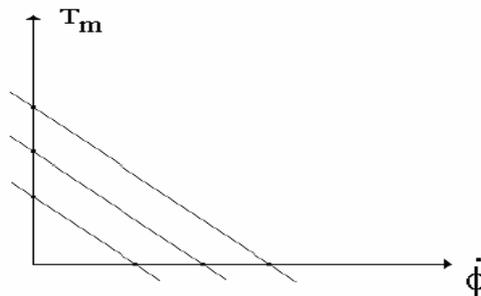


Figura 1.4: Curva característica do motor

No Apêndice A, mostra – se a dedução das curvas características estáticas do motor de corrente contínua.

A seguir, discute – se o problema não ideal na região de ressonância.

## 1.4 Passagem e captura pela ressonância

Finalmente, mencionam - se, alguns conceitos para sistemas dinâmicos não ideais, na região de ressonância, que é definida por:

$$\frac{d\phi}{dt} - \omega_0 = O(\epsilon) \quad (1.2)$$

onde,  $\epsilon$  é um pequeno parâmetro e,  $\omega_0$  é a frequência natural do sistema dinâmico vibratório. Supondo - se que o sistema dinâmico, em questão, partisse do repouso, a velocidade angular

$\frac{d\varphi}{dt}$  do eixo do rotor crescerá até atingir a região de ressonância. Assim, dependendo das condições iniciais e dos parâmetros físicos, tais como:

- Massa desbalanceada;
- Massa do motor;
- Momento de inércia do rotor;
- Excentricidade da massa desbalanceada;
- Constantes de torque desenvolvido pelo motor;

A tensão aplicada nos terminais do motor,  $\frac{d\varphi}{dt}$  continuaria crescendo além da região de ressonância (**fenômeno da passagem pela ressonância**) ou, permaneceria próximo à frequência natural  $\omega_0$  do sistema (**fenômeno da captura pela ressonância**).

O tempo de passagem pela ressonância, dependerá também das condições iniciais do sistema. O primeiro autor a sistematizar estas propriedades dos modelos matemáticos, não ideais, foi Kononenko (1969). Atualmente, uma completa revisão deste assunto, considerando o período de 1904 - 2003, pode ser encontrado em Balthazar et al. (2004, 2005), entre outros.

Ressalta – se que em De Mattos et. al. (1997) refez o experimento de Sommerfeld, com sucesso e constatou os resultados que foram obtidos anteriormente, mencionados por Kononenko. Além destes resultados, constatou – se que o modelo matemático não ideal deveria ter não linearidades quadráticas (oriundas do motor de corrente contínua) e cúbicas da mesma ordem de grandeza, fato importante na modelagem matemática deste tipo de problema.

A seguir, mencionam – se os objetivos do presente trabalho.

## 1.5 Objetivos do trabalho

O objeto deste trabalho é o de pesquisar um sistema dinâmico constituído de uma massa acoplada em uma viga constituída por um material com memória de forma, onde o sistema é fixado em uma base e a viga sustenta uma massa. A primeira análise é feita com uma excitação externa no sistema sendo uma função harmônica (sistema ideal), posteriormente é abordado uma segunda situação onde a excitação externa é do tipo não ideal, onde um motor

elétrico de corrente contínua com potência limitada é acoplado à massa com a intensão de perturbar o sistema e promover oscilações.

Deste modo, os principais objetivos desta dissertação podem ser resumidos entre os seguintes tópicos:

- Obtenção da solução analítica aproximada de um oscilador com memória de forma para o caso ideal. Como a solução numérica do oscilador com memória de forma já é conhecida, devido aos vários trabalhos publicados, nossa proposta nesta primeira parte da dissertação foi o de encontrar uma solução analítica deste problema. Para este fim, utiliza – se uma técnica de perturbação conhecida como o método das múltiplas escalas, e desta forma foi realizado um estudo da dinâmica não linear do oscilador por outro ponto de vista, distinto do conhecido na literatura corrente.
- Elaboração de um modelo matemático do sistema não ideal que consiste de um sistema formado por um motor elétrico de corrente contínua com desbalanceamento e de potência limitada, sustentado por uma estrutura e preso a uma viga com memória de forma. Trata – se de novidade na literatura corrente.
- Realização de um estudo numérico – analítico de vibrações não lineares que podem ocorrer na interação entre a viga com memória de forma e um motor de corrente contínua com desbalanceamento.
- O controle de vibrações mecânicas para os modelos matemáticos apresentados será realizado utilizando o método de controle ótimo linear com realimentação proposto por Rafikov e Balthazar (2005, 2007), numa extensão de trabalho anterior, Rafikov e Balthazar (2004) que tem – se demonstrado ser eficaz.

A seguir, descreve – se como será esquematizado o conteúdo do trabalho.

## **1.6 Apresentação dos capítulos**

Esta dissertação de mestrado é desenvolvida em sete capítulos, que abrange os seguintes conteúdos:

No capítulo 1, é apresentada uma visão geral tanto do surgimento bem como as propriedades dos materiais com memória de forma, e são mostrados também alguns aspectos dos sistemas não ideais.

No capítulo 2 é apresentada uma revisão de alguns modelos constitutivos das ligas com memória de forma, inclusive o modelo que será adotado para a formulação das equações matemáticas dos capítulos seguintes deste trabalho.

No capítulo 3 é utilizado o método das múltiplas escalas visando à obtenção de uma solução analítica do oscilador com memória de forma com excitação ideal. Ainda neste capítulo, são apresentadas simulações numéricas visualizando a dinâmica não linear do sistema para diferentes temperaturas, tais como plano de fase, espectros de frequência, expoentes de Lyapunov e mapa de Poincaré. O gráfico de resposta em frequência é apresentado para ilustrar o fenômeno de salto e diagrama de bifurcação.

No capítulo 4, é apresentada a equação de movimento do sistema não ideal obtida através das equações de Lagrange. Resultados numéricos são apresentados utilizando a integração direta usando o integrador Adams – Bashforth – Moulton, ODE 113 do MATLAB®, com passo de integração variável, novamente aqui é mostrada a influência da temperatura na análise da dinâmica do sistema.

No capítulo 5 é apresentado o método da média aplicado ao sistema não ideal para obter a solução analítica aproximada do sistema, é relevante aqui destacar o desempenho deste método na solução do sistema de equações diferenciais não lineares e não ideais.

No capítulo 6 é apresentada a técnica para encontrar um controle ótimo linear com realimentação primeiramente para o sistema com excitação ideal e posteriormente para o caso não ideal.

No capítulo 7 apresentam – se as discussões finais, conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

A seguir, listam – se as principais referências bibliográficas utilizadas no decorrer desta pesquisa e, os apêndices que completam o trabalho. Inclui – se também a súmula curricular com os principais trabalhos publicados e/ou submetidos.

## **Capítulo 2**

### **Revisão Bibliográfica de Modelos Constitutivos Usuais para as Ligas com Memória de Forma**

Para se utilizar completamente o potencial das ligas com memória de forma, é necessário ter – se um bom entendimento de seu comportamento mecânico sobre a ação de um carregamento térmico e mecânico. As equações constitutivas das ligas com memória de forma são muito mais complicadas que a maioria dos materiais comuns em ciências de engenharia. Por as ligas com memória de forma possuírem um comportamento não usual, que não havia sido encontrado anteriormente, estimulou vários pesquisadores da comunidade científica a observar atentamente este novo campo de pesquisa científico e tecnológico. Por esta razão, a modelagem constitutiva das ligas com memória de forma tem sido, e ainda é, o foco de muitas pesquisas, em curso.

Diversos modelos baseados em várias teorias têm sido propostos. Este capítulo tem por objetivo descrever alguns destes modelos para as ligas com memória de forma, que será utilizado posteriormente. Os modelos aqui abordados serão descritos de forma sucinta nas respectivas seções, da seguinte forma:

#### **2.1 Modelo Polinomial**

#### **2.2 Modelo com cinética de transformação de fase assumida.**

##### **2.2.1 Modelo de Tanaka**

##### **2.2.2 Modelo de Boyd e lagoudas**

##### **2.2.3 Modelo de Liang e Rogers**

##### **2.2.4 Modelo de Brinson**

#### **2.3 Modelo constitutivo considerando a assimetria entre tração – compressão e plasticidade**

## 2.1 Modelo polinomial

O modelo polinomial proposto por Falk e colaboradores é baseado na teoria de Devonshire e considera uma energia livre na forma polinomial. Inicialmente o modelo proposto por Falk (1980 e 1983) foi utilizado para casos uni – dimensionais, e sendo mais tarde estendido para um contexto tri – dimensional, Falk e Konopka (1990). O modelo polinomial desconsidera tanto variáveis internas quanto um potencial de dissipação para descrever os efeitos de pseudoelasticidade e de memória de forma. Deste modo, o modelo considera somente as variáveis de estado: deformação ( $\varepsilon$ ) e temperatura ( $T$ ).

A forma da energia livre de Helmholtz ( $\psi$ ) foi escolhida de tal maneira de que há pontos de mínimo e máximo representando estabilidade e instabilidade de cada fase da liga com memória de forma. Usualmente, no modelo uni – dimensional proposto para as ligas com memória de forma, Savi e Braga (1993), três fases são consideradas: austenita ( $A$ ) e duas variantes da fase martensita ( $M^+$ ,  $M^-$ ). A energia livre é escolhida de tal forma, que para altas temperaturas ( $T > T_A$ ), há somente um ponto de mínimo desaparecendo a deformação, representando o equilíbrio da fase austenítica. Por outro lado, em baixas temperaturas ( $T < T_M$ ), a fase martensítica é estável, e a energia deve ter dois pontos de mínimo desaparecendo a deformação. Para temperaturas intermediárias ( $T_M < T < T_A$ ), a energia livre deve ter pontos de equilíbrio correspondendo a ambas às fases.

Portanto, a energia livre é definida como uma equação polinomial do sexto grau, em que há pontos de mínimo e máximo representando cada fase de estabilidade e instabilidade das ligas. Logo, o potencial de energia livre é definido como sendo:

$$\rho\psi(\varepsilon, T) = \frac{1}{2}q(T - T_M)\varepsilon^2 - \frac{1}{4}b\varepsilon^4 + \frac{b^2}{24q(T_A - T_M)}\varepsilon^6 \quad (2.1)$$

onde  $q$  e  $b$  são constantes positivas,  $T_A$  é a temperatura sobre a qual a fase austenítica é estável e  $T_M$  é a temperatura abaixo a qual a fase martensítica é estável. Assim, a equação constitutiva é dada por,

$$\sigma = q(T - T_M)\varepsilon - b\varepsilon^3 + \frac{b^2}{4q(T_A - T_M)}\varepsilon^5 \quad (2.2)$$

Para analisar os resultados dados pelo modelo polinomial de Falk, testes qualitativos para diferentes temperaturas são feitos usando as seguintes propriedades:

$$q = 523.29 \frac{MPa}{K}, \quad b = 1.868 \times 10^7 MPa, \quad T_M = 288K, \quad T_A = 364.3K.$$

A figura 2.1 mostra a energia livre pela deformação para três diferentes temperaturas.

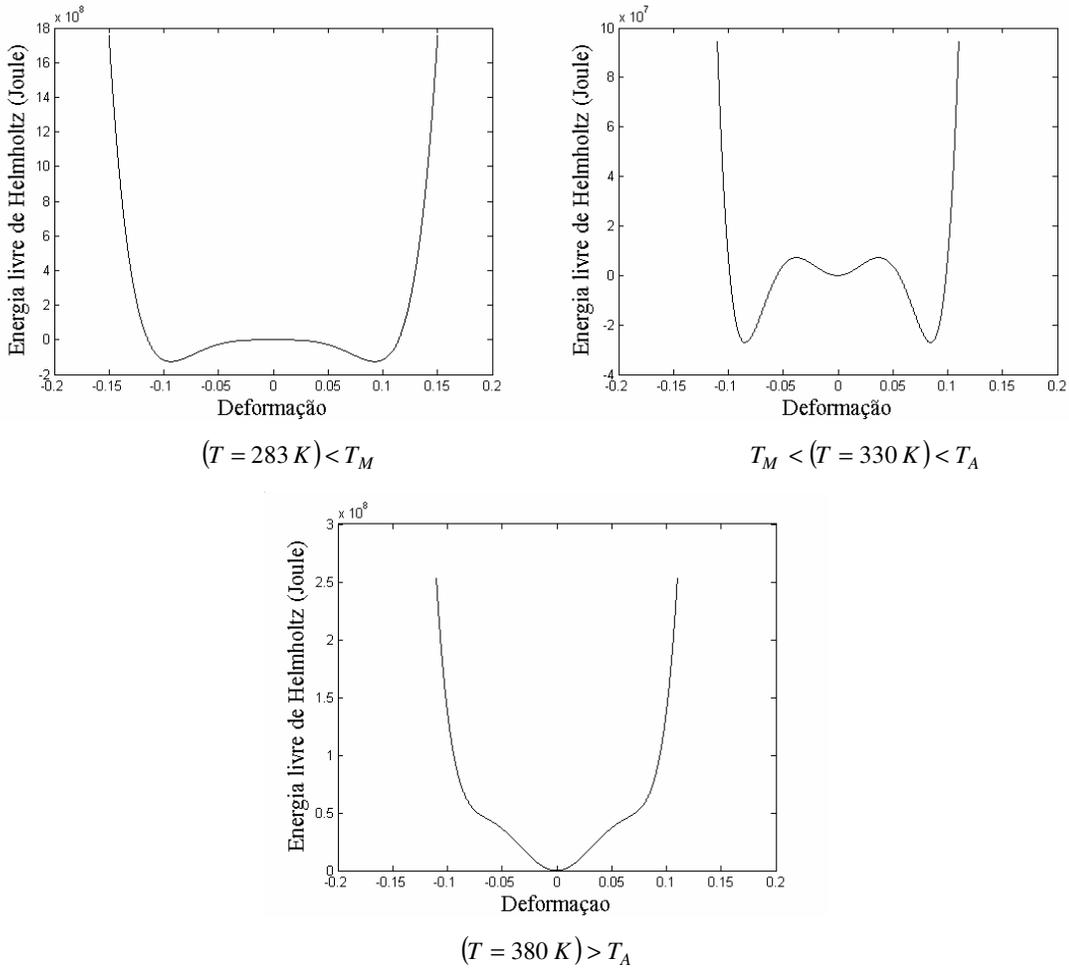


Figura 2.1: Energia Livre de Helmholtz versus deformação para o modelo de Falk.

A grande vantagem do modelo polinomial proposto por Falk, diz respeito a sua simplicidade. Este modelo representa qualitativamente os efeitos de pseudoelasticidade e de memória de forma, sendo, portanto representativo da “física” do problema estudado.

## 2.2 Modelos com cinética de transformação de fase assumida

Estes modelos constitutivos são expressos segundo o conceito da energia livre de Helmholtz, que pode ser obtida dos princípios termodinâmicos. A energia Livre de Helmholtz é uma função da variável de estado geral,  $\Lambda$ . As variáveis de estado para as ligas com memória de forma são definidas como deformação, temperatura e fração martensita ( $\zeta$ ). Assim, a variável de estado geral pode ser definida como.

$$\Lambda \equiv (\epsilon, T, \zeta) \quad (2.3)$$

Baseado na equação (2.3), a relação constitutiva pode ser obtida usando a primeira e segunda lei da termodinâmica,

$$\dot{\sigma} = D\dot{\epsilon} + \Theta\dot{T} + \Omega_T\dot{\zeta} \quad (2.4)$$

onde  $D$  representa o tensor elástico,  $\Theta$  é o tensor termoelástico e  $\Omega_T$  é o tensor de transformação, que define a mudança de deformação durante a transformação de fase. Ao invés de usar a equação da energia livre de Helmholtz, a fração martensita ( $\zeta$ ) é assumida ser uma função da tensão e temperatura e dados experimentais são usados para ajustar a relação de transformação martensita ou a transformação austenita. Considerando diferentes funções para a transformação da fração martensita ( $\zeta$ ), muitos pesquisadores desenvolveram diferentes modelos com variáveis internas. A seguir, são apresentados alguns destes modelos.

### 2.2.1 Modelo de Tanaka

Um modelo uni - dimensional para as ligas com memória de forma, de comprimento  $L$ , em que sofrem tanto transformação martensita ou austenita foi estudado por Tanaka (1985). Neste modelo a transformação da fração martensita ( $\zeta$ ) foi assumida ser uma função exponencial de tensão e temperatura de acordo com as transformações cinéticas.

Transformação de austenita para martensita tem - se que,

$$\zeta = 1 - \exp[-a_M(M_s - T) - b_M\sigma] + \zeta_0 \quad (2.5)$$

onde  $a_M$  e  $b_M$  são constantes positivas do material enquanto  $\zeta_0$  representa a fração volumétrica martensita quando se inicia a transformação. O limite que determina o início da transformação é definido por  $\sigma_{MS} \geq \frac{a_M}{b_M}(T - M_s)$

Transformação de martensita para austenita é dada por,

$$\zeta = \zeta_0 \exp[-a_A(T - A_s) - b_A\sigma] \quad (2.6)$$

onde  $a_A$  e  $b_A$  são constantes do material enquanto  $\zeta_0$  representa a fração volumétrica martensita quando se inicia a transformação. Esta equação se aplicada para valores de tensão

$$\sigma_{AS} \leq \frac{a_A}{b_A}(T - A_s).$$

### 2.3.2 Modelo de Boyd e Lagoudas

Boyd e Lagoudas (1999) reescreveram o modelo original de Tanaka, para construir um modelo tri – dimensional. Para uma forma de comparação, o modelo aqui foi reduzido a um contexto uni – dimensional, Savi e Paiva (2005). Sob esta hipótese, a relação usada para descrever a evolução da transformação de fase permanece a mesma do modelo de Tanaka, a despeito da definição adotada para as constantes  $a_M$ ,  $b_M$ ,  $a_A$  e  $b_A$  são estimadas como segue;

$$a_M = \frac{2 \ln(10)}{M_s - M_f}, \quad b_M = \frac{a_M}{C_M}, \quad a_A = \frac{2 \ln(10)}{A_f - A_s}, \quad b_A = \frac{a_A}{C_A} \quad (2.7)$$

### 2.2.3 Modelo de Liang e Rogers

Seguindo o modelo proposto por Tanaka, Liang e Rogers (1990) propuseram e desenvolveram outro modelo constitutivo com variáveis internas uni – dimensional. Ao invés de usar a fração da transformação martensita como uma função exponencial de tensão e temperatura, foi utilizada uma função co - seno da fração martensita ( $\zeta$ ) que foi proposto da seguinte forma.

Transformação de austenita para martensita tem - se que,

$$\zeta = \frac{1-\zeta_0}{2} \cos \left[ A_M \left( T - M_f - \frac{\sigma}{C_M} \right) \right] + \frac{1-\zeta_0}{2} \quad (2.8)$$

e sustentado por  $C_M(T - M_s) < \sigma < C_M(T - M_f)$ , onde  $C_M$  é um parâmetro do material,  $M_f$  corresponde a temperatura final da formação martensita e o coeficiente  $A_M$  é dado por,

$$A_M = \frac{\pi}{M_s - M_f} \quad (2.9)$$

Transformação de martensita para austenita é dada por,

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{2} \left\{ \cos \left[ A_A \left( T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (2.10)$$

e acontece quando  $C_A(T - A_f) < \sigma < C_A(T - A_s)$ .

Analogamente  $C_A$  é um parâmetro do material,  $A_s$  representa a temperatura onde começa a formação da austenita, e  $A_A$  é definida abaixo;

$$A_A = \frac{\pi}{A_f - A_s} \quad (2.11)$$

Este modelo foi aplicado em estudos envolvendo controle acústico de vibrações e os resultados são coerentes com os dados experimentais.

## 2.2.4 Modelo de Brinson.

Brinson (1993) desenvolveu outro modelo baseado no modelo de Liang, representando também fração martensita ( $\zeta$ ) por uma função co-seno. Neste modelo, a variável interna ( $\zeta$ ) é separada em duas novas componentes, a fração martensita induzida por tensão  $\zeta_s$  e a fração martensita induzida por temperatura  $\zeta_T$ , de tal forma que a fração martensita seja dada pela seguinte expressão,

$$\zeta = \zeta_T + \zeta_S \quad (2.12)$$

A partir da consideração destas novas variáveis, a equação constitutiva é escrita em função de  $\zeta_S$  ao invés de  $\zeta$ . Brinson (1993) estabelece ainda uma relação linear envolvendo os módulos de elasticidade do material correspondentes às fases austenítica,  $E_A$ , e martensítica,  $E_M$ , tal que  $E(\xi) = E_A + \zeta(E_M - E_A)$ . Logo as transformações de fase são dadas por,

Transformação de austenita para martensita  $T > M_s$  e  $\sigma_S^{crit} + C_M(T - M_s) < \sigma < \sigma_f^{crit} + C_M(T - M_s)$  é expressa por,

$$\zeta_S = \frac{1 - \zeta_{S_0}}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\sigma_S^{crit} - \sigma_f^{crit}} \left[ \sigma - \sigma_f^{crit} - C_M(T - M_s) \right] \right\} + \frac{1 - \zeta_{S_0}}{2} \quad (2.13)$$

e

$$\zeta_T = \zeta_{T_0} - \frac{\zeta_{T_0}}{1 - \zeta_{S_0}} (\zeta_S - \zeta_{S_0}) \quad (2.14)$$

enquanto para  $T < M_s$  e  $\sigma_S^{crit} < \sigma < \sigma_f^{crit}$ , temos que,

$$\zeta_S = \frac{1 - \zeta_{S_0}}{2} \cos \left[ \frac{\pi}{\sigma_S^{crit} - \sigma_f^{crit}} (\sigma - \sigma_f^{crit}) \right] + \frac{1 - \zeta_{S_0}}{2} \quad (2.15)$$

e

$$\zeta_T = \zeta_{T_0} - \frac{\zeta_{T_0}}{1 - \zeta_{S_0}} (\zeta_S - \zeta_{S_0}) + \Delta_T \quad (2.16)$$

onde

$$\Delta_T = \begin{cases} \frac{1 - \zeta_{T_0}}{2} \{ \cos [a_M(T - M_f)] + 1 \} & \text{se } M_f < T < M_s, T < T_0 \\ \text{então} & 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Transformação de martensita para austenita ocorre  $T > A_s$  e  $C_A(T - A_f) < \sigma < C_A(T - A_s)$  sendo definida por,

$$\zeta_S = \frac{\zeta_{S_0}}{2} \left\{ \cos \left[ a_A \left( T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + I \right\} \quad (2.18)$$

e

$$\zeta_T = \zeta_{T_0} \left\{ \cos \left[ a_A \left( T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + I \right\} \quad (2.19)$$

de modo que  $a_M$  e  $a_A$  são similares as constantes definidas no modelo de Liang e Rogers.

### 2.3 Modelo constitutivo considerando a assimetria entre tração - compressão e plasticidade

Este modelo considera diferentes propriedades do material e quatro fases macroscópicas para descrever o comportamento das ligas com memória de forma. Este modelo considera também a deformação plástica o acoplamento entre as transformações de fase e a plasticidade no qual torna - se possível descrever o comportamento de memória de forma de duas vias. Além do mais a assimetria entre tração e compressão é também considerado.

O comportamento termomecânico das ligas com memória de forma como mostrado anteriormente pode ser descrito pela energia livre de Helmholtz,  $\psi$ . Como os fenômenos associados às ligas com memória de forma são dissipativos se faz necessário levar em conta equações complementares para descrever o seu comportamento. Para isso é admitido um pseudo - potencial de dissipação  $\Phi$ , portanto o estado termodinâmico é completamente definido por um numero finito de variáveis de estado que são: deformação total ( $\epsilon$ ), temperatura ( $T$ ), as frações volumétricas da variante martensita  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  que são associados à fase martensítica não - macladas ( $M + e M -$ ) respectivamente e a fase austenítica ( $A$ ),  $\zeta_3$ . A quarta fase, cuja fração volumétrica é  $\zeta_4$ , esta associada à fração da martensita maclada ( $M$ ).

O modelo inclui também outras variáveis relacionadas ao fenômeno de plasticidade, que estão no objetivo deste modelo. O potencial de energia livre é proposto sobre cada fase isolada. Após estas definições a energia livre total pode ser escrita como a somatória da energia livre de cada fase com suas respectivas frações volumétricas. Com estas hipóteses é possível obter um conjunto de equações constitutivas que descrevem o comportamento termomecânico das ligas com memória de forma.

As equações abaixo representam o conjunto de equações constitutivas para o modelo constitutivo considerando assimetria tração - compressão e plasticidade.

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p + \alpha_h^C \zeta_2 - \alpha_h^T \zeta_1) + \alpha^C \zeta_2 - \alpha^T \zeta_1 - \Omega(T - T_0) \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 = \frac{1}{\eta_1} \{ & \alpha^T (\varepsilon - \varepsilon_p) + \Lambda_1 + \zeta_2 (\alpha_h^C \alpha^T + \alpha_h^T \alpha^C + E \alpha_h^T \alpha_h^C) - \zeta_1 (2 \alpha_h^T \alpha^T + E (\alpha_h^T)^2) \\ & - \alpha_h^T [E(\varepsilon - \varepsilon_p) - \Omega(T - T_0)] - \eta_{ci} K \gamma - \eta_{ck} \frac{\mu}{H} - \partial_1 J_\pi \} + \partial_1 J_\chi \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_2 = \frac{1}{\eta_2} \{ & \alpha^C (\varepsilon - \varepsilon_p) + \Lambda_2 + \zeta_1 (\alpha_h^T \alpha^C + \alpha_h^C \alpha^T + E \alpha_h^C \alpha_h^T) - \zeta_2 (2 \alpha_h^C \alpha^C + E (\alpha_h^C)^2) \\ & - \alpha_h^C [E(\varepsilon - \varepsilon_p) - \Omega(T - T_0)] - \eta_{ci} K \gamma - \eta_{ck} \frac{\mu}{H} - \partial_2 J_\pi \} + \partial_2 J_\chi \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_3 = \frac{1}{\eta_3} \{ & -\frac{1}{2} (E_A - E_M) (\varepsilon - \varepsilon_p + \alpha_h^C \zeta_2 - \alpha_h^T \zeta_1) + \Lambda_3 + (\Omega_A - \Omega_M) (T - T_0) (\varepsilon - \varepsilon_p + \alpha_h^C \zeta_2 - \alpha_h^T \zeta_1) \\ & - \frac{1}{2} (K_A - K_M) \gamma^2 - \left( \frac{1}{2H_A} - \frac{1}{2H_M} \right) \mu^2 + \eta_{ci} K \gamma - \eta_{ck} \frac{\mu}{H} - \partial_3 J_\pi \} + \partial_3 J_\chi \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\dot{\varepsilon}_p = \lambda \text{sign}(\sigma - \mu) \quad (2.24)$$

$$\dot{\gamma} = |\dot{\varepsilon}_p| + \eta_{ci} (\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2 - \dot{\zeta}_3) \quad (2.25)$$

$$\dot{\mu} = H \dot{\varepsilon}_p + \eta_{ck} (\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2 - \dot{\zeta}_3) \quad (2.26)$$

Onde  $E = E_M - \zeta_3 (E_M - E_A)$  é o modulo de elasticidade, enquanto  $\Omega = \Omega_M - \zeta_3 (\Omega_M - \Omega_A)$  esta relacionada com o coeficiente de expansão térmica. Note que o subscrito A corresponde à fase austenítica enquanto M refere - se à fase martensítica. Além do mais, diferentes propriedades são assumidas para considerar a assimetria tração - compressão, onde o sobrescrito T é atribuído à tração, ao passo que C representa às propriedades de compressão. Os parâmetros  $\Lambda_1 = \Lambda_1(T)$ ,  $\Lambda_2 = \Lambda_2(T)$  e  $\Lambda_3 = \Lambda_3(T)$  estão associados com a transformação por tensão.

A deformação plástica  $\varepsilon_p$  é uma variável interna, enquanto os parâmetros  $\alpha_h^C$  e  $\alpha_h^T$  são responsáveis pelo tamanho horizontal do laço de histerese de compressão e tração, respectivamente.

Os termos  $\partial_n J_\pi$  com  $(n = 1, 2, 3)$  são as subdiferenciais da função indicatriz  $J_\pi$  em relação às variáveis  $\zeta_i$ . A função indicatriz  $J_\pi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  esta relacionada ao conjunto convexo  $\pi$ , que fornece as restrições internas relacionadas à coexistência das fases.

Com relação às equações de fração volumétrica  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  e  $\eta_3$  representam a dissipação interna relacionada à transformação de fase. Além disso,  $\partial_n J_\chi$  ( $n = 1, 2, 3$ ) são subdiferenciais da função indicatriz  $J_\chi$  com relação à  $\zeta_n$ . A função indicatriz esta associada com o conjunto convexo  $\chi$  que estabelece condições para a descrição correta dos sub – loops internos devido à incompleta transformação de fase e também a transformação de fase  $M+ \Rightarrow M$  ou  $M- \Rightarrow M$ .

Para maiores detalhes sobre este modelo constitutivo ver Paiva et. al .(2005).

## **Capítulo 3**

### **Busca de uma Solução Analítica Aproximada de um Oscilador com Memória de Forma, Modelado com Sendo Ideal**

Uma das classificações das fontes de energia, e a que nos interessa, é aquela que divide as fontes de energia em ideais e não ideais. Criteriosamente essa classificação leva em conta os efeitos experimentados por um acoplamento ou não do sistema vibrante e do motor atuante no sistema. Por isso, as fontes de energia ideais são aquelas nas quais esse acoplamento não é considerado e, portanto a análise do sistema é simplificada significativamente.

O comportamento dinâmico de sistemas não lineares, por vezes, não é possível ser determinado de forma exata. Assim, uma das alternativas é a utilização de métodos de perturbação para a obtenção de uma solução analítica aproximada para o sistema dinâmico. Essas técnicas consistem basicamente em conhecer completamente as soluções de um dado sistema homogêneo e analisar pequenas perturbações próximas a elas. A solução analítica aproximada é também, de utilidade para a análise de estabilidade local do sistema.

#### **3.1 Solução analítica aproximada utilizando - se técnicas de perturbação**

Sob certas circunstâncias é possível obter soluções analíticas aproximadas das equações diferenciais do sistema na forma de séries de potência. Este pode ser o caso quando as equações diferenciais são quase lineares ou fracamente não lineares, e autônomas, isto é, quando os termos que tornam o sistema não linear e não autônomos são relativamente pequenos. Tais termos, conhecidos como perturbações, representam efeitos de segunda ordem identificados como um pequeno parâmetro multiplicando os termos não lineares e não autônomos. Para tais sistemas é possível obter uma solução em termos de séries de potência para os pequenos parâmetros, em particular se o sistema é harmônico, Meirovitch (1970), Nayfeh e Mook (1979).

A técnica para tratar este tipo de sistema fracamente não linear é o método de perturbação. Embora Poisson tenha usado a técnica de perturbação para investigar problemas de mecânica celeste, a teoria de perturbação moderna é atribuída a Poincaré. No início a tentativa de

utilizar a técnica de perturbação pelos astrônomos foi frustrada devido ao surgimento de termos que aumentavam com o tempo. Tais termos destroem a convergência da solução e são referidos como termos seculares. Uma grande quantidade de métodos de perturbação tem sido desenvolvida para tentar solucionar o problema do aparecimento dos termos seculares, inclusive um método atribuído a Poincaré. Outros métodos que dedicam – se a este tema, podem ser encontrados em Nayfeh e Mook (1979) e Nayfeh (1980).

Assim, neste capítulo o objetivo é à busca de uma solução analítica aproximada para as equações de movimento de um oscilador com memória de forma, onde a fonte de energia do sistema é do tipo ideal, a técnica de perturbação adotada para a obtenção da solução analítica foi o método das múltiplas escalas (MME), onde no apêndice B é demonstrada a idéia básica e resumida do método.

A escolha do método depende do problema a ser analisado, o método das múltiplas escalas (MME) é amplamente usado no caso ideal, Nayfeh e Mook (1979) e o método da média no caso não ideal, Kononenko (1969), mas exceções são sempre possíveis, como mostrado em Bolla et. al. (2007) e Fenili e Balthazar (2007).

Este capítulo ainda apresenta resultados obtidos através de simulações numéricas da solução analítica aproximada obtida através do MME. Com os resultados obtidos, neste capítulo, é possível ter um melhor entendimento da dinâmica não linear do sistema. Na modelagem do problema utiliza – se o modelo polinomial para descrever as propriedades do elemento com memória de forma, devido ao fato de que as não linearidades da SMA são descritas na forma de um polinômio diferentemente do modelo com cinética de transformação de fase assumida que consideram funções matemáticas conhecidas para descrever à cinética das transformações de fase, desta forma o modelo polinomial é o mais apropriado para a utilização de técnicas de perturbação.

A seguir, é apresentada a modelagem do oscilador excitado por uma fonte ideal de energia.

## **3.2 O oscilador com memória de forma**

O problema proposto neste capítulo trata de um oscilador de um grau de liberdade constituído de uma massa  $m$ , conectado a um suporte rígido através de um amortecedor linear com coeficiente de amortecimento  $c$  e um elemento de memória de forma, em que uma força externa periódica  $p(t) = p \cos(\omega t)$  é aplicada ao sistema, como mostra a figura 3.1.

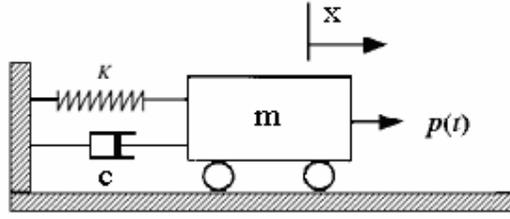


Figura 3.1: Modelo do oscilador com memória de forma

A equação de movimento que governa o sistema acima é descrito por,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + K(x, T) = p \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

Aqui utiliza – se o modelo polinomial para modelar o comportamento do elemento com memória de forma. Portanto, a força restauradora da mola com memória de forma é dada por,

$$K = K(x, T) = \bar{q}(T - T_M)x - \bar{b}x^3 + \bar{e}x^5 \quad (3.2)$$

onde,

$$\bar{q} = \frac{qA_r}{L}, \quad \bar{b} = \frac{bA_r}{L^3}, \quad \bar{e} = \frac{eA_r}{L^5} \quad (3.3)$$

em que  $x$  representa a variável relativa ao deslocamento do elemento com memória de forma,  $L$  é o comprimento e  $A_r$  é a área deste elemento.

Desta forma a equação de movimento do oscilador é dado por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + \bar{q}(T - T_M)x - \bar{b}x^3 + \bar{e}x^5 = p \cos(\omega t) \quad (3.4)$$

Antes de resolver a equação de movimento ela deve ser adimensionalizada nas variáveis espacial e temporal, Nayfeh e Mook (1979). Para este fim, introduz - se as variáveis adimensionais

$$x = \frac{u}{L} \quad \text{e} \quad \tau = \omega_0 t \quad (3.5)$$

Então, a equação de movimento pode ser reescrita como;

$$\ddot{u} + \frac{c}{m\omega_0}\dot{u} + \frac{qA_r T_M}{\omega_0^2 mL}(\theta - 1)u - \frac{bA_r}{\omega_0^2 mL}u^3 + \frac{eA_r}{\omega_0^2 mL}u^5 = \frac{p}{\omega_0^2 mL} \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0}\tau\right) \quad (3.6)$$

Onde os pontos denotam a derivada em relação ao tempo adimensional  $\tau$ . Assim a equação de movimento do oscilador adimensionalizada tem a seguinte forma;

$$\ddot{u} + 2\mu\dot{u} + (\theta - 1)u - \alpha u^3 + \gamma u^5 = \delta \cos(\varpi\tau) \quad (3.7)$$

onde os termos adimensionalizados são;

$$\gamma = \frac{eA_r}{mL\omega_0^2} \quad \alpha = \frac{bA_r}{mL\omega_0^2} \quad \mu = \frac{c}{2m\omega_0}$$

$$\varpi = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \delta = \frac{p}{mL\omega_0^2} \quad \theta = \frac{T}{T_M} \quad \omega_0^2 = \frac{qA_r T_M}{mL}$$

Da equação (3.7) nota – se a capacidade do sistema em alterar a frequência natural adimensional mediante a imposição de diferentes temperaturas, alterando assim a rigidez do material, ou seja, quanto maior o valor da temperatura mais rígido o material se torna. A análise da dinâmica não linear do oscilador agora é dividida em dois casos. O primeiro caso apresenta a resposta livre e forçada do sistema onde à fase austenítica é estável. Já no segundo caso é investigada a resposta livre do sistema em uma temperatura onde a fase martensítica é estável.

A seguir, é realizado o balanço de ordem das equações de movimento do sistema ideal.

### 3.3 Busca da solução analítica aproximada através do método das múltiplas escalas

Nesta seção a dinâmica não linear do sistema, onde à fase austenítica é estável, sendo descrito pela equação (3.7) será estudada através do método das múltiplas escalas (MME). A idéia do MME está em considerar uma expansão representando a resposta como sendo uma função das múltiplas variáveis independentes, ou escalas (rápidas e/ou lentas), ao invés de

uma única variável. O MME tem vantagens sobre outros métodos de perturbação, por exemplo, ele pode tratar sistemas amortecidos, convenientemente, Nayfeh e Mook (1979).

Como as ligas com memória de forma apresentam propriedades diferentes dependendo da temperatura, deve - se separar a análise do sistema representado na figura 3.1 em duas situações. A primeira diz respeito ao comportamento pseudoelástico da liga, onde a temperatura que atua no sistema mecânico é alta e, portanto a fase austenítica é estável. Por outro lado, a segunda observação será feita quando o sistema apresentar baixas temperaturas e conseqüentemente nesta situação a fase martensítica é estável.

Para se efetuar a análise do comportamento do oscilador através do MME, é considerada que a ordem do amortecimento, as não linearidades e a excitação apareçam na mesma escala de tempo. Assim se  $u = \varepsilon^\lambda z$ , onde o termo  $\varepsilon$  realiza o balanço de ordem, Nayfeh (1980), na equação (3.7), tem - se que a ordem de  $\hat{\mu}\dot{z}$  é  $\varepsilon^{4\lambda}\hat{\mu}\dot{z}$  e  $\hat{\delta}\cos(\varpi\tau)$  é  $\varepsilon^{5\lambda}\delta\cos(\varpi\tau)$ , de modo que a equação que governa o sistema torna - se.

$$\varepsilon^\lambda \ddot{z} + 2\varepsilon^{4\lambda} \hat{\mu} \dot{z} + \varepsilon^\lambda (\theta - 1)z - \alpha \varepsilon^{3\lambda} z^3 + \gamma \varepsilon^{5\lambda} z^5 = \hat{\delta} \cos(\varpi\tau) \quad (3.8)$$

Logo, a equação (3.8) pode ser expressa como,

$$\ddot{z} + 2\varepsilon^{4\lambda} \hat{\mu} \dot{z} + (\theta - 1)z - \alpha \varepsilon^{2\lambda} z^3 + \gamma \varepsilon^{4\lambda} z^5 = \varepsilon^{4\lambda} \delta \cos(\varpi\tau) \quad (3.9)$$

Como a equação deve ser fracamente não linear para se utilizar a técnica de perturbação, ou seja, os termos não lineares devem ser pequenos comparados com os termos lineares, tem - se então que os termos não lineares devem ser menores que 1. Deste modo, para determinar o valor de  $\lambda$ , deve - se fazer um balanço de ordem da seguinte maneira;

Sendo

$$\alpha \varepsilon^{2\lambda} < 1 \Rightarrow \varepsilon^{2\lambda} < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \ln \varepsilon^{2\lambda} < \ln \frac{1}{\alpha} \Rightarrow 2\lambda \ln \varepsilon < \ln \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \lambda > \frac{\ln(1) - \ln(\alpha)}{2 \ln(\varepsilon)}$$

por outro lado

$$\gamma \varepsilon^{4\lambda} < 1 \Rightarrow \varepsilon^{4\lambda} < \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \ln \varepsilon^{4\lambda} < \ln \frac{1}{\gamma} \Rightarrow 4\lambda \ln \varepsilon < \ln \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \lambda > \frac{\ln(1) - \ln(\gamma)}{4 \ln(\varepsilon)}$$

Portanto, as duas condições acima devem ser satisfeitas. Desta forma, para os valores da tabela 3.1, tem – se que  $\alpha = 1300$  e  $\gamma = 470000$ .

Tabela 3.1: Valores do parâmetro do material, Savi e Pacheco (2002(b))

$q$ (MPa/K)	$b$ (MPa)	$e$ (MPa)	$T_M$ (K)	$T_A$ (K)
260	$10^8$	$3.69 \times 10^{11}$	287	314

Adotando os seguintes valores: massa unitária, e assumindo que o elemento com material de forma é dado por: comprimento da mola  $L = 50 \times 10^{-3} m$  e a área da secção transversal  $A_r = 1.96 \times 10^{-5} m^2$ . Assim, pode – se avaliar as seguintes situações:

$$\triangleright \begin{cases} \text{se } \alpha = 1300 \text{ e } \varepsilon = 0.001 \text{ tem-se que } \lambda > 0.51 \\ \text{se } \gamma = 470000 \text{ e } \varepsilon = 0.001 \text{ tem-se que } \lambda > 0.48 \end{cases}$$

$$\triangleright \begin{cases} \text{se } \alpha = 1300 \text{ e } \varepsilon = 0.01 \text{ tem-se que } \lambda > 0.77 \\ \text{se } \gamma = 470000 \text{ e } \varepsilon = 0.001 \text{ tem-se que } \lambda > 0.71 \end{cases}$$

$$\triangleright \begin{cases} \text{se } \alpha = 1300 \text{ e } \varepsilon = 0.0001 \text{ tem-se que } \lambda > 0.38 \\ \text{se } \gamma = 470000 \text{ e } \varepsilon = 0.001 \text{ tem-se que } \lambda > 0.35 \end{cases}$$

Logo, nota – se que o valor de  $\varepsilon$  exerce influência sob a escolha de  $\lambda$ . Adotando os valores de  $\varepsilon = 0.001$  e  $\lambda = 1$ , a equação de movimento assumirá a seguinte forma;

$$\ddot{z} + 2\varepsilon^4 \mu \dot{z} + (\theta - 1)z - \alpha \varepsilon^2 z^3 + \gamma \varepsilon^4 z^5 = \varepsilon^4 \delta \cos(\omega \tau) \quad (3.10)$$

Se forem adotados os seguintes parâmetros do material Ni - Ti,

Tabela 3.2: Constantes do material para a liga Ni – Ti, Paiva, et. al. (2003)

$q$ (MPa/K)	$b$ (MPa)	$e$ (MPa)	$T_M$ (K)	$T_A$ (K)
$10^3$	$40 \times 10^6$	$1.53 \times 10^{10}$	287	313

Para os mesmos valores da massa  $m$ , comprimento  $L$  e área da seção transversal  $A_r$ , anteriores obtêm - se da tabela 3.2 que:  $\alpha=140$  e  $\gamma=53125$ . Considerando o valor de  $\varepsilon = 0.001$ , então  $\lambda$  deverá ser maior do que 0.4. Logo para  $\varepsilon = 0.001$  e tomando - se  $\lambda = 0.5$ , tem - se que a equação de movimento será da forma;

$$\ddot{z} + 2\varepsilon^2\mu\dot{z} + (\theta - 1)z - \alpha\varepsilon z^3 + \gamma\varepsilon^2 z^5 = \varepsilon^2\delta\cos(\omega\tau) \quad (3.11)$$

Considerando agora os seguintes parâmetros do material Cu - Zn - Al - Ni,

Tabela 3.3: Constantes do material para a liga Cu - Zn - Al - Ni, Savi et. al. (2002(a))

$q$ (MPa/K)	$b$ (MPa)	$e$ (MPa)	$T_M$ (K)	$T_A$ (K)
523.29	$1.868 \times 10^7$	$2.188 \times 10^9$	288	364.3

Da tabela 3.3 obtém - se que  $\alpha=125$  e  $\gamma=14570$ . Assim se  $\varepsilon = 0.001$ , então  $\lambda > 0.35$ . Para  $\varepsilon = 0.001$  e  $\lambda = 0.5$ , observa - se que a equação de movimento será,

$$\ddot{z} + 2\varepsilon^2\mu\dot{z} + (\theta - 1)z - \varepsilon\alpha z^3 + \varepsilon^2\gamma z^5 = \varepsilon^2\delta\cos(\omega\tau) \quad (3.12)$$

Percebe - se aqui a influência do tipo de liga no número de escalas que devem ser adotadas para a resolução do problema. Para os valores da liga da tabela 3.1 são necessários cinco escalas para a resolução da equação (3.10), em contrapartida para os valores da tabela 3.2 e 3.3 são necessários apenas três escalas. Portanto, tanto na análise do sistema ideal quanto o do sistema não ideal será utilizado à liga Cu-Zn-Al-Ni, tabela 3.3, visto que esta liga apresentou uma resposta dinâmica mais rica em comparação com as outras ligas, principalmente no caso não ideal. Assim, na análise da resposta do oscilador com SMA será empregado o método das múltiplas escalas, desta forma uma solução analítica aproximada da equação de movimento será obtida.

Para justificar o comportamento dinâmico que será mostrado através do plano de fase, utilizam - se as técnicas de análise dinâmica não linear: espectro de frequência (FFT), mapa de Poincaré e expoentes de Lyapunov. Para caracterizar qualitativamente os atratores envolvidos neste estudo, computa - se os expoentes de Lyapunov. Aqui para calcular os expoentes de Lyapunov utiliza - se o programa MATDS®, baseado numa rotina do Matlab®.

A seguir, é apresentada a solução analítica obtida através do MME e a dinâmica do oscilador em vibração livre.

### 3.3.1 Comportamento do oscilador pseudoelástico em vibração livre.

No caso em que a amplitude de excitação  $\delta$  é nula, tem-se que a equação de movimento do oscilador dado pela equação (3.12) torna – se,

$$\ddot{z} + 2\varepsilon^2\mu\dot{z} + (\theta - 1)z - \varepsilon\alpha z^3 + \varepsilon^2\gamma z^5 = 0 \quad (3.13)$$

Agora ao invés de se determinar  $z$  como uma função de  $\tau$ , define-se  $z$  como uma função das escalas de tempo necessárias para resolver o problema. Para achar a solução de uma expansão de segunda ordem necessita - se de três escalas de tempo  $T_0 = \tau, T_1 = \varepsilon\tau, T_2 = \varepsilon^2\tau$ . Para este fim transforma - se a variável independente da equação (3.13) de  $\tau$  para  $T_0, T_1, T_2$ . Usando a regra da cadeia tem-se,

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 \quad (3.14.a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2)^2 \quad (3.14.b)$$

onde

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (3.14.c)$$

Substituindo (3.14.a), (3.14.b) e (3.14.c) na equação (3.13) esta equação torna – se,

$$(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2)^2 z + 2\varepsilon^4\mu(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2)z + (\theta - 1)z - \varepsilon\alpha z^3 + \varepsilon^2\gamma z^5 = 0 \quad (3.15)$$

Procura-se uma solução analítica aproximada da equação (3.13), em potência de  $\varepsilon$  na forma,

$$z = z_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon z_1(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^2) \quad (3.16)$$

Substituindo (3.16) na equação (3.15) e equacionando os coeficientes de  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ , obtém-se,

$$D_0^2 z_0 + (\theta - 1)z_0 = 0 \quad (3.17)$$

$$D_0^2 z_1 + (\theta - 1)z_1 = -2D_0 D_1 z_0 + \alpha z_0^3 \quad (3.17.a)$$

$$D_0^2 z_2 + (\theta - 1)z_2 = -2D_0 D_2 z_0 - D_1^2 z_0 - 2D_0 D_1 z_1 - 2\mu D_0 z_0 + 3\alpha z_0^2 - \gamma z_0^5 \quad (3.17.b)$$

A solução geral de (3.17) pode ser escrito na forma

$$z_0 = A \exp(i\sqrt{(\theta-1)}T_0) + \bar{A} \exp(-i\sqrt{(\theta-1)}T_0) \quad (3.17.c)$$

Substituindo  $z_0$  em (3.17.a), resulta em,

$$\begin{aligned} D_0^2 z_1 + (\theta - 1)z_1 = & -2D_1 \left( i\sqrt{(\theta-1)}A \exp(i\sqrt{(\theta-1)}T_0) \right) + \alpha A^3 \exp(3i\sqrt{(\theta-1)}T_0) + 3\alpha A^2 \bar{A} \exp(i\sqrt{(\theta-1)}T_0) \\ & + 3\alpha A \bar{A}^2 \exp(-i\sqrt{(\theta-1)}T_0) + \alpha \bar{A}^3 \exp(-3i\sqrt{(\theta-1)}T_0) + cc \end{aligned} \quad (3.17.d)$$

onde, cc corresponde aos complexos conjugados. Eliminando os termos em (3.17.d) que produzem termos seculares em  $z_1$ , obtém-se que,

$$-2D_1 i\sqrt{(\theta-1)}A \exp(i\sqrt{(\theta-1)}T_0) + 3\alpha A^2 \bar{A} \exp(i\sqrt{(\theta-1)}T_0) = 0$$

$$\text{Logo } D_1 A = -\frac{3}{2\sqrt{(\theta-1)}} i\alpha A^2 \bar{A}$$

Assim  $D_0^2 z_1 + (\theta - 1)z_1 = \alpha A^3 \exp(3i\sqrt{(\theta-1)}T_0) + \alpha \bar{A}^3 \exp(-3i\sqrt{(\theta-1)}T_0)$ . Aqui a solução de (3.17.d) é

$$z_1 = -\frac{1}{8(\theta-1)} \alpha A^3 \exp(3i\sqrt{(\theta-1)}T_0) - \frac{1}{8(\theta-1)} \alpha \bar{A}^3 \exp(-3i\sqrt{(\theta-1)}T_0).$$

Substituindo  $z_0$  e  $z_1$  na equação (3.17.b) e realizando algumas manipulações algébricas, obtém-se;

$$\begin{cases} a' = -\mu a \\ a\beta' = \frac{10}{32\sqrt{\theta-1}} a^5 \gamma - \frac{15}{256(\sqrt{\theta-1})^3} a^5 \alpha^2 \end{cases} \quad (3.18)$$

A equação (3.18) é conhecida como a equação de modulação da amplitude e fase, e a solução analítica aproximada da equação (3.13) é:

$$u = a \cos(\sqrt{\theta-1}\tau + \beta) - \varepsilon \frac{\alpha}{32(\theta-1)} a^3 \cos(3\sqrt{\theta-1}\tau + 3\beta) + O(\varepsilon^2) \quad (3.19)$$

Onde  $a$  e  $\beta$  são dados por (3.18). O divergente do campo vetorial gerado pela equação (3.18) é;

$$\frac{\partial \dot{a}}{\partial a} + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \beta} = -\mu \quad (3.20)$$

Portanto pelo critério de Bendixon, Nayfeh e Balachandran (1995), soluções periódicas são possíveis quando  $\mu = 0$ . Considerando então que em (3.18)  $\mu = 0$ , o critério de Bendixon garante que a solução do sistema é periódica.

O movimento no estado estacionário ocorre quando  $\dot{a} = 0$  e  $\dot{\beta} = 0$ , que corresponde aos pontos singulares de (3.18). Logo, os pontos de equilíbrio são  $a = 0$  e  $\beta$  qualquer.

Realizando a análise de estabilidade através da função de Lyapunov na origem do sistema, ou seja, no ponto (0,0), cujo plano de fase é mostrado na figura 3.2(a), e considerando na equação (3.7) com  $\delta = 0$ , é possível reescreve - lá numa equação de estado. Assim, obtém - se que;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\mu x_2 - x_1 + \alpha x_1 - \gamma x_1 \end{cases} \quad (3.21)$$

Portanto, a função de Lyapunov é;

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{4} \alpha x_1^4 + \frac{1}{6} \gamma x_1^6 \quad (3.22)$$

O teorema de Lyapunov, diz que se  $\dot{V} \leq 0$  na vizinhança de  $x_0$ , então  $x_0$  é estável. Assim a derivada de  $V$  ao longo da equação (3.22) é dada por  $\dot{V} = -2\mu x_2^2$ , como  $\mu = 0$ , logo  $\dot{V} = 0$ , portanto na origem a solução periódica é estável.

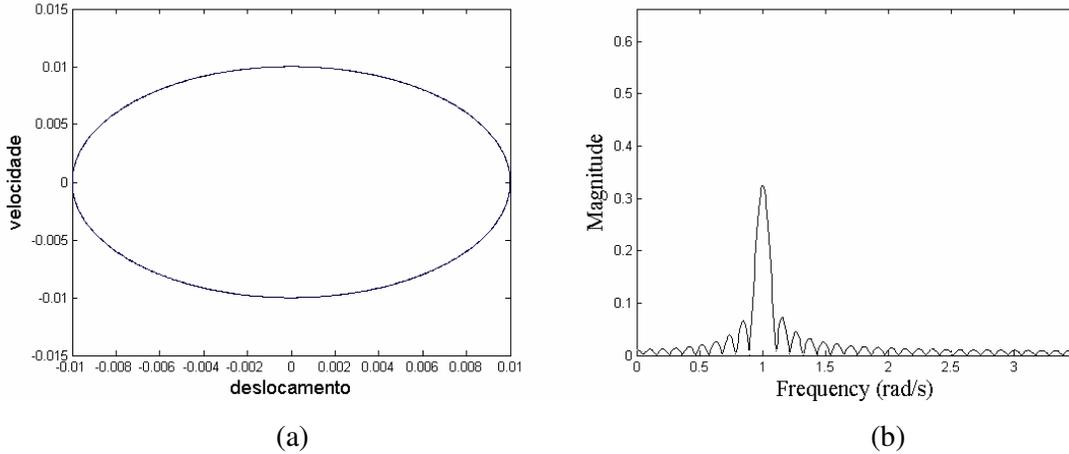


Figura 3.2: (a) Plano de fase e (b) espectro de frequência para  $\mu = 0$ .

Considerando agora que o amortecimento seja diferente de zero ( $\mu \neq 0$ ), então o critério de Bendixon, não garante que a órbita gerada seja periódica. A estabilidade do sistema pode ser determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana do sistema (3.18). Logo a Jacobiana é

$$J = \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ -\frac{50a^4\alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} + \frac{50a^4\gamma}{32\sqrt{\theta-1}} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Aplicando no ponto de equilíbrio  $a = 0$ , então obtém-se que;

$$J = \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

cujos autovalores são  $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\mu \end{cases}$ , não se pode garantir nada sobre a estabilidade do sistema, mas como um dos autovalores gerados pela matriz Jacobiana é zero uma bifurcação estática pode ocorrer no sistema.

Novamente utilizando a função de Lyapunov, obtemos que  $\dot{V} = -2x_2^2\mu$ , como  $\mu > 0$  e como  $x_2^2 > 0$ , então  $\dot{V} < 0$  e assim a órbita gerada é uma espiral estável.

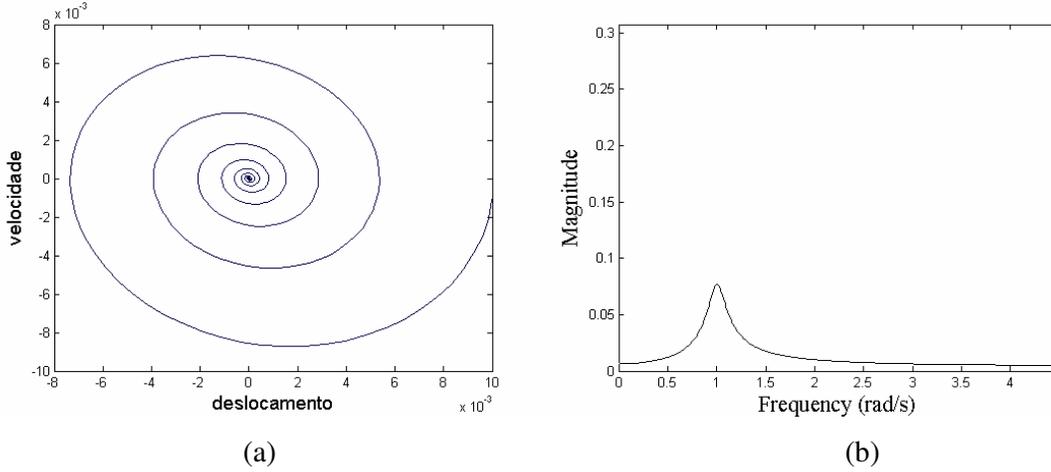


Figura 3.3: (a) Plano de fase e (b) espectro de freqüência para  $\mu \neq 0$ .

A seguir, é apresentada a solução analítica obtida através do MME e a dinâmica do oscilador em vibração forçada.

### 3.3.2 Comportamento do oscilador pseudoelástico em vibração forçada

Para a obtenção de uma solução aproximada da equação (3.12) quando  $\delta$  é diferente de zero tem – se que a equação de movimento do oscilador é

$$\ddot{z} + 2\varepsilon^2\mu\dot{z} + (\theta - 1)z - \varepsilon\alpha z^3 + \varepsilon^2\gamma z^5 = \varepsilon^2\delta\cos(\varpi\tau) \quad (3.25)$$

Livre de termos seculares é preciso distinguir entre ressonâncias primárias e secundárias.

A seguir, é apresentado o detalhamento da busca da solução analítica na ressonância primária.

#### 3.3.2.a Ressonância primária, $\varpi \approx \sqrt{\theta - 1}$

Ao invés de se usar a freqüência de excitação  $\varpi$  como um parâmetro, introduz – se um parâmetro de sintonia  $\sigma$ , que quantitativamente descreve a aproximação de  $\varpi$  em relação à

$\sqrt{\theta-1}$ . O objetivo de introduzir este novo parâmetro é o de ajudar a reconhecer os termos na equação (3.25) que levam há termos seculares. Assim escreve-se

$$\varpi = \sqrt{\theta-1} + \varepsilon^2 \sigma \quad (3.26)$$

onde  $\sigma = O(1)$ . Como a excitação  $\delta$  da equação (3.25) é de  $O(\varepsilon^2)$ , e  $\varpi - \sqrt{\theta-1}$  é assumido ser de  $O(\varepsilon^2)$ , portanto tem-se que;

$$\varpi = \sqrt{\theta-1} + \varepsilon^2 \sigma \Rightarrow \varpi T_0 = \sqrt{\theta-1} T_0 + \varepsilon^2 T_0 \sigma \Rightarrow \varpi T_0 = \sqrt{\theta-1} T_0 + \sigma T_2 \quad (3.27)$$

Substituindo (3.14.1), (3.14.2) e (3.14.3) na equação (3.25) e equacionando os coeficientes de  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ , obtém-se;

$$D_0^2 z_0 + (\theta-1)z_0 = 0 \quad (3.28)$$

$$D_0^2 z_1 + (\theta-1)z_1 = -2D_0 D_1 z_0 + \alpha z_0^3 \quad (3.28.a)$$

$$D_0^2 z_2 + (\theta-1)z_2 = -2D_0 D_2 z_0 - D_1^2 z_0 - 2D_0 D_1 z_1 - 2D_0 \mu z_0 + 3\alpha z_0^2 z_1 - z_0^5 \gamma + \delta \cos(\varpi \tau) \quad (3.28.b)$$

Nota-se que, com o resultado da ordenação, a ordem da excitação, amortecimento e os termos não lineares aparecem na equação (3.28.b).

A solução geral de (3.28) pode ser escrita como,

$$z_0 = A \exp(i\sqrt{\theta-1}T_0) + \bar{A} \exp(-i\sqrt{\theta-1}T_0) \quad (3.28.c)$$

Substituindo  $u_0$  em (3.28.a), resulta em,

$$\begin{aligned} D_0^2 z_1 + (\theta-1)z_1 = & -2D_1 i\sqrt{\theta-1} A \exp(i\sqrt{\theta-1}T_0) + \alpha A^3 \exp(3i\sqrt{\theta-1}T_0) + 3\alpha A^2 \bar{A} \exp(i\sqrt{\theta-1}T_0) \\ & + 3\alpha A \bar{A}^2 \exp(-i\sqrt{\theta-1}T_0) + \alpha \bar{A}^3 \exp(-3i\sqrt{\theta-1}T_0) + cc \end{aligned} \quad (3.28.d)$$

Eliminando os termos em (3.28.d) que produzem termos seculares em  $z_2$ , obtém-se,

$$-2D_1 i\sqrt{\theta-1} A \exp(i\sqrt{\theta-1}T_0) + 3\alpha A^2 \bar{A} \exp(i\sqrt{\theta-1}T_0) = 0$$

$$\text{Logo } D_1 A = -\frac{3}{2\sqrt{\theta-1}} i\alpha A^2 \bar{A}$$

Assim  $D_0^2 z_1 + (\theta-1)z_1 = \alpha A^3 \exp(3i\sqrt{\theta-1}T_0) + \alpha \bar{A}^3 \exp(-3i\sqrt{\theta-1}T_0)$ . Aqui a solução de (3.28.d)

é

$$z_1 = -\frac{1}{8(\theta-1)} \alpha A^3 \exp(3i\sqrt{\theta-1}T_0) - \frac{1}{8(\theta-1)} \alpha \bar{A}^3 \exp(-3i\sqrt{\theta-1}T_0).$$

Substituindo  $z_0, z_1$  e (3.27) em (3.28.b), e realizando algumas manipulações algébricas, obtém – se;

$$\begin{cases} a' = -a\mu + \frac{\delta}{2\sqrt{\theta-1}} \text{sen}(\sigma T_2 - \beta) \\ a\beta' = a\sigma - \frac{10a^5\gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{15a^5\alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} + \frac{\delta}{2\sqrt{\theta-1}} \text{cos}(\sigma T_2 - \beta) \end{cases} \quad (3.29)$$

A equação (3.29) está na forma não autônoma sendo possível transforma – lá num sistema de equações autônomas, realizando a seguinte mudança de variável,

$$\psi = \sigma T_2 - \beta \quad (3.30)$$

Logo, a equação (3.29) torna – se;

$$\begin{cases} a' = -a\mu + \frac{\delta}{2\sqrt{\theta-1}} \text{sen}\psi \\ a\psi' = a\sigma - \frac{10a^5\gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{15a^5\alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} + \frac{\delta}{2\sqrt{\theta-1}} \text{cos}\psi \end{cases} \quad (3.31)$$

Portanto, obtém – se uma solução analítica aproximada da equação (3.25) dada por,

$$u = a \cos(\omega\tau - \psi) - \varepsilon \frac{\alpha}{32(\theta-1)} a^3 \cos(3\omega\tau - 3\psi) + O(\varepsilon^2) \quad (3.32)$$

Movimentos de estado estacionários ocorrem quando  $a' = \psi' = 0$ , que correspondem aos pontos singulares do sistema, isto é, eles correspondem à solução de,

$$\begin{aligned}
a\mu &= \frac{\delta}{2\sqrt{\theta-1}} \text{sen}(\psi) \\
-a\sigma + \frac{10a^5\gamma}{32\sqrt{\theta-1}} - \frac{15a^5\alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} &= \frac{\delta}{2\sqrt{\theta-1}} \text{cos}(\psi)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Elevando dos dois lados ao quadrado na equação (3.33) e somando estas equações, tem - se que,

$$\frac{\delta^2}{4(\theta-1)} = a^2\mu^2 + a^2 \left( \frac{10a^4\gamma}{32\sqrt{\theta-1}} - \sigma - \frac{15a^4\alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right)^2 \tag{3.34}$$

A equação (3.34) é uma equação implícita para a amplitude da resposta  $a$  como uma função do parâmetro de sintonia  $\sigma$  (isto é, a freqüência de excitação) e a amplitude da excitação  $\delta$ , ela é chamada de equação da resposta em freqüência, observa - se que  $\theta$ , que é um parâmetro ligado a temperatura aplicada ao sistema, está presente nesta equação.

A seguir, analisa - se as curvas de resposta em freqüência.

### 3.3.2.b Análise da curva de ressonância

A curva de ressonância (gráfico de resposta em freqüência) é uma das ferramentas de análise de sistemas dinâmicos mais vastamente usada e conhecida na literatura. Este gráfico descreve o comportamento de uma solução do sistema onde sua amplitude de oscilação é disposta de acordo com a variação da freqüência de excitação.

Pode - se obter da equação (3.34),  $\sigma$  como uma função da amplitude da resposta  $a$ , ou seja,

$$\sigma = \frac{1}{256} \left( \frac{80a^5\gamma(\theta-1) - 15a^5\alpha^2 \pm 128\sqrt{\delta^2(\theta-1)^2 - 4\mu^2 a^2(\theta-1)^3}}{a(\sqrt{\theta-1})^3} \right) \tag{3.35}$$

A figura 3.4 mostra a comparação entre as curvas de ressonância para o caso do oscilador linear e do oscilador com memória de forma (não linear), onde foram adotados os seguintes parâmetros  $\delta = 0.03$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .

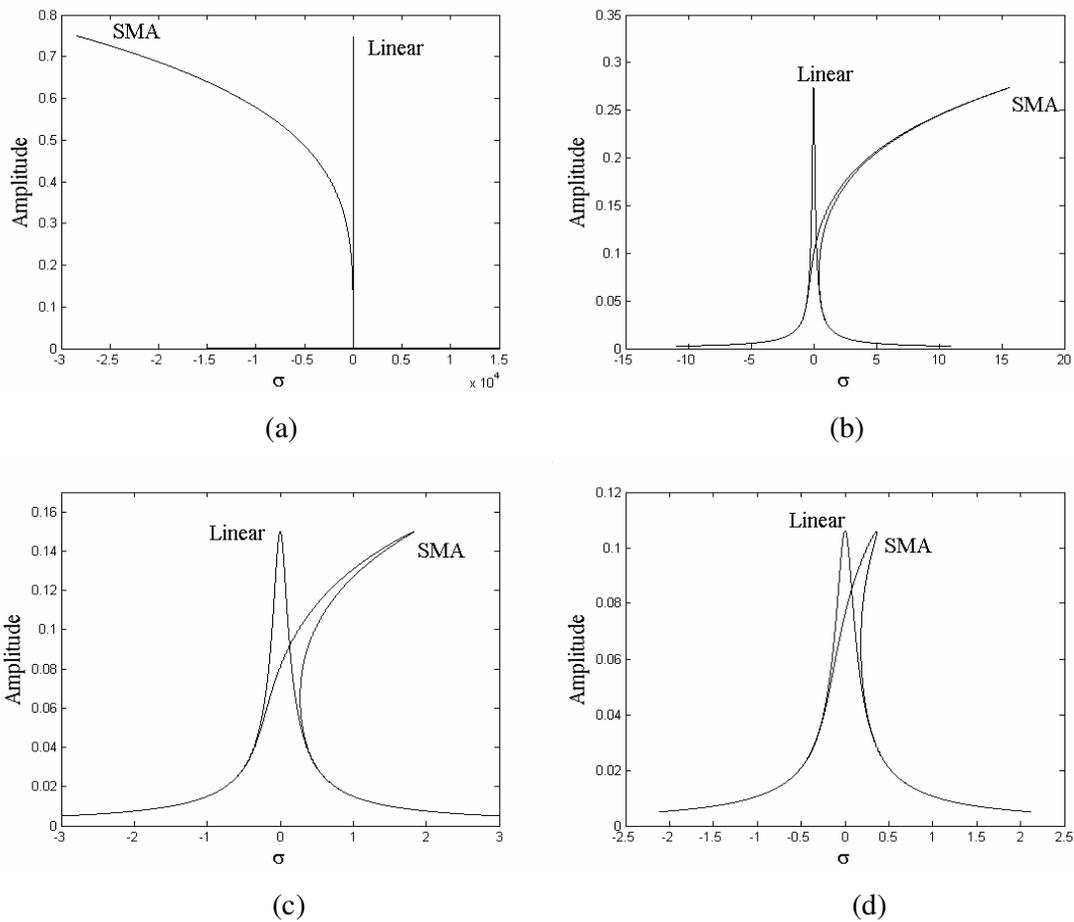


Figura 3.4: Efeito da Não – Linearidade, (a)  $\theta=1.04$ , (b)  $\theta=1.3$ , (c)  $\theta=2$ , (d)  $\theta=3$ .

Da equação (3.35) observa – se que o pico de amplitude, que é dado por  $a_p = \frac{\delta}{2\sqrt{\theta-1\mu}}$ , dependente de  $\theta$ , parâmetro relacionado à temperatura, e independente dos parâmetros do material  $\alpha$  e  $\gamma$ . Como era de se esperar a temperatura produz efeitos sobre o sistema, para a temperatura intermediária quando as fases martensítica e austenítica estão simultaneamente presentes na liga ( $\theta=1.04$ ), o sistema é descrito pela figura 3.4(a). Nota – se que o comportamento do sistema, nesta temperatura, pode ser comparado com sistema em engenharia que exibem característica mole (softening characterisitc), enquanto para as outras curvas, figuras 3.4b ( $\theta=1.3$ ), 3.4c ( $\theta=2$ ) e 3.4d ( $\theta=3$ ) onde a liga é puramente austenítica o comportamento do oscilador é comparado a sistema que apresentam característica dura (hard characterisitc). Nota – se também diferenças entre as curvas lineares e não lineares. Os resultados lineares são simétricos nesta ordem de aproximação, já as não linearidades geram a

curvatura no gráfico de resposta em frequência, que é mais ou menos acentuada conforme o valor da temperatura aplicada no sistema.

Observa-se aqui que a temperatura influencia também na não linearidade do sistema, pois verifica-se pela figura 3.4 que quando se aumenta o valor de  $\theta$ , a inclinação da curva de resposta em frequência do sistema se aproxima do caso linear, diminuindo assim a influência dos termos não lineares na dinâmica do oscilador.

A figura 3.5 mostra a variação das curvas da resposta em frequência para diversos valores da amplitude de excitação  $\delta$ , onde o valor de  $\mu$  é o mesmo para todas as curvas. Estas curvas mostram que a amplitude da resposta diminui à medida que o parâmetro  $\theta$  é elevado, por exemplo, para valor de  $\delta = 0.03$  nas situações propostas tem-se que: na figura 3.5(a) para  $\theta = 1.3$  a amplitude máxima atinge o valor aproximado de 0.27 para um valor do parâmetro de sintonia próximo a 15. No caso da figura 3.5(b) onde  $\theta = 2$  a amplitude diminui atingindo o seu valor máximo em torno de 0.15 com  $\sigma \approx 2$ . Para  $\theta = 2.5$  representado na figura 3.5(c) a amplitude máxima está em torno de 0.13 com  $\sigma \approx 0.8$ , e na figura 3.5(d) onde  $\theta = 3$  a amplitude máxima encontra-se próximo de 0.115 com  $\sigma \approx 0.47$ .

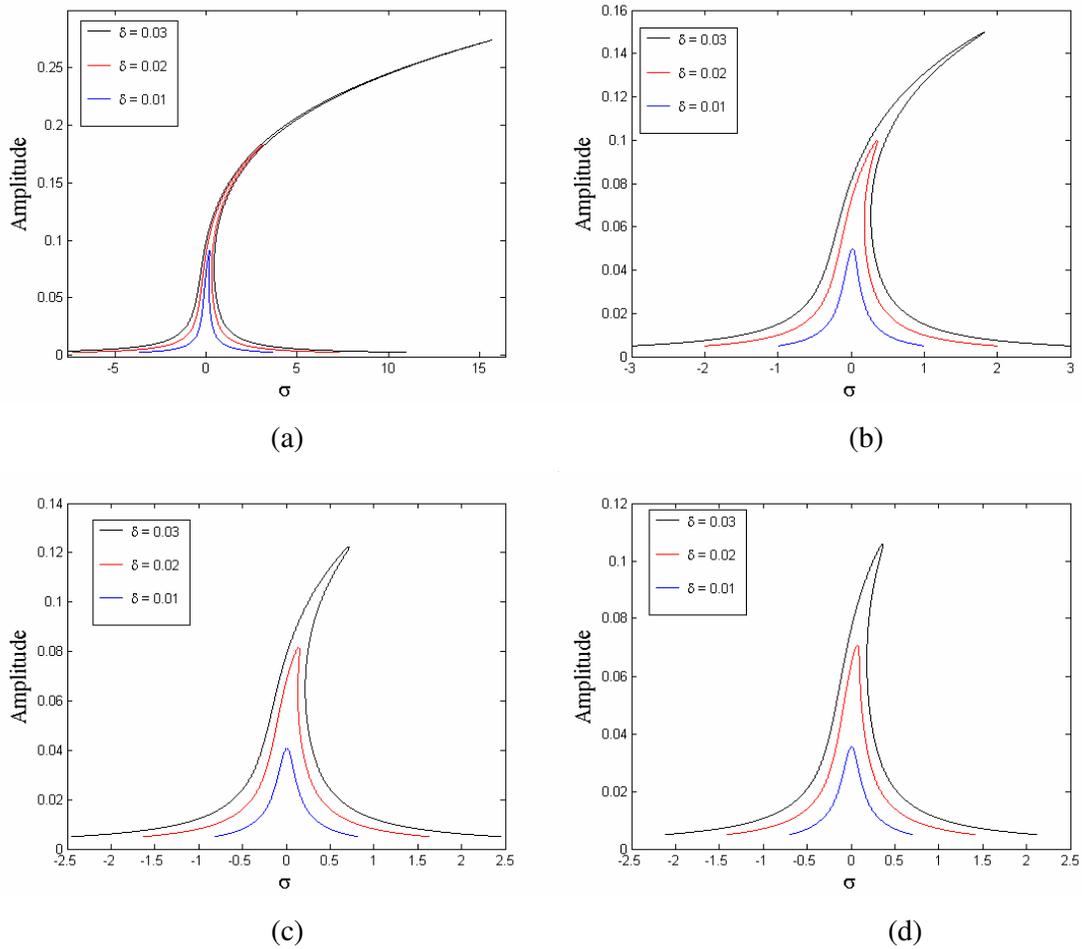


Figura 3.5: Efeito da Amplitude de excitação: (a)  $\theta = 1.3$ , (b)  $\theta = 2$ , (c)  $\theta = 2.5$  e (d)  $\theta = 3$ .

A figura 3.6 mostra a influência do coeficiente de amortecimento sobre as curvas da resposta em frequência, onde o valor de  $\delta$  é o mesmo para todas as curvas. Na ausência de amortecimento, o pico da amplitude é infinito.

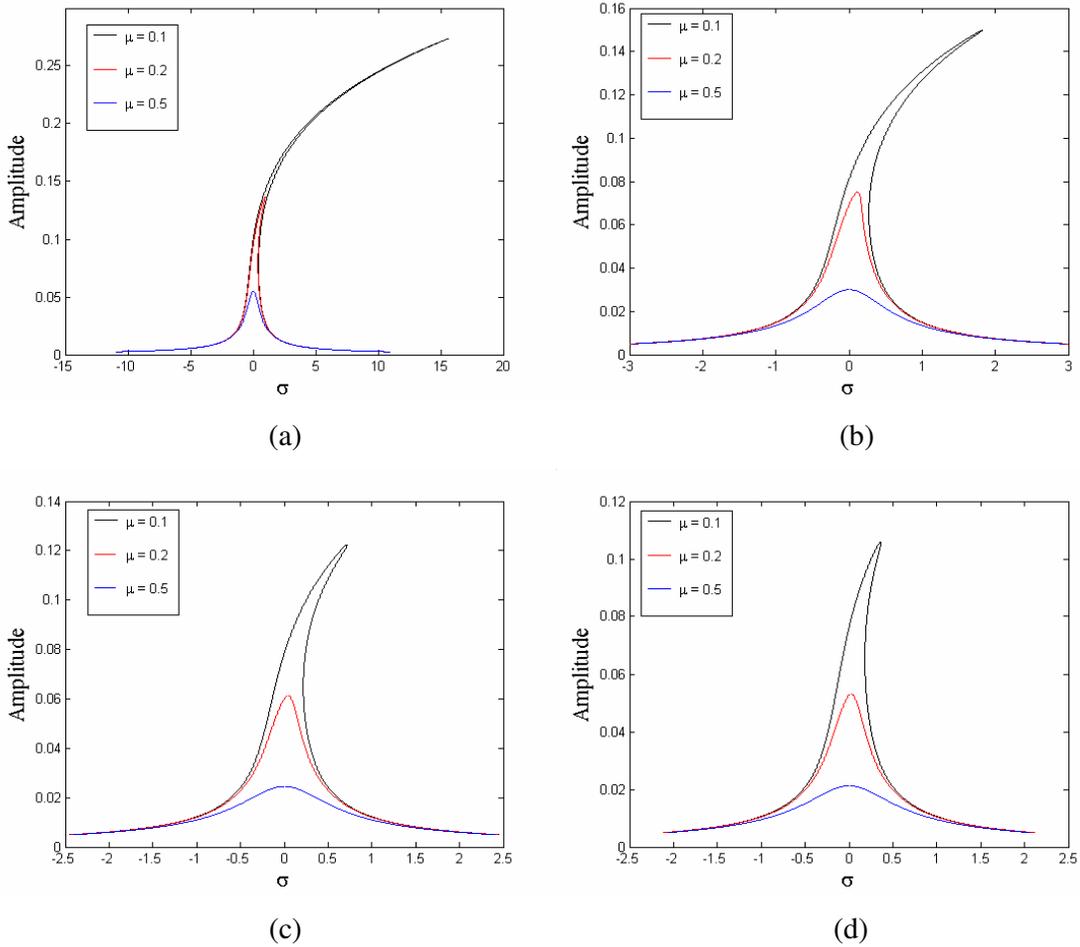


Figura 3.6: Efeito do Amortecimento: (a)  $\theta = 1.3$ , (b)  $\theta = 2$ , (c)  $\theta = 2.5$  e (d)  $\theta = 3$ .

Novamente é constatado que a amplitude da resposta é menor conforme o valor de  $\theta$  é maior. A partir das figuras 3.5 e 3.6 conclui-se aqui que, a rigidez da liga é proporcional a temperatura, ou seja, quanto maior for a temperatura maior é a rigidez do material e conseqüentemente a amplitude de oscilação do sistema será menor. A figura 3.7 mostra a variação da amplitude da resposta com a amplitude de excitação para diversos valores do parâmetro de sintonia  $\sigma$ . O valor de  $\mu$  é o mesmo para todas as curvas, onde estas curvas são obtidas diretamente da equação (3.34).

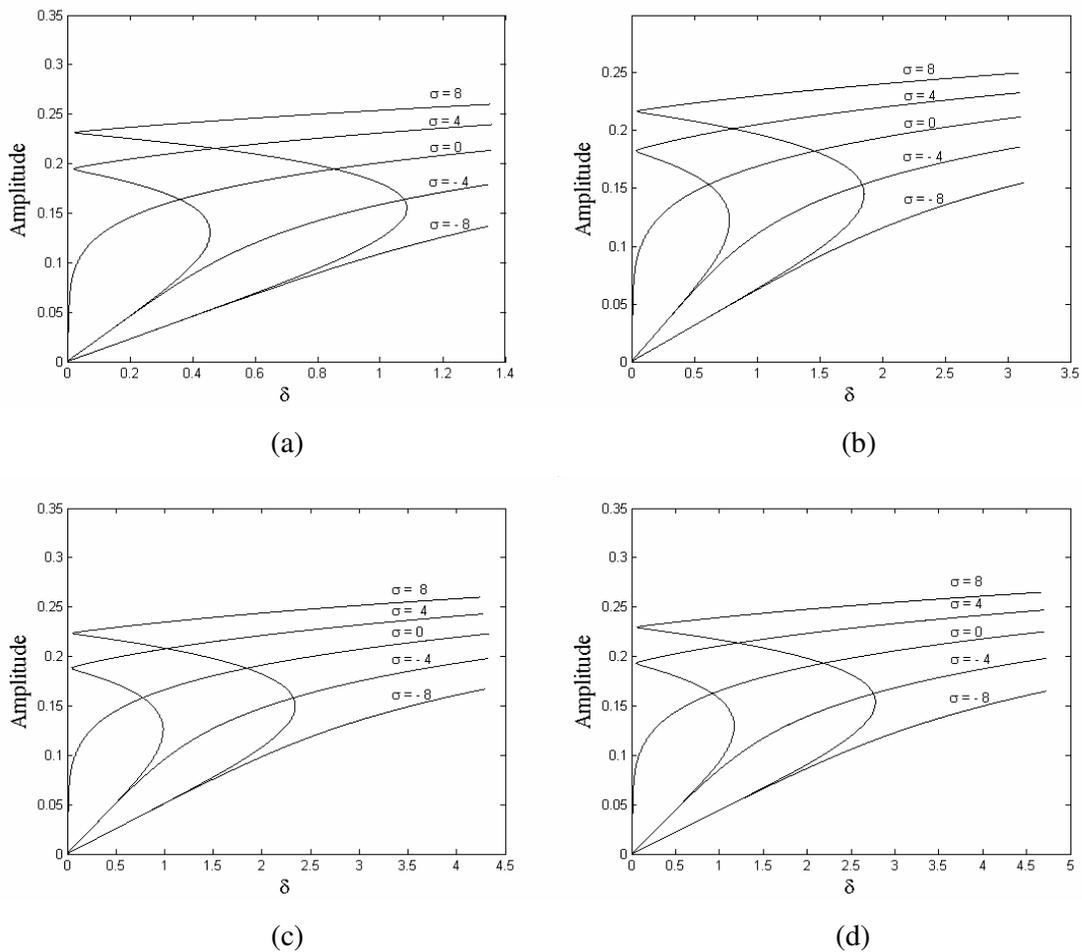


Figura 3.7: Amplitude da resposta como uma função da amplitude de excitação para diversos parâmetros de sintonia: (a)  $\theta=1.3$ , (b)  $\theta=2$ , (c)  $\theta=2.5$  e (d)  $\theta=3$ .

Na figura 3.7 pode – se perceber novamente que, quanto maior é a temperatura menor é a amplitude de oscilação do sistema para os mesmo valores de  $\delta$ . Por exemplo, comparando estes quatro gráficos, e adotando o valor de  $\sigma=-8$  e  $\delta=1$ . Na figura 3.7(a), onde  $\theta=1.3$  a amplitude de oscilação tem um valor próximo de 0.13, para  $\theta=2$  o valor da amplitude vale aproximadamente 0.065 reduzindo consideravelmente a oscilação do sistema. Agora na figura 3.7(c) tem – se que para  $\theta=2.5$  logo a amplitude da resposta corresponde ao valor de 0.051, ocorrendo novamente um decréscimo da amplitude. Já na figura 3.7(d) quando  $\theta=3$  o valor da amplitude decresce para aproximadamente 0.04. Novamente estes gráficos mostram que o valor da temperatura é inversamente proporcional a amplitude da resposta do oscilador, isto é, quanto maior for à temperatura menor será a amplitude de oscilação do sistema.

A seguir, é apresentado o estudo sobre a estabilidade do sistema.

### 3.3.2.c Estabilidade das soluções

Movimentos de estado estacionários ocorrem quando  $a' = \psi' = 0$  no sistema (3.31), assim obtém – se os pontos fixos  $(a_0, \psi_0)$ .

A estabilidade de  $(a_0, \psi_0)$  é determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana,

$$J = \begin{bmatrix} -\mu & -a_0 \left( \sigma - \frac{10a_0^4 \gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{15a_0^4 \alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right) \\ \frac{1}{a_0} \left( \sigma - \frac{50a_0^4 \gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{75a_0^4 \alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right) & -\mu \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Os autovalores correspondentes  $\lambda_i$  são as raízes de,

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 + \left( \sigma - \frac{10a_0^4 \gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{15a_0^4 \alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right) \left( \sigma - \frac{50a_0^4 \gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{75a_0^4 \alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right) = 0 \quad (3.37)$$

Em (3.37) a soma dos autovalores é  $-2\mu$ . Esta soma é sempre negativa porque  $\mu > 0$ . Conseqüentemente um dos autovalores tem sempre a parte real negativa. Este fato elimina a possibilidade de um par de autovalores puramente imaginários e, portanto, uma bifurcação de Hopf. Portanto uma bifurcação estática pode ocorrer. Para isso, um dos autovalores deve ser zero e isso acontece quando,

$$\Phi = \mu^2 + \left( \sigma - \frac{10a_0^4 \gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{15a_0^4 \alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right) \left( \sigma - \frac{50a_0^4 \gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{75a_0^4 \alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right) = 0 \quad (3.38)$$

Assim movimentos no estado estacionário são instáveis quando

$$\Phi = \mu^2 + \left( \sigma - \frac{10a_0^4 \gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{15a_0^4 \alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right) \left( \sigma - \frac{50a_0^4 \gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{75a_0^4 \alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right) < 0 \quad (3.39)$$

e do contrario o movimento é estável. Através da equação (3.36) até (3.39) perceber - se que a temperatura está ligada a estabilidade do sistema, de forma que os pontos de equilíbrio dependem do valor da temperatura.

A figura 3.8(a) mostra o plano de fase de uma solução de equilíbrio que é verificada pela investigação dos autovalores da matriz Jacobiana. Na figura 3.8(b) é mostrado o espectro de freqüência associado e em 3.8(c) é ilustrado o mapa de Poincaré, na figura 3.8(d) é considerada a evolução dos expoentes de Lyapunov.

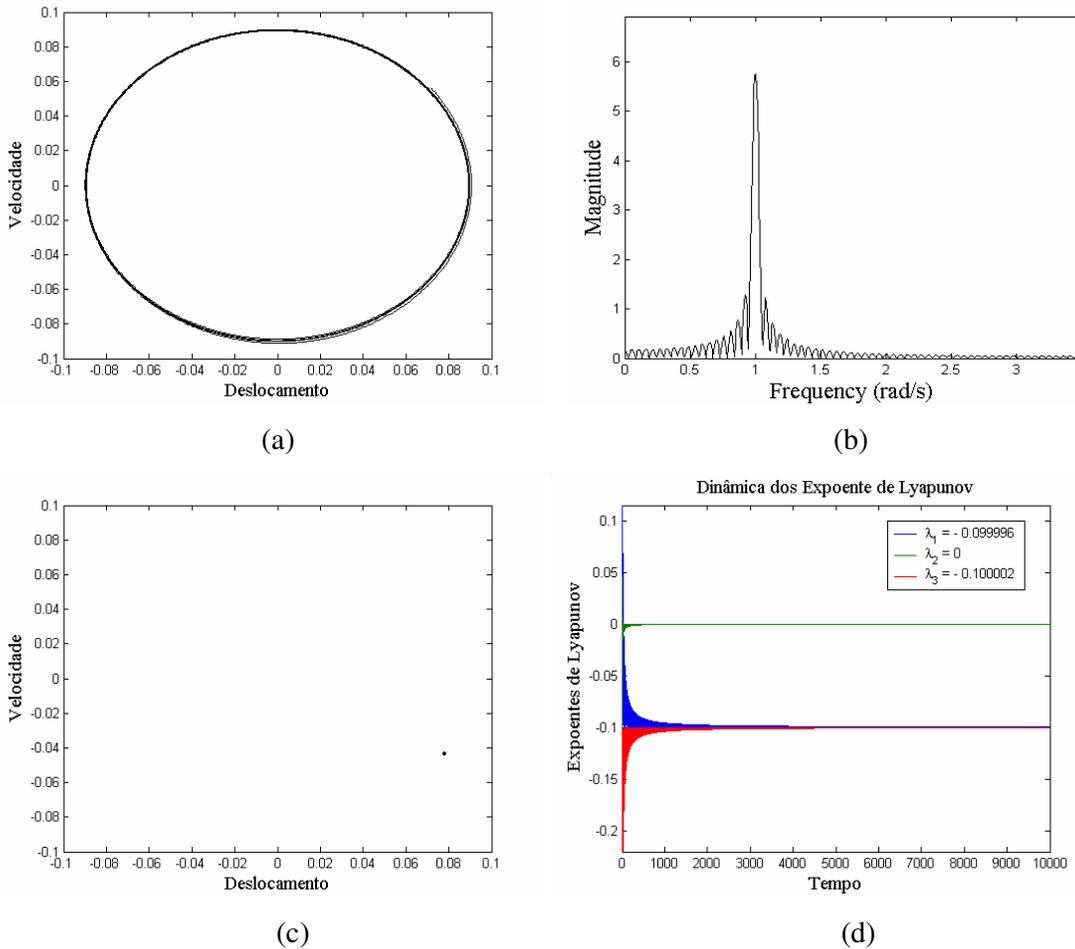


Figura 3.8: (a)Plano de fase, (b) espectro de freqüência, (c) mapa de Poincaré e (d) expoente de Lyapunov, para  $\theta = 2$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\delta = 0.03$ ,  $\varepsilon = 0.001$  e  $\sigma = 0.1$ .

Como o espectro de freqüência apresenta somente um pico, o mapa de Poincaré ilustra somente um ponto e os expoentes de Lyapunov apresentam dois expoentes negativos e um expoente nulo, então pode – se concluir que a solução é periódica de período - 1.

Para os demais valores de  $\theta$ , não há nenhuma mudança na dinâmica do sistema, todos apresentam um comportamento periódico de período 1, a única diferença entre eles é quanto

ao valor do deslocamento no plano de fase, pois se  $\theta < 2$  o deslocamento será maior, contudo se  $\theta > 2$  o deslocamento no plano de fase será menor.

A seguir, é analisado o tipo de bifurcação que pode ocorrer no sistema variando os parâmetros de controle (parâmetro de sintonia e amplitude de excitação)

### 3.3.2.d Bifurcações

A figura 3.9 é um diagrama de bifurcação construído usando  $\sigma$  como um parâmetro de controle, onde as linhas cheias representam pontos estáveis, enquanto as linhas pontilhadas correspondem aos pontos instáveis. Quando o parâmetro  $\sigma$  é aumentado gradualmente a partir do ponto D, o valor de  $a$  percorre a curva DCE, até atingir o ponto crítico  $\sigma_2$ , onde o sistema perde estabilidade, ocorrendo o fenômeno de salto do ponto E até o ponto B com um decréscimo da amplitude da resposta  $a$ .

Por outro lado considerando que a partir do ponto A,  $\sigma$  é diminuído gradualmente, o valor do parâmetro percorre a curva ABF, até atingir o valor crítico  $\sigma_1$ , onde novamente o sistema perde estabilidade e acontece o salto do ponto F até o ponto C, com um aumento da amplitude da resposta  $a$ , depois  $a$  decresce gradualmente com o decréscimo de  $\sigma$ .

O ponto E onde  $\sigma = \sigma_2$ , é um ponto de bifurcação, e o posto da matriz Jacobiana (3.36) é dois. Do sistema 3.31, pode-se encontrar a matriz  $F_\sigma$ , que é a matriz com relação ao parâmetro de controle  $\sigma$ . Logo no ponto E a matriz  $F_\sigma = \begin{Bmatrix} 0 \\ a \end{Bmatrix}$  e, construindo a matriz  $[J|F_\sigma]$  verifica-se que o posto dessa nova matriz também é dois. Assim a matriz do parâmetro de controle não altera o posto da matriz Jacobiana  $J$  e, desta forma ocorre uma bifurcação do tipo sela – nó, Nayfeh e Balachandran (1995). O mesmo acontece para o valor de  $\sigma_1$  em que o posto da Jacobiana não se altera e acontece também uma bifurcação do tipo sela – nó.

A condição imposta através da equação (3.39) corresponde a parte entre os pontos E e F na figura 3.9 (linhas pontilhadas), e nos pontos F e E tem-se que  $\Phi = 0$ , pois estes são pontos em que acontecem as bifurcações do sistema.

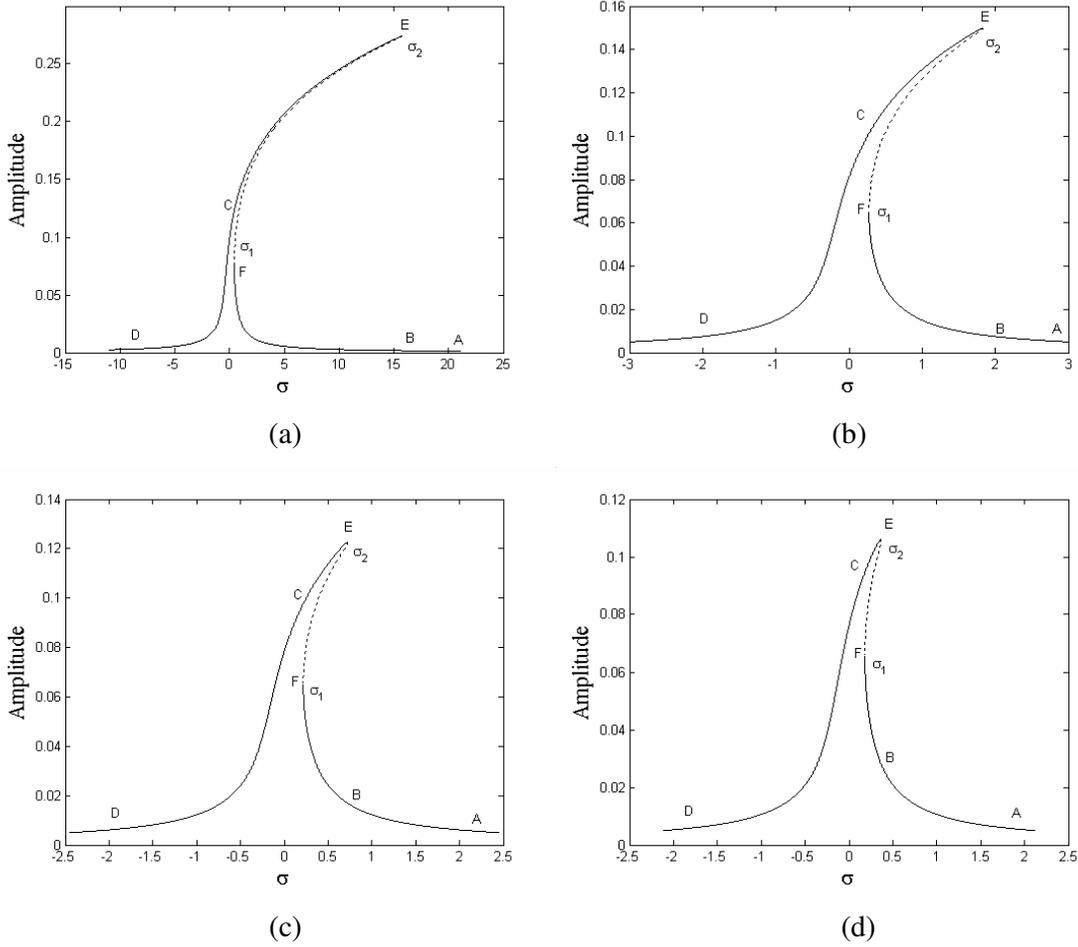


Figura 3.9: Fenômeno de salto para a ressonância primária de um oscilador com memória de forma, (a)  $\theta = 1.3$ , (b)  $\theta = 2$ , (c)  $\theta = 2.5$  e (d)  $\theta = 3$ .

Nota – se que os pontos E e F são pontos de tangências verticais, Nayfeh e Balachandran (1995). Para demonstrar esta situação, de (3.34), tem – se que;

$$\frac{d\sigma}{da^2} = \frac{5a^2\gamma\sqrt{\theta-1}}{8} - \frac{15a^2\alpha^2}{128\sqrt{\theta-1}} + \frac{\mu^2 + \left( \frac{10a^4\gamma}{32\sqrt{\theta-1}} - \sigma - \frac{15a^4\alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right)^2}{\left( \frac{10a^4\gamma}{32\sqrt{\theta-1}} - \sigma - \frac{15a^4\alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right)} \left( -\frac{(\theta-1)}{2a^2} \right) \quad (3.40)$$

Porque a equação (3.38) é satisfeita para pontos de bifurcação, substitui – se  $\mu^2$  de (3.38) na equação (3.40) e depois de algumas manipulações algébricas, obtém – se que;

$$\frac{d\sigma^2}{da^2} = 0 \quad (3.41)$$

Porque os pontos da bifurcação sela – nó são localizações de tangencias verticais, eles são chamados de bifurcações tangentes.

Destes diagramas de bifurcações pode - se concluir que: como o valor da amplitude da resposta do sistema é maior para temperaturas menores, o salto é conseqüentemente maior à medida que a temperatura do sistema é menor, ou seja, quanto menor a temperatura maior será o salto. Assim, naturalmente o salto do ponto E até o ponto B é maior para  $\theta = 1.3$  do que para  $\theta = 3$ .

Agora usando  $\delta$  como o parâmetro de controle, obtém - se na figura 3.10 o seguinte diagrama de bifurcação;

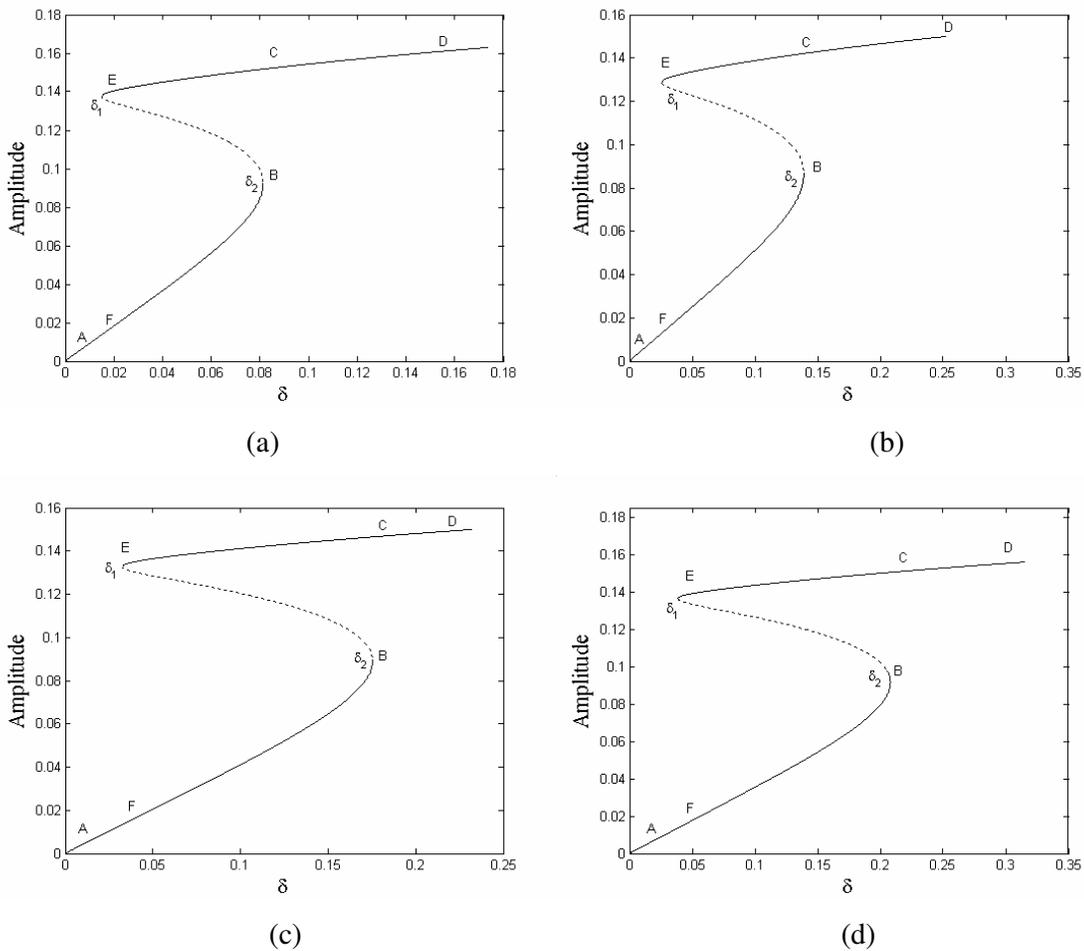


Figura 3.10: Fenômeno de salto da ressonância primária de um oscilador com memória de forma: (a)  $\theta = 1.3$ , (b)  $\theta = 2$ , (c)  $\theta = 2.5$  e (d)  $\theta = 3$ , para  $\sigma = 1$ .

Neste diagrama de bifurcação, as linhas sólidas são pontos fixos estáveis, enquanto as linhas pontilhadas são pontos fixos instáveis. Quando o parâmetro de controle  $\delta$  é aumentado gradualmente do valor zero, a amplitude da resposta segue a curva AFB até o ponto B onde perde a estabilidade e ocorre o fenômeno de salto do ponto B até o ponto C com um aumento da amplitude  $a$ . Se o processo é reverso o fenômeno de salto ocorre do ponto E até o ponto F. Nos pontos B e E tem – se a ocorrência de bifurcações do tipo sela – nó, então esses pontos são pontos de tangencias verticais.

A condição imposta através da equação (3.38) corresponde à parte entre os pontos B e E na figura 3.10, e nos pontos B e E tem – se que  $\Phi = 0$ .

A partir da equação (3.34) obtém – se que,

$$\frac{d\delta^2}{da^2} = 4\sqrt{\theta-1} \left[ \mu^2 + \left( \sigma - \frac{50a^4\gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{75a^4\alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right) \left( \sigma - \frac{10a^4\gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{15a^4\alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} \right) \right] \quad (3.42)$$

Usando a equação (3.38), conclui – se que  $\frac{d\delta^2}{da^2} = 0$ . Como os pontos de bifurcação sela – nó são localizações de tangencias verticais, eles são chamados de bifurcações tangentes.

Da figura 3.10(a) observa – se que para  $\theta = 1.3$  o sistema perde estabilidade e ocorre o salto para um valor próximo de  $\delta = 0.08$ , já na figura 3.10(b) com o aumento da temperatura para  $\theta = 2$  ocorre o salto para  $\delta = 0.14$ , aumentando novamente a temperatura para  $\theta = 2.5$  o salto ocorre para  $\delta = 0.175$ , e para  $\theta = 3$  o salto acontece para  $\delta = 0.2$ . Portanto a temperatura influência também na perda de estabilidade do sistema, pois quanto maior a temperatura do sistema, maior terá que ser à força de excitação externa para que ocorra a perda da estabilidade e conseqüentemente o salto aconteça.

A seguir, obtém – se os tipos de ressonâncias secundárias do sistema, gerado pelo termo cúbico.

### 3.3.3 Ressonâncias secundárias

Para observar as ressonâncias superharmônicas e subharmônicas, é necessário que a ordem da excitação apareça ao mesmo tempo como parte da oscilação livre da solução. Assim para a análise das ressonâncias superharmônicas e subharmônicas gerada pela não linearidade cúbica, necessita – se que a ordem do amortecimento deva aparecer na mesma equação de

perturbação que gera essas ressonâncias. Assim  $\hat{\mu}z$  é igual a  $\varepsilon\mu z$ , e a equação que governa esse sistema é dada por,

$$\ddot{z} + 2\varepsilon\mu\dot{z} + (\theta - 1)z - \alpha\varepsilon z^3 + \gamma\varepsilon^2 z^5 = \delta\cos(\varpi\tau) \quad (3.43)$$

Logo utilizando o MME, procura-se uma aproximação de primeira ordem na solução da equação (3.43) na forma

$$u = u_0(T_0, T_1) + O(\varepsilon) \quad (3.44)$$

Substituindo a equação (3.44) na (3.43) e equacionando os coeficientes de  $\varepsilon$ , obtém-se;

$$D_0^2 z_0 + (\theta - 1)z_0 = \delta\cos(\varpi\tau) \quad (3.45)$$

$$D_0^2 z_1 + (\theta - 1)z_1 = -2D_0 D_1 z_0 - 2\mu D_0 z_0 + \alpha z_0^3 \quad (3.45.a)$$

A solução geral de (3.45) pode ser escrita como

$$u_0 = A(T_1)\exp(iT_0\sqrt{\theta-1}) + \Lambda\exp(i\varpi T_0)$$

onde

$$\Lambda = \frac{\delta}{2((\theta-1) - \varpi^2)} \quad (3.46)$$

A partir da resolução do sistema acima tem-se que as ressonâncias secundárias acontecem quando  $\varpi \approx 3\sqrt{\theta-1}$  e  $\varpi \approx \frac{1}{3}\sqrt{\theta-1}$ .

A seguir, estuda-se a dinâmica do sistema na ressonância subharmonica.

### 3.3.3.1 Ressonância subharmonica, $\varpi \approx 3\sqrt{\theta-1}$

Para analisar as ressonâncias subharmônicas introduz – se o parâmetro de sintonia  $\sigma$  em (3.45) de acordo com,

$$\varpi = 3\sqrt{\theta-1} + \varepsilon\sigma \quad (3.47)$$

Os termos proporcionais à  $\exp(\pm i\sqrt{\theta-1}T_0)$ , e à  $\exp[\pm i(\varpi-2\sqrt{\theta-1})T_0]$ , são aqueles que produzem termos seculares em  $z_1$ . Logo  $(\varpi-2\sqrt{\theta-1})T_0$  é expresso como

$$(\varpi-2\sqrt{\theta-1})T_0 = \sqrt{\theta-1}T_0 + \varepsilon\sigma T_0 = \sqrt{\theta-1}T_0 + \sigma T_1 \quad (3.48)$$

Assim, para eliminar os termos em (3.45) que produzem termos seculares em  $z_1$ , tem – se que,

$$-2i\sqrt{\theta-1}D_1A - 2i\mu\sqrt{\theta-1}A + 6A\Lambda^2\alpha + 3\alpha a^2\bar{A} + 3\alpha\bar{A}\Lambda\exp(iT_1\sigma) = 0 \quad (3.49)$$

Sendo  $A = \frac{1}{2}a\exp(i\beta)$ , onde  $a$  e  $\beta$  são reais, e separando a parte real e imaginária, e realizando algumas manipulações algébricas, obtém – se que;

$$\begin{cases} a' = -a\mu + \frac{3\alpha\Lambda}{4\sqrt{\theta-1}}a^2\sin(\sigma T_1 - 3\beta) \\ a\beta' = -\frac{3\alpha\Lambda^2}{\sqrt{\theta-1}} - \frac{3a^3\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} - \frac{3\alpha\Lambda}{4\sqrt{\theta-1}}a^2\cos(\sigma T_1 - 3\beta) \end{cases} \quad (3.50)$$

Para transformar o sistema (3.50) em um sistema autônomo, considera – se que,

$$\psi = \sigma T_1 - 3\beta \quad (3.51)$$

e portanto

$$\begin{cases} a' = -a\mu + \frac{3\alpha\Lambda}{4\sqrt{\theta-1}} a^2 \sin(\psi) \\ a\psi' = a\sigma + \frac{9\alpha\Lambda^2}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{9a^3\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} + \frac{9\alpha\Lambda}{4\sqrt{\theta-1}} a^2 \cos(\psi) \end{cases} \quad (3.52)$$

Logo, a solução analítica aproximada é dada por,

$$u = a \cos\left(\frac{\omega\tau}{3} - \frac{\psi}{3}\right) + 2\Lambda \cos(\omega\tau) + 0(\varepsilon) \quad (3.53)$$

Para movimentos no estado estacionário, tem – se que,

$$\begin{aligned} 3a\mu &= \frac{9\alpha\Lambda}{4\sqrt{\theta-1}} a^2 \sin(\psi) \\ a\sigma + \frac{9\alpha\Lambda^2}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{9a^3\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} &= -\frac{9\alpha\Lambda}{4\sqrt{\theta-1}} a^2 \cos(\psi) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Eliminado  $\psi$  da equação acima, obtém – se a equação da resposta em frequência que novamente depende do valor da temperatura adotado no sistema. Logo,

$$\left[ 9\mu^2 + \left( \sigma + \frac{9\alpha\Lambda^2}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{9a^2\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} \right)^2 \right] a^2 = \frac{81a^4\alpha^2\Lambda^2}{16(\theta-1)} \quad (3.55)$$

A equação (3.55) mostra que tanto para  $a = 0$  ou

$$\left[ 9\mu^2 + \left( \sigma + \frac{9\alpha\Lambda^2}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{9a^2\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} \right)^2 \right] = \frac{81a^2\alpha^2\Lambda^2}{16(\theta-1)} \quad (3.56)$$

são soluções. A equação (3.56) tem sua solução da seguinte forma,

$$a^2 = p \pm (p^2 - q)^{1/2} \quad (3.75)$$

onde

$$p = -\frac{8\sqrt{(\theta-1)}\sigma}{9\alpha} - 6\Lambda^2 \quad \text{e} \quad q = \frac{64(\theta-1)}{81\alpha^2} \left[ 9\mu^2 + \left( \sigma + \frac{9\alpha\Lambda^2}{\sqrt{(\theta-1)}} \right)^2 \right] \quad (3.58)$$

Para soluções não triviais, segue de (3.58) que  $p > 0$  e  $p^2 - q \geq 0$ . Essas condições são satisfeitas se,

$$-\frac{4\sqrt{\theta-1}\sigma}{9\alpha} > \Lambda^2 \quad \text{e} \quad \frac{\alpha\Lambda^2}{\sqrt{\theta-1}} \left( \sigma + \frac{63\alpha^2\Lambda^2}{8\sqrt{\theta-1}} \right) + 2\mu^2 \leq 0 \quad (3.59)$$

Da primeira das equações de (3.59), como  $\Lambda^2 \geq 0$  e  $\alpha$  é um parâmetro do material que é positivo para valer a desigualdade conclui – se que  $\sigma < 0$ .

Da segunda das condições de (3.59), para um dado  $\Lambda$ , soluções não triviais podem existir somente se,

$$-\alpha\sigma \geq \frac{2\mu^2\sqrt{\theta-1}}{\Lambda^2} + \frac{63\alpha^2\Lambda^2}{8\sqrt{\theta-1}} \quad (3.60)$$

Enquanto para um dado  $\sigma$ , soluções não triviais podem existir somente se;

$$-\frac{\sigma}{\mu} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2} - 63} \leq \frac{63\Lambda^2\alpha}{4\mu\sqrt{\theta-1}} \leq -\frac{\sigma}{\mu} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2} - 63} \quad (3.61)$$

No plano  $\Lambda\sigma$  a condição da região onde solução não – trivial pode existir, é dada por,

$$\frac{63\Lambda^2\alpha}{4\mu\sqrt{\theta-1}} = -\frac{\sigma}{\mu} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2} - 63} \quad (3.62)$$

que é mostrada na figura 3.11.

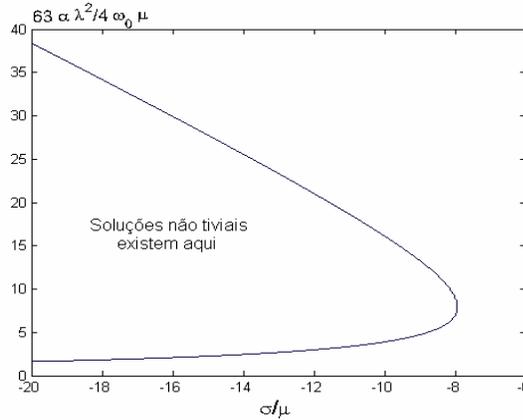
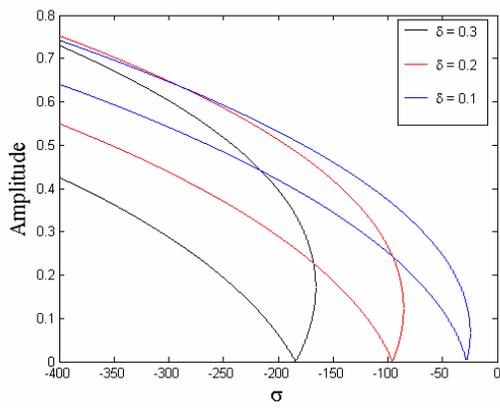


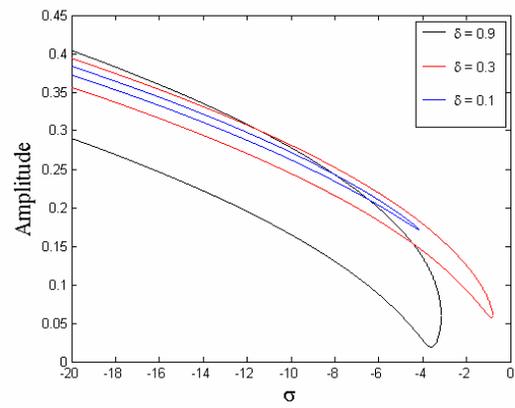
Figura 3.11: Regiões onde a resposta subharmonica existe

Quando estas condições acontecem, é possível que de certa forma a resposta do sistema para o termo de oscilação livre não decaia a zero a despeito da presença do amortecimento em contraste com a solução linear. Além do mais, no estado estacionário, a não linearidade ajusta a frequência do termo de oscilação livre a um terço a frequência de excitação de modo que a resposta seja periódica. Desde que a frequência do termo da oscilação livre é um terço da excitação, tal ressonância é chamada de ressonância subharmonica.

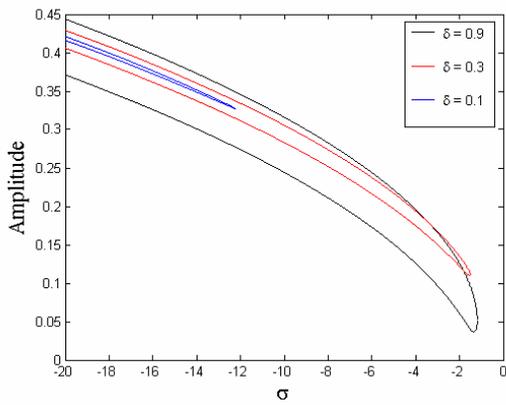
Diversas curvas de resposta em frequência são mostradas na figura 3.12, já na figura 3.13 é mostrado estas curvas de resposta em frequência sujeitas à influência do amortecimento, a amplitude do termo de oscilação livre é mostrada como uma função da amplitude da excitação na figura 3.14.



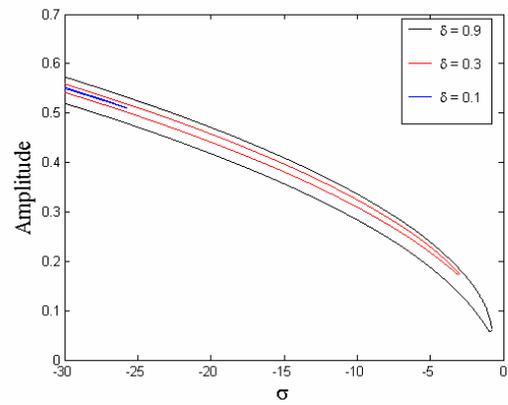
(a)



(b)



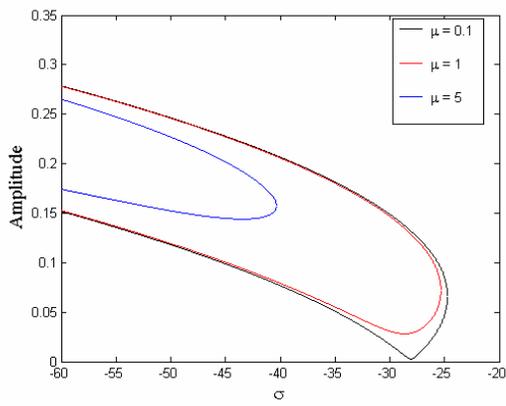
(c)



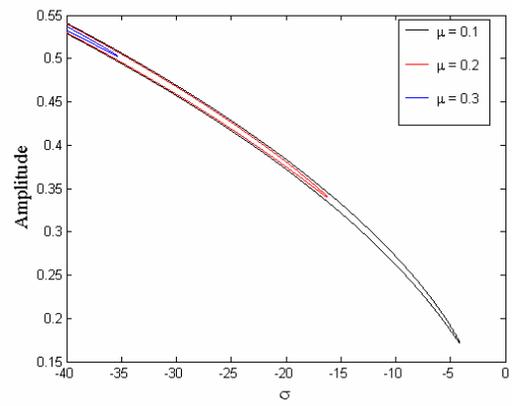
(d)

Figura 3.12: Amplitude do termo de oscilação-livre versus o parâmetro de sintonia. (a)

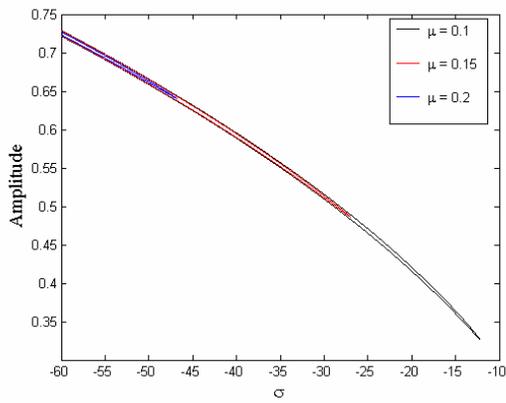
$\theta = 1.03$ , (b)  $\theta = 2$ , (c)  $\theta = 2.5$  e (d)  $\theta = 3$ .



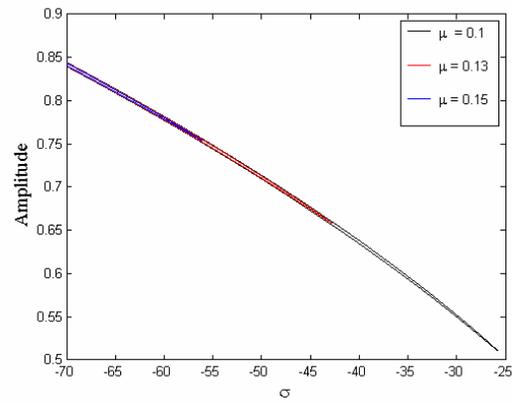
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.13: Efeito do amortecimento sobre a resposta para  $\delta = 0.1$  e  $\varepsilon = 0.001$  como os seguintes parâmetro, (a)  $\theta = 1.03$ , (b)  $\theta = 2$ , (c)  $\theta = 2.5$  e (d)  $\theta = 3$ .

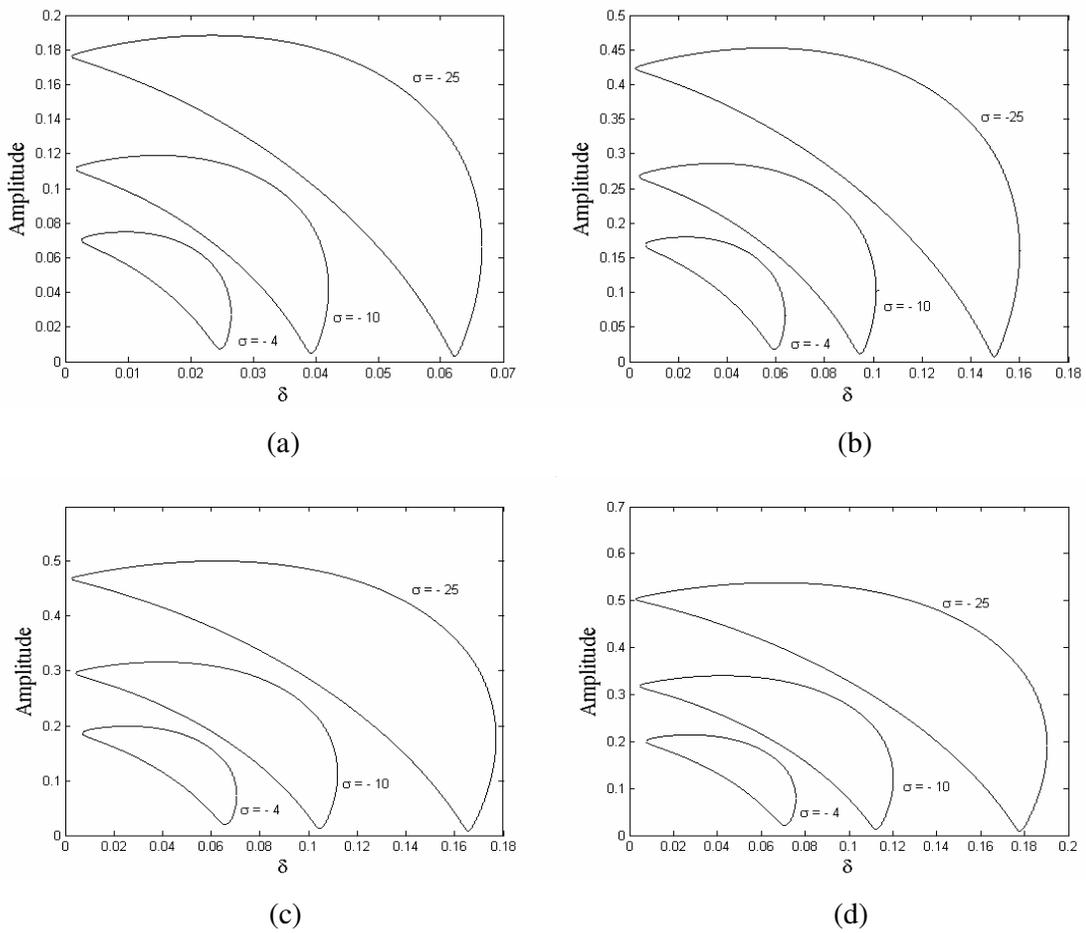


Figura 3.14: Amplitude do termo de oscilação-livre pela excitação. (a)  $\theta = 1.03$ , (b)  $\theta = 2$ , (c)  $\theta = 2.5$  e (d)  $\theta = 3$ .

A figura 3.15 ilustra a influência do coeficiente de amortecimento  $\mu$  da amplitude do termo de oscilação livre com a amplitude da excitação

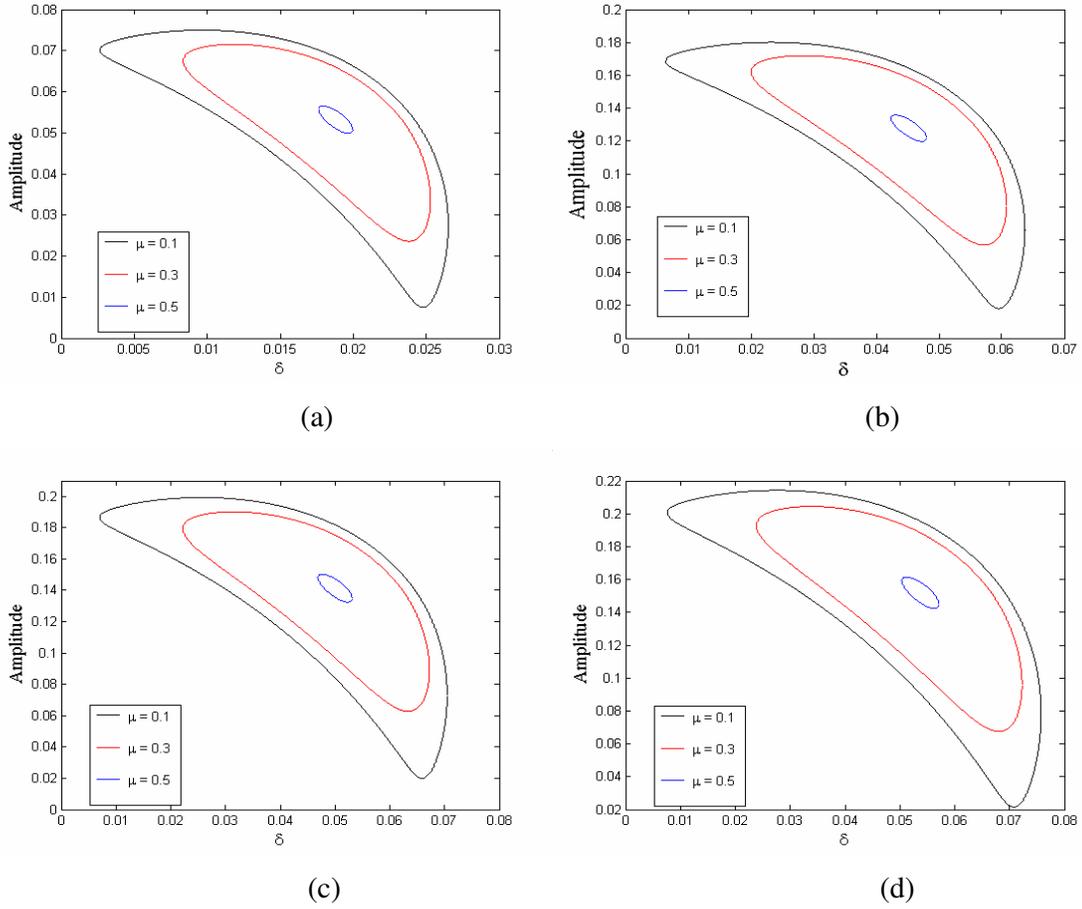


Figura 3.15: Influência do amortecimento sobre a resposta para  $\delta = 0.1$ ,  $\sigma = -4$ ,  $\varepsilon = 0.001$  e (a)  $\theta = 1.03$ , (b)  $\theta = 2$ , (c)  $\theta = 2.5$  e (d)  $\theta = 3$ .

Nota – se que para a ressonância subharmonica não ocorre o fenômeno de salto. A estabilidade de  $(a_0, \psi_0)$  é determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana,

$$J = \begin{bmatrix} \mu & -a \left( 3\sigma + \frac{27\Lambda^2 \alpha}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{27a^2 \alpha}{8\sqrt{\theta-1}} \right) \\ -\frac{1}{a} \left( \sigma + \frac{9\Lambda^2 \alpha}{\sqrt{\theta-1}} - \frac{9a^2 \alpha}{8\sqrt{\theta-1}} \right) & -3\mu \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Os autovalores correspondentes  $\lambda_i$  são as raízes de,

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda - 3\mu^2 - \left( 3\sigma + \frac{27\Lambda^2 \alpha}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{27a^2 \alpha}{8\sqrt{\theta-1}} \right) \left( \sigma + \frac{9\Lambda^2 \alpha}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{9a^2 \alpha}{8\sqrt{\theta-1}} \right) = 0 \quad (3.64)$$

Na figura 3.16 é mostrada somente a dinâmica da solução trivial.

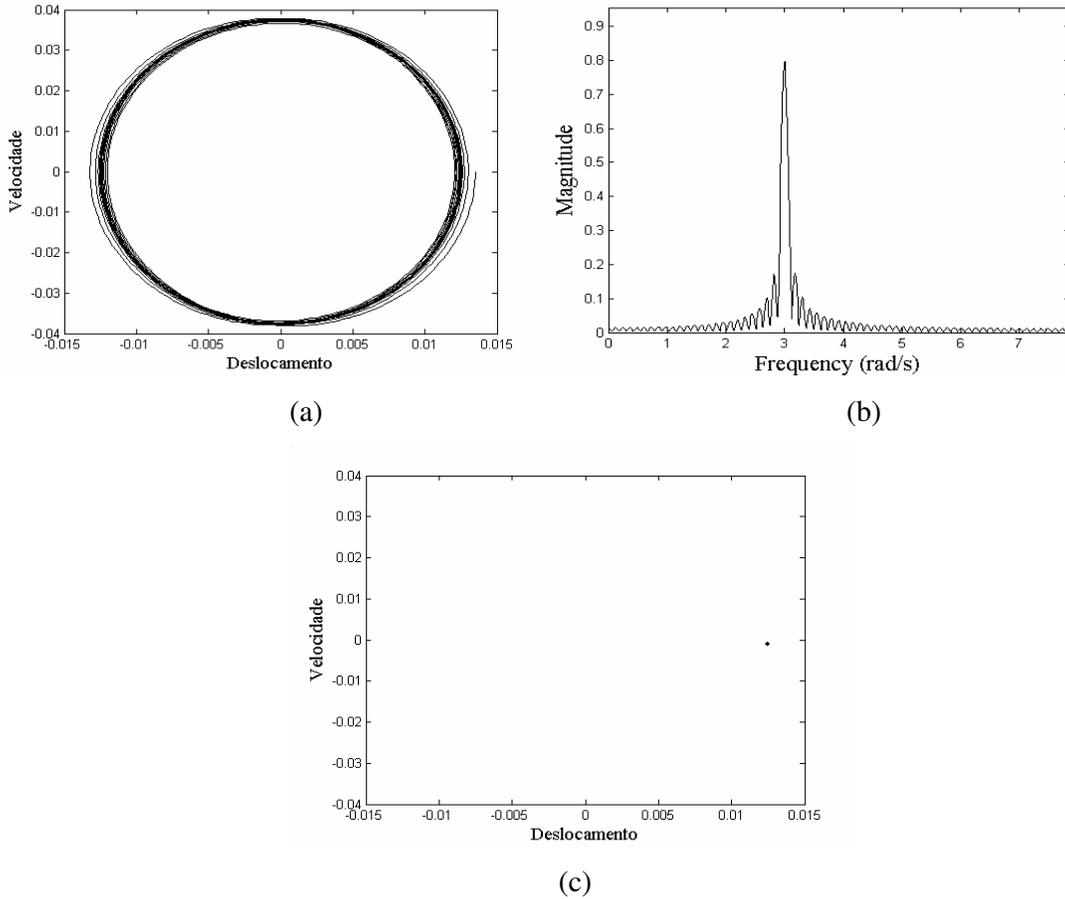


Figura 3.16: Dinâmica do oscilador para a ressonância subharmonica. (a) Plano de Fase, (b) Espectro de frequência, (c) Mapa de Poincaré para  $\delta = 0.1$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.001$

Através do plano de fase, espectro de frequência e mapa de Poincaré conclui – se que o sistema apresenta solução periódica.

A seguir, são apresentados resultados quando o sistema esta próxima a ressonância superharmonica.

### 3.3.3.2 Ressonância superharmonica, $\varpi \approx \frac{1}{3}\sqrt{\theta-1}$

Neste caso a aproximação de  $\varpi$  para  $\frac{1}{3}\sqrt{\theta-1}$  é feita pela introdução do parâmetro de sintonia  $\sigma$  de acordo com;

$$3\varpi = \sqrt{\theta-1} + \varepsilon^2\sigma \quad (3.65)$$

Os termos proporcionais à  $\exp(\pm i\sqrt{\theta-1}T_0)$  e  $\alpha\Lambda^3\exp(\pm 3iT_0\varpi)$ , são aqueles que produzem termos seculares na equação (3.45.a). Logo tem – se que  $3\varpi T_0$  pode ser expresso como

$$3T_0\varpi = \sqrt{\theta-1}T_0 + \varepsilon^2 T_0\sigma \Rightarrow 3T_0\phi = \sqrt{\theta-1}T_0 + T_1\sigma \quad (3.66)$$

Usando (3.66), são encontrados termos seculares em  $z_1$  que são eliminados se,

$$-2i\sqrt{\theta-1}D_1A - 2i\mu\sqrt{\theta-1}A + 6A\Lambda^2\alpha + 3\alpha\alpha^2\bar{A} + \alpha\Lambda^3\exp(iT_1\sigma) = 0 \quad (3.67)$$

Sendo  $A = \frac{1}{2}a\exp(i\beta)$ , onde  $a$  e  $\beta$  são reais, e separando a parte real e imaginária, e realizando algumas manipulações algébricas, obtém – se que;

$$\begin{cases} a' = -a\mu + \frac{\alpha\Lambda^3}{\sqrt{\theta-1}}\text{sen}(\psi) \\ a\phi' = a\sigma + \frac{3\alpha\Lambda^2}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{3a^3\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} + \frac{\alpha\Lambda^3}{\sqrt{\theta-1}}\text{cos}(\psi) \end{cases} \quad (3.68)$$

onde

$$\psi = \sigma T_1 - \beta \quad (3.69)$$

Assim a solução analítica aproximada é dada por,

$$u = a\cos(3\varpi\tau - \psi) + 2\Lambda\cos(\varpi\tau) + 0(\varepsilon) \quad (3.70)$$

Para achar o movimento no estado estacionário que corresponde à  $a' = \psi' = 0$ , que corresponde à solução de (3.68), tem – se que;

$$\begin{cases} a\mu = \frac{\alpha\Lambda^3}{\sqrt{\theta-1}}\text{sen}(\psi) \\ a\sigma + \frac{3\alpha\Lambda^2}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{3a^3\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} = -\frac{\alpha\Lambda^3}{\sqrt{\theta-1}}\text{cos}(\psi) \end{cases} \quad (3.71)$$

Elevando dos dois lados ao quadrado, na equação (3.71) e somando estas equações, obtém – se que

$$a^2\mu^2 + a^2 \left( \sigma + \frac{3\alpha\Lambda^2}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{3a^2\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} \right)^2 = \frac{\alpha^2\Lambda^6}{(\theta-1)} \quad (3.72)$$

A seguir, realiza – se a análise da curva de resposta em frequência.

### 3.3.3.2.a Análise da curva de ressonância

Resolvendo (3.72) para  $\sigma$  em termos de  $a$ , é obtida a seguinte curva de resposta em frequência relacionando a amplitude  $a$  e a frequência de excitação,

$$\sigma = -\frac{1}{8} \left( \frac{3a^3\alpha + 24a\alpha\Lambda^2 \pm 8\sqrt{\Lambda^6\alpha^2 - \mu^2a^2(\theta-1)}}{a\sqrt{\theta-1}} \right) \quad (3.73)$$

Portanto, quando  $\varpi \approx \frac{1}{3}\sqrt{\theta-1}$  o termo de oscilação livre não decaia a zero com a presença do amortecimento diferentemente da solução linear. Além do mais, a não linearidade ajusta a frequência do termo da oscilação livre a três vezes a frequência de excitação. Desde que, a frequência do termo geral da oscilação livre é três vezes a frequência de excitação, tal ressonância é chamada de ressonância superharmonica.

Neste caso o pico da amplitude do termo de oscilação livre é dado por;

$$a_p = \frac{\alpha\Lambda^3}{\mu\sqrt{\theta-1}} \quad (3.74)$$

Em contraste com o caso da ressonância primária,  $a_p$  depende do parâmetro  $\alpha$ , que é o coeficiente do termo não – linear de ordem três. O correspondente valor do parâmetro de sintonia é dado por,

$$\sigma_p = -\frac{3\alpha\Lambda^2}{\sqrt{\theta-1}} \left( 1 + \frac{\alpha^2\Lambda^4}{8(\theta-1)\mu^2} \right) \quad (3.75)$$

Na figura 3.17, mostra – se uma comparação do caso de um oscilador linear com o caso não linear (SMA). Já nas figuras 3.18 e 3.19 é ilustrado o efeito da amplitude de excitação e do amortecimento, respectivamente.

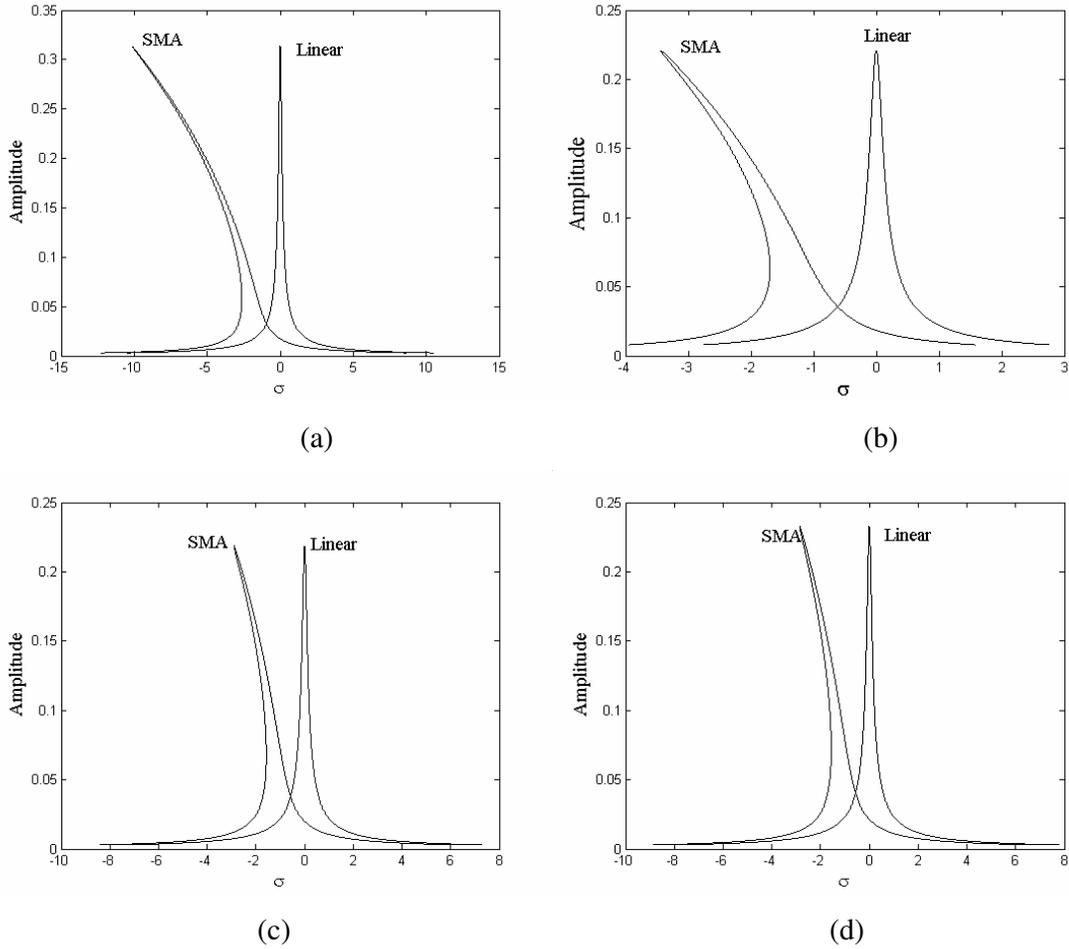


Figura 3.17: Efeito da Não Linearidade: (a)  $\theta = 1.3$ , (b)  $\theta = 2$ , (c)  $\theta = 2.5$  e (d)  $\theta = 3$ .

As curvas de resposta em frequência apresentados na figura 3.17 exibem um comportamento do tipo mola mole (softening spring), Nayfeh e Balachandran (1995).

Na figura 3.18 é apresentado as curvas de resposta em frequência sob a influência da amplitude de excitação.

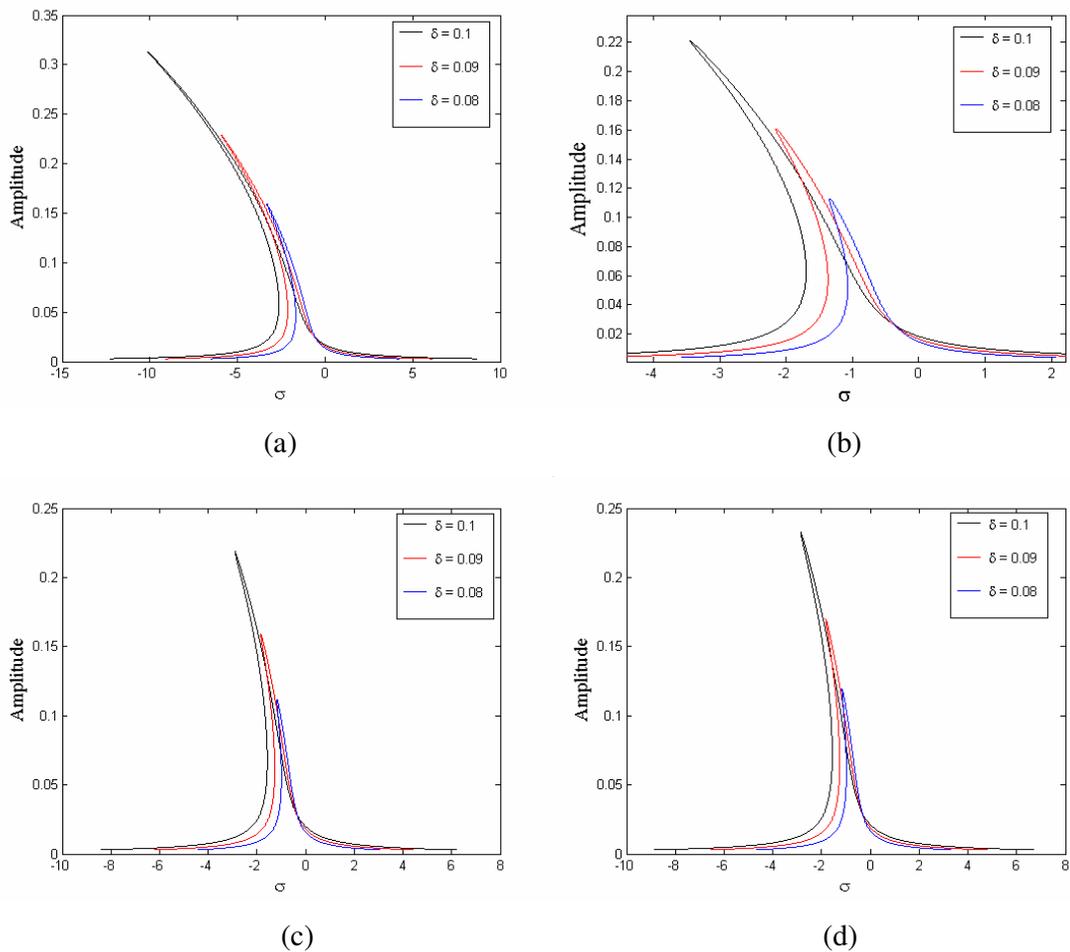


Figura 3.18: Efeito da amplitude de excitação: (a)  $\theta = 1.3$ , (b)  $\theta = 2$ , (c)  $\theta = 2.5$  e (d)  $\theta = 3$ .

Aqui percebe-se um fato semelhante ao caso da ressonância primária. Na figura 3.18(a), onde tem-se que  $\theta = 1.3$  a curvatura não linear é bem acentuada, em relação à figura 3.18(d) onde a temperatura é mais alta ( $\theta = 3$ ), isso deve-se ao fato de que conforme a temperatura é maior a estrutura se torna mais rígida, e conseqüentemente os termos não lineares atuam com menor intensidade na dinâmica do sistema.

Na figura 3.19 é apresentado o efeito do amortecimento sobre a resposta do oscilador.

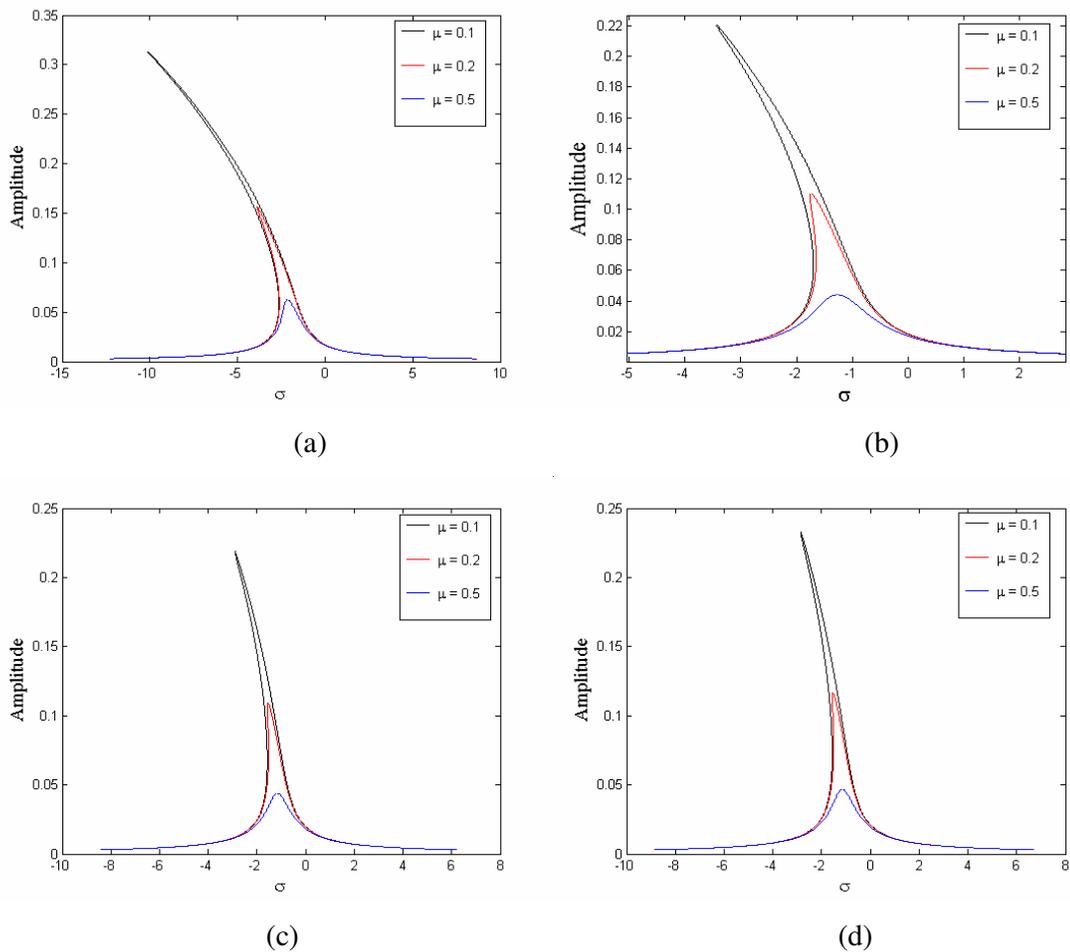


Figura 3.19: Efeito do amortecimento: (a)  $\theta = 1.3$ , (b)  $\theta = 2$ , (c)  $\theta = 2.5$  e (d)  $\theta = 3$ .

Aqui em ambos os casos nota – se que, para um valor alto do parâmetro de amortecimento, por exemplo,  $\mu = 0.5$  a amplitude da resposta é pequena e a curva de resposta em frequência mostra um comportamento quase linear. Agora com a diminuição do amortecimento o sistema responde com um aumento da amplitude de oscilação e com uma inclinação da curva de frequência.

A seguir, é apresentada a análise da estabilidade do sistema.

### 3.3.3.2.b Estabilidade das soluções

O sistema 3.71 é um sistema dinâmico autônomo. Os pontos fixos  $(a_0, \psi_0)$  do sistema são dados por

$$\begin{aligned}
a_0\mu &= \frac{\alpha\Lambda^3}{\sqrt{\theta-1}} \text{sen}(\psi_0) \\
a_0\sigma + \frac{3a_0\alpha\Lambda^2}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{3a_0^3\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} &= -\frac{\alpha\Lambda^3}{\sqrt{\theta-1}} \text{cos}(\psi_0)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

A estabilidade de  $(a_0, \psi_0)$  é determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana. Logo a matriz Jacobiana do sistema é dada por,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\mu & -a \left( \sigma + \frac{3\Lambda^2\alpha}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{3a^2\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} \right) \\ -\frac{1}{a} \left( \sigma + \frac{3\Lambda^2\alpha}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{9a^2\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} \right) & -\mu \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

Os autovalores correspondentes  $\lambda_i$  são as raízes de,

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 + \left( \sigma + \frac{3\Lambda^2\alpha}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{9a^2\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} \right) \left( \sigma + \frac{3\Lambda^2\alpha}{\sqrt{\theta-1}} + \frac{3a^2\alpha}{8\sqrt{\theta-1}} \right) = 0 \tag{3.78}$$

Em (3.78) a soma dos autovalores é  $-2\mu$ . Esta soma é sempre negativa porque  $\mu > 0$ . Consequentemente um dos autovalores tem sempre a parte real negativa. Este fato elimina a possibilidade de um par de autovalores puramente imaginários e, portanto, uma bifurcação de Hopf. Portanto uma bifurcação estática pode ocorrer. Para isso, um dos autovalores deve ser zero e isso acontece quando,

$$\Phi_1 = \mu^2 + \left( \sigma + 3\Lambda^2\alpha + \frac{9a^2\alpha}{8} \right) \left( \sigma + 3\Lambda^2\alpha + \frac{3a^2\alpha}{8} \right) = 0 \tag{3.79}$$

Portanto os movimentos no estado estacionários são instáveis quando

$$\Phi_1 = \mu^2 + \left( \sigma + 3\Lambda^2\alpha + \frac{9a^2\alpha}{8} \right) \left( \sigma + 3\Lambda^2\alpha + \frac{3a^2\alpha}{8} \right) < 0 \tag{3.80}$$

e do contrário o movimento é estável.

As figuras 3.20, 3.21, 3.22, 3.23 e 3.24 mostram o plano de fase de uma solução de equilíbrio que é verificada pela investigação dos autovalores da matriz Jacobiana, através do correspondente espectro de frequência e mapa de Poincaré, para diferentes valores do parâmetro de sintonia  $\sigma$ . Aqui para as simulações assume-se que  $\theta = 2$ , pois a dinâmica do oscilador não se altera com a temperatura.

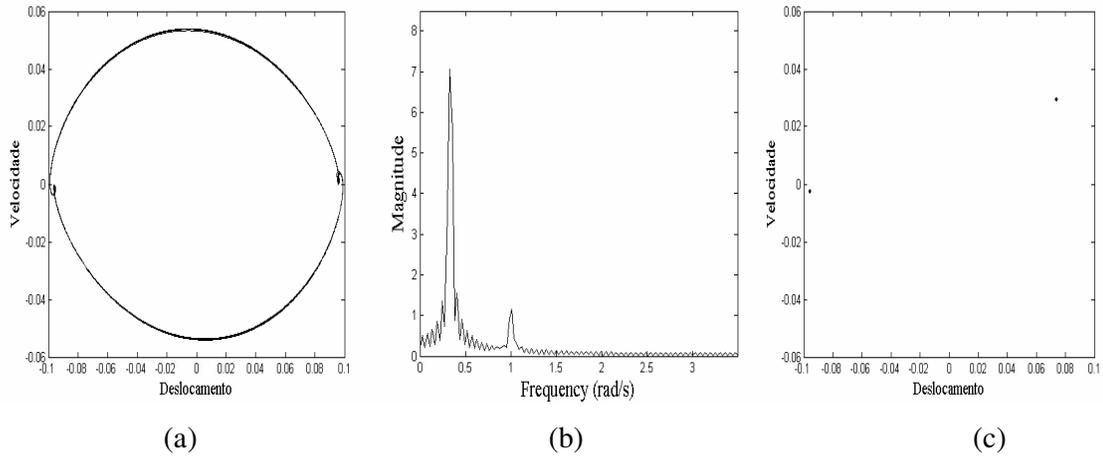


Figura 3.20: (a) Plano de fase, (b) espectro de frequência e (c) Mapa de Poincaré para valores  $\sigma = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.001$ ,  $\delta = 0.1$  e  $\mu = 0.1$

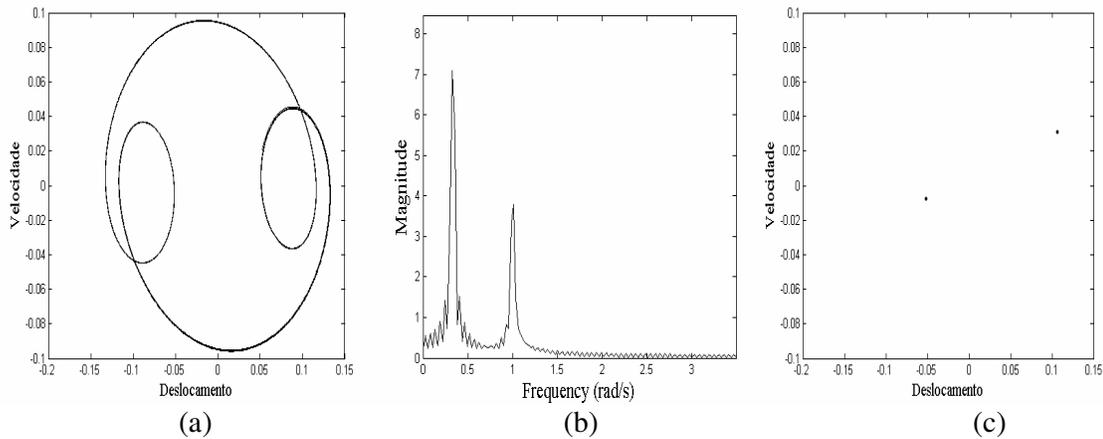


Figura 3.21: (a) Plano de fase, (b) espectro de frequência e (c) Mapa de Poincaré para valores  $\sigma = -1$ ,  $\varepsilon = 0.001$ ,  $\delta = 0.1$  e  $\mu = 0.1$

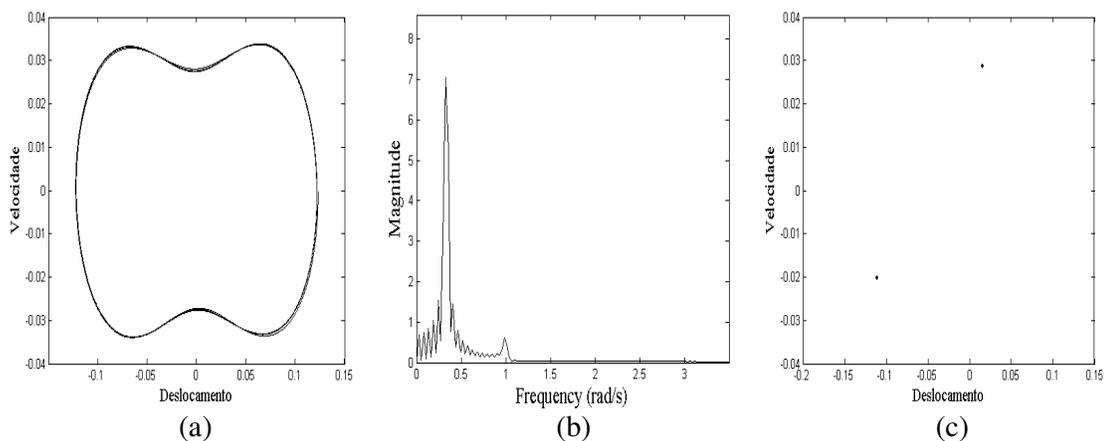


Figura 3.22: (a) Plano de fase, (b) espectro de frequência e (c) Mapa de Poincaré para valores  $\sigma = -3.43$ ,  $\varepsilon = 0.001$ ,  $\delta = 0.1$  e  $\mu = 0.1$

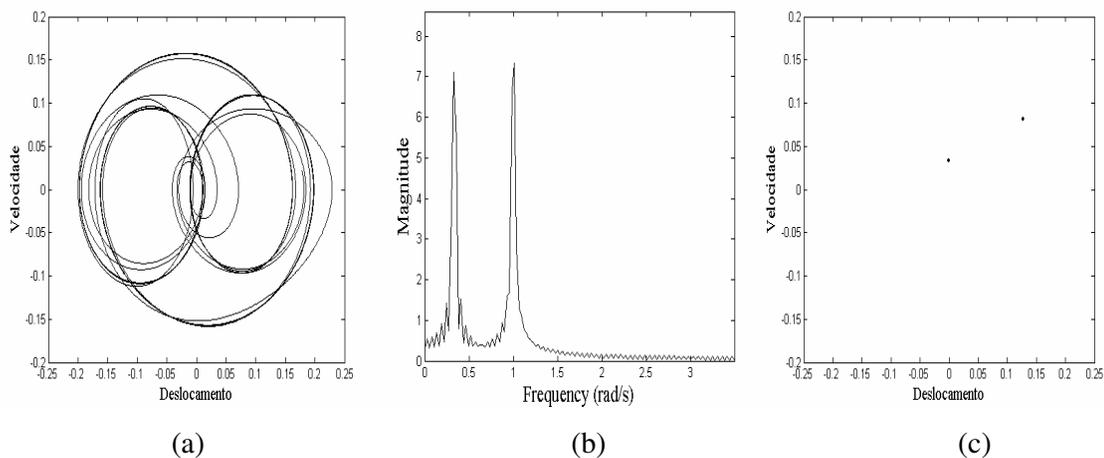


Figura 3.23: (a) Plano de fase, (b) espectro de frequência e (c) Mapa de Poincaré para valores  $\sigma = -1.7$ ,  $\varepsilon = 0.001$ ,  $\delta = 0.1$  e  $\mu = 0.1$

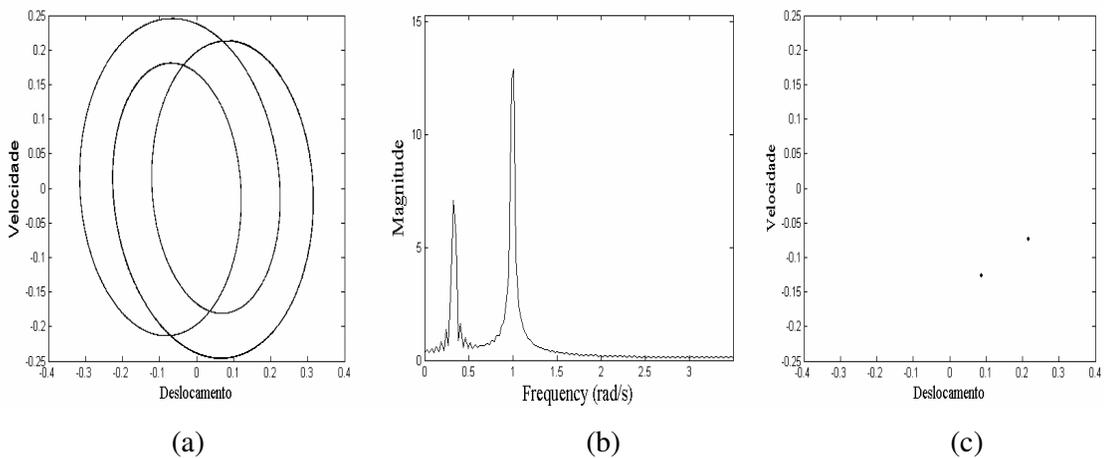


Figura 3.24 (a) Plano de fase, (b) espectro de frequência e (c) Mapa de Poincaré para valores  $\sigma = -3.4$ ,  $\varepsilon = 0.001$ ,  $\delta = 0.1$  e  $\mu = 0.1$

Nas figuras 3.20, 3.21 e 3.22 são mostrados movimentos estáveis do oscilador apresentando também dois picos no espectro de potência e dois pontos no mapa de Poincaré. Já nas figuras 3.23 e 3.24 os movimentos são instáveis, apresentando também dois picos no espectro de frequência e dois pontos no mapa de Poincaré. Além do mais, para completar a análise do comportamento qualitativo do sistema para os diversos valores adotados para o parâmetro de sintonia  $\sigma$ , os expoentes de Lyapunov são mostrados na tabela 3.4,

Tabela 3.4: Expoentes de Lyapunov

$\sigma$	Tipo de Atrator	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$	$\vartheta_3$
0.1	Periódico	-0.0997	0	-0.10023
-1	Periódico	-0.0996	0	-0.10026
-1.7	Periódico	-0.0988	0	-0.10113
-3.4	Periódico	-0.0995	0	-0.10040
-3.43	Periódico	-0.0995	0	-0.10045

Assim, o movimento do oscilador para os diversos parâmetros adotados são todos periódicos de período 2.

A seguir, encontra – se o tipo de bifurcação que pode ocorrer no sistema quando varia – se o parâmetro de sintonia.

### 3.3.3.2.c Bifurcações

A figura 3.25 é um diagrama de bifurcação construído usando  $\sigma$  como um parâmetro de controle, onde as linhas cheias representam pontos estáveis, enquanto as linhas pontilhadas correspondem a pontos instáveis.

Considerando o aumento de  $\sigma$  a partir do ponto F, a solução percorre a curva FAB, com um aumento da amplitude da resposta do oscilador. Quando  $\sigma = \sigma_1$ , no ponto B a solução perde estabilidade ocorrendo uma bifurcação do tipo sela – nó, e a amplitude sofre um salto do valor do ponto B até o ponto C com um aumento da amplitude. Subsequentemente a amplitude sofre um decaimento percorrendo a curva CE.

Agora, quando  $\sigma$  sofre um decréscimo partindo do ponto E, a resposta da amplitude aumenta percorrendo a curva ECD. Quando  $\sigma = \sigma_2$  a solução perde estabilidade através de uma bifurcação sela – nó, o que leva a um salto na amplitude do ponto D até o ponto A, onde neste salto ocorre uma variação brusca da amplitude

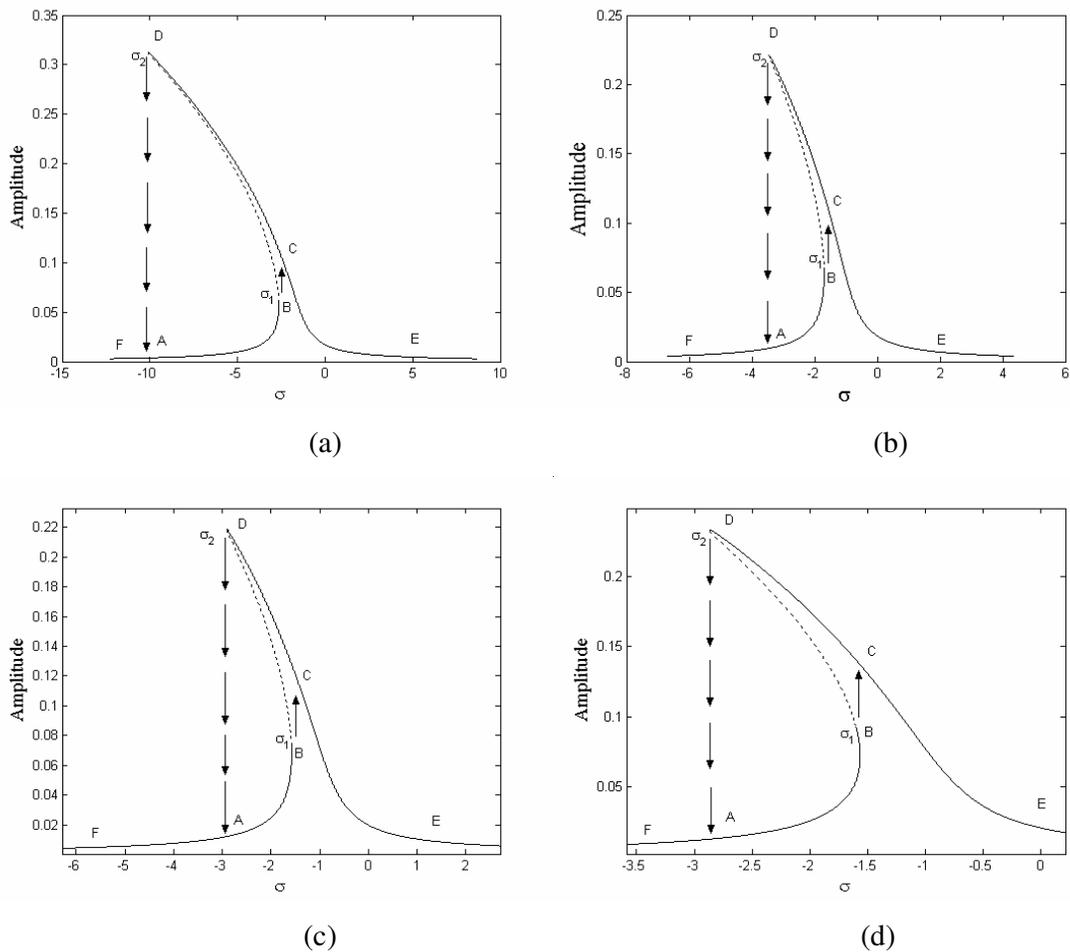


Figura 3.25: Fenômeno de salto para a ressonância primária de um oscilador com memória de forma, (a)  $\theta = 1.3$ , (b)  $\theta = 2$ , (c)  $\theta = 2.5$  e (d)  $\theta = 3$ .

Como no caso da ressonância primária observa – se que para diferentes temperaturas, o fenômeno de salto é diferente. Para  $\theta = 1.3$  a amplitude atinge um valor de máximo de oscilação, maior do que para os outros valores de  $\theta$ , devido ao fato da liga ser menos resistente, com isso a amplitude de oscilação é maior, e conseqüentemente o fenômeno de salto é maior do que comparado com os outros valores. Percebe – se também que a faixa de instabilidade do sistema (linhas pontilhadas) fica menor para temperaturas mais elevadas.

A seguir, realiza – se um estudo do sistema ideal mostrando a resposta livre do oscilador para baixas temperaturas.

### 3.3.4 Resposta livre do oscilador para baixas temperaturas

Devido ao fato das ligas de memória de forma apresentarem propriedades diferentes de acordo com a temperatura, à análise aqui consiste em mostrar o comportamento do sistema considerando uma temperatura onde a fase martensítica é estável.

Numericamente, mostra – se que o oscilador em vibração livre e sem amortecimento apresenta três pontos fixos: a origem do plano de fase é um ponto de sela, enquanto os outros dois pontos fixos são centros, chamados de  $C_1$  e  $C_2$ , e o plano de fase é mostrado na figura 3.26.

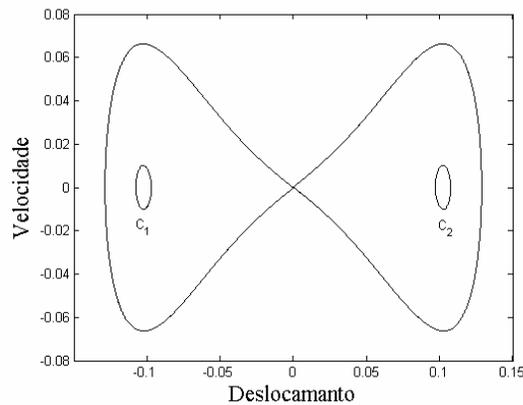


Figura 3.26: Plano de fase para o oscilador na fase martensítica sem amortecimento

No caso onde a amplitude de excitação  $p(t)$  e o amortecimento viscoso são nulos na Eq. (3.4) a equação de movimento do oscilador é dado por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \bar{q}(T - T_M)x - \bar{b}x^3 + \bar{e}x^5 = 0 \quad (3.81)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema podem ser obtidos da Eq. (3.81), desprezando o termo da aceleração. O resultado é o seguinte

$$\bar{q}(T - T_M)z - \bar{b}z^3 + \bar{e}z^5 = 0 \quad (3.82)$$

onde  $z$  é a solução do sistema. Da Eq. (3.82) são obtidas cinco possibilidades de pontos de equilíbrio, mas somente aqueles que correspondem a números reais tem sentido físico. Assim são encontrados três pontos fixos que satisfazem estas condições, são eles:  $\pm z$  e zero.

São investigadas pequenas oscilações em torno destes pontos fixos. Conseqüentemente é determinada uma primeira aproximação para o centro  $C_2$  da figura 3.26, para este fim, é adotada a seguinte transformação,

$$x = y + z \quad (3.83)$$

portanto, substituindo (3.83) em (3.81) obtém-se que

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \bar{q}(T - T_M)(y + z) - \bar{b}(y + z)^3 + \bar{e}(y + z)^5 = 0 \quad (3.84)$$

Esta transformação tem o objetivo de deslocar o centro  $C_2$  até a origem do plano de fase. Expandindo a equação (3.84) obtém-se que:

$$m\ddot{y} + y(\bar{q}(T - T_M) - 3\bar{b}z^2 + 5\bar{e}z^4) + y^2(10\bar{e}z^3 - 3\bar{b}z) + y^3(10\bar{e}z^2 - \bar{b}) + 5\bar{e}zy^4 + \bar{e}y^5 = 0 \quad (3.85)$$

A equação (3.85) pode ser normalizada como

$$\ddot{y} + y[\alpha_1 - \alpha_2]y^2 + [\gamma_1 - \gamma_2]y^3 + \eta_1 y^4 + \eta_2 y^5 = 0 \quad (3.86)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{qA_r(T - T_M)}{mL} - \frac{3bA_r z^2}{mL^3} + \frac{5eA_r z^4}{mL^5} & \alpha_1 &= \frac{10eA_r z^3}{\omega_0^2 m L^4} & \alpha_2 &= \frac{3bA_r z}{\omega_0^2 m L^2} & \gamma_1 &= \frac{10eA_r z^2}{\omega_0^2 m L^3} \\ \gamma_2 &= \frac{bA_r}{\omega_0^2 m L} & \eta_1 &= \frac{5eA_r z}{m\omega_0^2 L^2} & \eta_2 &= \frac{eA_r}{m\omega_0^2 L} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Agora é utilizado o método das múltiplas escalas para achar analiticamente a solução aproximada da equação (3.86), para isso é realizado um balanço de ordem da seguinte forma.

Efetua – se a seguinte transformação  $y = u\varepsilon$  na equação (3.86), onde  $\varepsilon$  é o parâmetro responsável por este balanço, Nayfeh (1980).

Portanto a equação (3.86) torna – se

$$\ddot{u} + u + \varepsilon[\alpha_1 - \alpha_2] u^2 + \varepsilon^2[\gamma_1 - \gamma_2] u^3 + \varepsilon^3 \eta_1 u^4 + \varepsilon^4 \eta_2 u^5 = 0 \quad (3.88)$$

Para determinar uma expansão de quarta ordem necessita – se de cinco escalas, assim  $T_0 = \tau$ ,  $T_1 = \varepsilon\tau$ ,  $T_2 = \varepsilon^2\tau$ ,  $T_3 = \varepsilon^3\tau$ ,  $T_4 = \varepsilon^4\tau$ . É procurada uma solução da equação (3.88) na forma de série de potência da forma

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + \varepsilon^3 u_3(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + O(\varepsilon^4) \quad (3.89)$$

Substituindo a equação (3.89) em (3.88) e equacionando os termos de potência  $\varepsilon$ , obtém – se a seguinte aproximação analítica de quarta ordem.

$$\begin{aligned} u = & a \cos(\tau + \beta) + \varepsilon \left[ \frac{1}{6} a^2 (\alpha_1 - \alpha_2) \cos(2\tau + 2\beta) - \frac{a^2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{2} \right] + \\ & \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{48} a^3 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \cos(3\tau + 3\beta) - \frac{1}{32} a^3 (\gamma_1 - \gamma_2)^2 \cos(3\tau + 3\beta) \right] + \\ & \varepsilon^3 \left[ \frac{1}{480} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\gamma_1 - \gamma_2) \cos(4\tau + 4\beta) + \frac{1}{720} a^4 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_1 - \alpha_2) \cos(4\tau + 4\beta) \right. \\ & - \frac{1}{360} a^4 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \cos(4\tau + 4\beta) + \frac{1}{96} (\alpha_1 - \alpha_2) (\gamma_1 - \gamma_2) \cos(2\tau + 2\beta) \\ & + \frac{1}{144} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cos(2\tau + 2\beta) - \frac{1}{72} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 \cos(2\tau + 2\beta) \\ & + \frac{1}{1080} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cos(4\tau + 4\beta) - \frac{1}{540} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 \cos(4\tau + 4\beta) \\ & + \frac{1}{18} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cos(2\tau + 2\beta) - \frac{1}{9} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 \cos(2\tau + 2\beta) \\ & - \frac{19}{72} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \frac{19}{36} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 + \\ & + \frac{1}{120} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\gamma_1 - \gamma_2) \cos(4\tau + 4\beta) + \frac{1}{3} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\gamma_1 - \gamma_2) \cos(2\tau + 2\beta) \\ & - \frac{7}{8} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{1}{120} a^4 \eta_1 \cos(4\tau + 4\beta) + \frac{1}{6} a^4 \eta_1 \cos(2\tau + 2\beta) \\ & \left. - \frac{3}{8} a^4 - \frac{7}{27} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2)^3 \cos(2\tau + 2\beta) - \frac{1}{6} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\gamma_1 - \gamma_2) \cos(2\tau + 2\beta) \right] + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (3.90)$$

onde a amplitude  $a$  e a fase  $\beta$  são governadas por

$$\dot{a}=0$$

$$\begin{aligned} a\dot{\beta} = & \frac{49a^5(\alpha_1 - \alpha_2)^4}{144} + \frac{3a^5(\gamma_1 - \gamma_2)^4}{32} + \frac{a^5(\alpha_1\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2)(\alpha_1 - \alpha_2)}{384} - \frac{623a^5(\alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_1^2\alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)}{576} + \frac{a^5(\alpha_1^3 - \alpha_2^3)(\alpha_1 - \alpha_2)}{576} \\ & + \frac{a^5(\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}{12} - \frac{45a^5(\alpha_2\gamma_2 + \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2)}{64} + \frac{a^5(\eta_1 + \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_2)(\alpha_1 - \alpha_2)}{12} + \frac{313a^5(\alpha_2^3 - \alpha_1^3)(\alpha_1 - \alpha_2)}{864} + \\ & - \frac{3a^5}{8} - \frac{a^5\alpha_1\alpha_2(\gamma_1 - \gamma_2)}{64} + \frac{203a^5(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(\gamma_1 - \gamma_2)}{384} + \frac{125a^5\alpha_1\alpha_2}{24} + \frac{11a^5(\alpha_1 - \alpha_2)}{126} + \frac{15a^5\eta_2}{16} - \frac{7a^5(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\gamma_1 - \gamma_2)}{8} \end{aligned} \quad (3.91)$$

A equação de modulação acima apresenta somente um ponto fixo na origem do sistema. Resolvendo numericamente as equações (3.90) e (3.91) é obtida a figura 3.27, que é o centro  $C_2$  deslocado para a origem do plano de fase

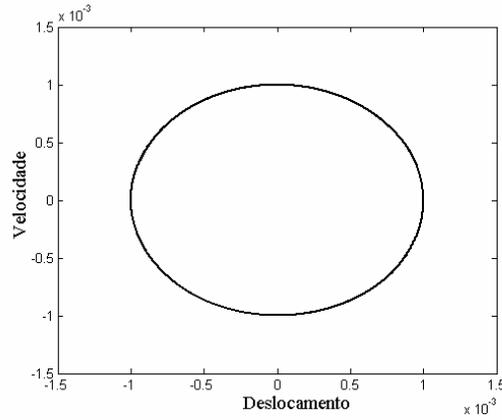


Figura 3.27: Plano de fase correspondendo ao centro  $C_2$  da figura 3.26

Agora, é obtida uma aproximação para o centro  $C_1$  da figura 3.26, para este fim substitui – se

$$x = y - z \quad (3.92)$$

Com esta transformação desloca – se o centro  $C_1$  para a origem do plano de fase, substituindo (3.92) em (3.81) obtém – se

$$m \frac{d^2 y}{dt} + \bar{q}(T - T_M)(y - z) - \bar{b}(y - z)^3 + \bar{e}(y - z)^5 = 0 \quad (3.93)$$

Expandindo e adimensionalizando a equação (3.93), obtém – se que

$$\ddot{y} + y - [\alpha_1 - \alpha_2]y^2 + [\gamma_1 - \gamma_2]y^3 - \eta_1 y^4 + \eta_2 y^5 = 0 \quad (3.94)$$

onde os termos  $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \eta_1, e \eta_2$  são dados pela equação (3.87). Para analisar a equação 3.94 é utilizado novamente o MME para obter uma solução analítica aproximada. Assim realizando um balanço de ordem de forma análoga a realizada anteriormente, tem – se a seguinte equação do oscilador em a vibração livre

$$\ddot{u} + u - \varepsilon[\alpha_1 - \alpha_2]u^2 + \varepsilon^2[\gamma_1 - \gamma_2]u^3 - \varepsilon^3\eta_1u^4 + \varepsilon^4\eta_2u^5 = 0 \quad (3.95)$$

Para determinar uma expansão de quarta ordem necessita – se de cinco escalas, assim  $T_0 = \tau, T_1 = \varepsilon\tau, T_2 = \varepsilon^2\tau, T_3 = \varepsilon^3\tau, T_4 = \varepsilon^4\tau$ , portanto é procurada uma solução da equação 3.95 na forma de série de potência da forma

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + \varepsilon^3 u_3(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + O(\varepsilon^4) \quad (3.96)$$

Substituindo a equação (3.96) em (3.95) e equacionando os termos de potência  $\varepsilon$  é obtida a seguinte aproximação de quarta ordem para a solução

$$\begin{aligned} u = & a \cos (\tau + \beta) - \varepsilon \left[ \frac{1}{6} a^2 (\alpha_1 - \alpha_2) \cos (2\tau + 2\beta) - \frac{a^2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{2} \right] + \\ & \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{48} a^3 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \cos (3\tau + 3\beta) - \frac{1}{32} a^3 (\gamma_1 - \gamma_2)^2 \cos (3\tau + 3\beta) \right] + \\ & \varepsilon^3 \left[ -\frac{1}{480} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\gamma_1 - \gamma_2) \cos (4\tau + 4\beta) - \frac{1}{720} a^4 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_1 - \alpha_2) \cos (4\tau + 4\beta) \right. \\ & + \frac{1}{360} a^4 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \cos (4\tau + 4\beta) - \frac{1}{96} (\alpha_1 - \alpha_2) (\gamma_1 - \gamma_2) \cos (2\tau + 2\beta) \\ & - \frac{1}{144} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cos (2\tau + 2\beta) + \frac{1}{72} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 \cos (2\tau + 2\beta) \\ & - \frac{1}{1080} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cos (4\tau + 4\beta) + \frac{1}{540} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 \cos (4\tau + 4\beta) \\ & + \frac{1}{18} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cos (2\tau + 2\beta) - \frac{1}{9} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 \cos (2\tau + 2\beta) \\ & + \frac{19}{72} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - \frac{19}{36} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 + \\ & - \frac{1}{120} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\gamma_1 - \gamma_2) \cos (4\tau + 4\beta) + \frac{1}{6} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\gamma_1 - \gamma_2) \cos (2\tau + 2\beta) \\ & - \frac{5}{12} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\gamma_1 - \gamma_2) - \frac{1}{120} a^4 \eta_1 \cos (4\tau + 4\beta) - \frac{1}{6} a^4 \eta_1 \cos (2\tau + 2\beta) \\ & \left. + \frac{3}{8} a^4 - \frac{5}{27} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2)^3 \cos (2\tau + 2\beta) - \frac{1}{6} a^4 (\alpha_1 - \alpha_2) (\gamma_1 - \gamma_2) \cos (2\tau + 2\beta) \right] + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (3.97)$$

onde a amplitude  $a$  e a fase  $\beta$  são governadas por

$$\dot{a} = 0$$

$$a\dot{\beta} = -\frac{25a^5(\alpha_1 - \alpha_2)^4}{288} + \frac{39a^5(\gamma_1 - \gamma_2)^2}{256} - \frac{5a^5(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\gamma_1 - \gamma_2)}{192} + \frac{a^5(\alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_1^2\alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)}{192} +$$

$$-\frac{a^5(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_1)}{384} - \frac{35a^5(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}{64} - \frac{8a^5\eta_1}{96} - \frac{8105a^5(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1^3 - \alpha_2^3)}{4032} +$$

$$-\frac{169a^5(\alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_2\alpha_1^2)}{288} - \frac{12a^5}{32} - \frac{107a^5\alpha_1\alpha_2(\gamma_1 - \gamma_2)}{192} + \frac{107a^5(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(\gamma_1 - \gamma_2)}{384} +$$

$$-\frac{56a^5(\alpha_1 - \alpha_2)\eta_1}{96} + \frac{10a^5\eta_2}{32} + \frac{3a^5(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_1)}{16}$$

(3.98)

O sistema apresenta somente um ponto fixo na origem. Assim resolvendo numericamente as equações (3.98) e (3.97) é obtida a figura 3.28, sendo ilustrado o plano de fase, do centro deslocado para a origem do sistema

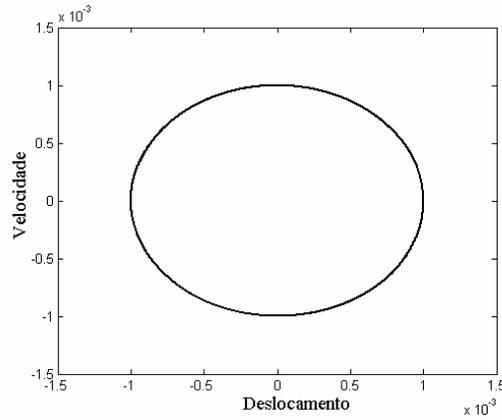


Figura 3.28: Plano de fase correspondendo ao centro  $C_1$  da figura 3.26

## Capítulo 4

### Modelagem Dinâmica e Resultados das Simulações Numéricas de um Sistema Vibratório Não Ideal com Memória de Forma.

Na tentativa de resolver um conjunto de equações diferenciais pode – se adotar duas estratégias diferentes. A primeira tentativa seria a obtenção de uma solução analítica destas equações, mas que em geral são muito complexas, até mesmo para sistemas lineares. Todavia, o interesse em utilizar esta técnica, é que a solução obtida é uma solução geral que vale para quaisquer condições iniciais e quaisquer valores dos parâmetros. Por outro lado, uma tentativa de resolver este conjunto de equações, é através de integrações numéricas, obtendo a variável dependente  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  em uma região pré – determinada pela variável  $t$ , com a restrição de obter – se apenas uma solução particular para as equações do sistema. Neste caso, a vantagem é que o trabalho é todo realizado pelo computador. Contudo, muitas vezes uma investigação qualitativa do comportamento da solução é satisfatória, dispensando a busca pela solução analítica do sistema.

O objetivo deste capítulo é o de exibir os resultados obtidos através de simulações numéricas efetuadas por integração numérica direta das equações de movimento do sistema não ideal. Neste caso é utilizado o integrador de Adams – Bashforth – Moulton, ODE 113 do MATLAB®, como no caso não ideal ocorre à variação angular do motor e tem – se a presença de não linearidades devido ao elemento com memória de forma, este problema é considerado computacionalmente trabalhoso. O ODE 113 foi o mais eficaz, visto que este integrador mostrou uma maior ordem de precisão que os outros integradores testados, principalmente na obtenção da seção de Poincaré.

Através dos resultados obtidos neste capítulo é possível ter um melhor entendimento da dinâmica não linear do problema, pesquisado.

A seguir, é apresentado o modelo do sistema não ideal.

#### 4.1 Modelagem do problema não ideal com memória de forma

O problema a ser estudado nesta dissertação é composto de um motor CC de potência limitada preso a um suporte rígido através de um amortecedor e um elemento com memória de forma, essa situação é ilustrada na figura 4.1;

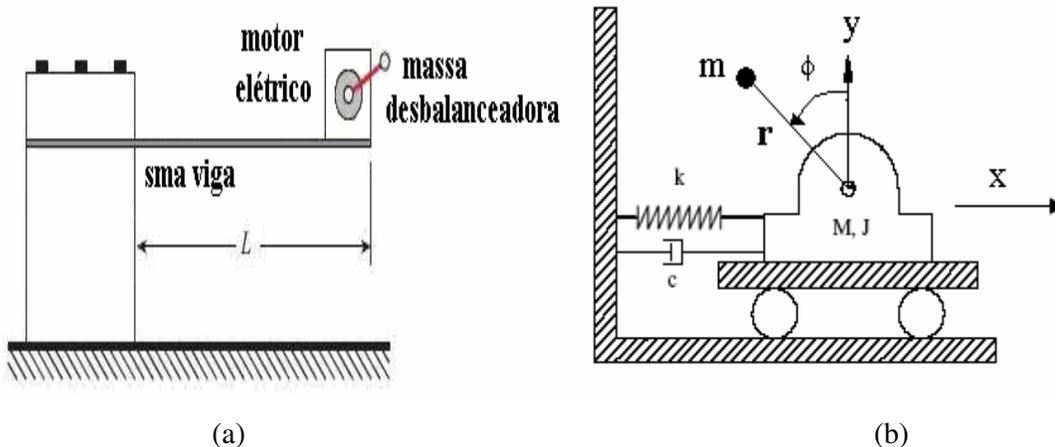


Figura 4.1: (a) Modelo real de uma viga com SMA e acoplada a um motor com potência limitada, (b) modelo de parâmetros concentrados do sistema não ideal.

Os parâmetros físicos apresentados na figura 4.1 são:

- M: massa do conjunto base + motor;
- m: massa desbalanceadora;
- J: momento de inércia;
- r: é a excentricidade da massa m;
- $\phi$ : é o deslocamento angular do rotor (eixos do motor);

A modelagem matemática do problema é feita por intermédio das equações de Lagrange, onde o deslocamento horizontal da massa desbalanceada é:

$$\begin{aligned} x_{massadesb} &= x - r \sin \phi & y_{massadesb} &= r \cos \phi \\ \dot{x}_{massadesb} &= \dot{x} - r\dot{\phi} \cos \phi & \dot{y}_{massadesb} &= r\dot{\phi} \sin \phi \end{aligned} \quad (4.1)$$

portanto a energia potencial é dado por

$$E_p = \frac{1}{2} \bar{a} (T - T_M) x^2 - \frac{1}{4} \bar{b} x^4 + \frac{1}{6} \bar{e} x^6 \quad (4.2)$$

e a energia cinética tem a forma;

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} [\dot{x} - r\dot{\phi} \cos \phi]^2 + \frac{1}{2} m [r\dot{\phi} \sin \phi]^2 \quad (4.3)$$

Aplicando as equações de Lagrange tem – se a seguinte relação,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \delta}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial \delta}{\partial x} = -c\dot{x} \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\phi}} \right] - \frac{\partial \delta}{\partial \phi} = S(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) \quad (4.5)$$

onde  $\delta = E_c - E_p$  e  $S(\dot{\phi})$  é o torque ativo gerado pelo circuito elétrico do motor e  $H(\dot{\phi})$  é o torque resistente do motor.

Da equação (4.4) observa - se que,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \delta}{\partial \dot{x}} \right] = (M + m)\ddot{x} - mr\ddot{\phi} \cos \phi + mr\dot{\phi} \sin \phi \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \bar{a}(T - T_M)x - \bar{b}x^3 + \bar{e}x^5 \quad (4.7)$$

Por outro lado, da equação (4.5), obtém – se que;

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\phi}} \right] = (J + mr^2)\ddot{\phi} - mr\ddot{x} \cos \phi + mr\dot{x}\dot{\phi} \sin \phi \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \phi} = mr\dot{x}\dot{\phi} \sin \phi \quad (4.9)$$

portanto a equação de movimento que governa o sistema é dada por,

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + c\dot{x} - mr[\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi] + \bar{q}(T - T_M)x - \bar{b}x^3 + \bar{e}x^5 = 0 \\ (J + mr^2)\ddot{\phi} - mr\ddot{x} \cos \phi = S(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) \end{cases} \quad (4.10)$$

Nota – se que a equação (4.10) é autônoma e não – linear, contendo não linearidades cúbicas e termos elevados à quinta potência. As funções  $mr\dot{\phi}^2 \sin \phi$  e  $mr\ddot{\phi} \cos \phi$  são as funções de inércia provocadas pelo motor e a função  $mr\ddot{x} \cos \phi$  representa o momento desta força de inércia.

È mais interessante reescrever a equação (4.10) na sua forma adimensional, para isso deve – se realizar as seguintes mudanças de variáveis,

$$u = \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad \tau = \omega_0 t \quad (4.11)$$

Onde  $u$  é o deslocamento adimensional e  $\tau$  é o tempo adimensional. Introduzindo (4.11) na equação (4.10), e realizando algumas manipulações algébricas obtém – se que;

$$\begin{cases} \ddot{u} + 2\mu\dot{u} + (\theta - 1)u - \alpha u^3 + \gamma u^5 - r_1 [\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi] = 0 \\ \ddot{\phi} - r_2 \ddot{u} \cos \phi = S(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) \end{cases} \quad (4.12)$$

A vantagem do estudo de um sistema com variáveis adimensionais é que nele trabalha – se com números puros, sem considerar a dimensão de suas variáveis.

A equação 4.12 pode ser simplificada quando o modelo do motor CC é simplificado, removendo o efeito da indutância obtendo assim a equação abaixo,

$$\begin{cases} \ddot{u} + 2\mu\dot{u} + (\theta - 1)u - \alpha u^3 + \gamma u^5 - r_1 [\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi] = 0 \\ \ddot{\phi} - r_2 \ddot{u} \cos \phi = \xi_1 - \xi_2 \dot{\phi} \end{cases} \quad (4.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{aA_r T_M}{(M+m)L} & \alpha &= \frac{bA_r}{(M+m)L\omega_0^2} & \theta &= \frac{T}{T_M} \\ \mu &= \frac{c}{2(M+m)\omega_0} & \gamma &= \frac{eA_r}{(M+m)L\omega_0^2} & r_1 &= \frac{mr}{(M+m)L} \\ r_2 &= \frac{mrL}{(J+mr^2)} & \xi_1 &= \frac{g}{(J+mr^2)\omega_0^2} & \xi_2 &= \frac{h}{(J+mr^2)\omega_0} \end{aligned}$$

Aqui, assume – se que a curva característica do motor CC (fonte de energia) é linear. Note que  $\xi_1$  é o parâmetro de controle (relativo à tensão de alimentação na armadura do motor elétrico ou torque constante) e  $\xi_2$  é o valor escolhido para um determinado tipo de motor.

Usando novas variáveis, definidas por,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = \dot{u}$ ,  $u_3 = \phi$ ,  $u_4 = \dot{\phi}$ , o sistema (4.13), pode ser reescrito, na forma de estado, como;

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = r_1 [\dot{u}_4 \cos u_3 - u_4^2 \sin u_3] + \alpha u_1^3 - \gamma u_1^5 - (\theta - 1)u_1 - 2\mu u_2 \\ \dot{u}_3 = u_4 \\ \dot{u}_4 = \xi_1 - \xi_2 u_4 + r_2 \dot{u}_2 \cos u_3 \end{cases} \quad (4.14)$$

Realizando algumas manipulações algébricas, obtém – se, as seguintes equações diferenciais de primeira ordem;

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = \frac{1}{1 - r_1 r_2 \cos^2 u_3} \left[ r_1 \left( (\xi_1 - \xi_2 u_4) \cos u_3 - u_4^2 \sin u_3 \right) + \alpha u_1^3 - \gamma u_1^5 - (\theta - 1)u_1 - 2\mu u_2 \right] \\ \dot{u}_3 = u_4 \\ \dot{u}_4 = \frac{\xi_1}{1 - r_1 r_2 \cos^2 u_3} + \frac{r_2 \cos u_3}{1 - r_1 r_2 \cos^2 u_3} \left[ \alpha u_1^3 - \gamma u_1^5 - (\theta - 1)u_1 - 2\mu u_2 - \frac{\xi_2 u_4}{r_2 \cos u_3} - r_1 u_4^2 \sin u_3 \right] \end{cases} \quad (4.15)$$

A seguir, são apresentadas as simulações numéricas do sistema não ideal obtida a partir da equação 4.15.

## 4.2 Resultados das Simulações Numéricas

As simulações numéricas de um sistema não ideal permitem a verificação de características importantes do sistema dinâmico provenientes da interação da estrutura com a fonte de excitação, tais como variações bruscas da amplitude de deslocamento da estrutura e da frequência de excitação (saltos ou “jumps”) quando considera – se as condições estacionárias do movimento.

A passagem pela primeira ressonância é considerada no momento em que a frequência de rotação do motor de corrente contínua (velocidade rotacional)  $\dot{\phi}$  esta próxima a da frequência natural  $\omega_0$  ( $\dot{\phi} \approx \omega_0$ ).

Ressalta – se que os parâmetros do sistema não ideal considerados aqui, estão listados na tabela 4.1, agrupados para duas diferentes estruturas e denominados de caso I e caso II, onde no caso I os parâmetros foram obtidos de dados experimentais desenvolvidos por El – Badawy, (2007) e no caso II os dados foram obtidos por Warminski e Balthazar, (2003). A idéia deste agrupamento de dados é o de poder verificar as influências dos parâmetros quando são observados, por exemplo, diferentes valores para a excentricidade, o valor da massa desbalanceadora etc., já que os termos  $r_1$  e  $r_2$  estão ligados a estes parâmetros físicos.

Tabela 4.1: Propriedades do sistema não ideal

Parâmetros	Caso I	Caso II
$r_1$	0.0011	0.4
$r_2$	0.44738	0.6

Os dados da tabela 4.1 ilustram somente os parâmetros de acoplamento do motor CC, o elemento de memória de forma e o amortecedor  $e$ , os outros parâmetros são comuns para os dois sistemas, onde  $\alpha$  e  $\gamma$  são parâmetros do material, e valem respectivamente 124 e 14500. Os parâmetros relacionados ao motor CC são os mesmos para os dois sistemas, sendo  $\xi_1$  o parâmetro de controle e  $\xi_2 = 1.5$ .

A análise agora será dividida em dois casos. O primeiro mostrará o comportamento dinâmico do caso I onde o parâmetro de acoplamento  $r_1$  é pequeno, pois há uma grande diferença entre a massa do motor e a massa desbalanceadora causando conseqüentemente pouca interação entre o motor CC e a estrutura. Já no segundo caso, as simulações ilustram a dinâmica do caso II onde o parâmetro  $r_1$  é maior do que no caso I e, causando assim uma maior interação entre a fonte de energia e a estrutura.

A seguir, são apresentadas as simulações do sistema não ideal para os valores do caso I

#### 4.2.1 Simulações numéricas do caso I

Aqui as simulações serão feitas para os parâmetros do caso I onde a interação motor – estrutura é pequena.

Como no capítulo anterior, para justificar o comportamento dinâmico, mostrado através do plano de fase utilizam – se as seguintes técnicas de análise da dinâmica não linear: espectro de frequência (FFT) e mapa de Poincaré.

Para caracterizar qualitativamente os atratores envolvidos neste estudo, computa – se os expoentes de Lyapunov e a seção de Poincaré. Aqui para calcular os expoentes de Lyapunov e a seção de Poincaré utiliza – se o programa MATDS®, baseado numa rotina do Matlab®.

Agora são mostrados os resultados numéricos a partir da integração direta do sistema 4.15 para observar o comportamento dinâmico do problema não ideal para diferentes valores de temperatura.

A seguir, são apresentadas simulações onde a fase martensítica é estável na liga

#### 4.2.1.a Fase martensítica estável na liga.

No primeiro conjunto de simulações considera – se que  $\theta = 0.7$ . A dinâmica do sistema na região de ressonância pode ser analisada através do gráfico de resposta em frequência. Estas curvas são obtidas quando o sistema atinge o movimento do estado estacionário enquanto o parâmetro de controle é fixado. Então a resposta da amplitude no estado estacionário é medida. O parâmetro de controle é ligeiramente aumentado e mantido na nova posição até que o novo estado estacionário seja obtido. Estes valores são computados na forma de pequenos círculos na curva de resposta em frequência.

A figura 4.2 mostra o diagrama de resposta em frequência. A figura 4.2(a) ilustra a situação quando ocorre um aumento no valor da tensão imposta ao motor, enquanto a figura 4.2(b) mostra o resultado para o decréscimo de  $\xi_1$ .

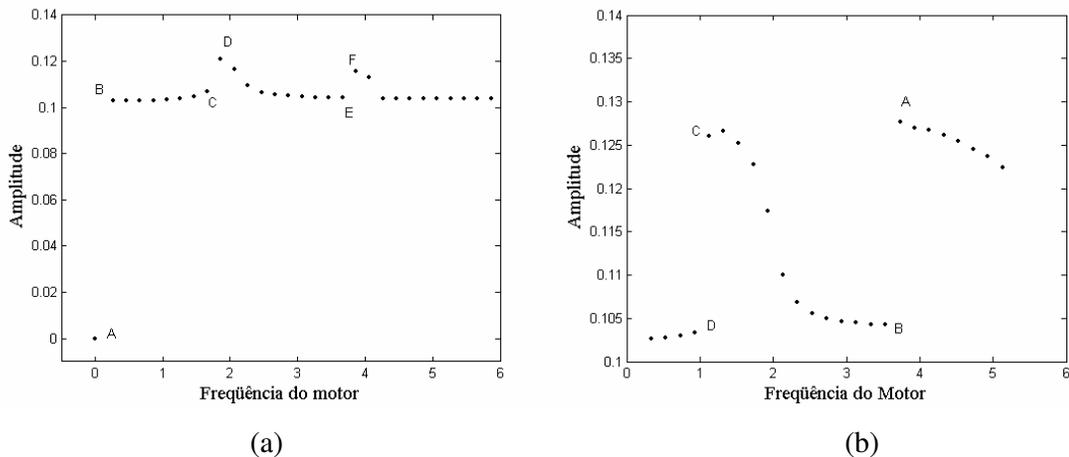


Figura 4.2: Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de  $\xi_1$  e (b) o decréscimo de  $\xi_1$  para  $\theta = 0.7$ ,  $\mu = 0.01$

Perceba que as duas figuras apresentam respostas diferentes. O diagrama de resposta em frequência da figura 4.2(a) é construído considerando um aumento gradativo da tensão do motor da ordem de  $\Delta\xi_1 = 0.3$ . Com a variação de  $\xi_1$  ocorre conseqüentemente uma alteração da velocidade angular do motor sucedendo um aumento na amplitude da resposta

A variação de  $\xi_1$  está no intervalo  $[0,9.1]$ . Pela figura 4.2(a) pode – se observar a ocorrência de três saltos: um superharmônico, correspondente aos pontos A e B, e dois subharmônicos, um deles entre os pontos C e D e o outro entre os pontos E e F. Inicialmente o sistema se encontra em repouso (ponto A), quando o motor é ligado aplicando – se uma tensão de  $\xi_1 = 0.1$ , o primeiro salto acontece entre os pontos A e B com a frequência do motor entre  $(0 < \dot{\phi} \leq 0.3)$ . Com o aumento de  $\xi_1$ , acontece um gradual aumento a amplitude da resposta até a ocorrência do segundo salto entre os pontos C e D, com a frequência do motor entre  $(1.65 \leq \dot{\phi} \leq 1.87)$ . Depois do segundo salto ocorre um decréscimo da amplitude, mas como  $\xi_1$  continua aumentando o terceiro salto ocorre entre os pontos E e F, com uma frequência do motor no intervalo  $(3.65 \leq \dot{\phi} \leq 3.9)$  em seguida ocorrendo uma diminuição da amplitude.

Por outro lado, na figura 4.2(b) a variação de  $\xi_1$  pertence ao intervalo  $[9.1,0.3]$ , neste caso acontecem dois saltos, um subharmônico entre os pontos A e B e outro superharmônico entre os pontos C e D. Com a tensão do motor inicialmente com o valor de  $\xi_1 = 9.1$ , diminui – se este valor na ordem de 0.3, acontecendo um gradativo aumento da amplitude até que o primeiro salto acontece do ponto A para B, com uma diminuição brusca da amplitude, e com a frequência do motor entre  $(3.5 < \dot{\phi} < 3.75)$ . Continuando o decréscimo de  $\xi_1$  a amplitude volta a ter um crescimento até atingir o valor crítico em C ocorrendo outro salto até o ponto D, com a frequência do motor no intervalo  $(0.9 < \dot{\phi} < 1.15)$ .

A figura 4.3 ilustra o comportamento de duas respostas no estado não estacionário que são comparadas para dois valores diferentes de amortecimento  $\mu$ , mostrado o fenômeno de salto no histórico no tempo. Aqui ocorre um acréscimo (ou decréscimo) no valor de  $\xi_1$ , da ordem de 0.3, a cada período de 500 na escala de tempo. Na figura 4.3(a) é mostrado o acréscimo de  $\xi_1$  no intervalo de  $[0,9.1]$ , ao passo que na figura 4.3(b) ilustra decréscimo de  $\xi_1$  dentro do mesmo intervalo.

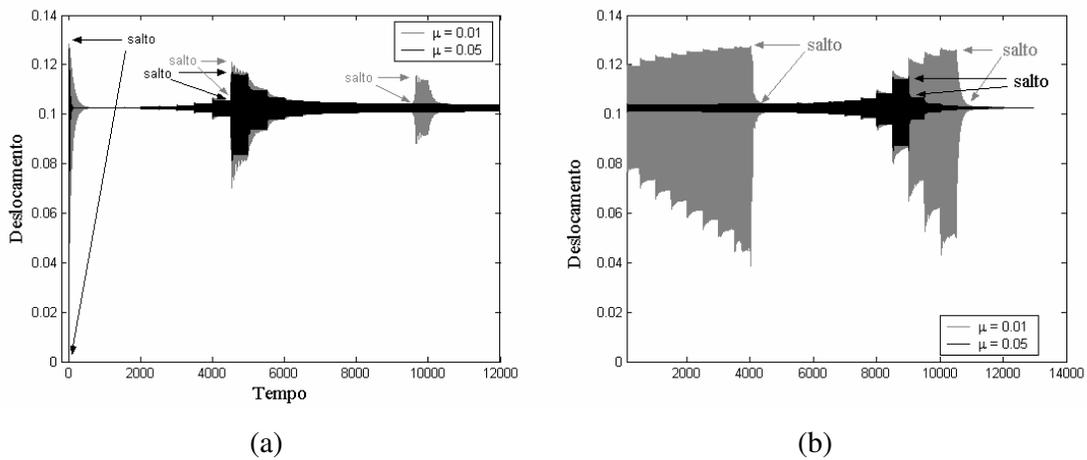


Figura 4.3: Influência do amortecimento no efeito Sommerfeld para  $\theta = 0.7$  : (a) Histórico no tempo para o acréscimo de  $\xi_1$  e (b) Histórico no tempo para o decréscimo de  $\xi_1$

Note que na figura 4.3(a) quando o valor de  $\xi_1$  é aumentado, ocorrem três saltos para  $\mu = 0.01$ , já quando o valor do amortecimento é  $\mu = 0.05$  um dos saltos subharmônicos desaparece e o outro salto acontece para um valor menor da amplitude. Na figura 4.3(b) o salto subharmônico também desaparece, e o outro salto ocorre para um valor menor do parâmetro de controle.

Os expoentes de Lyapunov para diferentes valores do parâmetro de controle  $\xi_1$ , são mostrados na figura 4.4. Na figura 4.4(a) é apresentado a dinâmica de três dos quatro expoentes de Lyapunov e na figura 4.4(b) é mostrado a dinâmica do quarto expoente de Lyapunov.

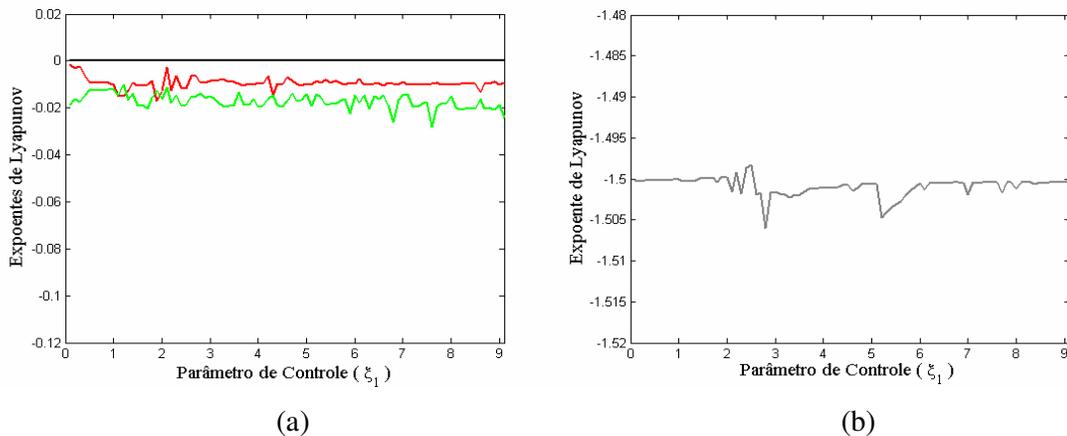


Figura 4.4: Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$  para  $\theta = 0.7$

Na figura 4.4(b) os expoentes apresentam somente valores negativos, e na figura 4.4(a) dois dos expoentes são negativos, enquanto o outro expoente é sempre nulo, desta forma o comportamento dinâmico do sistema entre  $0.1 \leq \xi_1 \leq 9.1$  é periódico.

Agora num segundo conjunto de simulações, a temperatura do sistema é elevada, adotando - se o valor de  $\theta = 0.9$ , mas a fase martensítica continua estável.

Na figura 4.5, novamente é apresentada as curvas de resposta em frequência para o caso do acréscimo de  $\xi_1$ , figura 4.5(a), e decréscimo de  $\xi_1$ , figura 4.5(b).

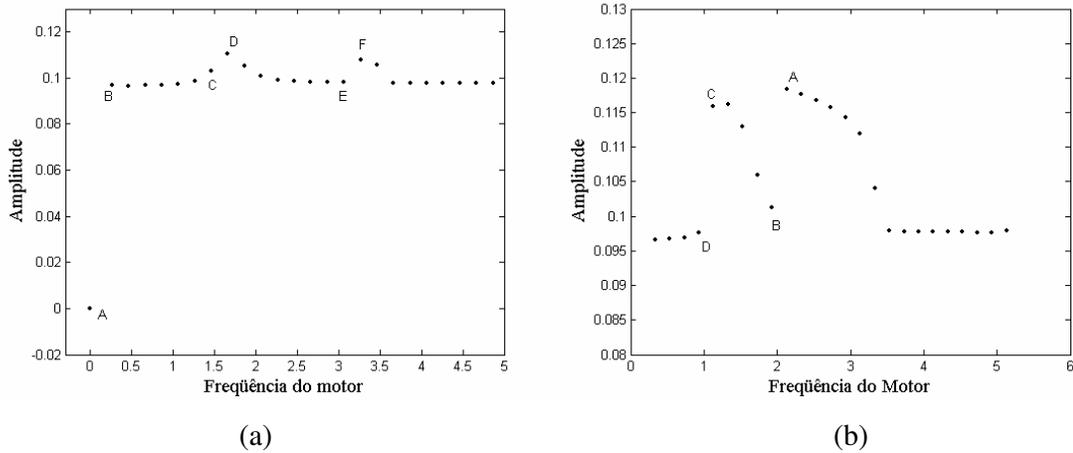


Figura 4.5: Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de  $\xi_1$  e (b) o decréscimo de  $\xi_1$  para  $\theta = 0.9$ ,  $\mu = 0.01$

Como no caso anterior, tem-se que  $\xi_1$  varia entre  $[0, 9.1]$ . Quando acontece o acréscimo de  $\xi_1$ , aparecem três saltos. O primeiro salto superharmônico corresponde entre os pontos A e B, com a frequência do motor entre  $(0 < \dot{\phi} \leq 0.25)$ . Com o aumento de  $\xi_1$ , o sistema tem uma pequena variação na amplitude até acontecer outro salto, agora subharmônico, entre os pontos C e D, com a frequência do motor entre  $(1.46 \leq \dot{\phi} \leq 1.67)$ . Depois do salto ocorre uma diminuição da amplitude da resposta até o surgimento de outro salto subharmônico entre os pontos E e F, com a velocidade angular do motor entre  $(3.05 \leq \dot{\phi} \leq 3.3)$ , e depois deste terceiro salto a amplitude de oscilação do sistema decai, variando pouco com o aumento de  $\xi_1$ . Na figura 4.6(b) ocorre a diminuição de  $\xi_1$ , neste caso acontecem um salto subharmônico entre os pontos A e B com uma diminuição brusca da amplitude, e com a frequência do motor entre  $(1.95 < \dot{\phi} < 2.15)$  e outro superharmônico entre os pontos C e D com a frequência do motor no intervalo  $(0.93 < \dot{\phi} < 1.13)$ .

Na figura 4.6 é apresentado o efeito da variação do coeficiente de amortecimento  $\mu$ , ilustrando o comportamento de duas respostas no estado não estacionário que são comparadas para dois valores diferentes do amortecimento. O salto na figura 4.6(a) acontece para  $\mu = 0.01$ , entre os seguintes intervalos de tempo ( $0 \leq \tau \leq 500$ ), ( $4000 \leq \tau \leq 4500$ ) e ( $8000 \leq \tau \leq 8500$ ), já para  $\mu = 0.05$  o salto ocorre para nos intervalos ( $0 \leq \tau \leq 500$ ) e ( $4000 \leq \tau \leq 4500$ ). Na figura 4.6(b) quando realiza – se o decréscimo de  $\xi_1$  para  $\mu = 0.01$ , acontecem dois saltos entre os intervalos ( $8500 \leq \tau \leq 8000$ ) e ( $10500 \leq \tau \leq 11000$ ), entretanto para  $\mu = 0.05$  tem – se o fenômeno de salto somente no intervalo ( $10000 \leq \tau \leq 10500$ ).

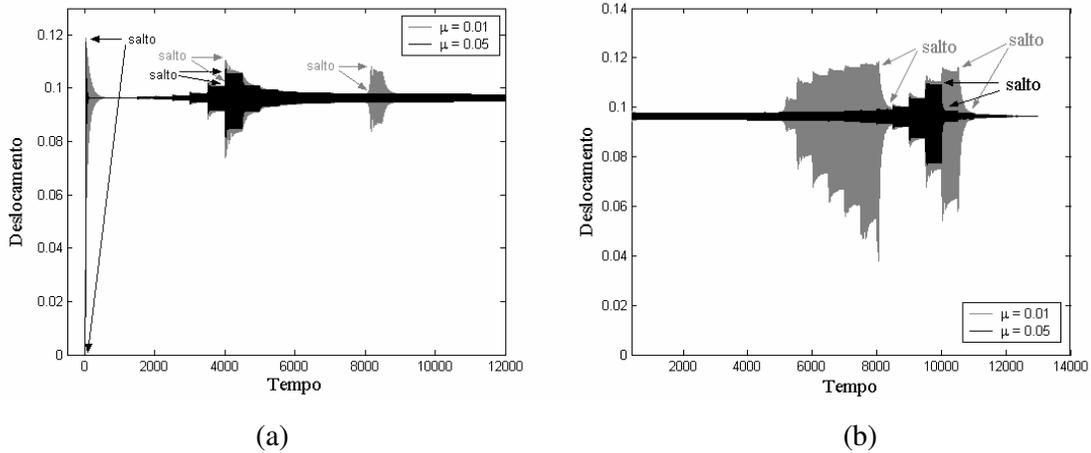


Figura 4.6: Influência do amortecimento no efeito Sommerfeld para  $\theta = 0.9$  : (a) Histórico no tempo para o acréscimo de  $\xi_1$  e (b) Histórico no tempo para o decréscimo de  $\xi_1$

Na figura 4.7 é mostrada a dinâmica dos expoentes de Lyapunov com a variação do parâmetro de controle  $\xi_1$ .

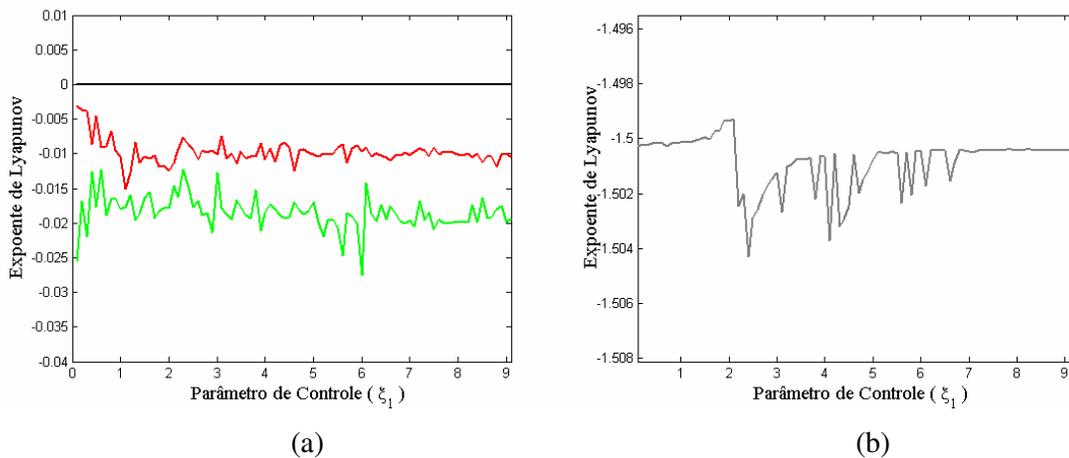


Figura 4.7: Dinâmica dos expoentes de Lyapunov versus parâmetro de controle  $\xi_1$  para  $\theta = 0.9$

Como o sistema não apresenta expoentes positivos, conclui – se que o comportamento dinâmico nesta temperatura é periódico entre  $0.1 \leq \xi_1 \leq 9.1$ .

A seguir, é apresentada a dinâmica do sistema não ideal para uma temperatura intermediária, onde ambas as fases martensítica e austenítica são estáveis.

#### 4.2.1.b Fase martensítica e austenítica estáveis na liga

Nesta segunda parte, é ilustrado o comportamento do sistema para uma temperatura intermediária onde a fase martensítica e austenítica estão presentes na liga. Nas simulações assume – se que  $\theta = 1.03$ .

A figura 4.8 ilustra o efeito Sommerfeld para  $\theta = 1.03$ . Na figura 4.8(a) ocorre um aumento de  $\xi_1$ , da ordem de  $\Delta\xi_1 = 0.02$ , com  $\xi_1$  variando entre  $0.1 \leq \xi_1 \leq 0.7$ . O sistema é capturado pela região de ressonância rapidamente, pois a frequência natural do sistema é baixa, neste gráfico o efeito Sommerfeld acontece para  $\xi_1 \approx 0.26$  com uma frequência rotacional do motor entre  $(0.145 < \dot{\phi} < 0.167)$ . Na figura 4.8(b) acontece um decréscimo de  $\xi_1$ , com o parâmetro de controle variando  $\Delta\xi_1 = 0.02$ , e dentro do intervalo  $0.1 \leq \xi_1 \leq 0.7$ . Inicialmente o sistema tem um valor de tensão igual a 0.7, com o decréscimo de  $\xi_1$  o salto ocorre entre os pontos A e B, com a frequência do motor entre  $(0.13 < \dot{\phi} < 0.145)$ . Percebe – se aqui, que os dois gráficos de resposta em frequência são semelhantes, mas o salto ocorre para diferentes valores da velocidade rotacional do motor.

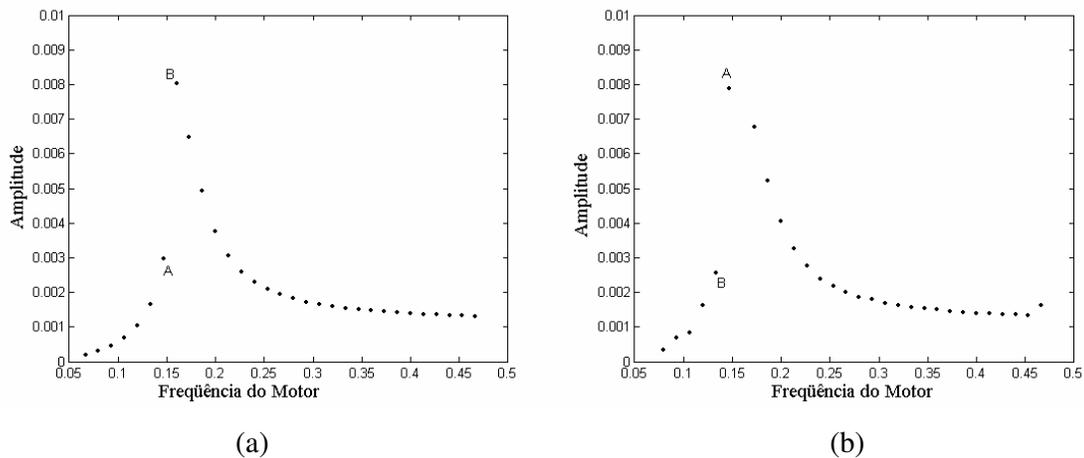


Figura 4.8: Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de  $\xi_1$  e (b) o decréscimo de  $\xi_1$  para  $\theta = 1.03$ ,  $\mu = 0.01$

A figura 4.9 ilustra o comportamento de duas respostas no estado não estacionário que são comparadas para dois valores diferentes do amortecimento. Na figura 4.9(a) ocorre um acréscimo no valor de  $\xi_1$ , da ordem de 0.02, dentro do intervalo  $[0.1, 0.7]$ , onde este aumento acontece a cada período de 500 na escala de tempo, note que para  $\mu = 0.01$  acontece o salto de uma amplitude aproximada de 0.0028 até a amplitude de 0.0085, enquanto que para  $\mu = 0.02$  este salto acontece de 0.0025 para aproximadamente 0.004. Para o decréscimo de  $\xi_1$ , tem-se que para  $\mu = 0.01$  a amplitude decai de 0.008 para 0.0025, enquanto que para  $\mu = 0.02$  a amplitude que tem o valor de 0.0043 salta para o valor de 0.0023.

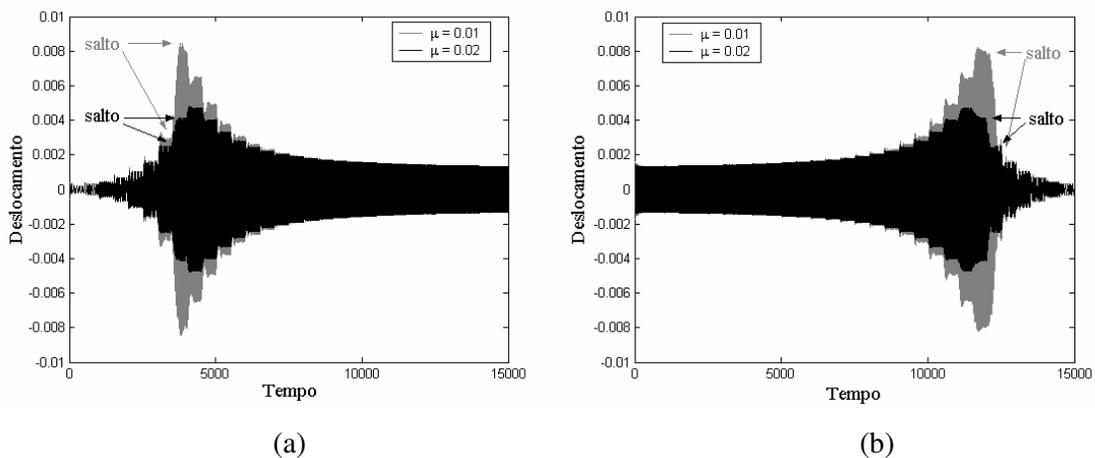


Figura 4.9: Influência do amortecimento no efeito Sommerfeld para  $\theta = 1.03$ : (a) Histórico no tempo para o acréscimo de  $\xi_1$  e (b) Histórico no tempo para o decréscimo de  $\xi_1$

Na figura 4.10 é apresentada a dinâmica dos expoentes de Lyapunov quando acontece a variação do parâmetro de controle  $\xi_1$ . Como não há nenhum expoente positivo o comportamento periódico do sistema é verificado.

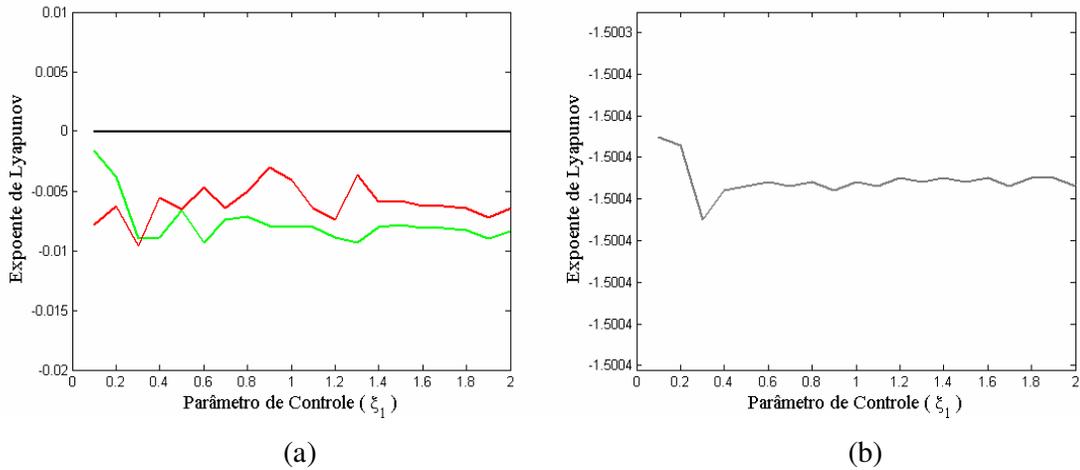


Figura 4.10: Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$  para  $\theta = 1.03$

Para ilustrar a dinâmica não linear do sistema, na figura 4.11 é mostrado à situação quando acontece a captura da velocidade rotacional do motor pela frequência natural do sistema para  $\xi_1 = 0.26$ . Aqui pode – se verificar que o sistema apresenta um comportamento periódico através do espectro de frequência que exhibe somente um pico de frequência mostrando que o sistema é periódico de período – 1.

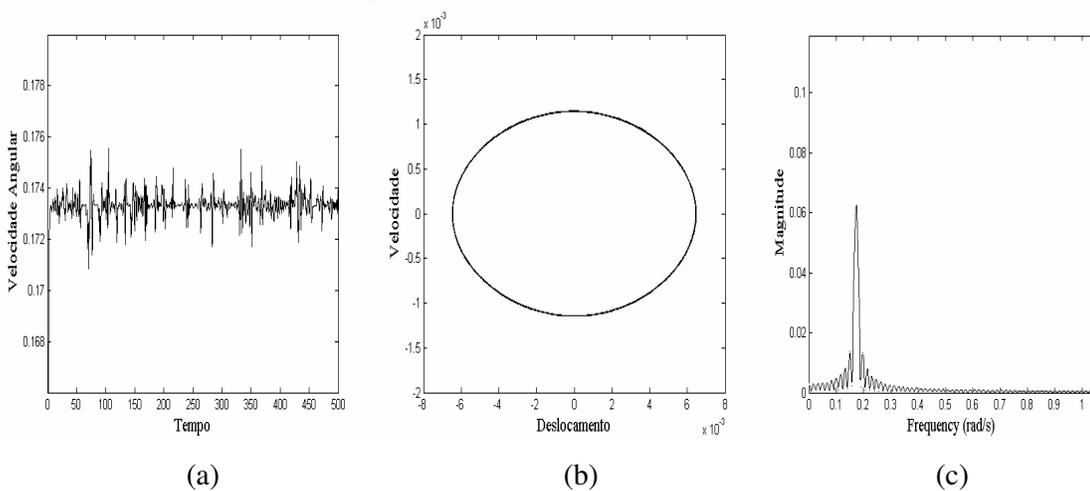


Figura 4.11: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 1.03$  e  $\xi_1 = 0.26$ .

A seguir, ilustra – se a dinâmica do sistema não ideal para altas temperaturas onde a fase austenítica é estável na liga.

#### 4.2.1.c Fase austenítica estável na liga

Nesta seção o comportamento dinâmico do caso I é analisado na fase austenítica para os valores de  $\theta = 2$  e  $\theta = 3$ .

A figura 4.12, onde  $\theta = 2$ , são ilustradas as curvas de resposta em frequência para o acréscimo e decréscimo de  $\xi_1$ . Aqui para ambos os casos, a variação do parâmetro de controle é da ordem de  $\Delta\xi_1 = 0.05$ , com  $\xi_1$  contido no seguinte intervalo  $0.1 \leq \xi_1 \leq 2$

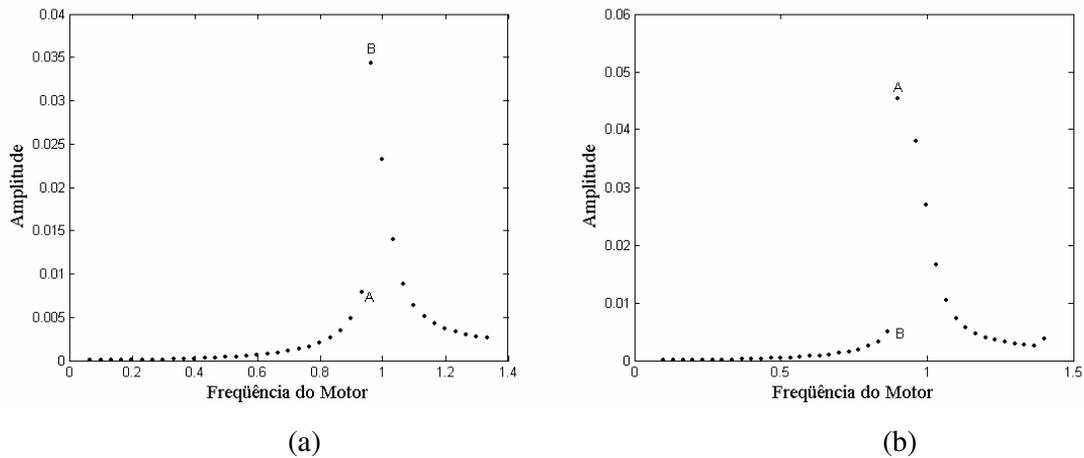


Figura 4.12: Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de  $\xi_1$  e (b) o decréscimo de  $\xi_1$  para  $\theta = 2$ ,  $\mu = 0.01$

Na figura 4.12(a) com o acréscimo do valor da tensão imposta ao motor, a amplitude da resposta do sistema aumenta gradativamente até que acontece o salto entre os pontos A e B na região de ressonância, depois do salto a amplitude da resposta diminui apesar do aumento do parâmetro de controle (Efeito Sommerfeld).

Já na figura 4.12(b) o sistema tem inicialmente o valor de  $\xi_1 = 2$ , com o decréscimo da tensão, a amplitude da resposta tem um aumento gradual até o surgimento do salto entre os pontos A e B. Pela comparação das duas curvas, nota – se que o maior salto é dado quando acontece o decréscimo de  $\xi_1$ . Também é possível verificar a diferença entre a velocidade angular do motor para cada um dos saltos. Quando  $\xi_1$  é elevado o efeito Sommerfeld

acontece entre  $0.93 \leq \dot{\phi} \leq 0.97$ , entretanto para o decréscimo de  $\xi_1$  o salto ocorre para uma velocidade rotacional menor entre  $0.86 \leq \dot{\phi} \leq 0.9$ .

A figura 4.13 ilustra o comportamento de duas respostas no estado não estacionárias que são comparadas para dois valores diferentes do amortecimento. Na figura 4.13(a) ocorre um acréscimo no valor de  $\xi_1$ , da ordem de 0.05, dentro do intervalo  $[0.1, 2]$ , onde este acréscimo ocorre a cada período de 500 na escala de tempo, note que para  $\mu = 0.01$  o salto ocorre de uma amplitude aproximada de 0.008 até a amplitude de 0.041, enquanto que para  $\mu = 0.02$  este salto acontece de 0.0075 para aproximadamente 0.025. Para o decréscimo de  $\xi_1$ , como ilustrado na figura 4.13(b) tem – se que para  $\mu = 0.01$  o salto acontece de 0.045 para aproximadamente 0.01, enquanto que para  $\mu = 0.02$  a amplitude que tem o valor de 0.025 salta para o valor de 0.008.

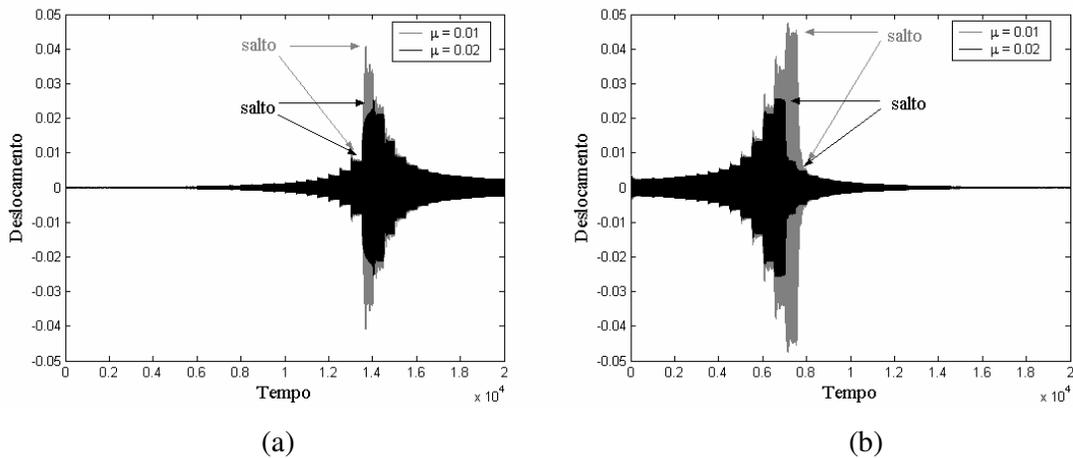


Figura 4.13: Influência do amortecimento no efeito Sommerfeld para  $\theta = 2$ : (a) Histórico no tempo para o acréscimo de  $\xi_1$  e (b) Histórico no tempo para o decréscimo de  $\xi_1$

Na figura 4.14 é mostrada a dinâmica dos expoentes de Lyapunov com relação à variação do parâmetro de controle  $\xi_1$ , percebe – se no intervalo entre  $[0.1, 2]$  que o sistema apresenta um comportamento periódico, devido ao fato de não existirem expoentes positivos

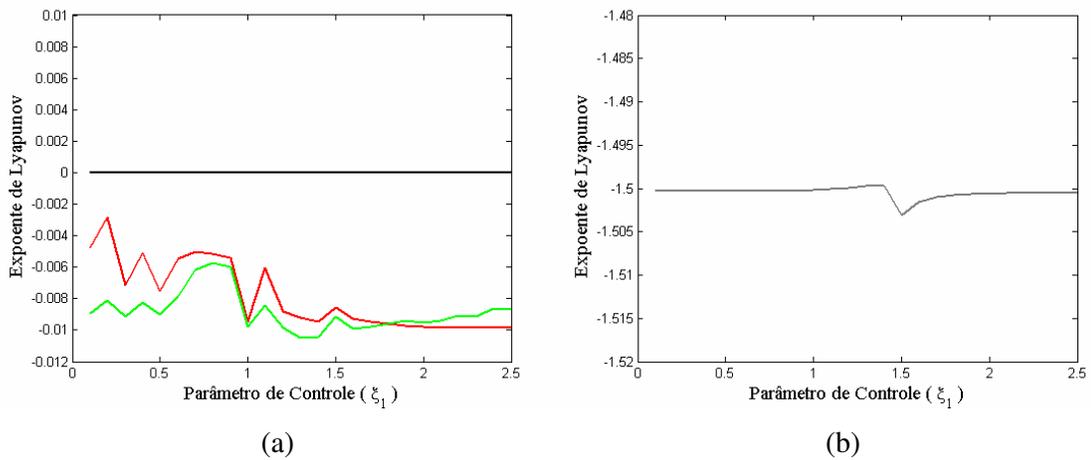


Figura 4.14: Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$  para  $\theta = 2$

Para completar a análise da dinâmica não linear do sistema para  $\theta = 2$ , na figura 4.15 é mostrado o comportamento do sistema quando a velocidade rotacional do motor é capturada pela frequência natural do sistema, ou seja, nesta situação o sistema encontra-se na região de ressonância. Nota-se pelo espectro de frequência que o sistema apresenta um comportamento periódico.

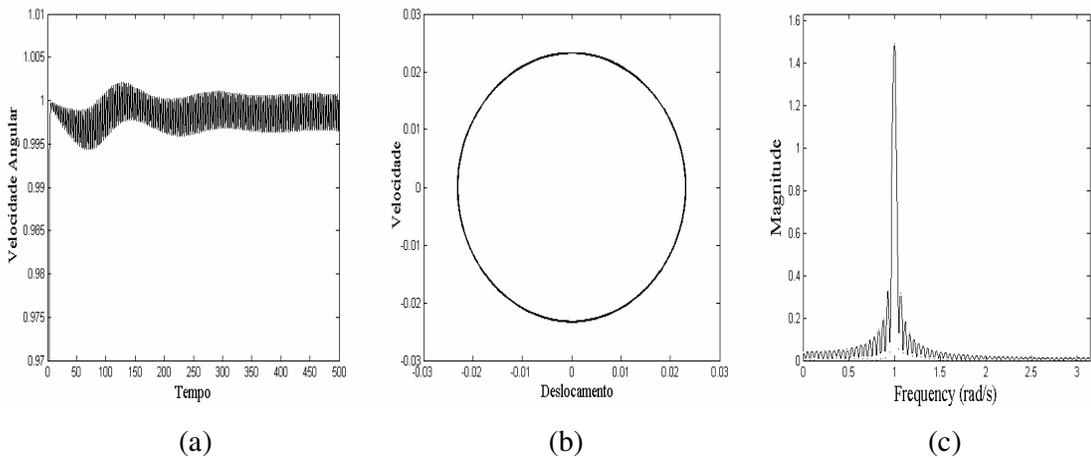


Figura 4.15: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 2$  e  $\xi_1 = 1.5$ .

Agora, a temperatura do sistema é elevada para o valor de  $\theta = 3$ , com este fato altera-se a frequência natural do sistema, conseqüentemente modifica-se a região de ressonância em relação aos casos anteriores.

Na figura 4.16 é mostrado o efeito Sommerfeld para  $\theta = 3$ . Na figura 4.16(a) ocorre um aumento de  $\xi_1$ , com acréscimos da ordem de  $\Delta\xi_1 = 0.05$ , e  $\xi_1$  variando entre  $0.1 \leq \xi_1 \leq 2.7$ . O sistema é capturado pela região de ressonância para aproximadamente  $\xi_1 \approx 2.125$  com uma frequência rotacional do motor entre  $(1.33 \leq \dot{\phi} \leq 1.36)$ . Na figura 4.16(b) acontece um decréscimo de  $\xi_1$ , com o parâmetro de controle variando  $\Delta\xi_1 = 0.05$ , e dentro do intervalo  $0.1 \leq \xi_1 \leq 2.7$ . Inicialmente é empregado o valor de tensão igual a 2.7, com o decréscimo de  $\xi_1$  o salto ocorre entre os pontos A e B, e a frequência do motor esta no intervalo  $(1.3 < \dot{\phi} < 1.34)$ . Apesar dos dois gráficos de resposta em frequência serem semelhantes à velocidade rotacional do motor é diferente para cada caso.

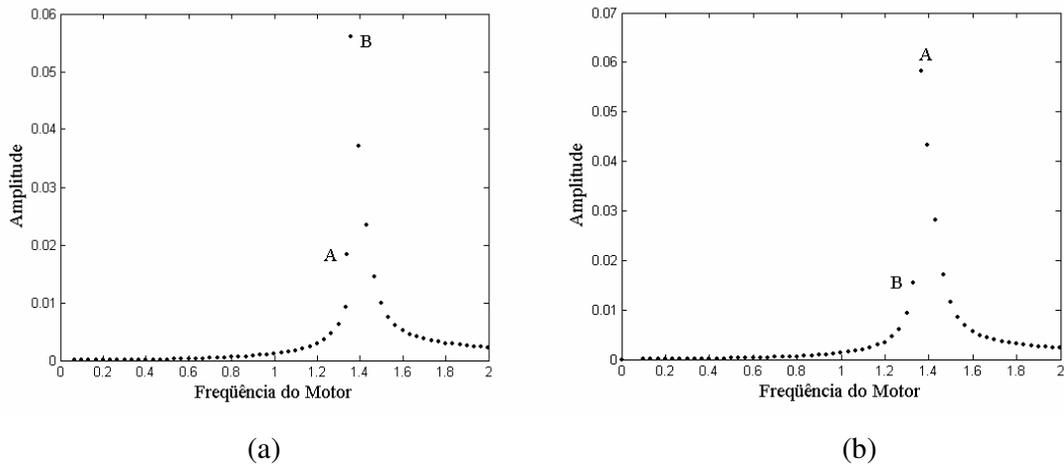


Figura 4.16: Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de  $\xi_1$  e (b) o decréscimo de  $\xi_1$  para  $\theta = 3$ ,  $\mu = 0.01$

A figura 4.17 ilustra o comportamento de duas respostas no estado não estacionário que são comparadas para dois valores diferentes do amortecimento. Na figura 4.17(a) tem – se acréscimos de  $\xi_1$  da ordem de  $\Delta\xi_1 = 0.05$ , dentro do intervalo  $[0.1, 2.7]$ , onde este acréscimo ocorre a cada período de 500 na escala de tempo, note que para  $\mu = 0.01$  o salto ocorre de uma amplitude aproximada de 0.02 até a amplitude de 0.056, enquanto que para  $\mu = 0.04$  este salto acontece de 0.01 para aproximadamente 0.019. Para o decréscimo de  $\xi_1$ , como ilustrado na figura 4.17(b) tem – se que para  $\mu = 0.01$  o salto acontece de 0.061 para aproximadamente 0.01, enquanto que para  $\mu = 0.04$  a amplitude que tem o valor de 0.02 salta para o valor de 0.008.

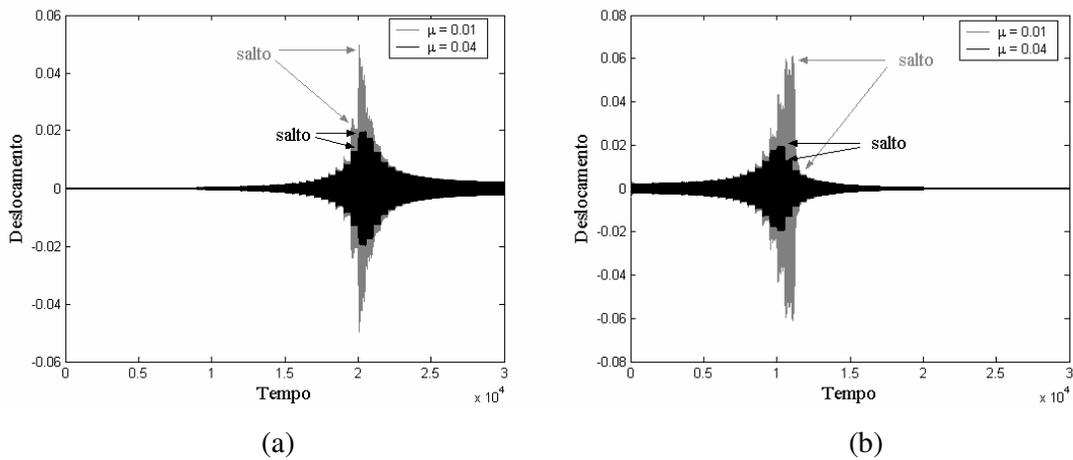


Figura 4.17: Influência do amortecimento no efeito Sommerfeld para  $\theta = 3$ : (a) Histórico no tempo para o acréscimo de  $\xi_1$  e (b) Histórico no tempo para o decréscimo de  $\xi_1$

Na figura 4.18 os expoentes de Lyapunov são apresentados em função da variação do parâmetro de controle  $\xi_1$

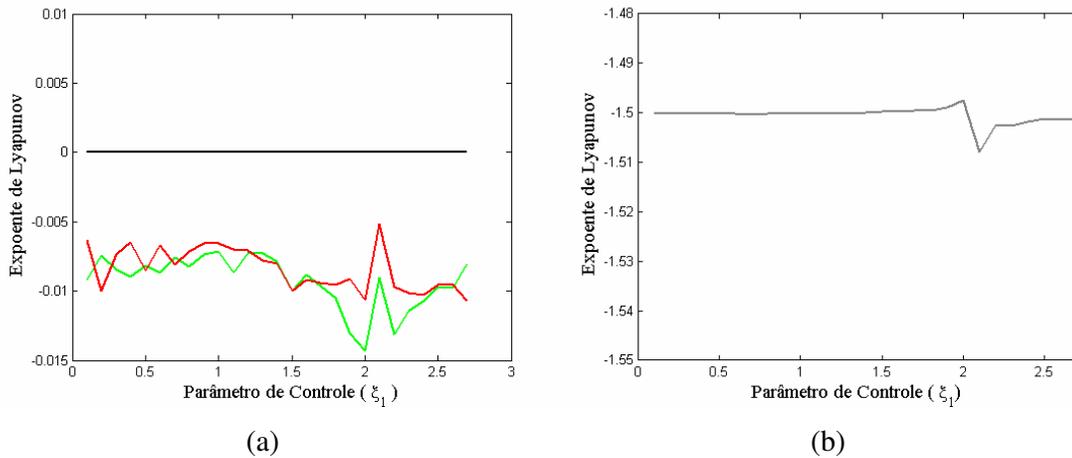


Figura 4.18: Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$  para  $\theta = 3$

Como não existe nenhum expoente positivo, no intervalo  $[0.1, 2.7]$ , então o comportamento dinâmico do sistema neste intervalo é sempre periódico.

Na figura 4.19 é mostrado que na fase austenítica para  $\theta = 3$ , o sistema entra em ressonância para  $\xi_1 = 2.125$ , nesta situação o comportamento dinâmico do sistema é periódico.

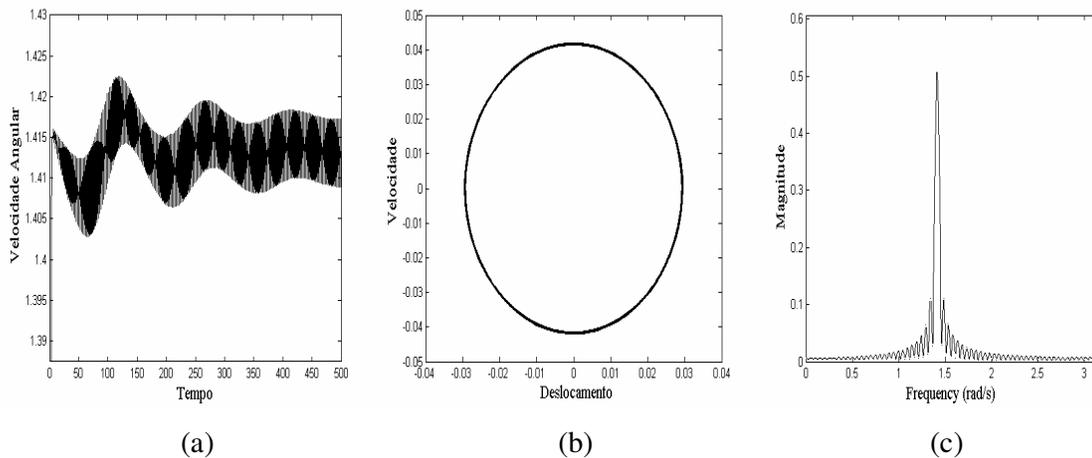


Figura 4.19: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de freqüência para  $\theta = 3$  e  $\xi_1 = 2.125$ .

Neste primeiro conjunto de simulações percebeu – se que o comportamento do sistema no caso I é sempre periódico, independente da fase em que a liga se encontra e do parâmetro de controle  $\xi_1$  adotado, isso se deve ao fato de que o parâmetro de acoplamento  $r_1$  é pequeno, ocorrendo assim pouca interação entre o motor CC e a estrutura com memória de forma.

A seguir, discute – se a resposta dinâmica do sistema para os valores do sistema no caso II.

## 4.2.2 Simulações numéricas do caso II

Aqui as simulações serão feitas para os parâmetros do caso II onde a interação motor – estrutura é maior em relação ao caso I.

Novamente a dinâmica do sistema é analisada através do gráfico de resposta em freqüência, que é obtida através da amplitude do sistema oscilante versus a freqüência do termo de excitação, plano de fase, mapa de Poincare, expoente de Lyapunov e espectro de freqüência.

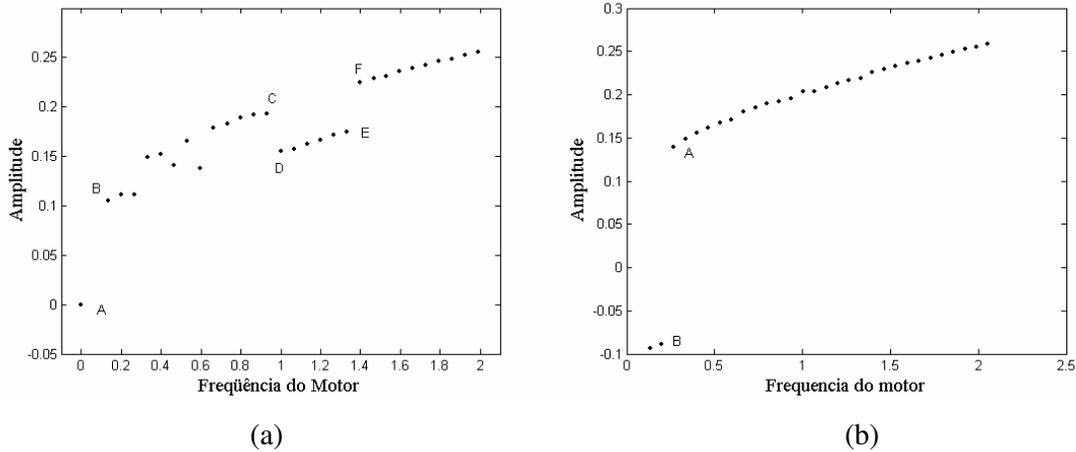
A seguir, é abordada a resposta do sistema não ideal na fase martensítica.

### 4.2.2.a Fase Martensítica estável na liga.

Os resultados mostrados aqui levam em consideração que a liga com memória de forma esta na fase martensítica, onde as simulações serão feitas para  $\theta = 0.7$  e  $\theta = 0.9$ .

Diferentemente da seção anterior quando o comportamento dinâmico do sistema apresenta somente soluções periódicas, para qualquer que seja o valor de  $\theta$  e  $\xi_1$ , nesta nova situação a resposta do sistema apresenta um comportamento diversificado, mostrando movimentos regulares (periódicos) e irregulares (caóticos).

Na figura 4.20 é apresentado o efeito Sommerfeld para o acréscimo e decréscimo de  $\xi_1$  e  $\theta = 0.7$ .



valor na ordem de 0.1, acontecendo assim uma diminuição na amplitude até acontecer o salto entre os pontos A e B, com uma diminuição brusca da amplitude, e a freqüência do motor no intervalo  $(0.2 < \dot{\phi} < 0.28)$ .

Para ilustrar a dinâmica não linear do sistema, na figura 4.21 é apresentado o diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$ , para  $\theta = 0.7$ .

O expoente de Lyapunov quantifica a sensibilidade do sistema dinâmico a condições iniciais e indica o grau em que trajetórias próximas no espaço de fase divergem. O comportamento caótico pode ser comprovado pela existência de no mínimo um expoente de Lyapunov positivo.

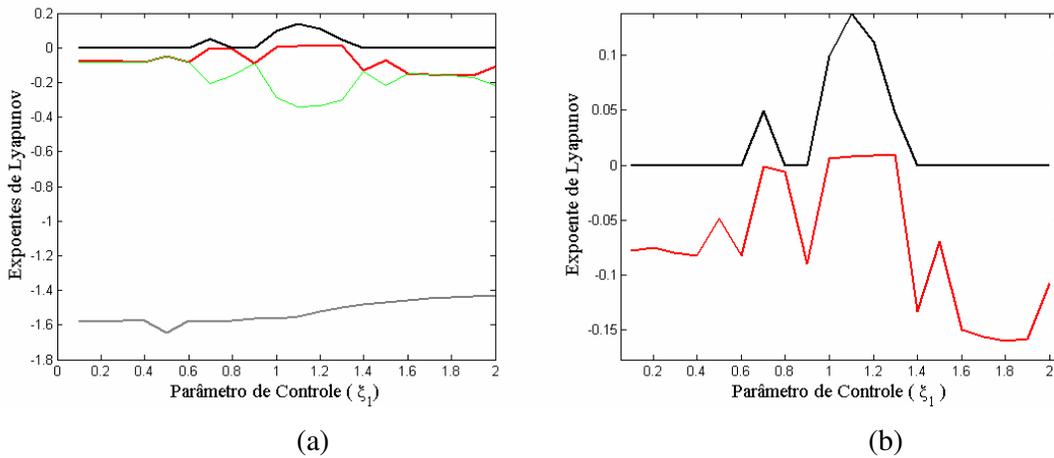


Figura 4.21: Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$  para  $\theta = 0.7$ , (a) Expoente de Lyapunov, (b) Zoom dos dois principais expoentes

Da figura 4.21(a) nota – se que dois dos expoentes de Lyapunov são sempre negativos (em cinza e verde). Assim os dois expoentes mais importantes para que se entenda a dinâmica não linear do sistema são representados pela cor preta e vermelha. Na figura 4.21(b) são evidenciados estes dois expoentes. Note que no intervalo  $0.1 \leq \xi_1 \leq 0.67$  um dos expoentes é sempre zero (preto), ao passo que o outro expoente é negativo (vermelho), assim a solução dinâmica do sistema é periódica. Já no intervalo  $0.68 \leq \xi_1 \leq 0.78$  o expoente na cor preta torna – se positivo, enquanto o expoente em vermelho continua negativo, logo nesta situação o comportamento do sistema é caótico. Agora para o intervalo  $0.79 \leq \xi_1 \leq 0.98$  o expoente em preto volta a ser zero e o expoente em vermelho continua negativo, conseqüentemente o comportamento do sistema torna – se novamente periódico. No intervalo entre  $0.99 \leq \xi_1 \leq 1.32$ ,

os dois expoentes são positivos, o que faz com que o comportamento do sistema seja hipercáotico. Por fim, no intervalo  $1.33 \leq \xi_1 \leq 2$  o expoente em preto volta a ser zero, entretanto o expoente em vermelho decai para valores negativos, com isso o sistema volta a ter um comportamento periódico. Desta forma pode – se construir a tabela 4.2 que mostra os tipos de atratores do sistema para  $\theta = 0.7$ .

Tabela 4.2: Tipos de atratores no estado estacionário para  $\theta = 0.7$ .

Valor do Parâmetro de controle $\xi_1$	Valor de $\theta$	Tipo de atrator no estado estacionário
0.1 – 0.67	0.7	Periódico
0.68 – 0.78	0.7	Caótico
0.79 – 0.98	0.7	Periódico
0.99 – 1.32	0.7	Hipercaótico
1.33 - 2	0.7	Periódico

Para completar a análise, é mostrada a dinâmica não linear do sistema para cada intervalo da tabela acima. Na figura 4.22 é mostrado o comportamento para o valor de  $\xi_1 = 0.5$ , onde a velocidade angular do motor esta abaixo da frequência natural, e pode – se comprovar pelo espectro de frequência que o comportamento do sistema é periódico.

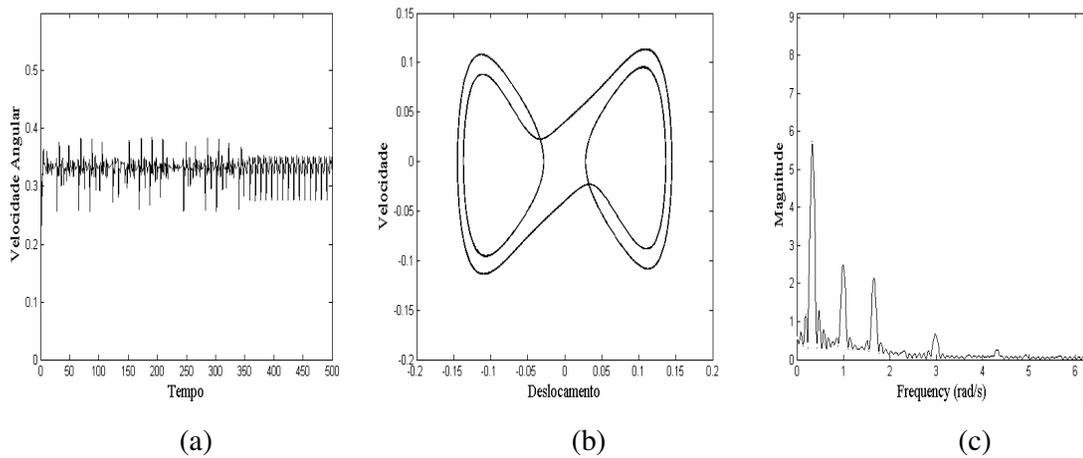


Figura 4.22: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.7$  e  $\xi_1 = 0.5$

Para outro valor do parâmetro de controle, por exemplo,  $\xi_1 = 0.7$  é ilustrado na figura 4.23. Nesta situação a velocidade angular continua abaixo da frequência natural do sistema, mas pelo espectro de frequência nota – se que o sistema agora tem um comportamento caótico como mostrado na tabela 4.2.

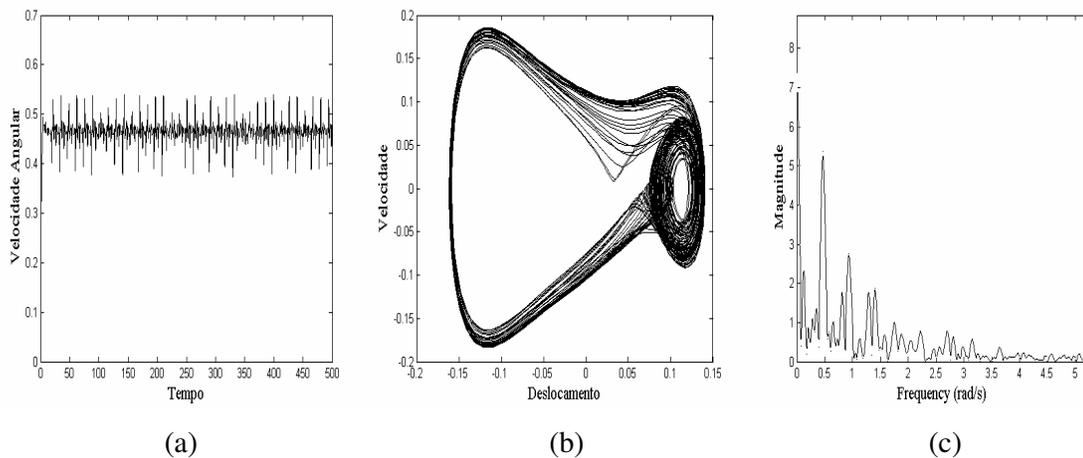


Figura 4.23: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.7$  e  $\xi_1 = 0.7$ .

Observando agora a dinâmica não linear para  $\xi_1 = 0.8218$  na figura 4.24, onde a velocidade angular do motor é capturada pela frequência natural. Pela tabela 4.2 o valor de  $\xi_1 = 0.8218$  esta numa região onde a solução do sistema é periódica, o que de fato acontece, pois é possível comprovar esta afirmação pelo espectro de frequência.

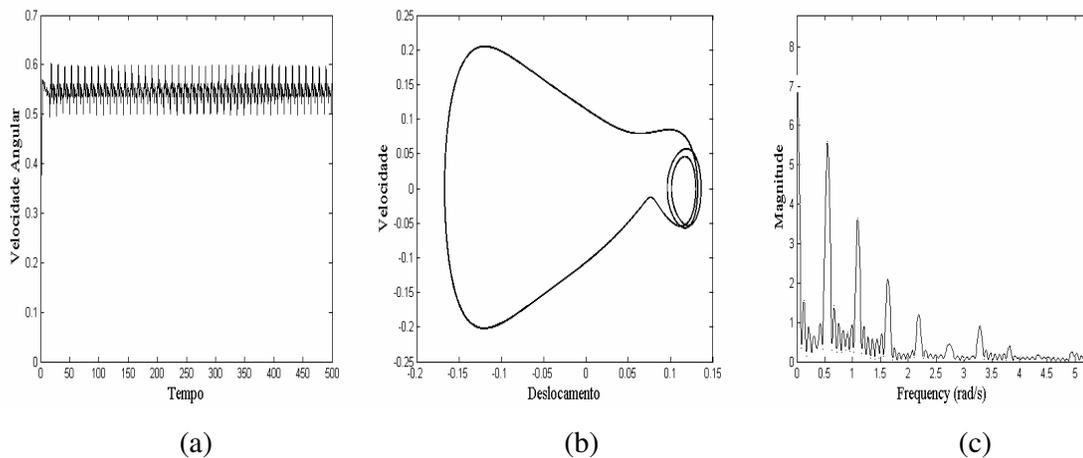


Figura 4.24: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.7$  e  $\xi_1 = 0.8218$ .

Assumindo agora que o valor do parâmetro de controle seja  $\xi_1 = 1$ , na figura 4.25, tem – se que a velocidade rotacional do motor passa pela região de ressonância. Pela tabela 4.2 este parâmetro de controle está no intervalo onde o comportamento do sistema apresenta um comportamento hipercaótico.

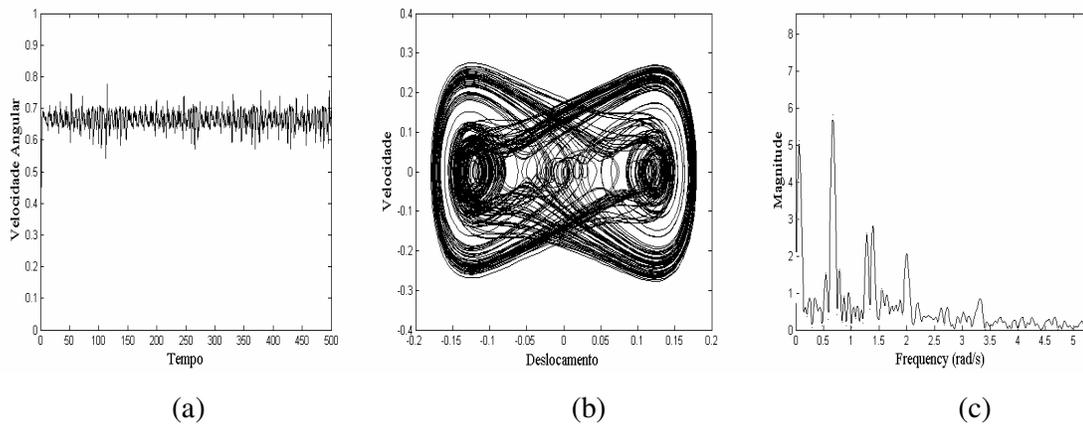


Figura 4.25: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.7$  e  $\xi_1 = 1$ .

Com o aumento do parâmetro de controle para o valor de  $\xi_1 = 1.5$ , o que pela tabela 4.2 corresponde ao último intervalo, tem – se que o comportamento do sistema volta a ser periódico, com a velocidade angular passando pela região de ressonância. Esta situação é ilustrada na figura 4.26 e na figura 4.26(c) o espectro de frequência comprova que o sistema oscila periodicamente.

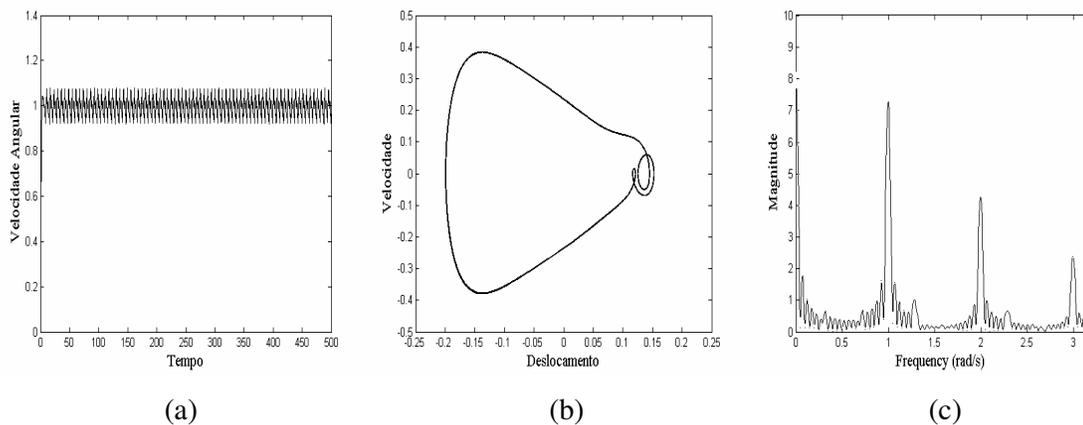


Figura 4.26: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.7$  e  $\xi_1 = 1.5$ .

A seguir, discute – se a evolução da seção de Poincaré e do plano de fase variando – se o parâmetro de controle  $\xi_1$

- **Evolução da seção de Poincaré e do plano de fase**

Como é conhecido da literatura e como foi mostrado até aqui nesta dissertação, a frequência angular do motor, dependente do valor do parâmetro de controle  $\xi_1$ , não assumindo um valor constante, diferentemente do caso ideal, onde a frequência de excitação externa do sistema é assumida ser um valor fixo. Devido a este fato, a construção da seção de Poincaré torna – se uma tarefa complicada. Partindo deste fato, para a construção da seção de Poincaré, deve – se levar em conta a frequência média do motor, onde a seção de Poincaré representa a superfície de seção  $(x_1(\tau_n), x_2(\tau_n))$ , Zukovic e Cveticanin (2007). Os pontos  $(x_1(\tau_n), x_2(\tau_n))$  são capturados para  $\tau_n = nT$ , onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ , com período  $T = \frac{2\pi}{\Omega_M}$ , onde a velocidade angular média ( $\Omega_M$ ) é obtida numericamente da forma.

$$\Omega_M = \frac{\phi(\tau_1) - \phi(0)}{\tau_1} = \frac{x_3(\tau_1) - x_3(0)}{\tau_1} \quad (4.16)$$

onde  $\tau_1$  é um logo período de tempo para o cálculo numérico.

A figura 4.27 mostra a seqüência da seção de Poincaré associado a diferentes valores de  $\xi_1$ . A figura 4.27(a), mostra que o sistema tem um comportamento periódico de período 1. Já a figura 4.27(b) mostra o comportamento da solução, quando ocorre a bifurcação de duplicação de período para o valor de  $\xi_1 = 0.55$ . Neste caso o sistema duplica de período e o novo atrator de período 2, aparece durante a variação de parâmetro, mas na figura 4.27(c) a solução do sistema volta a ser periódica de período 1. Na figura 4.27(d) mostra a existência de um atrator estranho associado ao movimento o sistema, que apresenta um comportamento caótico. Na figura 4.27(e) mostra que a passagem entre a solução caótico, é marcada pela diminuição do período da solução, voltando o sistema a ter um comportamento periódico de período 2, e de período 1, na figura 4.27(f), entretanto, com o aumento de  $\xi_1$ , ocorre novamente uma bifurcação por dobra de período ilustrado na figura 4.27(g). Com o acréscimo de  $\xi_1$  novamente acontece o aparecimento de um atrator estranho na figura 4.27(h) mostrando que o sistema tem um comportamento caótico, e com o aumento de  $\xi_1$  a figura 4.27(i) ilustra que a passagem entre a solução caótica, é marcada pela diminuição do período da solução, voltando o sistema a ter um comportamento periódico de período 4, depois de período 2, figura 4.27(j) e período 1, na figura 4.27(l). Para completar a análise de  $\theta = 0.7$ , é mostrada na figura 4.28 a evolução do plano de fase associado a cada mapa de Poincare apresentado na figura 4.27.

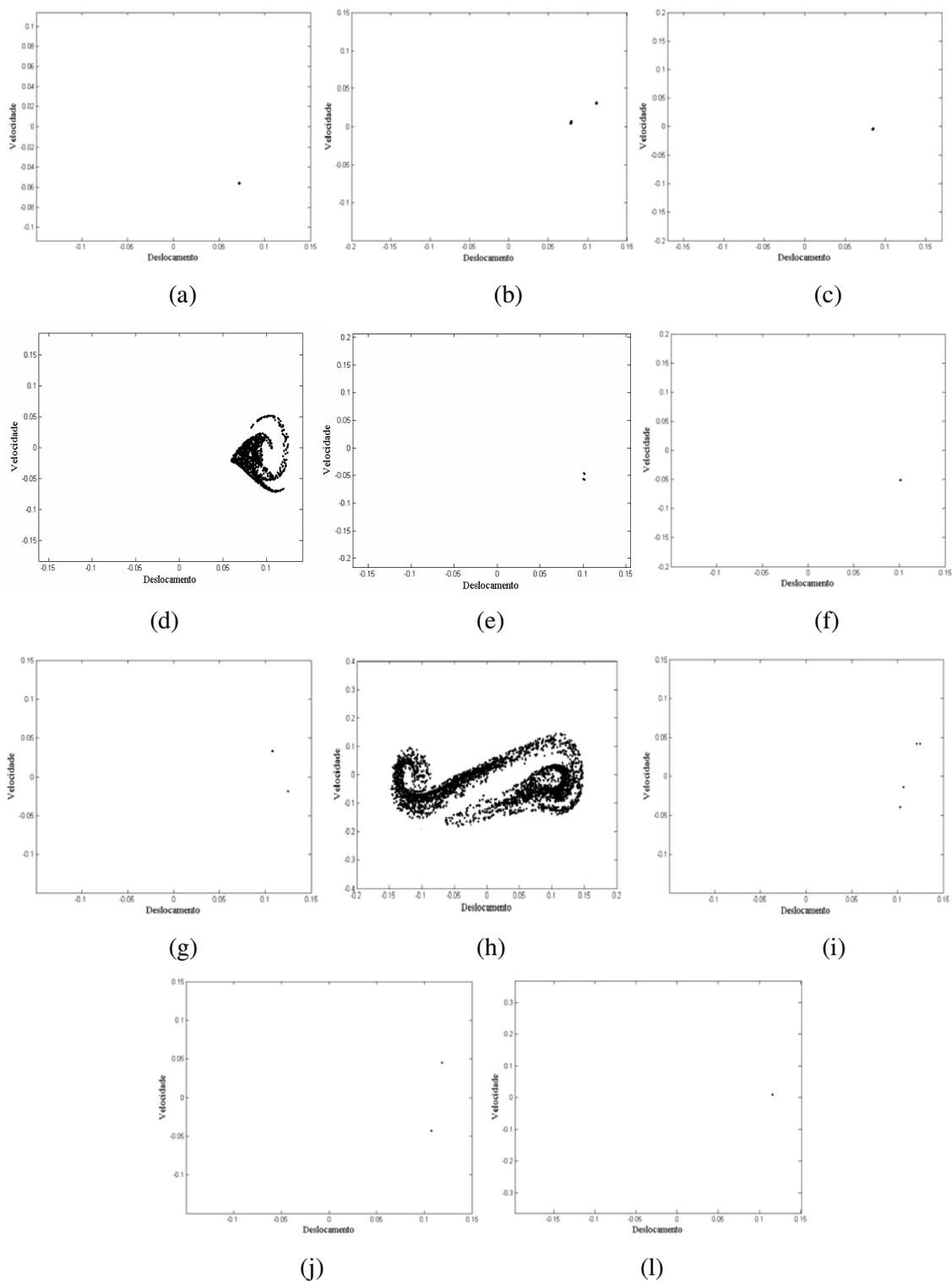


Figura 4.27: Evolução da seção de Poincaré para  $\theta = 0.7$  devido à variação da tensão do motor (a)  $\xi_1 = 0.5$ , período -1, (b)  $\xi_1 = 0.55$ , período -2, (c)  $\xi_1 = 0.6$ , período -1, (d)  $\xi_1 = 0.7$ , caos, (e)  $\xi_1 = 0.79$ , período -2, (f)  $\xi_1 = 0.8$ , período -1, (g)  $\xi_1 = 0.95$ , período -2, (h)  $\xi_1 = 1$ , hipercaos, (i)  $\xi_1 = 1.33$ , período -4, (j)  $\xi_1 = 1.34$ , período -2, (l)  $\xi_1 = 1.45$ , período -1.

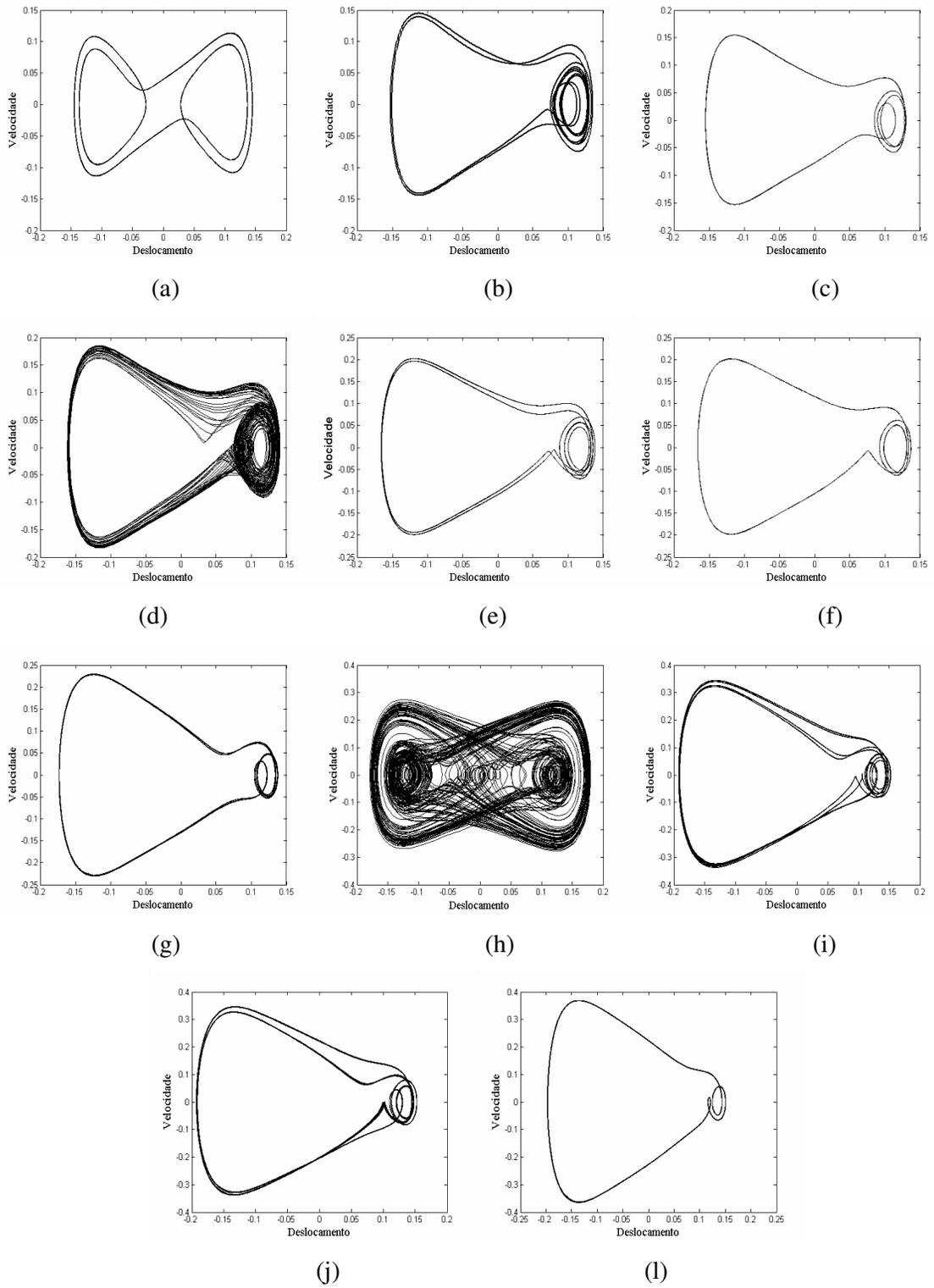


Figura 4.28: Evolução do plano de fase para  $\theta = 0.7$  devido à variação da tensão do motor. (a)  $\xi_1 = 0.5$ , (b)  $\xi_1 = 0.55$ , (c)  $\xi_1 = 0.6$ , (d)  $\xi_1 = 0.7$ , (e)  $\xi_1 = 0.79$ , (f)  $\xi_1 = 0.8$ , (g)  $\xi_1 = 0.95$ , (h)  $\xi_1 = 1$ , (i)  $\xi_1 = 1.33$ , (j)  $\xi_1 = 1.34$ , (l)  $\xi_1 = 1.45$ .

Agora focaliza – se a dinâmica não linear do sistema quando ocorre o aumento da temperatura para  $\theta=0.9$ , porém continuando a fase martensítica estável na liga. Na figura 4.29 é ilustrado o efeito Sommerfeld através do diagrama de resposta em frequência.

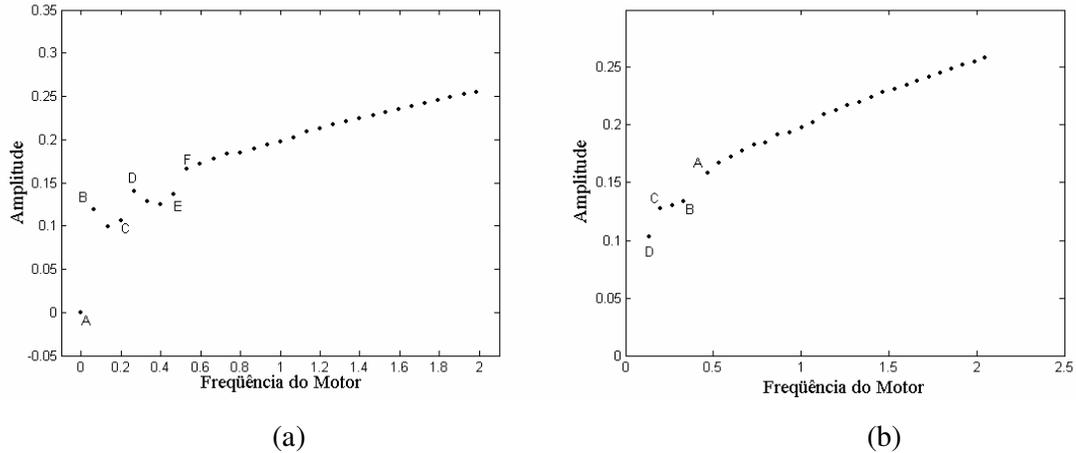


Figura 4.29: Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de  $\xi_1$  e (b) o decréscimo de  $\xi_1$  para  $\theta=0.9$ ,  $\mu=0.01$

O diagrama de resposta frequência da figura 4.29(a) é construído considerando um aumento da tensão do motor da ordem de  $\Delta\xi_1=0.1$ . A variação de  $\xi_1$  esta no intervalo  $[0,3]$ . Pela figura 4.29(a) pode – se observar a ocorrência de três saltos: dois superharmonic, correspondente aos pontos A e B, e outro entre os pontos C e D, e um subharmonic entre os pontos E e F. No primeiro caso o sistema está em repouso (ponto A), quando o motor é ligado aplicando – se uma tensão de  $\xi_1=0.1$ , o primeiro salto acontece entre os pontos A e B com a frequência do motor entre  $(0 < \dot{\phi} \leq 0.06)$ . Com o aumento de  $\xi_1$ , tem – se o aumento da amplitude até a ocorrência do segundo salto entre os pontos C e D, com a frequência do motor entre  $(0.2 \leq \dot{\phi} \leq 0.28)$ . Depois do segundo salto ocorre um decréscimo da amplitude, mas como  $\xi_1$  esta aumentando ocorre o terceiro salto entre os pontos E e F, com uma frequência do motor na região  $(0.46 \leq \dot{\phi} \leq 0.54)$ , com o aumento do parâmetro de controle a amplitude continua aumentando.

Por outro lado, na figura 4.29(b) a variação de  $\xi_1$  pertence ao intervalo  $[3,0.1]$ , neste caso acontecem dois saltos um subharmonic entre os pontos A e B e outro superharmonic entre os pontos C e D. Com a tensão do motor inicialmente com o valor de  $\xi_1=3$ , diminui – se este valor na ordem de 0.1, ocorrendo uma diminuição da amplitude até a ocorrência do primeiro

salto entre os pontos A e B, com uma diminuição da amplitude, e a frequência do motor entre  $(0.32 < \dot{\phi} < 0.46)$ . Continuando o decréscimo de  $\xi_1$  a amplitude contínua decrescendo até atingir o valor crítico em C ocorrendo outro salto até o ponto D, com a frequência do motor entre o intervalo  $(0.2 < \dot{\phi} < 0.12)$ .

Na figura 4.30 é exibida a dinâmica dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$ .

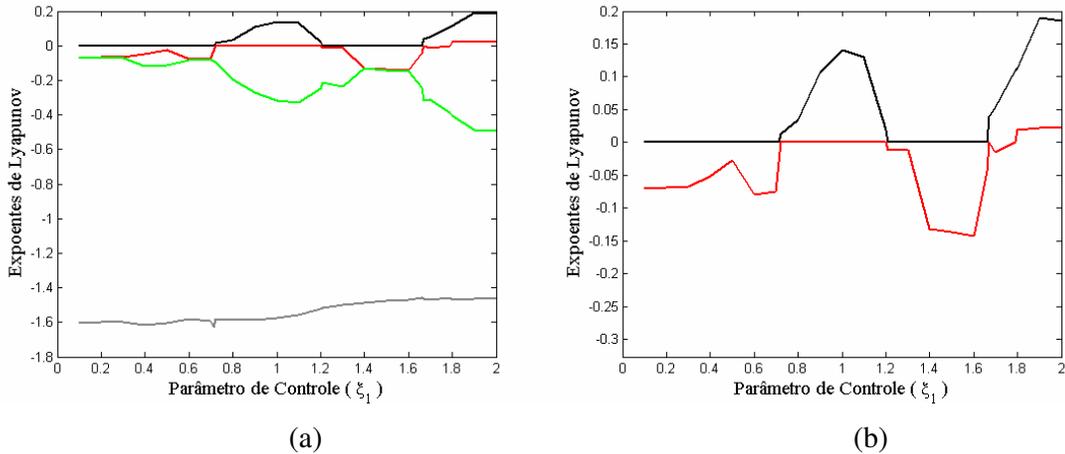


Figura 4.30: Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$  para  $\theta = 0.9$ , (a) Expoente de Lyapunov, (b) Zoom dos dois principais expoentes

Novamente aqui são encontrados quatro expoentes de Lyapunov, onde o expoente de cor preta varia entre valores positivos e zero, o expoentes em vermelho por sua vez oscila entre valores positivos, zero ou negativos dependo do valor de  $\xi_1$ , enquanto os expoentes em verde e cinza são sempre negativos. Assim os expoentes mais relevantes para a compreensão da dinâmica não linear do sistema são os dois primeiros. De acordo com os dados da figura 4.30 é possível verificar que entre  $0.1 \leq \xi_1 \leq 0.71$  o expoente em preto vale zero, enquanto o expoente na cor vermelha varia entre valores negativos, o que implica que neste intervalo, a solução do sistema é periódica. O próximo intervalo que incorpora valores ente  $0.72 \leq \xi_1 \leq 1.2$  indica que a dinâmica do sistema é caótica, pois existem expoentes positivos (preto) e o expoente zero (vermelho). Para os valores entre  $1.21 \leq \xi_1 \leq 1.66$  o sistema muda a sua dinâmica apresentando agora movimentos periódicos, devido ao fato que existem expoentes negativos (cor vermelha) e os expoentes em preto tornam – se zero. Aumentando o valor do parâmetro de controle o sistema apresenta um comportamento caótico no intervalo  $1.67 \leq \xi_1 \leq 1.79$ , visto que existem expoentes positivos (preto) e negativos (vermelho). Por fim, para o intervalo  $1.8 \leq \xi_1 \leq 2$  os

expoentes são positivos indicando que a solução do sistema é hipercaótico. A tabela 4.3 mostra os atratores para cada um destes intervalos.

Tabela 4.3: Tipos de atratores no estado estacionário para  $\theta = 0.9$

Valor do Parâmetro de controle $\xi_1$	Valor de $\theta$	Tipo de atrator no estado estacionário
0.1 – 0.71	0.9	Periódico
0.72 – 1.2	0.9	Caótico
1.21 – 1.66	0.9	Periódico
1.67 – 1.79	0.9	Caótico
1.8 – 2	0.9	Hipercaótico

Para ilustrar a dinâmica de cada intervalo da tabela 4.3 é mostrado o comportamento do sistema através do plano de fase e espectro de frequência.

A figura 4.31 mostra a solução do sistema para  $\xi_1 = 0.4$ , onde a frequência do motor está abaixo da frequência natural, e de acordo com a tabela 4.3 o movimento é periódico, o que é verificado pelo espectro de frequência.

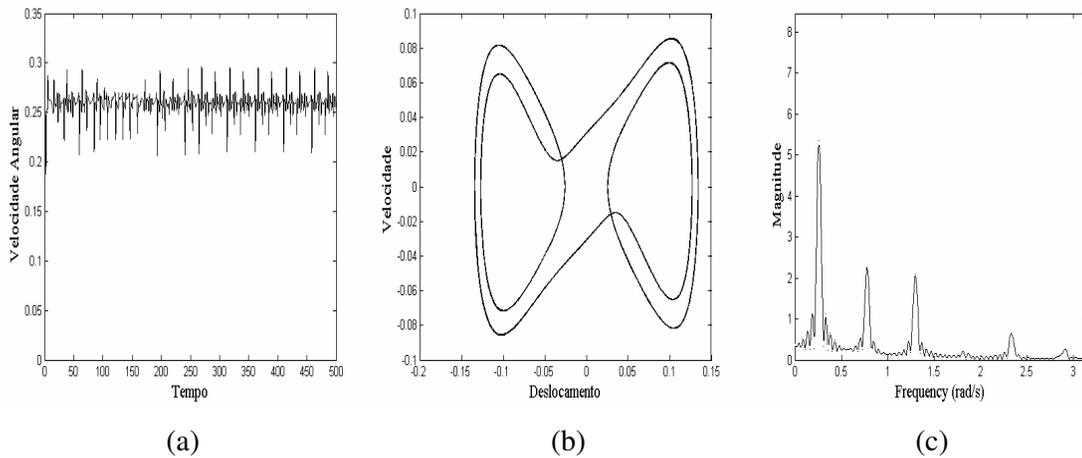


Figura 4.31: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.9$  e  $\xi_1 = 0.4$ .

Na figura 4.32 é ilustrado o comportamento para o valor de  $\xi_1 = 0.474$ , nesta situação a frequência do motor é capturada pela frequência natural do sistema.

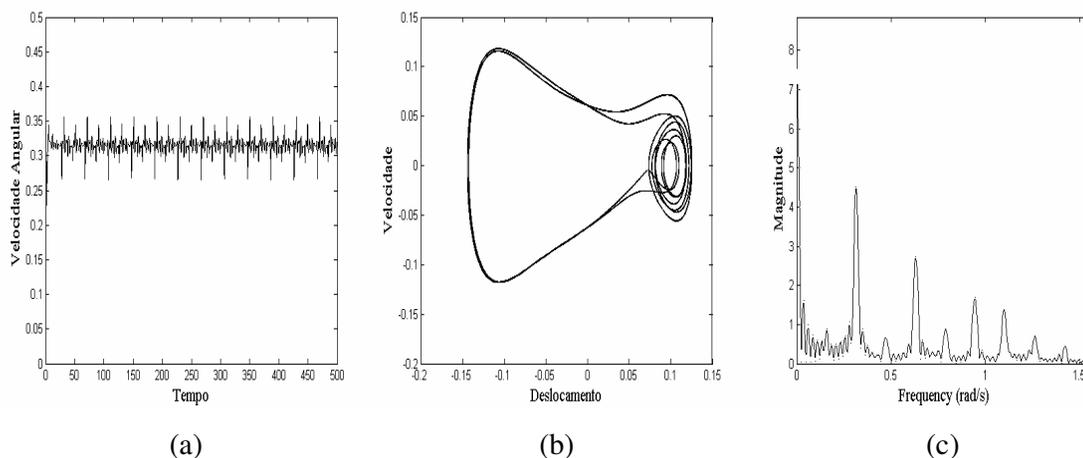


Figura 4.32: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.9$  e  $\xi_1 = 0.474$ .

A figura 4.33 mostra a resposta do sistema para  $\xi_1 = 0.9$ . Aqui a frequência do motor passa pela região de ressonância e o comportamento do sistema é caótico, comprovado pelo espectro de frequência.

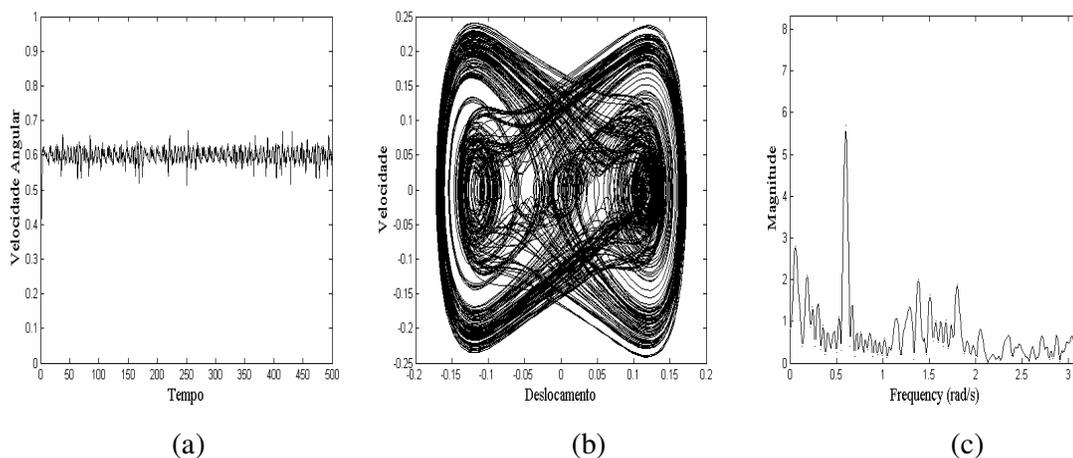


Figura 4.33: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.9$  e  $\xi_1 = 0.9$ .

A figura 4.34 mostra o comportamento do sistema para  $\xi_1 = 1.5$ , onde novamente ocorre à passagem pela ressonância e a dinâmica do sistema é periódica, comprovada pela tabela 4.3 e pelo espectro de frequência.

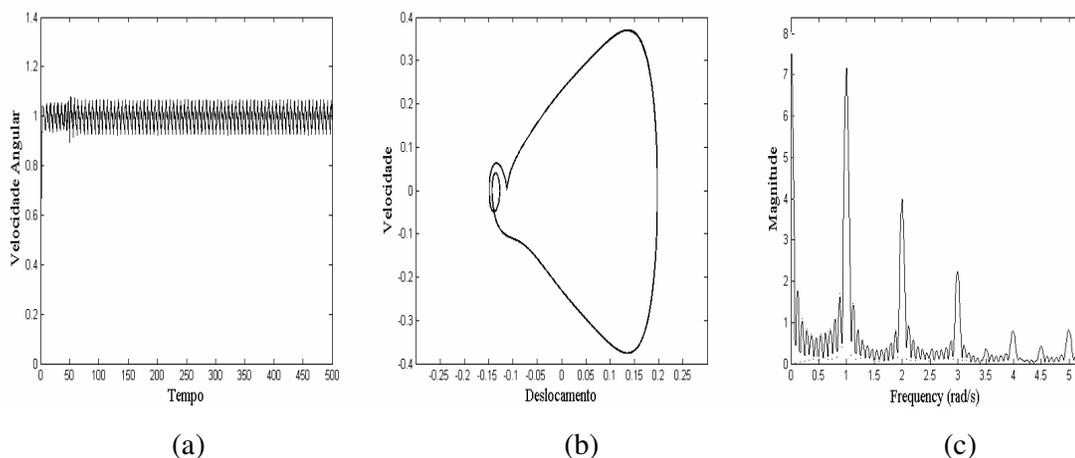


Figura 4.34: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.9$  e  $\xi_1 = 1.5$ .

O resultado obtido na figura 4.35, mostra que a frequência do motor passa sem problemas pela região de ressonância para  $\xi_1 = 1.75$ , apresentando assim um comportamento caótico, sendo evidenciado pelos expoentes de Lyapunov e espectro de frequência

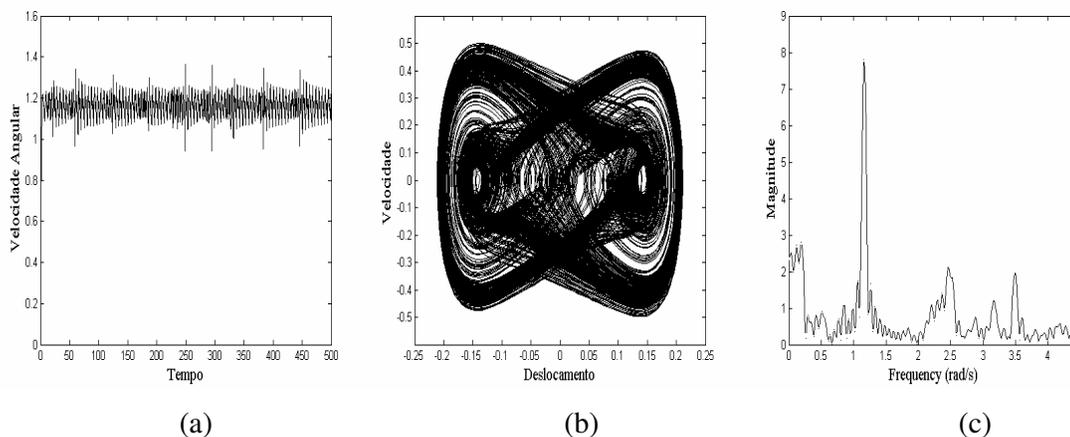


Figura 4.35: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.9$  e  $\xi_1 = 1.75$ .

A figura 4.36 mostra o comportamento do sistema para  $\xi_1 = 1.9$ . Para este parâmetro de controle a tabela 4.3 ilustra que a solução do sistema é hipercáotico devido ao fato de existirem dois expoentes de Lyapunov positivos. Nota – se pelo espectro de frequência uma faixa contínua de frequências e pela figura 4.36(a) percebe – se que a velocidade angular do motor esta acima da região de ressonância.

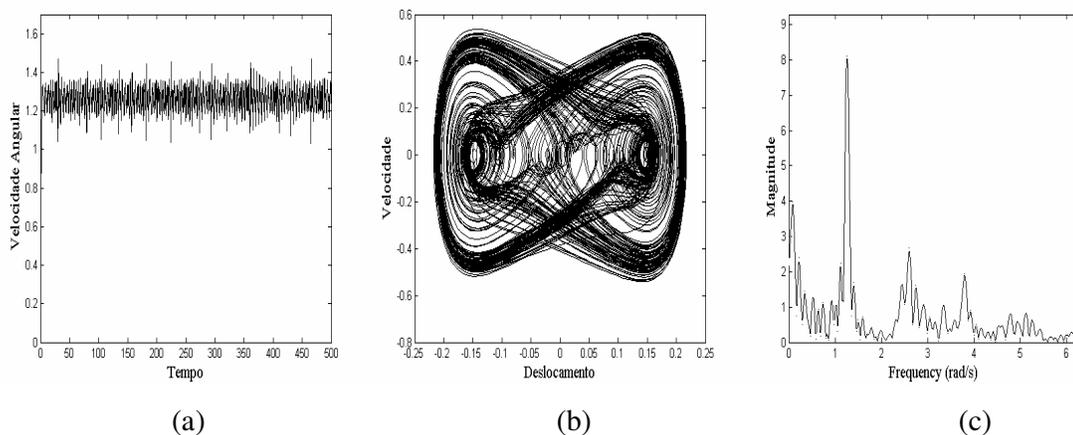


Figura 4.36: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.9$  e  $\xi_1 = 1.9$ .

A seguir, discute – se a evolução da seção de Poincaré e do plano de fase variando – se o parâmetro de controle  $\xi_1$

- **Evolução da Seção de Poincaré e do plano de fase**

Novamente a seção de Poincaré e a sua evolução com relação ao parâmetro de controle, são construídos levando – se em conta a frequência angular média do motor,  $\Omega_M$  dado pela equação 4.16. A figura 4.37 mostra a seqüência do mapa de Poincaré associado a diferentes valores de  $\xi_1$ .

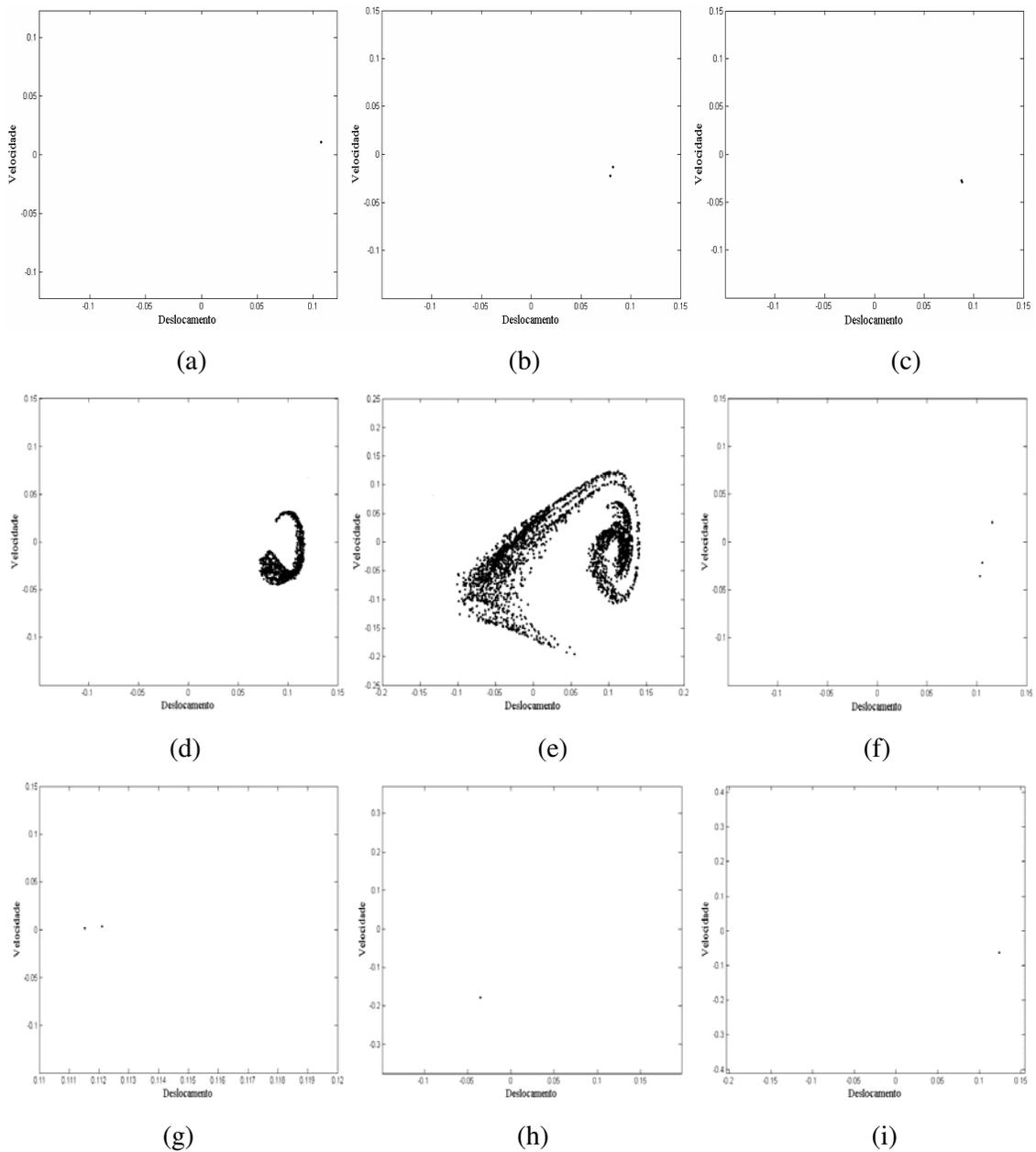


Figura 4.37: Evolução da seção de Poincaré para  $\theta = 0.9$  devido à variação da tensão do motor: (a)  $\xi_1 = 0.5$ , período -1, (b)  $\xi_1 = 0.65$ , período - 2, (c)  $\xi_1 = 0.68$ , período - 1, (d)  $\xi_1 = 0.75$ , caos, (e)  $\xi_1 = 0.9$ , caos, (f)  $\xi_1 = 1.21$ , período - 3, (g)  $\xi_1 = 1.3$ , período - 2, (h)  $\xi_1 = 1.5$ , período -1, (i)  $\xi_1 = 1.66$ , período - 1.

A figura 4.37 mostra a seqüência do mapa de Poincaré associado a diferentes valores de  $\xi_1$ . A figura 4.37(a), mostra que o sistema tem um comportamento periódico de período 1. Já a figura 4.37(b) ilustra o comportamento da solução, quando ocorre a bifurcação de duplicação de período para o valor de  $\xi_1 = 0.65$ . Neste caso acontece a duplicando de período com um

novo atrator de período 2, aparecendo durante um pequeno intervalo da variação de parâmetro, e na figura 4.37(c) a solução do sistema volta a ser periódica de período 1. Aumentando o valor de  $\xi_1$ , a figura 4.37(d) mostra a existência de um atrator estranho relacionado ao movimento do sistema, apresentando assim um comportamento caótico. Com o aumento do parâmetro de controle, a figura 4.37(e) ainda apresenta um movimento caótico só que ocorre uma mudança geométrica no atrator do sistema, na figura 4.37(f), entretanto, com o aumento de  $\xi_1$ , ocorre à passagem pela região caótica com o sistema voltando a ter um comportamento periódico agora de período - 3 e na figura 4.37(g) ocorre uma diminuição do período da solução, voltando o sistema a ter um comportamento periódico de período 2. Nas figuras 4.37(h) e 4.37(i) o comportamento do sistema é periódico de período 1, mas os atratores destas duas figuras se encontram em lugares diferentes no mapa.

Para concluir a análise de  $\theta=0.9$ , a figura 4.38 mostra a evolução do plano de fase associado a cada mapa de Poincaré exibido na figura 4.37.

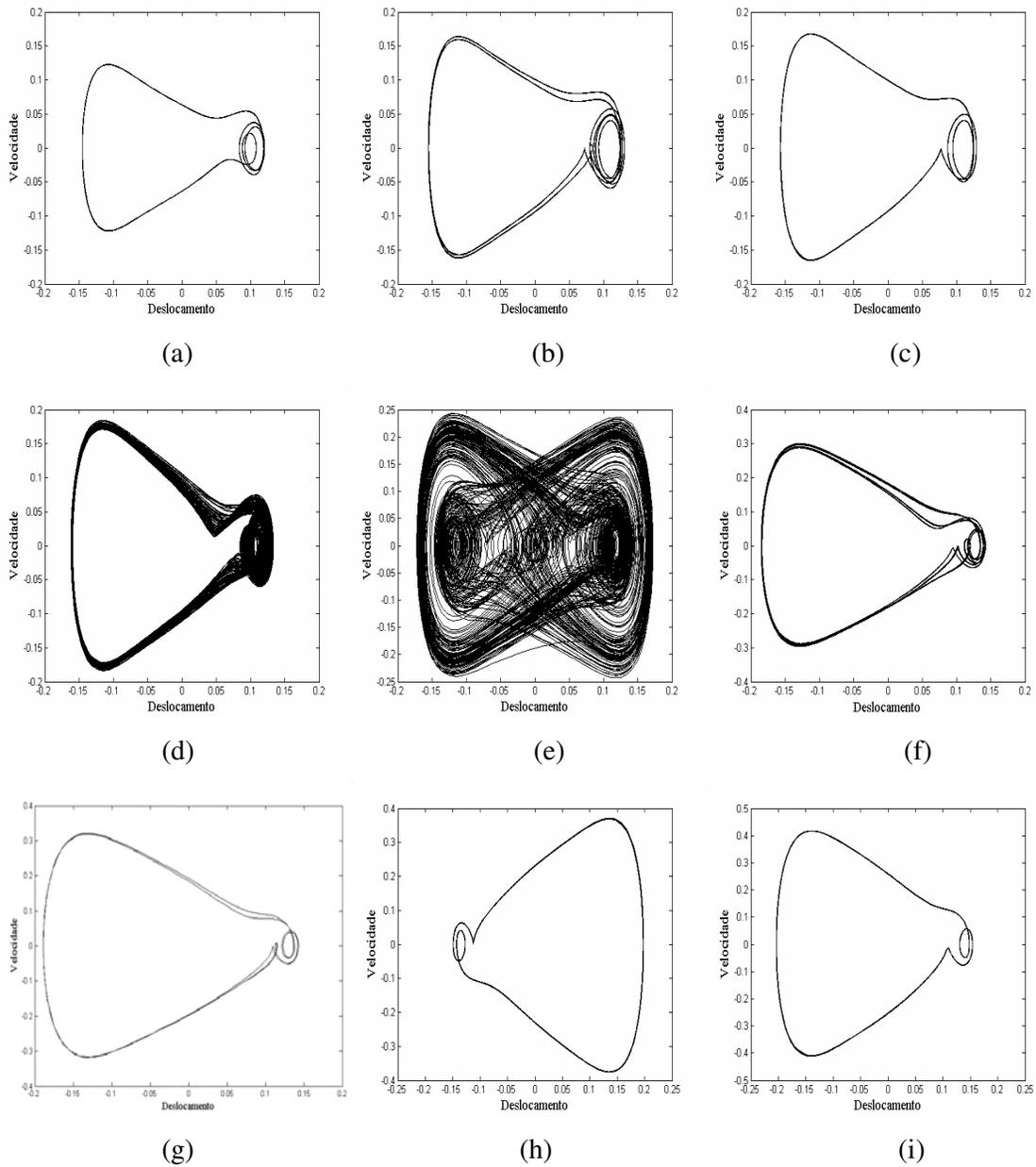


Figura 4.38: Evolução do plano de fase para  $\theta = 0.9$  devido à variação da tensão do motor. (a)  $\xi_1 = 0.5$ , (b)  $\xi_1 = 0.65$ , (c)  $\xi_1 = 0.68$ , (d)  $\xi_1 = 0.75$ , (e)  $\xi_1 = 0.9$ , (f)  $\xi_1 = 1.21$ , (g)  $\xi_1 = 1.3$ , (h)  $\xi_1 = 1.5$ , (i)  $\xi_1 = 1.66$ .

A seguir, é ilustrada a dinâmica do sistema não ideal para uma temperatura intermediária, onde ambas as fases martensítica e austenítica são estáveis.

### 4.2.2.b Fase martensítica e austenítica estáveis na liga

Aqui a análise dinâmica não linear é feita para uma temperatura intermediária onde  $\theta = 1.03$ , e ambas as fases martensítica e austenítica estão presentes na liga.

A figura 4.39 ilustra o efeito Sommerfeld para  $\theta = 1.03$ . Na figura 4.39(a) ocorre um aumento de  $\xi_1$ , para acréscimos da ordem de  $\Delta\xi_1 = 0.02$  com  $\xi_1$  variando entre  $0.1 \leq \xi_1 \leq 0.7$ . O sistema inicialmente em repouso sofre o primeiro salto, entre os pontos A e B, assim que o motor é acionado com uma tensão de 0.1 e com a frequência rotacional do motor entre  $(0 < \dot{\phi} < 0.08)$ . Aumentando o valor de  $\xi_1$  a amplitude sofre pequenos acréscimos de amplitude até a ocorrência de outro salto brusco entre os pontos C e D com a frequência rotacional do motor entre  $(0.18 < \dot{\phi} < 0.2)$ . Na figura 4.39(b) acontece o decréscimo de  $\xi_1$ , com o parâmetro de controle variando  $\Delta\xi_1 = 0.02$ , e dentro do intervalo  $0.1 \leq \xi_1 \leq 0.7$ . Inicialmente o sistema tem um valor de tensão igual a 0.7 com o decréscimo de  $\xi_1$  e o fenômeno de salto ocorre entre os pontos A e B, com a frequência do motor entre  $(0.13 < \dot{\phi} < 0.17)$ .

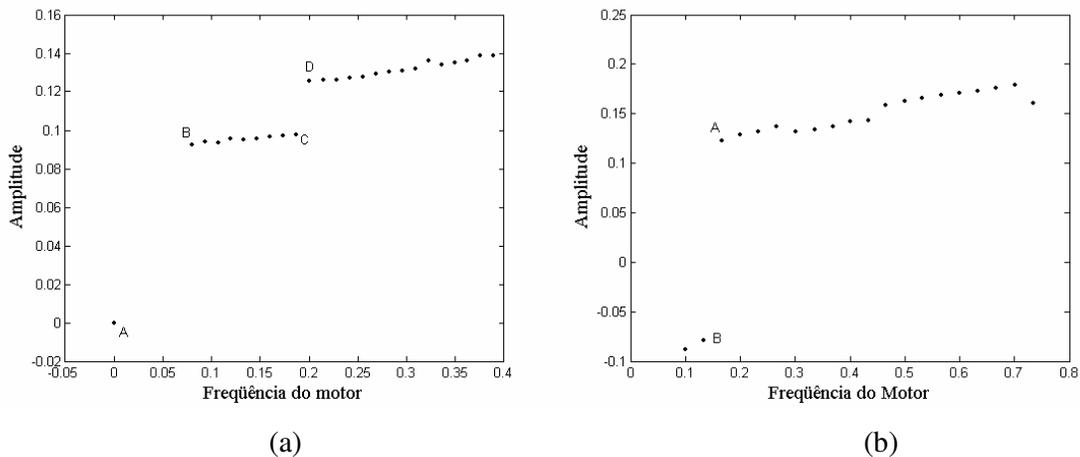


Figura 4.39: Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de  $\xi_1$  e (b) o decréscimo de  $\xi_1$  para  $\theta = 1.03$ ,  $\mu = 0.01$

Na figura 4.40(a) são apresentados os expoentes de Lyapunov para diferentes valores do parâmetro  $\xi_1$ , tornando visível o momento quando o movimento do sistema torna – se caótico. Um zoom dos dois principais expoentes é apresentado na figura 4.40(b), mostrando a existência de caos e hipercaos no sistema.

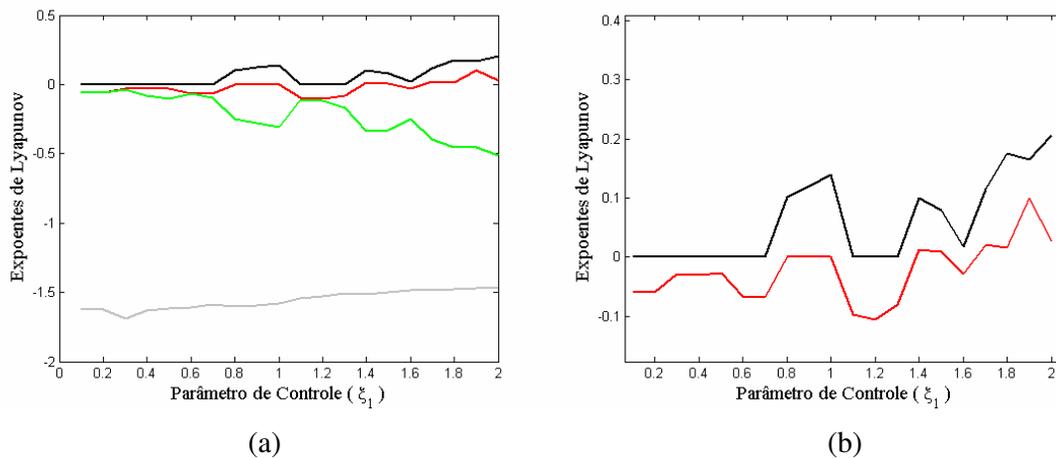


Figura 4.40: Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$  para  $\theta = 1.03$ , (a) Expoente de Lyapunov, (b) Zoom dos dois principais expoentes

Da figura 4.40 é montada a tabela 4.4, mostrando os tipos de atratores para cada situação. Nos intervalos  $0.1 \leq \xi_1 \leq 0.74$  e  $1.07 \leq \xi_1 \leq 1.3$  o movimento apresenta expoentes negativos e zero de forma que nestes dois intervalos o comportamento é periódico. Nos intervalos  $0.75 \leq \xi_1 \leq 1.06$ ,  $1.31 \leq \xi_1 \leq 1.39$  e  $1.6 \leq \xi_1 \leq 1.69$  nota – se a existência de expoentes positivos tornando o sistema com um comportamento caótico. Agora nos intervalos  $1.4 \leq \xi_1 \leq 1.59$  e  $1.7 \leq \xi_1 \leq 2$  o comportamento hipercaótico é caracterizado por apresentar dois expoentes positivos.

Tabela 4.4: Tipos de atratores no estado estacionário para  $\theta = 1.03$

Valor do Parâmetro de controle $\xi_1$	Valor de $\theta$	Tipo de atrator no estado estacionário
0.1 – 0.74	1.03	Periódico
0.75 – 1.06	1.03	Caótico
1.07 – 1.3	1.03	Periódico
1.31 – 1.39	1.03	Caótico
1.4 – 1.59	1.03	Hipercaótico
1.6 – 1.69	1.03	Caótico
1.7 – 2	1.03	Hipercaótico

Na figura 4.41 é mostrado o comportamento do sistema para  $\xi_1 = 0.26$ , onde o movimento do sistema é periódico. Nesta situação a frequência do motor é capturada pela frequência natural do sistema.

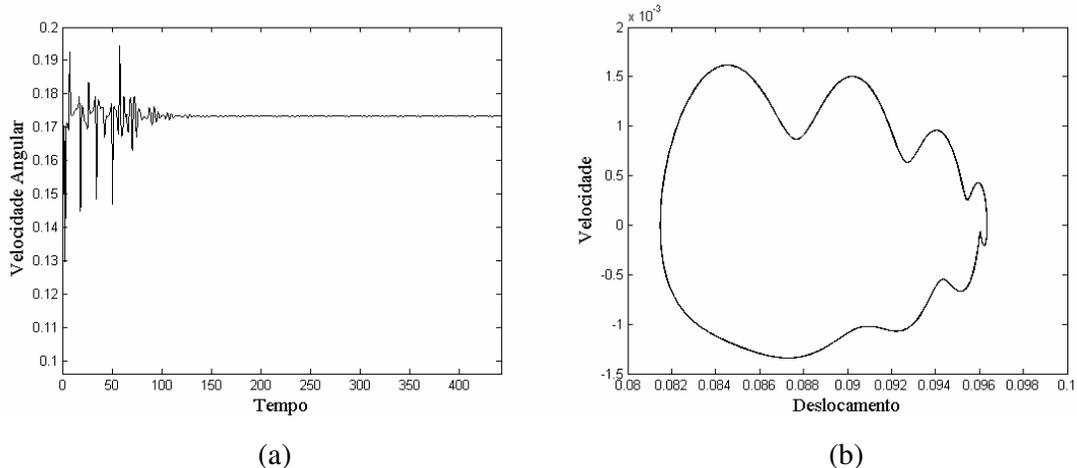


Figura 4.41: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, para  $\theta = 1.03$ ,  $\xi_1 = 0.26$ .

Na figura 4.42 a frequência do motor passa pela região de ressonância onde  $\xi_1 = 1$ , de acordo com a tabela 4.4 o comportamento do sistema é caótico, o que é comprovado pelo espectro de frequência.

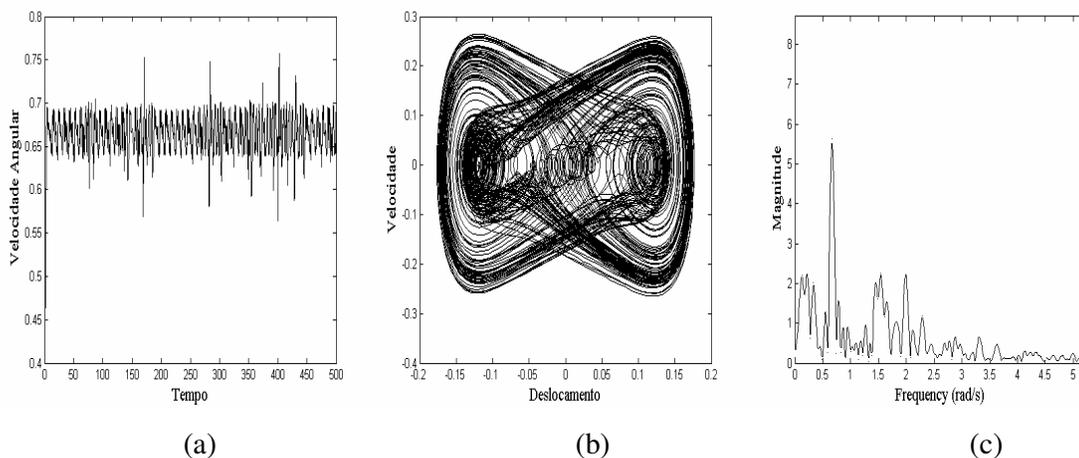


Figura 4.42: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 1.03$  e  $\xi_1 = 1$ .

Aumentando agora o valor do parâmetro de controle para  $\xi_1 = 1.2$ , a frequência do motor passa pela frequência natural, com o sistema tendo um comportamento periódico comprovado pelos expoentes de Lyapunov (tabela 4.4) e pelo espectro de frequência, essa situação é ilustrada na figura 4.43.

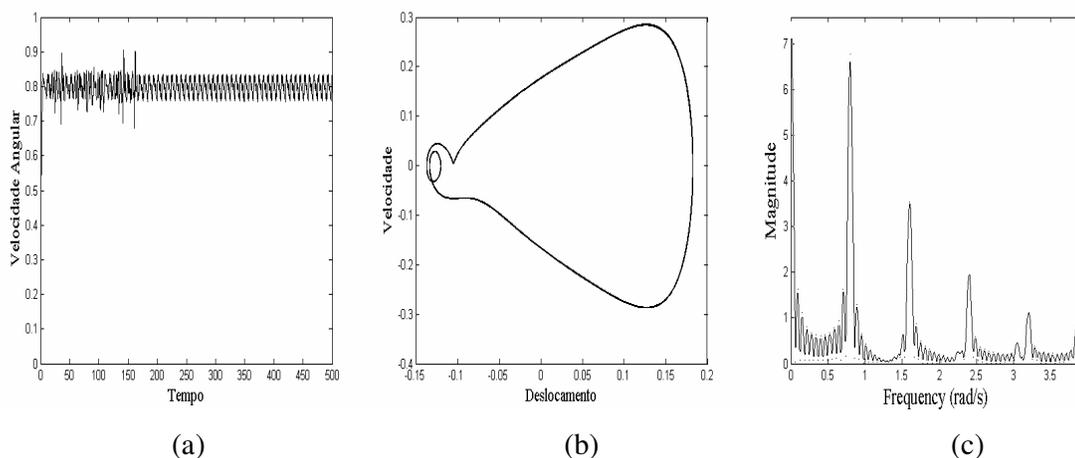


Figura 4.43: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 1.03$  e  $\xi_1 = 1.2$ .

Na figura 4.44 é mostrado o comportamento para  $\xi_1 = 1.35$ . Nesta situação a frequência do motor passa pela região de ressonância e gera um comportamento caótico, justificado pela presença de um expoente de Lyapunov positivo.

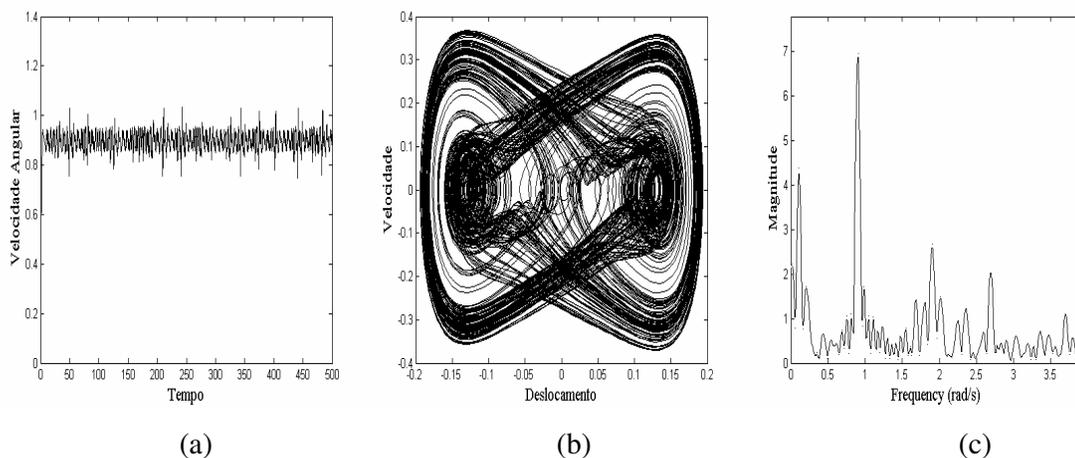


Figura 4.44: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 1.03$  e  $\xi_1 = 1.35$ .

Na figura 4.45 é mostrado o comportamento para  $\xi_1 = 1.35$ . Nesta situação a frequência do motor passa pela região de ressonância e gera um comportamento hipercaótico, justificado pela presença de dois expoentes de Lyapunov positivos.

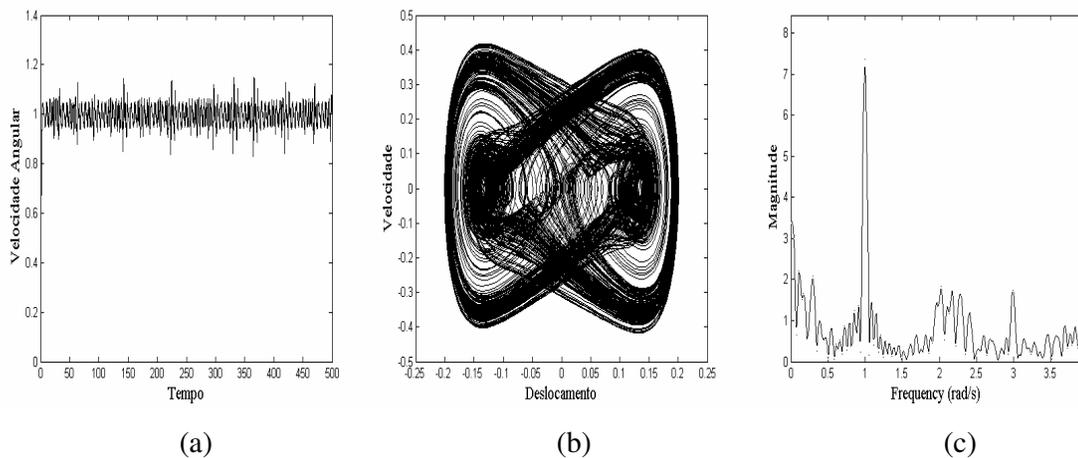


Figura 4.45: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário, (c) espectro de frequência para  $\theta = 1.03$  e  $\xi_1 = 1.5$ .

- **Evolução da seção de Poincaré e do plano de fase**

Novamente a seção de Poincaré e a sua evolução com relação ao parâmetro de controle, são construídos levando – se em conta a frequência angular média do motor,  $\Omega_M$  dado pela equação 4.16. A figura 4.46 mostra a seqüência da seção de Poincaré associado a diferentes valores de  $\xi_1$ . A figura 4.46(a), mostra que o sistema tem um comportamento periódico de período 1. Já a figura 4.46(b) ilustra o comportamento da solução, quando ocorre a bifurcação de duplicação de período para o valor de  $\xi_1 = 0.36$ , na figura 4.46(c) ocorre outra bifurcação por dobra de período em uma das soluções, passando assim o sistema a ter uma solução periódica de período 3. Aumentando o valor de  $\xi_1$ , a figura 4.46(d) tem novamente uma solução periódica de período -2 e depois de período - 1, nas figuras 4.46(e) e 4.46(f). Na figura 4.46(g) mostra a existência de um atrator estranho relacionado ao movimento o sistema, que apresenta um comportamento caótico. Com o aumento do parâmetro de controle, a figura 4.46(h) volta a ter um comportamento periódico com período - 4, na figura 4.46(i), entretanto, ocorre à diminuição de período do sistema para 2, com o aumento de  $\xi_1$  o sistema apresenta um atrator de período 1 na figura 4.46(j) e voltando o comportamento do sistema a ser caótico na figura 4.46(l). Para concluir a análise de  $\theta = 1.03$ , a figura 4.47 mostra a evolução do plano de fase associado a cada seção de Poincare exibido na figura 4.46.

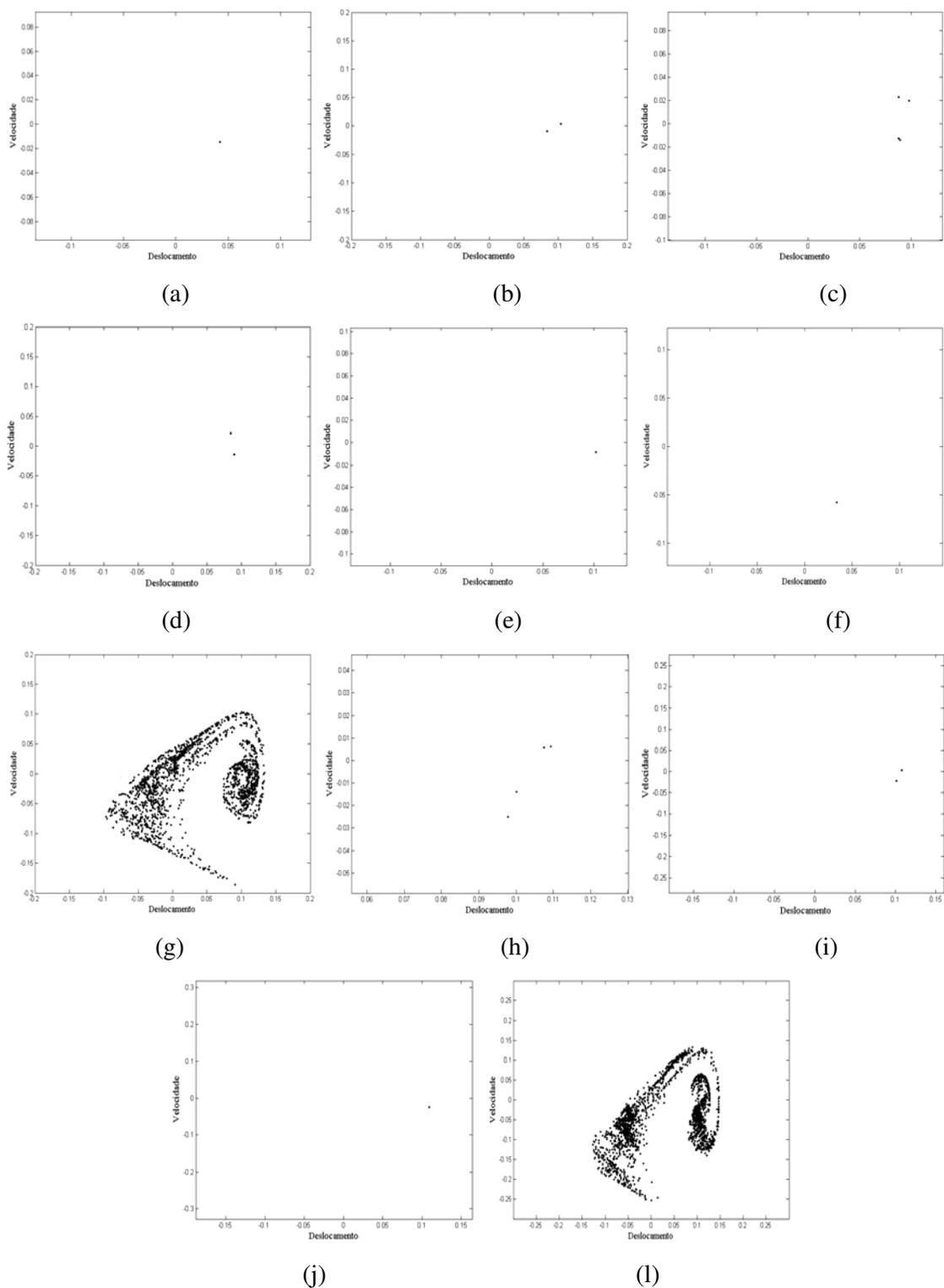


Figura 4.46: Evolução da seção de Poincaré para  $\theta = 1.03$  devido à variação da tensão do motor: (a)  $\xi_1 = 0.35$ , período -1, (b)  $\xi_1 = 0.36$ , período -2, (c)  $\xi_1 = 0.37$ , período -3, (d)  $\xi_1 = 0.38$ , período -2, (e)  $\xi_1 = 0.41$ , período -1, (f)  $\xi_1 = 0.71$ , período -1, (g)  $\xi_1 = 0.75$ , caos, (h)  $\xi_1 = 1.07$ , período -4, (i)  $\xi_1 = 1.09$ , período -2, (j)  $\xi_1 = 1.25$ , período -1, (l)  $\xi_1 = 1.31$ , caos.

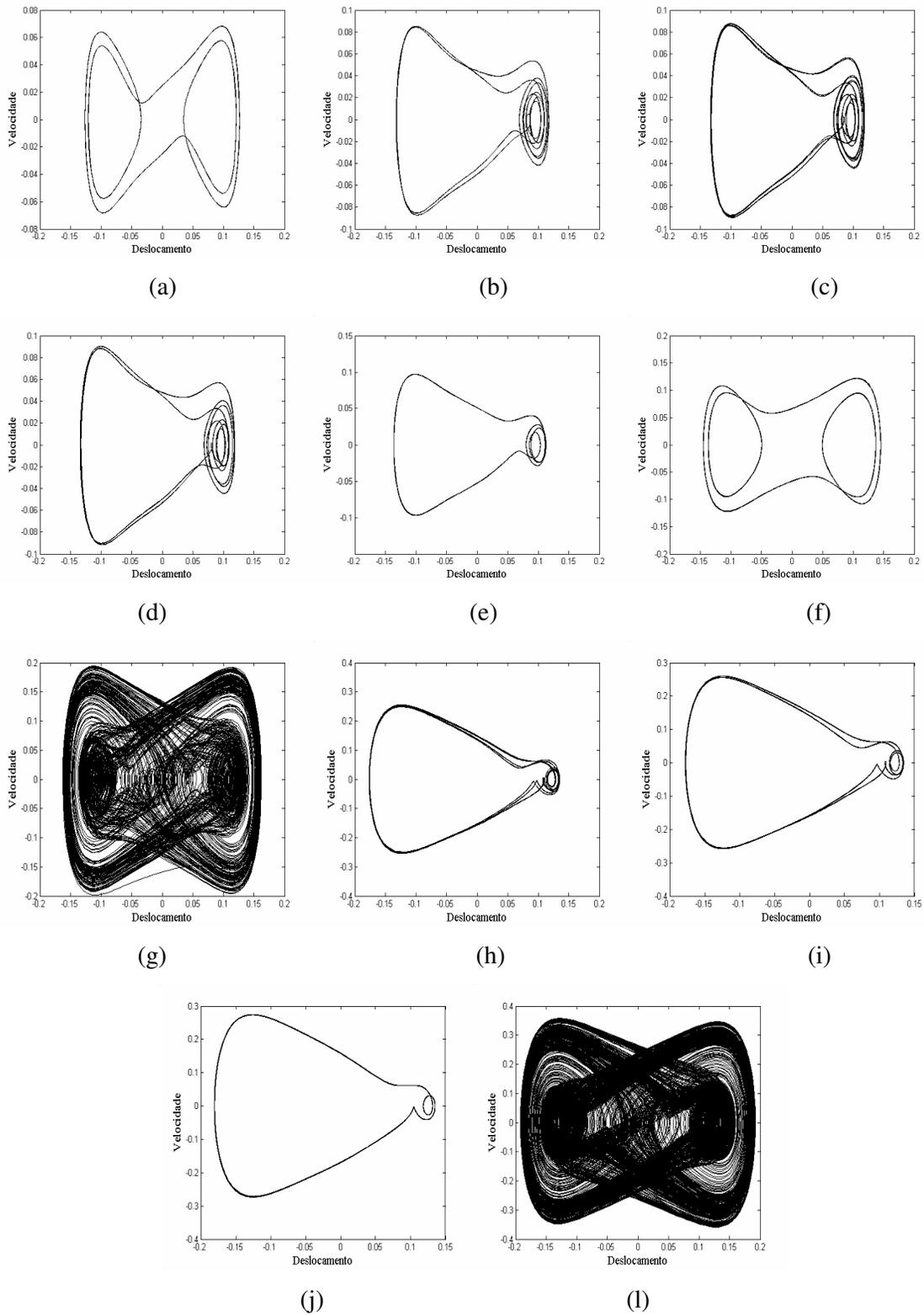


Figura 4.47: Evolução do plano de fase para  $\theta = 1.03$  devido à variação da tensão do motor:  
 (a)  $\xi_1 = 0.35$ , (b)  $\xi_1 = 0.36$ , (c)  $\xi_1 = 0.37$ , (d)  $\xi_1 = 0.38$ , (e)  $\xi_1 = 0.41$ , (f)  $\xi_1 = 0.74$ , (g)  $\xi_1 = 0.75$ ,  
 (h)  $\xi_1 = 1.07$ , (i)  $\xi_1 = 1.09$ , (j),  $\xi_1 = 1.25$ , (l)  $\xi_1 = 1.31$ .

A seguir, ilustra – se a dinâmica não linear do sistema não ideal para altas temperaturas onde a fase austenítica é estável na liga.

#### 4.2.2.c Fase austenítica estável na liga

Nesta seção são consideradas apenas temperaturas onde a fase austenítica é estável. As simulações desenvolvidas aqui apresentam as características da resposta dinâmica não linear para os valores de  $\theta = 2$  e  $\theta = 3$ .

A figura 4.48 ilustra o efeito Sommerfeld para  $\theta = 2$ . Na figura 4.48(a) ocorre um aumento de  $\xi_1$ , da ordem de  $\Delta\xi_1 = 0.1$ , e  $\xi_1$  variando entre  $0.1 \leq \xi_1 \leq 2$ . O motor é acionado com uma tensão inicial de 0.1 com a variação de  $\xi_1$  ocorre um salto brusco entre os pontos A e B com a frequência rotacional do motor entre  $(0.26 < \dot{\phi} < 0.34)$ . Na figura 4.48(b) acontece um decréscimo de  $\xi_1$ , com o parâmetro de controle variando  $\Delta\xi_1 = 0.1$ , e no intervalo  $0.1 \leq \xi_1 \leq 2$ . Inicialmente o sistema tem um valor de tensão igual a 2 com o decréscimo de  $\xi_1$  o fenômeno de salto ocorre entre os pontos A e B, com a frequência do motor entre  $(0.32 < \dot{\phi} < 0.4)$ .

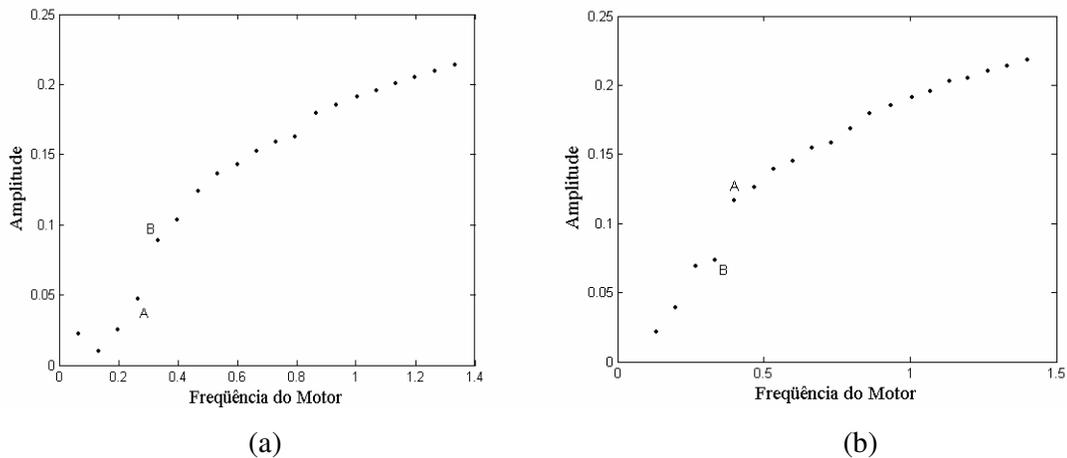


Figura 4.48: Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de  $\xi_1$  e (b) o decréscimo de  $\xi_1$  para  $\theta = 2$ ,  $\mu = 0.01$

Na figura 4.49 mostra a dinâmica dos expoentes de Lyapunov, com relação à variação do parâmetro de controle  $\xi_1$  e  $\theta = 2$ .

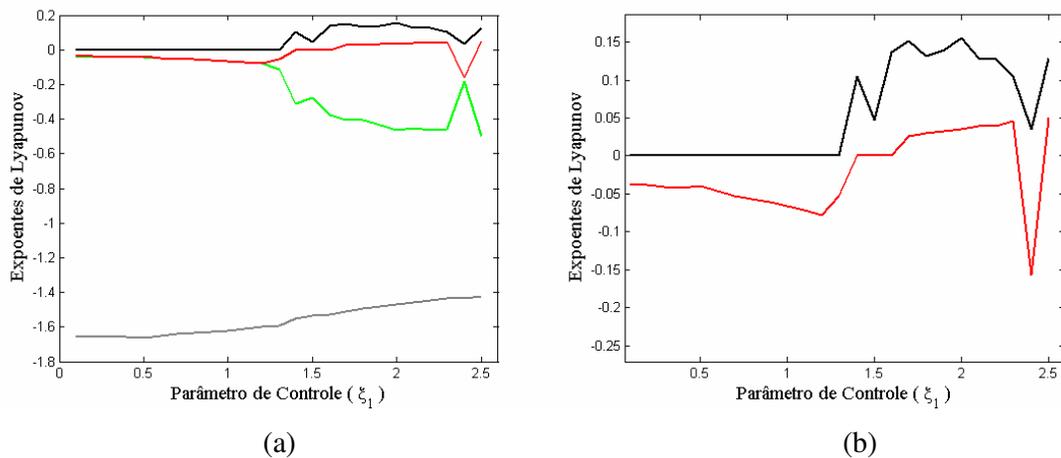


Figura 4.49: Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$  para  $\theta = 2$ , (a) Expoente de Lyapunov, (b) Zoom dos dois principais expoentes

Através da figura 4.49 pode - se construir a tabela 4.10, que mostra os tipos de atratores para cada intervalo da variação de  $\xi_1$ , em que a dinâmica do sistema sofre alguma mudança. Portanto tem - se que no intervalo  $0.1 \leq \xi_1 \leq 1.31$  o movimento apresenta expoentes zero e negativo de forma que neste intervalo o comportamento é periódico. Nos intervalos  $1.32 \leq \xi_1 \leq 1.6$  e  $2.31 \leq \xi_1 \leq 2.4$  nota - se a existência de um expoente positivo, fazendo com que o sistema tenha um comportamento caótico. Agora nos intervalos  $1.61 \leq \xi_1 \leq 2.3$  e  $2.41 \leq \xi_1 \leq 2.5$  o comportamento do sistema é hipercaótico, caracterizado por apresentar dois expoentes de Lyapunov positivos.

Tabela 4.5: Tipos de atratores no estado estacionário para  $\theta = 2$

Valor do Parâmetro de controle $\xi_1$	Valor de $\theta$	Tipo de atrator no estado estacionário
0.1 – 1.31	2	Periódico
1.32 – 1.6	2	Caótico
1.61 – 2.3	2	Hipercaótico
2.31 – 2.4	2	Caótico
2.41 – 2.5	2	Hipercaótico

Na tabela 4.5 são apresentados os tipos de atratores do sistema para a variação de  $\xi_1$ . Nas figuras 4.50 até 4.52 são ilustrados esses atratores para cada valor específico de  $\xi_1$ . Assim, na figura 4.50, adota - se o valor de  $\xi_1 = 1$ , onde a velocidade angular do motor está abaixo da região de ressonância, percebe - se que a resposta do sistema é periódica.

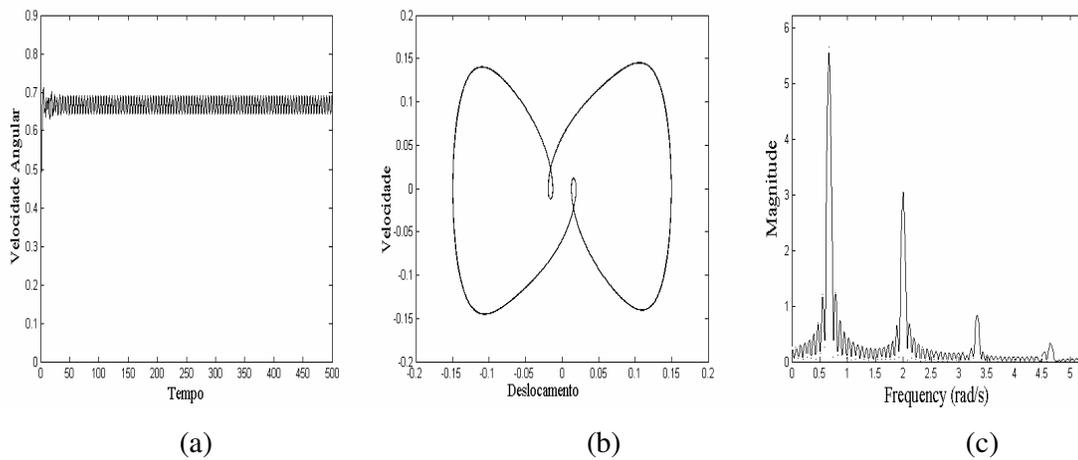


Figura 4.50: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 2$ ,  $\xi_1 = 1$ .

Na simulação da figura 4.51 é mostrada a situação quando a frequência natural do sistema é capturada pela frequência natural, aqui a solução dinâmica do sistema é caótica

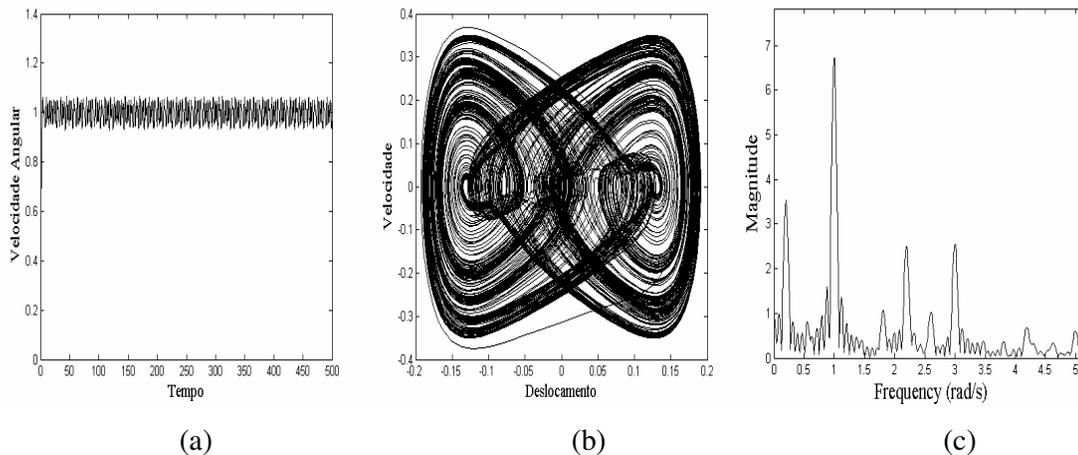


Figura 4.51: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 2$ ,  $\xi_1 = 1.5$ .

Na figura 4.52 a velocidade angular passa rapidamente pela região de ressonância para  $\xi_1 = 2$ , aqui o comportamento do sistema é hipercaótico

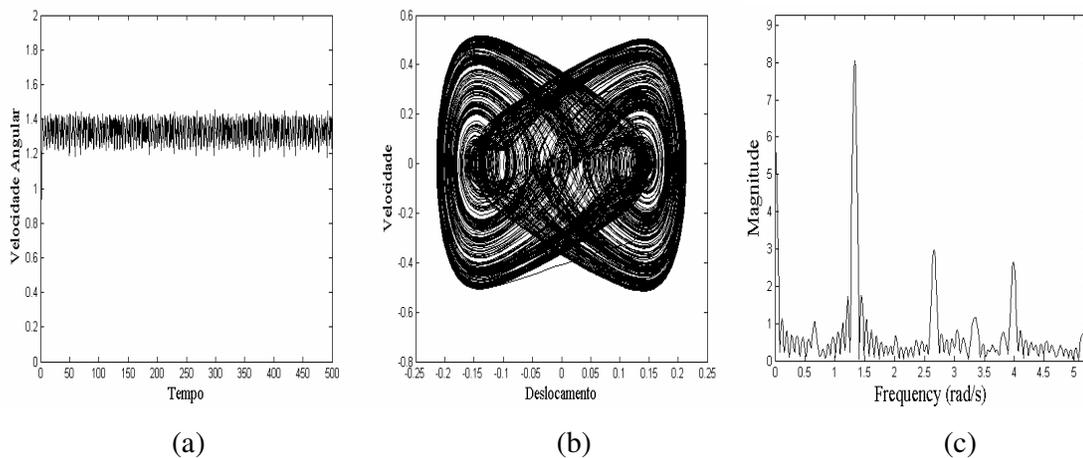


Figura 4.52: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 2$ ,  $\xi_1 = 2$ .

A seguir, discute – se a evolução da seção de Poincaré e do plano de fase variando – se o parâmetro de controle  $\xi_1$

- **Evolução da seção de Poincaré e do plano de fase**

Novamente a seção de Poincaré e a sua evolução com relação ao parâmetro de controle são construídos levando – se em conta a frequência angular média do motor,  $\Omega_M$  dado pela equação 4.16.

A figura 4.53 mostra a seqüência da seção de Poincaré associado a diferentes valores de  $\xi_1$

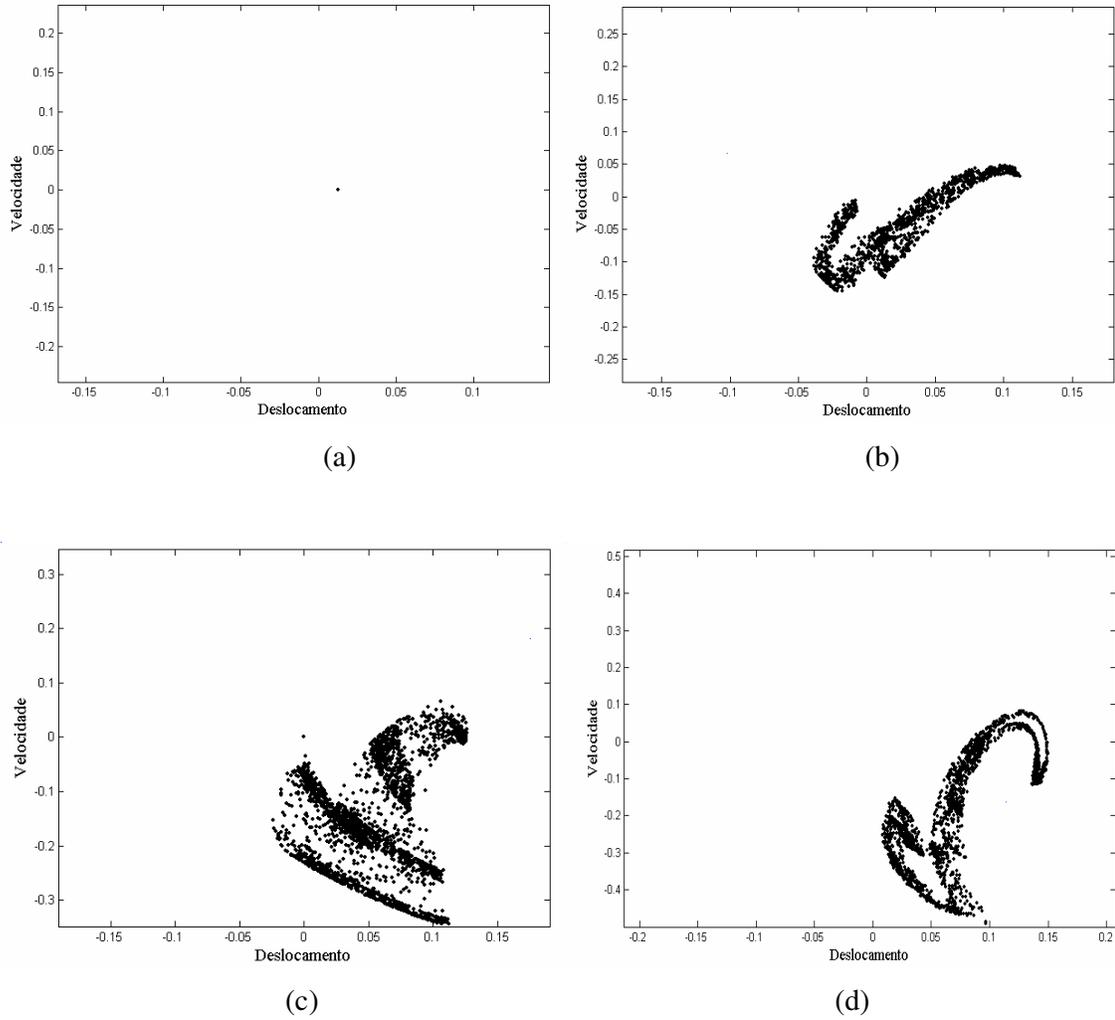


Figura 4.53: Evolução da seção de Poincaré para  $\theta = 2$  devido à variação da tensão do motor  
 (a)  $\xi_1 = 1$ , período -1, (b)  $\xi_1 = 1.32$ , caos, (c)  $\xi_1 = 1.5$ , caos, (d)  $\xi_1 = 2$ , hipercaos

Para concluir a análise de  $\theta = 2$ , a figura 4.54 mostra a evolução do plano de fase associado a cada seção de Poincaré exibido na figura 4.53.

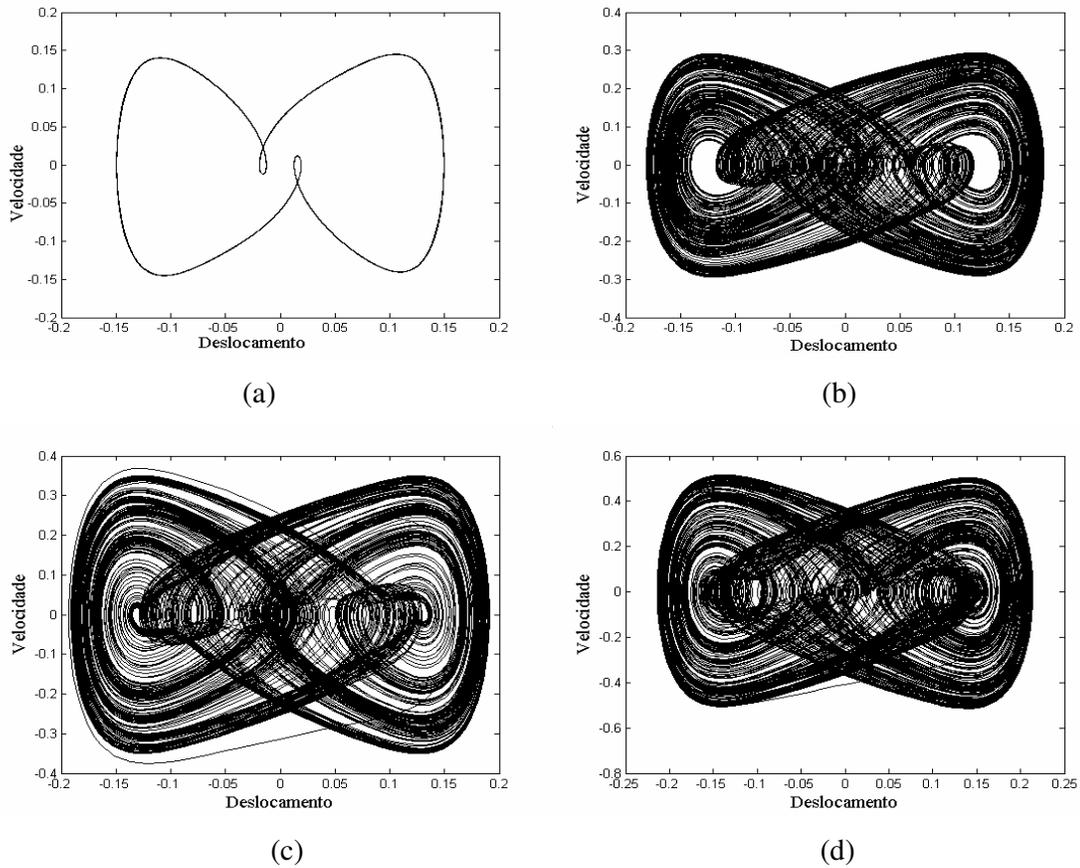


Figura 4.54: Evolução do plano de fase para  $\theta=2$  devido à variação da tensão do motor. (a)  $\xi_1 = 1$ , (b)  $\xi_1 = 1.32$ , (c)  $\xi_1 = 1.5$ , (d)  $\xi_1 = 2$

A análise do comportamento dinâmico agora é feita para  $\theta=3$ . A figura 4.55 ilustra o efeito Sommerfeld para  $\theta=3$ . Na figura 4.55(a) ocorre um aumento de  $\xi_1$ , da ordem de  $\Delta\xi_1 = 0.1$ , e  $\xi_1$  variando entre  $0.1 \leq \xi_1 \leq 3$ . O motor é acionado com uma tensão inicial de 0.1 com a variação de  $\xi_1$  ocorre o salto entre os pontos A e B com a frequência rotacional do motor entre  $(0.32 < \dot{\phi} < 0.4)$ . Aumentando o valor de  $\xi_1$  a amplitude também aumenta até a ocorrência de outro salto entre os pontos C e D com a frequência rotacional do motor entre  $(0.46 < \dot{\phi} < 0.54)$ , com o acréscimo de  $\xi_1$ , a amplitude continua crescendo até a ocorrência de outro salto do ponto E até o ponto F, estando à velocidade angular do motor entre  $(1.53 < \dot{\phi} < 1.6)$ , variando  $\xi_1$  a amplitude continua aumentando até acontecer o quarto salto do ponto G para o ponto H, aqui a velocidade rotacional do motor esta entre  $(1.8 < \dot{\phi} < 1.86)$ . Já na figura 4.55(b) acontece um decréscimo de  $\xi_1$ , com o parâmetro de controle variando para  $\Delta\xi_1 = 0.1$ , e dentro do intervalo  $0.1 \leq \xi_1 \leq 3$ . Inicialmente o sistema tem um valor de tensão

igual a 3 com o decréscimo de  $\xi_1$  o fenômeno de salto ocorre entre os pontos A e B, com a frequência do motor entre  $(1.1 < \dot{\phi} < 1.2)$ . Diminuindo o parâmetro de controle a amplitude também torna – se menor até o sistema sofrer outro salto entre os pontos C e D, com a frequência do motor no intervalo  $(0.53 < \dot{\phi} < 0.6)$ .

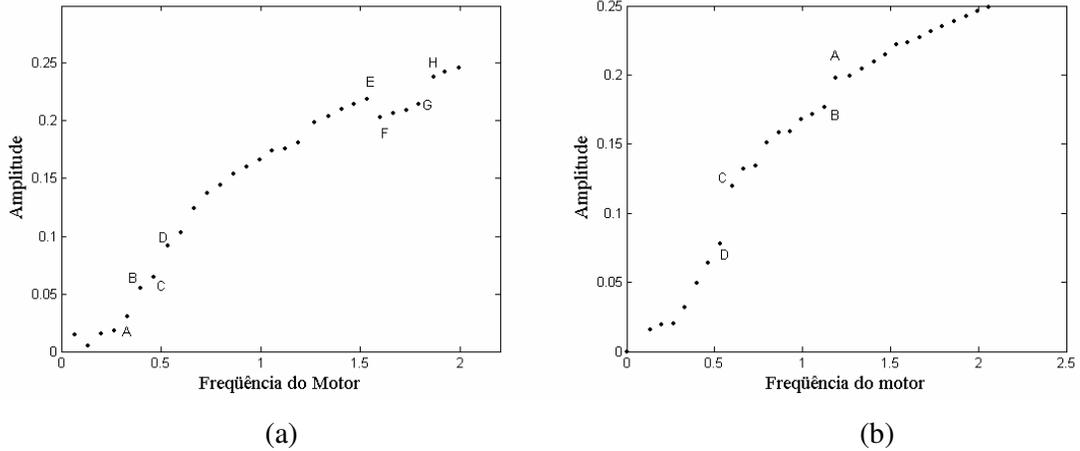


Figura 4.55: Diagrama de resposta em frequência para o efeito Sommerfeld: (a) acréscimo de  $\xi_1$  e (b) o decréscimo de  $\xi_1$  para  $\theta = 3$ ,  $\mu = 0.01$

Na figura 4.56 é mostrada a dinâmica dos expoentes de Lyapunov com a variação do parâmetro de controle  $\xi_1$ .

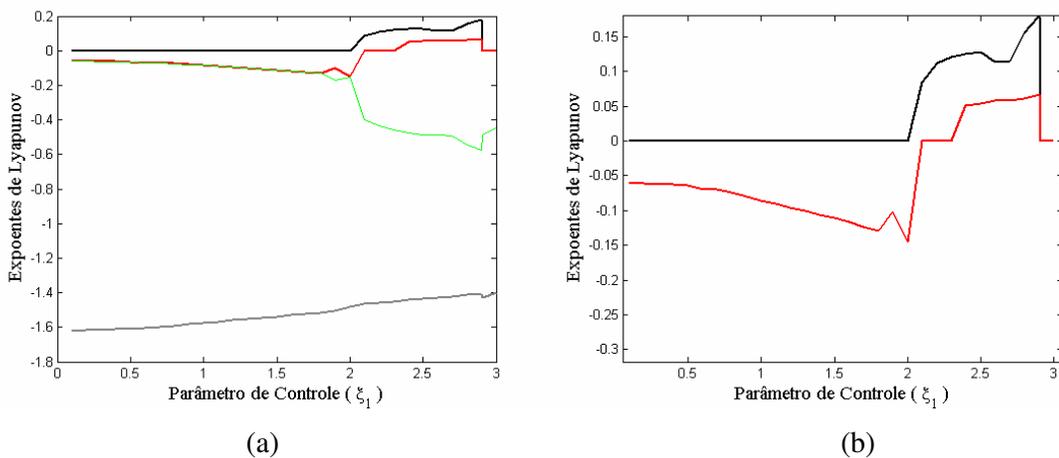


Figura 4.56: Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle  $\xi_1$  para  $\theta = 3$ , (a) Expoente de Lyapunov, (b) Zoom dos dois principais expoentes

Através da figura 4.56 pode - se construir a tabela 4.6, que mostra os tipos de atratores para cada intervalo de variação de  $\xi_1$ , em que a dinâmica não linear do sistema sofre alguma mudança. Portanto tem - se que no intervalo  $0.1 \leq \xi_1 \leq 2$  o sistema apresenta expoentes zero e negativo de forma que neste intervalo o comportamento é periódico. No intervalo  $2.1 \leq \xi_1 \leq 2.3$ , nota - se a existência de um expoentes positivos, fazendo com que o sistema tenha um comportamento caótico. Agora no intervalo  $2.4 \leq \xi_1 \leq 2.9$  o comportamento do sistema é hipercaótico, caracterizado por apresentar dois expoentes positivos.

Na tabela 4.6, é mostrado os expoentes de Lyapunov associados à figura 4.56.

Tabela 4.6: Tipos de atratores no estado estacionário para  $\theta = 3$

Valor do Parâmetro de controle $\xi_1$	Valor de $\theta$	Tipo de atrator no estado estacionário
0.1 – 2	3	Periódico
2.1 – 2.39	3	Caótico
2.4 – 3	3	Hipercaótico

A figura 4.57 ilustra a dinâmica não linear do sistema para o primeiro intervalo da tabela 4.6, onde adota - se o valor de  $\xi_1 = 1.5$ . Neste caso a velocidade angular do sistema esta operando abaixo da região de ressonância e o movimento periódico é confirmado pelo espectro de frequência.

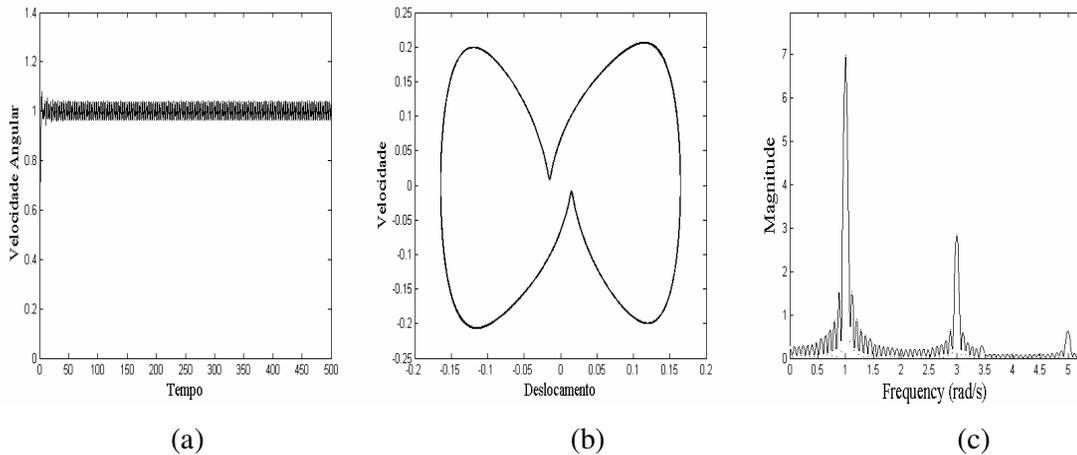


Figura 4.57: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 3$ ,  $\xi_1 = 1.5$ .

A figura 4.58 mostra o caso quando a velocidade angular do motor é capturada pela região de ressonância, para  $\xi_1 = 2.125$ , neste caso o sistema apresenta um comportamento caótico.

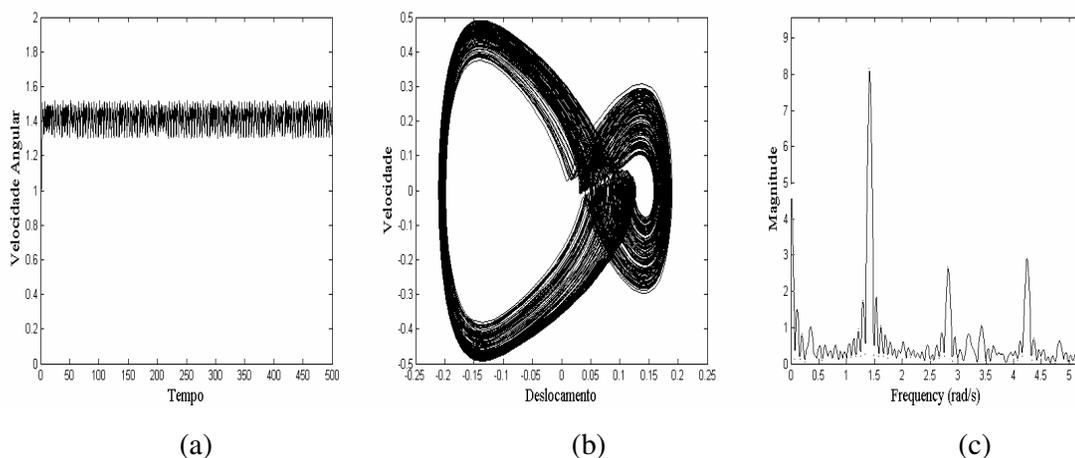


Figura 4.58: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 3$ ,  $\xi_1 = 2.125$ .

Aqui o parâmetro de controle é elevado para  $\xi_1 = 2.8$ , neste caso a velocidade angular do sistema passa pela região de ressonância sem dificuldades, e pelo espectro de frequência e pela tabela 4.6 o sistema apresenta um comportamento hipercaótico.

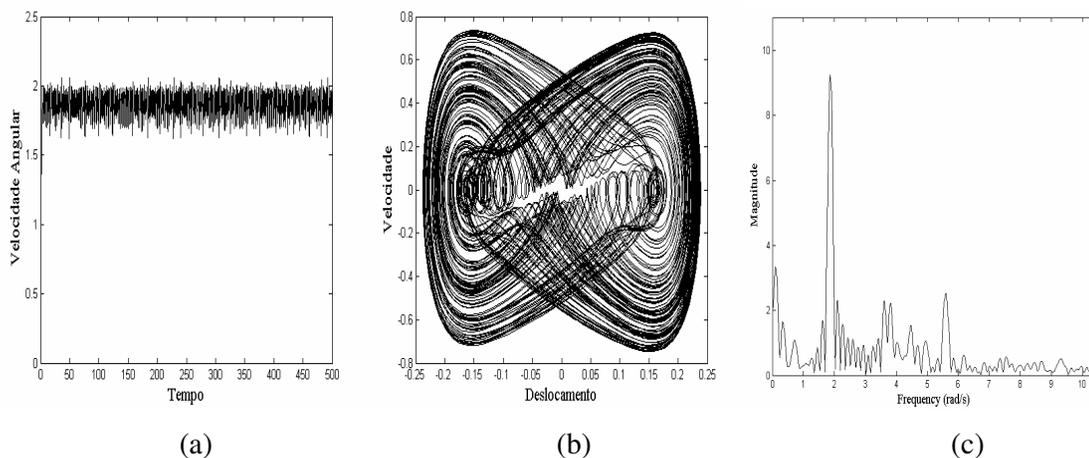


Figura 4.59: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase no regime estacionário e (c) espectro de frequência para  $\theta = 3$ ,  $\xi_1 = 2.8$ .

A seguir, discute – se a evolução da seção de Poincaré e do plano de fase variando – se o parâmetro de controle  $\xi_1$

- **Evolução da seção de Poincaré e do plano de fase**

Novamente a seção de Poincaré e a sua evolução com relação ao parâmetro de controle, são construídos levando – se em conta a frequência angular média do motor,  $\Omega_M$  dado pela equação 4.16.

A figura 4.60 mostra a seqüência da seção de Poincaré associado a diferentes valores de  $\xi_1$

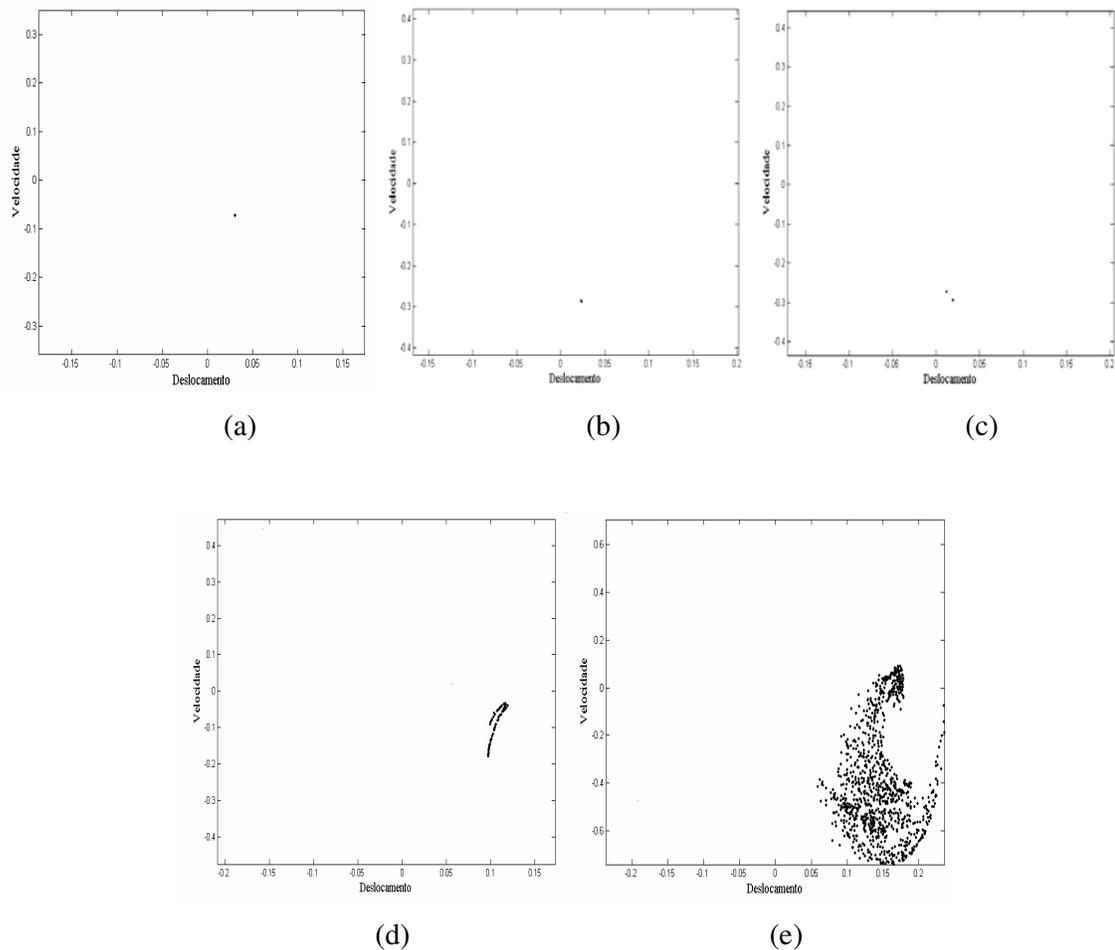


Figura 4.60: Evolução da seção de Poincaré para  $\theta = 3$  devido à variação da tensão do motor. (a)  $\xi_1 = 1.5$ , período -1, (b)  $\xi_1 = 1.95$ , período -1, (c)  $\xi_1 = 2$ , período -2, (d)  $\xi_1 = 2.1$ , caos, (e)  $\xi_1 = 2.8$ , hipercaos.

Para concluir a análise de  $\theta = 3$ , a figura 4.61 mostra a evolução do plano de fase associado a cada seção de Poincaré exibido na figura 4.60.

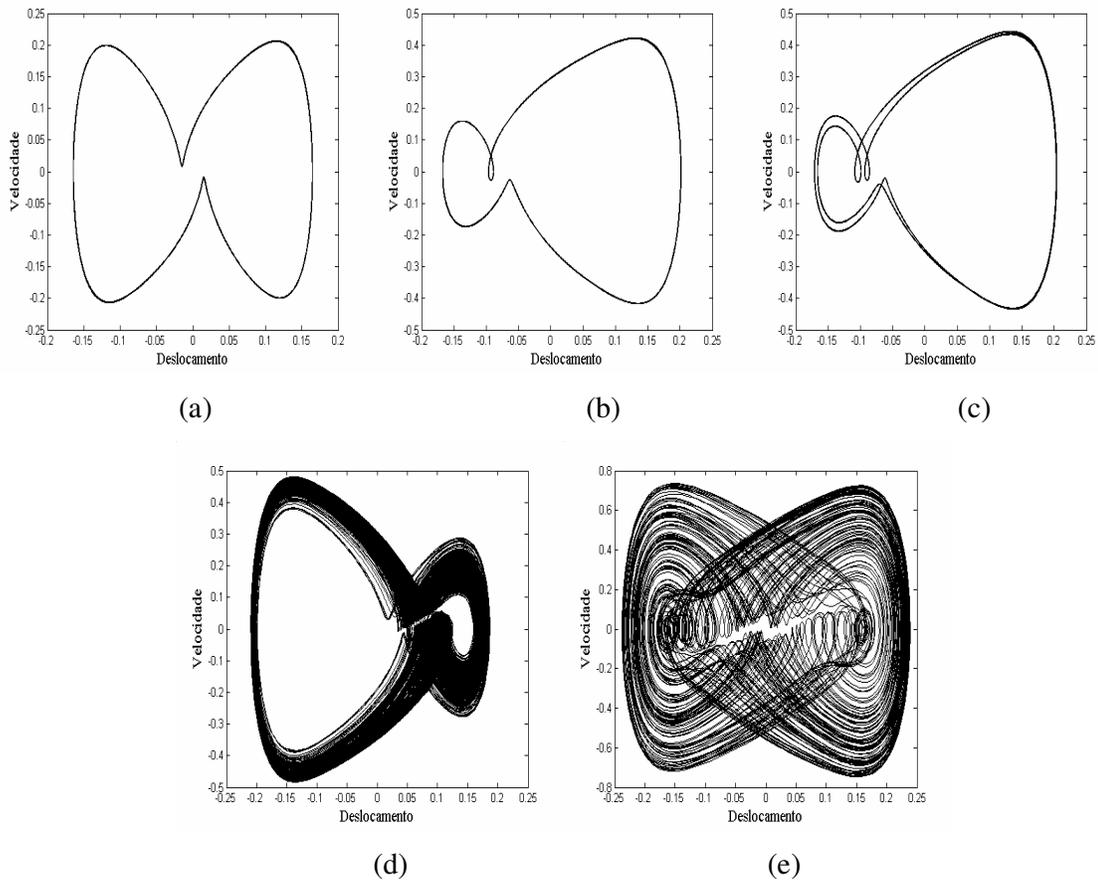


Figura 4.61: Evolução do plano de fase para  $\theta = 3$  devido à variação da tensão do motor. (a)  $\xi_1 = 1.5$ , (b)  $\xi_1 = 1.95$ , (c)  $\xi_1 = 2$ , (d)  $\xi_1 = 2.1$ , (e)  $\xi_1 = 2.8$ .

### 4.3 Influência da Temperatura sobre o Sistema Não Ideal

As análises e simulações da seção 4.1 e 4.2 mostraram a influência do sistema não ideal quando o parâmetro  $\xi_1$  (relativo à tensão ou torque constante) é variável. Nota – se que para o caso I, onde há pouca interação motor – estrutura o comportamento do sistema é sempre periódico independente do valor de  $\xi_1$ , enquanto para o caso II o parâmetro  $\xi_1$  tem uma forte influência sobre a resposta dinâmica não linear do sistema.

Na seção 4.2 foi mostrado que o sistema se comporta de maneira diferente onde, fixando um valor para  $\xi_1$ , e para valores fixos de temperatura, obtém – se resultados distintos, por exemplo, para  $\xi_1 = 1.5$ , e  $\theta = 0.7$  o comportamento do sistema é periódico enquanto para  $\theta = 1.03$  o sistema apresenta um comportamento hipercaótico.

Desta maneira, esta seção tem por objetivo mostrar a influência da variação da temperatura com relação ao caso II para determinados valores fixos de  $\xi_1$ .

A figura 4.62 mostra o histórico no tempo, onde é mostrado o acréscimo da temperatura do sistema

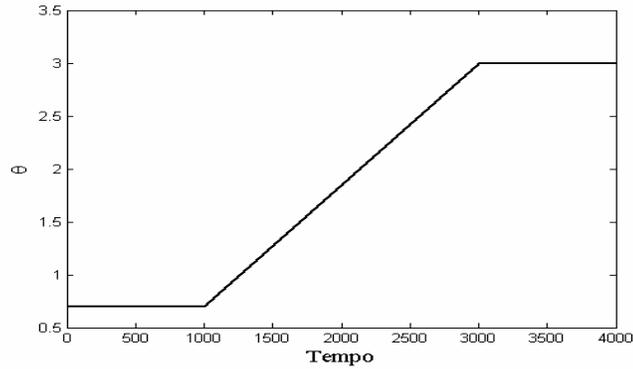


Figura 4.62: Histórico da temperatura no tempo.

Na figura 4.62 percebe – se que para o intervalo de tempo ( $0 \leq \tau \leq 1000$ ) o sistema tem um valor de  $\theta$  correspondente a 0.7, neste intervalo a fase martensítica é estável. A partir de  $\tau=1000$  o sistema passa a ter um aumento gradativo na temperatura, no intervalo ( $1000 < \tau < 1266$ ) o sistema ainda permanece com a fase martensítica estável, porém tem – se que  $\theta$  varia entre  $[0.7, 1]$ , mas para  $\tau=1266$  começa a ocorrer à transição de fase martensítica para austenítica que corresponde ao intervalo de ( $1266 \leq \tau \leq 1493$ ), neste intervalo tem – se que  $\theta$  varia entre 1 e 1.26. A partir de  $\tau > 1493$  a liga se torna completamente austenítica e  $\theta$  está no intervalo  $[1.26, 2.9]$  com ( $1493 < \tau < 3000$ ). Para ( $3000 \leq \tau \leq 4000$ ) tem – se que  $\theta = 3$ .

A figura 4.63 mostra o histórico no tempo quando a temperatura varia de acordo com a figura 4.62 e para  $\xi_1 = 0.6$ .

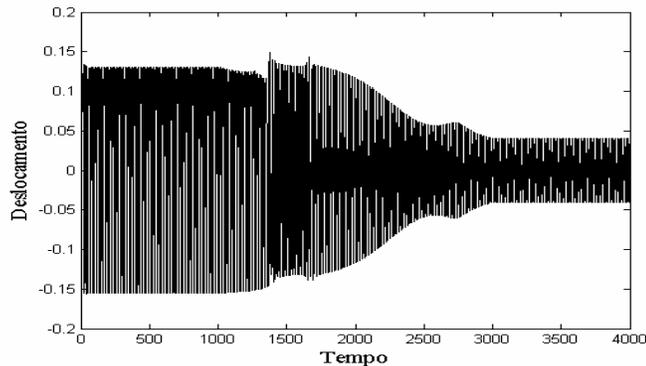


Figura 4.63: Histórico no tempo para  $\xi_1 = 0.6$

A figura 4.64 ilustra o comportamento dinâmico não linear do sistema levando – se em conta a variação da temperatura como mostrado na figura 4.62. Na figura 4.64(a) ilustra a velocidade angular do motor, considerando que  $\xi_1 = 0.6$ , na figura 4.64(b) mostra o plano de fase do sistema e na figura 4.64(c) a curva plano de fase – temperatura é mostrada.

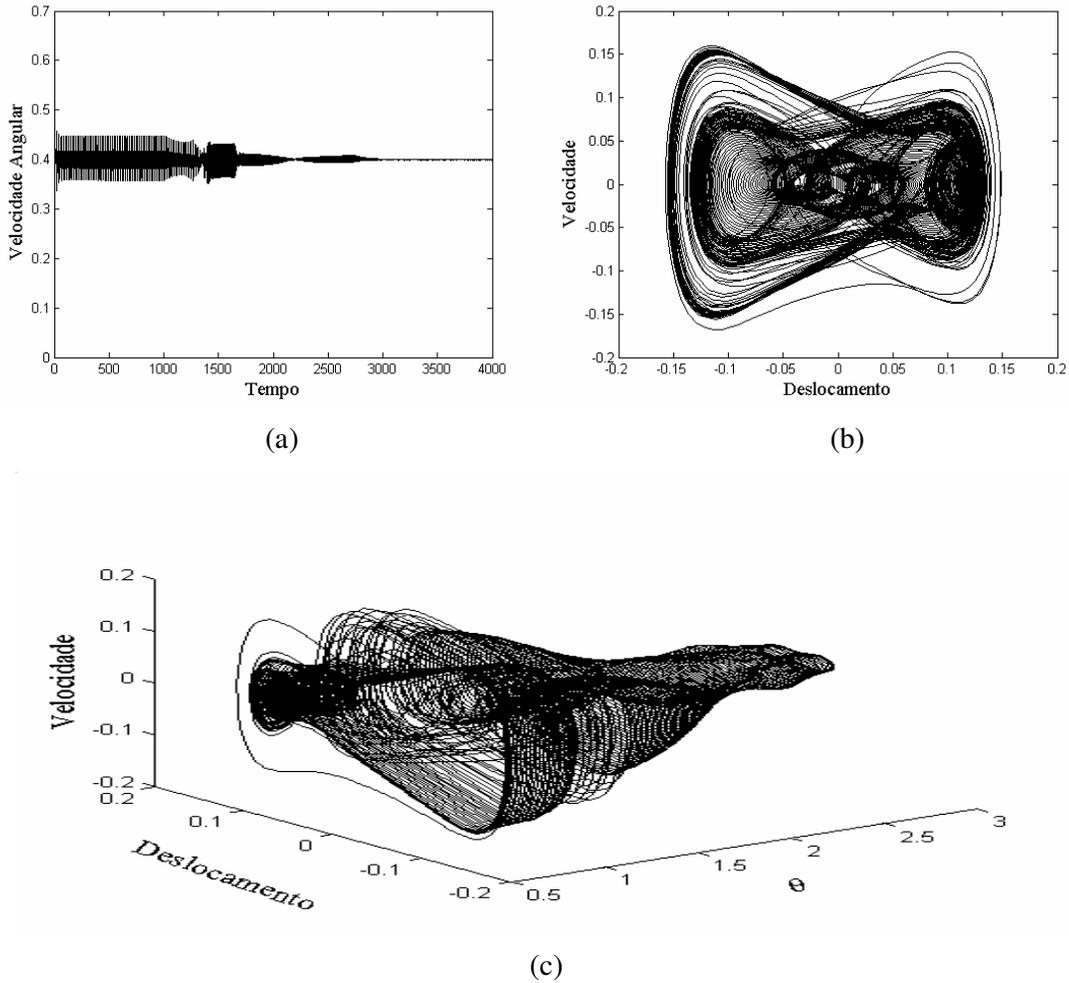


Figura 4.64: (a) Velocidade angular do motor, (b) Plano de fase e (c) Curva plano de Fase – Temperatura para  $\xi_1 = 0.6$ .

Na figura 4.65 é ilustrada a evolução dos expoentes de Lyapunov com a variação de  $\theta$ .

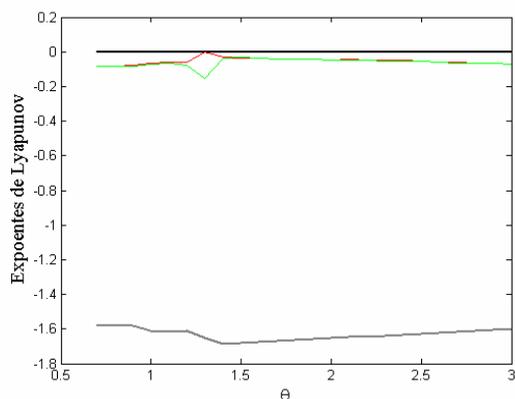


Figura 4.65: Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus  $\theta$  para  $\xi_1 = 0.6$

Comparando as figuras 4.64 e 4.65 podem – se tirar algumas conclusões. Da figura 4.64(a) onde  $\theta = 0.7$  tem – se que a frequência do motor encontra - se abaixo da região de ressonância, pela figura 4.65 observa – se que não existem expoentes positivos, sendo o movimento do sistema periódico. No intervalo entre  $(1000 < \tau < 1266)$  a temperatura varia entre  $0.7 \leq \theta \leq 1$ , percebe – se que a velocidade angular do motor decresce sendo capturada pela região de ressonância entre os valores de  $0.8 \leq \theta \leq 0.87$ , nesta variação de temperatura o movimento continua sendo periódico, pois três dos expoentes de Lyapunov são negativos e o quarto expoente é nulo, com o aumento da temperatura acontece a transformação de fase (martensítica para austenítica + martensítica) entre  $1 < \theta \leq 1.26$  e  $(1266 < \tau \leq 1493)$ , aqui a velocidade angular do motor está abaixo da frequência natural no intervalo entre  $1 \leq \theta \leq 1.15$ , sendo que no intervalo  $1.16 \leq \theta \leq 1.17$  a velocidade do motor é novamente capturada pela frequência natural entrando assim na região de ressonância, para  $1.17 < \theta \leq 1.26$  o sistema escapa desta região, neste caso o comportamento do sistema é periódico como mostra a figura 4.65. Com o acréscimo da temperatura ocorre outra transformação de fase agora de, (austenítica + martensítica para austenítica), que corresponde ao intervalo entre  $1.26 < \theta \leq 3$  e  $(1493 < \tau \leq 3000)$ , aqui a velocidade angular do sistema esta abaixo da região de ressonância correspondente a cada temperatura, e o comportamento dinâmico do sistema continua sendo periódico, como ilustra a figura 4.65. Pode – se notar através da curva plano de fase - temperatura mostrada na figura 4.64(c), que ocorre um decréscimo tanto da velocidade como do deslocamento do sistema,

Considerando agora o valor de  $\xi_1 = 0.7$ , e a variação da temperatura da figura 4.62, tem – se na figura 4.66 a representação do histórico no tempo para esta nova situação.

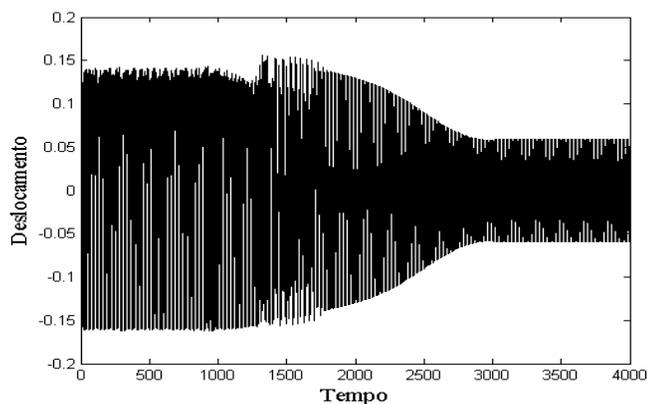
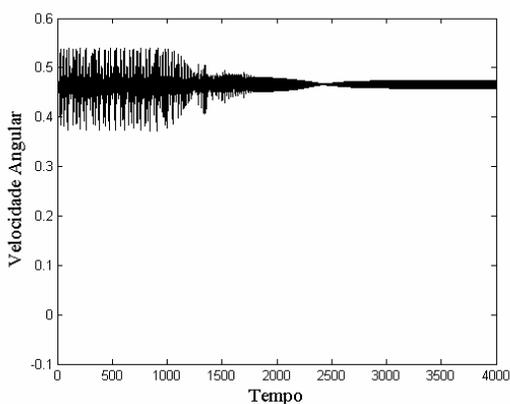
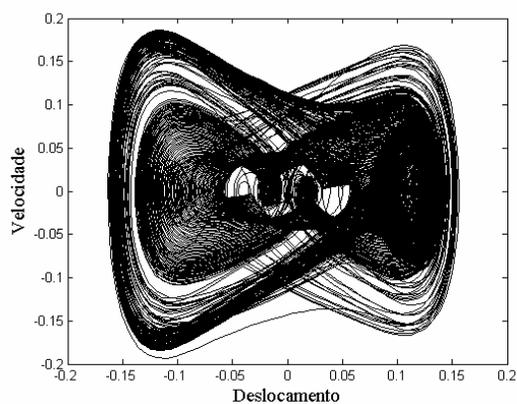


Figura 4.66: Histórico no tempo para  $\xi_1 = 0.7$

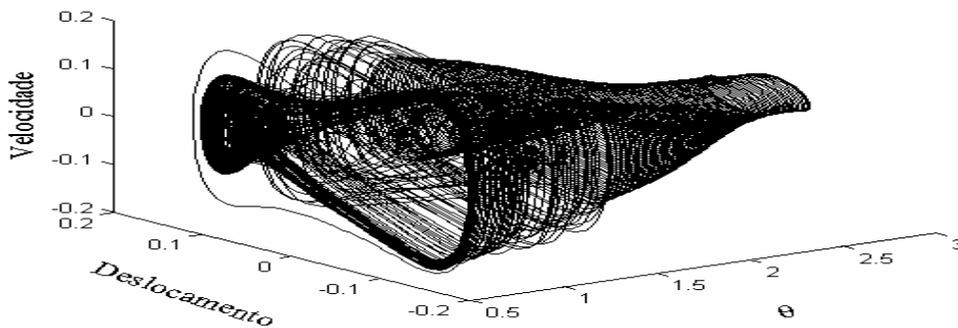
A figura 4.67(a) ilustra a velocidade angular do motor. A figura 4.67(b) apresenta a dinâmica do sistema e a figura 4.67(c) ilustra a curva plano de fase – temperatura.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.67: (a) Velocidade angular do motor, (b) Plano de fase e (c) Curva plano de fase – temperatura para  $\xi_1 = 0.7$ .

A figura 4.68 mostra a evolução dos expoentes de Lyapunov com a variação de  $\theta$ .

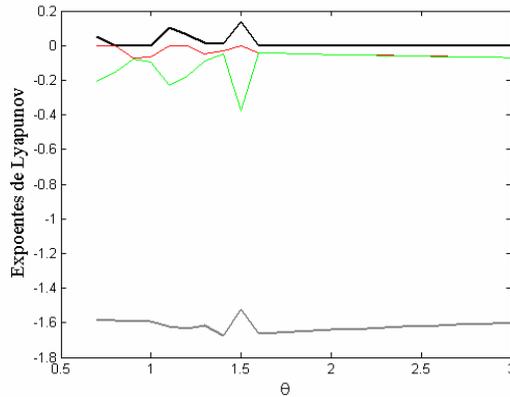


Figura 4.68: Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus  $\theta$  para  $\xi_1 = 0.7$

Comparando as figuras 4.67 e 4.68 têm – se que, para  $\theta = 0.7$  e  $(0 \leq \tau \leq 1000)$  a velocidade angular esta abaixo da região de ressonância, e o comportamento do sistema é caótico, pois existe um expoente de Lyapunov positivo. Com o acréscimo da temperatura entre  $0.7 \leq \theta \leq 1$  e  $(1000 < \tau < 1266)$ , a velocidade angular tem um decréscimo, continuando abaixo da região de ressonância, entretanto há uma mudança no comportamento do sistema, ou seja, a solução passa de caótico para periódico próximo ao valor de  $\theta = 0.8$ , nesta situação não existe nenhum expoente de Lyapunov positivo. Continuando o acréscimo da temperatura a liga sofre uma transformação de fase (martensítica para austenítica + martensítica) entre os valores do intervalo  $1 < \theta \leq 1.26$  e  $(1266 < \tau \leq 1493)$ , nesta situação a velocidade angular é capturada pela região de ressonância entre  $1.21 < \theta \leq 1.24$  e o movimento do sistema volta a ser caótico como mostra a figura 4.68. No intervalo entre  $1.26 < \theta \leq 1.59$  com a frequência rotacional fora da região de ressonância, o sistema continua tendo um comportamento caótico, devido ao fato de existir neste intervalo um expoente de Lyapunov positivo, e para  $1.6 \leq \theta \leq 3$  o sistema volta a ter um comportamento periódico, pois não existem mais expoentes positivos, como mostra a figura 4.68. Como no caso anterior, aqui percebe – se pelas figuras 4.68 que a velocidade e o deslocamento do sistema diminuem à medida que a temperatura aumenta.

Na figura 4.69 é mostrado o deslocamento do sistema com o tempo considerando agora que  $\xi_1 = 1.2$ .

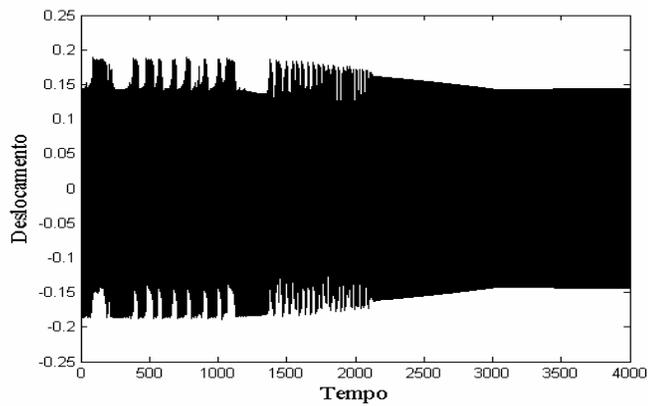
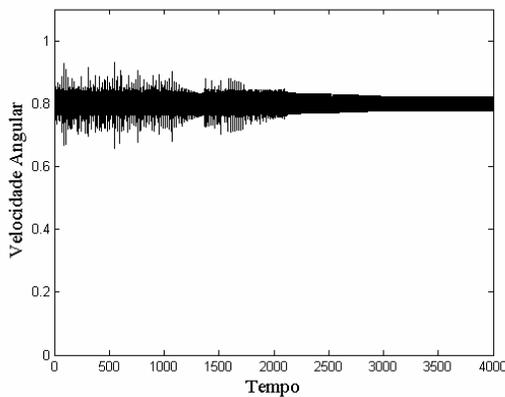
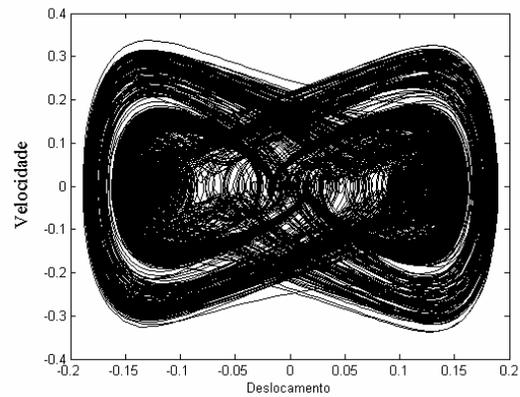


Figura 4.69: Histórico no tempo para  $\xi_1 = 1.2$

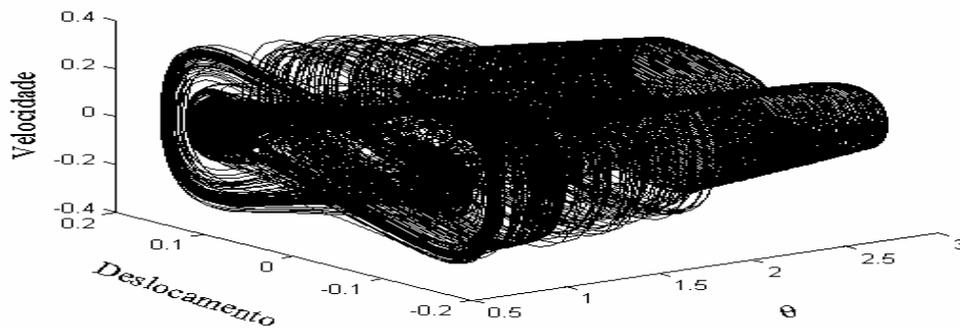
A figura 4.70(a) ilustra a velocidade angular do motor. A figura 4.70(b) apresenta a dinâmica do sistema e a figura 4.70(c) ilustra a curva plano de fase – temperatura.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.70: (a) Velocidade angular do motor, (b) Plano de fase e (c) Curva plano de fase – temperatura para  $\xi_1 = 1.2$ .

A figura 4.71 mostra a evolução dos expoentes de Lyapunov com a variação de  $\theta$ .

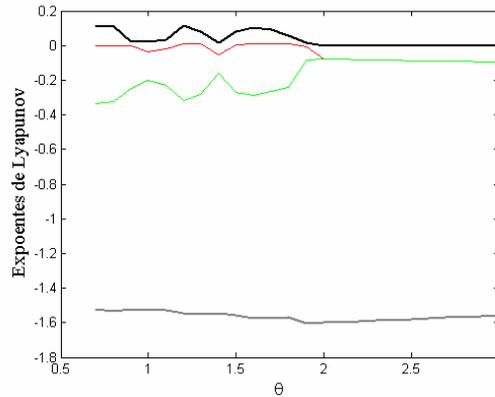


Figura 4.71: Diagrama dos expoentes de Lyapunov versus  $\theta$  para  $\xi_1 = 1.2$

Comparando as figuras 4.70 e 4.71 têm – se que, para  $\theta = 0.7$  e  $(0 \leq \tau \leq 1000)$  a velocidade angular esta acima da região de ressonância, e o comportamento do sistema é caótico. Com o acréscimo da temperatura entre  $0.7 \leq \theta \leq 1$  e  $(1000 < \tau < 1266)$ , a velocidade angular tem um decréscimo, contudo a velocidade angular do motor continua acima da região de ressonância, e o comportamento do sistema continua sendo caótico. Continuando o acréscimo da temperatura a liga sofre uma transformação de fase (martensítica para austenítica + martensítica) entre os valores do intervalo  $1 < \theta \leq 1.26$  e  $(1266 < \tau \leq 1493)$ , com a velocidade angular continuando acima da região de ressonância e o movimento do sistema continua caótico como mostra a figura 4.71. No intervalo entre  $1.26 < \theta \leq 1.9$  o sistema continua tendo um comportamento caótico, devido ao fato de existir neste intervalo um expoente de Lyapunov positivo, e a velocidade angular do sistema entre  $1.26 < \theta \leq 1.54$  continua acima da região de ressonância, porém sendo capturada entre o intervalo  $1.55 \leq \theta \leq 1.73$ , conseguindo escapar para  $1.74 < \theta$ . Agora para  $1.91 \leq \theta$  o sistema passa a ter um comportamento periódico, pois não existem mais expoentes positivos, e a velocidade angular esta abaixo da região de ressonância como mostra a figura 4.70. Como nos casos anteriores, aqui percebe – se pela figura 4.70 que a velocidade e o deslocamento do sistema diminuem à medida que a temperatura aumenta.

## Capítulo 5

### Obtenção de uma Solução Analítica Aproximada para o Sistema Não Ideal Modelado com Memória de Forma

O comportamento dinâmico de sistemas não lineares, por vezes, não é possível ser determinado de forma exata. Assim, uma das alternativas é a utilização de métodos de perturbação para a obtenção de uma solução analítica aproximada para o sistema dinâmico. Essas técnicas consistem basicamente em conhecer completamente as soluções de um dado sistema homogêneo e analisar pequenas perturbações próximas a elas.

O objetivo deste capítulo é o de encontrar uma solução analítica aproximada para o sistema não ideal com memória de forma. Para este fim, aqui é utilizado um método clássico de perturbação conhecido como método da média, devido a sua facilidade na obtenção da solução deste tipo de problema, visto as dificuldades no uso do método das múltiplas escalas.

Para aplicar o método da média, no problema não ideal, considera - se que o termo de amortecimento deve aparecer na mesma ordem com as não linearidades e a excitação.

Assim, como obtido na seção anterior (sistema 4.12) tem - se que o sistema de equações que descrevem a dinâmica não linear é dado por:

$$\begin{cases} \ddot{u} + 2\mu \dot{u} + (\theta - 1)u - \alpha u^3 + \gamma u^5 - r_1 [\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi] = 0 \\ \ddot{\phi} - r_2 \ddot{u} \cos \phi = \Gamma(\dot{\phi}) \end{cases}$$

onde  $\Gamma(\dot{\phi}) = \xi_1 - \xi_2 \dot{\phi}$

Como  $r_1$  e  $r_2$  assumem valores diferentes para o caso I e II, deve - se aqui separar novamente a análise em dois casos distintos.

- **Análise do caso I**

Para os valores no caso I, observa - se que o sistema 4.12 torna - se

$$\begin{cases} \ddot{u} + (\theta - 1)u = \varepsilon(\hat{r}_1 [\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi] + \hat{\alpha}u^3 - \hat{\gamma}u^5 - 2\hat{\mu}\dot{u}) \\ \ddot{\phi} = \varepsilon(\hat{u}\hat{r}_2 \cos \phi + \hat{\Gamma}(\dot{\phi})) \end{cases} \quad (5.1)$$

onde

$$r_1 = \varepsilon \hat{r}_1, \quad r_2 = \varepsilon \hat{r}_2, \quad \alpha = \varepsilon \hat{\alpha}, \quad \gamma = \varepsilon \hat{\gamma}, \quad \mu = \varepsilon \hat{\mu}, \quad \Gamma(\dot{\phi}) = \varepsilon \hat{\Gamma}(\dot{\phi}). \quad (5.2)$$

Aqui  $\varepsilon$  é um pequeno parâmetro, onde este pequeno parâmetro será o responsável pelo balanço de ordem das equações de movimento (Nayfeh, 1980).

### • Análise do caso II

Para os valores do parâmetro do caso II tem – se que as equações que governam o sistema é dado por

$$\begin{cases} \ddot{u} + (\theta - 1)u = \varepsilon(\hat{r}_3 [\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi] + \hat{\alpha}u^3 - \hat{\gamma}u^5 - 2\hat{\mu}\dot{u}) \\ \ddot{\phi} = \varepsilon(\hat{u}\hat{r}_4 \cos \phi + \hat{\Gamma}(\dot{\phi})) \end{cases} \quad (5.3)$$

onde

$$\hat{r}_3 = \varepsilon \hat{r}_3, \quad \hat{r}_4 = \varepsilon \hat{r}_4, \quad \alpha = \varepsilon \hat{\alpha}, \quad \gamma = \varepsilon \hat{\gamma}, \quad \mu = \varepsilon \hat{\mu}, \quad \Gamma(\dot{\phi}) = \varepsilon \hat{\Gamma}(\dot{\phi}) \quad (5.4)$$

A seguir, a dinâmica do sistema não ideal próxima a região de ressonância para os valores do caso I será estudada pelo método da média.

## 5.1 Busca da solução analítica aproximada na região de ressonância – caso I

Agora efetua – se uma investigação do comportamento dinâmico não linear do sistema não ideal, considerando o caso da ressonância primária, no qual a velocidade angular média do motor de corrente contínua, varia próxima a frequência natural do sistema, ou seja,  $\dot{\phi} \approx \omega_0$ .

A dinâmica do sistema de equações (5.1) será estudada próxima à região de ressonância, para isto, utiliza-se o método da média descrito no Apêndice B.

Impondo que  $\varepsilon = 0$  (problema não perturbado) no sistema de equações (5.1), obtém - se que a solução do caso I é dado por

$$u = a \cos(\phi + \beta) \quad (5.5)$$

Usando o método da variação de parâmetros, tem - se que,

$$\dot{u} = -a\sqrt{\theta-1} \sin(\phi + \beta) \quad (5.6)$$

onde  $a, \phi$  e  $\beta$  são funções do tempo adimensional  $\tau$ .

Agora considera - se movimentos próximos à região de ressonância, e assim é conveniente introduzir um parâmetro de sintonia  $\sigma$  como segue:

$$\dot{\phi} = \Omega \quad (5.7)$$

onde

$$\Omega = \sqrt{\theta-1} + \varepsilon\sigma \quad (5.8)$$

A primeira derivada da equação 5.5 é

$$\dot{u} = \dot{a} \cos(\phi + \beta) - a \sin(\phi + \beta)(\dot{\Omega} + \dot{\beta}) \quad (5.9)$$

Comparando as equações 5.6 e 5.9 observa - se que

$$\dot{a} \cos(\phi + \beta) - a\dot{\beta} \sin(\phi + \beta) = a(\dot{\Omega} - \sqrt{\theta-1}) \sin(\phi + \beta) \quad (5.10)$$

Diferenciando agora a equação 5.6 tem - se que

$$\ddot{u} = \dot{a}\sqrt{\theta-1} \sin(\phi + \beta) - a\dot{\beta}\sqrt{\theta-1} \sin(\phi + \beta) - a\Omega\sqrt{\theta-1} \sin(\phi + \beta) \quad (5.11)$$

Agora substituindo as equações 5.5, 5.7 e 5.11 na equação 5.3 tem – se que

$$\begin{aligned} & -\dot{a}\sqrt{(\theta-1)}\sin(\phi+\beta)-a\dot{\beta}\sqrt{(\theta-1)}\cos(\phi+\beta)-a\sqrt{(\theta-1)}(\dot{\Omega}-\sqrt{(\theta-1)})\cos(\phi+\beta)= \\ & =\varepsilon\left[\hat{r}_1\left(\dot{\Omega}\cos\phi-\Omega^2\sin\phi\right)+\hat{\alpha}\left(a\cos(\phi+\beta)\right)^3-\hat{\gamma}\left(a\cos(\phi+\beta)\right)^5+2\hat{\mu}a\sqrt{(\theta-1)}\sin(\phi+\beta)\right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

e

$$\dot{\Omega}=\varepsilon\left[\hat{\Gamma}(\Omega)-\hat{r}_2\left(\dot{a}\sqrt{(\theta-1)}\sin(\phi+\beta)+a\Omega\sqrt{(\theta-1)}\cos(\phi+\beta)+a\dot{\beta}\sqrt{(\theta-1)}\cos(\phi+\beta)\right)\right] \quad (5.13)$$

Para conseguir o isolamento das variáveis  $\dot{a}$ ,  $\dot{\beta}$  e  $\dot{\Omega}$  das equações (5.12) e (5.13) utilizam – se identidades trigonométricas, desse modo obtêm – se o seguinte sistema de equações,

$$\dot{a}=-\frac{\varepsilon}{\sqrt{(\theta-1)}}\left[\hat{r}_1\left(\dot{\Omega}\cos\phi-\Omega^2\sin\phi\right)+\hat{\alpha}a^3\cos^3(\phi+\beta)-\hat{\gamma}a^5\cos^5(\phi+\beta)+2\hat{\mu}a\sqrt{(\theta-1)}\sin(\phi+\beta)\right]\sin(\phi+\beta) \quad (5.14)$$

$$\dot{\beta}=-\varepsilon\sigma-\frac{\varepsilon}{a\sqrt{(\theta-1)}}\left[\hat{r}_1\left(\dot{\Omega}\cos\phi-\Omega^2\sin\phi\right)+\hat{\alpha}a^3\cos^3(\phi+\beta)-\hat{\gamma}a^5\cos^5(\phi+\beta)+2\hat{\mu}a\sqrt{(\theta-1)}\sin(\phi+\beta)\right]\cos(\phi+\beta) \quad (5.15)$$

As equações (5.13) até (5.15) são equivalentes ao sistema (5.1), com nenhuma aproximação tendo sido feita aqui. Como uma primeira simplificação negligencia – se todos os termos  $O(\varepsilon^2)$  aparecendo de (5.13) até (5.15) e obtêm – se,

$$\dot{\Omega}=\varepsilon\left[\hat{\Gamma}(\Omega)-\hat{r}_2a\Omega\sqrt{(\theta-1)}\cos(\phi+\beta)\cos\phi\right] \quad (5.16)$$

$$\dot{a}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{(\theta-1)}}\left[\hat{r}_1\Omega^2(\theta-1)\sin\phi-\hat{\alpha}a^3\cos^3(\phi+\beta)+\hat{\gamma}a^5\cos^5(\phi+\beta)-2\hat{\mu}a\sqrt{(\theta-1)}\sin(\phi+\beta)\right]\sin(\phi+\beta) \quad (5.17)$$

$$\dot{\beta}=-\frac{\varepsilon}{a\sqrt{(\theta-1)}}\left\{a\sigma\sqrt{(\theta-1)}+2\hat{\mu}a\sqrt{(\theta-1)}\sin(\phi+\beta)-\hat{r}_1(\theta-1)\sin\phi+\hat{\alpha}a^3\cos^3(\phi+\beta)-\hat{\gamma}a^5\cos^5(\phi+\beta)\right\}\cos(\phi+\beta) \quad (5.18)$$

Como uma segunda simplificação pode – se considerar  $a$ ,  $\Omega$  e  $\beta$  serem constantes sobre um ciclo e integrando (média) as equações sobre um ciclo. O resultado é,

$$\dot{\Omega} = \varepsilon \left[ \hat{\Gamma}(\Omega) - \frac{1}{2} ar_2 \Omega \sqrt{(\theta-1)} \cos \beta \right] \quad (5.19)$$

$$\dot{a} = \varepsilon \left[ \frac{\hat{r}_1 \Omega^2}{2\sqrt{\theta-1}} \cos \beta - \hat{\mu} a \right] \quad (5.20)$$

$$\dot{\beta} = -\varepsilon \left[ \sigma + \frac{\hat{r}_1 \Omega^2}{2a\sqrt{(\theta-1)}} \sin \beta + \frac{6}{16\sqrt{(\theta-1)}} \hat{\alpha} a^2 - \frac{5\hat{\gamma}}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 \right] \quad (5.21)$$

Aqui nota – se a diferença entre o sistema ideal e o não ideal. Para o sistema ideal a equação 5.19 não é uma equação que governa o sistema,  $\sigma$  é especificado, e o sistema é resolvido para  $a$  e  $\beta$ . Para o sistema não ideal, como ocorre uma variação na frequência de excitação o parâmetro de sintonia também é variável, assim o sistema é resolvido para  $a$ ,  $\beta$  e  $\Omega$ .

Agora substituindo a equação 5.14 nas equações acima obtém – se

$$\dot{\Omega} = \Gamma(\Omega) - \frac{1}{2} ar_2 \Omega \sqrt{(\theta-1)} \cos \beta \quad (5.22)$$

$$\dot{a} = \frac{r_1 \Omega^2}{2\sqrt{\theta-1}} \cos \beta - \mu a \quad (5.23)$$

$$\dot{\beta} = \frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 - \left( \Omega - \sqrt{(\theta-1)} \right) - \frac{r_1 \Omega^2}{2a\sqrt{(\theta-1)}} \sin \beta - \frac{6\alpha}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^2 \quad (5.24)$$

A seguir, será analisada a estabilidade do sistema não ideal através do critério RH.

### 5.1.1 Análise de estabilidade no estado estacionário

Os valores de  $a$ ,  $\beta$  e  $\Omega$  para a condição estacionária de movimento são determinadas pelas raízes do sistema de equações,

$$\Gamma(\Omega) - \frac{1}{2} ar_2 \Omega \sqrt{(\theta-1)} \cos \beta = 0 \quad (5.25)$$

$$\frac{r_1 \Omega^2}{2\sqrt{\theta-1}} \cos \beta - \mu a = 0 \quad (5.26)$$

$$\frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 - (\Omega - \sqrt{(\theta-1)}) - \frac{r_1 \Omega^2}{2a\sqrt{(\theta-1)}} \sin \beta - \frac{6}{16\sqrt{(\theta-1)}} \alpha a^2 = 0 \quad (5.27)$$

Combinando as equações 5.26 e 5.27 tem – se que

$$\frac{r_1^2 \Omega^4}{4(\theta-1)} = a^2 \left[ \mu^2 + \left( \frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 - (\Omega - \sqrt{(\theta-1)}) - \frac{6\alpha}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^2 \right)^2 \right] \quad (5.28)$$

Agora combinando as equações 5.25 e 5.26 obtém – se

$$\Gamma(\Omega) = \frac{a^2 \mu r_2 (\theta-1)}{r_1 \Omega} \quad (5.29)$$

A amplitude da resposta do sistema não ideal e a freqüência rotacional do motor são determinadas pelas equações 5.28 e 5.29 respectivamente, para cada valor do parâmetro de controle  $\xi_1$ . A fase no movimento estacionário é dado por

$$\tan \beta = \frac{\frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 - (\Omega - \sqrt{(\theta-1)}) - \frac{6\alpha}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^2}{\mu} \quad (5.30)$$

A estabilidade da solução média é determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana do sistema médio dado pelas equações 5.22 até 5.24. A matriz Jacobiana das equações médias é dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{r_1 \Omega^2}{2\sqrt{\theta-1}} \sin \beta & \frac{r_1 \Omega}{\sqrt{\theta-1}} \cos \beta \\ \frac{r_1 \Omega^2}{2a^2 \sqrt{\theta-1}} \sin \beta - \frac{3a \alpha}{4\sqrt{\theta-1}} - \frac{5\gamma a^3}{4\sqrt{\theta-1}} & -\frac{r_1 \Omega^2}{2a\sqrt{\theta-1}} \cos \beta & -1 - \frac{r_1 \Omega}{a\sqrt{\theta-1}} \sin \beta \\ 1 - \frac{1}{2} r_2 \Omega \sqrt{\theta-1} \cos \beta & \frac{1}{2} ar_2 \Omega \sqrt{\theta-1} \sin \beta & -\xi_2 - \frac{1}{2} ar_2 \sqrt{\theta-1} \cos \beta \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

O polinômio característico da matriz Jacobiana, avaliado sobre a solução do sistema médio (equações 5.28 e 5.29) é dado por

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (5.32)$$

onde

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \xi_2 + \frac{1}{2} ar_2 \sqrt{\theta-1} \cos \beta + \frac{r_1 \Omega^2}{2a\sqrt{\theta-1}} \cos \beta + \mu$$

$$a_2 = -\frac{\Omega r_1}{\sqrt{\theta-1}} \cos \beta + \frac{3r_1 r_2 \Omega^2}{4} \cos^2 \beta + \frac{\Omega r_2 a \sqrt{\theta-1}}{2} \sin \beta + \frac{\Omega^2 r_1 r_2}{2} \sin^2 \beta + \frac{\xi_2 r_1 \Omega^2}{2a\sqrt{\theta-1}} \cos \beta + \mu \xi_2 + \frac{ar_2 \mu \sqrt{\theta-1}}{2} \cos \beta \\ + \frac{r_1^2 \Omega^4}{4a^2 (\theta-1)} \sin^2 \beta - \frac{3ar_1 \Omega^2 \alpha}{8(\theta-1)} \sin \beta - \frac{5a^3 r_1 \gamma \Omega^2}{8(\theta-1)} \sin \beta + \frac{r_1 \Omega^2 \mu}{2a\sqrt{\theta-1}} \cos \beta$$

$$a_3 = -\det(J)$$

Para que a solução do sistema médio seja estável, os autovalores da matriz Jacobiana, ou as raízes da equação característica 5.32, necessitam ter a parte real negativa.

De acordo com o critério Routh-Hurwitz (RH) a matriz (H) dos coeficientes do polinômio característico de grau 3 é dado por

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Assim, os critérios do método RH de estabilidade para um sistema de ordem 3 são:

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \quad (5.34)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0 \quad (5.35)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \det(\Delta_3) > 0 \quad (5.36)$$

Portanto, a solução estacionária do sistema médio é estável se as condições 5.34 até 5.36 são satisfeitas.

A seguir, é mostrada a análise do ponto de máximo na curva de resposta em frequência e a sua correspondente frequência rotacional.

## 5.1.2 Solução especial do regime estacionário

Nesta seção são analisados pontos especiais da solução estacionária que definem o ponto máximo e o ponto de salto na curva de resposta em frequência.

Definindo  $\Omega - \sqrt{(\theta-1)} = \Delta\Omega$  como uma aproximação do fenômeno de salto e assim pode – se reescrever a equação 5.28 como

$$\frac{r_1^2 \Omega^4}{4(\theta-1)} = a^2 \left[ \mu^2 + \left( \frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 - \Delta\Omega - \frac{6\alpha}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^2 \right)^2 \right] \quad (5.37)$$

Considerando esta equação, é determinado o pico correspondente à frequência rotacional na curva de resposta em frequência.

Sendo  $\frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 - \Delta\Omega - \frac{6\alpha}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^2 = 0$ , obtém – se que

$$\Omega_p = \frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 + \sqrt{(\theta-1)} - \frac{6\alpha}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^2 \quad (5.38)$$

O pico da amplitude é determinado da seguinte equação,

$$a_p = \frac{r_1 \Omega_p^2}{2\mu\sqrt{(\theta-1)}} \quad (5.39)$$

Portanto o parâmetro de controle correspondente a este pico de salto da equação 5.29 é dado por

$$\xi_1 = \frac{a_p^2 \mu r_2 (\theta-1)}{r_1 \Omega_p} + \xi_2 \Omega_p \quad (5.40)$$

Com este parâmetro de controle, para certos valores, é possível eliminar o efeito Sommerfeld, sendo este uma das metas da engenharia moderna envolvendo fontes de energia com potência limitada.

Para determinar os pontos de máximo, reescreve – se a equação 5.29 na forma

$$r_1 \Delta\Omega (\xi_1 - \xi_2 \Delta\Omega) = a^2 \mu r_2 (\theta-1) \quad (5.41)$$

Diferenciando a equação 5.41 com relação à  $\Delta\Omega$  e considerando que  $\frac{d(a)}{d \Delta\Omega} = 0$ , então tem – se que  $\Delta\Omega = \frac{\xi_1}{2\xi_2}$ , então a frequência crítica para o ponto máximo é,

$$\Omega_c = \sqrt{(\theta-1)} + \frac{\xi_1}{2\xi_2} \quad (5.42)$$

e a amplitude crítica do ponto de máximo, usando as equações 5.29 e 5.42, é determinada por

$$a_c^2 = \frac{r_1 \xi_1^2}{4\xi_2 \mu r_2 (\theta-1)} - \frac{r_1 \xi_2}{\mu r_2} \quad (5.43)$$

Uma observação de extrema importância é feita aqui. Como dito anteriormente a aplicação de uma técnica de perturbação é interessante partindo do principio de que é conhecida a solução do oscilador linear, e os termos não lineares são pequenos parâmetros conhecidos

como perturbações do oscilador linear. A equação que representa um oscilador linear é dada pela seguinte expressão  $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$ , onde o parâmetro  $\omega_0^2$  é sempre positivo. Considerando as equações 5.1 e 5.3 que são as equações de movimento do sistema para os casos I e II, respectivamente, e sendo  $\varepsilon = 0$ , tem-se um oscilador linear com aceleração de rotação nula. Portanto para que se possa aplicar o método da média nestes dois sistemas de equações o termo  $\theta - 1$  deve ser positivo, logo no conjunto de simulações deste capítulo considera-se valores para  $\theta > 1$ . Assim a análise feita aqui se restringe em estudar o comportamento da dinâmica não linear do sistema quando a fase martensítica e austenítica é estável na liga ( $\theta = 1.03$ ) e também é considerada uma temperatura onde a liga é puramente austenita ( $\theta = 2$ ,  $\theta = 3$ ).

A seguir, apresenta-se simulações numéricas do caso I próximas a região de ressonância.

### 5.1.3 Simulações numéricas das soluções dinâmicas do caso I

Na simulação numérica exibida através das figuras 5.1 e 5.2, obtém-se as respostas no tempo da amplitude do movimento, obtidas através das equações (5.22) até (5.24)

A figura 5.1(a) mostra como a frequência de excitação  $\Omega$  (velocidade angular do motor de corrente contínua) se aproxima da frequência natural e é capturada na primeira ressonância. A figura 5.1(b) mostra a modulação da amplitude até que se atinja o valor estacionário correspondendo ao parâmetro de controle  $\xi_1 = 0.26$  e  $\theta = 1.03$ .

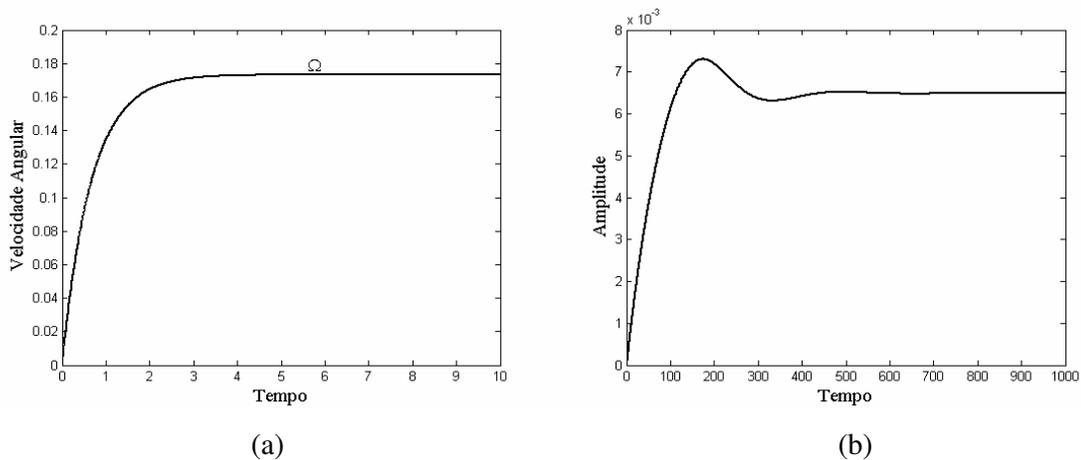


Figura 5.1: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) amplitude para  $\xi_1 = 0.26$  e

$\theta = 1.03$ .

Na segunda simulação numérica, mostrada na figura 5.2, compara – se à solução analítica aproximada com a integração numérica direta, onde comprova – se que o método da média é uma ferramenta válida para a obtenção da solução analítica aproximada do sistema não ideal no caso I. É mostrado no gráfico de séries temporais a resposta do sistema para o valor de  $\xi_1 = 0.26$ , que corresponde ao movimento na região de ressonância para  $\theta = 1.03$ .

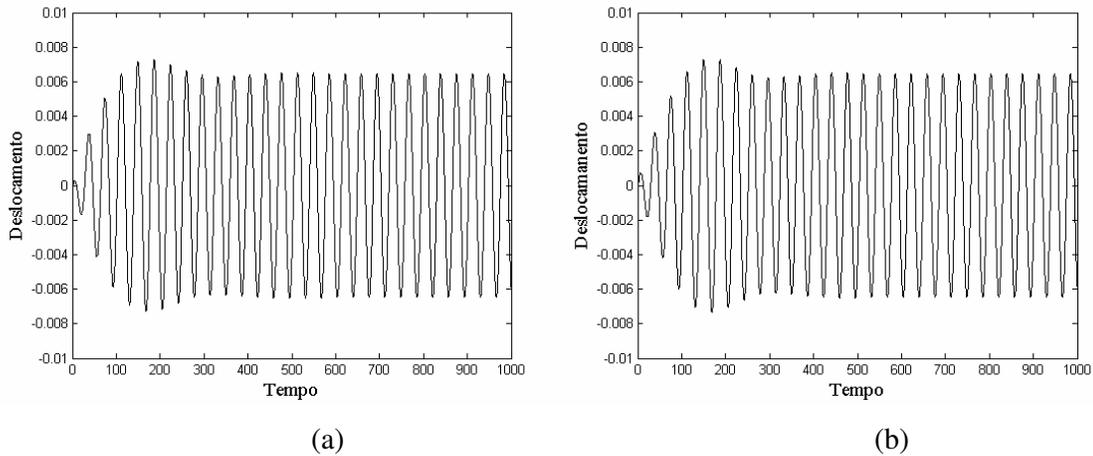


Figura 5.2: Comparação das soluções na série temporal entre os resultados obtidos via método da média (a) e via integração numérica direta (b)

Na figura 5.3, é ilustrado a comparação da resposta no plano de fase e o correspondente espectro de frequência da solução analítica, para  $\xi_1 = 0.26$  e  $\theta = 1.03$ .

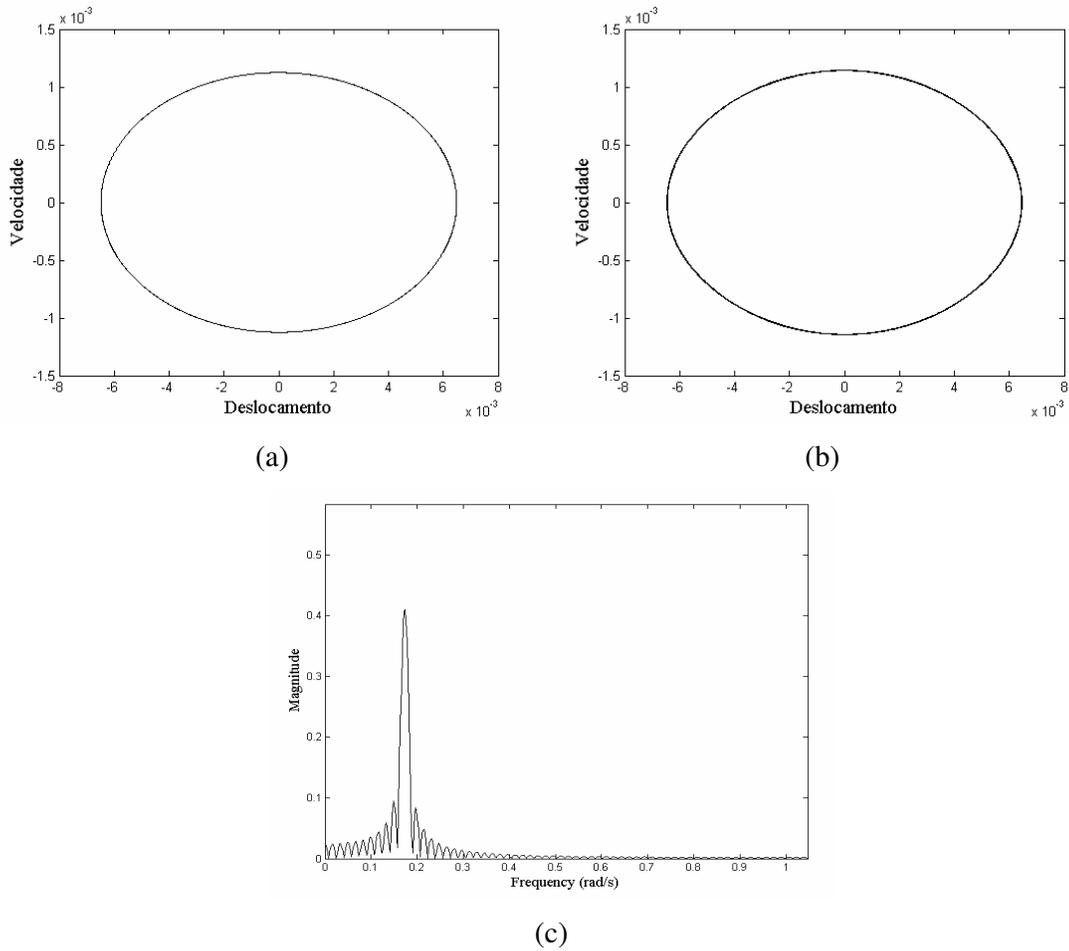


Figura 5.3: (a) Comparação das soluções no plano de fase entre os resultados obtidos via método da média (a), via integração direta (b) e (c) Espectro de frequência para a solução analítica.

Neste estudo formulado através do método da média, também foi verificado a presença do efeito Sommerfeld. A resposta da amplitude com o tempo no regime não estacionário e o histórico no tempo é mostrada na figura 5.4 e 5.5 durante a passagem pela ressonância.

Na figura 5.4 é simulado o efeito Sommerfeld quando ocorrem pequenos acréscimos, da ordem de 0.02, no valor do parâmetro de controle  $\xi_1$ , dentro do intervalo  $[0.1, 0.5]$ , este acréscimo acontece a cada período de 500 na escala de tempo, portanto o salto ocorre entre os pontos A e B da figura 5.4(a), aqui é considerado o salto no estado não estacionário, onde o valor de  $\xi_1$  é de 0.26, que é a região onde a frequência do motor fica capturada pela frequência natural. Na figura 5.4(b) é mostrado o efeito Sommerfeld através da curva de resposta em frequência, neste caso são considerados os valores da amplitude no estado estacionário.

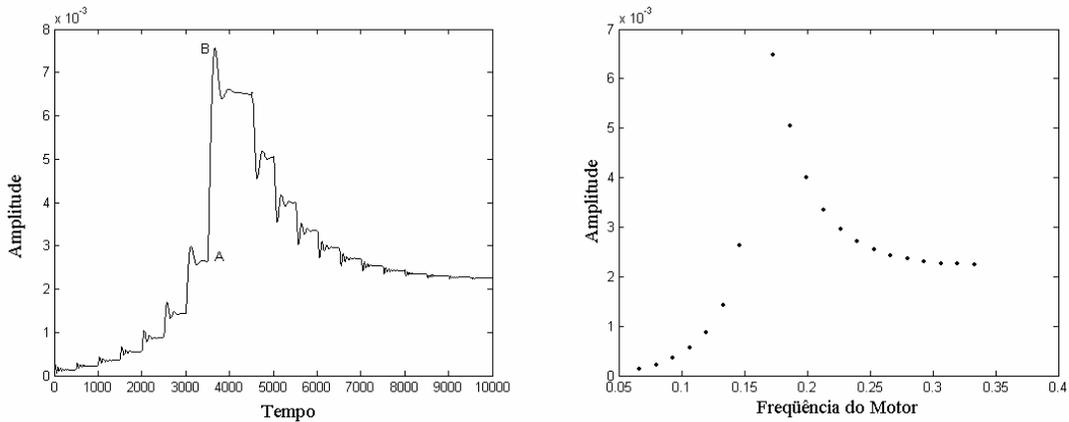


Figura 5.4: Efeito Sommerfeld com o tempo para o acréscimo de  $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Curva de resposta em freqüência para  $\theta = 1.03$

Já na figura 5.5 o efeito Sommerfeld é demonstrado de forma diferente. Nesta nova situação acontece um decréscimo, da ordem também de 0.02, no valor do parâmetro de controle  $\xi_1$ , dentro do mesmo intervalo de operação. Novamente ocorre o salto quando a freqüência do motor alcança o valor próximo de 0.26. Na figura 5.5(a) considera-se as amplitudes máximas no estado não estacionário, já na curva 5.5(b) as amplitudes máximas são dadas para o movimento no estado estacionário. Para os parâmetros escolhidos, não foi observado nenhuma mudança na curva de resposta em freqüência, sobretudo próximo a região de salto quando ocorre o aumento ou o decréscimo de  $\xi_1$ .

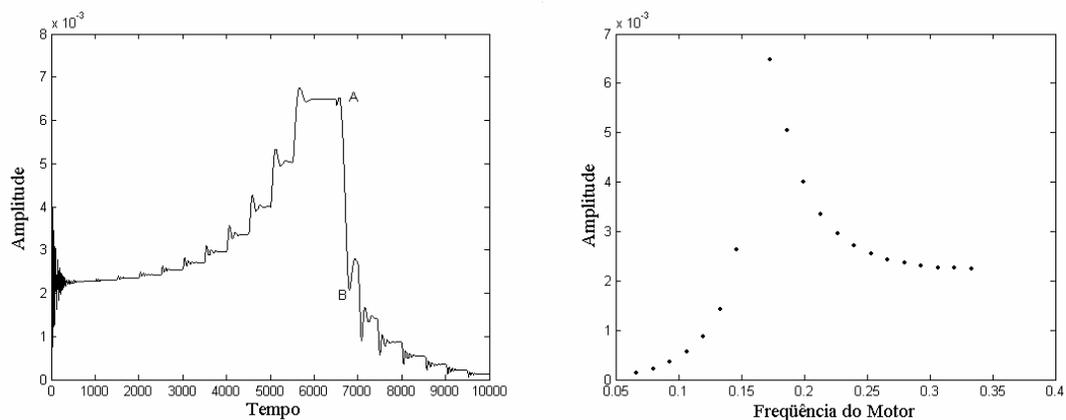


Figura 5.5: Efeito Sommerfeld com o tempo para o decréscimo de  $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Curva de resposta em freqüência para  $\theta = 1.03$

No capítulo anterior, foi mostrado que uma possibilidade de eliminar ou diminuir o efeito Sommerfeld é aumentando o coeficiente de amortecimento do sistema. Desta forma, a figura 5.6 mostra a diminuição do salto quando tem – se um acréscimo de  $\mu$ . Por outro lado na figura 5.7 é ilustrada a diminuição do salto do sistema quando ocorre um decréscimo de  $\xi_1$ . Nos dois casos  $\xi_1$  esta variando no intervalo  $[0.1, 0.5]$ , e esta variação é da ordem de 0.02.

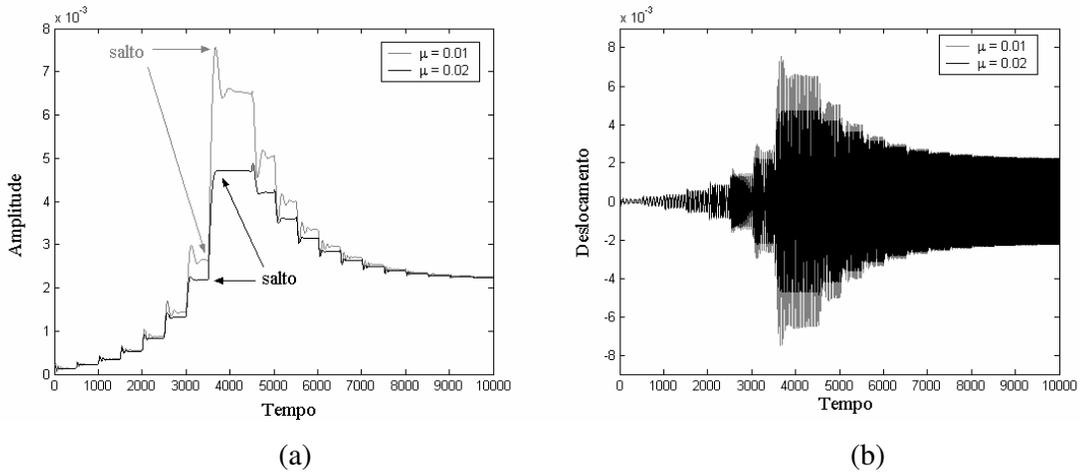


Figura 5.6: Eliminação do efeito Sommerfeld para o acréscimo de  $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para  $\theta = 1.03$

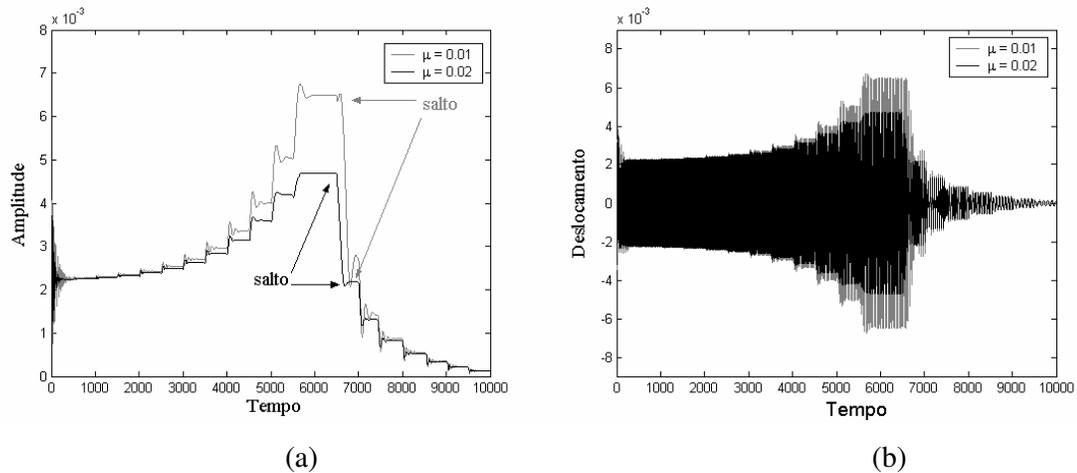


Figura 5.7: Eliminação do efeito Sommerfeld para o decréscimo de  $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para  $\theta = 1.03$

Para o segundo conjunto de simulações numéricas, considera – se o aumento da temperatura em relação às simulações anteriores, considerando agora  $\theta = 2$ , e na região de ressonância o parâmetro de controle assume o valor de  $\xi_1 = 1.5$ .

Na figura 5.8 observa – se que a frequência de excitação  $\Omega$  (velocidade angular do motor) foi capturada pela frequência natural do sistema correspondendo ao parâmetro de controle  $\xi_1 = 1.5$ . Assim a energia acumulada pelo motor de corrente contínua, durante a aceleração, não foi suficiente para atravessar a região de ressonância. Nota – se na figura 5.8b que a amplitude aumenta até atingir um valor máximo e depois decai até o valor estacionário.

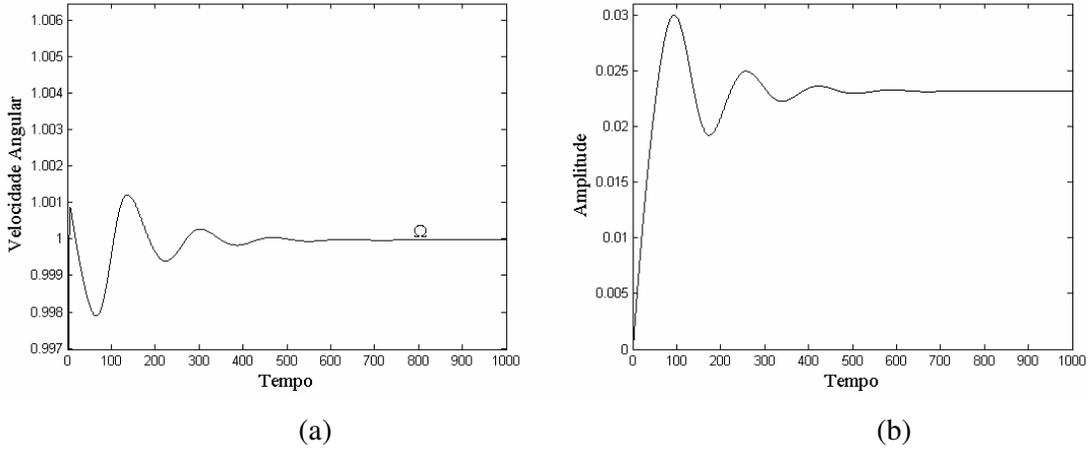


Figura 5.8: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) amplitude para  $\xi_1 = 1.5$  e  $\theta = 2$ .

Para completar os resultados obtidos, na figura 5.9 é ilustrado as soluções aproximadas do sistema não ideal usando a equação 5.17 para o valor de  $\xi_1 = 1.5$  e que são comparadas com as soluções obtidas da equação 4.12 via integração numérica. Observa – se boa concordância entre as soluções.

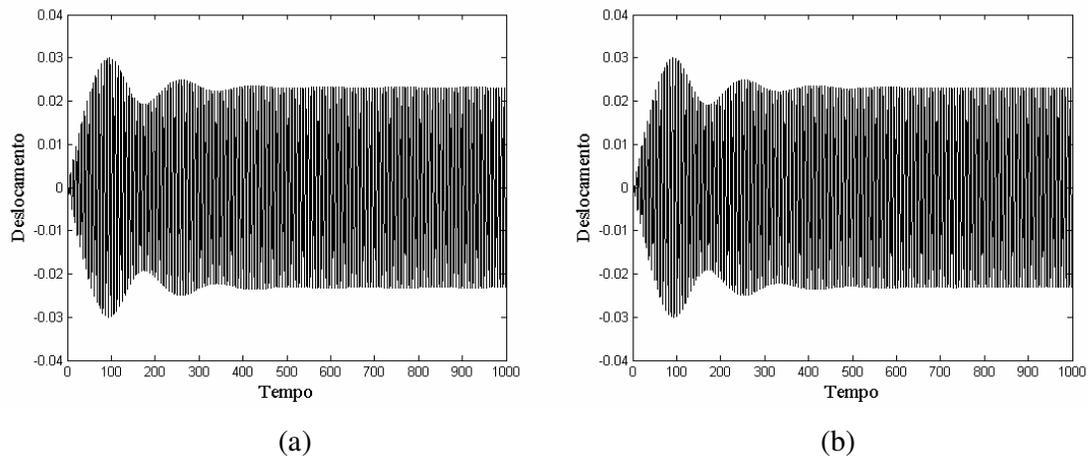


Figura 5.9: Comparação das soluções na série temporal entre os resultados obtidos (a) via método da média e (b) via integração numérica direta.

A figura 5.10, mostra a comparação da resposta no plano de fase e o correspondente espectro de frequência da solução analítica, para  $\xi_1 = 1.5$  e  $\theta = 2$ .

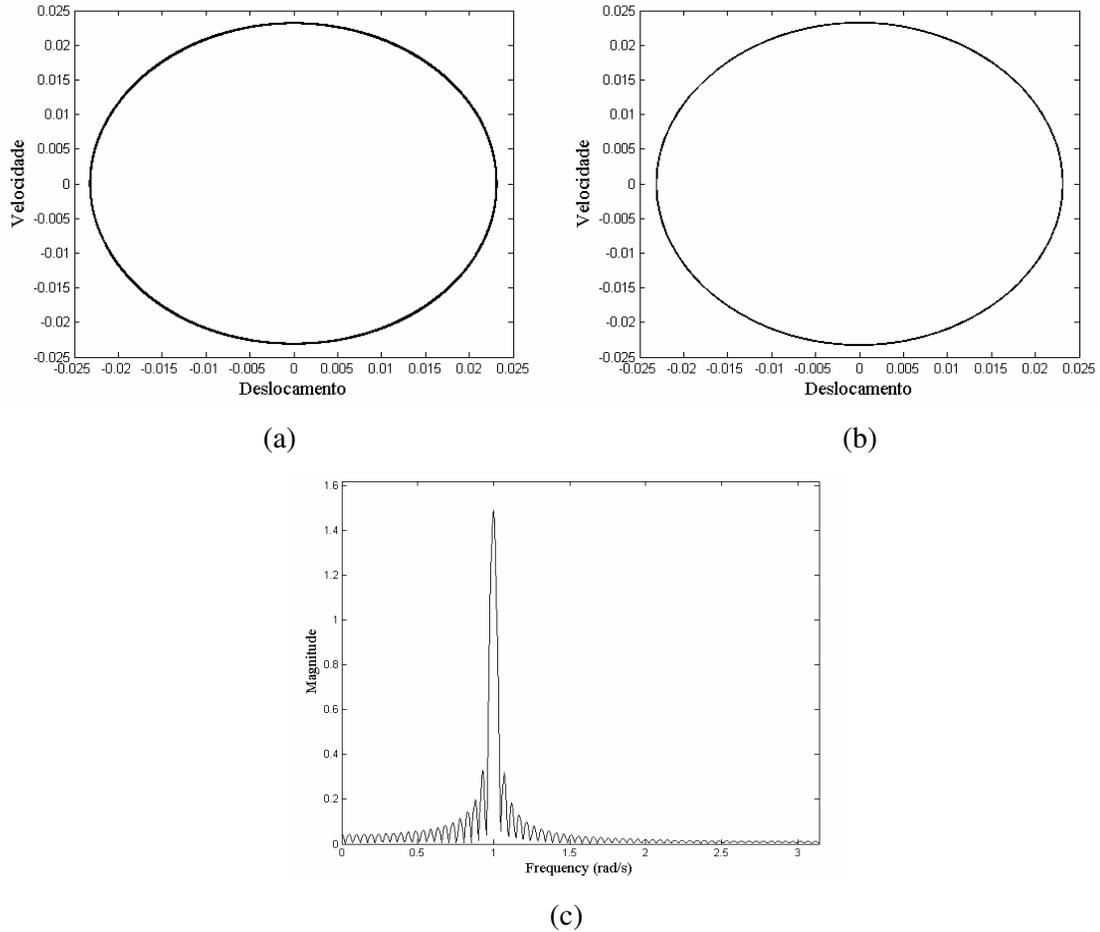


Figura 5.10: (a) Comparação das soluções no plano de fase entre os resultados obtidos via método da média (a) e via integração direta (b) e (b) Espectro de frequência para a solução analítica.

Agora é investigada a presença do efeito Sommerfeld para  $\theta = 2$ . A resposta da amplitude com o tempo no regime não estacionário e a curva de resposta em frequência para o movimento no estado estacionário são mostradas na figura 5.11

De forma análoga feita para o caso anterior, o efeito Sommerfeld ocorre para um acréscimo da ordem de 0.05 no valor do parâmetro de controle  $\xi_1$ , no intervalo  $[1, 2]$ , este acréscimo é feito a cada período de 500 na escala de tempo, entre os pontos A e B da figura 5.11(a) acontece o salto que corresponde ao valor de  $\xi_1 = 1.5$ , para este parâmetro a frequência

do motor é capturada pela frequência natural. A figura 5.11(b) mostra a curva de resposta em frequência do sistema.

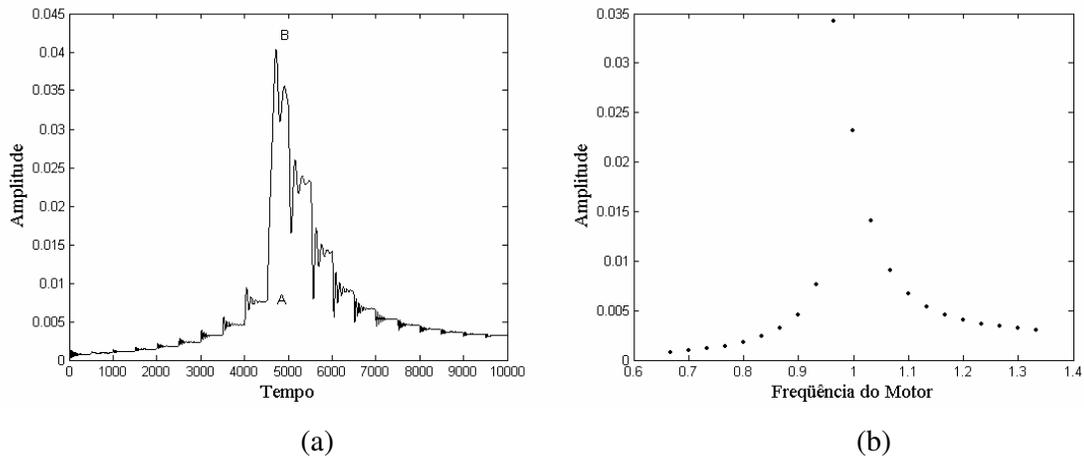


Figura 5.11: Efeito Sommerfeld com o tempo para o acréscimo de  $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para  $\theta = 2$

A figura 5.12 mostra o efeito Sommerfeld no momento em que acontece um decréscimo, também da ordem de 0.05, no valor do parâmetro de controle  $\xi_1$ , dentro do mesmo intervalo do caso anterior, outra vez o salto acontece para  $\xi_1 = 1.5$ . A figura 5.12(a) mostra o salto para movimentos no estado não estacionário, enquanto na figura 5.12(b) a curva de resposta em frequência é ilustrada para o movimento no estado estacionário, aqui as curvas 5.11(b) e 5.12(b) são semelhantes, mas na região de ressonância os picos máximos de amplitude são diferentes.

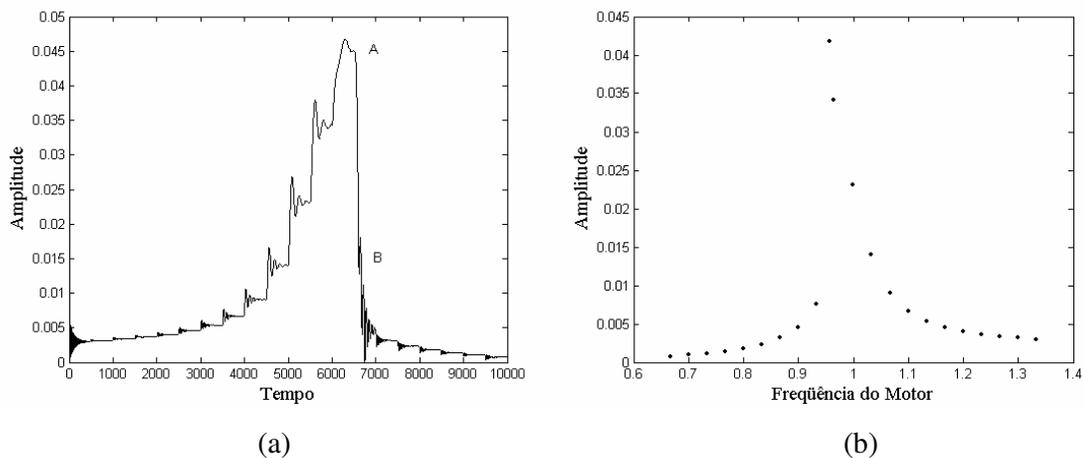


Figura 5.12: Efeito Sommerfeld com o tempo para o acréscimo de  $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para  $\theta = 2$

A figura 5.13 ilustra o comportamento da resposta não estacionária comparando dois valores de amortecimento dados por  $\mu = 0.01$  e  $\mu = 0.02$ . Observe que na figura 5.13 onde ocorre um aumento de  $\xi_1$ , o fenômeno de salto para  $\mu = 0.01$  acontece no valor da amplitude de 0.0072 até 0.04 na região  $4000 < \tau < 5000$ , enquanto para  $\mu = 0.02$  o salto acontece de 0.0074 até 0.0244 no valor da amplitude.

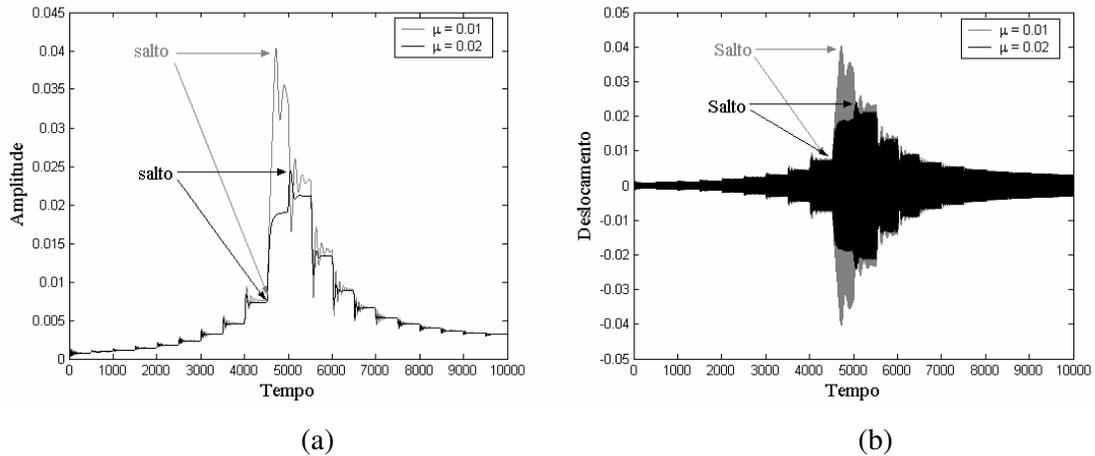


Figura 5.13: Eliminação do efeito Sommerfeld para o acréscimo de  $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para  $\theta = 2$

Na figura 5.14 tem – se o decréscimo de  $\xi_1$ , o salto para  $\mu = 0.01$  acontece de 0.045 até 0.004, em contrapartida com o aumento do amortecimento para  $\mu = 0.02$  o salto ocorre de 0.0205 até o valor de 0.004.

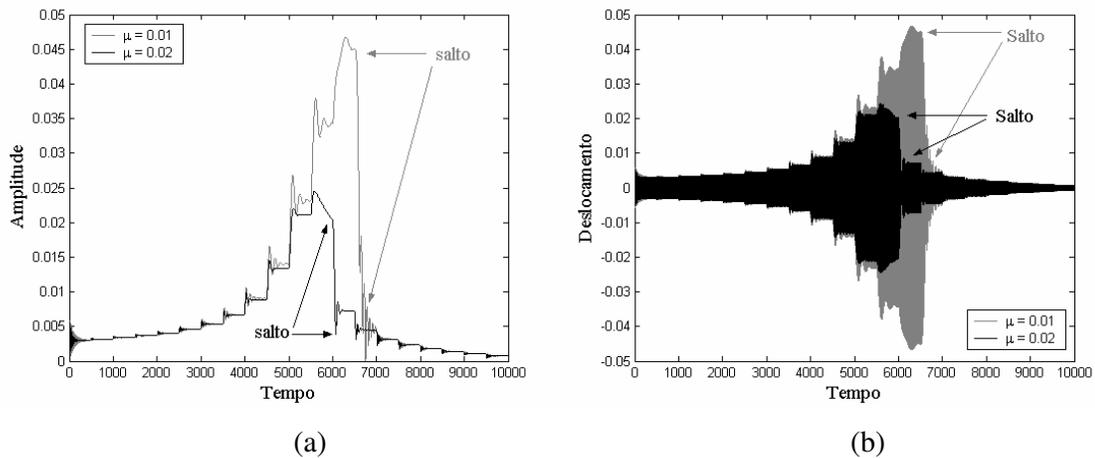


Figura 5.14: Eliminação do efeito Sommerfeld para o decréscimo de  $\xi_1$ : (a) Amplitude versus Tempo, (b) Histórico no tempo para  $\theta = 2$

A seguir, de forma análoga feita anteriormente, a dinâmica do sistema não ideal próxima a região de ressonância para os valores do caso II será estudada pelo método da média.

## 5.2 Busca da solução analítica aproximada na região de ressonância - caso II

Nesta seção obtém-se a solução analítica aproximada através do método da média para o conjunto de parâmetros do sistema no caso II. A dinâmica não linear do sistema de equações (5.3) é estudada próxima à região de ressonância.

Impondo que  $\varepsilon = 0$  (problema não perturbado) no sistema de equações (5.3), obtém-se que a solução do sistema é dado por,

$$z = a \cos(\phi + \beta) \quad (5.44)$$

De forma análoga a seção anterior, e realizando todas as manipulações algébricas e considerando todas as restrições e considerações impostas, obtém-se o resultado

$$\dot{\Omega} = \Gamma(\Omega) - \frac{1}{2} ar_4 \Omega \sqrt{(\theta-1)} \cos \beta \quad (5.45)$$

$$\dot{a} = \frac{r_3 \Omega^2}{2\sqrt{\theta-1}} \cos \beta - \mu a \quad (5.46)$$

$$\dot{\beta} = \frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 - \left(\Omega - \sqrt{(\theta-1)}\right) - \frac{r_3 \Omega^2}{2a\sqrt{(\theta-1)}} \sin \beta - \frac{6\alpha}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^2 \quad (5.47)$$

As equações (5.45) até (5.47) são equivalentes ao sistema (5.3).

### 5.2.1 Análise de estabilidade no estado estacionário

Os valores de  $a$ ,  $\beta$  e  $\Omega$  para a condição estacionária de movimento são determinadas pelas raízes do sistema de equações,

$$\Gamma(\Omega) - \frac{1}{2} ar_4 \Omega \sqrt{(\theta-1)} \cos \beta = 0 \quad (5.48)$$

$$\frac{r_3 \Omega^2}{2\sqrt{\theta-1}} \cos \beta - \mu a = 0 \quad (5.49)$$

$$\frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 - (\Omega - \sqrt{(\theta-1)}) - \frac{r_3 \Omega^2}{2a\sqrt{(\theta-1)}} \sin \beta - \frac{6}{16\sqrt{(\theta-1)}} \alpha a^2 = 0 \quad (5.50)$$

Combinando as equações 5.49 e 5.50 tem – se que

$$\frac{r_3^2 \Omega^4}{4(\theta-1)} = a^2 \left[ \mu^2 + \left( \frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 - (\Omega - \sqrt{(\theta-1)}) - \frac{6\alpha}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^2 \right)^2 \right] \quad (5.51)$$

Agora combinando as equações 5.48 e 5.49 obtém – se

$$\Gamma(\Omega) = \frac{a^2 \mu r_4 (\theta-1)}{r_3 \Omega} \quad (5.52)$$

A amplitude da resposta do sistema não ideal e a frequência rotacional do motor são determinadas pelas equações 5.51 e 5.52 respectivamente para cada valor do parâmetro de controle  $\xi_1$ . A fase no movimento estacionário é dado por

$$\tan \beta = \frac{\frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 - (\Omega - \sqrt{(\theta-1)}) - \frac{6\alpha}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^2}{\mu} \quad (5.53)$$

A estabilidade da solução média é determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana do sistema médio dado pelas equações 5.48 até 5.50. A matriz Jacobiana das equações médias é dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{r_3\Omega^2}{2\sqrt{\theta-1}} \sin \beta & \frac{r_3\Omega}{\sqrt{\theta-1}} \cos \beta \\ \frac{r_3\Omega^2}{2a^2\sqrt{\theta-1}} \sin \beta - \frac{3a\alpha}{4\sqrt{\theta-1}} - \frac{5\gamma a^3}{4\sqrt{\theta-1}} & -\frac{r_3\Omega^2}{2a\sqrt{\theta-1}} \cos \beta & -1 - \frac{r_3\Omega}{a\sqrt{\theta-1}} \sin \beta \\ 1 - \frac{1}{2} r_4\Omega\sqrt{\theta-1} \cos \beta & \frac{1}{2} ar_4\Omega\sqrt{\theta-1} \sin \beta & -\xi_2 - \frac{1}{2} ar_4\sqrt{\theta-1} \cos \beta \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

O polinômio característico da matriz Jacobiana, avaliado sobre a solução do sistema médio equações 5.51 e 5.52 é dado por

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (5.55)$$

onde

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \xi_2 + \frac{1}{2} ar_4\sqrt{\theta-1} \cos \beta + \frac{r_3\Omega^2}{2a\sqrt{\theta-1}} \cos \beta + \mu$$

$$a_2 = -\frac{\Omega r_3}{\sqrt{\theta-1}} \cos \beta + \frac{3r_3r_4\Omega^2}{4} \cos^2 \beta + \frac{\Omega r_4 a \sqrt{\theta-1}}{2} \sin \beta + \frac{\Omega^2 r_3 r_4}{2} \sin^2 \beta + \frac{\xi_2 r_3 \Omega^2}{2a\sqrt{\theta-1}} \cos \beta + \mu \xi_2 + \frac{ar_4 \mu \sqrt{\theta-1}}{2} \cos \beta \\ + \frac{r_3^2 \Omega^4}{4a^2(\theta-1)} \sin^2 \beta - \frac{3ar_3\Omega^2\alpha}{8(\theta-1)} \sin \beta - \frac{5a^3 r_3 \gamma \Omega^2}{8(\theta-1)} \sin \beta + \frac{r_3\Omega^2\mu}{2a\sqrt{\theta-1}} \cos \beta$$

$$a_3 = -\det(J)$$

Para que a solução do sistema médio seja estável, os autovalores da matriz Jacobiana, ou as raízes da equação característica 5.55, necessitam ter a parte real negativa.

De acordo com o critério Routh-Hurwitz (RH) a matriz (H) dos coeficientes do polinômio característico de grau 3 é dado por

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Assim, os critérios RH de estabilidade para um sistema de ordem 3 são:

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \quad (5.57)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0 \quad (5.58)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \det(\Delta_3) > 0 \quad (5.59)$$

Portanto, a solução estacionária do sistema médio é estável se as condições 5.57 até 5.59 são satisfeitas.

## 5.2.2 Solução Especial do regime estacionário

Nesta seção são analisados pontos especiais da solução estacionária que definem o ponto máximo e o ponto de salto na curva de resposta em frequência.

Definindo  $\Omega - \sqrt{(\theta-1)} = \Delta\Omega$  como uma aproximação do fenômeno de salto e assim reescrevendo a equação 5.51 como

$$\frac{r_3^2 \Omega^4}{4(\theta-1)} = a^2 \left[ \mu^2 + \left( \frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 - \Delta\Omega - \frac{6\alpha}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^2 \right)^2 \right] \quad (5.60)$$

Considerando esta equação, é determinado o pico correspondente à frequência rotacional na curva de resposta em frequência.

Sendo  $\frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 - \Delta\Omega - \frac{6\alpha}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^2 = 0$ , obtém-se que

$$\Omega_p = \frac{5\gamma}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^4 + \sqrt{(\theta-1)} - \frac{6\alpha}{16\sqrt{(\theta-1)}} a^2 \quad (5.61)$$

O pico da amplitude é determinado da seguinte equação,

$$a_p = \frac{r_3 \Omega_p^2}{2\mu\sqrt{(\theta-1)}} \quad (5.62)$$

Portanto o parâmetro de controle correspondente a este pico de salto da equação 5.52 é dado por

$$\xi_1 = \frac{a_p^2 \mu r_4 (\theta-1)}{r_3 \Omega_p} + \xi_2 \Omega_p \quad (5.63)$$

Com este parâmetro de controle, para certos valores, é possível eliminar o efeito Sommerfeld, sendo este uma das metas da engenharia moderna envolvendo fontes de energia com potência limitada.

Para determinar os pontos de máximo, reescreve – se a equação 5.52 na forma

$$r_3 \Delta\Omega (\xi_1 - \xi_2 \Delta\Omega) = a^2 \mu r_4 (\theta-1) \quad (5.64)$$

Diferenciando a equação 5.76 com relação à  $\Delta\Omega$  e considerando que  $\frac{d(a)}{d \Delta\Omega} = 0$  então tem – se que  $\Delta\Omega = \frac{\xi_1}{2\xi_2}$ , então a frequência crítica para o ponto máximo é,

$$\Omega_c = \sqrt{(\theta-1)} + \frac{\xi_1}{2\xi_2} \quad (5.65)$$

e a amplitude crítica do ponto de máximo, usando as equações 5.52 e 5.65, é determinada por

$$a_c^2 = \frac{r_3 \xi_1^2}{4\xi_2 \mu r_4 (\theta-1)} - \frac{r_3 \xi_2}{\mu r_4} \quad (5.66)$$

### 5.2.3 Simulações numéricas das soluções dinâmicas do caso II

No capítulo 4 foram realizadas simulações da equação de movimento através da integração direta das mesmas. Como observado, para os valores de  $\theta=2$  e  $\theta=3$ , no sistema para o caso I estas simulações na região de ressonância apresentaram um comportamento periódico, que

foram comprovadas na seção anterior sem maiores problemas, onde foi conseguida uma boa aproximação entre a solução analítica e numérica.

Por outro lado, a simulação via integração direta da equação de movimento do sistema no caso II para  $\theta=2$  e  $\theta=3$  apresentaram um comportamento caótico na região de ressonância. O objetivo agora é verificar qual será o comportamento através do método da média para estes valores de  $\theta$ .

Agora é realizada a simulação das equações (5.45) até (5.47) para os valores do sistema no caso II. Na figura 5.15(a) é mostrado o histórico no tempo da velocidade angular do motor, e em 5.15(b) a variação da amplitude em relação ao tempo, para  $\theta=2$  e  $\xi_1=1.5$ .

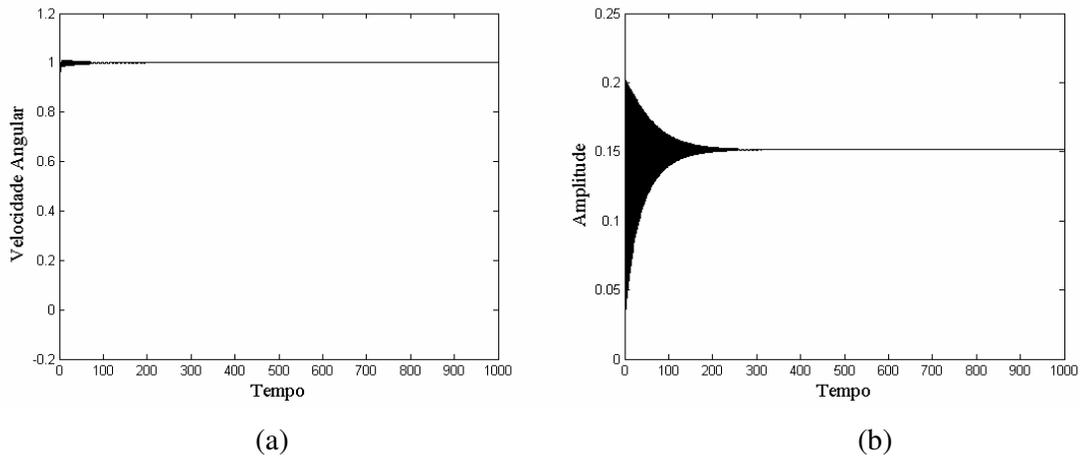


Figura 5.15: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) amplitude para  $\xi_1=1.5$  e  $\theta=2$

A figura 5.16 mostra a comparação do histórico no tempo do caso numérico e analítico para  $\xi_1=1.5$  e  $\theta=2$ . Note que na figura 5.16(a), que é o caso analítico, o sistema apresenta um comportamento inicialmente irregular, mas este comportamento torna – se regular depois de um certo período no tempo, já para a figura 5.16(b) o sistema apresenta somente o comportamento irregular (caótico).

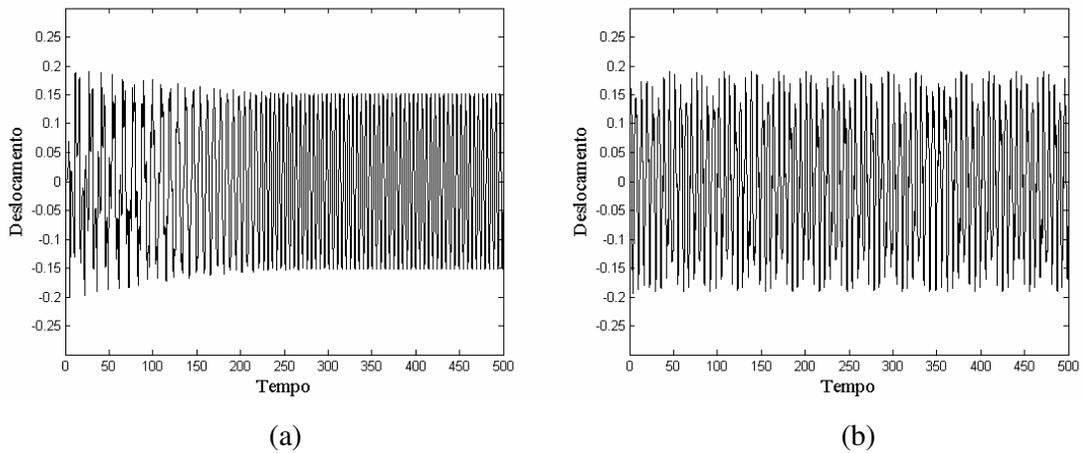


Figura 5.16: Comparação no histórico no tempo para (a) solução analítica e (b) numérica

Para mostrar a dinâmica do sistema, na figura 5.17 é apresentado a comparação do plano de fase da solução numérica e analítica e seus respectivos espectros de frequência, para  $\xi_1 = 1.5$  e  $\theta = 2$ .

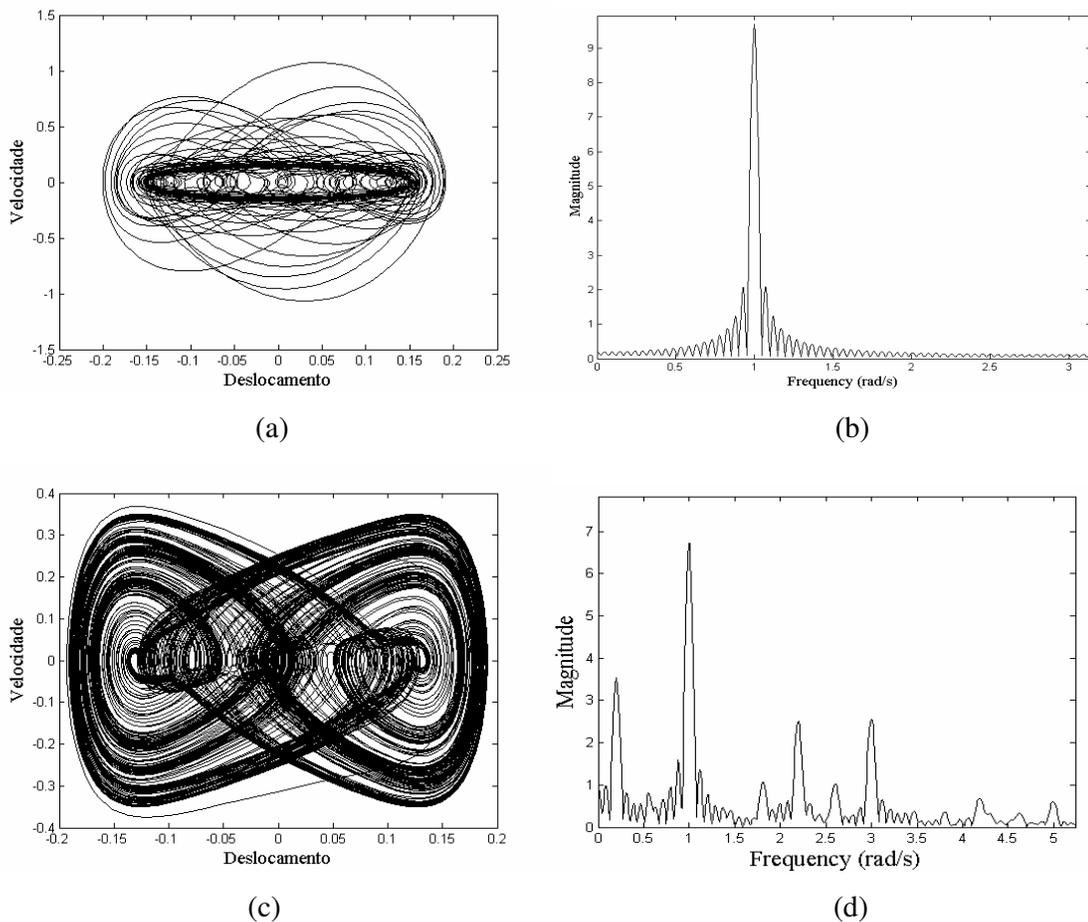


Figura 5.17: Comparação entre solução analítica e numérica, (a) Plano de fase e (b) espectro de frequência para a solução analítica, (c) plano de fase e (d) espectro de frequência para a solução numérica.

Note que os planos de fase apresentam um comportamento diferente, comprovados pelo espectro de frequência. Na solução via integração direta das equações de movimento o sistema apresenta um comportamento caótico, enquanto na solução analítica obtida através do método da média o comportamento do sistema no início é irregular, mas com o tempo a solução torna – se periódica, o que é um comportamento esperado visto que o método de perturbação é utilizado para encontrar esta solução periódica.

Agora deve – se provar o fato de que a solução analítica encontrada passa de caótica para periódica. A figura 5.18 ilustra a frequência angular do motor para o caso analítico

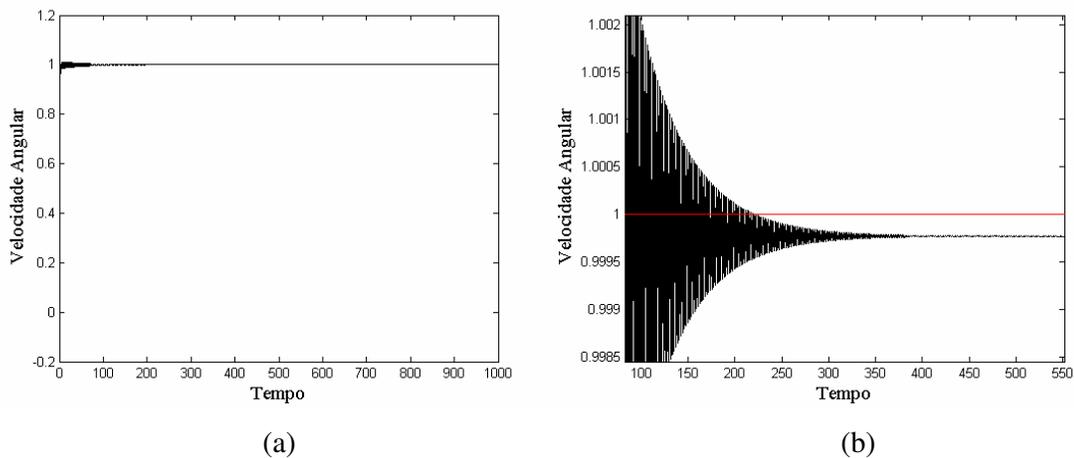


Figura 5.18: Frequência do motor no caso analítico: (a) Histórico no tempo e (b) Zoom na região de ressonância.

Perceba que na figura 5.18(a), a frequência do motor esta aparentemente capturada pela região de ressonância, mas pela figura 5.18(b) quando é realizado um zoom nesta região, tem-se que para o intervalo de tempo  $0 \leq \tau < 215$  a frequência angular do motor esta realmente capturada pela frequência natural do sistema, mas repentinamente a velocidade angular abandona esta região passando de um comportamento irregular (caótico) para um movimento regular (periódico). Este abandono repentino da região de ressonância deve-se ao parâmetro de sintonia  $\sigma$ , que é um parâmetro responsável por sintonizar (procurar) uma região periódica de movimento. A figura 5.19 mostra a variação do parâmetro de sintonia ( $\sigma$ ) no histórico no tempo.

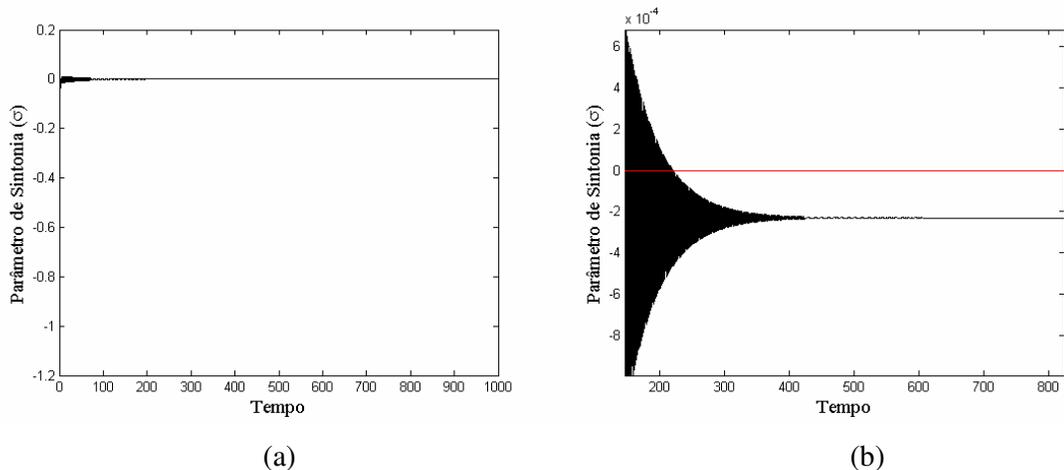


Figura 5.19: Variação do parâmetro de sintonia, (a) Histórico o tempo, (b) Zoom da figura (a)

Aqui é possível fazer uma relação entre as figuras 5.18 e 5.19. Como dito anteriormente a frequência angular do motor está capturado pela região de ressonância no intervalo de tempo  $0 \leq \tau < 215$ , neste mesmo intervalo de tempo, a figura 5.19(b) mostra que o parâmetro de sintonia varia entre valores positivos e negativos, isto é,  $\sigma$  está procurando uma região onde a solução seja periódica, contudo a solução neste intervalo de tempo ainda é caótica, sendo que a partir de  $215 < \tau$ , a solução torna-se periódica, visto que  $\sigma$  assume somente valores negativos e conseqüentemente a frequência do motor varia um pouco abaixo da região de ressonância, note que para  $215 < \tau$  a velocidade angular da figura 5.18(b) apresenta um valor quase constante, este valor é exatamente a frequência rotacional média da solução encontrada na integração numérica das equações de movimento.

A figura 5.20 mostra a situação no plano de fase, para o intervalo de tempo  $0 \leq \tau < 215$ , onde o movimento é caótico, e para  $215 < \tau$ , onde a solução periódica é encontrada.

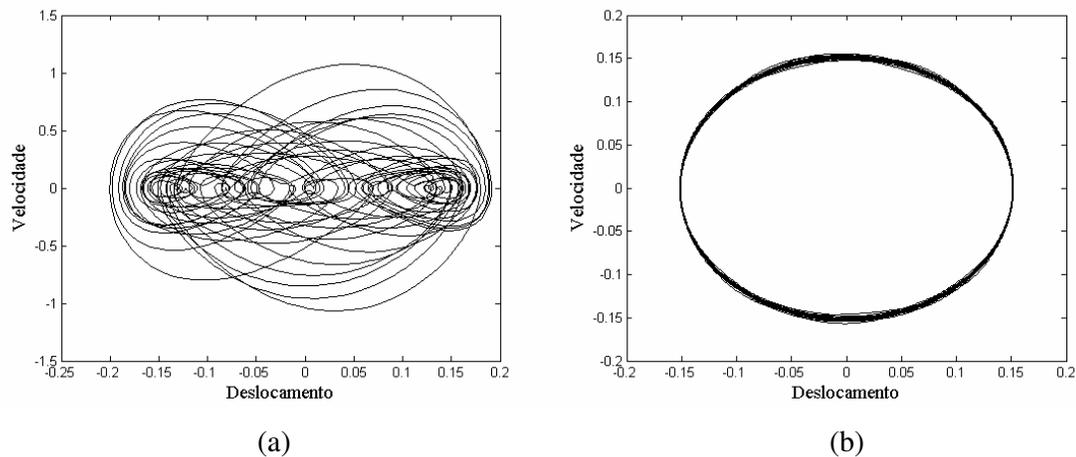


Figura 5.20: Plano de fase, (a) para o intervalo  $0 \leq \tau < 215$ , solução irregular, (b) para  $215 < \tau$  solução periódica.

Na figura 5.21 é ilustrada a comparação entre a solução caótica pela integração direta das equações de movimento e a solução periódica encontrada por intermédio do método da média.

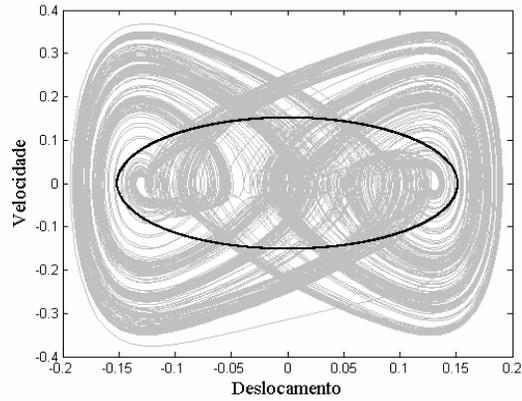


Figura 5.21: Comparação entre os planos de fase em cinza solução numérica com movimento caótico, e em cor preto solução analítica com comportamento periódico da solução.

Analisando agora a dinâmica não linear do caso II através do método da média para  $\theta = 3$ . A figura 5.22(a) mostra a captura da velocidade angular do motor pela frequência natural para  $\xi_1 = 2.125$  e a figura 5.22(b) mostra como a amplitude da resposta se modula com o tempo.

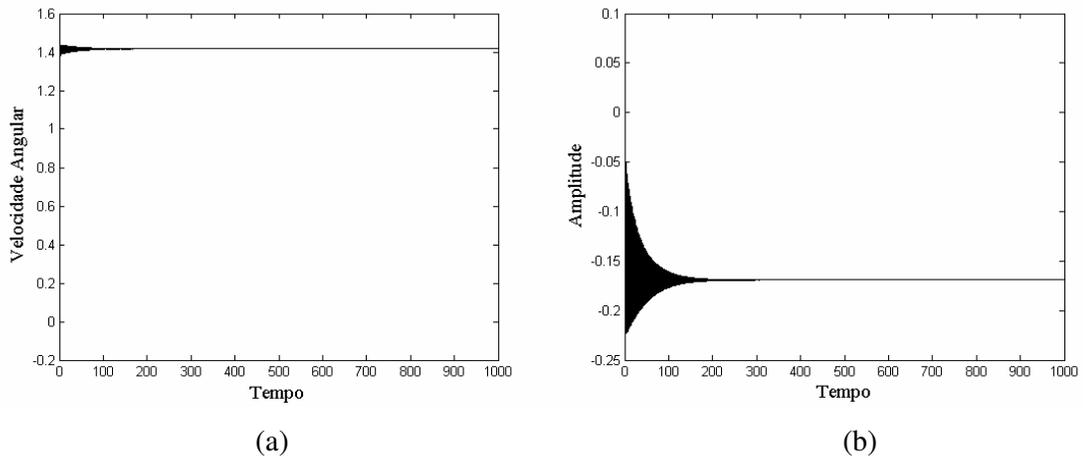


Figura 5.22: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) amplitude para  $\theta = 3$  e  $\xi_1 = 2.125$ .

A figura 5.23 mostra a solução do sistema não ideal para o valor de  $\xi_1 = 2.125$  e  $\theta = 3$ , onde é comparada a solução aproximada obtida através do método da média e a resposta conseguida integrando a equação 4.15.

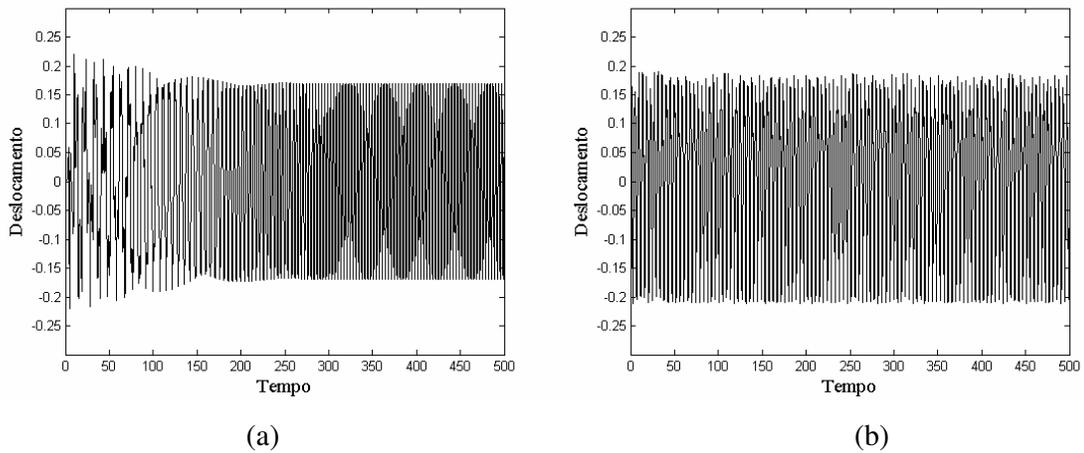


Figura 5.23: Comparação no histórico no tempo para (a) solução analítica e (b) numérica

Aqui novamente é observado que a solução analítica apresenta no início um comportamento irregular, mas depois de aproximadamente  $250 < \tau$  a solução se torna regular, entretanto a solução numérica apresenta somente o comportamento caótico.

Na figura 5.24 é observado que a dinâmica das duas situações apresentam comportamentos diferentes.

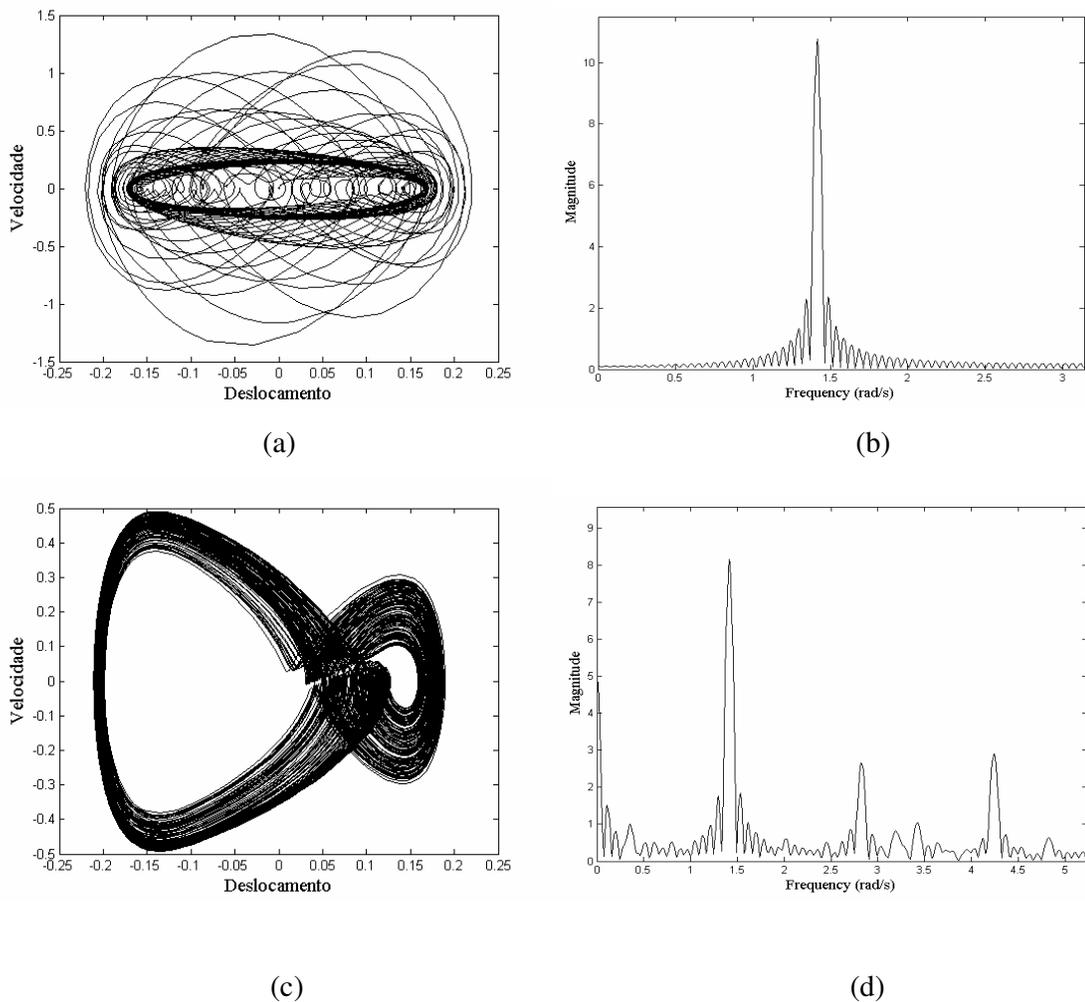


Figura 5.24: Comparação entre solução analítica e numérica, (a) Plano de fase e (b) espectro de frequência para a solução analítica, (c) plano de fase e (d) espectro de frequência para a solução numérica.

Note que os planos de fase apresentam um comportamento diferente, comprovados pelo espectro de frequência. Na solução via integração direta das equações de movimento o sistema apresenta um comportamento caótico, enquanto na solução analítica obtida através do método da média o comportamento do sistema no início é irregular, mas com o tempo a solução torna – se periódica, o que é um comportamento esperado, pois o método de perturbação é empregado para encontrar esta solução periódica.

Agora deve – se demonstrar o fato de que a solução analítica encontrada passa de irregular para regular. A figura 5.25 ilustra a frequência angular do motor para o caso analítico

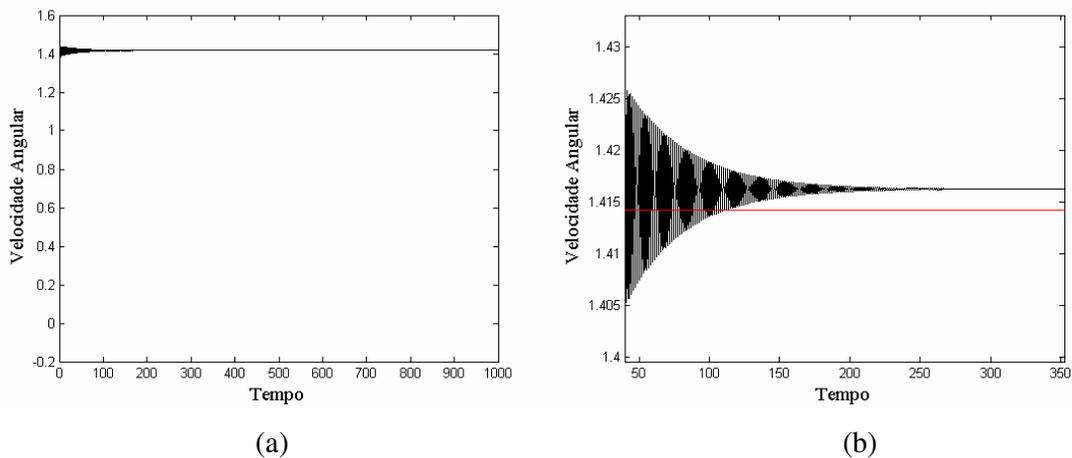


Figura 5.25: Frequência do motor no caso analítico: (a) Histórico no tempo e (b) Zoom na região de ressonância.

Perceba que na figura 5.25(a), a frequência do motor está aparentemente capturada pela região de ressonância, mas pela figura 5.25(b), quando é realizado um zoom nesta região tem-se que no intervalo de tempo  $0 \leq \tau < 110$  a frequência angular do motor está realmente capturada pela região de ressonância do sistema, mas repentinamente abandona esta região passando de um comportamento irregular (caótico) para um movimento regular (periódico). Este abandono repentino da região de ressonância deve-se ao parâmetro  $\sigma$ , que é um parâmetro responsável por sintonizar (procurar) uma região periódica de movimento. A figura 5.26 mostra a variação do parâmetro de sintonia  $\sigma$  no histórico no tempo.

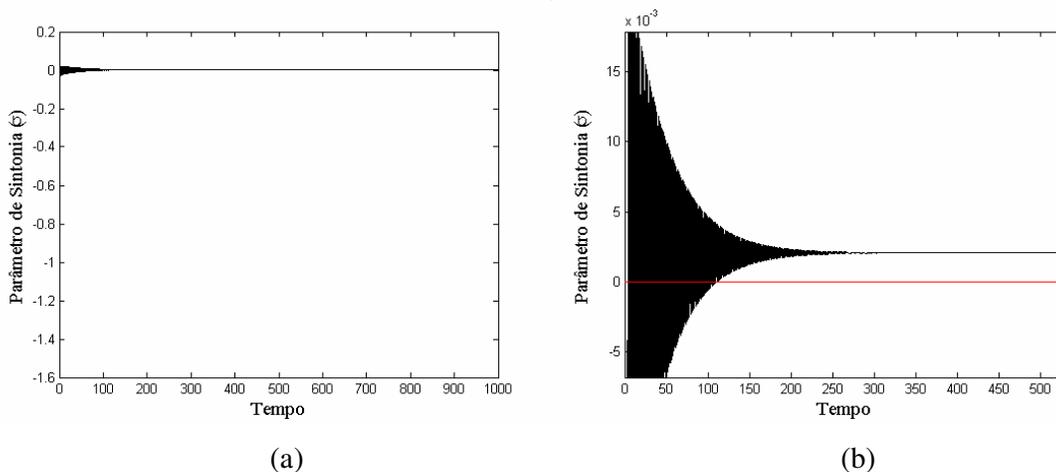


Figura 5.26: Variação do parâmetro de sintonia, (a) Histórico o tempo, (b) Zoom da figura (a)

Aqui é possível fazer uma relação entre as figuras 5.25 e 5.26. A frequência angular do motor esta capturada pela região de ressonância no intervalo  $0 \leq \tau < 110$ , neste mesmo intervalo de tempo percebe pela figura 5.26b que o parâmetro de sintonia varia entre valores positivos e negativos, isto é,  $\sigma$  esta buscando uma região onde a solução é periódica, contudo a solução neste intervalo ainda é caótica, e que a partir de  $110 < \tau$ , a solução torna – se periódica sendo que agora  $\sigma$  assume somente valores positivos e conseqüentemente a frequência do motor varia um pouco acima da região de ressonância, note que para  $110 < \tau$  a velocidade angular adota um valor quase constante, este valor é exatamente a frequência rotacional média da solução encontrada na integração numérica das equações de movimento.

A figura 5.27 mostra a situação no plano de fase, para o intervalo de tempo  $0 \leq \tau < 110$ , onde o movimento é irregular, e para  $110 < \tau$ , onde a solução periódica é encontrada.

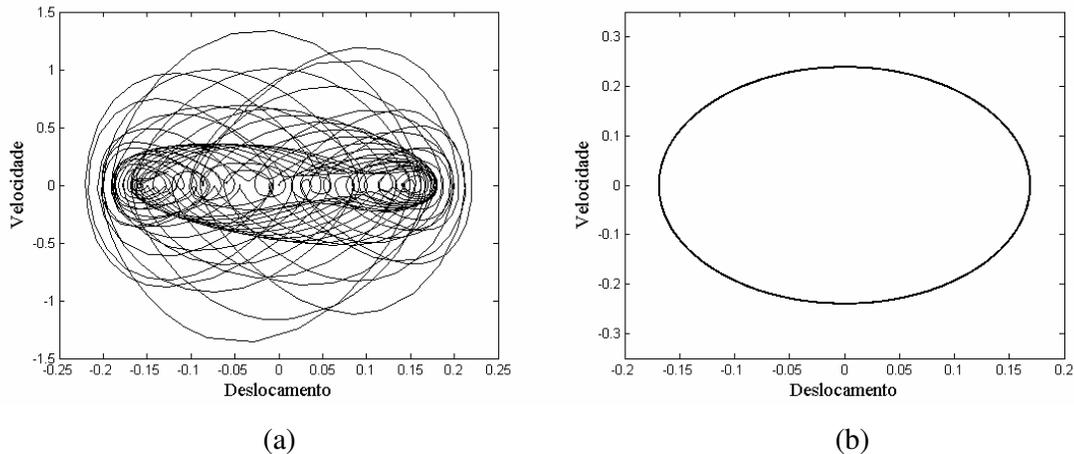


Figura 5.27: Plano de fase, (a) para o intervalo  $0 \leq \tau < 110$ , solução caótica, (b) para  $110 < \tau$  solução periódica.

Na figura 5.28 é ilustrada a comparação entre a solução caótica pela integração direta das equações de movimento e a solução periódica encontra por intermédio do método da média.

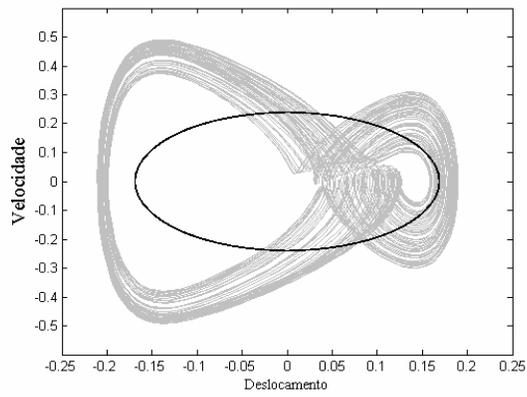


Figura 5.28: Comparação entre os planos de fase em cinza solução numérica com movimento caótico, e em cor preto solução analítica com comportamento periódico da solução

## Capítulo 6

### **Controle Ótimo Linear Realimentado para o Sistema com Memória de Forma com Excitação do Tipo Ideal e Não Ideal**

Há quase três décadas, o comportamento atípico da dinâmica não linear e caos têm atraído a atenção de diferentes campos científicos. O comportamento caótico de sistema tem sido observado em inúmeras situações diferentes como em modelos físicos, químicos, biológicos etc. Aplicações em engenharia estão sendo desenvolvidas em áreas como engenharia mecânica e química. Assim não é surpreendente que o assunto em questão, o controle de sistemas caóticos, tem sido investigado com detalhes tendo sido publicados inúmeros artigos durante a última década.

Surpreendentemente, o desenvolvimento deste campo foi desencadeado pela publicação de um artigo dos autores E. Ott, C. Grebogi e J. Yorke, (1990), onde o termo controle de caos foi criado e é hoje amplamente usado. Talvez, a façanha deste artigo foi à demonstração do fato de que uma significativa mudança no comportamento do sistema caótico pode ser feita por pequenos ajustes dos parâmetros. Esta observação abriu possibilidades para mudar o comportamento do sistema sem interferir em suas propriedades inerentes, Fradkov e Evans (2005).

Desde então, várias estratégias de controle vem sendo desenvolvidas e utilizadas na literatura na busca de soluções de problemas em ciências de engenharia e sistemas complexos. No caso de problemas não ideais poucos esforços foram feitos nesta direção.

Entre os trabalhos de controle para problemas não ideais, mencionam-se os publicados por Yamakawa e Murakami (1989) que utilizou a técnica dos gradientes conjugados em um problema de rotores; Diemetenberg et. al. (1997) que utilizou métodos heurísticos no controle da amplitude de vibração quando a passagem pela ressonância em um problema de um grau de liberdade, Balthazar et. al. (2001) utilizou a técnica de Tikhonov na obtenção de tempo mínimo de passagem pela ressonância de um problema vibratório não ideal de dois graus de liberdade; Pontes Jr.(2003) desenvolveu um procedimento de controle de sistemas com atrito adere - desliza utilizando um controle chaveado inspirado na técnica de controle de estrutura variável, Palácios (2002) apresentou resultados numéricos da técnica de controle por

saturação aplicado em um problema do pórtico plano excitado por um motor não ideal e Peruzzi et. al. (2007) utilizou a teoria de Floquet na solução de um problema não ideal baseado em técnicas de controle desenvolvidos por Sinha et. al. (2000).

Neste capítulo o objetivo é utilizar o controle desenvolvido por Rafikov e Balthazar (2004, 2005, 2007) para controlar tanto o sistema ideal quanto o não ideal. Este método visa encontrar um controle ótimo linear realimentado onde encontram – se condições para a aplicação do controle linear em sistemas não – lineares, garantindo a estabilidade do problema.

Recentemente, foi utilizado em problemas biológicos com sucesso, Chavarette et. al. (2007) e Rafikov et. al. (2007a)

Nota - se que na teoria do controle existem dois tipos de problemas, sendo o primeiro deles à função do controle  $u(t)$ , que deve ser encontrada como uma função do tempo, ou seja, nesse caso a função de controle ótimo determina uma trajetória ótima que corresponde a uma condição inicial dada do sistema. No segundo caso, a função de controle  $u(t, x)$ , que depende do tempo e de variáveis de estado; este tipo de controle é chamado controle com realimentação podendo ser aplicado para qualquer condição inicial.

Se as variáveis do sistema são desvios do regime desejado, o controle ótimo estabiliza em torno da trajetória desejada, minimizando o funcional que caracteriza os desvios quadrados da trajetória e do controle do regime desejado Rafikov e Balthazar (2005, 2007).

A seguir, apresenta - se esta formulação do controle ótimo com realimentação, para a aplicação no problema de interesse. .

## 6.1 Formulação linear para sistemas não lineares

Considera – se um sistema não linear controlável

$$\dot{x} = A(t)x + g(x) + Z \quad (6.1)$$

onde  $x \in R^n$  é um vetor de estado,  $A(t) \in R^{n \times n}$  é uma matriz constante,  $Z \in R^n$  é o vetor controle e  $g(x)$  é um vetor formado de funções contínuas não lineares.

Aqui a escolha de  $A(t)$  não é única, e esta influência o desempenho do resultado do controle. Quando o termo de controle  $Z$  é anulado, o sistema 6.1 tem um atrator caótico para um dado conjunto de parâmetros.

Em diversos problemas da engenharia, física, economia, ecologia, etc., o objetivo é encontrar a lei  $Z$  de controle que leva o sistema do regime perturbado a um ponto fixo de equilíbrio ou a uma órbita periódica ou não periódica (caótica) desejada. Considerando o vetor função  $\tilde{x}$  que caracteriza a órbita desejada. O vetor controle consiste de duas partes

$$Z = \tilde{z} + z_f \quad (6.2)$$

onde a parte  $\tilde{z}$  do vetor de controle que mantém o sistema controlado na trajetória desejada, pode ser escrito como

$$\tilde{z} = \dot{\tilde{x}} - A\tilde{x} - g(\tilde{x}) \quad (6.3)$$

e o vetor de controle  $z_f$  que estabiliza o sistema em torno da trajetória desejada tem a seguinte forma,

$$z_f = Bz \quad (6.4)$$

onde  $B \in R^{m \times n}$  é uma matriz constante

Definindo

$$y = x - \tilde{x} \quad (6.5)$$

como o desvio da trajetória do sistema (6.1) da trajetória desejada, e admitindo (6.2)-(6.4), chega-se à equação em desvios:

$$\dot{y} = Ay + g(x) - g(\tilde{x}) + Bz \quad (6.6)$$

Assumindo que

$$g(x) - g(\tilde{x}) = G(x, \tilde{x})(x - \tilde{x}) \quad (6.7)$$

Onde  $G(x, \tilde{x})$  é uma matriz limitada, cujos elementos dependem de  $y$  e  $\tilde{x}$ . Admitindo 6.7, o sistema 6.6 tem a seguinte forma

$$\dot{y} = A(t)y + G(y, \tilde{x})y + Bz \quad (6.8)$$

Rafikov e Balthazar (2004, 2005) formularam o seguinte teorema:

**Teorema:** Se existem as matrizes  $Q(t)$  e  $R(t)$ , definidas positivas, sendo  $Q(t)$  simétrica, tais que a matriz

$$\tilde{Q}(t) = Q(t) - G^T(y, \tilde{x})P(t) - P(t)G(y, \tilde{x}) \quad (6.9)$$

seja definida positiva para  $G$  limitada, então o controle com realimentação

$$z = -R^{-1}B^T P(t)y \quad (6.10)$$

é ótimo para transferir o sistema não linear (6.8) de qualquer estado inicial ao estado final

$$y(t_f) = 0 \quad (6.11)$$

minimizando o funcional

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} (y^T \tilde{Q} y + z^T R z) dt \quad (6.12)$$

onde a matriz simétrica  $P(t)$  é calculada através da equação algébrica não linear de Riccati.

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6.13)$$

satisfazendo a seguinte condição final

$$P(t_f) = 0 \quad (6.14)$$

**Prova:** Seja o controle linear com realimentação 6.10 com a matriz  $P$  determinada pela equação 6.13 que transfere o sistema não linear 6.8 de qualquer estado inicial ao estado final 6.11 minimizando o funcional 6.12 onde a matriz  $\tilde{Q}$  necessita ser determinada.

Conforme programação dinâmica (Bellman, 1957) se o mínimo do funcional (6.12) existe e  $V$  é uma função suave de condições iniciais, então ela satisfaz a equação de Hamilton – Jacobi – Bellman:

$$\min_z \left( \frac{dV}{dt} + y^T \tilde{Q} y + z^T R z \right) = 0 \quad (6.15)$$

Considera – se a função de Lyapunov

$$V = y^T P(t) y \quad (6.16)$$

onde  $P(t)$  é matriz positiva definida, simétrica e satisfaz a equação de Ricatti (6.13).

A derivada da função  $V$ , calculada na trajetória ótima com o controle (6.9) é

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{y}^T P(t) y + y^T \dot{P}(t) y + \dot{y}^T P(t) \dot{y} = \\ &= \left[ y^T A^T(t) + y^T G^T(y, \tilde{x}) - y^T P(t) B R^{-1} B^T \right] P(t) y + y^T \dot{P}(t) y + \dot{y}^T P(t) \left[ A(t) y + G(y, \tilde{x}) y + B R^{-1} B^T P(t) y \right] \end{aligned} \quad (6.17)$$

Então substituindo  $\dot{V}$  na equação de Hamilton – Jacobi – Bellman 6.15 obtém – se

$$y^T \left[ \dot{P} + A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + G^T(y, \tilde{x}) P + P G(y, \tilde{x}) + \tilde{Q} \right] y = 0 \quad (6.18)$$

deste modo tem – se que

$$\tilde{Q} = \dot{Q} - G^T(y, \tilde{x}) P - P G(y, \tilde{x}) \quad (6.19)$$

Note que para as matrizes definidas positivas  $\tilde{Q}$  e  $R$ , o sistema controlado 6.8 é assintoticamente estável, pois existe uma função de Lyapunov 6.16 cuja derivada é dado por  $\dot{V} = -y^T \tilde{Q}y - z^T R z$ , calculada nas trajetórias ótimas do sistema 6.8 e é definida negativa.

Observando que conforme a teoria de controle ótimo de sistemas lineares com funcional quadrático, a equação não-linear algébrica de Riccati (6.10) possui única solução positiva simétrica  $P > 0$  para quaisquer  $R > 0$  e  $Q \geq 0$  dadas, conclui-se então a demonstração do teorema.

Se o intervalo de tempo é infinito e  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  e  $R$  são matrizes com elementos constantes, a matriz positiva definida  $P$  é a solução da equação algébrica não linear de Riccati.

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6.20)$$

Recordando que para um intervalo de tempo infinito, o sistema 6.6 tem sido completamente controlável, isto é, a matriz de controlabilidade

$$K = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

deve ser não singular ou contém  $n$  vetores coluna linearmente independentes.

A seguir, discute – se a aplicação do controle ótimo no sistema com excitação ideal com o objetivo de demonstrar a eficiência desta técnica de controle.

## 6.2 Aplicação do controle linear ótimo para a excitação como sendo do tipo ideal

Aplicando agora o método proposto na seção anterior na equação do oscilador com memória de forma e excitação do tipo ideal. Lembrando que esta técnica de controle esta atuando sob a força externa do sistema e não sobre a temperatura. O oscilador com memória de forma com a lei de controle  $Z(t)$  é descrito pela seguinte equação diferencial não linear:

$$\ddot{u} + 2\mu \dot{u} + (\theta - 1)u - \alpha u^3 + \gamma u^5 = \delta \cos(\phi\tau) + Z(t) \quad (6.22)$$

onde  $\alpha$  e  $\gamma$  são parâmetros constantes que depende do tipo de material,  $\mu$  é o coeficiente de amortecimento,  $\theta$  é um parâmetro que depende da temperatura,  $\delta$  e  $\varpi$  são à amplitude e a frequência da excitação externa, respectivamente.

Reescrevendo a equação (6.22) em termos de variáveis de estado, vamos obter

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= \delta \cos(\phi\tau) + Z(t) - 2\mu u_2 + (\theta - 1)u_1 + \alpha u_1^3 - \gamma u_1^5 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Sendo a trajetória desejada representado pela função  $\tilde{u}$ . Então o regime desejado é descrito pela seguinte equação

$$\ddot{\tilde{u}} = -2\mu \dot{\tilde{u}} - (\theta - 1)\tilde{u} + \alpha \tilde{u}^3 - \gamma \tilde{u}^5 + \delta \cos(\phi\tau) + \tilde{z} \quad (6.24)$$

onde  $\tilde{z}$  é a função controle que mantém o oscilador na trajetória desejada.

Subtraindo 6.24 e 6.22 e definindo

$$y = \begin{bmatrix} u - \tilde{u} \\ \dot{u} - \dot{\tilde{u}} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

obtem – se o seguinte sistema,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -2\mu y_2 - (\theta - 1)y_1 - \alpha \tilde{u}^3 + \alpha(y_1 + \tilde{u})^3 + \gamma \tilde{u}^5 - \gamma(y_1 + \tilde{u})^5 + z \end{aligned} \quad (6.26)$$

onde  $z = Z - \tilde{z}$  é a função de controle ótimo.

A equação 6.8 neste caso tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\theta - 1) & -2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha(y_1 + \tilde{u})^2 + \alpha(y_1 + \tilde{u})\tilde{u} + \alpha\tilde{u}^2 - \gamma(y_1 + \tilde{u})^4 - \gamma(y_1 + \tilde{u})^3\tilde{u} - 4\gamma\tilde{u}^4 - \gamma\tilde{u}^2 y_1^2 - 3\gamma y_1 \tilde{u}^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z \end{aligned} \quad (6.27)$$

O sistema 6.27 esta na forma da equação 6.8, note que a matriz  $A$  é uma matriz em que os coeficientes são termos lineares, que depende do parâmetro de temperatura  $\theta$  e do coeficiente de amortecimento  $\mu$ .

No terceiro capítulo desta dissertação, foi encontrada através do método das múltiplas escalas, uma trajetória periódica para o oscilador dado por

$$u = a \cos(\varpi\tau - \psi) - \varepsilon \frac{\alpha}{32(\theta-1)} a^3 \cos(3\varpi\tau - 3\psi) + 0(\varepsilon^2)$$

onde a amplitude  $a$  e a  $\psi$  são governado por

$$\begin{cases} a' = -a\mu + \frac{\delta}{2\sqrt{\theta-1}} \sin \psi \\ a\psi' = a\sigma - \frac{10a^5\gamma}{32\sqrt{\theta-1}} + \frac{15a^5\alpha^2}{256(\sqrt{\theta-1})^3} + \frac{\delta}{2\sqrt{\theta-1}} \cos \psi \end{cases}$$

Como a equação de movimento só admite valores para  $\theta > 1$ , adota – se então os seguintes valores  $\theta = 2$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 0.1$  e  $\varpi = 1$ . Desta forma a trajetória desejada no estado estacionário é uma órbita periódica dado por

$$\tilde{u} = 0.1701 \cos(\tau - 0.03402) - 0.00002 \cos(3\tau - 0.10206) \quad (6.28)$$

A seguir, estuda – se a eficácia do controle quando o sistema se encontra na fase martensítica.

## 6.2.1 Análise da fase martensítica estável na liga

Para baixas temperaturas, um material com memória de forma pode aparentemente ser deformado plasticamente, mas esta deformação plástica pode ser recuperada pelo aumento de temperatura.

Nesta seção considerando então uma temperatura constante ( $T < T_M$ ), onde a fase martensítica é estável, por exemplo, adotando – se o valor de  $\theta = 0.7$

Antes de mostrar a validade do método de controle, deve – se provar que o oscilador apresenta movimento caótico para  $\theta = 0.7$ , desta forma considerando os valores da tabela 3.3, e  $\delta = 1$ ,  $\mu = 0.1$  tem – se que a equação 6.22 sem o controle possui uma dinâmica caótica mostrado na figura 6.1, onde a natureza do movimento caótico é confirmada na figura 6.1(b) através do espectro de frequência.

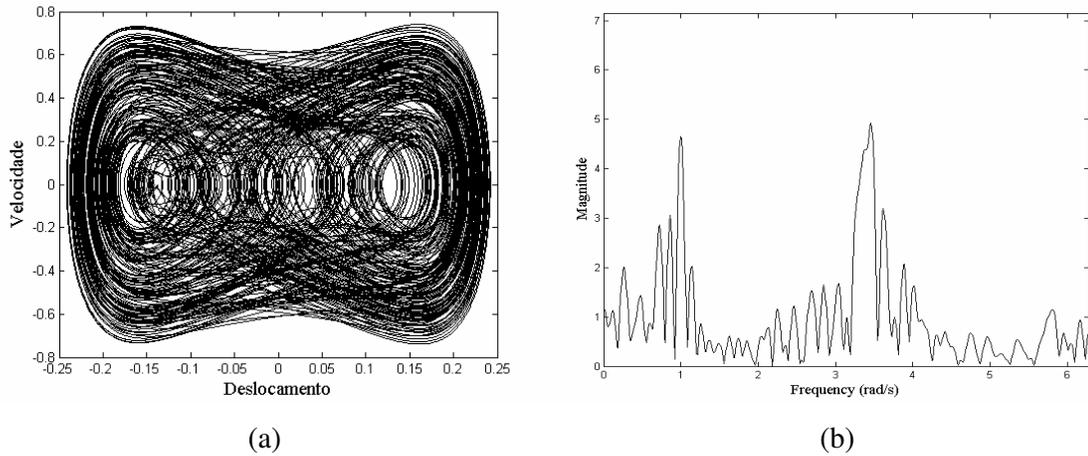


Figura 6.1: Dinâmica caótica do oscilador com memória de forma para uma excitação do tipo ideal, (a) Plano de Fase, (b) Espectro de frequência para  $\theta = 0.7$

Para os parâmetros  $\theta = 0.7$  e  $\mu = 0.1$  a matriz  $A$  tem a seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & -0.2 \end{bmatrix}, \text{ e a matriz } B \text{ é considerada como } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A equação 6.28 é a trajetória periódica desejada para a aplicação do controle. A verificação da controlabilidade do sistema é o teste do posto, onde o sistema (6.23) é completamente controlável, se e somente se, a matriz  $K = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ , tiver posto igual a  $n$ . Neste caso o par de matrizes é dito controlável e  $K$  é chamada matriz de controlabilidade para o par de matrizes  $[A, B]$ .

Assim, a matriz  $K$  é da seguinte forma,  $K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.2 \end{bmatrix}$ , a matriz  $K$  possui posto igual a dois, portanto o sistema é controlável.

Logo, admitindo que

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1]$$

obtem – se

$$P = \begin{bmatrix} 2.0111 & 1.3440 \\ 1.3440 & 1.9005 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação algébrica de Riccati 6.20 através da função LQR do software MATLAB® a função de controle ótimo  $z$  tem a seguinte forma

$$z = -1.3440y_1 - 1.9005y_2 \quad (6.29)$$

O movimento periódico do sistema controlado é apresentado na figura 6.2. O comportamento do plano de fase é ilustrado na figura 6.2(a), enquanto que na figura 6.2(b) é mostrado o espectro de frequência do sistema controlado, comprovando que o sistema é periódico, visto que é encontrado somente um pico de frequência.

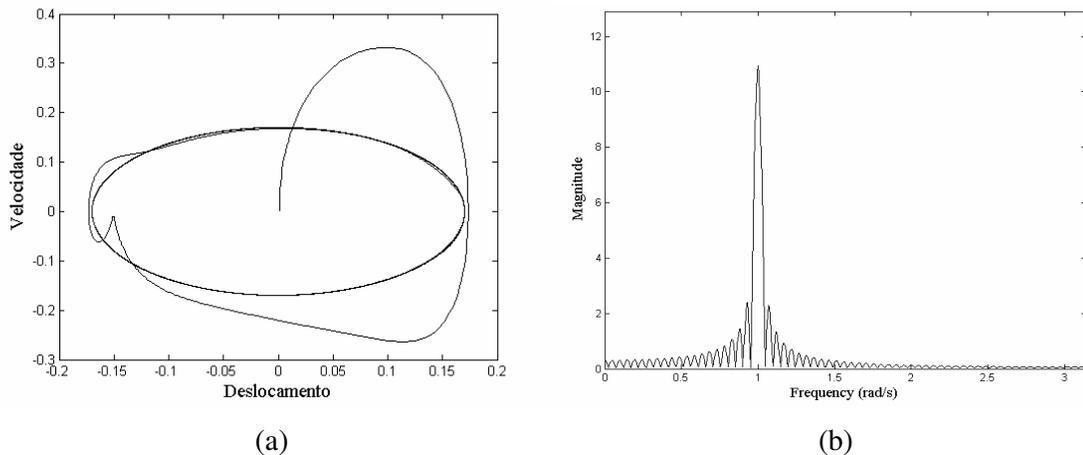


Figura 6.2: (a) Plano de fase do oscilador controlado e (b) espectro de frequência associado ao movimento para  $\theta = 0.7$

A trajetória no histórico no tempo do sistema sem controle e do sistema controlado é mostrado na figura 6.3, onde é provada a eficiência da técnica aplicada para o controle.

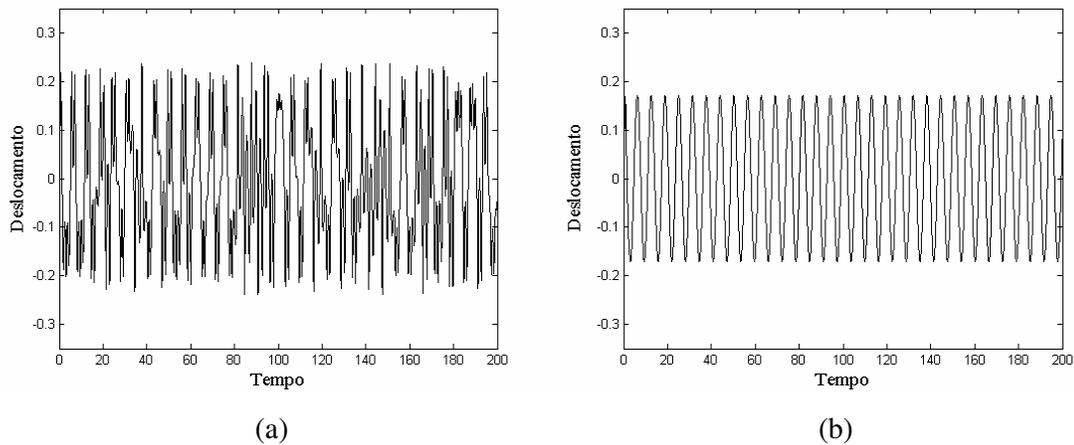


Figura 6.3: Histórico no tempo: (a) sistema não controlado e (b) sistema controlado para  $\theta = 0.7$

Agora a seção de Poincaré é utilizada para caracterizar a dinâmica do sistema. Quando o controle não está ativo no sistema, a seção de Poincaré é mostrada na figura 6.4(a) ilustrando o comportamento caótico do sistema com o aparecimento de um atrator estranho, mas quando o controle é ativado, o atrator caótico é substituído por um atrator periódico, representado na figura 6.4(b).

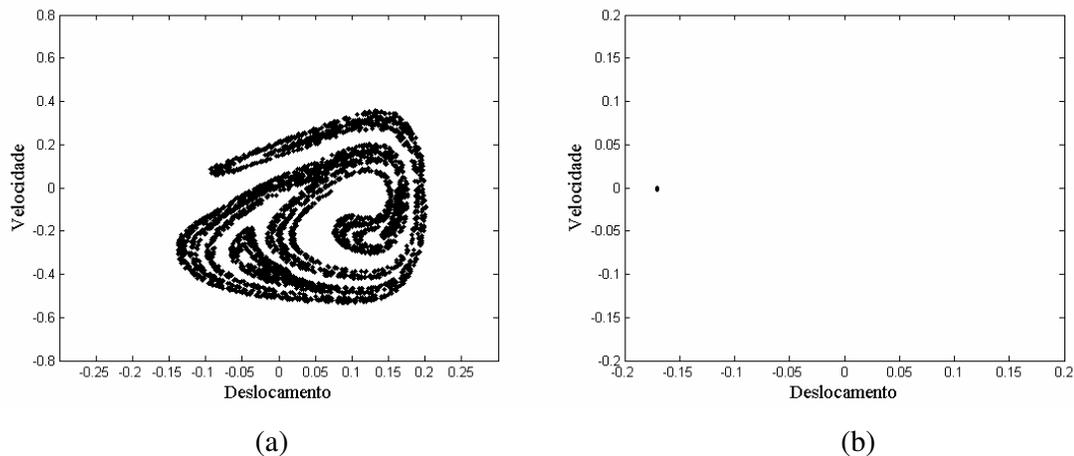


Figura 6.4: Seção de Poincaré: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico)

Para caracterizar qualitativamente os atratores envolvidos neste estudo, são calculados os expoentes de Lyapunov, usando o método clássico descrito por, Wolf et. al. (1985).

Essencialmente, os expoentes de Lyapunov estimam a sensibilidade das condições iniciais calculando a taxa exponencial de divergência ou convergência de órbitas próximas. Através do sinal dos expoentes de Lyapunov pode – se distinguir entre pontos fixos, movimentos periódicos, quase – periódicos e caóticos. A tabela 6.1 contém os valores dos expoentes de Lyapunov para o atrator caótico não controlado e o atrator periódico controlado. Como esperado, para o atrator caótico, um dos expoentes é positivo, enquanto para o atrator periódico, não há expoentes positivos.

Tabela 6.1: Expoentes de Lyapunov para  $\theta = 0.7$

Sistema	$\theta$	Tipo de atrator	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$	$\vartheta_3$
Não controlado	0.7	Caótico	0	0.231793	-0.331791
Controlado	0.7	Periódico	0	-0.747851	-1.352649

A seguir, discute – se a implementação da técnica de controle considerando o comportamento pseudoelástico da liga.

## 6.2.2 Análise do comportamento pseudoelástico do oscilador (fase austenítica estável)

No efeito de pseudoelasticidade, a recuperação da forma esta atrelada a retirada da tensão externa e ocorre sempre a altas temperaturas.

O foco agora esta na análise do efeito pseudoelástico, considerando então uma temperatura constante  $T > T_A$ , onde  $\theta = 2$ , neste caso a liga é completamente austenítica.

A figura 6.5 mostra o comportamento do sistema para  $\theta = 2$ ,  $\delta = 1$  e  $\mu = 0.1$ . A figura 6.5(a) mostra o plano de fase para o movimento do oscilador, quando não há atuação do controle no sistema, assim para esta temperatura é encontrado um movimento caótico, que é comprovado pelo espectro de frequência da figura 6.5(b).

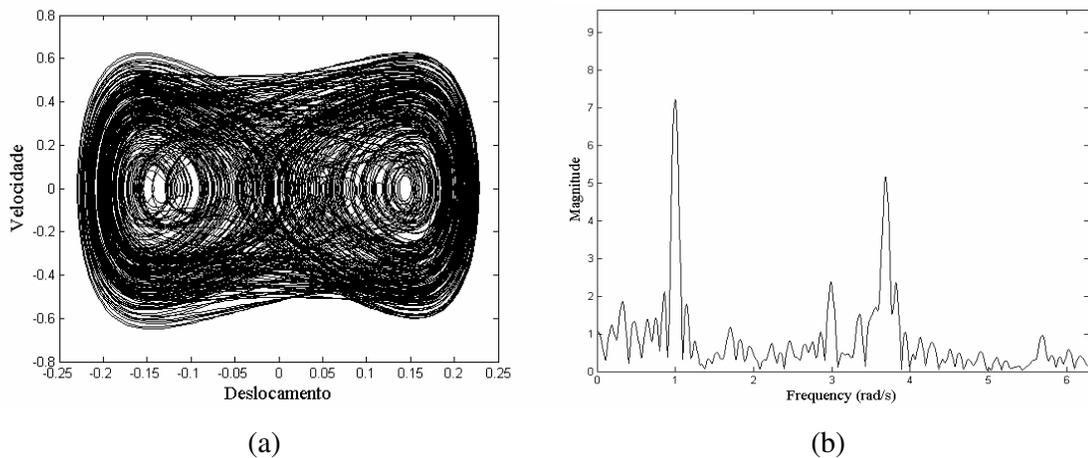


Figura 6.5: Dinâmica caótica do oscilador com memória de forma para uma excitação do tipo ideal, (a) Plano de Fase, (b) Espectro de frequência para  $\theta = 2$

Para os parâmetros  $\theta = 2$  e  $\mu = 0.1$ , a matriz  $A$  pode ser assumida da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.2 \end{bmatrix}, \text{ e a matriz } B \text{ é considerada como sendo } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz  $K$  é da seguinte forma,  $K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.2 \end{bmatrix}$ , tem-se que o posto da matriz  $K$  é igual a dois, verificando assim que o sistema é controlável.

Logo, admitindo que

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1]$$

tem-se que

$$P = \begin{bmatrix} 1.8925 & 0.4142 \\ 0.4142 & 1.3323 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação algébrica de Riccati 6.20 através da função LQR do software MATLAB® a função de controle ótimo  $z$  tem a seguinte forma

$$z = -0.4142y_1 - 1.3323y_2 \quad (6.30)$$

Usando o controle linear com realimentação, o movimento caótico do sistema original pode ser controlado para um sistema periódico de período  $\pi$  como mostra a figura 6.6. Na figura 6.6(a) é mostrado o plano de fase do sistema controlado e na figura 6.6(b) é ilustrado o espectro de frequência do movimento periódico controlado.

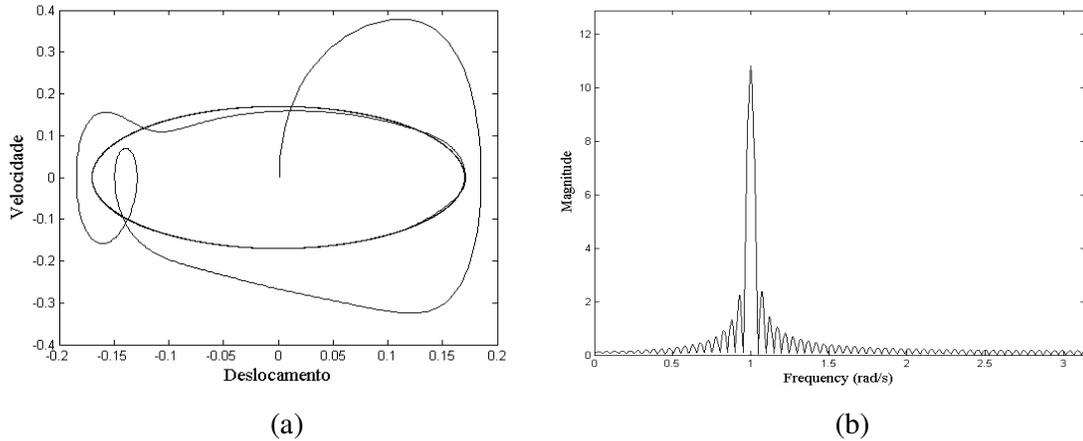


Figura 6.6: (a) Plano de fase do oscilador controlado e (b) espectro de frequência associado ao movimento para  $\theta = 2$

Aqui é mostrado numericamente que o método de controle proposto é eficiente para eliminar o movimento caótico do sistema. O resultado no histórico no tempo para a resposta do oscilador sem o controle linear com realimentação é mostrado na figura 6.7(a), enquanto na figura 6.7(b) mostra a resposta do sistema com a aplicação do controle.

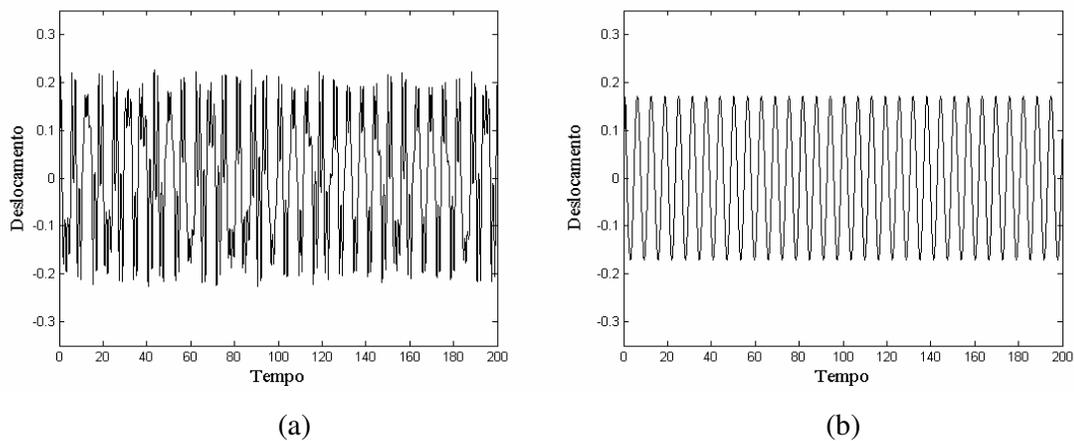


Figura 6.7: Histórico no tempo: (a) sistema não controlado e (b) sistema controlado para  $\theta = 2$

Duas seções características de Poincaré para o sistema controlado e não controlado são apresentados na figura 6.8, enquanto os valores dos expoentes de Lyapunov são apresentados na tabela 6.2.

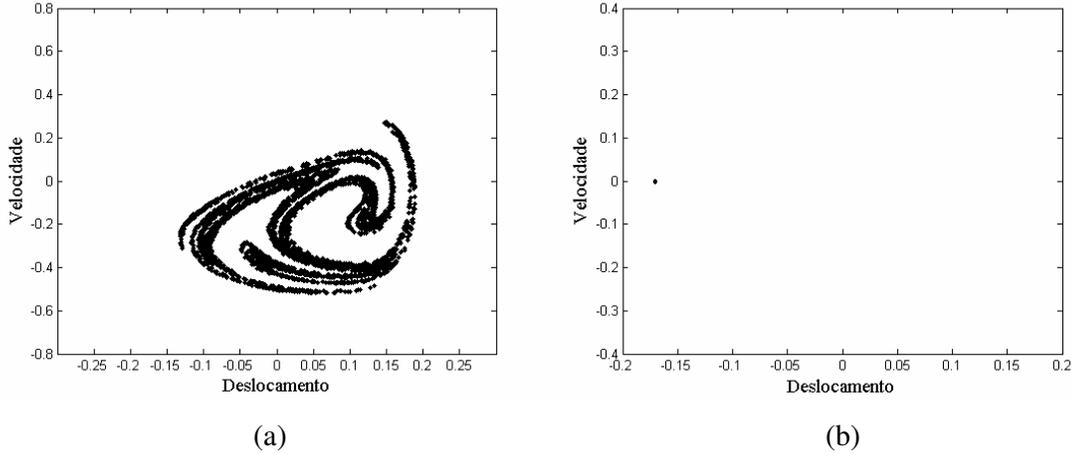


Figura 6.8: Seção de Poincaré: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico)

O atrator estranho formado pela seção de Poincaré (ver figura 6.8(a)) obtido para o sistema não controlado tem uma estrutura fractal complicada apresentando características do movimento caótico. O sinal positivo do expoente de Lyapunov mostrado na tabela 6.2 para  $\theta = 2$ , confirma que o sistema vibra caoticamente. O atrator da figura 6.8(b) obtido para o sistema controlado tem um comportamento diferente do anterior. Neste caso nenhum dos expoentes de Lyapunov são positivo (ver tabela 6.2), portanto mostrando que o sistema oscila periodicamente.

Tabela 6.2: Expoentes de Lyapunov para  $\theta = 2$

Sistema	$\theta$	Tipo de atrator	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$	$\vartheta_3$
Não controlado	2	Caótico	0	0.083087	-0.283086
Controlado	2	Periódico	0	-0.765207	-0.767093

A seguir, o controle ótimo é empregado no sistema não ideal para o caso II com o objetivo de controlar o sistema para valores de  $\xi_1$  próximos a região de ressonância.

### 6.3 Aplicação do controle linear ótimo para a excitação não - ideal

Novamente aqui é aplicado a técnica de controle linear feedback, Rafikov e Balthazar (2004, 2005), mas agora para o sistema não ideal. Aqui será aplicado o controle para os valores do caso II, pois é encontrado o movimento caótico somente neste caso. A equação de movimento do sistema não ideal é dado por

$$\begin{cases} \ddot{u} = r_3 [\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi] - 2\mu \dot{u} - (\theta - 1)u + \alpha u^3 - \gamma u^5 \\ \ddot{\phi} = \xi_1 - \xi_2 \dot{\phi} + r_4 \ddot{u} \cos \phi \end{cases}$$

Usando novas variáveis, definidas por,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = \dot{u}$ ,  $u_3 = \phi$ ,  $u_4 = \dot{\phi}$ , o sistema acima, pode ser reescrito, na forma de estado, como;

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = r_3 [\dot{u}_4 \cos u_3 - u_4^2 \sin u_3] + \alpha u_1^3 - \gamma u_1^5 - (\theta - 1)u_1 - 2\mu u_2 \\ \dot{u}_3 = u_4 \\ \dot{u}_4 = \xi_1 - \xi_2 u_4 + r_4 \dot{u}_2 \cos u_3 \end{cases}$$

Realizando algumas manipulações algébricas, obtém - se, as seguintes equações diferenciais de primeira ordem;

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = \frac{1}{1 - r_3 r_4 \cos^2 u_3} \left[ r_3 \left( (\xi_1 - \xi_2 u_4) \cos u_3 - u_4^2 \sin u_3 \right) + \alpha u_1^3 - \gamma u_1^5 - (\theta - 1)u_1 - 2\mu u_2 \right] \\ \dot{u}_3 = u_4 \\ \dot{u}_4 = \frac{\xi_1}{1 - r_3 r_4 \cos^2 u_3} + \frac{r_4 \cos u_3}{1 - r_3 r_4 \cos^2 u_3} \left[ \alpha u_1^3 - \gamma u_1^5 - (\theta - 1)u_1 - 2\mu u_2 - \frac{\xi_2 u_4}{r_4 \cos u_3} - r_3 u_4^2 \sin u_3 \right] \end{cases}$$

O sistema não ideal com memória de forma controlado pode ser descrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{1}{1-r_3 r_4 \cos^2 u_3} \left[ r_3 \left( (\xi_1 - \xi_2 u_4) \cos u_3 - u_4^2 \sin u_3 \right) + \alpha u_1^3 - \gamma u_1^5 - (\theta - 1) u_1 - 2\mu u_2 \right] \\ u_4 \\ \frac{\xi_1}{1-r_3 r_4 \cos^2 u_3} + \frac{r_4 \cos u_3}{1-r_3 r_4 \cos^2 u_3} \left[ \alpha u_1^3 - \gamma u_1^5 - (\theta - 1) u_1 - 2\mu u_2 - \frac{\xi_2 u_4}{r_4 \cos u_3} - r_3 u_4^2 \sin u_3 \right] \end{bmatrix} + BZ \quad (6.31)$$

onde  $B \in R^{n \times m}$  é uma matriz constante,  $Z \in R^m$  é o vetor controle,  $m \leq 4$ ,  $n = 4$

Considerando a trajetória desejada como sendo um vetor  $\tilde{u} = [\tilde{u}_1(t) \quad \tilde{u}_2(t) \quad \tilde{u}_3(t) \quad \tilde{u}_4(t)]^T$ , que satisfaz a seguinte equação

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}}_1 \\ \dot{\tilde{u}}_2 \\ \dot{\tilde{u}}_3 \\ \dot{\tilde{u}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \frac{1}{1-r_3 r_4 \cos^2 \tilde{u}_3} \left[ r_3 \left( (\xi_1 - \xi_2 \tilde{u}_4) \cos \tilde{u}_3 - \tilde{u}_4^2 \sin \tilde{u}_3 \right) + \alpha \tilde{u}_1^3 - \gamma \tilde{u}_1^5 - (\theta - 1) \tilde{u}_1 - 2\mu \tilde{u}_2 \right] \\ \tilde{u}_4 \\ \frac{\xi_1}{1-r_3 r_4 \cos^2 \tilde{u}_3} + \frac{r_4 \cos \tilde{u}_3}{1-r_3 r_4 \cos^2 \tilde{u}_3} \left[ \alpha \tilde{u}_1^3 - \gamma \tilde{u}_1^5 - (\theta - 1) \tilde{u}_1 - 2\mu \tilde{u}_2 - \frac{\xi_2 \tilde{u}_4}{r_4 \cos \tilde{u}_3} - r_3 \tilde{u}_4^2 \sin \tilde{u}_3 \right] \end{bmatrix} + B \tilde{z} \quad (6.32)$$

onde  $\tilde{z}$  é o vetor controle que mantém o sistema não ideal na trajetória desejada.

Subtraindo (6.32) de (6.31) o sistema não ideal com memória de forma pode ser expresso como

$$\dot{y} = A y + h(y) + B z \quad (6.33)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} u_1 - \tilde{u}_1 \\ u_2 - \tilde{u}_2 \\ u_3 - \tilde{u}_3 \\ u_4 - \tilde{u}_4 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} Z_1 - \tilde{z}_1 \\ Z_2 - \tilde{z}_2 \\ Z_3 - \tilde{z}_3 \\ Z_4 - \tilde{z}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
h(y) = \frac{1}{1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)} & \left[ \begin{array}{l} -2y_1(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)) \qquad \qquad \qquad y_2(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)) \\ \\ \left[ r_3 \left( (\xi_1 - \xi_2(y_4 + \tilde{u}_4)) \cos(y_3 + \tilde{u}_3) - (y_4 + \tilde{u}_4)^2 \sin(y_3 + \tilde{u}_3) \right) \right. \\ \left. + \alpha(y_1 + \tilde{u}_1)^3 - \gamma(y_1 + \tilde{u}_1)^5 - (\theta - 1)(y_1 + \tilde{u}_1) - 2\mu(y_2 + \tilde{u}_2) \right] \\ - \frac{1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)}{1-r_3r_4 \cos^2 \tilde{u}_3} \left[ r_3 \left( (\xi_1 - \xi_2 \tilde{u}_4) \cos \tilde{u}_3 - \tilde{u}_4^2 \sin \tilde{u}_3 \right) \right. \\ \left. + \alpha \tilde{u}_1^3 - \gamma \tilde{u}_1^5 - (\theta - 1) \tilde{u}_1 - 2\mu \tilde{u}_2 \right] - y_1(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)) \qquad \qquad \qquad 0 \\ \\ y_1(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)) \qquad \qquad \qquad y_2(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)) \\ \\ \xi_1 + r_4 \cos(y_3 + \tilde{u}_3) \left[ \alpha(y_1 + \tilde{u}_1)^3 - \gamma(y_1 + \tilde{u}_1)^5 - (\theta - 1)(y_1 + \tilde{u}_1) - 2\mu(y_2 + \tilde{u}_2) \right. \\ \left. - 2\mu(y_2 + \tilde{u}_2) - \frac{\xi_2(y_4 + \tilde{u}_4)}{r_4 \cos(y_3 + \tilde{u}_3)} - \frac{\xi_2(y_4 + \tilde{u}_4)}{r_4 \cos(y_3 + \tilde{u}_3)} - r_3(y_4 + \tilde{u}_4)^2 \sin(y_3 + \tilde{u}_3) \right] \\ - \frac{\xi_1(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3))}{1-r_3r_4 \cos^2 \tilde{u}_3} + \frac{r_4 \cos \tilde{u}_3(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3))}{1-r_3r_4 \cos^2 \tilde{u}_3} \\ \left. \left[ \alpha \tilde{u}_1^3 - \gamma \tilde{u}_1^5 - (\theta - 1) \tilde{u}_1 - 2\mu \tilde{u}_2 - \frac{\xi_2 \tilde{u}_4}{r_4 \cos \tilde{u}_3} - r_3 \tilde{u}_4^2 \sin \tilde{u}_3 \right] \qquad \qquad \qquad 0 \right. \\ \\ y_3(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)) \qquad \qquad \qquad 0 \\ \\ -y_3(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)) \qquad \qquad \qquad -y_4(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)) \\ \\ -3y_3(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)) \qquad \qquad \qquad y_4(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)) \\ \\ -2y_3(1-r_3r_4 \cos^2(y_3 + \tilde{u}_3)) \qquad \qquad \qquad 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Desta forma considerando que as matrizes  $A$  e  $B$  são da seguinte forma,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

Escolhendo

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

obtem – se

$$P = \begin{bmatrix} 4.3598 & 0.4660 & 2.2468 & 0.2245 \\ 0.4660 & 1.1550 & 1.6008 & 0.2962 \\ 2.2428 & 1.6008 & 6.5190 & 0.6921 \\ 0.2245 & 0.2962 & 0.6921 & 0.9876 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Resolvendo a equação de Riccati (6.20) através da função LQR no MATLAB<sup>TM</sup>, segue que a função de controle ótimo  $z$  é dado por

$$z = - \begin{bmatrix} 4.3598 & 0.4660 & 2.2468 & 0.2245 \\ 0.4660 & 1.1550 & 1.6008 & 0.2962 \\ 2.2428 & 1.6008 & 6.5190 & 0.6921 \\ 0.2245 & 0.2962 & 0.6921 & 0.9876 \end{bmatrix} y \quad (6.37)$$

Nas próximas seções as simulações numéricas utilizarão o controle linear com retroalimentação da equação 6.37 para verificar a eficiência do método utilizado.

### 6.3.1 Aplicação do controle na fase martensítica da liga

No capítulo 4 desta dissertação foi mostrado que na fase martensítica para os valores de  $\theta = 0.7$  e  $\theta = 0.9$  é possível encontrar movimentos caóticos para diferentes valores de  $\xi_1$ .

No quinto capítulo desta dissertação, foi encontrada através do método da média, uma trajetória periódica para o sistema não ideal dado por

$$\tilde{u} = a \cos(\phi + \beta)$$

onde  $a$ ,  $\beta$  e  $\phi$  são governados pelas equações (5.57) até (5.59).

Nesta seção, a trajetória periódica desejada foi encontrada considerando as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = a \cos(\dot{\phi}_M t + \beta) \\ \tilde{u}_2 = \dot{\tilde{u}}_1 \\ \tilde{u}_3 = \dot{\phi}_M t \\ \tilde{u}_4 = \dot{\tilde{u}}_3 \end{cases} \quad (6.38)$$

onde  $\dot{\phi}_M$  é a frequência média do motor no estado estacionário.

Assim para os valores do sistema no caso II e para  $\theta = 1.5$ ,  $\mu = 0.01$  e  $\xi_1 = 1.05$  (que é o valor na região de ressonância), no estado estacionário tem – se que a trajetória periódica desejada é dada por

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} 0.1357 \cos(0.6999t + 4.703) \\ -0.095 \sin(0.6999t + 4.703) \\ 0.6999t \\ 0.6999 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

Usando o controle ótimo, dado pela equação 6.37, o movimento caótico do sistema não ideal para  $\theta = 0.7$  e  $\xi_1 = 0.7$ , mostrado na figura 4.23, pode ser controlado para um sistema periódico de período – 1, onde a trajetória periódica desejada considerada é dada pela equação 6.39. A figura 6.9 mostra a dinâmica do sistema não ideal controlado para  $\theta = 0.7$  e  $\xi_1 = 0.7$ , neste caso a frequência do motor esta acima da região de ressonância.

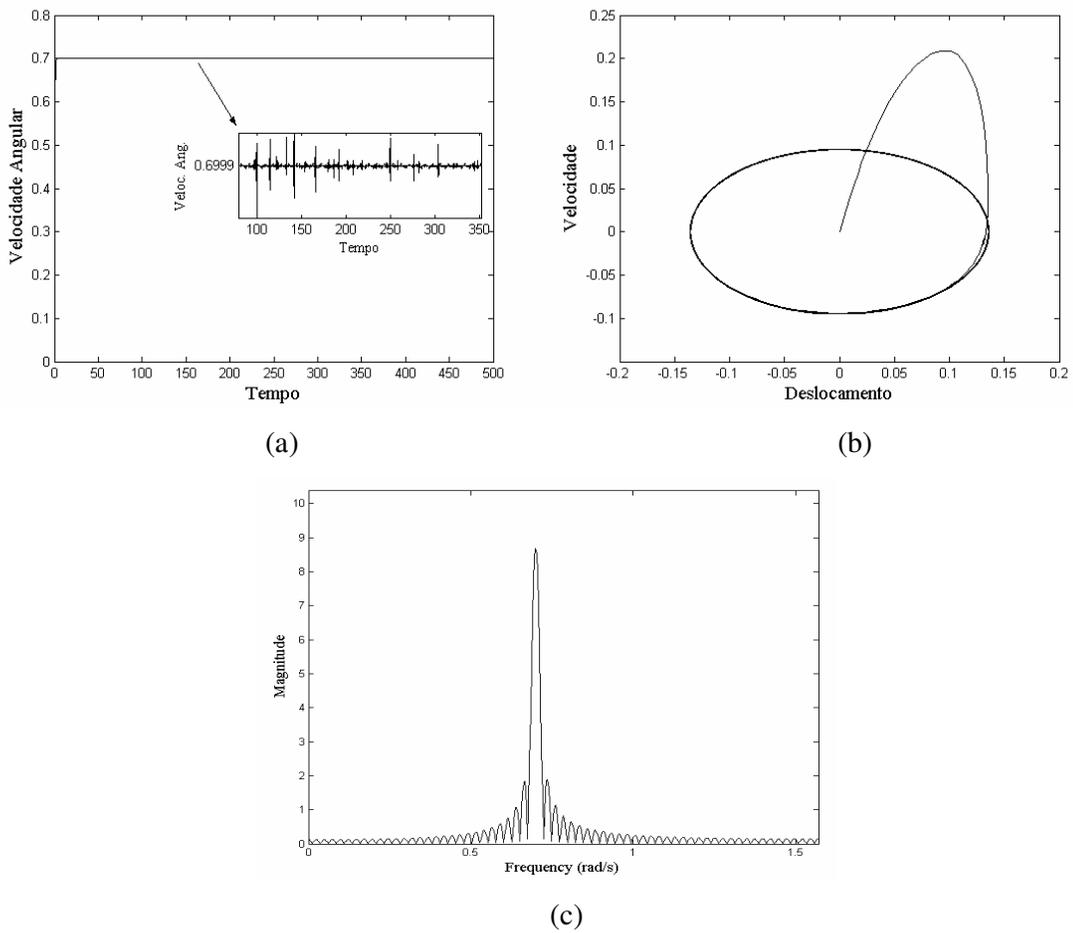


Figura 6.9: Sistema não ideal controlado: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase e (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.7$  e  $\xi_1 = 0.7$ .

Aqui é mostrado numericamente que o método de controle proposto é eficiente para eliminar o movimento caótico do sistema. O resultado no histórico no tempo para a resposta do sistema sem o controle linear com retroalimentação é mostrado na figura 6.10(a), enquanto na figura 6.10(b) mostra a resposta do sistema não ideal com a aplicação do controle.

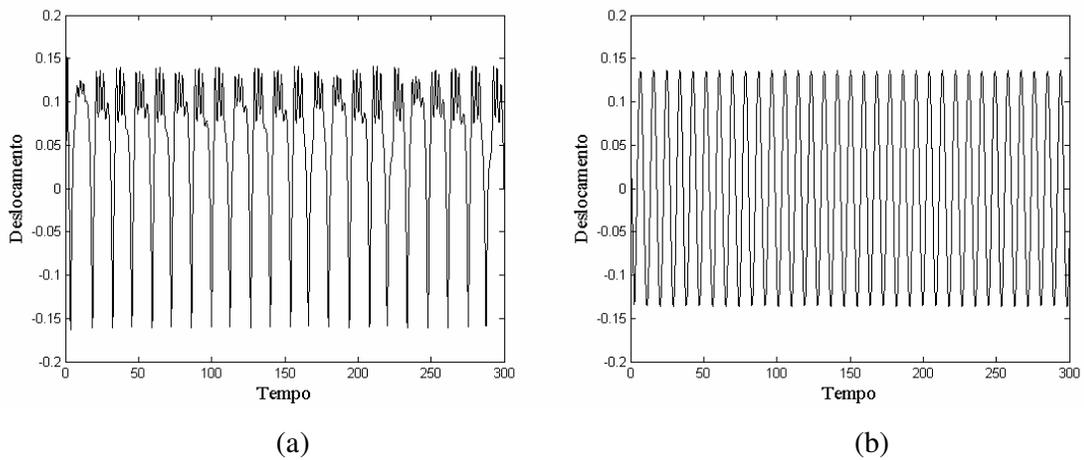


Figura 6.10: Histórico no tempo do sistema não ideal: (a) sistema não controlado e (b) sistema controlado para  $\theta = 0.7$  e  $\xi_1 = 0.7$ .

Resultados numéricos são apresentados para a seção de Poincaré do sistema na figura 6.11. Na figura 6.11(a) é ilustrada a seção de Poincaré do sistema não controlado, mostrando a existência de um atrator estranho, já na figura 6.11(b), onde o sistema agora é controlado, a seção de Poincaré apresenta somente um ponto ilustrando o comportamento periódico do sistema.

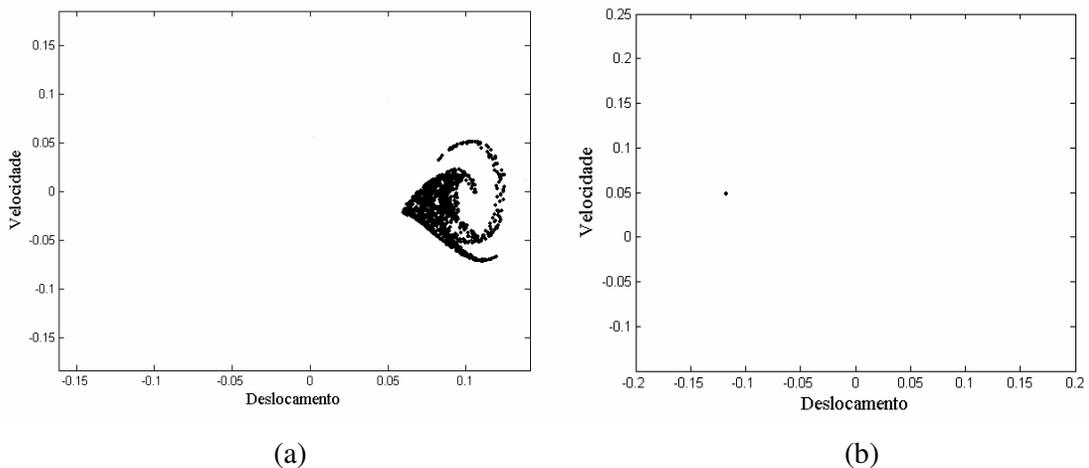


Figura 6.11: Seção de Poincaré do sistema não ideal: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico) para  $\theta = 0.7$  e  $\xi_1 = 0.7$ .

Agora serão feitas simulações do sistema não ideal para  $\theta=0.9$ . Na análise do capítulo 4 foi demonstrado que para  $\theta=0.9$  e  $\xi_1=1.75$  o sistema não ideal possui um comportamento hipercaótico (ver figura 4.35). Agora será realizado o controle para esta situação. Assim utilizando os valores do caso II e para  $\theta=2.5$ ,  $\mu=0.01$  e  $\xi_1=2.35$  (que é o valor na região de ressonância), no estado estacionário, obtém-se outra trajetória periódica desejada para o controle dada por

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} 0.179 \cos(0.6999t + 4.703) \\ -0.125 \sin(0.6999t + 4.703) \\ 0.6999t \\ 0.6999 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Utilizando o controle ótimo, da equação 6.37, o movimento hipercaótico do sistema não ideal para  $\theta=0.9$  e  $\xi_1=1.75$ , mostrado na figura 4.35, pode ser controlado para um sistema periódico de período – 1, onde a trajetória periódica desejada é considerada na equação 6.40. A figura 6.12 mostra a dinâmica do sistema não ideal controlado para  $\theta=0.9$  e  $\xi_1=1.75$ , neste caso a frequência do motor esta acima da região de ressonância.

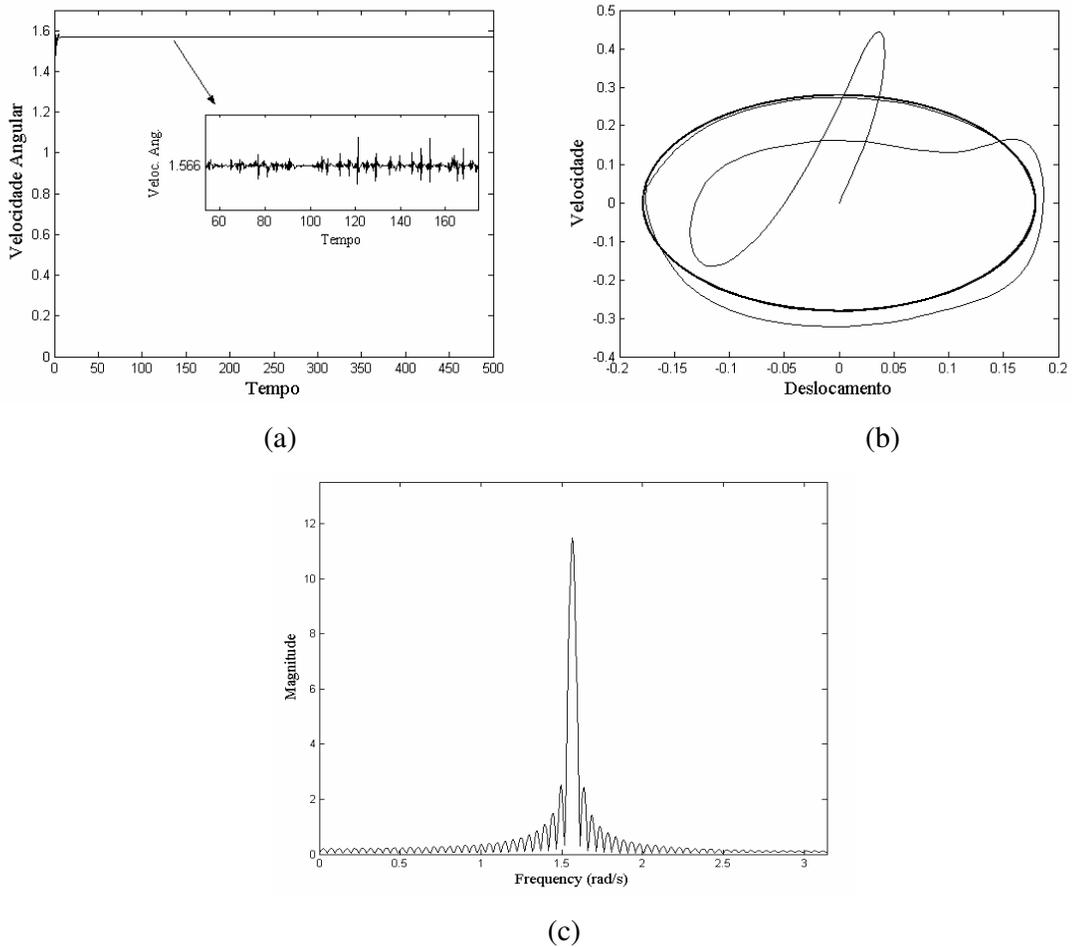


Figura 6.12: Sistema não ideal controlado: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase e (c) espectro de frequência para  $\theta = 0.9$  e  $\xi_1 = 1.75$ .

Agora a seção de Poincaré é utilizada para caracterizar a dinâmica do sistema. Quando o controle não está ativo no sistema, a seção de Poincaré é mostrada na figura 6.13(a) ilustrando o comportamento hipercaótico do sistema com o aparecimento de um atrator estanho, mas quando o controle é ativado, o atrator caótico é substituído por um atrator periódico, representado na figura 6.13(b).

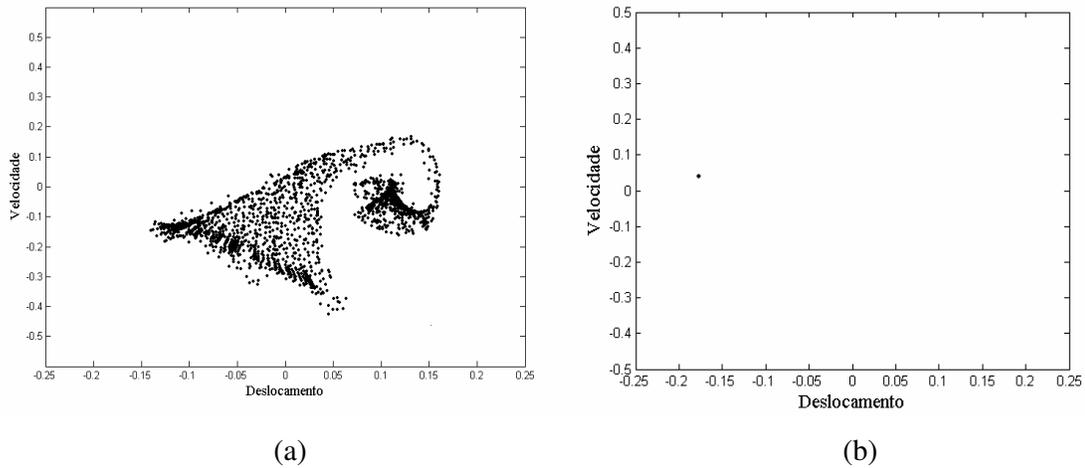


Figura 6.13: Seção de Poincaré do sistema não ideal: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico) para  $\theta=0.9$  e  $\xi_1=1.75$ .

A seguir, o controle ótimo é empregado em temperaturas intermediárias, onde as fases martensítica e austenítica é estável.

### 6.3.2 Aplicação do controle na fase martensítica e austenítica da liga

Nesta seção é aplicada a técnica de controle quando a fase martensítica e austenítica são ambas estáveis na liga. Aqui adota – se o valor de  $\theta=1.03$ . Utilizando os seguintes valores do caso II e para  $\theta=1.03$ ,  $\mu=0.01$  e  $\xi_1=0.26$  (que é o valor na região de ressonância), no estado estacionário tem – se que a trajetória periódica desejada é dada por

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} 0.1066 \cos(0.1733t - 4.743) \\ -0.0185 \sin(0.1733t - 4.743) \\ 0.1733t \\ 0.1733 \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Utilizando o controle ótimo, da equação 6.37, o movimento caótico do sistema não ideal para  $\theta=1.03$  e  $\xi_1=1$ , mostrado na figura 4.42, pode ser controlado para um sistema periódico de período – 1, onde a trajetória periódica desejada é considerada na equação 6.41. O

comportamento dinâmico do sistema não ideal controlado para  $\theta=1.03$  e  $\xi_1=1$  é apresentado na figura 6.14. A figura 6.14(a) mostra que a velocidade angular do motor esta capturada pela região de ressonância do sistema, na figura 6.14(b) pode – se observar que a trajetória do sistema no plano de fase converge rapidamente para a órbita de controle desejada e na figura 4.16(c) confirma que a órbita gerada pelo sistema controlado é periódica.

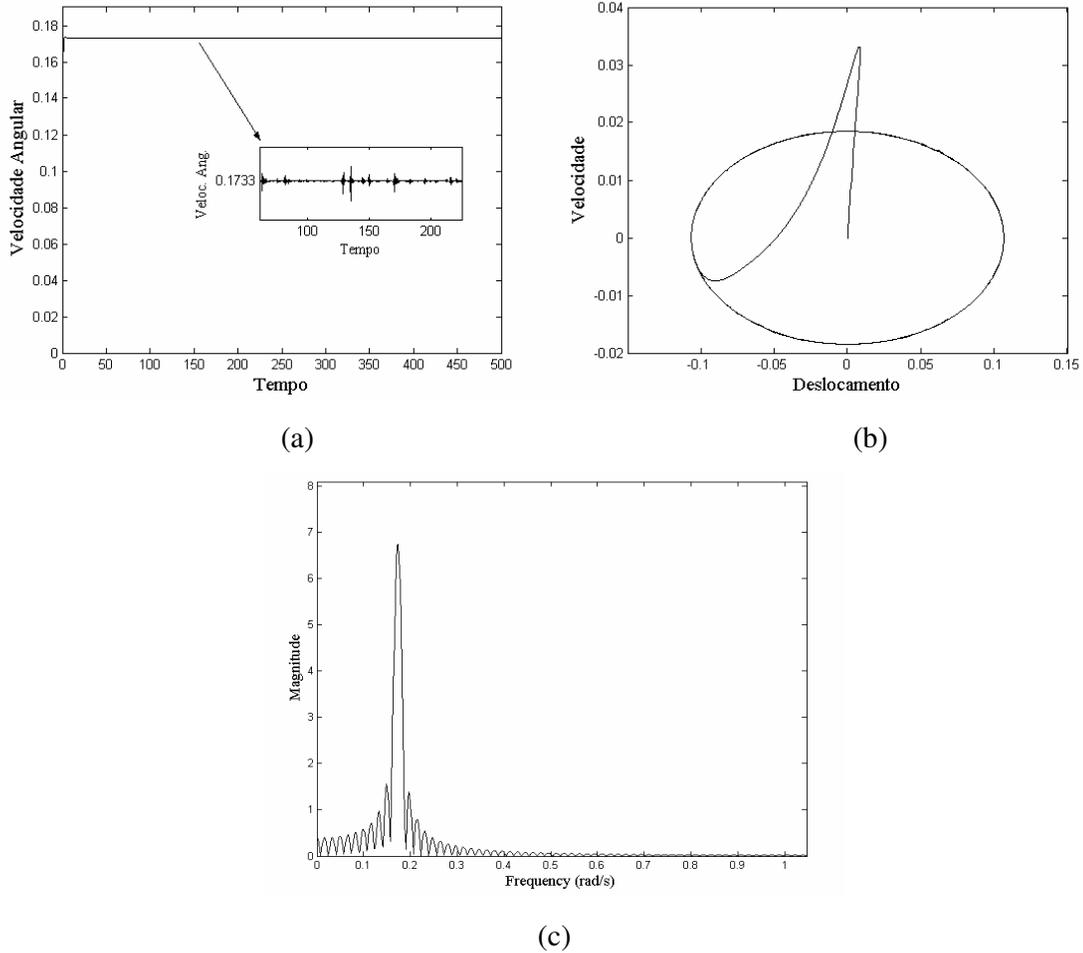


Figura 6.14: Sistema não ideal controlado: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase e (c) espectro de frequência para  $\theta=1.03$  e  $\xi_1=1$ .

A trajetória no histórico no tempo do sistema sem controle e do sistema controlado é mostrado na figura 6.15, onde é provada a eficiência da técnica aplicada para o controle.

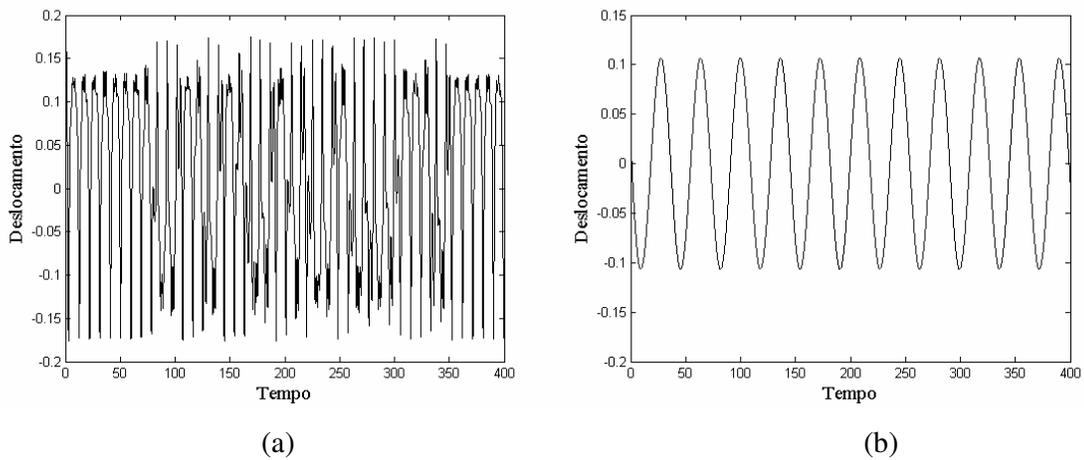


Figura 6.15: Histórico no tempo do sistema não ideal: (a) sistema não controlado e (b) sistema controlado para  $\theta = 1.03$  e  $\xi_1 = 1$ .

Para os valores de  $\theta = 1.03$  e  $\xi_1 = 1$  é mostrado na figura 6.16 à seção de Poincaré. Na figura 6.16(a) o sistema original sem controle apresenta um atrator estranho, caracterizando o comportamento caótico do sistema, enquanto na figura 6.16(b) o sistema não ideal controlado apresenta um único ponto, comprovando que o sistema tem um comportamento periódico.

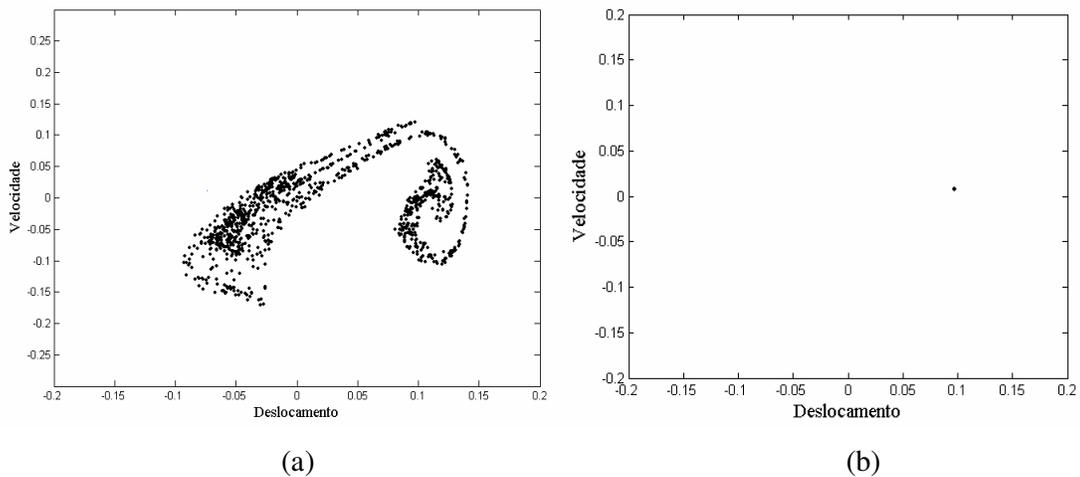


Figura 6.16: Seção de Poincaré do sistema não ideal: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico) para  $\theta = 1.03$  e  $\xi_1 = 1$ .

A seguir, a técnica de controle ótimo será empregada em altas temperaturas, onde a fase austenítica é estável.

### 6.3.3 Aplicação do controle na fase austenítica da liga

Nesta seção são consideradas apenas temperaturas onde a fase austenítica é estável. As simulações desenvolvidas aqui apresentam as características da resposta dinâmica para os valores de  $\theta = 2$  e  $\theta = 3$ .

Utilizando os valores do caso II e para  $\theta = 2$ ,  $\mu = 0.01$  e  $\xi_1 = 1.5$  (que é o valor na região de ressonância), no estado estacionário, obtém-se outra trajetória periódica desejada para o controle dada por

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} 0.1515 \cos(0.9998t + 17.27) \\ -0.15146 \sin(0.9998t + 17.27) \\ 0.9998t \\ 0.9998 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

Utilizando o controle ótimo, da equação 6.37, o movimento caótico do sistema não ideal para  $\theta = 2$  e  $\xi_1 = 1.5$ , mostrado na figura 4.51, pode ser controlado para um sistema periódico de período  $-1$ , onde a trajetória periódica desejada é considerada na equação 6.42

Na figura 6.17(a) é mostrada a situação quando a frequência natural do sistema esta na região de ressonância. Na figura 6.17(b) nota-se que a trajetória do sistema no plano de fase converge para a órbita de controle desejada e na figura 4.16(c) o espectro de frequência apresenta somente um pico caracterizando o comportamento periódico do sistema controlado.

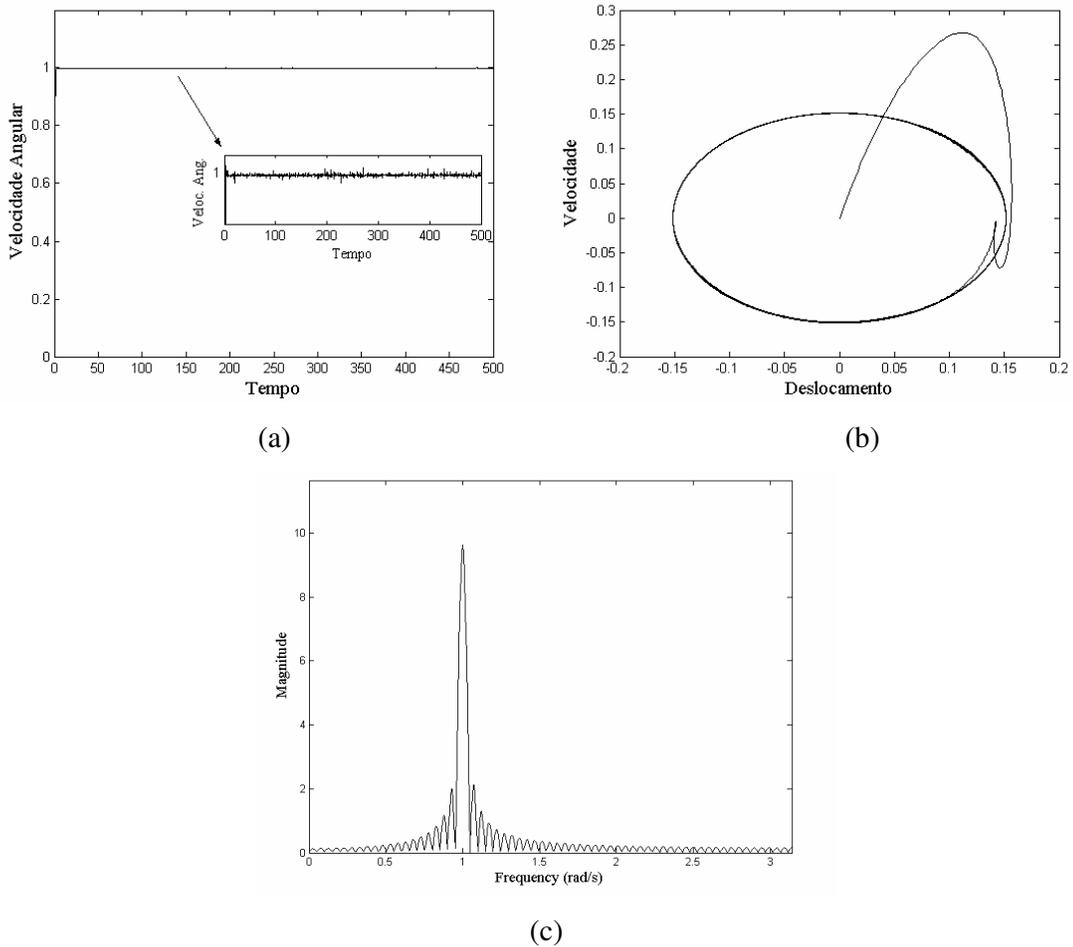


Figura 6.17: Sistema não ideal controlado: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase e (c) espectro de frequência para  $\theta = 2$  e  $\xi_1 = 1.5$ .

O atrator estranho formado pela seção de Poincaré (ver figura 6.18(a)) obtido para o sistema não controlado apresenta características do movimento caótico. O atrator da figura 6.18(b) obtido para o sistema controlado tem um comportamento diferente do anterior. Neste caso é encontrado somente um ponto na seção de Poincaré, portanto mostrando que o sistema oscila periodicamente.

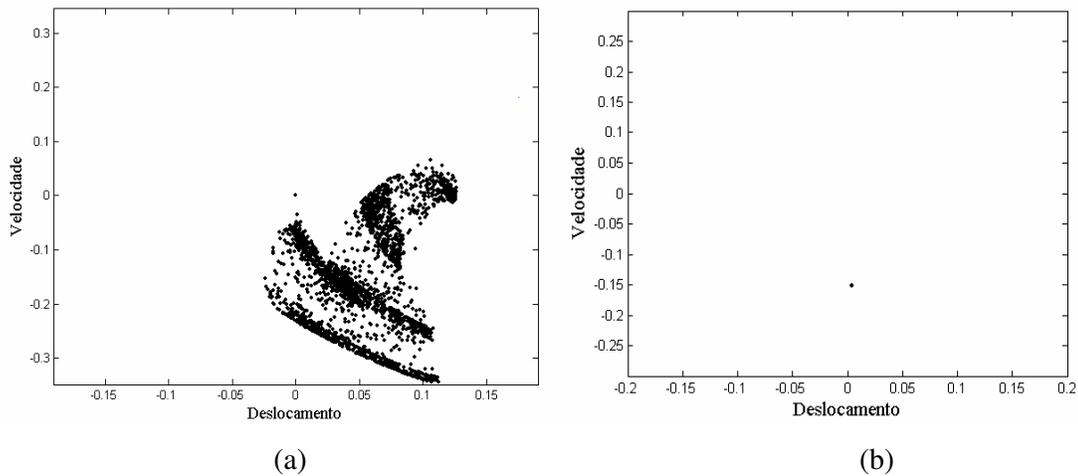


Figura 6.18: Seção de Poincaré do sistema não ideal: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico) para  $\theta = 2$  e  $\xi_1 = 1.5$ .

Utilizando agora valores do caso II e para  $\theta = 3$ ,  $\mu = 0.01$  e  $\xi_1 = 2.125$  (que é o valor na região de ressonância), no estado estacionário, obtém-se a trajetória periódica desejada para o controle dada por

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} 0.1691 \cos(1.416t + 4.706) \\ -0.2394 \sin(1.416 + 4.706) \\ 1.416t \\ 1.416 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Utilizando o controle ótimo, da equação 6.37, o movimento caótico do sistema não ideal para,  $\theta = 3$  e  $\xi_1 = 2.125$  mostrado na figura 4.58, pode ser controlado para um sistema periódico de período  $-1$ , onde a trajetória periódica desejada é considerada na equação 6.43

Na figura 6.19(a) é mostrada a situação quando a frequência natural do sistema esta na região de ressonância. Na figura 6.19(b) a trajetória do sistema no plano de fase converge para a órbita de controle desejada e na figura 4.16(c) o espectro de frequência apresenta somente um pico caracterizando o comportamento periódico do sistema controlado.

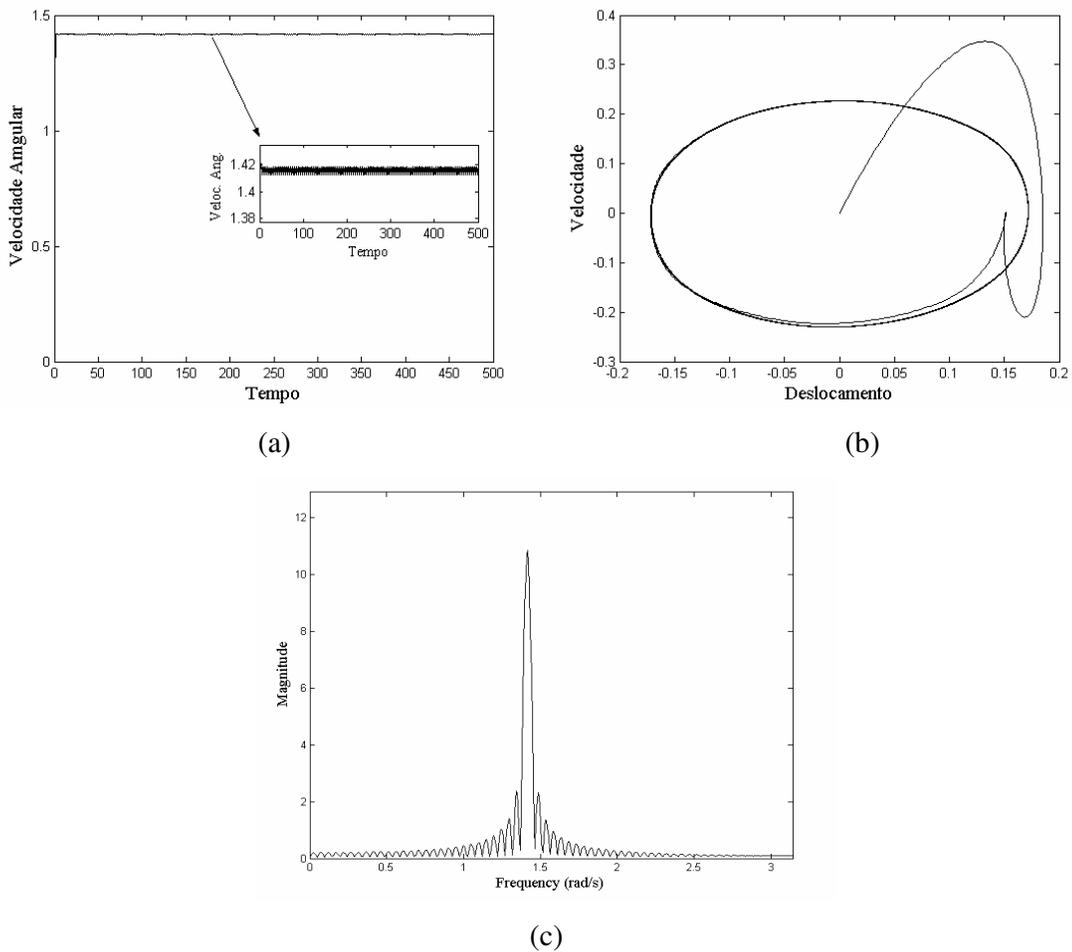


Figura 6.19: Sistema não ideal controlado: (a) Histórico da velocidade rotacional do motor, (b) Plano de Fase e (c) espectro de frequência para  $\theta = 3$  e  $\xi_1 = 2.125$ .

Resultados numéricos são apresentados para a seção de Poincaré do sistema na figura 6.20. Na figura 6.20(a) é ilustrada a seção de Poincaré do sistema não controlado, mostrando a existência de um atrator estranho, já na figura 6.20(b), onde o sistema agora é controlado, a seção de Poincaré apresenta somente um ponto ilustrando o comportamento periódico do sistema.

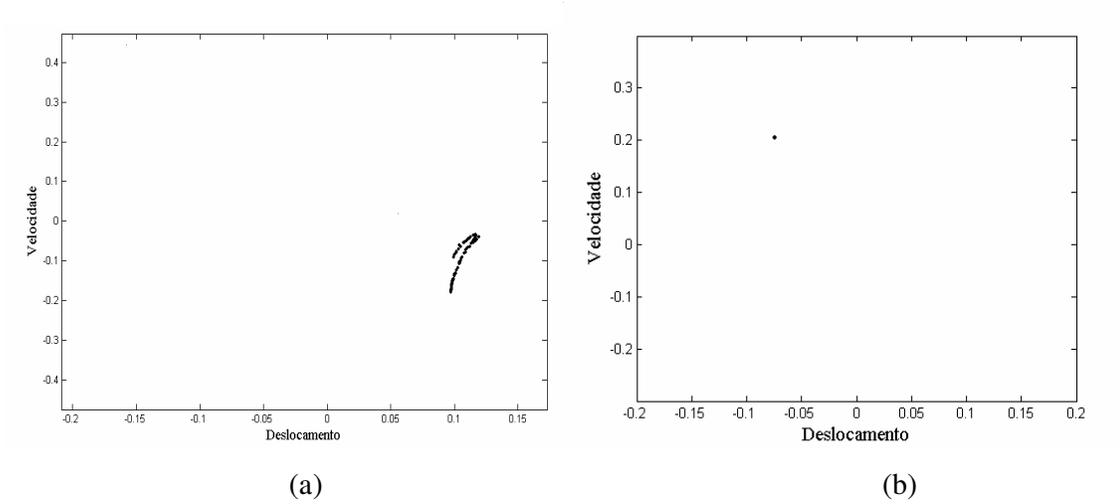


Figura 6.20: Seção de Poincaré do sistema não ideal: (a) Sistema não controlado (atrator estranho) e (b) sistema controlado (atrator periódico) para  $\theta = 3$  e  $\xi_1 = 2.125$ .

## Capítulo 7

### Conclusões e Trabalhos Futuros

#### 7.1 Conclusões

Esta dissertação abordou a pesquisa da dinâmica não linear e controle de um sistema dinâmico sujeito a ação de materiais com memória de forma. Nesta análise foram considerados dois diferentes tipos de excitação. Uma excitação do tipo ideal, onde o termo de excitação é dado por uma função harmônica com amplitude e frequência constantes. E a outra excitação considerada foi do tipo não ideal, em que se apresenta uma descrição mais complexa para o funcionamento do sistema, onde são consideradas as interações dinâmicas existentes entre a estrutura, em conexão ao desempenho de uma fonte de energia com potência limitada. Outra diferença entre estas duas fontes de excitação é que o sistema com excitação não ideal apresenta um grau de liberdade a mais do que o sistema com excitação do tipo ideal.

Obteve – se a partir dos resultados apresentados nos diversos capítulos os seguintes resultados principais:

No capítulo 3, foi considerado um oscilador com um grau de liberdade, constituído por uma massa conectada a um elemento com material de forma. O sistema é excitado harmonicamente (excitação ideal).

Nesta primeira parte da dissertação o enfoque foi à utilização do método das múltiplas escalas (“method of multiple scales”) na busca de uma solução analítica aproximada do oscilador, visto que o problema já havia sido tratado anteriormente na literatura de forma numérica. O algoritmo desenvolvido nesta parte foi utilizado para “plotar” às curvas de resposta em frequência nas três ressonâncias principais analisadas.

Diante disto, pode – se concluir que

- O número de escalas a ser utilizado para resolver o problema, depende do tipo de liga a ser adotado na formulação do sistema.
  
- Por intermédio das curvas de resposta em frequência foi possível o estudo da dinâmica não linear do sistema. Foram mostradas, características tais como:

comportamento do tipo mola mole (soft spring) ou mola dura (hard spring) dependendo da temperatura atuante no sistema.

- Nas simulações numéricas foram demonstradas as influências dos parâmetros do sistema tais como: amortecimento e excitação externa.
- O diagrama de resposta em frequência demonstrou o fenômeno do salto (jump) e revelou a faixa de instabilidade
- Obteve - se condições para a estabilidade do sistema para diferentes valores da temperatura. As análises de bifurcações mostraram a existência de bifurcações estáticas do tipo sela – nó, tanto para a ressonância primária e ressonância superharmonica.

No capítulo 4, discuti - se o problema da inclusão no modelo de um motor elétrico de corrente contínua desbalanceado com potência limitada e apoiado em uma viga com memória de forma. O sistema foi modelado como um oscilador acionado por um motor elétrico de corrente contínua e potência limitada. Neste capítulo foram realizados ensaios numéricos de integração direta das equações de movimento, utilizando o integrador ODE113 do MATLAB® (Adams – Bashforth – Moulton) no sistema de equações de primeira ordem, tomadas como sendo as variáveis de estado.

Com base nestas considerações aqui pode - se concluir que:

- Observou - se o efeito Sommerfeld (como o motor será capturado pela ressonância do sistema) fenômeno peculiar desta classe de problemas, do tipo não ideal. Constatou - se também a influência da temperatura neste efeito, visto que a temperatura modifica a região de ressonância do sistema alterando assim a região de salto.
- Foram consideradas duas estruturas diferentes com a idéia de poder verificar as influências dos parâmetros de acoplamento do sistema com o motor.
- No caso I, os resultados numéricos mostraram que o sistema apresenta movimentos regulares para quaisquer valores do parâmetro de controle, indicando a ocorrência de pouca interação entre a estrutura e a excitação.

- Para o caso II, observou – se uma maior tendência para ter – se movimentos irregulares, incluindo a região de ressonância, do sistema para valores diferentes do parâmetro de controle.
- Observou – se o aumento nas variações de oscilação da rotação do motor de corrente contínua, confirmando a influência da resposta da estrutura sobre a dinâmica do motor.
- A investigação dos espaços de fase do caso II revelou uma dinâmica rica. A variação dos parâmetros de controle do motor mostra a evolução do espaço de fase do sistema e a modificação da sua topologia subentende – se a existência de bifurcações.
- Utilizou – se como ferramentas a seção de Poincaré, espectro de frequência e Expoente de Lyapunov de cada resposta para a caracterização do sistema ter ou não movimentos regulares e irregulares para certos valores do parâmetro de controle.
- Sobre a influência da temperatura o sistema não ideal apresentou uma resposta rica. A curva plano de fase – temperatura mostrou que a velocidade e o deslocamento do sistema diminuem à medida que ocorre a transformação de fase martensítica para a fase austenítica.

No capítulo 5, utilizou – se o método da média (“method of averaging”) baseado no método de Krylov – Bogoliubov para a obtenção de uma solução analítica aproximada de primeira ordem, relativamente a um pequeno parâmetro do problema. O sistema original de equações foi reduzido para um sistema contendo as equações de amplitude e fase da estrutura e da frequência rotacional do motor de corrente contínua, conhecida como equações média.

Com base nos resultados obtidos neste capítulo, conclui – se o seguinte:

- O bom desempenho deste método que foi utilizado para sistemas não ideais auxiliou na análise, do ponto de vista analítico, do comportamento dinâmico não linear do sistema.
- Pelo critério RH obtive – se condições de estabilidade do caso I e II estudados aqui.
- Pontos especiais da solução estacionária que definem o ponto máximo e o ponto de salto na curva de resposta em frequência foram obtidos.

- Uma comparação da solução analítica aproximada com a integração numérica direta foi feita, mostrando que o método da média é uma ferramenta válida para a solução aproximada do caso não ideal I.
- Já no caso II o método da média foi importante para encontrar a solução periódica, visto que a solução numérica na região de ressonância deste sistema para as temperaturas analisadas são caóticas.

No capítulo 6, dois modelos de controle linear ótimo com retroalimentação foram tomados, um para o sistema ideal e outro para o sistema não ideal.

O desempenho deste método de controle foi verificado por ensaios numéricos MATLAB – SIMULINK. Vários resultados numéricos foram feitos para diferentes valores de temperatura tanto no modelo ideal quanto o do não ideal, onde observou – se o bom desempenho do controle sobre a estrutura com excitação ideal e não ideal.

## 7.2 Trabalhos Futuros

Finalmente, citam – se alguns trabalhos futuros que poderão ser desenvolvidos:

- No caso ideal, pode – se obter condições para determinar diferentes valores de parâmetros em que ocorram as bifurcações homoclínicas ou heterclínicas, e assim conseqüentemente o regime caótico, utilizando, por exemplo, o método de Melnikov.
- Pode – se também realizar um estudo analítico para o problema com excitação ideal considerando um oscilador com dois graus de liberdade conectados por elementos com memória de forma, mostrando, por exemplo, a dinâmica do sistema onde cada elemento assume um valor diferente de temperatura
- No caso não ideal seria interessante realizar um estudo numérico - matemático sobre as condições e tipos de bifurcações que podem ocorrer, principalmente para os valores do caso II.

- Também no caso não ideal uma possível análise posterior seria o estudo do sistema completo, incluindo a dinâmica do motor nas equações de movimento (considerando a equação elétrica do motor).

## Referências Bibliográficas

- Balthazar, J. M., Brasil, R.M.L.R.F., Alguns comentários em dinâmica e controle não lineares. In. Aplicon – Escola brasileira de aplicações em dinâmica e controle, São Carlos, SP, Brasil, p. 35 – 64, 2001.
- Balthazar, J.M., Cheshankov, B. I., Rushev, D. T., Barbantin, L., Weber, H. I., Remarks on the passage through resonance of a vibrating system with two degree of freedom, excited by a non ideal source. *Journal of Sound and Vibration*, 295 (5), p. 1075 – 1085, 2001.
- Balthazar, J.M., Mook, D.T., Weber, H.I., Brasil, R.M.L.R.F., Fenili, A., Belato, D., Felix, J.L.P., An overview on non-ideal vibrations. *Meccanica*, Vol. 38, p.613–621, 2003.
- Balthazar, J.M., Mook, D.T., Weber, H.I., Brasil, R.M.L.R.F., Fenili, A., Belato, D, Felix J.L.P., Garzeri, F.J., A review on new vibration issues due to non-ideal energy sources.”In: *Dynamics systems and control*, edited by Udwadia FE, Weber HI, Leitman G, Stability and control: theory, methods and applications, Vol. 22, Chapman & Hallick, p. 237-258, 2004
- Balthazar, J.M., Pontes Jr., B.R., On friction induced nonlinear vibrations: A source of fatigue, *Damage Prognosis – For Aerospace, Civil and Mechanical System*, Edited by D. Inman, John Wiley and Sons, 2005.
- Bolla, M.R., Balthazar, J.M., Palacios, J.L., Mook, D.T., On an Approximated analytical solution to a nonlinear vibrating problem, excited by a non-ideal motor, *Nonlinear Dynamics*, 2007 (in press).
- Bogoliubov, N. N. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*. Índia: Hindustan Publishing Corporation, p. 487, 1961.
- Boyd, J.G., Lagoudas, D.C., A thermomechanical modeling of polycrystalline SMA’s under cyclic loading. Part III: evolution of plastic strain and two – way shape memory effect, *International Journal of Engineering Science* 37, nº 9, p. 1175 – 1203, 1999.

- Brinson, L.C., One dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, n° 4, p. 229–242, 1993.
- Chavarette, F.R., Balthazar, J.M., Rafikov, M., Hermeni, A.H., On Non-Linear Dynamics and an Optimal Control Synthesis of the Potential of Action Membrane (Ideal and Non-Ideal Cases) of the Hodgkin-Huxley (HH) Mathematical Model, *Chaos, Solitons and Fractal*, in press, 2007.
- De Mattos, M.C., Balthazar, J.M., Mook, D.T., Wieczorek, S., An experimental study of vibrations of non ideal system. In: *Proceeding of DETEC' 97. ASME Design Engineering Technical Conferences*. Sacramento, CA, September 1997.
- Dimentberg, M. F., Mcgovern, L., Norton, R. L., Chapdelaine, J., Harrison, R., Dynamics of an unbalanced shaft interacting with limited power supply. *Nonlinear Dynamic*, 13, p. 171 – 187, 1997.
- Dorf, R.C.; Bishop, R., *Modern Control Systems*, 8th edition, New York, Addison-Wesley Pub Co., 1997.
- El – Badawy, A.A., Behavior Investigation of a nonlinear non – ideal vibrating system, *Journal Vibration and Control*, vol. 13, p. 203 – 217, 2007.
- Falk, F., Model free – energy, mechanics and thermodynamics of shape memory alloys. *ACTA Metallurgica* 28, n°12, p. 1773 – 1780, 1980.
- Falk, F., One – dimensional model of shape memory alloys, *Archives of Mechanics* 35, n° 1, p. 63 – 84, 1983.
- Falk, F., Three – dimensional Landau theory describing the martensitic transformation of shape memory alloy, *Journal of Physique*, n° 2, p. 61 – 77, 1990.

- Fenili, A., Balthazar, J.M., On an analytical solution for a slewing flexible structure system: the analysis of the linear part of the perturbed problem. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (JTAM)*, 2007, accepted to publication.
- Fradkov, A. L., Evans, R. J., Control of chaos: Methods and applications in engineering, *Annual Reviews in Control*, 29, p. 33 – 56, 2005.
- Kononenko, V. O. *Vibrating System of Limited Power Supply*. IILife, p. 236, 1969.
- Liang, C., Rogers, C.A., One – dimensional thermomechanical constitutive relations of shape memory materials, *Journal of Intelligent Material System and Structures*, nº 1, p. 207 – 234, 1990.
- Meirovitch, L., *Methods of Analytical Dynamics*, USA: McGraw – Hill, 1970.
- Nayfeh, A. H., Mook, D. T. *Nonlinear Oscillations*. Wiley, New York, 1979.
- Nayfeh, A. H., *Introduction to Perturbations Techniques*, Wiley, New York, 1980.
- Nayfeh, A.H., Balachandran, B., *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computation and Experimental Methods*. John Wiley and Sons, N.Y., 1995.
- Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J., Controlling chaos, *Physics Review Letters*, 64, p. 1196 – 1199, 1990.
- Paiva, A., *Modelagem do comportamento termomecânico das ligas com memória de forma*. Tese de Doutorado, PUC – Rio de Janeiro, 2004
- Paiva, A., Savi, M. A., Braga, A. M. B. & Pacheco, P. M. C. L., A Constitutive Model for Shape Memory Alloys Considering Tensile-Compressive Asymmetry and Plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, v.42, n.11-12, p. 3439-3457, 2005.
- Palácios, J. L., *Teoria de sistemas vibratórios aperticados não lineares e não ideais*. Tese de Doutorado, UNICAMP – Campinas, 2002.

- Peruzzi, N., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B.R., Nonlinear dynamics and control of an ideal/nonideal load transportation system with periodic coefficients. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, v. 2, p. 32-39, 2007.
- Pontes Jr., B. R., Dinâmica e controle de sistemas não lineares com interação auto – excitadora, sujeitos a fontes de energia do tipo ideal e não ideal. Tese de Doutorado, EESC/USP – São Carlos, 2003.
- Rafikov, M., Balthazar, J.M., On an optimal control design for Rossler system *Physic Letter A*, v.333, p.241-245, 2004.
- Rafikov, M., Balthazar, J.M., Optimal Linear and Control Design for Chaotic System. In: ASME - International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, Long Beach. *Proceedings of International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, 2005.
- Rafikov, M., Balthazar, J.M., On control and synchronization in chaotic and hyperchaotic system via linear feedback control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, in press, 2007.
- Rafikov, M. Balthazar, J.M., von Bremen, H.F., Mathematical Modeling and Control of Population Systems: Applications in Biological Pest Control, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, in press, 2007(a)
- R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton, New Jersey, 1957.
- Savi, M.A.,Braga, A.M., Chaotic vibration of an oscillator with shape memory, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science* 15, nº 1, p .1 – 20, 1993.
- Savi, M.A., Pacheco, P. M.C.L., Braga, A.M.B., Chaos in a shape memory two-bars truss, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.37, p. 1387-1395, 2002 (a)

- Savi, M.A, Pacheco, P. M. C. L., Chaos and hyperchaos in shape memory systems, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.12, No. 3, pp. 645-657, 2002 (b)
- Savi, M.A., Paiva, A., An overview of constitutive models for shape memory alloy, Mathematical Problems in Engineering, p. 1 – 30, 2005
- Sinha, S.C., Henrichs, J.T., Ravindra, B.A., A general approach in the design of active controllers for nonlinear systems exhibiting chaos, International Journal of Bifurcation and Chaos, 165- 178, 2000.
- Sommerfeld, A., Beiträge zum dynamischen ausbau der festigkeitslehe, Physikal Zeitschr 3, p. 266 – 286, 1902.
- Tanaka, K., A thermomechanical sketch of shape memory effect: one dimensional tensile behavior, Material Science Research International, 1985.
- Yamanaka, H., Murakami, S., Optimum design of operating curves for rotating shaft systems with limited power supply. In: Chung, H (ed.), Current Topics in Structural Mechanics PVP, 179, ASME NY, p. 181 – 185, 1989.
- Warminski, J., Balthazar, J.M., Vibrations of a parametrically and self – excited system with ideal and non – ideal energy sources, RBCM - Journal of the Brazilian Society Mechanical Science, Vol. 25, n°4, p. 413 – 419, 2003.
- Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A., Determining Lyapunov exponents from a Time Series, Physica D, Vol. 16, p. 285-315. 1985.
- Zukovic, M, Cveticanin, L., Chaotic response in a stable Duffing system of non – ideal type, Journal of Vibration and Control, vol. 13, No. 6, p. 751 – 767, 2007.

## Apêndice A

### Modelagem de um motor CC

Segundo Dorf e Bishop (1997), o motor CC controlado pela armadura utiliza uma corrente de campo constante e a relação eletro - mecânica do torque magnético desenvolvido pelo motor é dada por

$$T_m = K_m I_a \quad (A1)$$

onde

$T_m$  é o torque magnético (ou motriz) desenvolvido pelo motor;

$I_a$  é a corrente elétrica;

$K_m$  é a constante de torque do motor;

Admite – se motores de corrente contínua esquematizada, através da figura A2 cujas equações de controle representativas de seus circuitos elétricos, são dadas pela equação, desejável abaixo:

$$U - e_a = R_a I_a + L_a \left( \frac{dI_a}{dt} \right) \quad (A2)$$

onde

$U$  é a tensão elétrica aplicada aos terminais do motor;

$e_a$  é a força contra – eletromotriz;

$R_a$  é a resistência elétrica do motor;

$L_a$  sua indutância elétrica do motor;

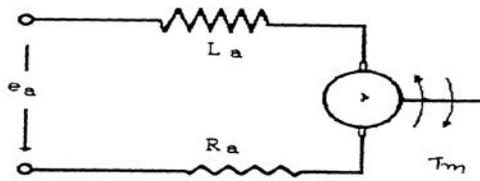


Figura A1: Modelo de armadura do motor

A tensão relativa à força contra-eletromotriz  $e_a$  é proporcional a velocidade angular do motor e é expressa como

$$e_a = K_b \dot{\phi} \quad (\text{A3})$$

onde

$K_b$  é a constante da tensão elétrica do motor;

$\dot{\phi}$  é a velocidade angular do motor;

Substituindo as equações (A1) e (A3) em (A2), obtém-se a seguinte expressão,

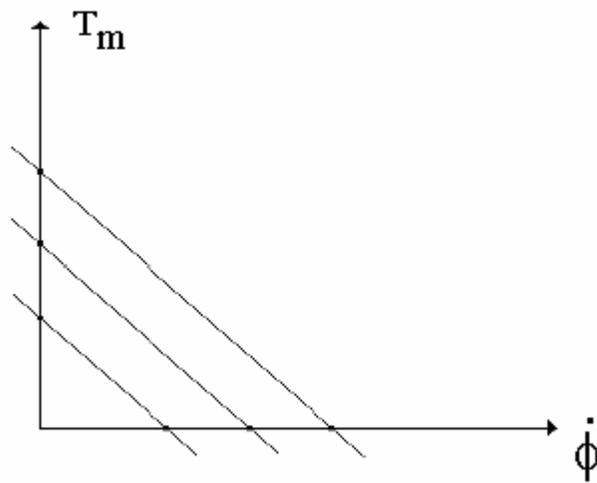
$$U - K_b \dot{\phi} = \left( \frac{R_a}{K_m} \right) T_m + \left( \frac{L_a}{K_m} \right) \frac{dT_m}{dt} \quad (\text{A4})$$

A equação (A.4) relaciona as seguintes grandezas: a velocidade angular do motor, a tensão elétrica aplicada, o torque magnético e a variação do torque.

Em regime estacionário, e desprezando a indutância ( $L_a = 0$ ), a variação do torque é zero e a equação (A.4) é reduzida para.

$$T_m = \frac{K_m U}{R_a} - \frac{K_m K_b}{R_a} \dot{\phi} \quad (\text{A5})$$

Observa – se, então se a tensão aplicada  $U$  for mantida constante, a relação existente entre o torque e a velocidade angular é do tipo linear, portanto as curvas características deste motor são retas interceptando os dois eixos, como mostrado na figura abaixo



Curva característica do motor

## Apêndice B

### Técnicas de perturbação

Neste apêndice, apresentam – se a descrição de forma resumida dos métodos de perturbação que foram utilizadas no transcórre desta dissertação, onde no caso não-ideal adotou – se o método da média, e no caso ideal foi utilizado o método das múltiplas escalas.

#### B.1. Método das Múltiplas Escalas

Neste capítulo, é considerado um sistema tendo um grau de liberdade sobre a influência de forças externas, a extensão para sistemas com mais de um grau de liberdade é imediata. Especificamente, é considerada a equação abaixo

$$\ddot{u} + u = \varepsilon f(u, \dot{u}) \quad (\text{B1})$$

onde  $\varepsilon$  é um pequeno parâmetro, os pontos denotam a derivada com relação ao tempo adimensional  $t$ , e  $u$  é a variável dependente adimensional. A função  $f$  é geral, mas contínua.

Para determinar uma expansão de primeira ordem uniforme usando o método das múltiplas escalas, são introduzidas duas escalas  $T_0 = t$  e  $T_1 = \varepsilon t$ . Então, as derivadas tornam – se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \end{aligned}$$

onde  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ . Aqui, a equação (B1) torna – se

$$D_0^2 u + 2\varepsilon D_0 D_1 u + \dots + u = \varepsilon f[u, D_0 u + \varepsilon D_1 u + \dots] \quad (\text{B2})$$

È procurado uma solução aproximada de (B2) na forma

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (\text{B3})$$

Substituindo (B3) em (B2) tem – se que

$$D_0^2 u_0 + \varepsilon D_0^2 u_1 + 2\varepsilon D_0 D_1 u_0 + \dots + u_0 + \varepsilon u_1 = \varepsilon f[u_0 + \varepsilon u_1, D_0 u_0 + \varepsilon D_1 u_0 + \dots] = \varepsilon f(u_0, D_0 u_0) + \dots \quad (\text{B4})$$

Equacionando os coeficientes de potência  $\varepsilon$ , obtém – se que

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (\text{B5})$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + f(u_0, D_0 u_0) \quad (\text{B6})$$

Para poder usar diretamente a expansão em série de Fourier, é expresso primeiramente à solução geral de (B5) na seguinte forma

$$u_0 = a \cos(T_0 + \beta) \quad (\text{B7})$$

Aqui,

$$D_0 u_0 = -a \sin(T_0 + \beta)$$

$$D_1 D_0 u_0 = -\dot{a} \sin(T_0 + \beta) - a \dot{\beta} \cos(T_0 + \beta)$$

Então, (B6) torna – se

$$D_0^2 u_1 + u_1 = 2\dot{a} \sin(T_0 + \beta) + 2a\dot{\beta} \cos(T_0 + \beta) + f[a \cos(T_0 + \beta), -a \sin(T_0 + \beta)] \quad (\text{B8})$$

Aqui, a expansão de Fourier tem a seguinte forma

$$f[a \cos(T_0 + \beta), -a \sin(T_0 + \beta)] = f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \cos(nT_0 + n\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a) \sin(nT_0 + n\beta) \quad (\text{B9})$$

onde

$$f_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a \sin \phi) d\phi \quad (\text{B10})$$

$$f_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a \sin \phi) \cos n\phi d\phi \quad (\text{B11})$$

$$g_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a \sin \phi) \sin(n\phi) d\phi \quad (\text{B12})$$

Usando a expansão em série de Fourier para  $f$ , reescreve – se a equação (B6) como

$$D_0^2 u_1 + u_1 = 2\dot{a} \sin(T_0 + \beta) + 2a\dot{\beta} \cos(T_0 + \beta) + f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \cos(nT_0 + n\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a) \sin(nT_0 + n\beta) \quad (\text{B13})$$

Eliminando os termos seculares de  $u_1$ , tem – se que

$$2\dot{a} + g_1(a) = 0 \quad (\text{B14})$$

$$2a\dot{\beta} + f_1(a) = 0 \quad (\text{B15})$$

Substituindo (B11) e (B12) em (B14) e (B15) encontra – se que

$$\dot{a} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a \sin \phi) \sin(\phi) d\phi \quad (\text{B16})$$

$$a\dot{\beta} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a \sin \phi) \cos(\phi) d\phi \quad (\text{B17})$$

Substituindo (B7) em (B3) e sendo  $T_0 = t$ , encontra – se que a primeira aproximação é dada por

$$u = a \cos(t + \beta) \quad (\text{B18})$$

onde  $a$  e  $\beta$  são dados por (B16) e (B17).

## B.2. Método da média

O método da média é vantajoso na análise de sistemas fracamente não lineares, a idéia básica é utiliza – lo para estudar pequenas perturbações em um oscilador linear. Este método foi desenvolvido por Krylov e Bogoliubov, e é aplicado em sistemas da forma

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u, \dot{u}) \quad (\text{B19})$$

onde  $\varepsilon$  é um pequeno parâmetro, os pontos indicam derivadas com relação ao tempo adimensional  $t$ ,  $u$  é a variável dependente adimensional e a função  $f(u, \dot{u})$  é contínua.

Quando  $\varepsilon = 0$ , a solução de (B19-5.1) pode ser escrita como

$$u = a \cos[\omega_0 t + \beta] \quad (\text{B20})$$

sendo  $\phi = \omega_0 t + \beta$  onde  $a$  e  $\beta$  são constantes, pode – se reescrever a equação (B20) da seguinte forma

$$u = a \cos(\phi) \quad (\text{B21})$$

Quando  $\varepsilon \neq 0$ , a solução da equação (B19) pode ser expressa da forma (B21), mas  $a$  e  $\beta$  são agora funções do tempo  $t$  e assim não sendo mais constantes. Logo, (B21) pode ser vista como uma variável dependente  $u(t)$  e novas variáveis independentes  $a(t)$  e  $\beta(t)$ . Desde que as equações (B19) e (B21) constituem duas equações com três variáveis  $u$ ,  $a$  e  $\beta$ , é possível impor uma condição adicional. É conveniente considerar que a velocidade tenha a mesma forma como no caso onde  $\varepsilon = 0$ , isto é;

$$\dot{u} = -\omega_0 a \sin(\phi) \quad (\text{B22})$$

Para determinar as equações que descrevem  $a(t)$  e  $\beta(t)$ , diferenciando (B20) com relação ao tempo  $t$  e assim se obtém que

$$\dot{u} = -\omega_0 a \sin(\phi) + \dot{a} \cos(\phi) - a \dot{\beta} \sin(\phi) \quad (\text{B23})$$

Comparando (B22) e (B23), encontra – se que

$$\dot{a} \cos(\phi) - a\dot{\beta} \sin(\phi) = 0 \quad (\text{B24})$$

Diferenciando (B22) com relação ao tempo  $t$ , tem-se que

$$\ddot{u} = \omega_0^2 a \cos(\phi) - \omega_0 \dot{a} \sin(\phi) - \omega_0 a \dot{\beta} \cos(\phi) \quad (\text{B25})$$

Substituindo para  $\dot{u}$  e  $\ddot{u}$  na equação (B19) obtém - se

$$\omega_0 \dot{a} \sin(\phi) + \omega_0 a \dot{\beta} \cos(\phi) = -\varepsilon f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) \quad (\text{B26})$$

Resolvendo (B24) e (B26),  $\dot{a}$  e  $\dot{\beta}$  tornam-se

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin(\phi) f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) \quad (\text{B27})$$

$$\dot{\beta} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0 a} \cos(\phi) f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) \quad (\text{B28})$$

As equações (B21), (B27) e (B28) são exatamente equivalentes a equação (B19) porque nenhuma aproximação foi feita até aqui.

Para  $\varepsilon$  pequenos, tem – se que  $\dot{a}$  e  $\dot{\beta}$  são pequenos, portanto  $a$  e  $\beta$  variam muito mais devagar com relação ao tempo  $t$  do que  $\phi = \omega_0 t + \beta$ . Em outras palavras,  $a$  e  $\beta$  variam durante o período de oscilação  $2\pi/\omega_0$  de  $\sin \phi$  e  $\cos \phi$ . Isto permite calcular a média da variação de  $\phi$  em (B27) e (B28). A média destas equações sobre o período  $2\pi/\omega_0$  e considerando  $a$ ,  $\beta$ ,  $\dot{a}$  e  $\dot{\beta}$  serem constantes enquanto calculamos a média, obtém – se as seguintes equações que descrevem a variação de  $a$  e  $\beta$ .

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\phi) f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) d\phi \quad (\text{B29})$$

$$\dot{\beta} = -\frac{\varepsilon}{2a\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\phi) f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) d\phi \quad (\text{B30})$$

## Apêndice C

### MATDS

O MATDS é um programa baseado no MATLAB para investigação de sistemas dinâmicos. A versão atual permite computar as trajetórias, pontos de equilíbrio, mapa de Poincare, expoente de Lyapunov, campo vetorial etc. Não é necessário usar uma linguagem de programação para usar o MATDS, tudo deve ser inscrito em caixas de diálogo e os resultados podem ser facilmente e rapidamente obtidos.

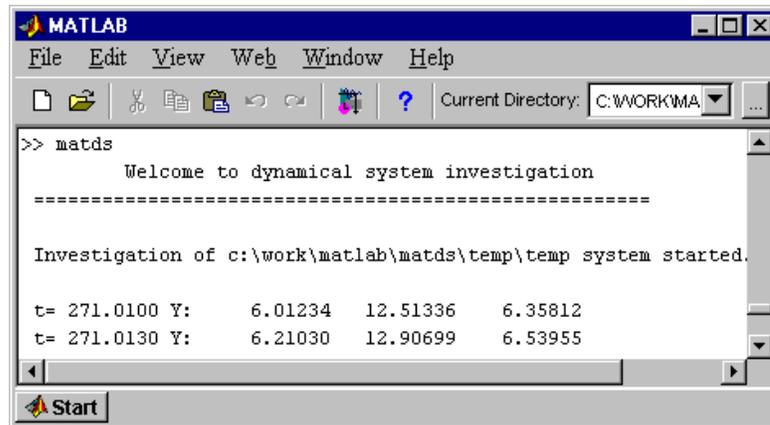
### Instalação e começo do MATDS

Para instalar o pacote é necessário fazer um diretório com o nome MATDS e copiar os arquivos do matds-zip-file para este diretório. Isto cria subdiretórios de MATDS com todos os arquivos necessários. O diretório de MATDS deve ser um diretório atual da área de trabalho do MATLAB. Para começar o MATDS deve – se digitar **matds** na janela principal do MATLAB.

Estrutura do diretório do MATDS

- TEMP – diretório de trabalho para arquivos temporários.
- MATHS – diretório para a parte matemática do MATDS.
- SYSTEM – diretório para arquivos do sistema dinâmico.
- GUI – diretório para GUI e partes do MATDS.

Exemplo:



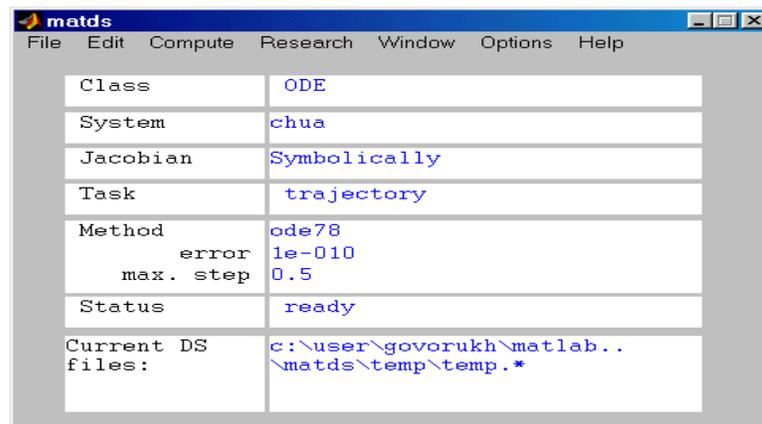
**Janela do MATLAB com saída do MATDS**

## Menu e janelas principais

Informações sobre o status do trabalho atual são obtidas na janela principal.

Class – tipo de sistema dinâmico.

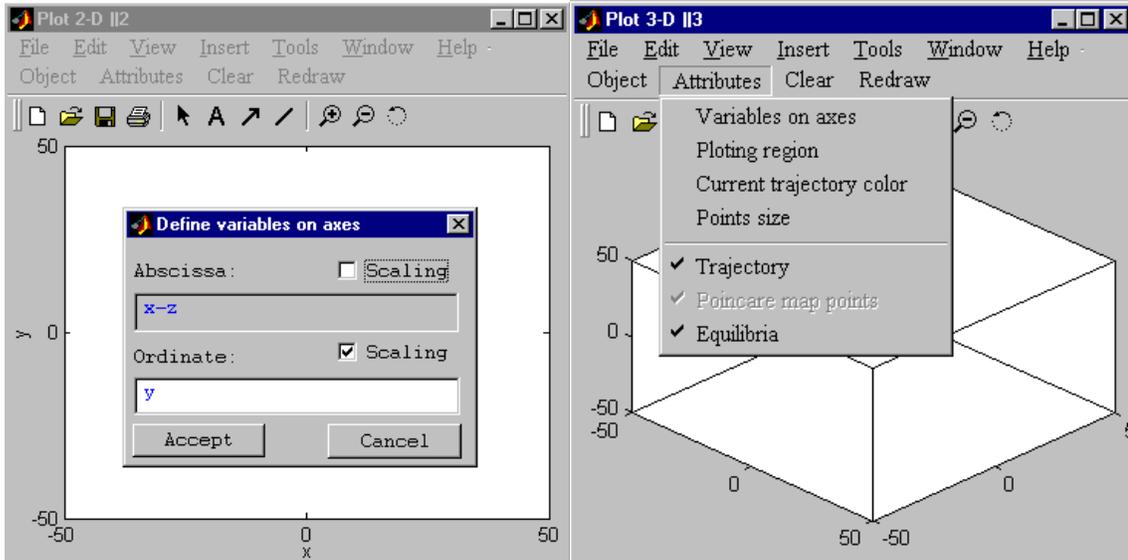
System – nome do sistema.



**Menu principal do MATDS.**

## Saída de resultados

A saída gráfica do MATDS pode ser obtida através do menu **Windows** na forma 2D ou 3D como mostra a figura abaixo

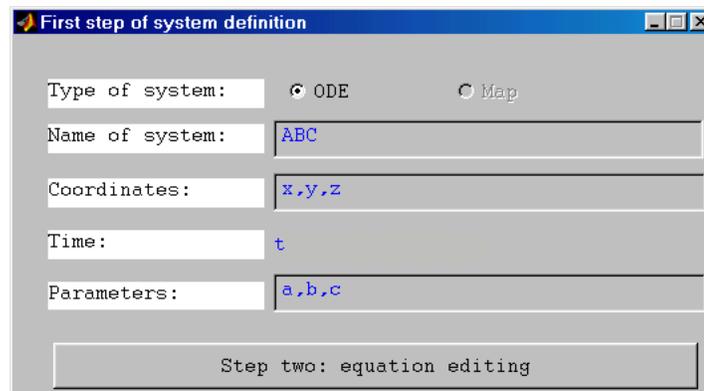


**Janela de saída 2D**

**Janela de saída 3D**

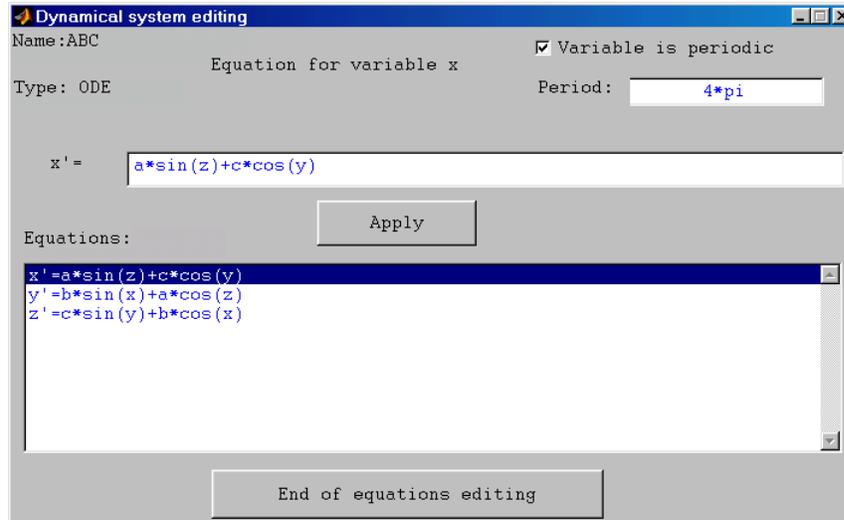
### Definição de sistemas dinâmicos.

A inclusão de novas equações diferenciais pode ser feita através de **file** → **new system**, onde aparecerá a janela abaixo:



**Menu do primeiro passo de definição do sistema.**

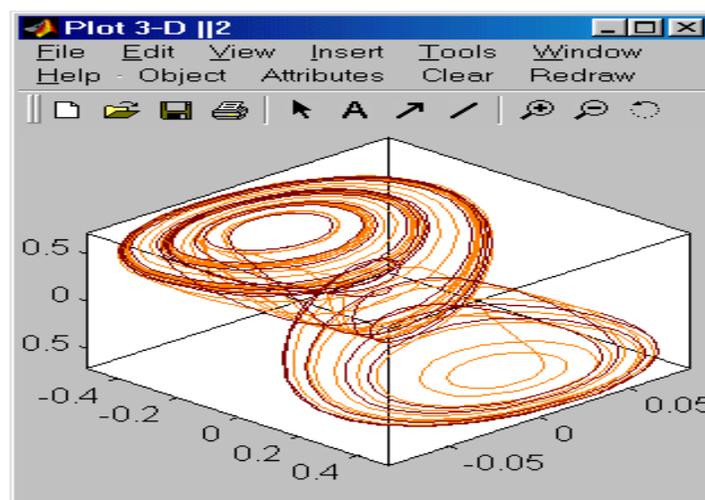
O segundo passo para a inclusão da nova equação é dada pela janela abaixo



Janela para edição do sistema (segundo passo de definição)

## Integração Numérica de Sistema ODE

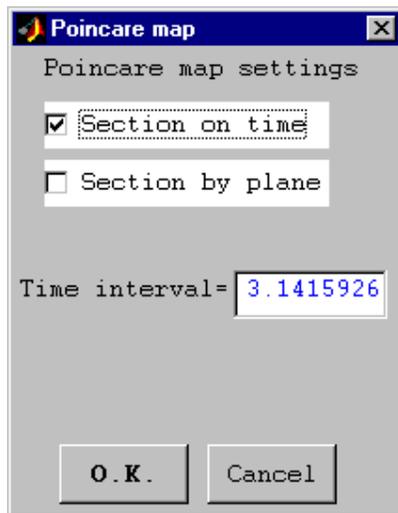
Depois que as equações diferenciais forem incluídas no MATDS o próximo passo é integrá-las. Em todo programa o método padrão de conjunto ODE – MATLAB são incluídos, e também meios adicionais são usados: integradores de alta precisão tais como ode 113, ode 78 e ode 87, onde os tipo de integradores e valores de parâmetros podem ser definidos no menu edit e em seguida **Compute** → **Start** menu principal de comando



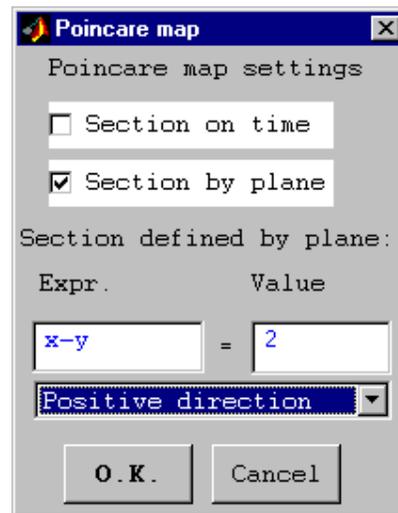
Trajétória caótica no sistema de Chua.

## Mapa de Poincaré

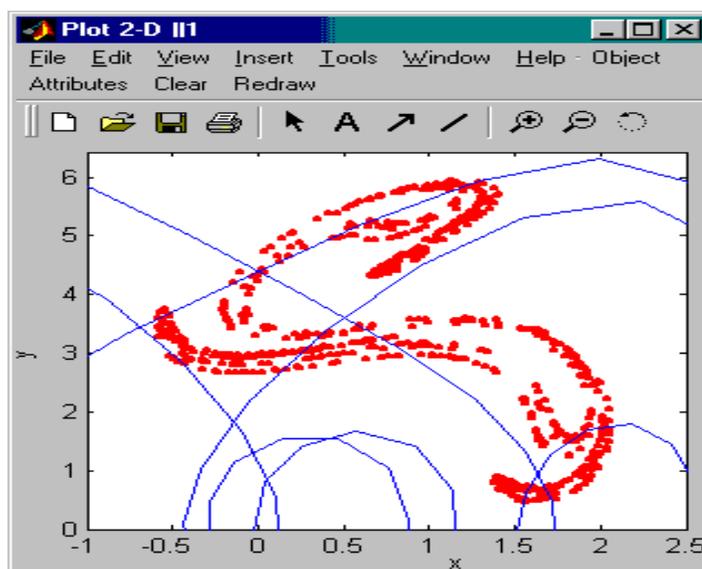
Aqui existem dois tipos de mapa de Poincaré no MATDS: Seção pelo tempo (saída dos pontos da trajetória com intervalos de tempo fixo) e seção pelo plano no plano de fase. Tipo de mapa e equações do plano ou intervalo de tempo podem ser definidos na janela de diálogo. Para ativar o cálculo do mapa de Poincaré deve – se usar o item **Research** → **Poincare map** no menu principal do MATDS em seguida **Compute** → **Start** menu principal de comando



Mapa de Poincaré pelo Tempo



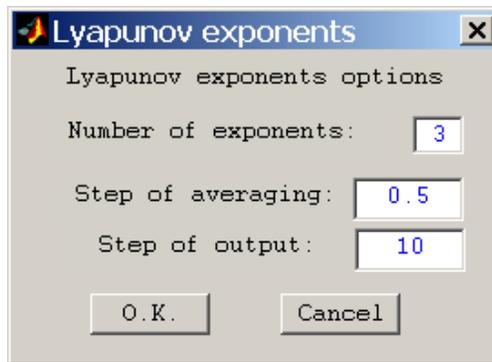
Mapa de Poincaré pelo plano



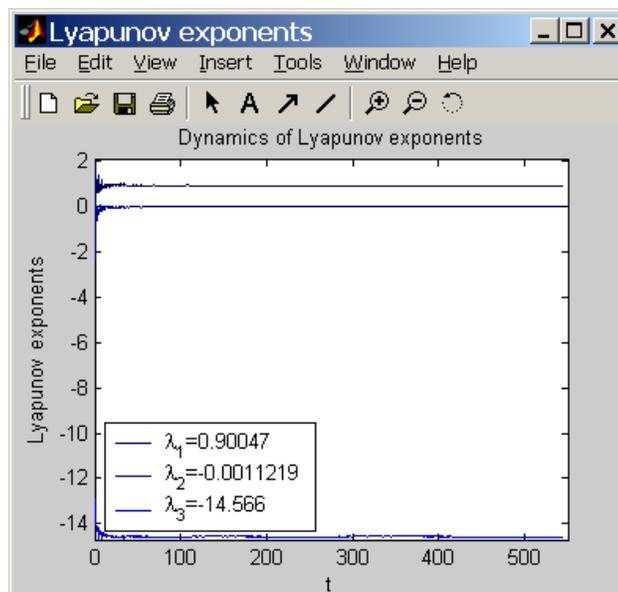
Mapa de Poincaré para o atrator de Ueda (pelo tempo)

## Expoente de Lyapunov

Para ativar o calculo do expoente de Lyapunov deve – se usar o item **Research** → **Lyapunov** no menu principal do MATDS em seguida **Compute** → **Start** menu principal de comando



Menu para o calculo dos expoentes de Lyapunov



Expoentes de Lyapunov para o sistema de Lorenz.

O endereço eletrônico onde pode – se encontrar o MATDS e mais informações é o seguinte: <http://kvm.math.rsu.ru/matds>

## **Súmula Curricular**

### **➤ Trabalhos Submetidos em revistas com arbitragem**

1. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., Analytical study of the nonlinear behavior of a shape memory oscillator: Part I – Primary resonance and free response for low temperature, *Journal of Intelligent Material and Structures*, 2007
2. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., Analytical study of the nonlinear behavior of a shape memory oscillator: Part II – Resonance secondary, *Journal of Intelligent Material and Structures*, 2007.
3. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., Palacios, J.L., Chaos Control of a Nonlinear Oscillator with Shape Memory alloy (SMA) using Optimal Linear Control: Part I: Ideal Energy Source, *Nonlinear Dynamics*, 2008.
4. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., Palacios, J.L., Chaos Control of a Nonlinear Oscillator with Shape Memory alloy (SMA) using Optimal Linear Control: Part II: Non - Ideal Energy Source, *Nonlinear Dynamics*, 2008.

### **➤ Trabalhos Submetidos a eventos com arbitragem**

1. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., Palacios, J.L., On a pseudoelastic and non-ideal behavior of a vibrating system, in the resonance region, 6<sup>th</sup> EUROMECH Nonlinear Dynamic Conference, June 30 – July 4, 2008, Saint Petersburg – Russia. ENOC - 2008.
2. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., Palacios, J.L., Sobre a influência da temperatura na dinâmica não linear de um sistema não ideal com memória de forma – V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Agosto 18 -21, 2008, Salvador – BA, Brasil. CONEN – 2008.

3. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., Palacios, J.L., On Ideal and Non-ideal Nonlinear Vibrations, with Shape Memory Alloy, The Mechanics Conference to Celebrate the 100<sup>th</sup> Anniversary of the Department of Engineering Science and Mechanics, May 29 – 30, 2008, Blacksburg – USA.

### ➤ **Trabalhos Aceitos em Eventos com arbitragem**

1. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., On the dynamics of a shape memory oscillator, under superharmonic excitation – 6<sup>th</sup> Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, May 21 - 25, 2007, São José do Rio Preto – SP, Brasil. DINCON - 2007.
2. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., On regular and irregular dynamics of a nonlinear oscillator with shape memory through a perturbation method – 19<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering, November 05 – 09, 2007, Brasília – DF, Brasil. COBEM – 2007.
3. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., Palacios, J.L., On Nonlinear response of a non-ideal system with shape memory, 9<sup>th</sup> Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, December 17 – 20, 2007, Łódź - Poland. DSTA – 2007.
4. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., Palacios, J.L., On Sommerfeld effect in a non-ideal vibrating system, with (SMA), using an averaging method – Euromech 498 – Nonlinear Dynamics and Chaos of Composite and Smart Structures, May 21-24, 2008, Kazimierz Dolny - Poland. NDSC - 2008.

➤ **Trabalhos Aceitos em revistas com arbitragem**

1. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., Palacios, J.L., On a nonlinear and chaotic non-ideal vibrating system, with shape memory alloy (SMA), Journal of Theoretical and Applied Mechanics, special issue On Oscillations and Chaos, 2008.

➤ **Trabalhos Aceitos em capítulo de Livro a convite**

1. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Pontes Jr., B. R., Palacios, J.L., On Nonlinear response of a non-ideal system with shape memory. Special Issue by **Springer Publisher** .2008