UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Leandro Costa dos Santos

A Matemática Financeira no Ensino Médio:
Uma Abordagem do Financiamento

São José do Rio Preto
2016

Leandro Costa dos Santos

A Matemática Financeira no Ensino Médio:
Uma Abordagem do Financiamento

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos

São José do Rio Preto
2016

Santos, Leandro Costa dos.
A matemática financeira no ensino médio : uma abordagem do financiamento / Leandro Costa dos Santos. -- São José do Rio Preto, 2016
45 f. : il., tabs.

Orientador: Jéfferson Luiz Rocha Bastos
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Educação financeira. 3. Matemática financeira - Estudo e ensino. 4. Economia. 5. Financiamento. 6. Tecnologia educacional. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Leandro Costa dos Santos

A Matemática Financeira no Ensino Médio:

Uma Abordagem do Financiamento

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Jefférson Luiz Rocha Bastos
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi
UFU – Uberlândia

São José do Rio Preto
19 de agosto de 2016

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, família e amigos que tornaram possível a realização dessa dissertação.

A minha família, em especial a meus pais Cida e Fábio que me deram todo apoio e suporte, aos meus irmãos Lucas e Lidya que mesmo distantes estão sempre dando forças, e em memória de meu avô Dito que infelizmente hoje não está mais conosco, mas que com certeza me guiou para que tudo se tornasse realidade.

Aos amigos que tive a oportunidade de conviver durante todo o PROFMAT, em especial aos meus parceiros de República JAnelas (Dana, Tanabi, Farofa, Xiu, Madruga, Cabessa, Virso, Frota, Panda, Mig, Brunão, Hector, Nando, Taquara, Du, Bag, Mané, Dan, Anderson, Cotô, Ghai, Giba, Larika, Marcão, Minero, Perdido, Porva, Renanzão, Tigrão, Will, Xupeta e Xupim) e de Pinda (Maurilio, Thiago, Bodão e Brunão) que foram essenciais , cada um da sua maneira.

A minha namorada Luana, que me deu todo o suporte e incentivo nos momentos mais difíceis.

Ao Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos por aceitar minha proposta de trabalho, e me orientar para que essa dissertação desse certo.

A equipe de professores do PROFMAT, polo São José do Rio Preto, por todo ensinamento e ajuda ao longo do curso.

Enfim, agradeço a Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado e ao Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi por aceitarem ao convite de participar da Comissão Examinadora de Defesa desse trabalho.

Resumo

A Matemática Financeira encontra-se cada vez mais presente no cotidiano do jovem. O mercado capitalista e o crescimento da economia são os principais propulsores desde anseio por conhecimento. Os livros didáticos e os professores vêm se adaptando a este novo cenário, contudo ainda existem lacunas que precisam ser preenchidas sobre o tema. Neste trabalho, o ensino da Matemática Financeira no Ensino Médio é o foco principal, especialmente a parte de financiamento, mostrando como normalmente os livros didáticos abordam tal assunto. Um estudo sobre a conexão entre conceitos matemáticos como Progressão Aritmética e Progressão Geométrica, e conceitos de Matemática Financeira como Juros Simples e Juros Compostos é apresentado. Além disso, sistemas de capitalização, como Tabela Price e SAC são discutidos e apresentadas suas vantagens e desvantagens. Conclui-se o trabalho relacionando a facilidade do jovem com a tecnologia e ferramentas de Matemática Financeira, como aplicativos e softwares, o que facilita a compreensão e aplicação do conteúdo.

Palavras-chave: Matemática Financeira, Ensino Médio, Financiamento.

Abstract

Financial mathematics has being present in the juvenile's routine. The capitalist market and the economy grown are the main drivers for this desire for knowledge. The didactic books and the professors are adapting to this new scenario, however still exist many points to be improved about this subject. In this work, the teaching of financial mathematics inside the college is the main subject, specially the financial issues problems, showing the didactic books approach. A study about connections between mathematic problems and financial issues are presented. Furthermore, capitalization problems, as Price Table are approached. In the conclusion of this work we exemplified some softwares to work with financial mathematics.

Keywords: Financial mathematics, High School, Capitalization Problems.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

A escola atualmente tem um papel cada vez mais importante no desenvolvimento da sociedade. Contudo, é necessário que o professor se adeque às novas necessidades e curiosidades dos seus alunos, fazendo com que no ensino atual não tenha mais espaço para assuntos desconectados e fora do cotidiano. A Matemática é uma das áreas do conhecimento em que houve várias mudanças, já que hoje em dia é exigido que o aluno pense, elabore estratégias de resolução e saiba o que está argumentando.

Porém, para que o objetivo do ensino seja alcançado, é preciso que o professor esteja atento às mudanças, preparando o aluno para situações que possam ser encontradas em seu dia a dia. Motivar o aprendizado é algo essencial, tornando um desafio ao docente aplicar metodologias que façam com que o aluno queira aprender aquilo que ele está ensinando.

Os alunos, principalmente os do ensino médio, necessitam cada vez mais de assuntos que os ajude no cotidiano. Para tentar motivar o aluno com o aprendizado da Matemática, principalmente para aqueles que tem dificuldades em disciplinas de ciências exatas, é necessário trabalhar assuntos que serão vistos no dia a dia. Assim, trabalhar a Matemática de forma descontextualizada, não trará o interesse do aluno desmotivado.

> "Além disso, tais assuntos costumam despertar o interesse dos alunos pelas questões sociais e podem ser usados como contextos significativos para a aprendizagem dos conceitos e procedimentos matemáticos neles envolvidos." MEC/SEF (2000)

Seguindo o raciocínio, é de suma importância que o docente de Matemática repense na maneira de abordar alguns assuntos como a Matemática Financeira por exemplo. No Ensino Fundamental, quando o assunto porcentagem for abordado, o professor já pode, aos poucos, inserir alguns problemas envolvendo a Matemática Financeira.

Diferenciar a maneira como se trabalha essa área da Matemática não é apenas mudar o estilo da aula. É necessário que haja uma mudança na maneira como o tema é abordado, já os alunos estão tendo contato com o dinheiro e bens de consumo cada vez mais cedo, sendo através de mesadas ou pelo próprio salário em alguns casos. A Matemática Financeira ensinada nas escolas deve servir como suporte para uma educação financeira, ajudando o aluno a se relacionar de maneira adequada com o dinheiro.

> "Com esta compreensão, o aprendizado deve contribuir não só para o conhecimento técnico, mas também para uma cultura mais ampla, desenvolvendo meios para a interpretação de fatos naturais, a compreensão de procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social."MEC/SEF. (2000)

Nos últimos anos o Brasil vivenciou um crescimento econômico, e com isso se tornou cada vez importante compreender a Matemática Financeira para ter o controle sobre suas finanças. É muito comum observar lojas anunciando descontos, empréstimos, financiamentos, consórcio, entre outros. Para não ser enganado por propagandas e fazer um negócio bom, é preciso ter conhecimento das finanças e raciocinar antes de adquirir qualquer bem, ou fazer um empréstimo, ou até um financiamento.

Todavia, para ter o conhecimento financeiro é necessário estudo de alguns conceitos fundamentais de Matemática que é possível observar em Morgado (2000), Puccini (2011) e Santos (2016) que são importantes assuntos a serem vistos na escola, preparando o aluno para o que ele venha a enfrentar no cotidiano, tendo como suporte a Lei de Diretrizes e Bases e os Parâmetros Curriculares Nacionais, ver Secretaria de Educação Básica (2015). É importante educar financeiramente o aluno para que tenha consciência na hora de consumir, financiar e até mesmo investir.

Esse trabalho, além de auxiliar na educação financeira do aluno, terá um enfoque especial no ensino de como funciona o financiamento, já que atualmente está cada vez mais fácil adquirir um veículo e uma casa própria. Por se tratar de financiamentos a curto e longo prazo, é necessário que se tenha muito cuidado na hora de escolher o tipo de financiamento. Conscientizar o aluno para que não faça um financiamento com taxas absurdas de juros, e que futuramente não venha a comprometer o seu orçamento mensal, é algo que não é comum ser visto em sala de aula, porém deveria, por ser muito importante.

Faremos uma abordagem geral da teoria que poderia ser vista no ensino médio em relação à Matemática Financeira. Fazendo comentários de como o tema é abordado por alguns livros didáticos propostos pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) Secretaria de Educação Básica (2015), com sugestões e críticas.

Além disso, no final será trabalhado o financiamento imobiliário, com dicas e exemplos que podem ser mostrados aos alunos em aula quando o assunto for abordado. Acreditamos que esse assunto pode ser bem explorado, pois é uma situação que com certeza, cedo ou tarde, o aluno encontrará em seu cotidiano.

Capítulo

2

A Matemática Financeira no Ensino Médio

Este capítulo tratará de conceitos importantes para a introdução da Matemática Financeira no ensino médio.

2.1 Razões e Proporções

Definição 2.1.1 *Dados dois números a e b, com $b \neq 0$, chama-se razão de a para b o quociente $\frac{a}{b}$ que também pode ser indicado $a : b$.*

O número a é chamado antecedente, e o número b é chamado consequente.

Exemplo 2.1.1 *A razão de 2 para 5 é $\frac{2}{5}$ ou $2 : 5$.*

Definição 2.1.2 *Dadas duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, chama-se proporção a igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Em uma proporção, os números a e d são chamados de extremos, e os números b e c são chamados de meios.*

Propriedade 2.1.1 *Em uma igualdade de razões temos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se $a \times d = b.c$*

Demonstração: Seja a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, multiplica-se membro a membro por $b \times d$, obtemos

$$b \times d \times \frac{a}{b} = b \times d \times \frac{c}{d},$$

desta forma

$$a \times d = b \times c$$

Podemos observar que, em uma proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, o produto dos extremos (a e d) é igual ao produto dos meios (b e c).

Exemplo 2.1.2 *Na festa de inauguração de uma livraria, verificou-se que a razão entre o número de homens e o de mulheres presentes era $\frac{2}{3}$. Se nesse dia circularam 750 visitantes pela livraria, qual é a diferença entre o número de mulheres e o de homens que compareceram à inauguração?*

Resolução: Seja h o número de homens e m o número de mulheres presentes na inauguração, então temos que

$$\begin{cases} \frac{h}{m} = \frac{2}{3} \\ h + m = 750 \end{cases}$$

Com isso, temos

$$\begin{cases} 3h = 2m \\ m = 750 - h \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na terceira, temos que

$$3h = 2(750 - h) \Rightarrow h = 300$$

Como $m = 750 - h$, então $m = 750 - 300 \Rightarrow m = 450$. Portanto

$$m - h = 150$$

Logo, a diferença entre o número de mulheres e o de homens que compareceram à inauguração é de 150 pessoas.

2.2 Porcentagem

Razões de denominador 100 são chamadas razões centesimais ou taxas percentuais ou porcentagens, representadas por %.

Observe alguns exemplos:

- $2\% = \frac{2}{100} = 0,02$
- $42\% = \frac{42}{100} = 0,42$
- $123\% = \frac{123}{100} = 1,23$
- $15.6\% = \frac{15.6}{100} = 0,156$

2.2.1 Porcentagem de uma Quantia

Para obter $x\%$ de certa quantia p, basta fazer o produto $p \times \frac{x}{100}$.
Por exemplo, 15% de 180 é equivalente a $180 \times \frac{15}{100}$, que resulta em 27.

2.2.2 Aumentos Percentuais

Denotamos V_i por valor inicial que será aumentado em $x\%$, e V_f o valor final obtido após o aumento. Assim, temos

$$\begin{aligned} V_f &= V_i + V_i \times \frac{x}{100} \\ V_f &= V_i \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) \end{aligned}$$

Pela fórmula obtida acima é fácil perceber que para se obter um aumento de $x\%$ em determinado valor basta multiplica-lo por $\left(1+\frac{x}{100}\right)$. Com isso, para facilitar o entendimento dos alunos denota-se $\left(1+\frac{x}{100}\right)$ por f_α chamado de fator de aumento.

$$V_f = V_i \times f_\alpha \tag{2.1}$$

É interessante mostrar aos alunos quem será o fator de aumento f_α na equação (2.1) , dependendo de qual porcentagem deseja aumentar. Como, por exemplo, pode ser visto na tabela a seguir.

Tabela 2.1: Relação entre Porcentagem de Aumento e Fator de Aumento (f_α)

Porcentagem de Aumento	Fator de Aumento (f_α)
$0,5\% = 0,005$	1,005
$0,2\% = 0,002$	1,002
$10\% = 0,10$	1,10
$42\% = 0,42$	1,42
$100\% = 1,00$	2,00
$150\% = 1,50$	2,50

Importante frisar aos alunos que o fator de aumento é sempre maior do que 1.

Exemplo 2.2.1 *Visando obter um maior lucro em sua loja, um empresário resolveu aumentar os produtos em* 15%. *Sendo assim, um produto que custava* $R\$120,00$ *passará a custar quanto?*

Resolução: Pelos dados fornecidos temos que V_i=120 e f_α=1,15. Aplicando a fórmula do aumento percentual temos

$$\begin{aligned} V_f &= V_i \times f_\alpha \\ V_f &= 120 \times 1,15 \\ V_f &= 138 \end{aligned}$$

Portanto, após o aumento o produto passou a custar R$ 138,00.

2.2.3 Descontos Percentuais

Denotamos V_i por valor inicial que será descontado em $x\%$, e V_f o valor final obtido após o desconto. Assim, temos

$$\begin{aligned} V_f &= V_i - V_i \times \frac{x}{100} \\ V_f &= V_i \times \left(1 - \frac{x}{100}\right) \end{aligned}$$

De maneira análoga ao aumento, denota-se $\left(1-\frac{x}{100}\right)$ por f_d chamado de fator de desconto.

$$V_f = V_i \times f_d \tag{2.2}$$

Assim como no fator de aumento, é interessante mostrar aos alunos quem será o fator de desconto f_d descrito na equação (2.2), dependendo de qual porcentagem irá ser descontada, observando a tabela abaixo.

Tabela 2.2: Relação entre Porcentagem de Desconto e Fator de Desconto (f_d)

Porcentagem de Desconto	Fator de Desconto (f_d)
$0,5\% = 0,005$	0,995
$0,2\% = 0,002$	0,98
$10\% = 0,10$	0,90
$42\% = 0,42$	0,58
$100\% = 1,00$	0,00
$150\% = 1,50$	Não existe

Pela Tabela (2.2) nota-se que não existe desconto maior que 100%, e que o fator de desconto está entre 0 e 1.

Exemplo 2.2.2 *Determinada loja de vendas pela internet, oferece desconto de 7% para quem fizer o pagamento por boleto. Uma pessoa resolve pagar um produto que custa R$ 340,00 no boleto. Qual será o valor final que essa pessoa pagará pelo produto?*

Resolução: Pelos dados fornecidos temos que V_i=140 e f_d=0,93. Aplicando a fórmula (2.2) percentual temos

$$\begin{aligned} V_f &= V_i \times f_d \\ V_f &= 340 \times 0,93 \\ V_f &= 316,2 \end{aligned}$$

Portanto, o valor final que essa pessoa pagará pelo produto é de R$ 316,20.

2.3 Progressão Aritmética

São comuns, na vida real, grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais. Progressões aritméticas são sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo.

A sequência (400,430,460,490,520,550,...) é um exemplo de uma progressão aritmética. O aumento constante de cada termo para o seguinte é chamado de razão de progressão. A razão dessa progressão é igual a 30. Portanto, uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante, chamada de razão da progressão, é representada pela letra r.

Definição 2.3.1 *Uma progressão aritmética de razão r é uma sequência (a_n) na qual $a_{n+1} = a_n + r$, para todo n natural. Pode-se expressar uma Progressão Aritmética por PA.*

Teorema 2.3.1 *Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma progressão aritmética de razão r, então a fórmula do termo geral é dada por $a_n = a_1 + (n-1) \times r$.*

Note que se tivéssemos começado a enumeração dos termos por a_0, teríamos $a_n = a_0 + n \times r$. A demonstração do teorema encontra-se no Apêndice.

Exemplo 2.3.1 *Se uma pessoa começar guardando R\$50,00 por mês, e aumentar esse valor em R\$5,00 a cada mês, quanto ela guardará no 12º mês?*

Resolução: De acordo com o problema a_1=50, r=5 e n=12. Aplicando a fórmula do termo geral da PA, temos

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \times r \\ a_{12} &= 50 + (12-1) \times 5 \\ a_{12} &= 105. \end{aligned}$$

Portanto, essa pessoa guardará R\$105,00 no 12º mês.

Teorema 2.3.2 *Em uma progressão aritmética com n termos, a soma de todos os termos é dada por*

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} \tag{2.3}$$

A demonstração encontra-se no Apêndice.

Exemplo 2.3.2 *Precisando guardar dinheiro, José no primeiro mês guardou R\$100,00, no segundo mês guardou R\$115,00 e foi guardando sempre R\$15,00 a mais que no mês anterior. Quanto José terá guardado após 18 meses?*

Resolução: De acordo com o problema temos que a_1=100, r=15, n=18, a_{18}= ? e S= ? . Aplicando a fórmula do termo geral temos

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \times r \\ a_{18} &= 100 + (18-1) \times 15 \\ a_{18} &= 355 \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula (2.3) da soma dos termos, teremos

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} = \frac{(355 + 100) \times 18}{2} \Rightarrow S = 4095$$

Portanto, após 18 meses José terá guardado R\$ 4.095,00.

2.4 Progressão Geométrica

Uma progressão geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado de razão da progressão e é representado pela letra q.

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, para avançar um termo basta multiplicar pela razão. A sequência (2, 6, 18, 54,...) é um exemplo de uma progressão geométrica de razão 3.

Definição 2.4.1 *Uma progressão geométrica de razão q é uma sequência (a_n) na qual $a_{n+1} = a_n \times q$, para todo n natural e a_n não nulo.*

Teorema 2.4.1 *Seja a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma progressão geométrica de razão q, então a fórmula do termo geral é dada por $a_{n+1} = a_1 \times q^{n-1}$.*

A demonstração encontra-se no Apêndice.

Exemplo 2.4.1 *Se uma pessoa começar guardando R\$3,00 por mês, e dobrar esse valor a cada mês, quanto ela guardará no 6º mês?*

Resolução: Pelo problema observamos que a_1=3, q=2 e n=6. Pela fórmula do termo geral da PG:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \times q^{n-1} \\ a_6 &= 3 \times 2^{6-1} \\ a_6 &= 96 \end{aligned}$$

Portanto, essa pessoa guardará R\$96,00 no 6º mês.

Teorema 2.4.2 *Em uma progressão geométrica com n termos de razão $q \neq 1$, temos que a soma de todos os termos é dada por*

$$S = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{2.4}$$

A demonstração encontra-se no Apêndice.

Exemplo 2.4.2 *Se uma pessoa começar guardando R\$5,00 por mês, e ir dobrando esse valor a cada mês, quanto ela terá guardado após 10 meses?*

Resolução: Pelo problema observamos que a_1=5, q=2 e n=10. Pela fórmula da soma de termos da P.G. (2.4) temos:

$$S = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow S = 5 \times \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \Rightarrow S = 5115$$

Assim, essa pessoa terá guardado R\$ 5115,00 após 10 meses.

Teorema 2.4.3 *Em uma progressão geométrica com infinitos termos de razão -1< q <1, temos que a soma de todos os termos é dada por*

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \tag{2.5}$$

A demonstração encontra-se no Apêndice.

Exemplo 2.4.3 *Se uma pessoa começar guardando R\$500,00 por mês, e a cada mês que passar ela guardar metade do que guardou no mês anterior, qual o valor máximo que ela conseguirá guardar?*

Resolução: Pelo problema observamos que $a_1 = 500$, $q = \frac{1}{2}$ e $n = \infty$. Pela fórmula de soma de infinitos termos da P.G. (2.5) temos:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{500}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S = 1000$$

Portanto, o valor máximo que essa pessoa conseguirá guardar será $R\$$ 1000,00.

2.5 Juros Simples

No regime de Juros Simples, os juros de cada período são calculados sempre sobre o mesmo capital inicial (C) aplicado. Os juros não são capitalizados e, consequentemente, não rendem juros. É como se existissem duas contas independentes: uma para o Capital, que rende juros, e outra conta para o rendimento dos juros do capital inicial, que não rende juros.

Por se tratar de um assunto já visto em Ensino Fundamental, é recomendável que o professor não perca muito tempo em juros simples, fazendo uma revisão com os principais tópicos que serão utilizados futuramente.

Teorema 2.5.1 *No regime de juros simples, um capital C aplicado a uma taxa i durante n períodos, gerará um juro J, dado pela fórmula*

$$J = C \times i \times n \tag{2.6}$$

É importante observar que os juros simples crescem em progressão aritmética, já que o aumento em juros simples é constante, com isso temos que o primeiro termo da PA é 0, já que no período inicial não existe juros e a razão será $C \times i$, e o enésimo termo será o valor total de juros cobrado após n períodos.

A fórmula para o cálculo da taxa de juros, também pode ser usada para gerar o cálculo do Capital C, do tempo n e da taxa i. Como esta fórmula envolve quatro variáveis, basta conhecer três delas para gerar a variável desconhecida.

Para calcular o capital, isolamos a incógnita C na fórmula para obter

$$C = \frac{J}{i \times n}. \tag{2.7}$$

Para obter o período n, temos

$$n = \frac{J}{C \times i}. \tag{2.8}$$

Para calcular a taxa i, temos

$$i = \frac{J}{C \times n}. \tag{2.9}$$

É importante ressaltar, que a taxa i e o tempo n devem estar expressas coerentemente, ou seja, se a taxa for mensal, o tempo deve ser expresso em meses, caso contrário, deve-se transformar a taxa, usando-se uma taxa proporcional.

Exemplo 2.5.1 *Calcular os juros simples obtidos pela aplicação do capital R$ 1.200,00, colocado à taxa de 5% ao mês, durante 8 meses.*

Resolução: Pelos dados fornecidos temos que $C = 1200$, $i = 0{,}05$ e $n = 8$. Aplicando a fórmula dos juros (2.6), temos

$$J = C \times i \times n$$

$$J = 1200 \times 0,05 \times 8 = 480$$

Desse modo, os juros obtidos foram de R$ 480,00.

Exemplo 2.5.2 *Qual o capital, que emprestado a juros simples de 15% ao ano, produz em 5 anos juros no valor de R$ 210,00?*

Resolução: Pelos dados fornecidos temos que $J = 210$, $i = 0{,}15$ e $n = 5$. Aplicando a fórmula do capital (2.7), obtemos

$$C = \frac{J}{i \times n}$$

$$C = \frac{210}{0,15 \times 5} = 280$$

Portanto, o capital emprestado deve ser de R$ 280,00.

Exemplo 2.5.3 *Durante quanto tempo o capital R$ 850,00 deve ficar emprestado, à taxa de juros simples de 3% ao mês para gerar a renda R$ 76,50 de juros?*

Resolução: Pelos dados fornecidos temos que $C = 850$, $i = 0{,}03$ e $J = 76{,}5$. Aplicando a fórmula do período (2.8), temos

$$n = \frac{J}{C \times i}$$

$$n = \frac{76,5}{850 \times 0,03} = 3$$

Dessa maneira, o capital deve ficar emprestado por 3 meses.

Exemplo 2.5.4 *A que taxa de juros simples devemos emprestar R$ 2.500,00, para que em 4 bimestres, possamos ter a renda R$ 180,00 de juros?*

Resolução: Pelos dados fornecidos temos que $C = 2500$, $n = 4$ e $J = 180$. Aplicando a fórmula da taxa de juros (2.9), obtemos

$$i = \frac{J}{C \times n}$$

$$i = \frac{180}{2500 \times 4} = 0,018$$

Portanto, a taxa deve ser de 1,8% ao bimestre.

Teorema 2.5.2 *Podemos definir montante (M) como o nome dado à soma do capital com os juros produzidos em um determinado período, ou seja,*

$$M = C + J \tag{2.10}$$

É possível calcular os juros ou o capital que compõem um montante, quando se conhece, além do montante, apenas a taxa e o tempo.

Observe que este cálculo é muito complicado para se realizar com o uso das fórmulas anteriores, pois elas necessitam que se identifique que parcela do montante corresponde aos juros, uma vez que o montante não se apresenta de forma explícita nessas fórmulas. Substituindo $J = C \times i \times n$ na expressão (2.10), segue que

$$\begin{aligned} M &= C + J \\ M &= C + C \times i \times n \\ M &= C(1 + i \times n) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Exemplo 2.5.5 *Um certo capital ficou emprestado à taxa de juros simples de 10% ao ano, durante 8 anos. Qual é o valor dos juros produzidos, se ao fim desse período o montante correspondia a R\$900,00?*

Resolução: Pelos dados fornecidos temos que $i =$ 0,1, $n = 8$ e $M = 900$. Aplicando a fórmula do capital (2.7), temos

$$C = \frac{J}{i \times n} \Longleftrightarrow C = \frac{J}{0,1 \times 8} \Longleftrightarrow C = \frac{10 \times J}{8}$$

Aplicando a fórmula montante (2.10), obtemos

$$M = C + J$$

$$900 = \frac{10 \times J}{8} + J \Longleftrightarrow J = \frac{900 \times 8}{18} = 400,$$

Logo, os juros produzidos foram de R$400,00.

Exemplo 2.5.6 *Qual é o capital, que ficando emprestado por 5 meses, à taxa de juros simples de 4% ao mês, produz o montante de R\$5.400,00?*

Resolução: Pelos dados fornecidos temos que $n = 5$, $i =$ 0,04 e $M = 5400$. Aplicando a fórmula do montante (2.12), obtemos:

$$M = C(1 + i \times n) \Longleftrightarrow C = \frac{5400}{1 + 0,04 \times 5} = 4500,$$

Portanto, o capital deve ser de R$4.500,00.

2.6 Juros Compostos

Denominamos capitalização composta ou capitalização com juros compostos ao regime de capitalização pelo qual os juros auferidos em cada período são somados ao capital anterior, para render juros no período seguinte. Esta prática é denominada anatocismo ou, mais popularmente "juros sobre juros".

Teorema 2.6.1 *No regime de juros compostos de taxa i, um capital inicial C_0, transforma-se, em n períodos de tempo, em um montante igual a $C_n = C_0 \times (1 + i)^n$.*

A demonstração se encontra no Apêndice.

2.6.1 Taxas Equivalentes

Duas taxas são equivalentes quando se referindo a períodos de capitalizações diferentes, produzem os mesmos juros num determinado período, quando aplicadas sobre um mesmo capital.

Como já fora definido anteriormente, no regime de capitalização a juros composto os juros incidem também sobre os juros do período anterior. O que significa que quanto mais capitalizações o capital sofrer em um determinado período, maior será o seu rendimento.

Para facilitar a nomenclatura vamos denotar por i o valor da taxa correspondente ao menor período de capitalização e por I o valor da taxa do maior período de capitalização.

A Figura (2.1) a seguir mostra a relação entre duas taxas equivalentes aplicadas sobre um mesmo capital C_0. Observe que o efeito de três aplicações da taxa i é o mesmo de uma única aplicação da taxa I e a relação entre os períodos é de 1 : 3.

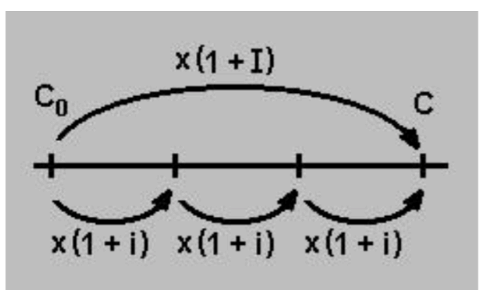

Figura 2.1: Taxas equivalentes.

Supondo conhecida a taxa i do menor período, queremos obter a taxa I equivalente a i. Como o efeito dessas duas taxas sobre o capital C_0 é o mesmo nesse período, temos:

$$\begin{aligned} C_0(1 + I) &= C_0(1 + i)^3 \\ (1 + I) &= (1 + i)^3 \\ I &= (1 + i)^3 - 1 \end{aligned}$$

Se o período maior fosse igual a n vezes o período menor, teríamos a fórmula

$$I = (1+i)^n - 1. \tag{2.12}$$

Agora, suponhamos conhecida a taxa I do maior período e queremos conhecer a taxa i equivalente a I. Pelo mesmo raciocínio usado na demonstração anterior, temos que

$$\begin{aligned} (1+i)^3 &= (1+I) \\ (1+i) &= \sqrt[3]{1+I} \\ i &= \sqrt[3]{1+I} - 1. \end{aligned}$$

Buscando generalizar o raciocínio usado para gerar o resultado anterior, é fácil perceber que se a taxa I do período maior fosse igual a n vezes a taxa i do período menor, teríamos a fórmula

$$i = \sqrt[n]{1+I} - 1. \tag{2.13}$$

As principais transformações ocorrem entre taxa anual (i_a), taxa semestral (i_s), taxa trimestral (i_t), taxa bimestral (i_b), taxa mensal (i_m) e taxa diária (i_d). Sabendo que 1 ano = 2 semestres = 4 trimestres = 6 bimestres = 12 meses ≈ 360 dias, podemos relacionar as taxas da seguinte maneira

$$(1+i_a) = (1+i_s)^2 = (1+i_t)^4 = (1+i_b)^6 = (1+i_m)^{12} = (1+i_d)^{360} \tag{2.14}$$

Exemplo 2.6.1 *Qual taxa anual é equivalente a taxa de 2% ao mês a juros compostos?*

Resolução: Dado a taxa mensal i_m = 0,02 iremos descobrir a taxa anual equivalente através da relação (2.14) .

$$\begin{aligned} (1+i_a) &= (1+i_m)^{12} \\ (1+i_a) &= (1+002)^{12} \\ i_a &= (1,02)^{12} - 1 \\ i_a &\approx 0,27 \end{aligned}$$

Assim sendo, temos que a taxa mensal de 2% equivale a taxa anual de 27% aproximadamente.

Exemplo 2.6.2 *Qual taxa mensal equivale a taxa de 10% ao semestre a juros compostos?*

Dado a taxa semestral i_s = 0,1 iremos descobrir a taxa mensal equivalente através da relação

$$\begin{aligned} (1+i_s) &= (1+i_m)^6 \\ (1+0,1) &= (1+i_m)^6 \\ i_m &= \sqrt[6]{1,1} - 1 \\ i_m &\approx 0,016 \end{aligned}$$

Sendo assim, temos que a taxa semestral de 10% equivale a taxa mensal de aproximadamente 1,6%. É valido ressaltar que para determinados cálculos é necessário o uso de uma calculadora científica.

Exemplo 2.6.3 *Calcular o montante produzido pelo capital R\$7.800,00, aplicado a juros compostos de 5% ao mês, durante 6 meses.*

Pelos dados fornecidos temos que $C_0 = 7800$, $i = 0{,}05$ e $n = 6$. Aplicando a fórmula do montante, obtemos

$$\begin{aligned} C_6 &= C_0(1+i)^6 \\ C_6 &= 7800(1+0,05)^6 \\ C_6 &\approx 10452,75 \end{aligned}$$

Logo, o valor aproximado do montante produzido foi de R\$10.452,75.

Exemplo 2.6.4 *Calcular o capital inicial necessário para que, a juros compostos de 4% ao mês, produza o montante de R\$5.600,00, durante 7 meses.*

Resolução: Pelos dados fornecidos temos que $C_7 = 5600$, $i = 0{,}04$ e $n = 7$. Aplicando a fórmula do capital inicial, obtemos

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{C_7}{(1+i)^7} \\ C_0 &= \frac{5600}{(1+0,04)^7} \\ C_0 \approx 4255,54 & \end{aligned}$$

Consequentemente, o capital inicial deve ser de aproximadamente R\$4.255,54.

É importante observar que para o cálculo do tempo e da taxa no regime de capitalização a juros compostos, ha necessidade da aplicação de equações exponenciais e de logaritmos, o que às vezes pode obrigar o uso de calculadora científica ou de tábuas de logaritmos.

2.7 Juros Simples x Juros Compostos

Comparar Juros Simples e Compostos é importante, pois na comparação é possível observar que o montante no Juros Simples vai ocorrendo em progressão aritmética ao decorrer dos períodos, já o montante a juros compostos ocorre em progressão geométrica.

A Tabela (2.3) compara o que vai ocorrendo mês a mês com um capital inicial de R\$1500,00 a uma taxa de juros de 5% ao mês num período de 18 meses. Observando a Tabela (2.3), é perceptível que o montante nos juros simples tem um aumento constante de R\$5,00 (5% de R\$100,00) no decorrer dos meses, o que acontece na progressão aritmética.

Tabela 2.3: Comparação entre Juros Simples e Juros Compostos

Mês	Juros Simples	Juros Compostos	Diferença
0	R$ 1.500,00	R$ 1.500,00	R$ 0,00
1	R$ 1.575,00	R$ 1.575,00	R$ 0,00
2	R$ 1.650,00	R$ 1.653,75	R$ 3,75
3	R$ 1.725,00	R$ 1.736,44	R$ 11,44
4	R$ 1.800,00	R$ 1.823,26	R$ 23,26
5	R$ 1.875,00	R$ 1.914,42	R$ 39,42
6	R$ 1.950,00	R$ 2.010,14	R$ 60,14
7	R$ 2.025,00	R$ 2.110,65	R$ 85,65
8	R$ 2.100,00	R$ 2.216,18	R$ 116,18
9	R$ 2.175,00	R$ 2.326,99	R$ 151,99
10	R$ 2.250,00	R$ 2.443,34	R$ 193,34
11	R$ 2.325,00	R$ 2.565,51	R$ 240,51
12	R$ 2.400,00	R$ 2.693,78	R$ 293,78
13	R$ 2.475,00	R$ 2.828,47	R$ 353,47
14	R$ 2.550,00	R$ 2.969,90	R$ 419,90
15	R$ 2.625,00	R$ 3.118,39	R$ 493,39
16	R$ 2.700,00	R$ 3.274,31	R$ 574,31
17	R$ 2.775,00	R$ 3.438,03	R$ 663,03
18	R$ 2.850,00	R$ 3.609,93	R$ 759,93

Nos juros compostos, o montante obtido é sempre o montante anterior multiplicado por 1,05 (fator de aumento), o que ocorre na progressão geométrica. Interessante a observar também que no mês 1, os montantes são iguais pois o juros é calculado em cima do mesmo valor, e que a partir desse mês os montantes já ficam diferentes.

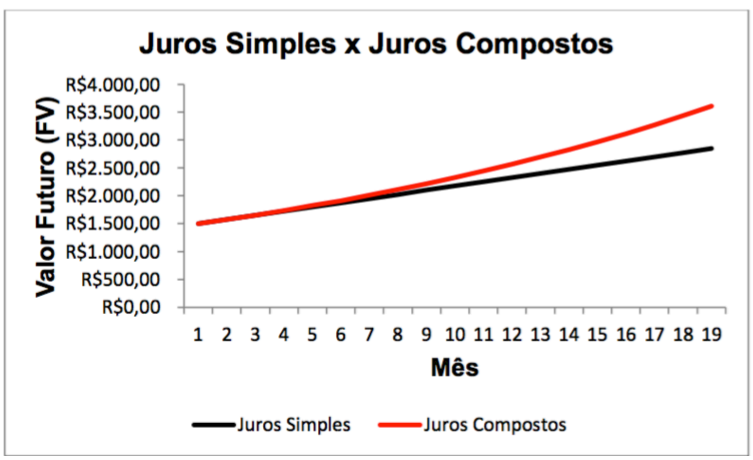

Figura 2.2: Juros Simples x Juros Compostos

Observando a Figura (2.2) é possível verificar que o crescimento no juros simples é linear e o crescimento no juros compostos é exponencial.

Capítulo 3

Série de Pagamentos ou Recebimentos

O objetivo de constituir um capital em uma data futura leva ao processo de capitalização. Caso contrário, quando queremos pagar uma dívida, temos um processo de amortização. Pode ocorrer também o caso em que tenhamos pagamento pelo uso, sem que tenhamos amortização: é o caso dos aluguéis. Estas situações caracterizam a existência de rendas ou série de pagamentos ou de recebimentos.

3.1 Valor Presente (PV) e Pagamento Periódico (PMT)

Para calcular o valor presente (PV) de um financiamento em função do valor do pagamento periódico (PMT) e vice-versa, precisamos ter a taxa de juros em cada período (i) e o período do financiamento (n). Para isso, encontramos as seguintes relações

$$PV = PMT \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]. \tag{3.1}$$

$$PMT = PV \times \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]. \tag{3.2}$$

Demonstração: Para demonstrar a fórmula para o cálculo do valor financiado (PV) e do valor da prestação do financiamento (PMT) é necessário observar o fluxo de caixa dado na figura (3.1).

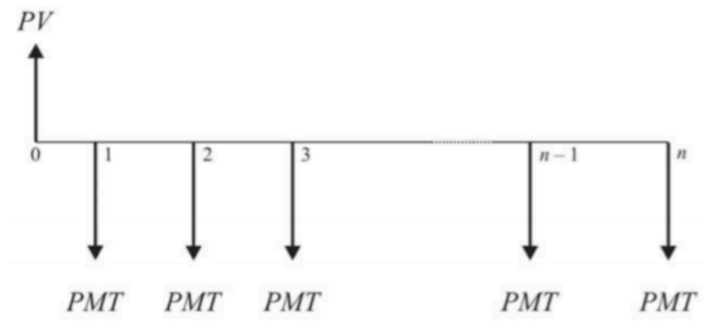

Figura 3.1: Fluxo de caixa PV e PMT

Seja i a taxa de juros e n o período, vamos levar todos os valores do fluxo de caixa para o período n observado no fluxo de caixa. Assim, teremos a seguinte relação

$$PV \times (1+i)^n = PMT \times (1+i)^{n-1} + PMT \times (1+i)^{n-2} + \cdots + PMT \times (1+i) + PMT$$

Deixando PMT em evidência no segundo membro

$$PV \times (1+i)^n = PMT \times [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1]$$

Aplicando a fórmula da soma dos termos da P.G.

$$PV \times (1+i)^n = PMT \times \left[1 \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\right].$$

$$PV \times (1+i)^n = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right].$$

Isolando o PV

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

Após determinar a relação que encontra o valor financiado (PV), isolamos o valor da prestação (PMT) e encontramos a outra relação

$$PMT = PV \times \left[\frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}\right]$$

Exemplo 3.1.1 *Uma loja esta vendendo um ar condicionado por R\$1249,00 à vista. Existe a opção de pagar em 12 parcelas iguais, mas com uma taxa de juros de 2% ao mês. Qual será o valor da parcela caso deseje pagar em 12 vezes?*

Resolução: Interpretando o problema, temos que $PV = 1249$, $n = 12$ e $i = 0{,}02$. Aplicando a fórmula do pagamento periódico (3.2) temos

$$PMT = PV \times \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$PMT = 1249 \times \left[\frac{0,02}{1-(1+0,02)^{-12}}\right] = 118,10$$

Portanto, o valor de cada parcela será R$ 118,10.

Exemplo 3.1.2 *Thiago deseja comprar um carro, mas observando seu orçamento percebeu que poderá gastar no máximo R$500,00 por mês num período de 5 anos. Levando em consideração que a taxa de juros nas financiadoras são em média 2% ao mês, qual o valor máximo do carro que Thiago deverá procurar?*

Resolução: Observando o problema, temos que $PMT = 500$, $n = 60$ e $i = 0{,}02$. Aplicando a fórmula do valor presente (3.1) temos

$$PV = PMT \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$PV = 500 \times \left[\frac{1-0,02^{-60}}{0,02}\right]$$

$PV = 17380,44$. Portanto, Thiago deverá procurar carros de no máximo R$ 17.380,44.

3.2 Valor Futuro (FV) e Pagamento Periódico (PMT)

Para calcular o valor futuro (FV) de um investimento em função do valor do pagamento periódico (PMT) e vice-versa, precisamos ter a taxa de juros em cada período (i) e o período (n). Para isso, encontramos as seguintes relações

$$FV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]. \tag{3.3}$$

$$PMT = FV \times \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]. \tag{3.4}$$

Demonstração: Para demonstrar a fórmula para o cálculo do valor futuro (FV)e do valor do quanto deve guardar periodicamente (PMT) é necessário observar o fluxo de caixa dado na Figura (3.2).

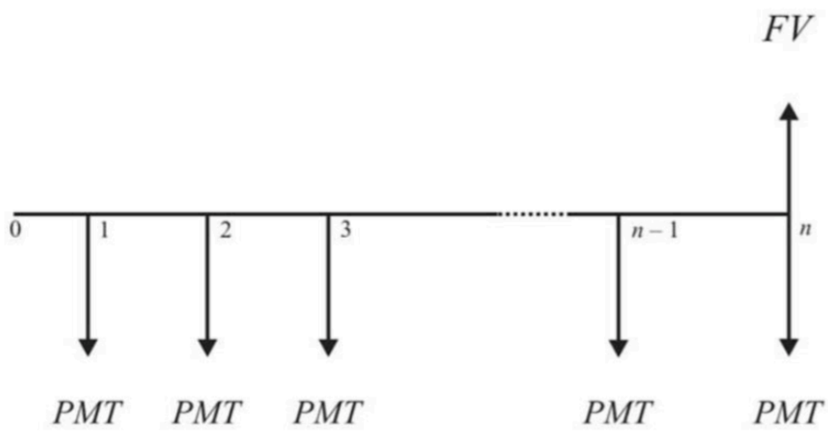

Figura 3.2: Fluxo de caixa FV e PMT

Seja i a taxa de juros e n o período, vamos levar todos os valores do fluxo de caixa para o período n observado no fluxo de caixa (3.2). Assim, teremos a seguinte relação

$$FV = PMT \times (1+i)^{n-1} + PMT \times (1+i)^{n-2} + \cdots + PMT \times (1+i) + PMT$$

Deixando PMT em evidência no segundo membro

$$FV = PMT \times [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1]$$

Aplicando a fórmula da soma dos termos da P.G.

$$FV = PMT \times \left[1 \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\right]$$

$$FV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Após determinar a relação que encontra o valor futuro PV, isolamos o valor do investimento periódico PMT e encontramos a outra relação

$$PMT = FV \times \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Exemplo 3.2.1 *O Sr. Justino deposita mensalmente R\$450,00 no Banco Alegria. Sabendo-se que a taxa de juros da aplicação é de 1,12% ao mês, quanto possuirá ao final de dois anos?*

Resolução: Interpretando o problema, temos que $n = 24$, Aplicando a fórmula do valor futuro (3.3) temos

$$FV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$FV = 450 \times \left[\frac{(1 + 0,0112)^{24} - 1}{0,0112}\right] = 12312,32$$

Portanto, Sr. Justino possuirá R$12.312,32 ao final de dois anos.

Exemplo 3.2.2 *Certa pessoa deseja comprar um carro por R$ 25.000,00 à vista daqui a 18 meses. Admitindo-se que ela vá poupar certa quantia mensal que será aplicada em título de renda fixa rendendo 2,15% ao mês de juros compostos, determine quanto deve ser poupado mensalmente.*

Resolução: Observando o problema, temos que $FV = 25000$, $n = 18$ e $i = 0{,}0215$. Aplicando a fórmula do investimento periódico (3.4) temos

$$PMT = FV \times \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$PMT = 25000 \times \left[\frac{0,0215}{(1 + 0,0215)^{18} - 1}\right]$$

$PMT = 1152,13$. Portanto, essa pessoa deverá poupar R$1.152,13 mensalmente.

Capítulo

4

Sistemas de Amortização

Amortização é um processo de extinção de uma dívida através de pagamentos periódicos, que são realizados em função de um planejamento, de modo que cada prestação corresponde à soma do reembolso do capital ou do pagamento dos juros do saldo devedor, podendo ter o reembolso de ambos, sendo que juros são sempre calculados sobre o saldo devedor.

A evolução do financiamento ocorre de acordo com o sistema de amortização escolhido pelo cliente. O sistema de amortização define a forma de cálculo da prestação de amortização. Ao realizar um financiamento pode-se optar por um dos sistemas abaixo:

1. Sistema Francês de Amortização - Tabela Price.
2. Sistema de Amortização Constante - SAC.

4.1 Sistema Francês de Amortização - Tabela Price

Parcelas constantes, amortização crescente. A medida que o tempo passa, a dívida vai sendo amortizada (reduzida) e o valor que deve ser pago referente a juros sobre o saldo devedor consequentemente diminui.

Para construção da Tabela Price é necessário ter os seguintes dados:

- Valor Presente Financiado (PV).
- Valor do Pagamento Periódico (PMT).
- Período do Financiamento (n).
- Taxa de Juros do Período Financiado (i).

Exemplo 4.1.1 *Construa a Tabela Price mostrando como é calculada cada amortização no financiamento de R$ 20.000 no Sistema Francês de Amortização, a uma taxa de 1,5% de juros ao mês a ser pago num período de 24 meses.*

Resolução: Inicialmente é preciso encontrar o valor de cada parcela (PMT) com a Equação (3.2), já que a Tabela Price consiste no sistema de parcelas iguais. Para tal, é necessário o valor financiado (PV), a taxa de juros (i) e o período (n) de financiamento.

Sabendo que será financiado R$ 20.000, a uma taxa de juros de 1,5% ao mês, no período de 24 meses, podemos encontrar o valor da parcela.

$$PMT = PV \times \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$PMT = 20000 \times \left[\frac{0,015}{1-(1+0,015)^{-24}}\right] = 998,48$$

Como as parcelas serão constantes, o que mudará na tabela será o saldo devedor (SD_n), os juros (J_n) e a amortização A_n em cada em cada período.

$$\begin{aligned} J_n &= SD_{n-1} \times i \\ A_n &= PMT - J_n \\ SD_n &= SD_{n-1} - A_n. \end{aligned}$$

Assim, a linha do primeiro mês da Tabela Price é calculada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} J_1 &= SD_0 \times i = 20000.0,015 = 300 \\ A_1 &= PMT - J_1 = 998,48 - 300 = 698,48 \\ SD_1 &= SD_0 - A_1 = 20000 - 698,48 = 19301,52 \end{aligned}$$

Na mesma ideia, é calculada a segunda linha

$$\begin{aligned} J_2 &= SD_1 \times i = 19301,52.0,015 = 289,52 \\ A_2 &= PMT - J_2 = 998,48 - 289,52 = 708,96 \\ SD_2 &= SD_1 - A_2 = 19301,52 - 708,96 = 18592,56 \end{aligned}$$

Analogamente, as 24 linhas são calculadas, formando a Tabela Price.

Tabela 4.1: Tabela Price

Mês	S. Devedor	Juros	Amortização	Prestação
0	R$ 20.000,00			
1	R$ 19.301,52	R $ 300,00	R$ 698,48	R$ 998,48
2	R$ 18.592,56	R $ 289,52	R$ 708,96	R$ 998,48
3	R$ 17.872,97	R$ 278,89	R$ 719,59	R$ 998,48
4	R$ 17.142,58	R$ 268,09	R$ 730,39	R$ 998,48
5	R$ 16.401,23	R$ 257,14	R$ 741,34	R$ 998,48
6	R$ 15.648,77	R$ 246,02	R$ 752,46	R$ 998,48
7	R$ 14.885,02	R$ 234,73	R$ 763,75	R$ 998,48
8	R$ 14.109,81	R$ 223,28	R$ 775,21	R$ 998,48
9	R$ 13.322,98	R$ 211,65	R$ 786,83	R$ 998,48
10	R$ 12.524,34	R$ 199,84	R$ 798,64	R$ 998,48
11	R$ 11.713,72	R$ 187,87	R$ 810,62	R$ 998,48
12	R$ 10.890,95	R$ 175,71	R$ 822,78	R$ 998,48
13	R$ 10.055,83	R$ 163,36	R$ 835,12	R$ 998,48
14	R$ 9.208,19	R$ 150,84	R$ 847,64	R$ 998,48
15	R$ 8.347,83	R$ 138,12	R$ 860,36	R$ 998,48
16	R$ 7.474,56	R$ 125,22	R$ 873,26	R$ 998,48
17	R$ 6.588,20	R$ 112,12	R$ 886,36	R$ 998,48
18	R$ 5.688,54	R$ 98,82	R$ 899,66	R$ 998,48
19	R$ 4.775,39	R$ 85,33	R$ 913,15	R$ 998,48
20	R$ 3.848,53	R$ 71,63	R$ 926,85	R$ 998,48
21	R$ 2.907,78	R$ 57,73	R$ 940,75	R$ 998,48
22	R$ 1.952,91	R$ 43,62	R$ 954,87	R$ 998,48
23	R$ 983,73	R$ 29,29	R$ 969,19	R$ 998,48
24	R$ 0,00	R$ 14,76	R$ 983,73	R$ 998,48
TOTAL		R$ 3.963,57	R$ 20.000,00	R$ 23.963,57

Com a Tabela (4.1), é possível perceber que os juros são decrescentes no decorrer dos meses, e assim, como a parcela é constante, a amortização vai crescendo com o passar dos meses.

4.2 Sistema de Amortização Constante - SAC

Parcelas decrescentes, amortização constante. À medida que a dívida começa a ser amortizada, a parcela dos juros e consequentemente a prestação como um todo tende a decrescer. Com isso, o saldo devedor e a sua prestação tendem a decrescer de forma constante desde o início do financiamento e não deixam resíduos.

Para construir a tabela do Sistema de Amortização Constante, é necessário inicialmente através do Valor Presente financiado (PV) encontrar quanto será amortizado (A) em cada período (n) do financiamento. Para isso, utiliza-se a seguinte relação

$$A = \frac{PV}{n} \tag{4.1}$$

Após descobrir o valor que será amortizado periodicamente, é necessário descobrir qual será o valor da parcela em cada período, que varia de acordo com o saldo devedor SD do financiamento, já que os juros (J) cobrados são em cima do saldo devedor que vai diminuindo a cada período. Para isso serão necessárias as seguintes relações

$$\begin{aligned} J_n &= SD_{n-1} \times i \\ PMT_n &= A + J_n \\ SD_n &= SD_{n-1} - A \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.1 *Ao financiar R$ 20.000 no Sistema de Amortização Constante (SAC), a uma taxa de 1,5% de juros ao mês a ser pago num período de 24 meses. Qual será o valor de cada parcela?*

Resolução: Para encontrar o valor de cada parcela, é necessário construir uma tabela do sistema SAC (4.1), já que as parcelas não são iguais. Para isso, é necessário encontrar o valor da amortização

$$A = \frac{PV}{n}.$$

$$A = \frac{20000}{24} = 833,33.$$

Encontrada a amortização (A), cada parcela (PMT) é calculada adicionando a n mesma aos juros J_n cobrado no período. Sendo que os juros é o saldo devedor (SD_{n-1}) do período anterior multiplicado pela taxa de juros (i) do financiamento.

Assim, a primeira parcela (PMT) é calculada somando a amortização aos 1juros cobrados no período

$$PMT_1 = A + J_1 = A + SD_0 \times i = 833,33 + 20000 \times 0,015 = 1133,33$$

Para encontrar a parcela do segundo mês PMT_2 é necessário atualizar o saldo devedor e em seguida repetir o procedimento utilizado na primeira parcela

$$SD_1 = SD_0 - A = 20000 - 833,33 = 19166,67$$

$$PMT_2 = A + J_2 = A + SD_1 \times i = 833,33 + 19166,67 \times 0,015 = 1120,83$$

Atualizando o saldo devedor novamente, será possível encontrar o valor da terceira parcela da mesma maneira. Portanto, repetindo o procedimento 24 vezes, iremos encontrar o valor de cada parcela, que pode ser melhor observado na tabela a seguir.

Tabela 4.2: Tabela SAC

Mês	S. Devedor	Juros	Amortização	Prestação
0	R$ 20.000,00			
1	R$ 19.166,67	R$ 300,00	R$ 833,33	R$ 1.133,33
2	R$ 18.333,33	R$ 287,50	R$ 833,33	R$ 1.120,83
3	R$ 17.500,00	R$ 275,00	R$ 833,33	R$ 1.108,33
4	R$ 16.666,67	R$ 262,50	R$ 833,33	R$ 1.095,83
5	R$ 15.833,33	R$ 250,00	R$ 833,33	R$ 1.083,33
6	R$ 15.000,00	R$ 237,50	R$ 833,33	R$ 1.070,83
7	R$ 14.166,67	R$ 225,00	R$ 833,33	R$ 1.058,33
8	R$ 13.333,33	R$ 212,50	R$ 833,33	R$ 1.045,83
9	R$ 12.500,00	R$ 200,00	R$ 833,33	R$ 1.033,33
10	R$ 11.666,67	R$ 187,50	R$ 833,33	R$ 1.020,83
11	R$ 10.833,33	R$ 175,00	R$ 833,33	R$ 1.008,33
12	R$ 10.000,00	R$ 162,50	R$ 833,33	R$ 995,83
13	R$ 9.166,67	R$ 150,00	R$ 833,33	R$ 983,33
14	R$ 8.333,33	R$ 137,50	R$ 833,33	R$ 970,83
15	R$ 7.500,00	R$ 125,00	R$ 833,33	R$ 958,33
16	R$ 6.666,67	R$ 112,50	R$ 833,33	R$ 945,83
17	R$ 5.833,33	R$ 100,00	R$ 833,33	R$ 933,33
18	R$ 5.000,00	R$ 87,50	R$ 833,33	R$ 920,83
19	R$ 4.166,67	R$ 75,00	R$ 833,33	R$ 908,33
20	R$ 3.333,33	R$ 62,50	R$ 833,33	R$ 895,83
21	R$ 2.500,00	R$ 50,00	R$ 833,33	R$ 883,33
22	R$ 1.666,67	R$ 37,50	R$ 833,33	R$ 870,83
23	R$ 833,33	R$ 25,00	R$ 833,33	R$ 858,33
24	R$ 0,00	R$ 12,50	R$ 833,33	R$ 845,83
TOTAL		R$ 3.750,00	R$ 20.000,00	R$ 23.750,00

É importante observar na tabela do sistema de amortização constante (SAC) Tabela (4.2) que as parcelas são decrescentes devido ao saldo devedor, que diminui a cada período. Com isso, como as parcelas são calculadas em função dos juros em cima do saldo devedor, então elas serão cada vez menores.

4.3 Tabela Price x SAC

O Sistema Francês de Amortização (Tabela Price) e o Sistema de Amortização Constante (SAC) são os principais utilizados em financiamento e empréstimos. A Tabela (4.3) mostra um resumo entre a diferença dos sistemas de amortização.

Tabela 4.3: Tabela Price x SAC

	PRICE	SAC
Prestações	Constantes	Decrescentes
Amortizações	Crescentes	Constantes
Primeira Prestação	Menos expressiva	Mais expressiva
Última Prestação	Mais expressiva	Menos expressiva
Saldo Devedor	Decréscimo Inicial Lento	Decréscimo Linear

4.3.1 Simulação de Financiamentos

Exemplo 4.3.1 *Financiamento de R\$42.000,00, a uma taxa de juros de 2,5% ao mês, num período de 48 meses.*

Tabela 4.4: Tabela Price x SAC Exemplo 4.3.1

	PRICE	SAC
Primeira Prestação	R\$ 1.512,25	R\$ 1.925,00
Última Prestação	R\$ 1.512,25	R\$ 896,88
Total de Juros Pagos	R\$ 30.588,08	R\$ 25.725,00

Tabela (4.4) mostra a comparação.

Exemplo 4.3.2 *Financiamento de R\$126.000,00, a uma taxa de juros de 0,65% ao mês, num período de 200 meses.*

Tabela 4.5: Tabela Price x SAC Exemplo 4.3.2

	PRICE	SAC
Primeira Prestação	R\$ 1.127,60	R\$ 1.449,00
Última Prestação	R\$ 1.127,60	R\$ 634,10
Total de Juros Pagos	R\$ 99.520,65	R\$ 82.309,50

Tabela (4.5) mostra a comparação.Através dos financiamentos simulados acima, é possível perceber que quanto maior for o período, maior será a diferença entre os juros pagos na Price e na SAC. Assim, vimos que a Tabela Price é mais recomendada para financiamentos de um curto prazo, e a SAC é utilizada mais em financiamentos a longo prazo.

Capítulo 5

Aplicativo Calculadora Financeira

Hoje em dia está cada vez mais fácil o acesso a aplicativos por meio do celular. Um aplicativo play.google.com (2016) interessantíssimo para auxílio na Matemática Financeira é o "Calculadora Financeira" oferecido por Xandroid.

Figura 5.1: Página inicial do aplicativo

Este aplicativo é facilmente encontrado para quem tem smartphone com o sistema operacional Android na Play Store. No aplicativo é possível fazer cálculos de juros, descontos, financiamento e montante de forma rápida e prática. A Figura (5.1) mostra a página inicial do aplicativo com todas as suas funções.

Este aplicativo tem como objetivo disponibilizar no mercado de software livre uma ferramenta de auxilio na utilização da Matemática Financeira, na tentativa de otimizar o uso de fórmulas financeiras.

Através da função financiar é possível simular facilmente financiamentos na Tabela Price e SAC, evitando assim, ser enganado na hora de financiar algo, o que infelizmente é muito comum hoje em dia, já que muitos compradores verificam somente se a parcela cabe no orçamento mensal e nem se preocupam nos valores exorbitantes de juros que são cobrado no final de certos financiamentos.

Na função financiar para simular um financiamento é necessário escolher a forma de financiamento (Tabela Price ou SAC) e preencher três das quatro lacunas disponíveis para preenchimento (Valor Financiado, Taxa de Juros, Período e Valor da Prestação), deixando sempre a lacuna que deseja saber o valor em branco. Após o preenchimento, basta apertar em calcular que o valor procurado aparecerá na tela.

A Figura (5.2) abaixo mostra uma simulação de um financiamento para descobrir o valor da prestação na Tabela Price ao financiar R$ 20.000,00 com uma taxa de juros 1,5% ao mês durante um período de 36 meses.

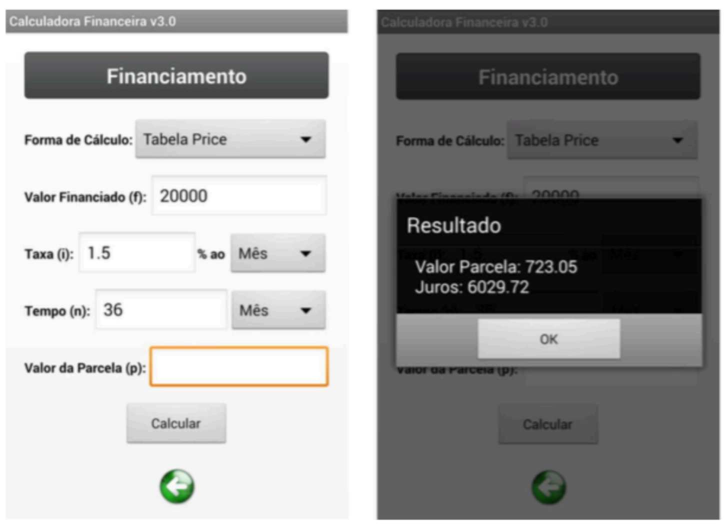

Figura 5.2: Simulação de um financiamento

Rapidamente o aplicativo fornece que o valor da prestação será de R$ 723,05 e que o juro total cobrado no financiamento será de R$ 6.029,72.

Capítulo

6

Análise de Alguns Livros Didáticos

Neste capítulo serão avaliados alguns livros didáticos relevantes sobre o tema.

6.1 Matemática: Contexto & Aplicações - Dante, L. R.

O autor inicia o livro Dante (2011) introduzindo o assunto de Matemática Financeira através de um exemplo em que fica o questionamento se é vantajoso pagar um produto à vista, ou aplicar o dinheiro na poupança e fazer o pagamento parcelado.

Para iniciar o assunto, ele faz uma breve abordagem em números proporcionais, revisando alguns conteúdos vistos no Ensino Fundamental, tais como grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Assim, ele trabalha um exemplo para dividir o lucro de uma empresa entre três sócios em partes proporcionais ao investimento individual feito por cada um.

A porcentagem é abordada representando frações com o denominador 100, dando exemplos e mostrando equivalência entre as frações. Logo após, Dante refere-se à porcentagem de uma quantia exemplificando situações, sem colocar nada formal a respeito do assunto, o que é interessante já que alguns alunos têm dificuldades em assimilar determinados assuntos quando trabalhados com variáveis.

A parte interessante do livro vem logo na sequência, em que o autor fala sobre o assunto de fator de atualização, que é o número que devemos multiplicar ao valor inicial de determinada situação quando queremos obter um aumento ou um desconto. Dante exemplifica com o intuito de mostrar aos alunos que quando o fator de atualização é maior do que 1, estará ocorrendo um aumento no valor e que quando o valor é menor do que 1, haverá um desconto.

Após comentar de aumentos e descontos, o livro começa a tratar do assunto de atualizações sucessivas, mostrando que para obter o valor final após aumentos e descontos sequenciais é necessário descobrir o fator acumulado, que no caso, será o fator de atualização final obtido após multiplicar todos os fatores de aumento e desconto aplicados na situação. Para melhor entender a situação, três exemplos são citados, frisando qual seria o fator acumulado após determinados aumentos e descontos sucessivos. Logo após, o livro traz alguns exemplos de como os aumentos e descontos sucessivos podem ser vistos em situações problemas.

Depois de falar sobre alguns conceitos básicos, o livro começa a tratar sobre os termos importantes utilizados na Matemática Financeira, tais como período, capital inicial, juros, taxa de juros e montante final. Assim, o conteúdo de juros simples é comentado através de alguns exemplos e em sequência generalizado através de fórmulas, porém Dante não faz nenhuma analogia com progressão aritmética para mostrar como obteve determinadas fórmulas.

Logo na sequência, o autor começa o assunto juros compostos também através de exemplos, utilizando a expressão “juros sobre juros” para diferenciar de juros simples. Em seguida, as fórmulas dos juros compostos é deduzida através de um padrão que é mostrado através de uma tabela, dando exemplos logo após, de como utilizar a fórmula em diferentes situações problema.

Após abordar juros simples e compostos, o livro faz uma analogia entre juros e funções, o que é muito importante, pois assim é possível perceber que o tema juros simples pode ser visto através de uma função afim e os juros compostos por uma função exponencial.

No final do conteúdo de Matemática Financeira, Dante aborda o assunto de equivalência de capitais, mostrando através de exemplos e fluxos de caixa, a equivalência entre os capitais em diferentes períodos, sendo assim possível obter o valor presente ou o valor futuro de determinadas situações, o que é muito interessante e motivacional, pois através desse tema é possível ter uma ideia de como funciona o financiamento na tabela price.

Por fim, vimos que o livro de Luiz Roberto Dante é interessantíssimo na parte de Matemática Financeira, devendo apenas em alguns tópicos, tais como taxas equivalentes, analogia entre os juros e progressões, e uma breve ideia de como funciona o financiamento no sistema Price. No mais, o livro é muito bom, principalmente por exemplificar várias situações problemas, o que facilita o entendimento do aluno.

6.2 Matemática: Ciência e Aplicações - Iezzi, G. *et.al*.

O assunto do livro Iezzi (2006) de Matemática Financeira começa sendo abordado recordando alguns conceitos vistos no Ensino Fundamental, tais como razão, proporção e porcentagem. Exemplificando situações vistas no cotidiano, com exercícios envolvendo acontecimentos que possam aparecer no dia a dia do aluno.

O assunto Juros Simples é iniciado mostrando aos alunos a ideia de algumas aplicações da Matemática Financeira, assim como empréstimos, financiamento, compra e venda. Logo em seguida, o autor define Juros Simples e apresenta a fórmula, mostrando exemplos básicos e disponibilizando exercícios tranquilos para o treinamento.

Os autores utilizam o mesmo raciocínio nos Juros Compostos, fazendo exemplos simples, mostrando o conceito e a fórmula. Os exercícios baseiam-se apenas na aplicação da fórmula do montante, fazendo com que não haja um raciocínio mais amplo do aluno.

No geral, o livro aborda a Matemática Financeira de maneira superficial, evitando aprofundamentos, porém com uma grande quantidade de exercícios, que para resolvê-los exige apenas a aplicação de fórmulas. A falta de situações problemas e gráficos dificulta a melhor compreensão do conteúdo, tais como a abordagem de fluxo de caixa que facilita o entendimento do financiamento.

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho abordamos o ensino de matemática aplicado a problemas financeiros. Fica clara a importância de abordar problemas financeiros no ensino médio, uma vez que o jovem se envolve cada vez mais com as responsabilidades do cotidiano.

Mostramos diversas relações entre conceitos matemáticos e conceitos relacionados a finanças. Como a relação entre Progressão Aritmética e Progressão Geométrica a conceitos de Matemática Financeira como Juros Simples e Juros Compostos respectivamente.

Outras definições matemáticas também se distribuem em conceitos financeiros, sistemas de capitalização como Tabela Price e SAC foram discutidos e exemplificados. Uma análise detalhada de dois importantes livros didáticos foi feita neste trabalho, avaliando a forma em que cada um introduz conceitos de Matemática Financeira.

Este trabalho pode ser utilizado como guia para o docente, que conjuntamente ao livro didático, pode introduzir importantes conceitos de Matemática Financeira relacionando-os a definições matemáticas.

Referências

Dante, L. R. (2011). *Matemática - Contexto & Aplicações, Volume Único.* Ática. 38

Iezzi, G. ; Dolce, O. . D. D. . P. R. e. A. N. d. (2006). *Matemática - Ciência e Aplicações.* Atual. 39

MEC/SEF, .-. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasil. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. 10

MEC/SEF. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental.* Brasil. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. 11

Morgado, A. C. ; Wagner, E. e. Z. S. C. (2000). *Progressões e Matemática Financeira. Rio de Janeiro.* Sociedade Brasileira de Matemática. 11, 45

play.google.com (2016). *Xandroid. (s.d.). Calculadora Financeira.* play.google.com. 36

Puccini, E. C. (2011). *Matemática Financeira e Análise de Investimentos.* Puccini, E. C. 11

Santos, E. A. (2016). *Matemática Financeira - Uma Abordagem Contextual.* UEL, Universidade Estadual de Londrina: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/epaminondas-matfin.pdf. 11

Secretaria de Educação Básica, B. (2015). *Guia de Livros Didáticos PNDL - Ensino Médio.* Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. 11

Apêndice

No Apêndice vamos demonstrar os principais teoremas que foram apresentados no texto.

Teorema 2.3.1

Por definição, temos

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando as equações, temos que

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_1 + r + a_2 + r + \ldots + a_{n-1} + r,$$

simplificando, obtemos a seguinte equação

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

como queríamos demostrar.

Teorema 2.3.2

Seja a sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uma progressão aritmética, então temos que a soma dos n termos é dado por $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Trocando a ordem dos termos temos $S = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1$. Somando as duas equações acima temos que:

$$2 \times S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1)$$

Observe que $(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = \ldots = (a_n + a_1)$. Portanto $2 \times S = (a_1 + a_n).n$, assim:

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 2.4.1

Por definição temos que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \times q \\ a_3 &= a_2 \times q \\ a_4 &= a_3 \times q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \times q \end{aligned}$$

Multiplicando todas as equações, obtemos:

$$a_2 \times a_3 \times a_4 \times \ldots \times a_n = a_1 \times q \times a_2 \times q \times \ldots \times a_{n-1} \times q$$

simplificando:

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 2.4.2

Seja a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma progressão geométrica, então temos que a soma dos n termos é dado por

$$\begin{cases} S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por q obtemos

$$\begin{cases} S.q = a_1.q + a_2.q + \ldots + a_n.q \\ S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{cases}$$

Sendo $a_1.q = a_2, a_2 = q.a_3, \ldots, a_{n-1}.q$ e $a_{n-1}.q = a_n$, segue que

$$\begin{cases} S.q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_{n+1} \\ S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{cases}$$

Subtraindo as equações temos que:

$$S \times q - S = a_{n+1} - a_1 \Rightarrow S(q-1) = a_1(q^{n-1} - 1)$$

Portanto

$$S = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 2.4.3

Temos que

$$S = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

consiste na fórmula da soma de n termos de uma PG. O próximo teorema será enunciado para facilitar o raciocínio.

Teorema .0.1 *Se* $-1 < q < 1$ *então* $\lim_{n \Rightarrow \infty} q^n = 0$.

A demonstração do Teorema (.0.1) encontra-se em Morgado (2000) .

Pelo Teorema (.0.1) q^n pode ficar tão pequeno quanto se queira, tomando n suficientemente grande, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Então

$$S = a_1 \times \frac{-1}{q - 1}$$

Que é equivalente a

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 2.6.1

Para calcular o montante C_1 relativo ao primeiro período, ou seja, $C_0 + J_1$, devemos aplicar a taxa i de juros simples durante 1 período ao capital C_0, para obter:

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0 + J_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0(1+i) = C_0(1+i)^1 \\
C_2 &= C_1 + J_2 = C_1 + C_1 \times i = C_1(1+i) = C_0(1+i)(1_i) = C_0(1+i)^2 \\
C_3 &= C_2 + J_3 = C_2 + C_2 \times i = C_2(1+i) = C_0(1+i)^2(1_i) = C_0(1+i)^3
\end{aligned}$$

e assim por diante. Podemos concluir que, ao fim de n períodos, o montante C_n será dado pela fórmula:

$$C_n = C_0(1+i)^n.$$

Isolando C_0 na equação anterior, obtemos uma fórmula que fornece o capital inicial, em função do montante C_n, da taxa i e do tempo n.

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Observe que o montante final dos juros compostos cresce em progressão geométrica, pois o montante é sempre o mês anterior multiplicado por $1 + i$. Com isso, temos que o primeiro termo da PG é o capital inicial, a razão será $1 + i$, e o n-ésimo termo será o montante final após $n - 1$ períodos.